

## 1. Les opérateurs différentiels de la physique

$$\begin{aligned} \text{grad } f = Df = \nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) & (f \in C^1: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}) \\ \text{div } F = \nabla \bullet F = \langle \nabla, F \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} & (F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n : \\ \text{ouvert}) (nabla : \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)) \\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^m : \text{ouvert}; F, G \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n) : \\ \forall 1 \leq i \leq m : \frac{\partial}{\partial x_i} [\langle F, G \rangle] = \langle \frac{\partial}{\partial x_i} F, G \rangle + \langle F, \frac{\partial}{\partial x_i} G \rangle \\ \forall 1 \leq i \leq m : \frac{\partial}{\partial x_i} [F \times G] = \frac{\partial}{\partial x_i} F \times G + F \times \frac{\partial}{\partial x_i} G \\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^m, f \in C^1(\Omega'), g = (g_1, \dots, g_n) \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \text{ tq} \\ g(\Omega) \in \Omega', f \circ g \in C^1(\Omega) \text{ on a:} \\ \textbf{Chain rule: } \forall 1 \leq i \leq n : \frac{\partial f \circ g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x) \\ n=2 : \text{rot } F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ n=3 : \text{rot } F = \nabla \times F = \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \\ \text{laplacien} = \Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (\Omega \subseteq \mathbb{R}^n : \text{ouvert}, f \in C^2(\Omega)) \\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n : \text{ouvert}, f \in C^2(\Omega), F \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3) : \\ \Delta f = \text{div}(\nabla f), \text{rot}(\nabla f) = 0, \text{div}(\text{rot } F) = 0 \\ \text{div}(f \text{ grad } g) = f \Delta g + \text{grad } f \cdot \text{grad } g (f \in C^1(\Omega), g \in C^2(\Omega)) \\ \text{grad}(fg) = f \text{ grad } g + g \text{ grad } f (f, g \in C^1(\Omega)) \\ \text{div}(fF) = f \text{ div } F + F \cdot \text{grad } f \\ \text{rot}(fF) = \text{grad } f \times F + f \text{ rot } F (f \in C^1(\Omega), F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)) \\ \text{rot rot } F = -\Delta F + \text{grad div } F (\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3), \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)) \end{aligned}$$

## 2. Intégrales curvilignes, champs qui dérivent d'un potentiel

### 2.1 Courbes dans $\mathbb{R}^n$

$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ : courbe régulière  $\Leftrightarrow$

$\exists [a, b] \subseteq \mathbb{R}, \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n : \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ :

1.  $\Gamma = \gamma([a, b]) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in [a, b] : \gamma(t) = x\}$

2.  $\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$

3.  $|\gamma'(t)| = \sqrt{\gamma'_1(t)^2 + \dots + \gamma'_n(t)^2}$

$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ : courbe simple  $\Leftrightarrow$  régulière +  $\exists \gamma$  injective sur  $[a, b]$

$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ : courbe fermée  $\Leftrightarrow$  régulière +  $\forall \gamma : \gamma(a) = \gamma(b)$

$\Gamma$ : rég./morceaux  $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_{>0} : \Gamma = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$  ( $\Gamma_i$ : rég.)

### 2.2 Intégrales curvilignes

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \Gamma$ : rég.  $\subseteq \Omega, \gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$

$\int_{\Gamma} f \ell = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt, f \in C^0(\Omega)$  (trkl sens de  $\gamma$ )

$\int_{\Gamma} F \bullet \ell = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt, F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$  (sens de  $\gamma$ !)

longueur( $\Gamma$ ) =  $\int_{\Gamma} 1 \ell = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$

$\int_{\Gamma} f \ell = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} f \ell; \int_{\Gamma} F \bullet \ell = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} F \bullet \ell$

### 2.3 Champs qui dérivent d'un potentiel

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ : ouvert,  $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$

dérive d'un potentiel  $\Leftrightarrow \exists f \in C^1(\Omega) : \nabla f = F$  dans  $\Omega$  ("#!f")

