



Institut Polytechnique de l'Université de Nice
Département Mathématiques Appliquées et Modélisation (MAM)

Modélisation du stockage du dioxyde de carbone dans les forêts

Amiel Metier
Hédi Chennoufi
Nicolas Muratore

Encadrants : Cédric Boulbe, Vincent Vadez

Rapport présenté en vue de satisfaire aux exigences de l'Université de Nice
pour l'obtention du diplôme de

Master of Science
en Mathématiques Appliquées et Modélisation

Mai 2025

Table des matières

1	Introduction	1
2	Objectifs	2
3	Explications	2
4	Réalisation	3
5	Analyse des Résultats	5
5.1	Analyse de l'impact de α	5
5.2	Analyse de l'impact de β	6
5.3	Analyse de l'impact de δ	6
5.4	Analyse de l'impact de γ	7
5.5	Analyse de l'impact de K	7
5.6	Cas réel dans la ville de Nice	8
6	Amélioration possible du système	8
6.1	Effet des saisons sur les rythmes biologiques	9
6.2	Intégration des océans comme puits de carbone	9
7	Conclusion	9
8	Références	10

1 Introduction

Les forêts jouent un rôle essentiel dans le cycle du carbone en absorbant le CO_2 atmosphérique et en le stockant dans les arbres et le sol. Dans ce projet, nous modélisons les échanges de carbone entre différents compartiments de l'écosystème à l'aide d'un système d'équations différentielles ordinaires.

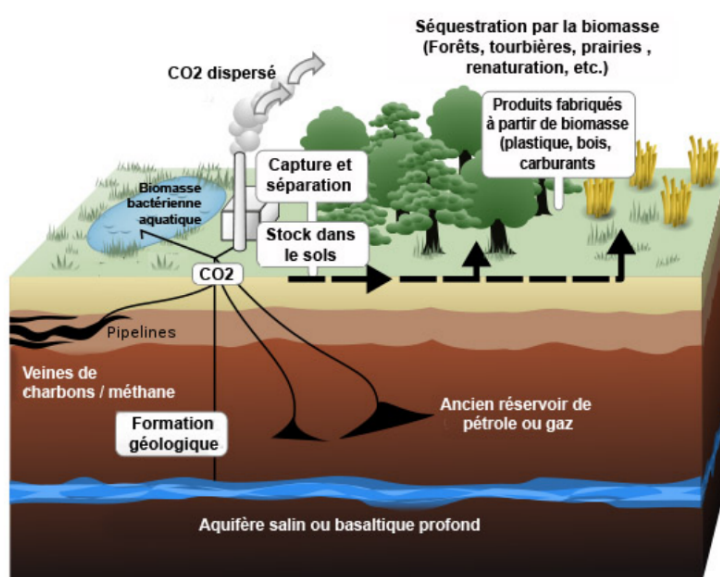


Figure 1: Séquestration Naturelle du CO_2

L'objectif est d'analyser le comportement du système et de résoudre numériquement les équations à l'aide des méthodes abordées en cours.

2 Objectifs

Les objectifs principaux de ce projet sont les suivants :

1. Résoudre numériquement le système d'équations différentielles non linéaires.
2. Simuler l'évolution numérique dans le temps avec une méthode numérique.
3. S'assurer de la conservation du carbone total
4. Analyser la sensibilité du système, l'influence des paramètres

3 Explications

Dans ce projet, trois variables sont étudiées :

- $C_A(t)$: La quantité de carbone stockée dans l'atmosphère.
- $C_T(t)$: La quantité de carbone stockée dans les arbres.
- $C_S(t)$: La quantité de carbone stockée dans les sols.

