

1. Les opérateurs différentiels de la physique
 $\text{grad } f = Df = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ ($f \in C^1 : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$)
 $\text{nabla} : \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$
 $\text{div } F = \nabla \bullet F = \langle \nabla, F \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$ ($F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n), \Omega \subseteq \mathbb{R}^n : \text{ouvert}$)
 $\Omega \in \mathbb{R}^m : \text{ouvert}; F, G \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n) :$
 $\forall 1 \leq i \leq m : \frac{\partial}{\partial x_i} [\langle F, G \rangle] = \langle \frac{\partial}{\partial x_i} F, G \rangle + \langle F, \frac{\partial}{\partial x_i} G \rangle$
 $\forall 1 \leq i \leq m : \frac{\partial}{\partial x_i} [F \times G] = \frac{\partial}{\partial x_i} F \times G + F \times \frac{\partial}{\partial x_i} G$
 $\Omega \in \mathbb{R}^n, \Omega' \in \mathbb{R}^m, f \in \mathcal{C}^1(\Omega'), g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \text{ tq}$
 $g(\Omega) \in \Omega', \text{ fog} \in \mathcal{C}^1(\Omega) \text{ on a:}$
Chain rule: $\forall 1 \leq i \leq n : \frac{\partial f \circ g}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(x)$
 $n=2 : \text{rot } F = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$
 $n=3 : \text{rot } F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$
 $\text{laplacien} = \Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n : \text{ouvert}, f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$)
 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n : \text{ouvert}, f \in \mathcal{C}^2(\Omega), F \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^3) :$
 $\Delta f = \text{div}(\nabla f), \text{rot}(\nabla f) = 0, \text{div}(\text{rot } F) = 0$
 $\text{div}(f \text{ grad } g) = f \Delta g + \text{grad } f \cdot \text{grad } g$ ($f \in \mathcal{C}^1(\Omega), g \in \mathcal{C}^2(\Omega)$)
 $\text{div}(fg) = f \text{ grad } g + g \text{ grad } f$ ($f, g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$)
 $\text{div}(fF) = f \text{ div } F + F \cdot \text{grad } f$
 $\text{rot}(fF) = \text{grad } f \times F + f \text{ rot } F$ ($f \in \mathcal{C}^1(\Omega), F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$)
 $\text{rot rot } F = -\Delta F + \text{grad div } F$ ($\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3), \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$)
2. Intégrales curvilignes, champs qui dérivent d'un potentiel
2.1 Courbes dans \mathbb{R}^n
 $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$: courbe régulière \Leftrightarrow
 $\exists [a, b] \subseteq \mathbb{R}, \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n : \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) :$
1. $\Gamma = \gamma([a, b]) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists t \in [a, b] : \gamma(t) = x\}$
2. $\gamma \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R}^n)$
3. $|\gamma'(t)| = \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \dots + \gamma_n'(t)^2}$
 $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$: courbe **simple** \Leftrightarrow régulière + $\exists \gamma$ injective sur $[a, b]$
 $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$: courbe **fermée** \Leftrightarrow régulière + $\forall \gamma : \gamma(a) = \gamma(b)$
 Γ : rég./morceaux $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_{>0} : \Gamma = \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i (\Gamma_i : \text{rég.})$
2.2 Intégrales curvilignes
 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, \Gamma : \text{rég.} \subseteq \Omega, \gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$
 $\int_{\Gamma} f \ell = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt, f \in C^0(\Omega)$ (trkl sens de γ)
 $\int_{\Gamma} F \bullet \ell = \int_a^b \langle F(\gamma(t)); \gamma'(t) \rangle dt, F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ (sens de γ !)
 $\text{longueur}(\Gamma) = \int_{\Gamma} 1 d\ell = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$
 $\int_{\Gamma} f d\ell = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} f d\ell; \int_{\Gamma} F \bullet d\ell = \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} F \bullet d\ell$
2.3 Champs qui dérivent d'un potentiel
 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n : \text{ouvert}, F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$
dérive d'un potentiel $\Leftrightarrow \exists f \in \mathcal{C}^1(\Omega) : \nabla f = F$ dans Ω (" ∇f ")
 $\nabla f = F \Rightarrow \int_{\Gamma} F \bullet d\ell = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ ($\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$)
 $\nabla f = F \Rightarrow \forall 1 \leq i, j \leq n, \forall x \in \Omega : \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)$
 $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x) \wedge (\Omega : \text{convexe} \subset \text{simp.cnctd}) \Rightarrow \nabla f = F$
 $\Leftrightarrow F$ dérive d'un potentiel sur Ω
 $\Leftrightarrow \forall A, B \in \Omega; \Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Omega (\text{rég.; join } A, B) \int_{\Gamma_1} F \bullet d\ell = \int_{\Gamma_2} F \bullet d\ell$
 $\Leftrightarrow \forall \Gamma \subseteq \Omega (\text{rég. \& fermée}): \int_{\Gamma} F \bullet d\ell = 0$
F dérive d'un potentiel?
1. $\text{rot } f \neq 0 \Rightarrow \text{Non}$
2. Ω simply connected (simp.cnctd)? : pas de trous \Rightarrow Oui
3.1 $f = ?$, $f(x, y, z) = \int^x F_1(t, y, z) dt + \alpha(y, z)$ ($\alpha = ?$) !ok? \rightarrow 3.2
3.2 $\Gamma \subseteq \Omega$ rég. & fermé: entoure UN trou de Ω ,
 $(\int_{\Gamma} F \bullet d\ell \neq 0) \Rightarrow \text{Non} : \rightarrow$ (autre trou? 3.2(trou): 3.1)
2.4 Théorème de Green
 $\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \forall \epsilon > 0 : B_{\epsilon}(x) \cap \Omega \neq \emptyset, B_{\epsilon}(x) \cap \Omega^c \neq \emptyset\}$
 $B_{\epsilon}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < \epsilon\}; \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$
 $\partial\Omega$: simp, ferm, rég: orienté +/- $\rightarrow \gamma$ laisse domaine à gauche/d
 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ouvert & borné = **domaine régulier**
 $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \exists \Omega_i$: ouverts & bornés:
1. $\forall 1 \leq j \leq n : \bar{\Omega}_j \subseteq \Omega_0$
2. $\forall 1 \leq i \neq j \leq n : \bar{\Omega}_j \cap \bar{\Omega}_i = \emptyset$
3. $\Omega = \Omega_0 \setminus (\bigcup_{i=1}^n \bar{\Omega}_i)$
4. $\forall 0 \leq j \leq n : \partial\Omega_j = \Gamma_j$: courbe simple, fermée, rég.
Green:, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$: rég; $\partial\Omega$ orienté pos. ; $F \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$