$\nabla f = F \Rightarrow \int_{\Gamma} F \bullet \ell = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$  ( $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$ )

$\nabla f = F \Rightarrow \forall 1 \leq i, j \leq n, \forall x \in \Omega : \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$

$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \wedge (\Omega : \text{convexe} \subset \text{simp.cnctd}) \Rightarrow \nabla f = F$

$\Leftrightarrow F$  dérive d'un potentiel sur  $\Omega$

$\Leftrightarrow \forall A, B \in \Omega; \Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Omega$  (rég; joinA,B)  $\int_{\Gamma_1} F \bullet \ell = \int_{\Gamma_2} F \bullet \ell$

$\Leftrightarrow \forall \Gamma \subseteq \Omega$  (rég.&fermée):  $\int_{\Gamma} F \bullet \ell = 0$

### F dérive d'un potentiel?

1.  $\text{rot } f \neq 0 \Rightarrow \text{Non}$

2.  $\Omega$  simply connected (simp.cnctd)? : pas de trous  $\Rightarrow$  Oui

3.1  $f = ?$ ,  $f(x, y, z) = \int^x F_1(t, y, z) dt + \alpha(y, z)$  ( $\alpha = ?$ ) !ok?  $\rightarrow$  3.2

3.2  $\Gamma \subseteq \Omega$  rég.&fermé: entoure UN trou de  $\Omega$ ,

( $\int_{\Gamma} F \bullet \ell \neq 0$ )  $\Rightarrow$  Non :  $\rightarrow$  (autre trou? 3.2(trou): 3.1 )

### 2.4 Théorème de Green

$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall \epsilon > 0 : B_{\epsilon}(x) \cap \Omega \neq \emptyset, B_{\epsilon}(x) \cap \Omega^c \neq \emptyset\}$

$B_{\epsilon}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \epsilon\}; \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$

$\partial\Omega$ : simp, ferm, rég: orienté +/-  $\rightarrow$   $\gamma$  laisse domaine à gauche/d

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  ouvert & borné = **domaine régulier**

$\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists \Omega_i$ : ouverts & bornés:

1.  $\forall 1 \leq j \leq n : \bar{\Omega}_j \subseteq \Omega_0$

2.  $\forall 1 \leq i \neq j \leq n : \bar{\Omega}_j \cap \bar{\Omega}_i = \emptyset$

3.  $\Omega = \Omega_0 \setminus (\bigcup_{i=1}^n \bar{\Omega}_i)$

4.  $\forall 0 \leq j \leq n : \partial\Omega_j = \Gamma_j$  : courbe simple, fermée, rég.

**Green:**  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ : rég;  $\partial\Omega$  orienté pos. ;  $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$

$\int_{\Omega} \text{rot } F(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} F \bullet \ell$

$\rightarrow \iint_{\Omega} \Delta f(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} (\text{grad } f \cdot \nu) d\ell, f \in C^2(\bar{\Omega})$

$\iint_{\Omega} \text{div } F(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} (F \cdot \nu) d\ell$  ( $\nu$  ext. unit normals to  $\partial\Omega$ )

### 2.5 Corollaires du Théorème de Green

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2; x_0 \in \partial\Omega, \nu_{x_0} \in \mathbb{R}^2$ : normale extérieure unité à  $\Omega \Leftrightarrow$

1.  $|\nu_{x_0}| = 1$

2.  $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial\Omega, t_0 \in [a, b] : \gamma(t_0) = x_0 \Rightarrow \langle \gamma'(t_0), \nu_{x_0} \rangle = 0$

3.  $\exists \epsilon_0 : \forall 0 < \epsilon < \epsilon_0 : x_0 + \epsilon \nu_{x_0} \notin \Omega, \gamma : [a, b] \rightarrow \partial\Omega$  orienté +  $\Rightarrow \nu_{\gamma(t)} = \frac{1}{|\gamma'(t)|} (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t))$

**Th. divergence:**  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2, F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$

$\int_{\Omega} \text{div } F(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle d\ell$

$\Gamma \subseteq (\partial\Omega$  orienté +) par  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$  on a:

$\int_{\Gamma} \langle F, \nu \rangle d\ell = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \frac{(\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t))}{|\gamma'(t)|} \rangle |\gamma'(t)| dt$

$= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t)) \rangle dt$

On connaît  $\nu$  mais pas  $\gamma$ ?  $\rightarrow$  calculer  $\int_{\Gamma} \langle F(x, y), \nu_{(x,y)} \rangle dl$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  rég. et  $F, G$  et  $H \in C^{\infty}(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$  définies par

$F(x, y) = (-y, x) \quad G(x, y) = (-y, 0) \quad H(x, y) = (0, x)$

Aire( $\Omega$ ) =  $\iint_{\Omega} 1 dx dy = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} F \bullet \ell = \int_{\partial\Omega} G \bullet \ell = \int_{\partial\Omega} H \bullet \ell$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ : rég.,  $\nu$  sa normale extérieure unité et  $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ .

1.  $\iint_{\Omega} \Delta u dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \nu \rangle dl$

2.  $\iint_{\Omega} (v \Delta u + \langle \nabla u, \nabla v \rangle) dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle v \cdot \nabla u; \nu \rangle dl$

3.  $\iint_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle u \nabla v - v \nabla u; \nu \rangle dl$

### 3. Intégrales de surface et théorèmes globaux

#### 3.1 Intégrales de surface

$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  est appelée une **surface régulière**  $\Leftrightarrow$

1.  $\exists A \subseteq \mathbb{R}^2$ : ouvert borné tq  $\partial A$  est une courbe rég. par morceaux simple et fermée et  $\exists \sigma : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$  tq  $\sigma \in C^1(\bar{A}, \mathbb{R}^3)$ ,  $\sigma(\bar{A}) = \Sigma$  et  $\sigma$  est injective sur  $A$ .

2. De plus  $\sigma_u \wedge \sigma_v = (\sigma_u^1, \sigma_u^2, \sigma_u^3) \wedge (\sigma_v^1, \sigma_v^2, \sigma_v^3) = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 \sigma_v^3 - \sigma_u^3 \sigma_v^2 \\ \sigma_v^1 \sigma_u^3 - \sigma_u^1 \sigma_v^3 \\ \sigma_u^1 \sigma_v^2 - \sigma_v^1 \sigma_u^2 \end{pmatrix}$

est tel que  $|\sigma_u \wedge \sigma_v| \neq 0$  sur  $A$ .

$\rightarrow \sigma$ : **paramétrisation régulière** de  $\Sigma$  et  $\frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{|\sigma_u \wedge \sigma_v|} = \nu_{(u,v)}$  est une **normale unité** au point  $\sigma(u, v)$ .

surface régulière:  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  **orientable**:  $\exists$  champ de vecteurs normaux unitaires et continus  $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$  (orientat. de  $\Sigma$ )

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $f \in C^0(\Omega)$ ,  $F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^3)$  et  $\Sigma \subseteq \Omega$  une surface rég. orientable paramétrée par  $\sigma : \bar{A} \rightarrow \Sigma$ .

1.  $\iint_{\Sigma} f ds = \iint_A f(\sigma(u, v)) \cdot |\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)| du dv$

2.  $\iint_{\Sigma} F \bullet ds = \iint_A \langle F(\sigma(u, v)), \sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v) \rangle du dv$

**(2.: orient.  $\Sigma$ !)** Si de manière plus générale  $\Sigma = \bigcup_{i=1}^k \Sigma_i$

$\iint_{\Sigma} f ds = \sum_{i=1}^k \iint_{\Sigma_i} f ds \quad \iint_{\Sigma} F \bullet ds = \sum_{i=1}^k \iint_{\Sigma_i} F \bullet ds$

#### 3.2 Théorème de la Divergence

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  un ouvert borné.  $\Omega$  est un **domaine régulier** s'il existe un entier  $m$  et  $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_m$  des ouverts tels que

1.  $\forall 1 \leq j \leq m : \bar{\Omega}_j \subseteq \Omega_0$

2.  $\forall 1 \leq i \neq j \leq m : \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$

3.  $\Omega = \Omega_0 \setminus [\bigcup_{i=1}^m \bar{\Omega}_i]$ .

