Прикладные задачи анализа данных

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ
SPECTRAL GRAPH THEORY

Дьяконов А.Г.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Спектральная теория графов

Spectral Graph Theory

изучает свойства графов с помощью анализа

1) собственных значений,
2) собственных векторов,
3) характеристических полиномов

матриц, которые связаны с графами:

1) матрица сопряжённости,
2) матрица Лапласа,
3) беззнаковая матрица Лапласа.

Спектр матрицы – мультимножество собственных значений

Спектр конечного графа – спектр её матрицы смежности,

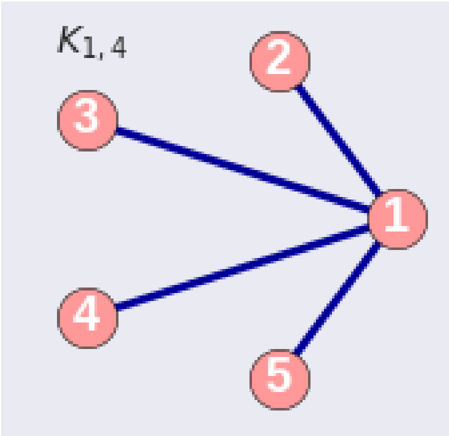
Спектр Лапласа – спектр матрицы Лапласа графа [дальше].

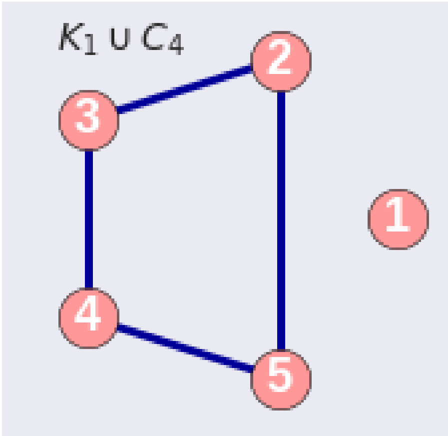
Изоспектральность

+) Спектры не зависят от нумерации вершин

Графы с одинаковыми спектрами – изоспектральные (коспектральные)

Изоспектральные графы не всегда изоморфны: $K_{1,4}$ **и** $C_4 \cup K_1$

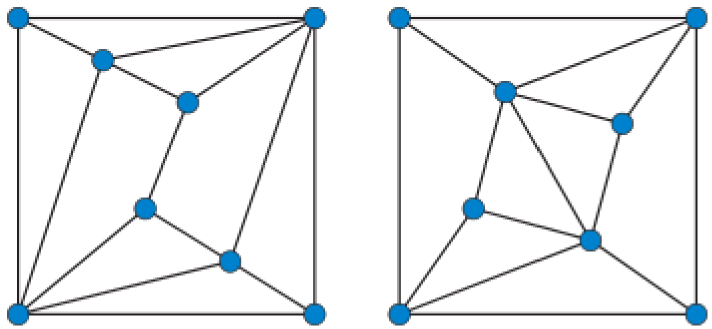




[Skiena, S. Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica. Reading, MA: Addison-Wesley, p. 85, 1990.]

Изоспектральность

Ещё пример изоспектральных (из полиэдральных графов)



Теорема. **Почти все деревья изоспектральны.**

ДЗ так ли это?

Есть перечень известных изоспектральных графов, см.
http://mathworld.wolfram.com/CospectralGraphs.html

Есть специальные методы (метода Сунада) для построения изоспектральных графов

Спектр

Матрица сопряжённости неориентированного графа симметричная

$\Rightarrow$

собственные значения вещественные,

существует базис из ортонормированных собственных векторов

Зачем нужен «алгебраический» подход к анализу графов

Инвариант Колен де Вердьера $\mu(G)$ **— наибольший коранг $(n-\mathrm{rank}(M))$ среди всех матриц $M \in \mathbf{R}^{n\times n}$:**

1) $M_{ij} = \begin{cases} <0, & (i,j)\in E, \\ 0 & (i,j)\notin E. \end{cases}$

2) только одно отрицательное собственное значение (кратности 1),

3) выполняется строгая гипотеза Арнольда

Строгая гипотеза Арнольда:

не существует симметричной матрицы $\mathrm{O}^{n\times n} \ne X \in R^{n\times n}$**:** $MX = 0$**,**

$$X_{ij} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} i = j, \\ M_{ij} \ne 0. \end{array}\right.$$

в монографиях – чуть по-другому

Критерии, связанные с инвариантом.

$\mu \leq 1$ тогда и только тогда, когда линейный лес

объединение путей

$\mu \leq 2$ тогда и только тогда, когда внешнепланарный граф

при добавлении вершины и рёбер, которые соединяют текущие вершины с добавленной получаем планарный граф

$\mu \leq 3$ тогда и только тогда, когда планарный граф

$\mu \leq 4$ тогда и только тогда, когда G бессвязно встраиваемый

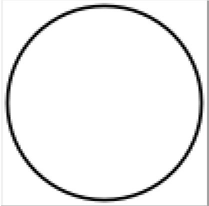
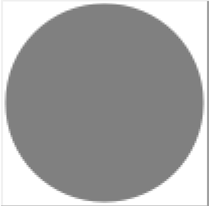
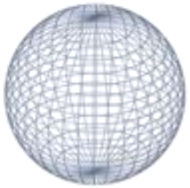
(*linklessly embeddable graph*) ДЗ

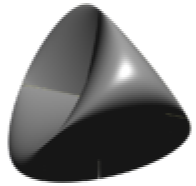
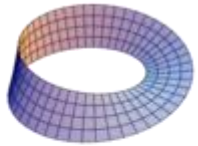
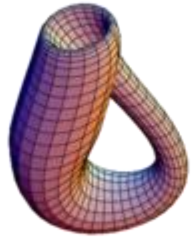
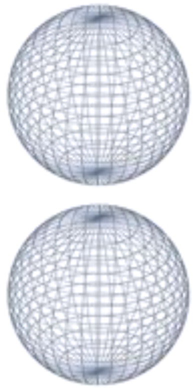
вложим в бутылку Клейна $\Rightarrow \mu \leq 5$

вложим в тор $\Rightarrow \mu \leq 6$

вложим в пов-ть с характеристикой Эйлера $k < 0 \Rightarrow \mu \leq 4-2k$

off topic – характеристика Эйлера

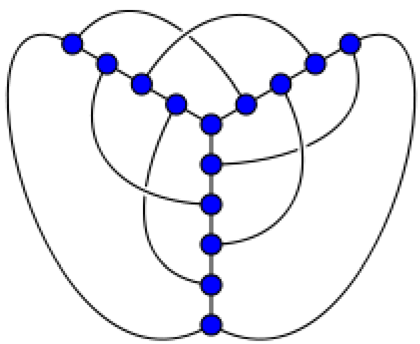
Название	Вид	Эйлерова характеристика
Окружность		0
Круг		1
сфера		2
Тор		0
Двойной тор		−2

Тройной тор		−4
Проективная поверхность		1
Лист Мёбиуса		0
Бутылка Клейна		0
Две сферы		4

Свойства

Любой граф может быть раскрашен в $\mu(G)+1$ цвет

Минимальное число пересечений при изображении графа на плоскости $\geq \mu(G)-3$.



Свойства

Если дополнение графа является линейным лесом, то $\mu(G) \geq |G| - 3$

Если дополнение графа является внешнепланарным графом, то
$\mu(G) \geq |G| - 4$

Если дополнение графа G **является планарным графом, то**
$\mu(G) \geq |G| - 5$

Монотонность

Если H **получен из** G **с помощью следующих операций (минорирование ~ сведение к минорам):**

1) удалением изолированных вершин,

2) удалением рёбер,

3) сжатием (схлопыванием) рёбер ,

тогда $\mu(H) \leq \mu(G)$

Для справки

Теорема Робертсона-Сеймура-Томаса

Любое наследуемое свойство графов характеризуется конечным числом запрещенных подграфов.