$\int \int_{\Omega} \text{rot } F(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} F \bullet d\ell$
 $\rightarrow \int \int_{\Omega} \Delta f(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} (\text{grad } f \cdot \nu) d\ell, f \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$
 $\int \int_{\Omega} \text{div } F(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} (F \cdot \nu) d\ell$ (ν ext. unit normals to $\partial\Omega$)
2.5 Corollaires du Théorème de Green
 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2; x_0 \in \partial\Omega, \nu_{x_0} \in \mathbb{R}^2$: normale extérieure unité à $\Omega \Leftrightarrow$
1. $|\nu_{x_0}| = 1$
2. $\gamma : [a, b] \rightarrow \partial\Omega, t_0 \in [a, b] : \gamma(t_0) = x_0 \Rightarrow \langle \gamma'(t_0), \nu_{x_0} \rangle = 0$
3. $\exists \epsilon_0 : \forall 0 < \epsilon < \epsilon_0 : x_0 + \epsilon \nu_{x_0} \notin \Omega, \gamma : [a, b] \rightarrow \partial\Omega$ orienté +
 $\Rightarrow \nu_{\gamma(t)} = \frac{1}{|\gamma'(t)|} (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$
Th. divergence: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2, F \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$
 $\int \int_{\Omega} \text{div } F(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle d\ell$
 $\Gamma \subseteq (\partial\Omega \text{ orienté } +)$ par $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$ on a:
 $\int_{\Gamma} \langle F, \nu \rangle d\ell = \int_a^b \langle F(\gamma(t)); \frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{|\gamma'(t)|} \rangle |\gamma'(t)| dt$
 $= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t)) \rangle dt$
On connaît ν mais pas γ ? \rightarrow calculer $\int_{\Gamma} \langle F(x, y), \nu_{(x, y)} \rangle d\ell$
 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ rég. et F, G et $H \in C^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ définies par
 $F(x, y) = (-y, x) \quad G(x, y) = (-y, 0) \quad H(x, y) = (0, x)$
 $\text{Aire}(\Omega) = \int \int_{\Omega} 1 dx dy = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} F \bullet d\ell = \int_{\partial\Omega} G \bullet d\ell = \int_{\partial\Omega} H \bullet d\ell$
 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$: rég., ν sa normale extérieure unité et $u, v \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$.
1. $\int \int_{\Omega} \Delta u dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle \nabla u, \nu \rangle d\ell$
2. $\int \int_{\Omega} (v \Delta u + \langle \nabla u, \nabla v \rangle) dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle v \cdot \nabla u; \nu \rangle d\ell$
3. $\int \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle u \nabla v - v \nabla u; \nu \rangle d\ell$
3. Intégrales de surface et théorèmes globaux
3.1 Intégrales de surface
 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ est appelée une **surface régulière** \Leftrightarrow
1. $\exists A \subset \mathbb{R}^2$: ouvert borné tq ∂A est une courbe rég. par morceaux simple et fermée et $\exists \sigma : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tq $\sigma \in \mathcal{C}^1(\bar{A}, \mathbb{R}^3), \sigma(\bar{A}) = \Sigma$ et σ est injective sur A .
2. De plus $\sigma_u \wedge \sigma_v = (\sigma_u^1, \sigma_u^2, \sigma_u^3) \wedge (\sigma_v^1, \sigma_v^2, \sigma_v^3) = \begin{pmatrix} \sigma_u^2 \sigma_v^3 - \sigma_v^2 \sigma_u^3 \\ \sigma_v^1 \sigma_u^3 - \sigma_u^1 \sigma_v^3 \\ \sigma_u^1 \sigma_v^2 - \sigma_v^1 \sigma_u^2 \end{pmatrix}$
est tel que $|\sigma_u \wedge \sigma_v| \neq 0$ sur A .