Le système d'équations gouvernant les échanges de carbone peut être modélisé par :

$$\frac{dC_A}{dt} = -S(C_T) + \beta C_T + \delta C_S, \quad (1)$$

$$\frac{dC_T}{dt} = S(C_T) - \beta C_T - \delta C_T - \gamma C_T, \quad (2)$$

$$\frac{dC_S}{dt} = \gamma C_T - \delta C_S + \delta C_T. \quad (3)$$

avec :

- $S(C_T) = \alpha C_T \left(1 - \frac{C_T}{K}\right)$: taux de séquestration du carbone par les arbres (photosynthèse).
- βC_T : effet de la respiration des arbres vers l'atmosphère.
- δC_S : respiration des sols vers l'atmosphère.
- δC_T : respiration des arbres vers les sols.
- γC_T : dépeint la litière des arbres (feuilles mortes et débris végétaux en décomposition) vers les sols.
- α : taux de séquestration.
- K : capacité maximale de stockage des arbres.
- β : respiration des arbres vers l'atmosphère.
- δ : respiration arbre \rightarrow sol et sol \rightarrow atmosphère.
- γ : production de litière (arbre \rightarrow sol).

Le système modélise un échange de carbone entre plusieurs réservoirs, avec des dynamiques potentiellement rapides (comme la séquestration $S(C_T)$ qui est non-linéaire).

Nous allons donc utiliser un schéma **d'Euler implicite** qui est assez stable numériquement pour n'importe quel pas de temps Δt .

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot f(y_{n+1}, t_{n+1})$$

Seulement dans ce schéma le terme en $n+1$ se retrouve des 2 côtés de l'équation, ainsi nous utiliserons la méthode de résolution numérique itérative **Newton-Raphson** pour déterminer le terme en $n+1$ à chaque itération.

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - \frac{F(y^{(k)})}{F'(y^{(k)})}$$

On cherche donc à résoudre ce système : $F(X) = \begin{pmatrix} F_1(C_A, C_T, C_S) \\ F_2(C_A, C_T, C_S) \\ F_3(C_A, C_T, C_S) \end{pmatrix} = 0$

tel que :

$$\begin{cases} F_1(C_A^{n+1}, C_T^{n+1}, C_S^{n+1}) = C_A^{n+1} - C_A^n - \Delta t \cdot (-S(C_T^{n+1}) + \beta C_T^{n+1} + \delta C_S^{n+1}) \\ F_2(C_A^{n+1}, C_T^{n+1}, C_S^{n+1}) = C_T^{n+1} - C_T^n - \Delta t \cdot (S(C_T^{n+1}) - \beta C_T^{n+1} - \delta C_T^{n+1} - \gamma C_T^{n+1}) \\ F_3(C_A^{n+1}, C_T^{n+1}, C_S^{n+1}) = C_S^{n+1} - C_S^n - \Delta t \cdot (\gamma C_T^{n+1} - \delta C_S^{n+1} + \delta C_T^{n+1}) \end{cases}$$

L'itération de newton s'écrit donc :

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - J^{-1}(X^{(k)}) \cdot F(X^{(k)})$$

où :

$$X^{(k)} = \begin{pmatrix} C_A^{(k)} \\ C_T^{(k)} \\ C_S^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$J(X^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial C_A} & \frac{\partial F_1}{\partial C_T} & \frac{\partial F_1}{\partial C_S} \\ \frac{\partial F_2}{\partial C_A} & \frac{\partial F_2}{\partial C_T} & \frac{\partial F_2}{\partial C_S} \\ \frac{\partial F_3}{\partial C_A} & \frac{\partial F_3}{\partial C_T} & \frac{\partial F_3}{\partial C_S} \end{pmatrix}_{X=X^{(k)}}$$

Newton-Raphson approxime localement F autour d'un point courant $X^{(k)}$ par :

$$F(X^{(k+1)}) \approx F(X^{(k)}) + J(X^{(k)}) \cdot (X^{(k+1)} - X^{(k)})$$

En posant $F(X^{(k+1)}) = 0$ on obtient l'équation d'inconnue $\Delta X^{(k)}$:

$$J(X^{(k)}) \cdot \Delta X^{(k)} = -F(X^{(k)}) \quad (\text{avec } \Delta X^{(k)} = X^{(k+1)} - X^{(k)})$$

4 Réalisation

Nous allons décrire la réalisation en langage **Python** des différentes étapes.

