Projektaufgabe Praktische Finanzmathematik

Heehwan Soul, 885941

1.

Ich habe fünf Aktien gewählt, deren Kurs im Zeitraum 1.01.2021 bis 31.12.2021 insgesamt gestiegen ist: SAP, Deutsche Bank, Porsche Automobil Holding Vz, Siemens, und Airbus SE. Ich habe die historischen Tageskurse im Zeitraum 1.01.2021 bis 31.12.2021 heruntergeladen und sie haben gleiche Währung(Euro) und die gleiche Handelstage(insgesamt 255 Tage).

2.

1) die erwarteten logarithmischen Renditen(Tagesdrift, Jahresdrift) schätzen: Erstmal habe ich die logarithmische Rendite(ln(Si/Si-1)) berechnet(Bezugsgröße Tag) und deshalbe habe ich insgesamt 254 logarithmische Renditen. Dann habe ich den Mittelwert von diesen Renditen berechnent, um die Tagesdrift zu gefunden. Mit Tagesdrift kann man Jahresdrift berechnen: Jarhesdrift = (Handelstage-1)*Tagesdrift. In meinem Fall ist Jahresdrift = 254*Tagesdrift.

Ergebnis:

Anlage(i)	Tagesdrift	Jahresdrift
SAP(1)	0,0007	0,1705
Deutsche Bank(2)	0,0009	0,2258
Porsche Automobil Holding Vz(3)	0,0015	0,3913
Siemens(4)	0,0010	0,2609
Airbus SE(5)	0,0009	0,2182

2) die Volatilitäten schätzen(Tagesvola, Jahresvola): Die Volatilität ist die Standardabweichung der logarithmischen Rendeite. Ich habe für Tagesvola die Standardabweichung von oben berechneten 254 logarithmischen Renditen berechnet. Mit Tagesvola kann man Jahresvola berechnen: Jahresvola = (Handelstage-1)^0,5*Tagesvola. In meinem Fall ist Jahresvola = 254^0,5*Tagesvola.

Anlage(i)	Tagesvola	Jahresvola
SAP(1)	0,0133	0,2120
Deutsche Bank(2)	0,0212	0,3381
Porsche Automobil Holding Vz(3)	0,0210	0,3348
Siemens(4)	0,0166	0,2650
Airbus SE(5)	0,0208	0,3322

3) die Korrelationen schätzen: Zuerst standardisiere logarithmische Rendite mit Tagesdrift und Tagesvola: (ln(Si/Si-1) – Tagesdrift) / Tagesvola. Danach multipliziere diese standardisierten Werte von zwei Anlagen miteinander. In meinem Fall habe ich dann 254 Produkte und der Mittelwert von diesen Produkte ist Korrelation von dieser zwei Anlagen.

	Korrelation
SAP und Deutsche Bank(1 und 2)	0,1304
1 und 3	0,3403
1 und 4	0,4761
1 und 5	0,2963
2 und 3	0,3604
2 und 4	0,4126
2 und 5	0,4830
3 und 4	0,4334
3 und 5	0,4338
4 und 5	0,4201

Anlage(i)	1	2	3	4	5
1	1	0,1304	0,3403	0,4761	0,2963
2	0,1304	1	0,3604	0,4126	0,4830
3	0,3403	0,3604	1	0,4334	0,4338
4	0,4761	0,4126	0,4334	1	0,4201
5	0,2963	0,4830	0,4338	0,4201	1

3.

Angenommen der Investor habe sein Vermögen gleichmäßig auf die fünf Aktien verteilt.

Wir machen von jetzt Portfolioanalysen und dafür verwenden wir die einfache Rendite. Deswegen muss die statistisch geschätzte logarithmische Rendite auf die einfache Rendite umgerechnet werden. Man kann Jahresdrift(logarithmischer Renditeerwartungswert) auf die Jahresrendite(einfacher Renditeerwartungswert) so umrechnen: Jahresrendite = EXP(Jahresdrift) – 1. Man kann auch Jahresvola(Standardabweichung der logarithmischen Rendite) auf die Jahresrisiko(Standardabweichung der einfachen Renditen) so umrechnen: Jahresrisiko = EXP(Jahresvola) – 1.