Наследуемые свойства

- **планарность** (K_5, $K_{3,3}$)
- **внешнепланарность** (K_4, $K_{2,3}$)
- **вложение в поверхность**

Проблема: **вычисление инварианта**

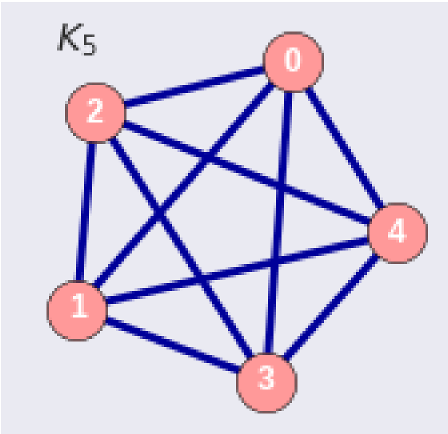
Для справки

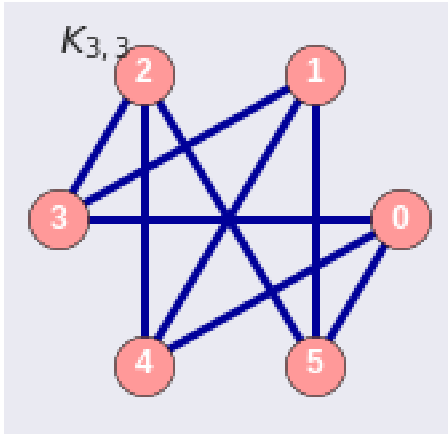
Теорема Вагнера

Конечный граф является планарным тогда и только тогда, когда его миноры не включают ни K_5, ни $K_{3,3}$

Теорема Понтрягина — Куратовского

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит в качестве подграфа подразделение K_5 или $K_{3,3}$





Итак, начнём...

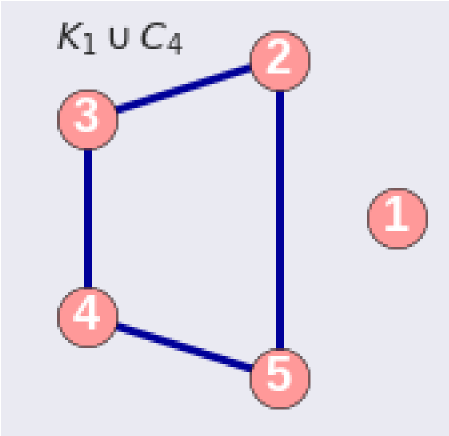
Граф $G = (V, E)$

Чащё – неориентированные простые (без кратных рёбер и петель) конечные графы (иногда – взвешенные)

Матрицы

сопряжённости	$A\in\{0,1\}^{n\times n}$: $A_{ij}=1 \Leftrightarrow (i,j)\in E$
диагональная матрица степеней	$D_{ij}=\begin{cases}\deg(i), & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$
распределений (diffusion)	$W=D^{-1}A$
Лапласа (Кирхгофа)	$L=D-A$, $L=NN^{\mathrm{T}}$
беззнаковая Лапласа	$Q=D+A$, $Q=MM^{\mathrm{T}}$
инциденций	$M_{ij}=1 \Leftrightarrow i\in e_j$
инциденций орграфа	$N_{ij}=\begin{cases}+1, & e_j=(i,*),\\ -1, & e_j=(*,i),\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$

Матрица Лапласа



	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	0	2	-1	0	-1
3	0	-1	2	-1	0
4	0	0	-1	2	-1
5	0	-1	0	-1	2

Вырождена

Суммы строк / столбцов нулевые

Все алгебраические дополнения симметричной матрицы равны ДЗ

Имеет физический смысл ДЗ - красиво объяснить

дальше – свойства, связанные со связностью

Как обобщается на весовой граф?

Напомним...

Собственный вектор (матрицы M) – $x \neq \tilde{0}$:
$\exists \lambda : Mx = \lambda x$.

У симметричных матриц (такие будут у нас)

- **из с.в. можно составить ортонормированный базис (запишем по столбцам в Ψ)**
- **вещественные с.з. (запишем на диагональ Λ)**

$$\Psi^{\mathrm{T}} M \Psi = \Lambda$$

$$M = \Psi \Lambda \Psi^{\mathrm{T}} = \sum_i \lambda_i \psi_i \psi_i^{\mathrm{T}}$$

Отношение Релея – $\dfrac{x^{\mathrm{T}}Mx}{x^{\mathrm{T}}x}$.

Для собственного вектора – $\dfrac{x^{\mathrm{T}}Mx}{x^{\mathrm{T}}x} = \lambda$.

Теорема. Пусть M – симметричная матрица, тогда максимум отношения Релея равен максимальному собственному значению.

Простое доказательство

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2Mx(x^{\mathrm{T}}x) - 2x(x^{\mathrm{T}}Mx)}{(x^{\mathrm{T}}x)^2} = 0, \quad Mx = \frac{x^{\mathrm{T}}Mx}{(x^{\mathrm{T}}x)}x$$

Другое доказательство:

взять базис из ортогональных собственных векторов M, расписать вектор x, подставить.

Отношение Релея

Кстати, почему максимальное значение всегда существует…

$$\frac{x^{\mathrm{T}}Mx}{x^{\mathrm{T}}x}$$

можно рассматривать только векторы: $\|x\|=1$

(компактное множество)

на этом множестве функция $x^{\mathrm{T}}Mx$ **непрерывна**

$$\frac{x^{\mathrm{T}}Mx}{x^{\mathrm{T}}x}\le\lambda_{\max}$$

$$\frac{v^{\mathrm{T}}Mv}{v^{\mathrm{T}}v}=\lambda_{\max}$$

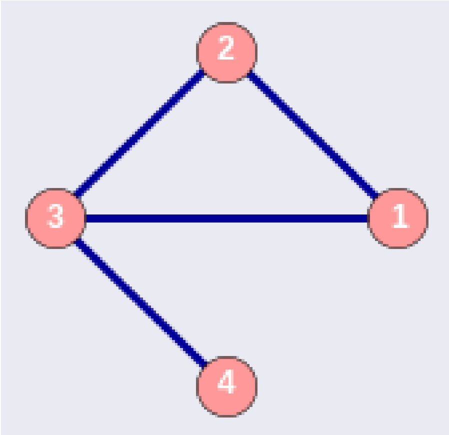
$$Mv=\lambda_{\max}v$$

Что есть в матрицах…

A_{ij} **– число путей из вершины** i **в вершину** j

$$\mathrm{tr}(A^2) = 2|E|$$

$\mathrm{tr}(A^3) = 6k$, k **– число треугольников в графе**



A

	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	0
3	1	1	0	1
4	0	0	1	0

A^2

	1	2	3	4
1	2	1	1	1
2	1	2	1	1
3	1	1	3	0
4	1	1	0	1

A^3

	1	2	3	4
1	2	3	4	1
2	3	2	4	1
3	4	4	2	3
4	1	1	3	0

Что есть в матрицах...

Теорема Если граф связный (неориентированный) с диаметром d, то существует как минимум $d+1$ различное с.з. матрицы A (аналогично L, Q).

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – все различные с.з., тогда

$(A-\lambda_1 I)\cdot\ldots\cdot(A-\lambda_k I)=0$, почему?

поэтому $A^k \in \Lambda(I, A, \ldots, A^{k-1})$.