Méthode de Newton :

```
def newton(CAprev, CTprev, CSprev, dt, alpha, beta, delta, gamma, K, tol=1e-10, max_iter = 10000) :
```

a. Initialisation

```
CA = CAprev
CT = CTprev
CS = CSprev
```

b. Calcul de F

(On définit hors de cette fonction les fonctions **S** et **Sprime**)

```
for i in range(maxiter) :
    || F1 = CA - CAprev - dt * (-S(CT,alpha,K) + beta * CT + delta * CS)
    || F2 = CT - CTprev - dt * (S(CT,alpha,K) - beta * CT - delta * CT - gamma * CT)
    || F3 = CS - CSprev - dt * (gamma * CT - delta * CS + delta * CT)
```

c. Calcul de la Jacobienne et résolution manuelle

La Jacobienne sera de cette forme : $J(X^{(k)}) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & 0 \\ 0 & d & e \end{pmatrix}_{X=X^{(k)}}$

On calcule les termes a, b, c, d et e correspondant aux dérivées partielles. Puis au lieu de passer par l'inverse de J, on résout analytiquement une version simplifiée à 3 inconnues qui sont les composantes du vecteur $\Delta X^{(k)}$. Enfin on met à jour l'estimation.

```
|| a = -dt * (-Sprime(CT,alpha,K) + beta)
|| b = -dt * delta
|| c = 1 - dt * (Sprime(CT,alpha,K) - beta - delta - gamma)
|| d = -dt * (gamma + delta)
|| e = 1 + dt * delta

|| DeltaCT = -F2 / c
|| DeltaCS = (-F3 - d * DeltaCT) / e
|| DeltaCA = -F1 - a * DeltaCT - b * DeltaCS

|| CA += DeltaCA
|| CT += DeltaCT
|| CS += DeltaCS
```

d. Test de convergence

On arrête dès que $\|\Delta X\| < tol$

```
|| if max(abs(DeltaCA), abs(DeltaCT), abs(DeltaCS)) < tol :
|| || return CA, CT, CS
print("Non convergence")
```

Boucle de simulation temporelle :

Elle nous permettra de récupérer les valeurs pour pouvoir les analyser

a. Initialisation à $t = 0$

```
t = [0] CA = [800] CT = [500] CS = [1500] somme=[2800]
```

b. Boucle de temps de 0 à N

(On définit $N = \text{int}(T_{\text{max}}/dt)$ avec dt le pas de discrétisation)

```
for n in range(N) :  
    || tn = t[-1]  
    || CAn = CA[-1]  
    || CTn = CT[-1]  
    || CSn = CS[-1]  
  
    || CAnp1, CTnp1, CSnp1 = newton(CAn, CTn, CSn, dt,alpha,beta,delta,gamma,K)  
  
    || t.append(tn + dt)  
    || CA.append(CAnp1)  
    || CT.append(CTnp1)  
    || CS.append(CSn)  
    || somme.append(CAnp1 + CTnp1 + CSnp1)  
return(CA,CT,CS,somme,t)
```

5 Analyse des Résultats

Pour la réalisation de nos tests, nous avons pris un cas dit "par défaut" représentant un environnement modérément boisé. Les paramètres suivants ont été utilisés : $\alpha = 0.05$, $\beta = 0.02$, $\gamma = 0.03$, $\delta = 0.02$, et $K = 500$.

Cela nous donne les résultats suivants :

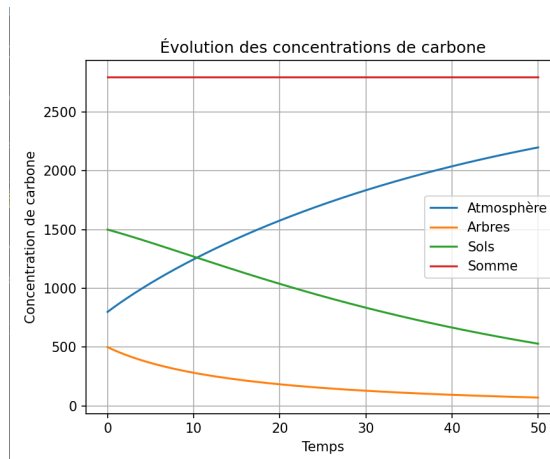


FIGURE 1 – Enter Caption

5.1 Analyse de l'impact de α

Lorsque α augmente, le carbone est transféré plus rapidement des arbres et des sols vers l'atmosphère. Cela entraîne une forte baisse du carbone végétal et une hausse notable de la concentration atmosphérique.

