Universidad del Estado de Sonora

División de Ciencias Exactas y Naturales.

Licenciatura en Física.

Física Computacional 1

Hedwin Aaron Encinas Acosta

1. Péndulos

La matemática de los péndulos es en general algo complicada. Para simplificarla se pueden hacer asunciones, que en el caso del péndulo simple nos permite resolver la ecuación de movimiento para ángulos pequeños de oscilaron.

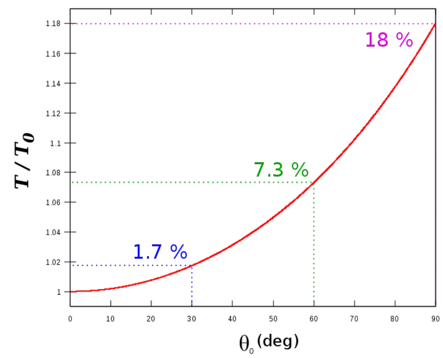

Figura 1: Desviación del periodo real de la aproximación por ángulos pequeños.

1.1. Péndulos simple

El péndulo simple es una idealización del péndulo normal pero en un sistema aislado y se hacen las siguientes asunciones:

- La masa de la cuerda de la que la masa cuelga es despreciable;
- La lenteja es una masa puntual;
- El movimiento solo ocurre en dos dimensiones;
- El movimiento no pierde energía por fricción o resistencia del aire;
- El campo gravitacional es uniforme;
- El soporte no se mueve;

La ecuación diferencial que representa el movimiento de un péndulo simple es:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{1}$$

Donde g es la aceleración debido a la gravedad, l es la longitud del péndulo y θ es el angulo de desplazamiento.

2. Aproximacion por ángulo pequeño

La ecuación diferencial [1] no es tan fácil de resolver , y no ay solución que se pueda escribir en términos de funciones elementales. Pero si se dan restricciones al tamaño de la amplitud de la oscilación se puede resolver fácilmente.Se asume que el ángulo es mucho menor que 1 radian, sustituimos $\sin\theta$ en [1]

$$sin\theta \approx \theta$$

la ecuación nos queda:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

con solucion igual a:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$$

El periodo del movimiento esta dado por la siguiente ecuación:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

2.1. Regla del pulgar para la longitud del péndulo

Como la ecuación del periodo (T_0) puede ser expresada como $l = \frac{g}{\pi^2}\frac{T_0}{4}$ si se usan las unidades del SI, y asumiendo que las medidas se toman en la superficie de la tierra, entonces $g \approx 9.81\frac{m}{s^2}$, y $\frac{g}{\pi^2} \approx 1$, entonces una aproximación relativamente razonable para el largo y el periodo es:

$$l \approx \frac{T_0^2}{4}$$

$$T_0 \approx 2\sqrt{l}$$

donde T_0 es el numero de segundos dos latidos del péndulo, y l medido en metros.

3. Amplitud arbitraria

Para amplitudes mas aya de la aproximación por ángulo pequeño, uno puede calcular el periodo exacto invirtiendo la ecuación para la velocidad angular obtenida por medio de la energía:

$$\frac{dt}{d\theta} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} \tag{2}$$

y al integrar sobre un ciclo completo

$T = t(\theta_0 \to 0 \to -\theta_0 \to 0 \to \theta_0)$

o dos veces la mitad de un ciclo

$T = 2t(\theta_0 \to 0 \to -\theta_0)$

o cuatro veces un cuarto de un ciclo

$T = 4t(\theta_0 \to 0)$

lo que nos lleva a

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}} d\theta$$

Esta integral se puede reescribir en términos de integrales elípticas como

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} F\left(\frac{\theta_0}{2}, \csc\frac{\theta_0}{2}\right)$$

donde F es la integral elíptica incompleta del primer tipo, definida como

$$F(\rho, k) = \int_0^{\rho} \frac{1}{\sqrt{1 - (k^2)\sin^2 u}} du$$

o mas concisamente utilizando la sustitución $\sin u = \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta_0}{2}}$ expresando a θ en términos de u,

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right) \tag{3}$$

donde K es la integral elíptica completa del primer tipo, definida como

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}du$$

Para la comparación de la aproximación y la solución completa , consideramos el periodo del péndulo de longitud 1m en la tierra y un ángulo inicial de 10 grados. Donde la la solución completa nos da $T \approx 2.0102s$ y la aproximaron nos da $T \approx 2.0064$. La diferencia entre los dos valores dados por las dos soluciones (completa y la aproximación) es menor que 0.2 % , es mucho menor que la dada por la variación de la gravedad causada por la localización geográfica. De aquí que exista muchas maneras de calcular la integral elíptica:

3.1. Solución polinomio de Legendre de la integral elíptica

Dada la ecuación (3) y el polinomio de Legendre para la solución de integrales elípticas:

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1*3}{2*4}\right)^2 k^4 + ... + \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 k^{2n} + ...\right\}$$

Donde $n!!$ denota el doble factorial, y una solución exacta para el periodo de un péndulo es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1*3}{2*4}\right)^2\sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \left(\frac{1*3*5}{2*4*6}\right)^2\sin^6\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{(2n)!}{(2^n*n!)^2}\right)^2\sin^{2n}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right]$$

3.2. Solución en serie de potencias de la integral elíptica

Otra formulación de la solución anterior se puede encontrar si la siguiente serie de Maclaurin:

$$\sin\frac{\theta_0}{2} = \frac{1}{2}\theta_0 - \frac{1}{48}\theta_0^3 + \frac{1}{3840}\theta_0^5 - \frac{1}{645120}\theta_0^7 + ...$$

se utiliza en la solución polinomio de Legendre anteriormente. La serie de potencia resultante es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \frac{173}{737280}\theta_0^6 + \frac{22931}{1321205760}\theta_0^8 + \frac{1319183}{951268147200}\theta_0^{10} + ...\right)$$

3.3. Solución media aritmético-geométrica para la integral elíptica

Dada la ecuación 3 y la solución media aritmético-geométrica de la integral elíptica:

$$K(k) = \frac{\pi/2}{M(1-k, 1+k)}$$

donde M (x, y) es la media aritmética-geométrica de x e y.
Esto proporciona una alternativa y la fórmula más rápida convergente para el período:

$$T = \frac{2\pi}{M(1, \cos(\theta_0/2))}\sqrt{\frac{l}{g}}$$

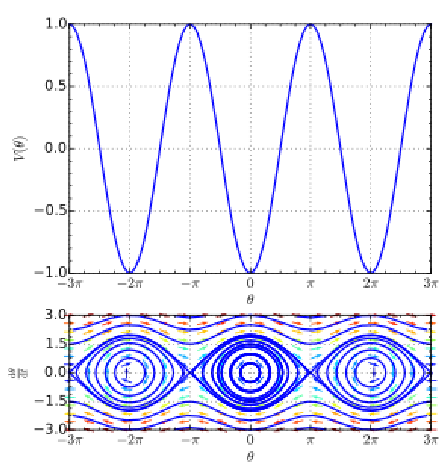

Figura 2: La energía potencial y de fases de un péndulo simple.