1. Les opérateurs différentiels de la physique

$\operatorname{grad} f = Df = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ (f$\in$C^1: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

nabla: $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$

$\operatorname{div} F = \nabla \bullet F = \langle \nabla, F \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ ($F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$: *ouvert*)

$\Omega \in \mathbb{R}^m$:ouvert; $F, G \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$:

$\forall 1 \leqslant i \leqslant m : \frac{\partial}{\partial x_i}[\langle F, G \rangle] = \langle \frac{\partial}{\partial x_i} F, G \rangle + \langle F, \frac{\partial}{\partial x_i} G \rangle$

$\forall 1 \leqslant i \leqslant m : \frac{\partial}{\partial x_i}[F \times G] = \frac{\partial}{\partial x_i} F \times G + F \times \frac{\partial}{\partial x_i} G$

$\Omega \in \mathbb{R}^n, \Omega' \in \mathbb{R}^m, f \in \mathcal{C}^1(\Omega'), g = (g_1, \ldots, g_n) \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$tq g($\Omega$) $\in \Omega'$, f$\circ$g $\in \mathcal{C}^1(\Omega)$ on a:

Chain rule: $\forall 1 \leq i \leq n : \frac{\partial f \circ g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x)$

$n = 2$:$\operatorname{rot} F = \dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$

n=3: $\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$

laplacien=$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n : ouvert, f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n : ouvert, f \in \mathcal{C}^2(\Omega), F \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$:

$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$, $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$

$\operatorname{div}(f \operatorname{grad} g) = f \Delta g + \operatorname{grad} f \cdot \operatorname{grad} g$ ($f \in \mathcal{C}^1(\Omega), g \in \mathcal{C}^2(\Omega)$)

$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$ ($f, g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$)

$\operatorname{div}(fF) = f \operatorname{div} F + F \cdot \operatorname{grad} f$

$\operatorname{rot}(fF) = \operatorname{grad} f \times F + f \operatorname{rot} F$ ($f \in \mathcal{C}^1(\Omega), F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$)

$\operatorname{rot} \operatorname{rot} F = -\Delta F + \operatorname{grad} \operatorname{div} F (\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3), \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^3))$

2. Intégrales curvilignes, champs qui dérivent d'un potentiel

2.1 Courbes dans $\mathbb{R}^n$

$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$: courbe régulière$\Leftrightarrow$

$\exists [a, b] \subseteq \mathbb{R}, \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n : \gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$:

1. $\Gamma = \gamma([a, b]) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in [a, b] : \gamma(t) = x\}$
2. $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$
3. $|\gamma'(t)| = \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \cdots + \gamma_n'(t)^2}$

$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$: courbe **simple** $\Leftrightarrow$ régulière + $\exists \gamma$ injective sur$[a, b[$

$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$: courbe **fermée** $\Leftrightarrow$ régulière + $\forall \gamma : \gamma(a) = \gamma(b)$

Γ: rég./morceaux $\Leftrightarrow \exists$k $\in \mathbb{N}_{>0} : \Gamma = \bigcup_{i=1}^{k} \Gamma_i (\Gamma_i : rég.)$

2.2 Intégrales curvilignes

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Γ : rég. $\subseteq \Omega, \gamma : [a, b] \to \Gamma$

$\int_\Gamma f \ell = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \, dt, f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ (trkl sens de γ)

$\int_\Gamma F \bullet \ell = \int_a^b \langle F(\gamma(t)); \gamma'(t)|\rangle \, dt, F \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (sens de γ!)