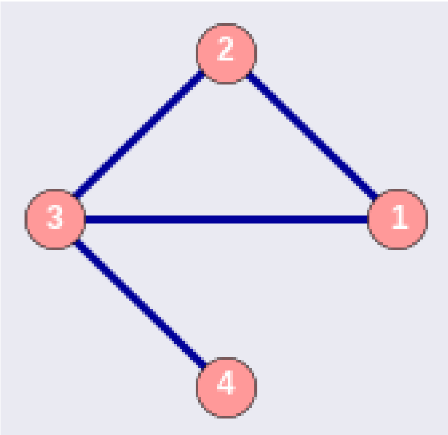
Но если диаметр достижим для пары вершин (i, j), то

$$A_{ij}^t = \begin{cases} 0, & t<d, \\ >0, & t=d. \end{cases}$$

Поэтому $k>d$.

Квадратичная форма Лапласа –

$$x^{\mathrm{T}}Lx = \sum_{(i,j)} (x_i - x_j)^2, \; L = D - A, \; \mathbf{R}^{|V|} \to \mathbf{R}.$$



$$[x_1, x_2, x_3, x_4]\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} x_1(2x_1 - x_2 - x_3) + \\ x_2(2x_2 - x_1 - x_3) + \\ x_3(3x_3 - x_1 - x_2 - x_4) + \\ x_4(x_4 - x_3) \end{array} = \begin{array}{c} x_1(x_1 - x_2) + x_1(x_1 - x_3) + \\ x_2(x_2 - x_1) + x_2(x_2 - x_3) + \\ x_3(x_3 - x_1) + x_3(x_3 - x_2) + x_3(x_3 - x_4) + \\ x_4(x_4 - x_3) \end{array}$$

Теорема. Минимальное с.з. матрицы Лапласа = 0

т.е. все ≥ 0 – это важно!

Доказательство:

1 способ) т.к. все с.з. неотрицательны, а матрица вырождена.

2 способ) КФЛ неотрицательна, обращается в ноль.

Вспоминаем отношение Релея (по теореме Куранта-Фишера).

Кстати, для беззнаковой матрицы Лапласа

$$x^{\mathrm{T}}Qx = \sum_{(i,j)} (x_i + x_j)^2$$

Теорема (Куранта-Фишера) / о минимаксе (min-max theorem)

Пусть A – симметричная матрица с с.з. $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$, тогда

$$\lambda_k = \max_{\substack{S \subseteq \mathbf{R}^n \\ \dim(S)=k}} \min_{x \in S} \frac{x^{\mathrm{T}} A x}{x^{\mathrm{T}} x} = \min_{\substack{T \subseteq \mathbf{R}^n \\ \dim(T)=n-k+1}} \max_{x \in T} \frac{x^{\mathrm{T}} A x}{x^{\mathrm{T}} x}.$$

Следствие. Если A – симметричная матрица с с.з. $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n$, матрица B получена из неё удалением i-й строки и i-го столбца, её с.з. $\beta_1 \geq \ldots \geq \beta_n$, тогда

$$\alpha_1 \geq \beta_1 \geq \ldots \geq \alpha_n \geq \beta_n.$$

тут ошибочка;)

Собственные значения матрицы Лапласа

Пусть $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ – с.з. матрицы Лапласа

Теорема. $\lambda_2 = 0 \Leftrightarrow$ граф несвязный

Доказательство.

Если несвязный – в явном виде строятся два ортогональных собственных вектора.

Если связный, то берём вектор ортогональный к константному, в нём есть два различных элемента x_i, x_j, учитывая, что вершины i, j соединяет путь, выражение

$$x^{\mathrm{T}} L x = \sum_{(i,j)} (x_i - x_j)^2$$

будет положительно. Поэтому это не может быть с.в. с нулевым с.з.

Алгебраическая связность графа (Важно!)

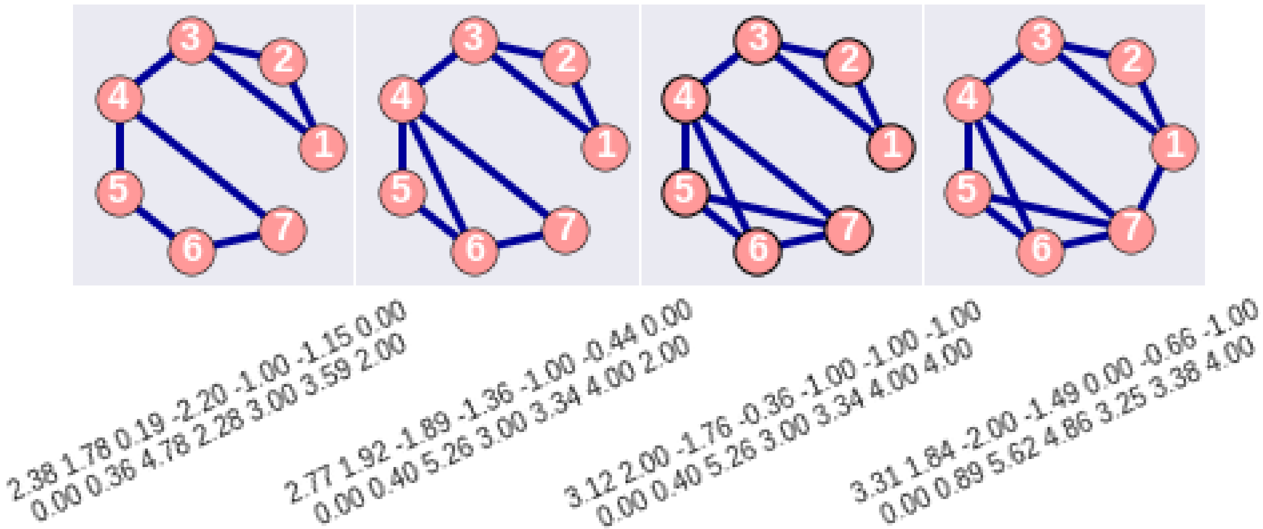
λ_2 – **АСГ / индексом связности** [Fiedler]

соответствующий с.в. – вектор Фидлера

Монотонно не убывает при добавлении рёбер, так как

$$\min_{x^{\mathrm{T}}\tilde{1}=0} \frac{x^{\mathrm{T}}Lx}{x^{\mathrm{T}}x} = \lambda_2$$

Помним: max – max с.з., min – min с.з.=0



Кстати,

$$\min \frac{x^{\mathrm{T}} L x}{x^{\mathrm{T}} x} = \lambda_1$$

$$\min_{x:\, x^{\mathrm{T}} \tilde{1} = 0} \frac{x^{\mathrm{T}} L x}{x^{\mathrm{T}} x} = \lambda_2$$

$$\min_{x:\, x^{\mathrm{T}} \tilde{1} = 0,\, x^{\mathrm{T}} \psi_2 = 0} \frac{x^{\mathrm{T}} L x}{x^{\mathrm{T}} x} = \lambda_3$$

и т.д.

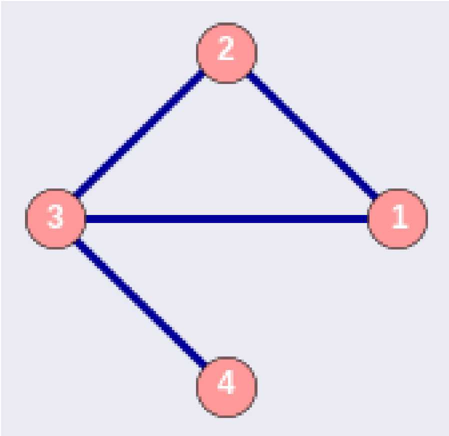
Что получится если min заменить на argmin?