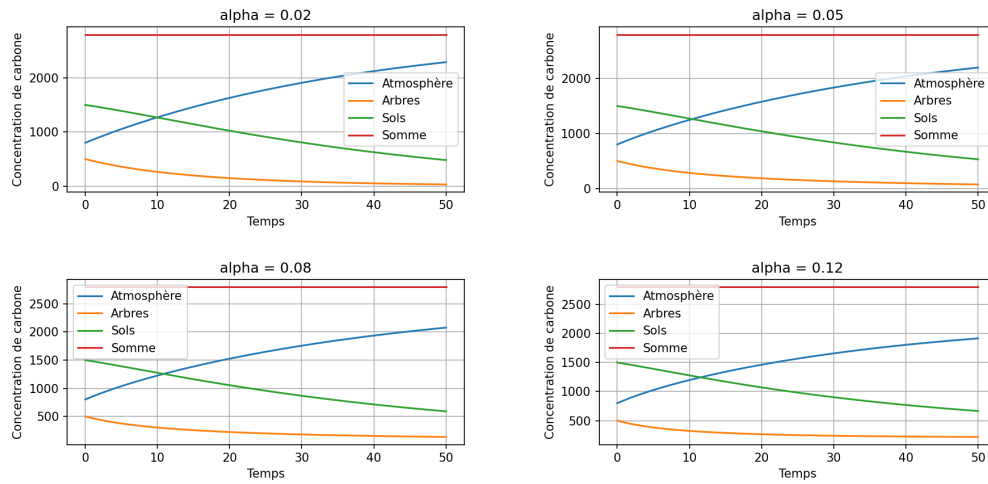


FIGURE 2 – Impact de l'augmentation de α

5.2 Analyse de l'impact de β

Lorsque β augmente, le carbone quitte plus rapidement les arbres, augmentant la concentration dans l'atmosphère. Cela se traduit par une chute plus rapide du carbone végétal et une hausse plus marquée du carbone atmosphérique.

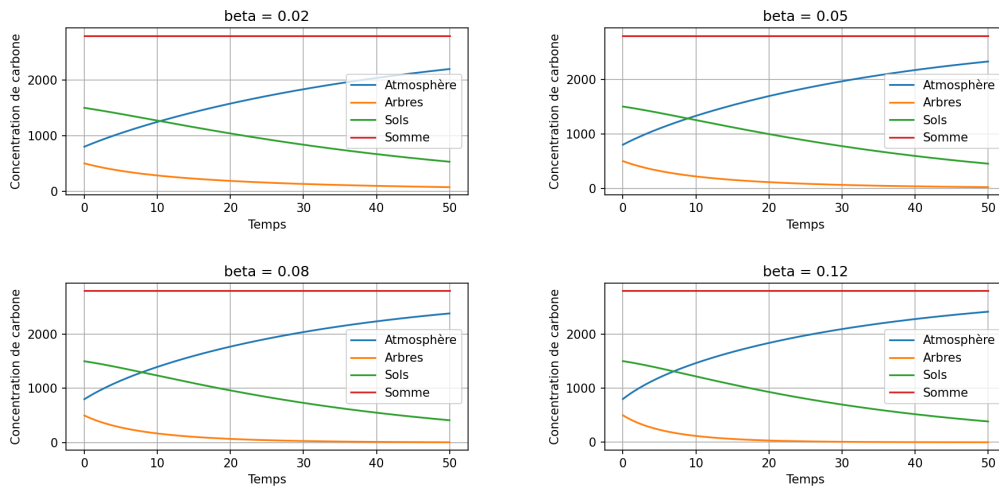


FIGURE 3 – Impact de l'augmentation de β

5.3 Analyse de l'impact de δ

Lorsque δ augmente, le transfert du carbone des sols vers l'atmosphère s'accélère fortement. Cela entraîne une déplétion rapide du carbone dans les sols et une accumulation marquée dans l'atmosphère.

