

## 2010 第三届“ ScienceWord ”杯数学中国数学建模网络挑战赛

### 承 诺 书

我们仔细阅读了第三届“ ScienceWord ”杯数学中国数学建模网络挑战赛的竞赛规则。

我们完全明白，在竞赛开始后参赛队员不能以任何方式（包括电话、电子邮件、网上咨询等）与队外的任何人（包括指导教师）研究、讨论与赛题有关的问题。

我们知道，抄袭别人的成果是违反竞赛规则的，如果引用别人的成果或其他公开的资料（包括网上查到的资料），必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中明确列出。

我们郑重承诺，严格遵守竞赛规则，以保证竞赛的公正、公平性。如有违反竞赛规则的行为，我们将受到严肃处理。

我们允许数学中国网站（www.madio.net）公布论文，以供网友之间学习交流，数学中国网站以非商业目的的论文交流不需要提前取得我们的同意。

我们的参赛报名号为：#1187 号

参赛队员（签名）：

队员 1：刘芯菱

队员 2：游 一

队员 3：代远波

参赛队教练员（签名）：邓 磊

参赛队伍组别：本科组

## 2010 第三届“ ScienceWord ”杯数学中国数学建模网络挑战赛

### 编 号 专 用 页

参赛队伍的参赛号码（请各个参赛队提前填写好）：

竞赛统一编号（由竞赛组委会送至评委团前编号）：

竞赛评阅编号（由竞赛评委团评阅前进行编号）：

## 2010 年第三届“ ScienceWord ”杯数学中国 数学建模网络挑战赛

题 目：\_\_\_\_\_ A 题：聪明的汽车

关键词：最小转弯半径 紧约束 非线性优化 最小停车区域 最大安全区域

### 摘 要

“聪明的汽车”是一个关于汽车能否以及怎样安全泊进停车区域的问题。为了解决这个问题，首先，我们对安全泊车进行了定义，在这样的前提下，建立了模型一，只考虑两次泊车即可完成的情形，运用逆向思维，考虑汽车从停车位倒车驶出或开车前进驶出这两种情况，在具体的模型求解中，我们对这两种情况作了具体的理论性的阐述，并求出了最优解，得到了极限停车区域以及最大的安全泊车区域，那么，在安全区域中行驶的车便可以安全泊车，反之则不能安全泊车。在这个模型下我们得到了车位的长和宽，分别为7.8453m, 2.0570m 这与真实值相当接近。我们进一步进行了人性化，给了司机、车辆、天气一定的宽松条件，模型与实际也就比较吻合了；然而，模型一还是有其局限性，主要体现在它只考虑了二次泊车成功的情况，这样就很大程度上限制了车的行进，在某种程度上延长了最小的停车区域，在这样的情形下，我们考虑建立模型二，以达到优化模型一以及更加人性化的目的。为了更好地说明问题，我们先从经过三次泊车做起，在这样的前提下，同样运用了最小转弯半径这一汽车的重要参数值，考虑汽车进行第一次泊车时汽车已经以最小转弯半径行驶，并确定出其最佳的泊车位置，在这里我们也充分利用了“紧约束”这一极限条件，使得停车区域能够达到最小，经过此番考虑后，我们可以进行多次泊车以达到最终目的，其算法与三次泊车基本相同，也就不再赘述了。综上所述，两个模型都采用了“紧约束”这样的假设，以达到我们所需要的目的，求出了最佳的泊车路线，解决了上题目中所阐述的两个问题。

参赛队号 #1187 号

所选题目 A 题

参赛密码

(由组委会填写)

## 英文摘要

The "Smart Car" is a problem about how to park a car safely into a car parking space. In order to solve this problem, in the first place, we define the safely parking according to the common data. Under this circumstances, the model one takes minimum turning radius as the core content and it only concerns the twice-parking situation. Utilizing reversing mind, we consider the car driving from the parking space to the initial position or the other way around. In the concrete model, we explain the model concretely and get a optimal result which is the extreme parking zone and the maximum security parking zone. Hence, the car can be put in safely within the security zone and vice versus. However, the conclusion can only be reached on the condition that we can get enough evidence and also it'll be a little different from the practical usage. So, in the end of the model, we make it more humane and give the driver, car and weather an easier environment so that our model can be more practical. Nevertheless, the model still has its con- nements, mainly because we only care about the twice-parking situation. In the twice-parking situation, on a great extent, it constraints the movement of the car and the minimum security zone. Considering this, we make a second model, mostly for increasing the humanity. In order to explain the problem thoroughly, we start to discuss the three-time parking, under this condition, we still consider the minimum turning radius as an important coefficient. Since when the first-parking, the car has already utilizes the minimum turning radius and we can make sure its optimal position. We completely take advantage of the "tight-constraints", the extreme condition to make the security zone as small as possible (see details in the artical). After taking this into account, obviously, we can use multi-parking to reach our goal. The algorithm is similar to the three-time parking. Therefore, we can solve both problem one and problem two.