 $\rightarrow \sigma$: **paramétrisation régulière** de Σ et $\frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{|\sigma_u \wedge \sigma_v|} = \nu_{(u, v)}$ est une **normale unité** au point $\sigma(u, v)$.
surface régulière: $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ **orientable**: \exists champ de vecteurs normaux unitaires et continus $\nu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ (orientat. de Σ)
 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f \in C^0(\Omega), F \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^3)$ et $\Sigma \subseteq \Omega$ une surface rég. orientable paramétrée par $\sigma : \bar{A} \rightarrow \Sigma$.
1. $\int \int_{\Sigma} f ds = \int \int_A f(\sigma(u, v)) \cdot |\sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v)| du dv$
2. $\int \int_{\Sigma} F \bullet ds = \int \int_A \langle F(\sigma(u, v)); \sigma_u(u, v) \wedge \sigma_v(u, v) \rangle du dv$
(2.: orient. Σ !) Si de manière plus générale $\Sigma = \bigcup_{i=1}^k \Sigma_i$
 $\int \int_{\Sigma} f ds = \sum_{i=1}^k \int \int_{\Sigma_i} f ds \quad \int \int_{\Sigma} F \bullet ds = \sum_{i=1}^k \int \int_{\Sigma_i} F \bullet ds$
3.2 Théorème de la Divergence
 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un ouvert borné. Ω est un **domaine régulier** s'il existe un entier m et $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_m$ des ouverts tels que
1. $\forall 1 \leq j \leq m : \bar{\Omega}_j \subseteq \Omega_0$.
2. $\forall 1 \leq i \neq j \leq m : \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$.
3. $\Omega = \Omega_0 \setminus [\bigcup_{i=1}^m \bar{\Omega}_i]$.
4. $\forall 0 \leq i \leq m$ on a $\partial\Omega_i = \Sigma_i$: surf. orient. rég. /morceau
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ est un domaine régulier, $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de normales extérieures unités continu et $F \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$.
 $\int \int \int_{\Omega} \text{div } F(x, y, z) dx dy dz = \int \int_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds$
 $\gamma : (\text{param. } \partial\Omega) : \int \int_{\partial\Omega} \langle F; \nu \rangle ds = \int_a^b \langle F(\gamma(t)); (-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t)) \rangle dt$
 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un domaine rég., $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de normales extérieures unités continu. Soit les champs vectoriels
 $F(x, y, z) = (x, y, z) \quad G_1(x, y, z) = (x, 0, 0)$
 $G_2(x, y, z) = (0, y, 0) \quad G_3(x, y, z) = (0, 0, z)$
 $\text{Volume}(\Omega) = \frac{1}{3} \int \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle ds = \int \int_{\partial\Omega} \langle G_i, \nu \rangle ds \forall 1 \leq i \leq 3$
Soient $f, g \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$. Alors
1. $\int \int \int_{\Omega} (f \nabla g + \langle \nabla f; \nabla g \rangle) dx dy dz = \int \int_{\partial\Omega} \langle f \nabla g; \nu \rangle ds$
2. $\int \int \int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) dx dy dz = \int \int_{\partial\Omega} \langle f \nabla g - g \nabla f; \nu \rangle ds$
3. $\int \int \int_{\Omega} \Delta f dx dy dz = \int \int_{\partial\Omega} \langle \nabla f; \nu \rangle ds$
3.3 Théorème de Stokes
 $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ une surf. rég. orientable, $\sigma : \bar{A} \rightarrow \Sigma$ une param. (∂A : courbe simple, fermée, rég. /morceaux). Le **bord** de Σ noté $\partial\Sigma$ est donné par $\sigma(\partial A)$ dont on enlève
• Les courbes qui sont parcourues dans deux sens opposés.
• Les parties qui sont réduites à un point.