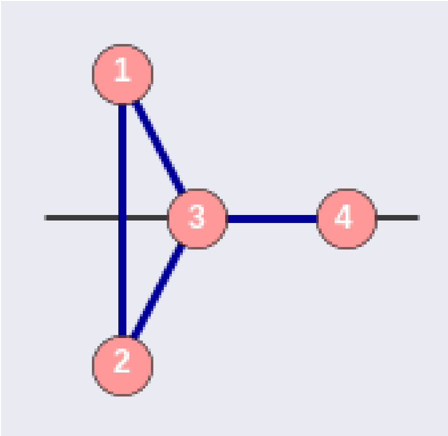
Проблема вложения графа [Hall, 70]

Вложить граф в прямую:

$$x^{\mathrm{T}} L x = \sum_{(i,j)} (x_i - x_j)^2 \to \min_x,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ **– координаты наших вершин.**





Избежать очевидного константного решения:

$$\tilde{1}^{\mathrm{T}} x = 0,$$

учесть масштаб:

$$\| x \| = 1.$$

Проблема вложения графа [Hall, 70]

$$x^{\mathrm{T}} L x = \sum_{(i,j)} (x_i - x_j)^2 \to \min_x$$

$$\tilde{1}^{\mathrm{T}} x = 0$$

$$\| x \| = 1$$

Решение – собственный вектор, соответствующий второму по величине с.з. матрицы Лапласа.

Проблема вложения графа [Hall, 70]

Теперь вкладываем в плоскость:

$$\sum_{(i,j)\in E} \|(x_i, y_i) - (x_j, y_j)\|^2 = \sum_{(i,j)\in E} (x_i - x_j)^2 + \sum_{(i,j)\in E} (y_i - y_j)^2 \to \min$$

при условии

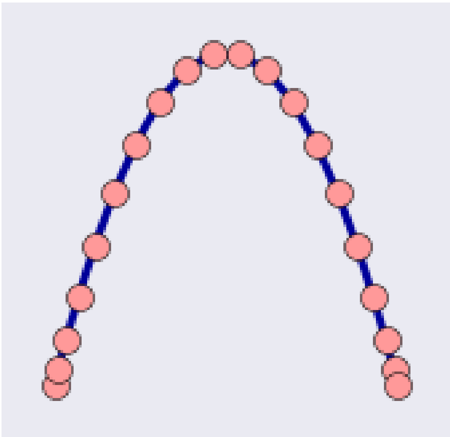
$$\sum_{i\in V} (x_i, y_i) = (0,0).$$

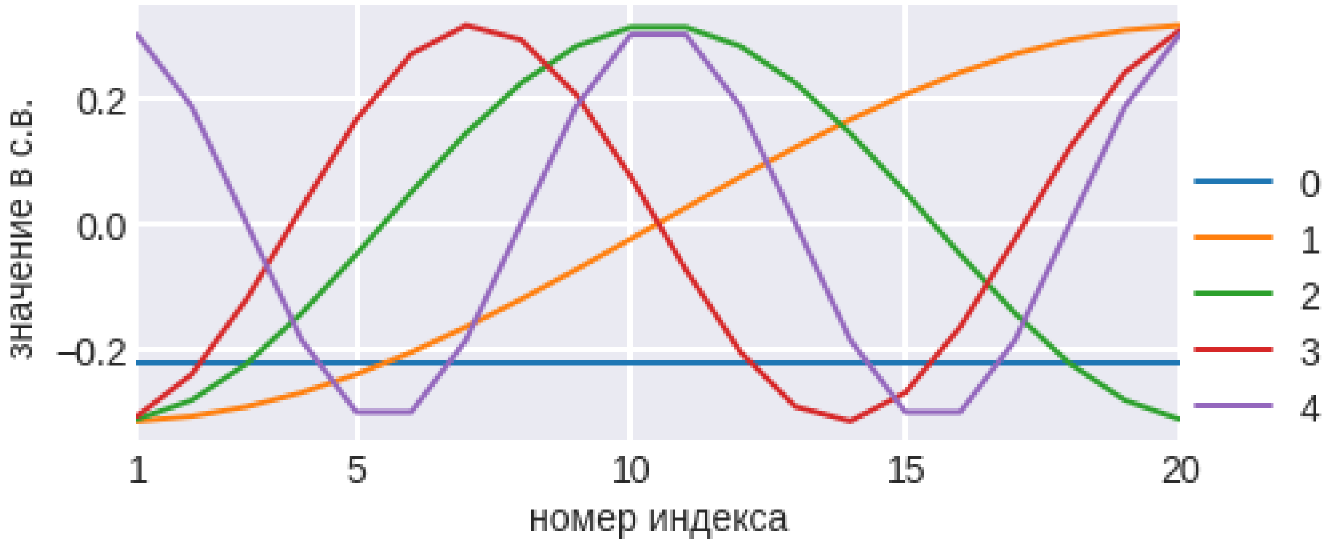
Если добавить условие ортогональности x и y,
то получим, что решение – с.в.,
соответствующие второму и третьему с.з. матрицы Лапласа.

Вот почему визуализация графа по с.в.!

Сейчас будут картинки… откуда берутся синусоиды?