From what has been discussed above, two models both utilizes "tight-constraints", an assumption, to reach our goal and get the best route, hence solving the two problems requested.

## 目 录

1	问题的重述	1
2	模型的假设	2
3	符号和说明	2
4	问题的分析、模型的建立及求解	3
4.1	问题分析	3
4.2	模型一：最小转弯半径极限约束模型	5
4.3	模型一的初步改进	11
4.4	模型二：多次泊车约束模型	11
5	模型的评价和改进	17
6	参考文献	17
7	附录	17

## 1 问题的重述

考虑的问题是在狭窄的空间里把车停放在合适的位置，或在短小的停车位上侧位停车，一直是考验驾驶员技术与信心的问题。有调查报告称：57%的驾驶员对自己的停车技术缺乏自信，这一方面影响人的驾驶体验，一方面也使停车空间不能得到充分利用。在此，我们要建立适当的模型协助驾驶员来解决停车的问题。具体要求如下：

1. 对侧位停车而言，在空位较短的时候，驾驶员会难以确定自己的汽车是否能顺利停入。请你建立合理的模型，以判断本车是否能在该处侧位停车。我们假设可以得到停车位置的平面图，包括停车空位的长度宽度等数据。考虑到实用性，模型所需的本车数据要能够容易测得，例如几何尺寸、转弯半径等。
2. 我们假设停车位置的平面图能够显示在汽车的车载显示器上。请给出本车为了进入停车位，应当从哪个位置和角度进入。将理想线路以及允许的偏差显示在图上。

图 1 侧位停车示意图

报名号 #1187

## 2 模型的假设

1. 汽车泊车过程中无侧滑现象产生
2. 车辆前轮的运行精确到控制下的理想路径
3. 计算汽车宽度时不考虑反光镜，转向侧灯，脚踏板等
4. 路面及周围环境对汽车运行状况无影响
5. 我们在各大正规网站上查到的数据均真实有效

## 3 符号和说明

表 1 符号与说明

	符号	表示意义
1	$R_{OB}$	车辆后轴外侧转弯半径(图中 OB)
2	$R_{OG}$	车辆头部内侧转弯半径(图中 OG)
3	$R_{OH}$	车辆头部外侧转弯半径(图中 OH)
4	$R_{OA}$	车辆尾部内侧转弯半径(图中 OA)
5	$R_{OD}$	车辆尾部外侧转弯半径(图中 OD)
6	$r = OF$	车辆前轮外侧转弯半径(图中 OF)
7	$d_1$	前悬(图中 HF)
8	$d_0$	前后轴距(图中 FB)
9	$d_2$	后悬(图中 BD)
10	$\mu$	(图中 $\angle FOB$ )
11	'	(图中 $\angle HOB$ )
12	$d$	车的宽度(图中 AB)
13	$^\circ$	(图中 $\angle GOB$ )

为了更好的对模型建立的符号进行说明，我们给出具体的操作图形：




图 2 车辆各转弯半径示意图

## 4 问题的分析、模型的建立及求解

### 4.1 问题分析

分析车辆平行泊车的全过程，有两个因素对平行泊车质量影响较大，一为汽车动力学特性，二为环境因素。汽车的动力学特性即车辆自身参数，包括车长、车宽、前悬、最小转弯半径；环境因素主要是道路参数，包括停车位长度、停车位宽度、泊车初始位置，即泊车时两平行车辆间水平距离。