$\text{longueur}(\Gamma) = \int_\Gamma 1 \, d\ell = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$

$\int_\Gamma f \, d\ell = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_i} f \, d\ell; \int_\Gamma F \bullet \, d\ell = \sum_{i=1}^{k} \int_{\Gamma_i} F \bullet \, d\ell$

2.3 Champs qui dérivent d'un potentiel

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n : ouvert, F \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$

dérive d'un potentiel$\Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{C}^1(\Omega) : \nabla f = F$ dans Ω("$\nexists ! f$")

$\nabla f = F \Rightarrow \int_\Gamma F \bullet \, d\ell = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ ($\gamma : [a, b] \to \Gamma$)

$\nabla f = F \Rightarrow \forall 1 \leq i, j \leq n, \forall x \in \Omega : \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$

$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \wedge (\Omega :$ convexe $\subset$ simp.cnctd $) \Rightarrow \nabla f = F$

$\Leftrightarrow$ F dérive d'un potentiel sur Ω

$\Leftrightarrow \forall$A,B$\in \Omega; \Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Omega$(rég;joinA,B)$\int_{\Gamma_1} F \bullet \, d\ell = \int_{\Gamma_2} F \bullet \, d\ell$

$\Leftrightarrow \forall \Gamma \subseteq \Omega$(rég.&fermée):$\int_\Gamma F \bullet \, d\ell = 0$

F dérive d'un potentiel?

1. rot $f \neq 0 \Rightarrow$Non
2. Ω simply connected (simp.cnctd)? : pas de trous $\Rightarrow$ Oui

3.1 f=?, f(x,y,z)= $\int^x F_1(t, y, z) \, dt + \alpha(y, z) (\alpha = ?)$!ok? $\to$ 3.2

3.2 $\Gamma \subseteq \Omega$ rég.&fermé: entoure UN trou de Ω,

$(\int_\Gamma F \bullet \, d\ell \neq 0)? \Rightarrow$ Non : $\to$(autre trou? 3.2(trou): 3.1)

2.4 Théorème de Green

$\partial \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \cap \Omega \neq \emptyset, B_\epsilon(x) \cap \Omega^c \neq \emptyset\}$

$B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \epsilon\}; \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$

$\partial\Omega$:simp,ferm,rég: orienté +/-$\to \gamma$ laisse domaine à gauch/d

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ouvert & borné = **domaine régulier**

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists \Omega_i$: ouverts & bornés:

1. $\forall 1 \leq j \leq n : \overline{\Omega_j} \subseteq \Omega_0$
2. $\forall 1 \leq i \neq j \leq n : \overline{\Omega_j} \cap \overline{\Omega_j} = \emptyset$
3. $\Omega = \Omega_0 \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} \overline{\Omega_i})$
4. $\forall 0 \leq j \leq n : \partial\Omega_j = \Gamma_j$: courbe simple, fermée, rég.

Green:, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$**:rég**; $\partial\Omega$ **orienté pos.** ; $F \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$

$\int\int_\Omega \operatorname{rot} F(x, y) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} F \bullet \, d\ell$

$\to \iint_\Omega \Delta f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} (\operatorname{grad} f \cdot \nu) \, d\ell, f \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$

$\iint_\Omega \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} (F \cdot \nu) \, d\ell$ (ν ext. unit normals to $\partial\Omega$)

2.5 Corollaires du Théorème de Green

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$;x$_0 \in \partial\Omega, \nu_{x_0} \in \mathbb{R}^2$: normale extérieure unité à $\Omega \Leftrightarrow$

1. $|\nu_{x_0}| = 1$
2. $\gamma : [a, b] \to \partial\Omega$,t$_0 \in [a, b] : \gamma(t_0) =x_0 \Rightarrow \langle \gamma'(t_0), \nu_{x_0} \rangle = 0$
3. $\exists \epsilon_0 : \forall 0 < \epsilon < \epsilon_0$:x$_0 + \epsilon \nu_{x_0} \notin \Omega, \gamma : [a, b] \to \partial\Omega$ orienté +

$\Rightarrow \nu_{\gamma(t)} = \frac{1}{|\gamma'(t)|}(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$

Th. divergence:$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2, F \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$

$\int\int_\Omega \operatorname{div} F(x, y) \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle \, d\ell$

$\Gamma \subseteq (\partial\Omega$ orienté +) par $\gamma : [a, b] \to \Gamma$ on a:

$\int_\Gamma \langle F, \nu \rangle d\ell = \int_a^b \langle F(\gamma(t)); \frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{|\gamma'(t)|} \rangle |\gamma'(t)| dt$

$= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t)) \rangle dt$

On connaît ν mais pas γ?$\to$ calculer$\int_\Gamma \langle F(x, y), \nu_{(x,y)} \rangle dl$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ rég. et F, G et $H \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ définies par

F(x, y) = (-y, x) G(x, y) = (-y, 0) H(x, y) = (0, x)

$\text{Aire}(\Omega) = \iint_\Omega 1 dx dy = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} F \bullet dl = \int_{\partial\Omega} G \bullet dl = \int_{\partial\Omega} H \bullet dl$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$: rég., ν sa normale extérieure unité et $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$.

1. $\iint_\Omega \Delta u dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \nu \rangle dl$
2. $\iint_\Omega (v \Delta u + \langle \nabla u, \nabla v \rangle) dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle v \cdot \nabla u; \nu \rangle dl$
3. $\iint_\Omega (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle u \nabla v - v \nabla u; \nu \rangle dl$

3. Intégrales de surface et théorèmes globaux

3.1 Intégrales de surface

$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ est appelée une **surface régulière** $\Leftrightarrow$

1. $\exists A \subset \mathbb{R}^2$: ouvert borné tq ∂A est une courbe rég. par morceaux simple et fermée et $\exists \sigma : \overline{A} \to \mathbb{R}^3$ tq $\sigma \in C^1(\overline{A}, \mathbb{R}^3)$, $\sigma(\overline{A}) = \Sigma$ et σ est injective sur A.
2. De plus $\sigma_u \wedge \sigma_v = (\sigma_u^1, \sigma_u^2, \sigma_u^3) \wedge (\sigma_v^1, \sigma_v^2, \sigma_v^3) = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 \sigma_v^3 - \sigma_v^2 \sigma_u^3 \\ \sigma_v^1 \sigma_u^3 - \sigma_u^1 \sigma_v^3 \\ \sigma_u^1 \sigma_v^2 - \sigma_v^1 \sigma_u^2 \end{pmatrix}$ est tel que $|\sigma_u \wedge \sigma_v| \neq 0$ sur A.

$\to\sigma$: **paramétrisation régulière** de Σ et $\frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{|\sigma_u \wedge \sigma_v|} = \nu_{(u,v)}$ est une **normale unité** au point $\sigma(u, v)$.

surface régulière: $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ **orientable:**$\exists$champ de vecteurs normaux unitaires et continus $\nu : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ (orientat. de Σ)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f \in C^0(\Omega)$, $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et $\Sigma \subseteq \Omega$ une surface rég. orientable paramétrée par $\sigma : \overline{A} \to \Sigma$.

1. $\iint_\Sigma f ds = \iint_A f(\sigma(u, v)) \cdot |\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)| du dv$
2. $\iint_\Sigma F \bullet ds = \iint_A \langle F(\sigma(u, v)); \sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v) \rangle du dv$

(2.: orient. Σ!) Si de manière plus générale $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{k} \Sigma_i$

$\iint_\Sigma f ds = \sum_{i=1}^{k} \iint_{\Sigma_i} f ds$ $\iint_\Sigma F \bullet ds = \sum_{i=1}^{k} \iint_{\Sigma_i} F \bullet ds$

3.2 Théorème de la Divergence

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un ouvert borné. Ω est un **domaine régulier** s'il existe un entier m et $\Omega_0, \Omega_1, ..., \Omega_m$ des ouverts tels que

1. $\forall 1 \leqslant j \leqslant m : \overline{\Omega_j} \subseteq \Omega_0$.
2. $\forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant m : \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$.
3. $\Omega = \Omega_0 \setminus [\bigcup_{i=1}^{m} \overline{\Omega_i}]$.
4. $\forall 0 \leqslant i \leqslant m$ on a $\partial\Omega_i = \Sigma_i$: surf. orient. rég. /morceau

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ est un domaine régulier, $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$ un champ de normales extérieures unités continu et $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$.