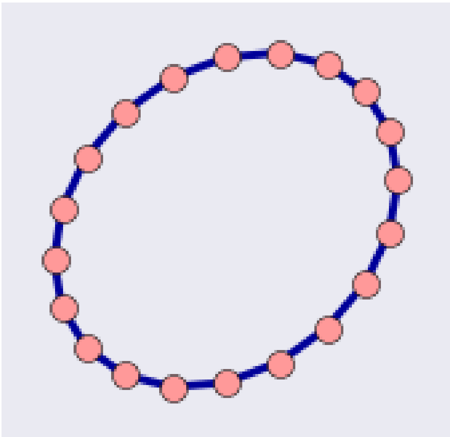
Вложение линейного графа

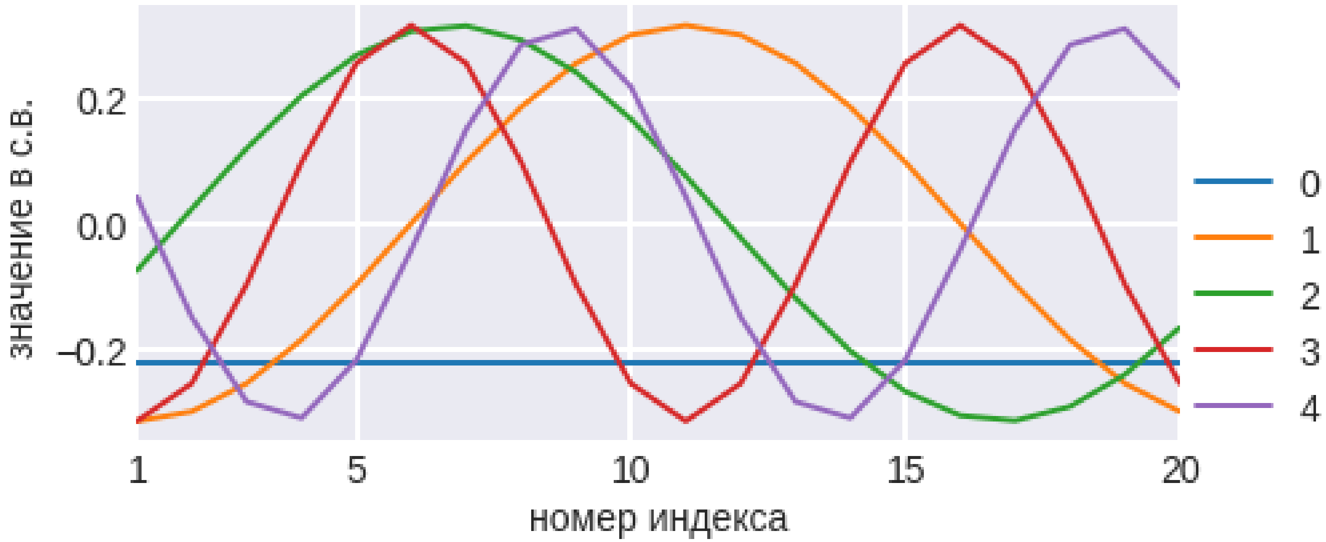




первые 5 собственных векторов

Вложение кольца



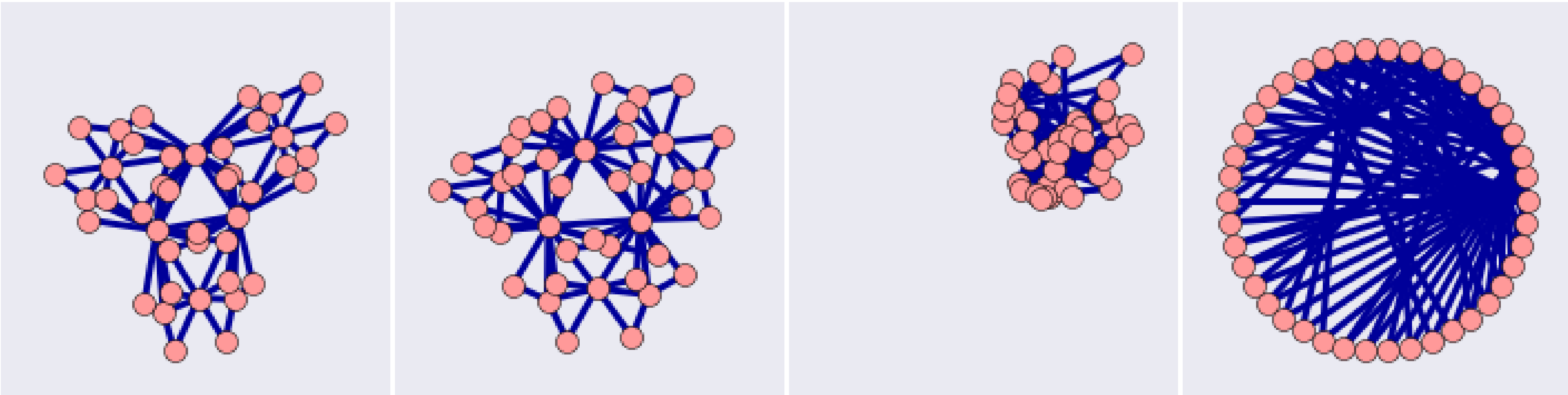


ДЗ почему рисунок стал некрасивым?

Минутка кода

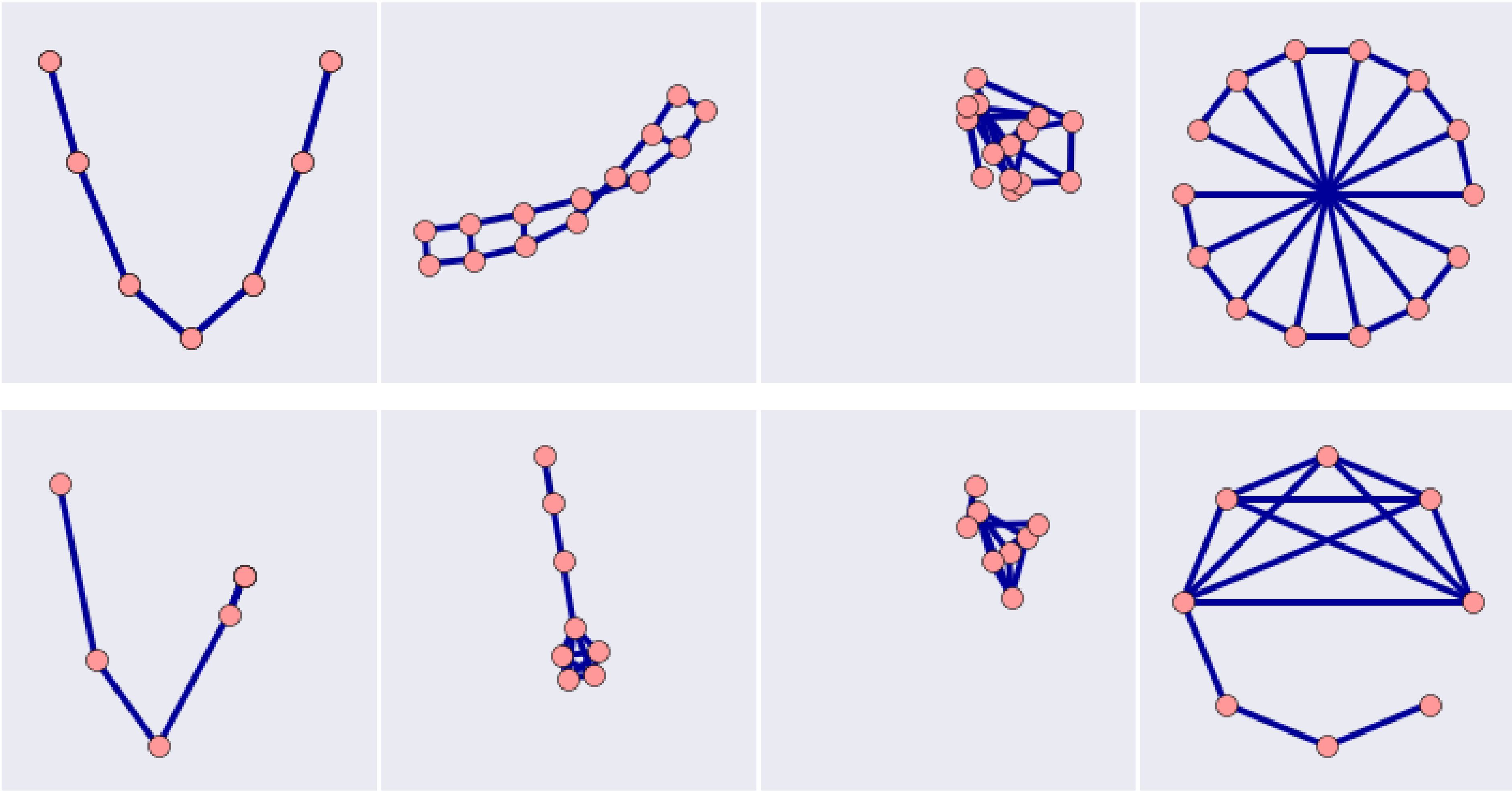
```
import networkx as nx
g = nx.dorogovtsev_goltsev_mendes_graph(4)

pos = nx.spectral_layout(g)
nx.draw_networkx_nodes(g, pos)
nx.draw_networkx_edges(g, pos)
```

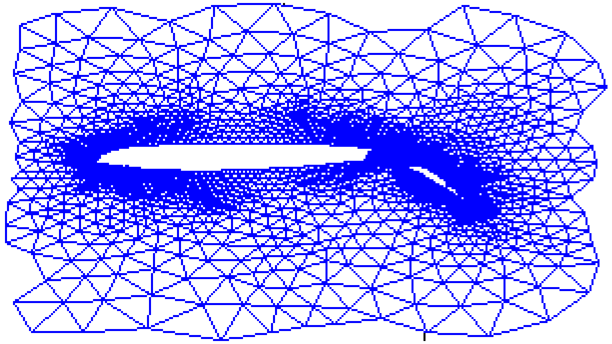


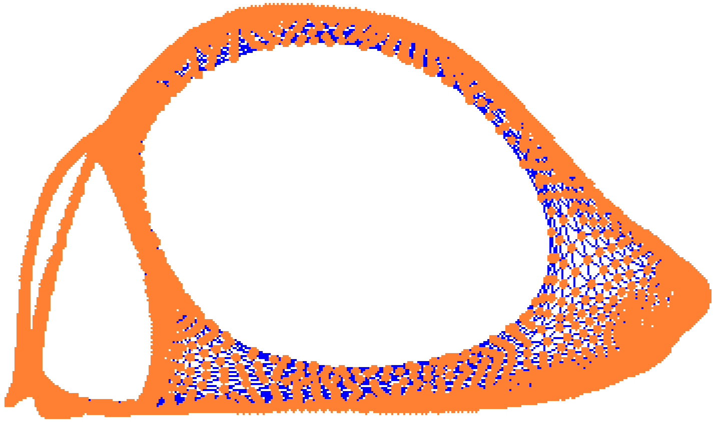
```
pos = nx.spectral_layout(g)
pos = nx.spring_layout(g, random_state=1)
pos = nx.random_layout(g, random_state=2)
pos = nx.circular_layout(g)
```