泊车过程有影响的几个重要参数，结合下图进行下说明：




图 3 车辆各专业名称示意图



## 报名号 #1187

1. 车过程有影响的几个重要参数：
2. 车宽 (vehicle width) : 汽车最左端到最右端的距离 , 不包括反光镜、转向侧灯、脚踏板等部位。
3. 轴距 (wheel base) : 汽车前轴中心至后轴中心的距离。
4. 前悬 (front overhang) : 汽车最前端至前轴中心的距离。汽车的基本参数中不包括前悬 , 可通过车长与轴距计算前悬的长度。
5. 最小转弯半径 (minimum turning radius) : 转向盘转到极限位置时的转弯半径为最小转弯半径。当转向盘转到极限位置 , 汽车以最低稳定车速转向行驶时 , 外侧转向轮的中心平面在支承平面上滚过的轨迹圆半径。它很大程度上表征了汽车能够通过狭窄弯曲地带或绕过不僵越过的障碍物的能力。转弯半径越小 , 汽车的机动性能越好。图 4 中所示  $d$  , 为汽车的最小转弯半径。

图 4 汽车最小转弯半径示意图

6. 车位长度 (length of parking space) : 路旁停车位前后都停有车辆时 , 前方车辆尾部到后方车辆头部的距离。
7. 车高 : (vehicle height) 至地面间的距离。
8. 轮距 : (vehicle tread) 同一车轿左右轮胎中心线间的距离。

对于问题一 , 假设我们可以得到停车位置的平面图 , 包括停车空位的长度宽度等数据 , 需要建立合理的模型 , 以判断本车是否能在该处测位停车。我们从最小半径入手 , 考虑两次泊车的情况 , 可以求得最小的停车区域 , 从而也就可以获得最大的安全区域 , 如果汽车在

## 报名号 #1187

处于安全区域中，则显然可以安全泊车，反之，则不能安全泊车。从这个方向入手，考虑定义的车各个半径与边界可能碰撞的临界值，从而确立了一个大致安全区域，也就建立了约束条件，从而可以得到一个最小停车位的最小长度和宽度，与已知的相比较即可给驾驶员提供一个参考数据，判断自己是否是一个“聪明的汽车”。

接下来从人性化的角度考虑，上述情况没有考虑到汽车速度对于泊车停车位的影响，我们引入司机一般的转向时间的考虑，得出更加合理化的最小停车位的范围。

在泊车过程中一次往往是不能达到满意的泊车，从而我们提出多次泊车达到理想泊车的情况建立受各边界点反复约束非线性方程组，从而可以求出更加精确的停车位约束值。

对于问题二，在问题一的基础上进行优化，进一步得到需要的结果。

### 4.2 模型一：最小转弯半径极限约束模型

考虑使问题简化，我们先解决最小停车位的问题，首先我们考虑车辆以最小半径转弯时，车辆各个突出和凹陷部分的半径，这样可以根据这些半径与周围可能发生碰撞的极限值来建立约束条件，从而求得需要的最小停车位。如上面的介绍，我们易由几何关系得出一些数据的值：由图 2 所示，由几何关系可得：

2

$$r = OF$$

2

$$R_{OH} = \sqrt{r^2 \cos^2 \mu + (d_1 + d_0)^2}$$

2

$$R_{OD} = \sqrt{r^2 \cos^2 \mu + d_2^2}$$

2

$$R_{OG} = \sqrt{r^2 \cos^2 \mu + d_2^2}$$

2

$$\tan' = \frac{d_1 + d_0}{r \cos \mu}$$

从而我们有

$$' = \arctan \frac{d_1 + d_0}{r \cos \mu}$$

## 报名号 #1187

进而可以得出第一次泊车的圆方程为：

$$x^2 + y^2 = R_{OH}^2 = r^2 \cos^2 \mu + (d_1 + d_0)^2 = d_0^2 \cot^2 \mu + (d_1 + d_0)^2 \quad (1)$$

下面设第二次泊车时，汽车所转动的角度为  $\theta$ ，

第二次泊车的半径为  $R$ ， $r$ ，且其对应的偏转角为  $\mu_x$ ，另外一圆，其圆心为：

$$Q[(d_0 \cot \mu + d_0 \cot \mu_x) \cos \theta; (d_0 \cot \mu + d_0 \cot \mu_x) \sin \theta]$$