4.  $\forall 0 \leq i \leq m$  on a  $\partial\Omega_i = \Sigma_i$ : surf. orient. rég. /morceau

Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  est un domaine régulier,  $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  un champ de normales extérieures unités continu et  $F \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ .

$\iint_{\Omega} \text{div } F(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds$

$\gamma : (\text{param. } \partial\Omega) : \iint_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), (-\gamma'_2(t), \gamma'_1(t)) \rangle dt$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  un domaine rég.,  $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  un champ de normales extérieures unités continu. Soit les champs vectoriels

$F(x, y, z) = (x, y, z) \quad G_1(x, y, z) = (x, 0, 0)$

$G_2(x, y, z) = (0, y, 0) \quad G_3(x, y, z) = (0, 0, z)$

Volume( $\Omega$ ) =  $\frac{1}{3} \iint_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle ds = \iint_{\partial\Omega} \langle G_i, \nu \rangle ds \quad \forall 1 \leq i \leq 3$

Soient  $f, g \in C^2(\bar{\Omega})$ . Alors

1.  $\iiint_{\Omega} (f \nabla g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \langle f \nabla g, \nu \rangle ds$

2.  $\iiint_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \langle f \nabla g - g \nabla f, \nu \rangle ds$

3.  $\iiint_{\Omega} \Delta f dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \langle \nabla f, \nu \rangle ds$

#### 3.3 Théorème de Stokes

$\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  une surf. rég. orientable,  $\sigma : \bar{A} \rightarrow \Sigma$  une param. ( $\partial A$ : courbe simple, fermée, rég. /morceaux). Le **bord de  $\Sigma$**  noté  $\partial\Sigma$  est donné par  $\sigma(\partial A)$  dont on enlève les courbent qui s'annulent et les points. Sens de parcours sur  $\partial A$  induit un sens de parcours sur  $\partial\Sigma$  par composition avec  $\sigma$ .

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  une param. (d'un bout) de  $\partial A$ , alors  $\sigma \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

est une paramétrisation (d'un bout) de  $\partial\Sigma$  et donc un choix de sens de parcours de  $\partial\Sigma$ . Le sens de parcours de  $\sigma \circ \gamma$  est appelé le **sens de parcours induit par  $\sigma$** .

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ : ouvert,  $\Sigma \subseteq \Omega$  surf. orientable rég. /morceaux:

**Stokes:**  $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \, ds = \int_{\partial\Sigma} F \bullet dl$ ,  $F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$

**Signes compatibles?**  $\sigma : \overline{A} \rightarrow \Sigma$  : une param. de  $\Sigma$ , on fixe qui est la 1<sup>ère</sup> et 2<sup>ème</sup> variable. On choisit l'orient. de  $\partial A$  qui laisse le domaine à gauche et pour  $\partial\Sigma$  on choisit l'orientation induite par  $\sigma$ .

Si  $u$  est la 1<sup>ère</sup> variable et  $v$  la 2<sup>ème</sup>, on prend  $\sigma_u \wedge \sigma_v$

$$\int \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \, ds = \int \int_A \langle \operatorname{rot} F(\sigma(u, v)); \sigma_u \times \sigma_v \rangle du dv$$

$$\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \, ds = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot \nu \, ds \quad (\nu : \text{unit normal vector})$$

## 4. Séries de Fourier

### 4.1 Motivation et rappels

$a < b \in \mathbb{R}$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  **continue par morceaux**, noté

$f \in C_{\text{morc}}^0([a, b])$  si  $\exists n \in \mathbb{N}$  et  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$

tq  $f \in C^0([a_{i-1}, a_i])$  pour  $i = 1, \dots, n$  et tels que  $\lim_{x \rightarrow a_{i-1}^+} f(x)$

et  $\lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x)$  existent et sont finies. Et si  $f \in C^1([a_{i-1}, a_i])$ ,

$\lim_{x \rightarrow a_{i-1}^+} f'(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a_i^-} f'(x)$  existent et sont finies,  $f$  est **C<sup>1</sup> par morceaux** et on note  $f \in C_{\text{morc}}^1([a, b])$ .