Вложения разных графов



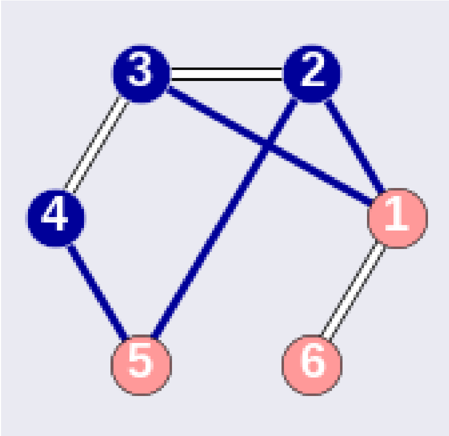
Иногда размерности не хватает для вложения





[Hal70] K. M. Hall. An r-dimensional quadratic placement algorithm. Management Science, 17:219-229, 1970.

Разбиение графа



Рёберная граница –

$$\partial S = \{(i, j) \in E \mid i \in S, j \notin S\}$$

Число Чигера (изопериметрическое число) – $h(G) = \min\limits_{0<|S|\le n/2} \dfrac{|\partial S|}{|S|}$

Оценивает, есть ли в графе «узкое горло»

Приложения:

построение компьютерных сетей

тасование карт

ДЗ Рассказать об этом

Разбиение графа

Теорема. $h(G) \geq \dfrac{\lambda_2(1-s)}{2}$, **где** $s = |S| / |V|$

Если λ_2 **– большое с.з., то граф «сильно связан»**

Неравенство Чигера [Wiki, без доказательства]

В k**-регулярном графе** $\dfrac{k-\lambda_2}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2k(k-\lambda_2)}$

Часто называют одним из основных результатов в СТК

Теорема. $h(G) \geq \dfrac{\lambda_2(1-s)}{2}$, где $s = |S|/|V|$

Доказательство. Известно, что

$$\min_{x^{\mathrm{T}}\tilde{1}=0} \frac{x^{\mathrm{T}}Lx}{x^{\mathrm{T}}x} = \lambda_2.$$

Поэтому для любого вектора x ортогонального к $\tilde{1}$ выполняется

$$x^{\mathrm{T}}Lx \geq \lambda_2 x^{\mathrm{T}}x.$$

Если $x = x_S - s\tilde{1}$, где x_S – характеристический вектор множества S (поправка x_S до ортогональности к $\tilde{1}$), то

$$x^{\mathrm{T}}Lx = \sum_{(i,j)\in E} (x_i - x_j) = |\delta S|$$

и $x^{\mathrm{T}}\tilde{1} = 0$. Из

$$x^{\mathrm{T}}x = |S|(1-s)^2 + (|V| - |S|)s^2 = |S|(1-s)$$

следует утверждение теоремы.

Применение в комбинаторике

Теорема. $h(G) \geq \dfrac{\lambda_2(1-s)}{2}$, где $s = |S|/|V|$.

Следствие (можно показать, зная спектр гиперкуба), что для любого подмножества вершин $S : |S| \leq 2^{n-1}$ справедливо $|\partial S| \geq |S|$

(это простое некомбинаторное доказательство)

Матричная теорема о деревьях

Теорема [без доказательства]

В неориентированном мультиграфе число остовных деревьев равно

$$\det(L + J / n^2) = \mu_2 \cdot \ldots \cdot \mu_n / n$$

(с.з. Лапласа $0 = \mu_1 \leq \ldots \leq \mu_n$)

Следствие

Число остовных деревьев полного графа

(формула Кэли)

$$\mathrm{od}(K_n) = n^{n-2}$$

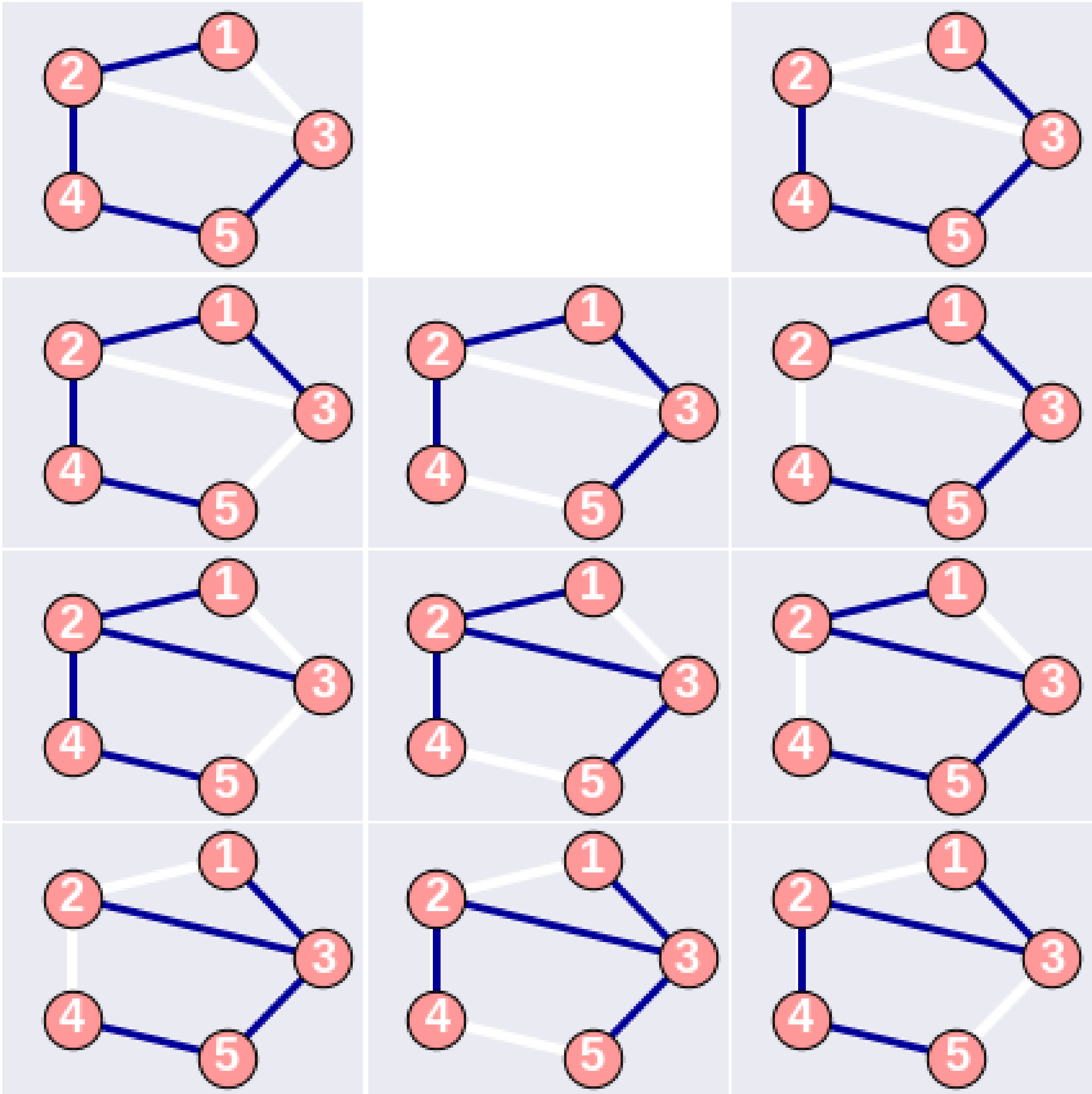
Число остовных деревьев полного двудольного графа

$$\mathrm{od}(K_{m,n}) = m^{n-1} n^{m-1}$$

ДЗ доказать

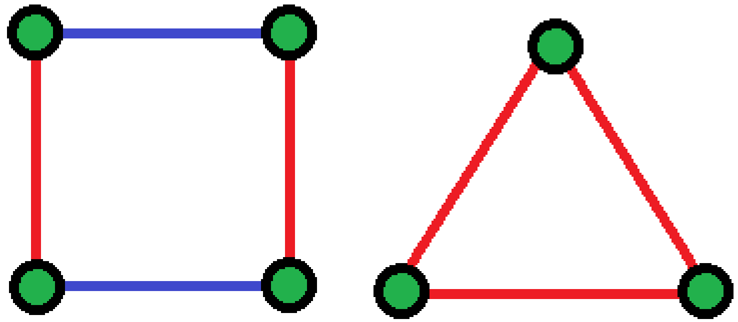
На семинаре разберёмся

Матричная теорема о деревьях



Теорема [без доказательства]