则第二次泊车的 D 点（即右后轮）所成轨迹其方程为：

$$\begin{aligned} (x_j - x_Q)^2 + (y_j - y_Q)^2 &= (d_0 \cot \mu_x - d)^2 \\ (x_j - (d_0 \cot \mu + d_0 \cot \mu_x) \cos^2 \theta) + (y_j - (d_0 \cot \mu + d_0 \cot \mu_x) \sin^2 \theta) &= (d_0 \cot^2 \mu_x - d) \end{aligned} \quad (2)$$

为了更加明确地求出最小的停车位，先考虑倒车停入泊车位的方案一：

2 方案一

图 5 方案一示意图

以 AB 所在直线（即后轴）为 x 轴，以 O 为坐标原点建立了坐标系。其中  $\angle OHj = R_{OH}$ 。记角  $\angle QOB$  为  $\theta$ 。在后轴（AB）转了  $\theta$  后，立刻使前轮偏转到相反方向的最大值。此时可以得到车扫过的区域，以圆弧 HP 和圆弧 PK 作为带型区域的右边界。圆弧 HP 由最

## 报名号 #1187

大圆  $O_{max}$  确定, 圆弧  $PK$  由最小圆记为  $O_{min}$  确定。  $O_{max}$  和  $O_{min}$  的交点记为  $(x_0; y_0)$ 。我们现在考虑  $x_0$  和  $x_A$  的大小关系。

1)  $x_0 > x_A$  时, 带型区域边界上  $x = x_A = d_0 \cot \mu$  对应的  $y_1 > 0$  由方程 (2), 即:

$$[d_0 \cot \mu_x - d_0(\cot \mu \cot \mu_x) \cos \theta + d]^2 + [y_1 - d_0(\cot \mu + \cot \mu_x) \sin \theta]^2 = [d_0 \cot \mu_x - d]^2$$

确定, 由  $y_1 \geq 0$  可解之得:

$$y_1 = \frac{(d_0 \cot \mu_x - d)^2 - [d_0 \cot \mu_x - d_0(\cot \mu + \cot \mu_x) \cos \theta + d]^2}{2d_0(\cot \mu + \cot \mu_x) \sin \theta}$$

2)  $x_0 < x_A$  时,  $x = x_A = d_0 \cot \mu$  对应的值  $y_2$  为:

$$\frac{d_1^2 + d_0^2 + 2d_1d_0 \cos \mu - d^2 + 2d_0d \cot \mu}{2d_0d \cot \mu} = \frac{d_1^2 + d_0^2 + 2d_1d_0 \cos \mu - d^2 + 2d_0r \cot \mu}{2d_0r \cot \mu}$$

易知 (3) 式中  $\mu_x = \mu$ , 现在假设车以最小转弯半径倒出, 在此只用考虑  $\mu_x = \mu$ , 为了使车能安全倒出, 显然有:  $y_1 \geq y_2 \geq 0$ , 即:  $y_1 \geq y_2$ . 说明

$$w_1 = 2R_{OD} - 2R_{OB} + d = 2 \sqrt{(r \cos \mu)^2 + d_2^2} - 2r \cos \mu + d$$

应是最小宽度,

$$l_1 = y_2 + d_2 = \frac{d_1^2 + d_0^2 + 2d_1d_0 \cos \mu - d^2 + 2d_0r \cot \mu}{2d_0r \cot \mu} + d_2$$

为最小长度。以上理论上说明了一次性倒车停车 (即甲方案) 的最小宽度和最小长度。

下面, 再考虑一次性 (即泊车两次) 进入停车位的情况:

## 2 方案二

现在我们做一次性前行停车。比较和一次性到车停车的差别和优劣。如图从下到上是一次性前行停车的全过程。在一次性前行停车时。车左侧扫过的区域的边界由左侧  $CG$  确定。要使车停在车位中轴上, 则宽度一定要大于

$$w_2 = 2R_{OH} - 2R_{OB} + d = 2 \sqrt{r^2 \cos^2 \mu + (d_1 + d_0)^2} - 2r \cos \mu + d$$

如图  $CG$  运行  $C_1G_1$  时转弯可使  $NL$  最短。

1. 若在  $N$  之后转弯, 则  $CG$  运行到  $C_1G_1$  的外部, 停车区域的长度及宽度就不是最短。

报名号 #1187

图 6 方案二示意图

2. 若在  $N$  之后转弯, 则不能绕过点  $N$ , 这不符合条件。

所以在点  $N$  转弯才使得长度最短。最短长度：

$$l_2 = \sqrt{r^2(1 - \cos^2 \mu) + d_0^2} + 2rd\cos\mu + d_1 + d_0$$

综合以上的两种方案, 在此, 我们作出断定,  $w_1 < w_2$  综合以上的两种方案, 在此, 我们作出断定,  $d_1 + d_0 > d_2$ , 这从本质上决定了  $R_{OD} < R_{OH}$ , 从这点也可以给出比较好的预测, 下面我们也将以实例举出)。令目标函数  $z = l_1 + l_2$ 。