$\iiint_\Omega \operatorname{div} F(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds$

γ :(param.$\partial\Omega$) : $\iint_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds = \int_a^b \langle F(\gamma(t)); (-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t)) \rangle \, dt$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un domaine rég., $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^3$ un champ de normales extérieures unités continu. Soit les champs vectoriels

F(x, y, z) = (x, y, z) $G_1(x, y, z) = (x, 0, 0)$

$G_2(x, y, z) = (0, y, 0)$ $G_3(x, y, z) = (0, 0, z)$

$\text{Volume}(\Omega) = \frac{1}{3} \iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle ds = \iint_{\partial\Omega} \langle G_i, \nu \rangle ds \, \forall 1 \leqslant i \leqslant 3$

Soient $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$. Alors

1. $\iiint_\Omega (f \nabla g + \langle \nabla f; \nabla g \rangle) dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \langle f \nabla g; \nu \rangle ds$
2. $\iiint_\Omega (f \Delta g - g \Delta f) dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \langle f \nabla g - g \nabla f; \nu \rangle ds$
3. $\iiint_\Omega \Delta f dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \langle \nabla f; \nu \rangle ds$

3.3 Théorème de Stokes

$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ une surf. rég. orientable, $\sigma : \overline{A} \to \Sigma$ une param. (∂A: courbe simple, fermée, rég. /morceaux). Le **bord de** Σ noté $\partial\Sigma$ est donné par $\sigma(\partial A)$ dont on enlève

- Les courbes qui sont parcourues dans deux sens opposés.
- Les parties qui sont réduites à un point.

Sens de parcours sur ∂A induit un sens de parcours sur $\partial\Sigma$ par composition avec σ.
$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une param. (d'un bout) de ∂A, alors $\sigma\circ\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ est une paramétrisation (d'un bout) de $\partial\Sigma$ et donc un choix de sens de parcours de $\partial\Sigma$. Le sens de parcours de $\sigma\circ\gamma$ est appelé le **sens de parcours induit par** σ.
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$: ouvert, $\Sigma \subseteq \Omega$ surf. orientable rég. /morceaux:
Stokes: $\iint_\Sigma \operatorname{rot} F\, ds = \int_{\partial\Sigma} F \bullet dl, F \in C^1(\Omega,\mathbb{R}^3)$
Signes compatibles? $\sigma : \overline{A} \to \Sigma$: une param. de Σ, on fixe qui est la 1èreet 2ème variable. On choisit l'orient. de ∂A qui laisse le domaine à gauche et pour $\partial\Sigma$ on choisit l'orientation induite par σ. Pour la normale, si u est la 1ère variable et v la 2ème, on prend $\sigma_u \wedge \sigma_v$ (et non $\sigma_v \wedge \sigma_u$).
$\int\int_\Sigma \operatorname{rot} F\, ds = \int\int_A \langle \operatorname{rot} F(\sigma(u,v)); \sigma_u \times \sigma_v\rangle\, du\, dv$
$\iint_\Sigma \operatorname{rot} F\, ds = \iint_\Sigma \operatorname{rot} F \cdot \nu\, ds$ (ν : unit normal vector)

4. Séries de Fourier

4.1 Motivation et rappels

$a < b \in \mathbb{R}$, f : [a, b] $\to \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, noté $f \in C^0_{\text{morc}}([a,b])$ si $\exists$n $\in \mathbb{N}$ et $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ tq $f \in C^0(]a_{i-1},a_i[)$ pour $i = 1,...,n$ et tels que $\lim_{x\to a_{i-1}^+} f(x)$ et $\lim_{x\to a_i^-} f(x)$ existent et sont finies. Et si $f \in C^1(]a_{i-1},a_i[)$, $\lim_{x\to a_{i-1}^+} f'(x)$ et $\lim_{x\to a_i^-} f'(x)$ existent et sont finies, f est **C^{1}par morceaux** et on note $f \in C^1_{\text{morc}}([a,b])$.