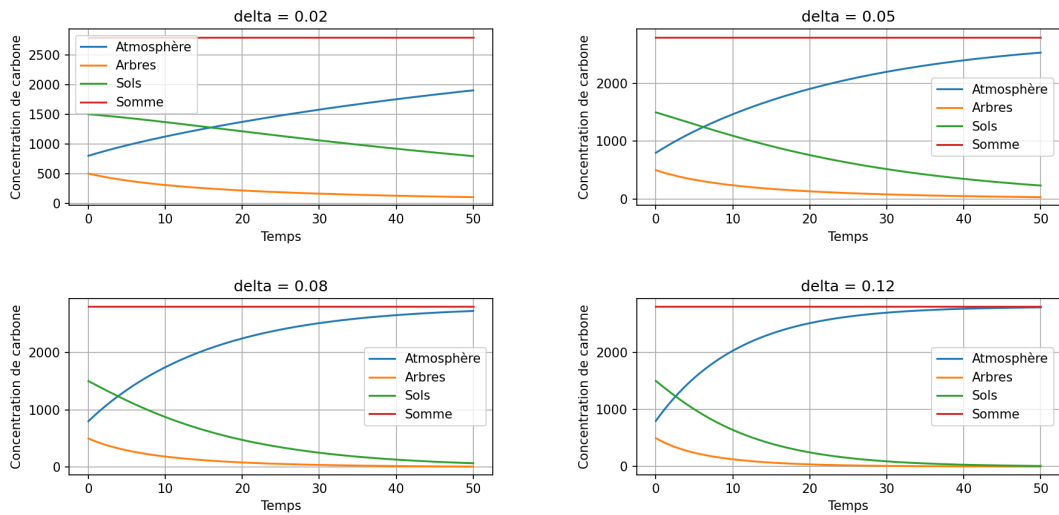


FIGURE 4 – Impact de l'augmentation de δ

5.4 Analyse de l'impact de γ

À mesure que γ augmente, le carbone dans l'atmosphère croît plus rapidement, tandis que celui dans les arbres diminue plus vite. Le carbone dans les sols décroît aussi plus rapidement avec un γ plus élevé.

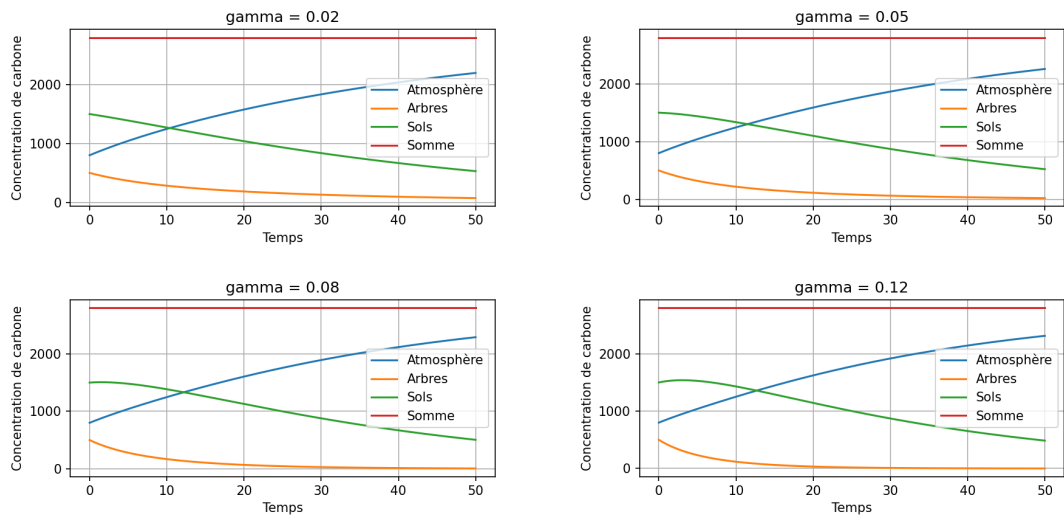


FIGURE 5 – Impact de l'augmentation de γ

5.5 Analyse de l'impact de K

Lorsque K augmente, la vitesse de transfert du carbone des arbres vers l'atmosphère ralentit légèrement. La concentration dans l'atmosphère croît toujours, mais plus lentement pour des K élevés.