约束条件见下表 (这是根据一般的车辆的一些参数值而定)：

表 2 约束条件

约束个数	约束条件
1	$\frac{1}{4} = 3 \cdot \mu \cdot \frac{1}{4} = 4$
2	$d \cdot 2.8$
3	$d \leq 2$
4	$3 \leq d_0 \leq 2$
5	$r = d_0 \sin \mu$
6	$1.5 > d_1 > 0.8$
7	$1.5 > d_2 > 1$

利用非线性规划软件 lingo 求得  $\max(z)$  小于零, 从而知道  $l_1 < l_2$ . 从而,

## 报名号 #1187

极限停车长度为： $l_1 = y_2 + d_2 = \sqrt{d_1^2 + d_0^2 + 2d_0d_1} + d^2 + 2d_0d\cot\mu + d_2$

极限停车宽度为： $w_1 = 2R_{OD} + 2R_{OB} + d = 2\sqrt{(r\cos\mu)^2 + d^2} + 2r\cos\mu + d$

如下图 S 为最小的单侧路面宽度其值为：

设：

最小的停车区域的宽度： $m(width) = l_1 + 0.2$

最小的停车区域的长度： $m(length) = l_2 + 0.2$

$$S = w_1 + r\cos\mu + d$$

车辆刚刚进入时离停车区域的最小宽度为：

$$S_0 = s + d + m(width)$$

图 7 方案一和二对比示意图

由以上的解知道一方案更好。现在以奥迪 A6(2.0L;125kw) 为例，以下是两方案的对比：考虑新奥迪 A6L2.0T(发动机：2.0L125KW, 车长×宽×高：5.035m × 1.855m ×

# 报名号 #1187

1.485m；最小转弯半径： $r = 6.02m$ ；前悬： $d_1 = 1.001m$ ；后悬： $d_2 = 1.809m$  车辆前后轴距： $d_0 = 2.945m$ ；车长： $5.035m$ （注意此处  $d_1 + d_0 = 3.946m > d_2 = 1.089m$ ）。结合上面的理论分析以及数据，我们计算可得：

表 3 极限停车宽度比较

极限停车宽度	方案一	方案二
$w_1$	2.0570m	4.3113m

表 4 极限停车长度比较

极限停车长度	方案一	方案二
$l_1$	7.8453m	8.5592m

通过上表的比较可以很清晰地看出这与我们的预测相吻合。

根据需要对汽车的泊车情况进行如下定义：

定义 1 车辆已完全泊入指定停车位，车身与竖直方向夹角不大于  $5^\circ$ ，且车辆中轴与停车位中轴间水平距离不大于  $100mm$ 。（且一般来说根据经验值停车位的长度是车长的 1.5 到 1.7 倍）

故有，

$$^2 \text{ 最小的停车区域的宽度：} m(width) = l_1 + 0.2 = 2.2570m$$

$$^2 \text{ 最小的停车区域的长度：} m(length) = l_2 + 0.2 = 8.1453m$$

从而：

$$\frac{m(length)}{d_0 + d_1 + d_2} = \frac{8.1453}{5.035} = 1.6177 \approx 2 (1.5:1.7)$$

而且：

$$\frac{m(width)}{d} = \frac{2.2570}{1.855} = 1.2167m$$

考虑到车距周边的安全距离大于  $0.1m$ ，故其宽度为：

$$S = w_1 + r \cos \mu_j d + 0.1 = 5.5526m$$

车辆刚刚开始泊车时的最小宽度为：

$$S_0 = s_j d_j m(width) = 1.2406m$$

## 报名号 #1187

符合一般的常规，当然，在  $m(length)$  以及  $m(width)$  都增大的情况下，当然车辆能够安全泊车，说明模型一是合理的。

### 4.3 模型一的初步改进

在模型一中，显然对于方向的假设不完全合理。对于行进中需要泊车的车辆来说偏转角不可能从一边在瞬间偏到另外一边，所以前轮的偏角应该是连续变化的，但是要做到这个函数关系是很困难的（这与车辆的性能，人的主观能力以及道路等因素都相关，做起来比较困难，在此我们从简）。从而只需考虑找一个简单的、恰当的函数来约束运动轨迹，使运动轨迹在较小的范围中变化。