4.2 Définition et convergence

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique et continue par morceaux.
$\forall n \geqslant 0 : a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx$
$\forall n \geqslant 1 : b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx$
La somme partielle de Fourier de f d'ordre N est$F_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[a_n\cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)\right]$
Série de Fourier F f(x) = $\lim_{N\to+\infty} F_N f(x)$ (si converge). $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique et C^1 par morceaux.
Th. Dirichlet $\forall$x $\in \mathbb{R}$ $Ff(x) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x-t)+f(x+t)}{2}$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-pér. $\in C^0_{\text{morc}}.c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\frac{2\pi}{T}nx}dx\ \ \forall n \in \mathbb{Z}$
$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$: $\int_a^b \phi(x)dx = \int_a^b \operatorname{Re}(\phi(x))dx + i\cdot\int_a^b \operatorname{Im}(\phi(x))dx$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-périodique et continue par morceaux.

1. $\forall n \geqslant 1 c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$; $\forall n \leqslant -1\ c_n = \frac{a_{-n}+ib_{-n}}{2}$; $c_0 = \frac{a_0}{2}$.
2. $\forall n \geqslant 1\ a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$ et $a_0 = 2c_0$.
3. $F_N f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$ $(Ff(x) : N = \infty)$

4.3 Propriétés

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction T-périodique et continue par morceaux.

1. La série de Fourier de f est T-périodique.
2. Si f est paire, i.e. $f(x) = f(-x)$ $\forall n \geqslant 1$ $b_n = 0$
3. Si f est impaire, i.e. $f(-x) = -f(x)$, $\forall n \geqslant 0$ $a_n = 0$

$L > 0$, $f : [0,L] \to \mathbb{R}$ $\in$C$^1_{morc.}$ la série de Fourier en cosinus
F$_c f(x) = \frac{\hat{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty \hat{a}_n\cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right)$
$\hat{a}_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{\pi}{L}nx\right)dx$

$$F_c f(x) = \begin{cases} \lim_{t\to 0}\frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} & \text{si } x \in]0,L[\\ \lim_{t\to 0} f(0+t) & \text{si } x = 0 \\ \lim_{t\to 0} f(L-t) & \text{si } x = L \end{cases}$$

$L > 0$, f $\in$C$^1_{morc.}$: [0, L] $\to \mathbb{R}$ série de Fourier en sin: F$_s f(x) = \sum_{n=1}^\infty \tilde{b}_n\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)$; $\tilde{b}_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right)dx$

$$F_s f(x) = \begin{cases} \lim_{t\to 0}\frac{f(x-t)+f(x+t)}{2} & \text{si } x \in]0,L[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = L \end{cases}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\in$C$^1_{morc.}$, T-périodique. **Identité de Parseval:** $\frac{2}{T}\int_0^T f(x)^2dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^\infty(a_n^2+b_n^2) = 2\sum_{n=-\infty}^\infty |c_n|^2$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-pér. $\in \mathcal{C}^0$(R) $\in$C$^1_{morc.}$, f' $\in$C$^1 morc.$:
$Ff'(x) = \lim_{t\to 0}\frac{f'(x-t)+f'(x+t)}{2}$

5. Transformée de Fourier

5.0.1 Définition et inversion

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0_{morc.}$ tq: $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx < +\infty$
$\to$Transformée de Fourier de f notée $\mathcal{F}[f]$ ou $\hat{f}$ est :
$\mathcal{F}[f] : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$: $\mathcal{F}[f](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx$
$\phi \in \mathcal{C}^0_{morc.} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tq: $\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(\alpha)|d\alpha < +\infty$
$\to$Transformée de Fourier inverse de ϕ notée $\mathcal{F}^{-1}[\phi]$:
$\mathcal{F}^{-1}[\phi] : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \mathcal{F}^{-1}[\phi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha$
$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = f(x), f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $\mathcal{F}^{-1}$et $\mathcal{F}$ sont définis

5.1 Propriétés

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in \mathcal{C}^0_{morc.}$: $\hat{f}$ et $\hat{g}$ sont définis