$|V| = n = 2k$, **с.з. Лапласа** $0 = \mu_1 \le \ldots \le \mu_n$, **если** $\mu_n \le 2\mu_2$,
то в графе есть совершенное соответствие
(подмножество рёбер такое, что любая вершина инцидентна только одному ребру множества).



Теорема [без доказательства]

Кратность нуля как с.з. (неориентированного графа) равна числу компонент связности.

Как быть с двудольностью

Спектр Лапласа не распознаёт двудольность

ДЗ Показать

Теорема [без доказательства]

Кратность нуля как с.з. (неориентированного графа) беззнакового Лапласа равна числу компонент двудольности.

Теорема [без доказательства]

Граф двудольный тогда и только тогда, когда спектр Лапласа равен "беззнаковому" спектру Лапласа.

ДЗ Показать на примерах, что так

Матрица смежности

Пошли другие обозначения

A **~ с.з.** $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ **(могут быть <0!!!)**

$L = kI - A$ **~ с.з.** $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_n$

Теорема $d_{\text{avr}} \leq \lambda_1 \leq d_{\max}$

Доказательство

$$\lambda_1 = \max_x \frac{x^{\mathrm{T}} A x}{x^{\mathrm{T}} x} \geq \frac{\tilde{1}^{\mathrm{T}} A \tilde{1}}{\tilde{1}^{\mathrm{T}} \tilde{1}} = \frac{\sum A_{ij}}{n} = \frac{\sum \deg(i)}{n}$$

Пусть v **– собственный вектор, соответствующий** λ_1 **с** i**-м максимальным элементом (можно считать ненулевым), тогда**

$$\lambda_1 = \frac{(Av)_i}{v_i} = \frac{\sum\limits_{j:(i,j)\in E} v_j}{v_i} \leq \sum_{j:(i,j)\in E} \frac{v_j}{v_i} \leq \sum_{j:(i,j)\in E} 1 = \deg(i) \leq d_{\max}.$$

Теорема $d_{\mathrm{avr}} \le \lambda_1 \le d_{\max}$

Замечание **Если удалить вершину с наименьшей степенью, то средняя степень d_{avr} неубывает, а λ_1 невозрастает, т.е. не смотря на оценку они ведут себя по-разному!**

$$\lambda_1 = \max_x \frac{x^{\mathrm{T}} A x}{x^{\mathrm{T}} x} \ge \max_y \frac{\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} A \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Замечание **Из этой схемы доказательства понятно, что**

$$\lambda_{\min}(A) \le \lambda_{\min}(A') \le \lambda_{\max}(A') \le \lambda_{\max}(A),$$

где A' – подматрица A, образованная строками и столбцами из

$$\{i_1, \ldots, i_k\}$$

Следствие. Граф раскрашиваем в $d_{\max}+1$ цвет (очевидно). Граф раскрашиваем в $\lfloor \lambda_1 \rfloor + 1$ цвет. **По индукции.**

Оценка точна! **ДЗ Почему?**

Замечание [без доказательства]. Хроматическое число

$$\geq \frac{\lambda_n}{\lambda_n - d_{\text{avr}}}$$

$$\geq 1 + \frac{\lambda_1}{-\lambda_n}$$

[через оценку сумм с.з. для блоковых матриц]

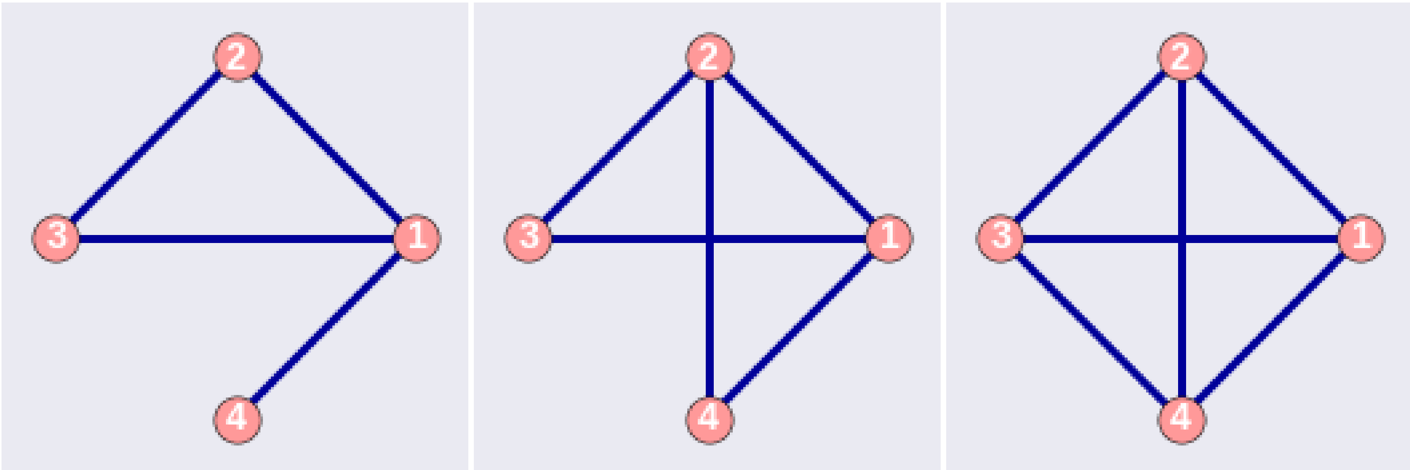
Напоминалка

Граф 2-раскрашиваем $\Leftrightarrow$ двудольный

Граф 3-раскрашиваем – NP-полная задача

Граф планарный $\Rightarrow$ 4-раскрашиваем

Лемма. Если в конечном графе $\lambda_1 = d_{\max}$, то он $d_{\max}$-регулярный.



2.17 -1.48 0.31 -1.00
4.00 0.00 3.00 1.00

2.56 -1.00 -1.56 0.00
4.00 -0.00 4.00 2.00

-1.00 3.00 -1.00 -1.00
4.00 -0.00 4.00 4.00

Лемма. Если в конечном графе $\lambda_1 = d_{\max}$, то он $d_{\max}$-регулярный.

Доказательство. У нас при доказательстве было неравенство

$$\lambda_1 = \frac{(Av)_i}{v_i} = \frac{\sum\limits_{j:(i,j)\in E} v_j}{v_i} \le \sum_{j:(i,j)\in E} \frac{v_j}{v_i} \le \sum_{j:(i,j)\in E} 1 = \deg(i) \le d_{\max}$$

Теперь – это равенство:

$$\frac{v_j}{v_i} = 1, (i,j) \in E,$$

не только у i-й вершины максимальная степень, но и у всех соседей.
Из связности графа $\Rightarrow$ у всех вершин в графе максимальная степень.

Для DM. Спектр пополнять другими характеристиками графа.