假设司机在速度为  $v$  时能在秒内完成方向盘的转动（转到最大）。我们考虑在司机完成方向盘转动前，车已经过  $2$  位置沿弧向泊车位移动路程。把模型一求出的  $w_1$  和  $l_1$  增加到  $w_1 + vt$  和  $l_1 + vt$ 。这样完全可以保证车辆安全的停入泊车位。

我们可以假定停车时车速很慢（如取  $0.5 \text{ m/s}$ ，当然，停车速度不会太快，这不符合人的常规思维）。由统计数据知道平常人完成一次车辆转向的时间  $t$  不大于  $2$  秒。再把安全距离考虑在内，最后可以得到一次完成泊车时，最小宽度不会大于  $w_1^0$ ：根据模型一得到的表达式：

$$w_1^0 = w_1 + 0.3$$

最小长度是：

$$l_1^0 = l_1 + 0.3$$

这样，我们就能保证在两次内完成泊车，而且，该模型比模型一更加人性化，更加符合人驾车的实际情况。

### 4.4 模型二：多次泊车约束模型

在模型一的基础上，考虑到一次泊车过于理想化，建立多次泊车的模型，以求得到更加完善的模型。

#### <sup>2</sup> 够建两次完成停车算法



报名号 #1187

---

图 8 模型一人性化处理示意图

报名号 #1187

表 5 模型二的符号与说明

	符号	表示意义
1	$\odot_C$	$\angle AOC$
2	$\odot_D$	$\angle AOD$
3	$\odot_G$	$\angle AOG$
4	$\odot_H$	$\angle AOH$
5	$R_{OA}$	$OA$
6	$R_{OB}$	$OB$
7	$R_{OC}$	$OC$
8	$R_{OD}$	$OD$
9	$R_{OG}$	$OG$
10	$R_{OH}$	$OH$
11	$OB$	$r \cos \mu$

在模型一的基础上，我们可以记  $\odot_{Mox} = \odot$ ，设  $\odot_{Nox} = \tilde{A}$ ， $OB = r \cos \mu$ 。我们将车置于  $OM$  的中间，即： $OA = BM$ 。 $AB$  为车的后轴。现在以  $O$  为定点， $M$  绕  $O$  转到  $N$ 。然后固定  $M$  在点  $N$ ，使  $O$  绕  $N$  转到  $P$ ，使  $PN$  与  $x$  轴平行。在  $M \rightarrow N$ ，固定  $M$  在点  $N$  处， $O \rightarrow P$  的过程中车由模型一的初始位置经过两次运动，停在线段  $PN$  的中间。

在这样的过程中有如下式子，车由  $OM$  转到  $ON$  时： $C$  点坐标

$$(R_{OC} \cos \tilde{A} \odot_C; R_{OC} \sin \tilde{A} \odot_C)$$

$D$  点坐标

$$(R_{OD} \cos \tilde{A} \odot_D; R_{OD} \sin \tilde{A} \odot_D)$$

车由  $ON$  转到  $PN$  时，

$G$  点坐标

$$(R_{OH} \cos \frac{1}{4} \odot_H + (R_{OA} + R_{OB}) \cos \tilde{A}; R_{OH} \sin \frac{1}{4} \odot_H + (R_{OA} + R_{OB}) \sin \tilde{A})$$

$H$  点坐标

$$(R_{OG} \cos \frac{1}{4} \odot_G + (R_{OA} + R_{OB}) \cos \tilde{A}; R_{OG} \sin \frac{1}{4} \odot_G + (R_{OA} + R_{OB}) \sin \tilde{A})$$

图 9 模型二

点 C 是线段在 ON 上时,车的后方最突出的点,D 是此时右侧最突出的点。当线段运动到 PN 时,前端突出点是点 H。可求得

$$H = [R_{OH} \cos \alpha; R_{OH} \sin \alpha], \alpha = 2[\tilde{A} + \theta_H; \theta + \theta_H]$$