1. $\hat{f}$ est continue.
2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ on a $\mathcal{F}[a\cdot f + b\cdot g] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$
3. $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$,g(x) = f(ax + b): $\hat{g}(\alpha) = \frac{e^{i\frac{b}{a}\alpha}}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\alpha}{a}\right)$
3. $g(x) = e^{-ibx}f(x)$ alors $\hat{g}(\alpha) = \hat{f}(\alpha+b)$

$f \in \mathcal{C}^0_{morc.}$tq $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2dx < +\infty$.
Id. de Plancherel: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2dx = \int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(\alpha)|^2d\alpha$
f $\in C^1(\mathbb{R})$:$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx < \infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty}|f'(x)|dx < \infty$,
$n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$ on a $\int_{-\infty}^{+\infty}|f^{(k)}(x)|dx < +\infty$, alors $\mathcal{F}[f^{(n)}](\alpha) = (i\alpha)^n\mathcal{F}[f]$
Si $h_k(x) = x^k f(x)$, $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$ on a $\int_{-\infty}^{+\infty}|h_k(x)|dx < \infty$: $\frac{d^n\hat{f}}{d\alpha^n}(\alpha) = (-i)^n\mathcal{F}[h_n](\alpha)$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx < +\infty$,
1. si f est paire, $\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)dx$
2. si f est impaire, $\hat{f}(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x)dx$
$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|dx < +\infty$ Le produit de convolution de f et g est défini par
$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt(0)$
f, $g \in \mathcal{C}^0_{morc.}$ sur $\mathbb{R}$: $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx < \infty$,$\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|dx < \infty$:
$\int_{-\infty}^{+\infty}|f * g(x)|dx < \infty$ et $\mathcal{F}[f*g](\alpha) = \sqrt{2\pi}\,\hat{f}(\alpha)\cdot\hat{g}(\alpha)$

6. Applications de l'analyse de Fourier

Sturm-Liouville: $t \in]0,L[, \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0 \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$
Sol: $u(t) = 0$ si $\lambda = 0$; si $\lambda \neq 0$: $u(t) = \sinh(t\sqrt{|\lambda|})\frac{u_1(t)}{\sqrt{|\lambda|}}$

Heat (finite): $x \in [0,L], t > 0, \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$
$u(x,t) = \sum_{n\geq 1}\alpha_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\exp\left(-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right)$
avec $\alpha_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$

2. Heat (infinite): $x \in \mathbb{R}, t > 0, \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$
$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-(a\alpha)^2t)\hat{f}(\alpha)\exp(i\alpha x)d\alpha$

3. Wave (finite): $x \in [0,L], t > 0, \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases}$
$u(x,t) = \sum_{n\geq 1}\left[a_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
avec $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$, $b_n = \frac{L}{n\pi c}\cdot\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$
4. Laplace (rectangle): $x \in [0,L], y \in [0,M]$,
$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x,0) = \alpha(x),\ u(x,M) = \beta(x) \\ u(0,y) = \gamma(y),\ u(L,y) = \delta(y) \end{cases}$
$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$ avec
$w(x,y) = \sum_{n\geq 1}\left(a_n\cosh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + b_n\sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
avec $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \alpha(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$,
$b_n\sinh\left(\frac{n\pi M}{L}\right) = \frac{2}{L}\int_0^L \beta(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx - a_n\cosh\left(\frac{n\pi M}{L}\right)$
v(x,y) = $\sum_{n=1}^\infty\left[d_n\cosh\left(\frac{n\pi}{M}x\right) + e_n\sinh\left(\frac{n\pi}{M}x\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{M}y\right)$
$d_n = \frac{2}{M}\int_0^M \gamma(y)\sin\left(\frac{n\pi}{M}y\right)dy$
$e_n\sinh\left(\frac{n\pi}{M}L\right) = \frac{2}{M}\int_0^M \delta(y)\sin\left(\frac{n\pi}{M}y\right)dy - d_n\cosh\left(\frac{n\pi}{M}L\right)$

$\cos(a\pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$, $\sin(a\pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b$,
$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$,
$\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$,
$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$,