### 4.2 Définition et convergence

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $T$ -périodique et continue par morceaux.

$$\forall n \geq 0 : a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx$$

$$\forall n \geq 1 : b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx$$

$$F_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N [a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right)]$$

Série de Fourier  $F f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} F_N f(x)$  (si converge).  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$T$ -périodique et  $C^1$  par morceaux.

**Th. Dirichlet**  $\forall x \in \mathbb{R} \quad F f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2}$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $T$ -pér.  $\in C_{\text{morc}}^0$ .  $c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i\frac{2\pi}{T} nx} dx \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \int_a^b \phi(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re}(\phi(x)) dx + i \cdot \int_a^b \operatorname{Im}(\phi(x)) dx$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $T$ -périodique et continue par morceaux.

$$1. \forall n \geq 1 c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}; \forall n \leq -1 c_n = \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2}; c_0 = \frac{a_0}{2}.$$

$$2. \forall n \geq 1 a_n = c_n + c_{-n} \text{ et } b_n = i(c_n - c_{-n}) \text{ et } a_0 = 2c_0.$$

$$3. F_N f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\frac{2\pi}{T} nx} \quad (Ff(x) : N = \infty)$$

### 4.3 Propriétés

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $T$ -périodique et continue par morceaux.

1. La série de Fourier de  $f$  est  $T$ -périodique.

2. Si  $f$  est paire, i.e.  $f(x) = f(-x) \quad \forall n \geq 1 \quad b_n = 0$

3. Si  $f$  est impaire, i.e.  $f(-x) = -f(x), \forall n \geq 0 \quad a_n = 0$

$L > 0$ ,  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R} \in C_{\text{morc}}^1$ , la série de Fourier en cosinus

$$F_c f(x) = \frac{\hat{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right)$$

$$\hat{a}_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx$$

$$F_c f(x) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} & \text{si } x \in ]0, L[ \\ \lim_{t \rightarrow 0} f(0+t) & \text{si } x = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} f(L-t) & \text{si } x = L \end{cases}$$

$L > 0$ ,  $f \in C_{\text{morc}}^1 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  série de Fourier en sin:  $F_s f(x) =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right); \tilde{b}_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx$$

$$F_s f(x) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} & \text{si } x \in ]0, L[ \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = L \end{cases}$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C_{\text{morc}}^1$ ,  $T$ -périodique. **Identité de Parseval:**

$$\frac{2}{T} \int_0^T f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $T$ -pér.  $\in C^0(\mathbb{R}) \in C_{\text{morc}}^1$ ,  $f' \in C^1(\mathbb{R})$ :

$$F f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(x-t) + f'(x+t)}{2}$$

## 5. Transformée de Fourier

### 5.0.1 Définition et inversion

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C_{\text{morc}}^0$ . tq:  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$

→ Transformée de Fourier de  $f$  notée  $\mathcal{F}[f]$  ou  $\hat{f}$  est :

$$\mathcal{F}[f] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \mathcal{F}[f](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

$\phi \in C_{\text{morc}}^0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tq:  $\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\alpha)| d\alpha < +\infty$

→ Transformée de Fourier inverse de  $\phi$  notée  $\mathcal{F}^{-1}[\phi]$ :

$$\mathcal{F}^{-1}[\phi] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \mathcal{F}^{-1}[\phi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = f(x)$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tq  $\mathcal{F}^{-1}$  et  $\mathcal{F}$  sont définis

### 5.1 Propriétés

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C_{\text{morc}}^0$ :  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  sont définis

1.  $\hat{f}$  est continue.

2.  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  on a  $\mathcal{F}[a \cdot f + b \cdot g] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$

3.  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $g(x) = f(ax + b)$ :  $\hat{g}(\alpha) = \frac{e^{i\frac{b}{a}\alpha}}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\alpha}{a}\right)$

3.  $g(x) = e^{-ibx} f(x)$  alors  $\hat{g}(\alpha) = \hat{f}(\alpha + b)$

$f \in \mathcal{C}_{\text{morc}}^0$ . tq  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 dx < +\infty$ .