Теорема (Фробениуса-Перрона) [без доказательства]

Пусть граф связный и взвешенный, тогда

1) $\lambda_1 \geq -\lambda_n$ [они все вещественные, пока не больше]

2) $\lambda_1 > \lambda_2$

3) для λ_1 есть положительный собственный вектор

[Можно добавить доказательство + вспомогательная лемма]

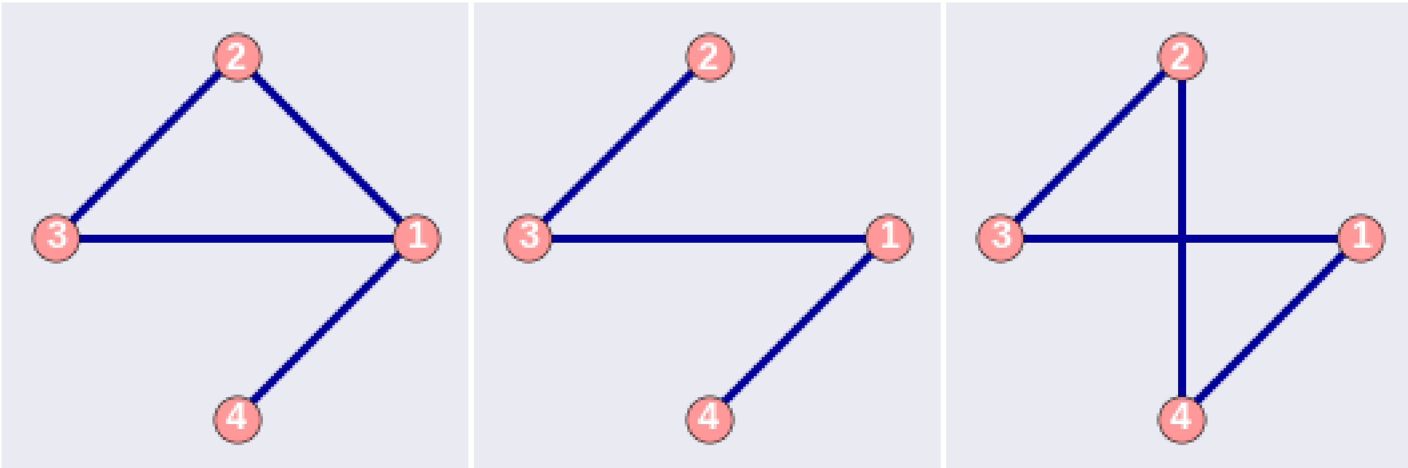
Теорема (Ф-П для Лапласианов) [без доказательства]

Пусть матрица M имеет неположительные недиагональные элементы, граф ненулевых недиагональных элементов связен. Пусть λ_1 – наименьшее с.з. с с.в. v^1. Тогда можно выбрать v^1 положительным и λ_1 имеет кратность 1.

Теорема

Граф двудольный тогда и только тогда, когда для любого с.з. λ величина $(-\lambda)$ тоже является с.з.

Связный граф с наибольшим с.з. λ двудольный тогда и только тогда, когда $(-\lambda)$ тоже является с.з.



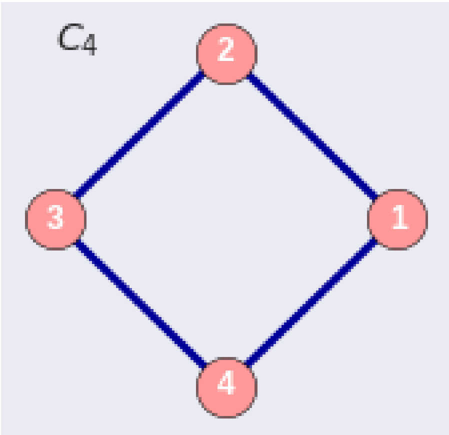
2.17 -1.48 0.31 -1.00
4.00 0.00 3.00 1.00

-1.62 1.62 -0.62 0.62
3.41 2.00 -0.00 0.59

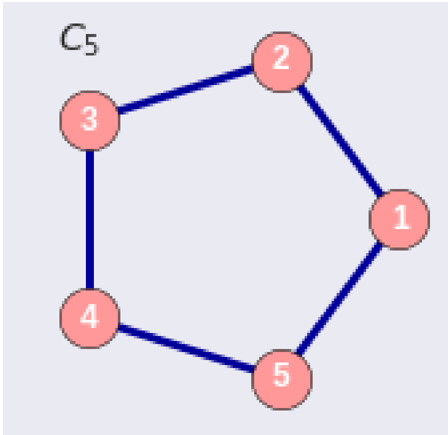
-2.00 2.00 -0.00 -0.00
4.00 2.00 -0.00 2.00

Сильно регулярный граф – простой, ориентированный, без петель, существуют параметры (n, k, k_1, k_2) такие, что

$$|V| = n,$$
$$\forall i \deg(i) = k,$$
$$\forall (i, j) \in E \deg(i, j) = k_1,$$
$$\forall (i, j) \notin E \deg(i, j) = k_2.$$



(4, 2, 0, 2)



(5, 2, 0, 1)

$\deg(i, j) = k$ – вершины i, j имеют k общих соседей.

Теорема Для простого нетривиального (не полного и не пустого) графа порядка n следующие утверждения эквивалентны:

1) граф (n,k,k_1,k_2)-сильно регулярный

2) $A^2=(k_1-k_2)A+(k-k_2)I+k_2J$ для некоторых вещественных k,k_1,k_2

3) есть два с.з. с с.в. ортогональными к $\tilde{1}$

Доказательство Первые два утв. очевидно эквивалентны. Пусть верно второе и v – с.в. с с.з. λ, тогда

$$A^2v=(k_1-k_2)Av+(k-k_2)Iv+k_2Jv$$

$$\lambda^2v=(k_1-k_2)\lambda v+(k-k_2)v+k_2(\sum v_i)v$$

Для вектора ортогонального к $\tilde{1}$ – $\lambda^2=(k_1-k_2)\lambda+(k-k_2)$

Здесь два разных решения.

Если верно третье утв. и соответствующие с.з. λ,λ', то **ДЗ почему?**

$$(A-\lambda I)(A-\lambda' I)=sJ$$

для некоторого s, поэтому $A^2\in\Lambda(A,I,J)$.

Теорема

Граф с одним с.з. – без рёбер

Связный граф с двумя с.з. – полный

Связный регулярный граф с 3 с.з. – строго регулярный

Связный регулярный граф с 4 с.з. – «walk-regular»

(для любого $k \geq 2$ число путей через вершину длины k не зависит от вершины)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТГ

$L \succ 0$, **если** L **– неотрицательно(!) определённая матрица**

$G \succ H$, **если** $L_G \succ L_H$, **если** $L_G - L_H \succ 0$

Лемма. Если $G \succ cH$, **то** $\mu_k(G) \geq c\mu_k(H)$ **для всех** k **(здесь умножение на** c **– умножение весов графа).**

Доказательство очевидно из

$$\lambda_k(G) = \max_{\substack{S \subseteq \mathbf{R}^n \\ \dim(S)=k}} \min_{x \in S} \frac{x^{\mathrm{T}} L_G x}{x^{\mathrm{T}} x} \geq c \max_{\substack{S \subseteq \mathbf{R}^n \\ \dim(S)=k}} \min_{x \in S} \frac{x^{\mathrm{T}} L_H x}{x^{\mathrm{T}} x} \geq c\lambda_k(H).$$

Аналогична монотонность при добавлении рёбер и увеличении отдельных весов.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТГ

Теорема об аппроксимации

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $d > 0$, что для всех достаточно больших n существует d-регулярный граф G:
$(1+\varepsilon)G \succ K_n \succ (1/(1+\varepsilon))G$.

Полные графы аппроксимируются графами с малым числом рёбер!