Sens de parcours sur ∂A induit un sens de parcours sur $\partial \Sigma$ par composition avec σ .

$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une param. (d'un bout) de ∂A , alors $\sigma \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une paramétrisation (d'un bout) de $\partial \Sigma$ et donc un choix de sens de parcours de $\partial \Sigma$. Le sens de parcours de $\sigma \circ \gamma$ est appelé le **sens de parcours induit par σ** .

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$: ouvert, $\Sigma \subseteq \Omega$ surf. orientable rég. /morceaux:

Stokes: $\iint_{\Sigma} \text{rot } F \, ds = \int_{\partial \Sigma} F \bullet dl, F \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$

Signes compatibles? $\sigma : \bar{A} \rightarrow \Sigma$: une param. de Σ , on fixe qui est la 1^{ère} et 2^{ème} variable. On choisit l'orient. de ∂A qui laisse le domaine à gauche et pour $\partial \Sigma$ on choisit l'orientation induite par σ . Pour la normale, si u est la 1^{ère} variable et v la 2^{ème}, on prend $\sigma_u \wedge \sigma_v$ (et non $\sigma_v \wedge \sigma_u$).

$$\int \int_{\Sigma} \text{rot } F \, ds = \int \int_A \langle \text{rot } F(\sigma(u, v)); \sigma_u \times \sigma_v \rangle \, du \, dv$$

$$\int \int_{\Sigma} \text{rot } F \, ds = \int \int_{\Sigma} \text{rot } F \cdot \nu \, ds \quad (\nu : \text{unit normal vector})$$