**Id. de Plancherel:**  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)|^2 d\alpha$

$f \in C^1(\mathbb{R})$ :  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx < \infty$ ,

$n \in \mathbb{N}^*$  et  $\forall 1 \leq k \leq n$  on a  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(x)| dx < +\infty$ , alors

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\alpha) = (i\alpha)^n \mathcal{F}[f]$$

Si  $h_k(x) = x^k f(x)$ ,  $\forall 1 \leq k \leq n$  on a  $\int_{-\infty}^{+\infty} |h_k(x)| dx < \infty$ :

$$\frac{d^n \hat{f}}{d\alpha^n}(\alpha) = (-i)^n \mathcal{F}[h_n](\alpha)$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ ,

$$1. \text{ si } f \text{ est paire, } \hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx$$

$$2. \text{ si } f \text{ est impaire, } \hat{f}(\alpha) = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx$$

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx < +\infty$  Le produit de convolution de  $f$  et  $g$  est défini par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$$

$f, g \in \mathcal{C}_{\text{morc}}$ . sur  $\mathbb{R}$ :  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty, \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx < \infty$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f * g(x)| dx < \infty \text{ et } \mathcal{F}[f * g](\alpha) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\alpha) \cdot \hat{g}(\alpha)$$

## 6. Applications de l'analyse de Fourier

**Sturm-Liouville:**  $t \in ]0, L[, \lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0 \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$

$u(t) = 0$  si  $\lambda \leq 0$ ; si  $\lambda > 0$ :  $u(t) = \sinh(t\sqrt{\lambda}) \frac{u_1}{\sqrt{\lambda}}$ ,  $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

**Heat (finite):**  $x \in [0, L], t > 0$ ,  $\begin{cases} u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t\right)$$

avec  $\alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

$$2. \text{ Heat (infinite): } x \in \mathbb{R}, t > 0, \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\alpha) \exp(i\alpha x - (a\alpha)^2 t) d\alpha$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

**3. Wave (finite):**  $x \in [0, L], t > 0$ ,  $\begin{cases} u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{cases}$

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} [a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

avec  $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ ,  $b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

**4. Laplace (rectangle):**  $x \in [0, L], y \in [0, M]$ ,

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = \alpha(x), u(x, M) = \beta(x) \\ u(0, y) = \gamma(y), u(L, y) = \delta(y) \end{cases}$$

$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$  avec

$$w(x, y) = \sum_{n \geq 1} (a_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{M}\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{M}\right)) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

avec  $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \alpha(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ ,

$$b_n \sinh\left(\frac{n\pi M}{L}\right) = \frac{2}{L} \int_0^L \beta(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - a_n \cosh\left(\frac{n\pi M}{L}\right)$$

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [d_n \cosh\left(\frac{n\pi}{M} x\right) + e_n \sinh\left(\frac{n\pi}{M} x\right)] \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right)$$

$$d_n = \frac{2}{M} \int_0^M \gamma(y) \sin\left(\frac{n\pi}{M} y\right) dy$$

$$e_n \sinh\left(\frac{n\pi}{M} L\right) = \frac{2}{M} \int_0^M \delta(y) \sin\left(\frac{n\pi}{M} y\right) dy - d_n \cosh\left(\frac{n\pi}{M} L\right)$$

$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$ ,  $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$ ,

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)],$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)],$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)],$$

$$f(y) \cdot y' = g(x) \Rightarrow \int f(y) dy = \int g(x) dx + C$$

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x) \Rightarrow y(x) = ce^{-P(x)} + \int p(x) dx$$

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0, \lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

$$\Delta > 0, \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow y_{\text{hom}}(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$\Delta = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \Rightarrow y_{\text{hom}}(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

$$\Delta < 0, \lambda = \alpha \pm i\beta \Rightarrow y_{\text{hom}}(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$