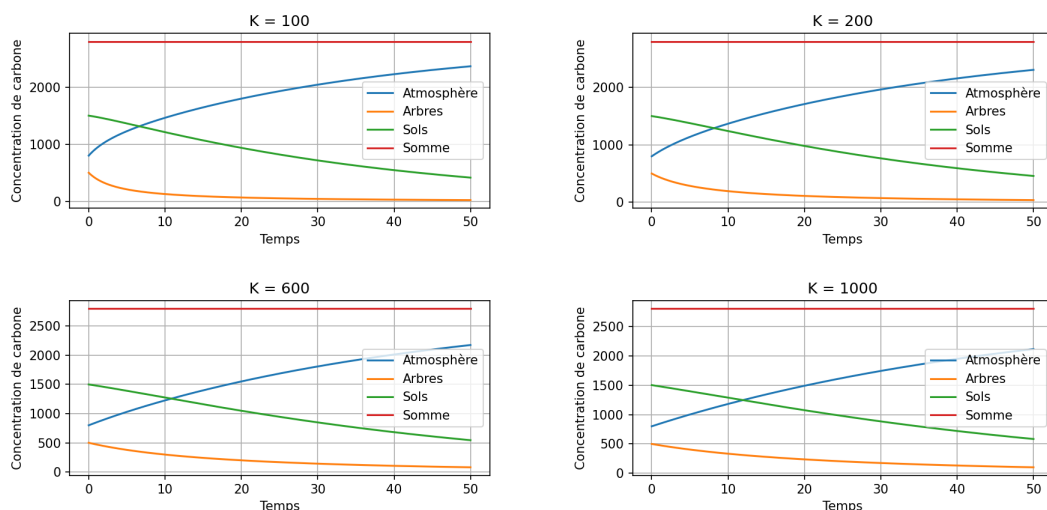


FIGURE 6 – Impact de l'augmentation de K

5.6 Cas réel dans la ville de Nice

Enfin, en prenant en compte un cas réel dans la ville de Nice, avec les paramètres suivants : $\alpha = 0.01$, $\beta = 0.05$, $\delta = 0.04$, $\gamma = 0.005$, et $K = 50$, nous obtenons les résultats suivants :

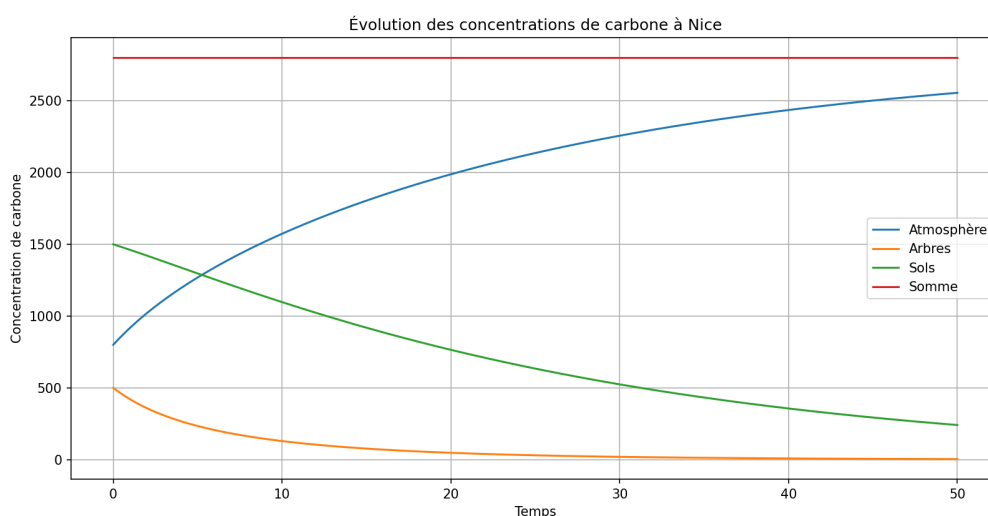


FIGURE 7 – Cas réel dans la ville de Nice

Nous voyons qu'il y a une forte concentration de carbone dans l'atmosphère, ce qui est totalement en désaccord avec ceux qu'on veut, c'est à dire peu de dioxyde de carbone dans l'air. Pour cela la ville de Nice pourrait investir dans la reforestation pour augmenter la séquestration du carbone, de plus, des pratiques agricoles durables et la préservation des sols permettraient de limiter les émissions de carbone provenant du sol. Et donc de par conséquent réduire la concentration présente dans l'atmosphère.