4. Séries de Fourier

4.1 Motivation et rappels

$a < b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, noté $f \in C_{\text{morc}}^0([a, b])$ si $\exists n \in \mathbb{N}$ et $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ tq $f \in C^0([a_{i-1}, a_i])$ pour $i = 1, \dots, n$ et tels que $\lim_{x \rightarrow a_{i-1}^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a_i^-} f(x)$ existent et sont finies. Et si $f \in C^1([a_{i-1}, a_i])$, $\lim_{x \rightarrow a_{i-1}^+} f'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a_i^-} f'(x)$ existent et sont finies, f est **C¹ par morceaux** et on note $f \in C_{\text{morc}}^1([a, b])$.

4.2 Définition et convergence

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -périodique et continue par morceaux.

$$\forall n \geq 0 : a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx$$

$$\forall n \geq 1 : b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) dx$$

La somme partielle de Fourier de f d'ordre N est $F_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right]$

Série de Fourier $F f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} F_N f(x)$ (si converge). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -périodique et C^1 par morceaux.

Th. Dirichlet $\forall x \in \mathbb{R} \quad F f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2}$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad T\text{-pér.} \in C_{\text{morc}}^0 \cdot c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-i \frac{2\pi}{T} nx} dx \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \int_a^b \phi(x) dx = \int_a^b \text{Re}(\phi(x)) dx + i \cdot \int_a^b \text{Im}(\phi(x)) dx$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ T -périodique et continue par morceaux.

- $\forall n \geq 1 \quad c_n = \frac{a_n - i b_n}{2} ; \forall n \leq -1 \quad c_n = \frac{a_{-n} + i b_{-n}}{2} ; c_0 = \frac{a_0}{2}.$
- $\forall n \geq 1 \quad a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$ et $a_0 = 2c_0.$
- $F_N f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i \frac{2\pi}{T} nx} \quad (F f(x) : N = \infty)$

4.3 Propriétés

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction T -périodique et continue par morceaux.

- La série de Fourier de f est T -périodique.
- Si f est paire, i.e. $f(x) = f(-x) \quad \forall n \geq 1 \quad b_n = 0$
- Si f est impaire, i.e. $f(-x) = -f(x), \forall n \geq 0 \quad a_n = 0$

$L > 0, f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R} \in C_{\text{morc}}^1$, la série de Fourier en cosinus

$$F_c f(x) = \frac{\hat{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right)$$

$$\hat{a}_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx$$

$$F_c f(x) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} & \text{si } x \in]0, L[\\ \lim_{t \rightarrow 0} f(0+t) & \text{si } x = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} f(L-t) & \text{si } x = L \end{cases}$$

$L > 0, f \in C_{\text{morc}}^1 : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ série de Fourier en sin: $F_s f(x) =$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) ; \tilde{b}_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx$$

$$F_s f(x) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x-t) + f(x+t)}{2} & \text{si } x \in]0, L[\\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = L \end{cases}$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C_{\text{morc}}^1, T$ -périodique. **Identité de Parseval:**

$$\frac{2}{T} \int_0^T f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad T\text{-pér.} \in C^0(\mathbb{R}) \in C_{\text{morc}}^1, f' \in C^1 \text{morc.} :$

$$F f'(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(x-t) + f'(x+t)}{2}$$

5. Transformée de Fourier

5.0.1 Définition et inversion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C_{\text{morc}}^0 \quad \text{tq: } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$$

\rightarrow Transformée de Fourier de f notée $\mathcal{F}[f]$ ou \hat{f} est :

$$\mathcal{F}[f] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \mathcal{F}[f](\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\alpha x} dx$$

$$\phi \in C_{\text{morc}}^0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{tq: } \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\alpha)| d\alpha < +\infty$$

\rightarrow Transformée de Fourier inverse de ϕ notée $\mathcal{F}^{-1}[\phi] :$

$$\mathcal{F}^{-1}[\phi] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \mathcal{F}^{-1}[\phi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = f(x), f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq \mathcal{F}^{-1} et \mathcal{F} sont définis

5.1 Propriétés

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \in C_{\text{morc}}^0 : \hat{f}$ et \hat{g} sont définis

1. \hat{f} est continue.

2. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ on a $\mathcal{F}[a \cdot f + b \cdot g] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$

3. $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, g(x) = f(ax + b) : \hat{g}(\alpha) = \frac{e^{i \frac{b}{a} \alpha}}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\alpha}{a}\right)$

3. $g(x) = e^{-ibx} f(x)$ alors $\hat{g}(\alpha) = \hat{f}(\alpha + b)$

$$f \in C_{\text{morc}}^0 \quad \text{tq } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 dx < +\infty.$$

Id. de Plancherel: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)|^2 d\alpha$

$$f \in C^1(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty, \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)| dx < \infty,$$

$n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall 1 \leq k \leq n$ on a $\int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(k)}(x)| dx < +\infty$, alors

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\alpha) = (i\alpha)^n \mathcal{F}[f]$$

Si $h_k(x) = x^k f(x), \forall 1 \leq k \leq n$ on a $\int_{-\infty}^{+\infty} |h_k(x)| dx < \infty :$

$$\frac{d^n \hat{f}}{d\alpha^n}(\alpha) = (-i)^n \mathcal{F}[h_n](\alpha)$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$,

1. si f est paire, $\hat{f}(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\alpha x) dx$

2. si f est impaire, $\hat{f}(\alpha) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\alpha x) dx$

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx < +\infty$ Le produit de convolution de f et g est défini par

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) g(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt(0)$$

$$f, g \in C_{\text{morc}}^0 \text{ sur } \mathbb{R} : \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty, \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| dx < \infty :$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f * g(x)| dx < \infty \text{ et } \mathcal{F}[f * g](\alpha) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\alpha) \cdot \hat{g}(\alpha)$$

6. Applications de l'analyse de Fourier

Sturm-Liouville: $t \in]0, L[, \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0 \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$

Sol: $u(t) = 0$ si $\lambda = 0$; si $\lambda \neq 0$: $u(t) = \sinh(t \sqrt{|\lambda|}) \frac{u_1(t)}{\sqrt{|\lambda|}}$

Heat (finite): $x \in [0, L], t > 0, \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp\left(-\left(\frac{an\pi}{L}\right)^2 t\right)$$

$$\text{avec } \alpha_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

2. Heat (infinite): $x \in \mathbb{R}, t > 0, \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(a\alpha)^2 t) \hat{f}(\alpha) \exp(i\alpha x) d\alpha$$

3. Wave (finite): $x \in [0, L], t > 0, \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \end{cases}$

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\text{avec } a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, b_n = \frac{L}{n\pi c} \cdot \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

4. Laplace (rectangle): $x \in [0, L], y \in [0, M],$

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(x, 0) = \alpha(x), u(x, M) = \beta(x) \\ u(0, y) = \gamma(y), u(L, y) = \delta(y) \end{cases}$$

$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$ avec

$$w(x, y) = \sum_{n \geq 1} \left(a_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + b_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$\text{avec } a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \alpha(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

$$b_n \sinh\left(\frac{n\pi M}{L}\right) = \frac{2}{L} \int_0^L \beta(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - a_n \cosh\left(\frac{n\pi M}{L}\right)$$

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[d_n \cosh\left(\frac{n\pi}{M} x\right) + e_n \sinh\left(\frac{n\pi}{M} x\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{M} y\right)$$

$$d_n = \frac{2}{M} \int_0^M \gamma(y) \sin\left(\frac{n\pi}{M} y\right) dy$$

$$e_n \sinh\left(\frac{n\pi}{M} L\right) = \frac{2}{M} \int_0^M \delta(y) \sin\left(\frac{n\pi}{M} y\right) dy - d_n \cosh\left(\frac{n\pi}{M} L\right)$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b, \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b,$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)],$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)],$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)],$$