其中,  $H$  表示线段从点 M 运动到点 N 的过程中 H 的轨迹。

令  $R_{OG} \sin \frac{1}{4} j + \theta_G + (R_{OA} + R_{OB}) \sin \tilde{A} = R_{OH} \sin \alpha$ , 可得  $H$  与  $y = R_{OH} \sin \alpha$  的交点, 记为  $(x_0, y_0)$  我们所需要的目标函数:

$$I = R_{OG} \sin \frac{1}{4} j + \theta_G + (R_{OA} + R_{OB}) \sin \tilde{A} j - R_{OC} \sin \tilde{A} j + \theta_c$$

报名号 #1187

约束条件：

$$1. 0 \leq \tilde{A} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$2. R_{OH} \cos \frac{\pi}{4} j \cdot \theta_H + (R_{OA} + R_{OB}) \cos \tilde{A} \leq x_0$$

利用 LINGO 求解目标函数，设最小长度为  $L_{min}$ 。进而可求出  $\tilde{A}$ ，所以车辆的各个部分的运动轨迹都可以求出。宽度为：

$$W = 2R_{OD} \cos \tilde{A} j \cdot \theta_D + 2R_{OG} \cos \frac{\pi}{4} j \cdot \theta_G + 2(R_{OA} + R_{OB}) \cos \tilde{A} + d$$

下面确定车的行驶轨迹，不妨只考虑车的点  $H$  和  $D$ 。

对于  $H$  的

以奥迪 A6(2.0L;125kw) 为例有  $L_{min}$ 、 $W$  和上述轨迹，经计算得到如下结果：

表 6 模型二两次泊车计算结果

$L_{min}$	$W$
7.2634m	2.0138m

2 构建三次及其以上完成停车的算法

报名号 #1187

图 10 三次及其以上完成停车的图像说明

如图,在"够建两次完成停车算法"中当 $\bigcirc$ 运动到点 $S$ 处时,固定 $\bigcirc$ 在点 $S$ 处,然后类似"够建两次完成停车算法"中的过程。可得到三次完成停车的"目标函数"和约束条件。理论上而言这样的过程是可以无限的进行下去的。

对于问题二,结合问题一给出的各项计算值,可得下图:

图 11 方案一示意图

## 5 模型的评价和改进

在整个模型的建立和算法，都充分利用了车辆的最小转弯半径。在最小转弯半径下不能停入泊车位，则车辆就不能停入。建立“最紧”的模型（使车恰好可以停入），是本次建模的核心内容，在得到此数据后，我们便可以轻松地得到车辆的行驶安全区域，要确定一条安全的泊车路径也就相对容易多了。对于上面的两个模型，首先说模型一，我们给了它充分的条件，使得它在运行时可以按照我们所预想的轨迹运动，但这是不现实的，车的行驶速度、汽车的本身性能、驾驶员的反映能力、路面、天气等能够对我们预想的轨迹产生显著影响，这其中某些因素（主要体现在车的行驶速度、汽车的本身性能、驾驶员的反映能力）对我们的设想是不可忽略的，但是又难以确定，由此可以看出模型一的局限性。在模型一的基础上，我们建立了多次泊车的模型二，这相对模型一来说，从理论上说，可以在经过无限次泊车，最终达到我们的理想停车位置。综合考虑以上两个模型，我们求出了汽车的泊车的安全区域，对于题目中的第一个问题自然迎刃而解。在模型二中，我们给出了多次泊车的路线，题目（2）中的问题自然得到解决。

## 6 参考文献

【1】数学实验，傅鹏，何中市等，北京：科学出版社，2000.8

## 7 附录

```
Model: sets: l1=SQRT(d12 + d02 + 2 * d1 * d0 * cos(t)) + d1 + d0;
l2=SQRT((d02 * d2 + 2 * (d0*SIN(t)) * d * COS(t) + d1 + d0; Max = l1 * l2;
d12 + d02 + 2*d1*d0*cos(t) + d2 + 2*d*d0*cos(t) > 0;
sqrt((d02 * d2 + 2*d0*SIN(t)*d*COS(t) + d1 + d0 > 0;
@bnd(3.14/6,t,3.14/4);
@bnd(2,d,2.8);
@bnd(2,d0,3);
@bnd(0.8,d1,1.5);
@bnd(1,d2,1.5);
end;
```