6 Amélioration possible du système

Le modèle de base discuté ci-dessus est centré sur les échanges de carbone parmi l'unité contextuelle étudiée, à savoir l'atmosphère, les arbres et les sols. Cependant, il ne tient pas compte d'un

certain nombre de phénomènes qui déterminent assez bien le cycle du carbone au niveau mondial. Par conséquent, nous suggérons deux modifications à introduire. Ce sont la saison et l'avènement d'un nouveau compartiment, à savoir les océans.

6.1 Effet des saisons sur les rythmes biologiques

Les Arbres et les sols ont également des activités biologiques saisonnières. La photosynthèse augmente au printemps et en été, tandis que le métabolisme végétal diminue en automne et en hiver et la décomposition augmente. Un paramètre saisonnier σ pourrait nous aider à améliorer notre système.

Ainsi, on aurait :

$$\frac{dC_A}{dt} = -S(C_T) + \beta C_T + \delta C_S + \sigma C_T + \sigma C_S, \quad (4)$$

$$\frac{dC_T}{dt} = S(C_T) - \beta C_T - \delta C_T - \gamma C_T - \sigma C_T, \quad (5)$$

$$\frac{dC_S}{dt} = \gamma C_T - \delta C_S + \delta C_T - \sigma C_S. \quad (6)$$

Le terme σC_T modélise une perte temporaire de carbone par les arbres liée à des facteurs saisonniers (perte de feuilles, ralentissement de la croissance).

6.2 Intégration des océans comme puits de carbone

Les océans sont l'un des principaux réservoirs de carbone au niveau mondial. Ils absorbent une grande partie du CO_2 atmosphérique, nous allons donc introduire un quatrième équation, noté $C_M(t)$, qui indique la quantité de carbone stockée dans les mers et les océans.

Nous ajoutons l'équation suivante au système :

$$\frac{dC_M}{dt} = \eta C_A - \mu C_M, \quad (7)$$

où :

- η est le coefficient d'absorption du carbone atmosphérique par les océans.
- μ représente un taux de restitution.

Cette nouvelle équation permet de simuler l'effet tampon des océans dans le cycle du carbone, cela permet également de mieux évaluer les scénarios à long terme, notamment face au changement climatique.

7 Conclusion

À travers ce projet, nous avons pu modéliser le transfert de carbone entre l'atmosphère, les arbres et les sol sous forme de système d'équations différentielles non linéaires résolu en utilisant la méthode de Newton-Raphson avec un schéma d'Euler implicite. Nous avons pu mettre en évidence la difficulté du cycle du carbone dans les écosystèmes forestiers et du poids de chaque paramètre.

Comme indiqué dans notre étude, ces simulations ont indiqué que plusieurs paramètres tels que le taux de séquestration, les taux de respiration et de production de litière affectent la répartition du carbone entre les compartiments. Par conséquent, une configuration inadéquate de ces paramètres pourrait entraîner une accumulation élevée de carbone dans l'atmosphère, ce qui pourrait aggraver l'effet du changement climatique ou accorder des valeurs négatives, comme c'est impossible.

Enfin, l'étude a permis des extensions pertinentes du modèle. L'ajout de l'effet saisonnier capture mieux les variations biologiques naturelles et l'inclusion du compartiment de l'océan rend le modèle plus général pour ce qui est du cycle du carbone.

8 Références

- IPCC (GIEC) – Rapport AR6, WG1 (2021) <https://www.ipcc.ch/report/ar6/wg1/>
- NASA – Climate and Ocean Carbon <https://climate.nasa.gov/news/>
- NOAA – Seasonal CO2 cycle <https://www.esrl.noaa.gov/gmd/ccgg/trends/>
- Keeling Curve https://scrippsco2.ucsd.edu/graphics_gallery/keeling_curve.html