Anlage(i)	Jahresrendite(einfacher Renditeerwartungswert, mü)	Jahresrisiko(Standardabweichung der einfachen Renditen, sigma)
SAP(1)	0,1859	0,2361
Deutsche Bank(2)	0,2533	0,4023
Porsche Automobil Holding Vz(3)	0,4789	0,3977
Siemens(4)	0,2981	0,3034
Airbus SE(5)	0,2438	0,3940

1) die erwartete Rendite dieses Referenz-Portfolios: Die Anteile(a1, a2, a3, a4, a5) sind jeweils 0,2. Man kann die erwartete Rendite mit Vektor von Anteilen(alpha) und Vektor von Jahresrendite(mü) berechnen: $\mu_P = <\vec{\alpha}, \vec{\mu}>$

2) die Standardabweichung dieses Referenz-Portfolios: Man kann erstmal die Varianz berechnen und dann die Standardabweichung finden. Um die Varianz zu berechnen verwendet man der Vektor von Anteilen und die Kovarianzmatrix: $\sigma_P^2 = < \vec{\alpha}; C\vec{\alpha} >$

Wir haben schon oben Korrelationskoeffizienten und Jahresrisiko(Standardabweichung der einfachen Renditen, sigma) berechnet und damit können wir die entsprechende Kovarianzmatrix berechnen: cov(Ri, Rj) = Korrelation * Standardabweichung(Ri) * Standardabweichung(Rj).

Kovarianzmatrix C	1	2	3	4	5
1	0,05576	0,01239	0,03196	0,03411	0,02757
2	0,01239	0,16183	0,05767	0,05036	0,07656
3	0,03196	0,05767	0,15815	0,05229	0,06798
4	0,03411	0,05036	0,05229	0,09206	0,05022
5	0,02757	0,07656	0,06798	0,05022	0,15525

Standardabweichung dieses Referenz-Portfolios = (Varianz dieses Referenz-Portfolios)*0,5

Momente des Referenz-Portfolios	
Erwartungswert(erwartete Rendite)	0,2920
Varianz	0,0618
Standardabweichung	0,2486

4. Maximierung der Rendite bei Vorgabe der Varianz

Wir bestimmen jetzt dasjenige Portfolio mit gleichem Risiko aber größter Chance des Referenz-Portfolios. Wir wissen, dass die Varianz vom Referenz-Portfolio 0,0618 ist und wir werden mit dem Excel-Solver das Portfolio bestimmen. Dafür brauchen wir folgende: Zielfunktion(Z(a1,a2,a3,a4,a5)), Variablen Zellen(a1, a2, a3, a4, a5) und Nebenbedingungen. Die Zielfunktion ist hier die erwartete Rendite mit Variablen a1,a2,a3,a4,a5(Anteile von 5 Anlagen). Es gibt zwei Nebenbedingungen. 1) Die Summe der 5 Varaiblen ist 1. 2) Die Varianz dieser Portfolio soll gleich wie die Varianz des Referenz-Portfolios. Dann erhalten wir das Ergebnis:

Anteil von 1, a1	0,3167
Anteil von 2, a2	0,0842
Anteil von 3, a3	0,3802
Anteil von 4, a4	0,2575
Anteil von 5, a5	-0,0387

Somit werden Aktien5(Airbus SE) im Wert von 3,87% des Portfoliovermögens leerverkauft, sodass 103,87% des Portfoliovermögens in Aktien vom Typ 1,2,3 und 4 angelegt werden. Ohne Leerverkäufe besteht das Maximum-Rendite-Portfolio(mit Varianz = 0,0618) zu 100% aus Aktien vom Typ 1,2,3 und 4.

Momente des optimalen Portfolios	
Erwartungswert	0,3296
Varianz	0,0618
Standardabweichung	0,2486

Die Varianz(0,0618) ist gleich wie die Varianz vom Referenz-Portfolio(0,0618) und der Erwartungswert(0,3296) ist größer als der Erwartungswert vom Referenz-Portfolio(0,2920).

5. Minimierung der Varianz bei Vorgabe der Rendite

Wir bestimmen jetzt dasjenige Portfolio mit gleicher Chance aber kleinerem Risiko des Referenz-Portfolios. Wir wissen, dass die Chance(erwartete Rendite) vom Referenz-Portfolio 0,2920 ist und wir werden mit dem Excel-Solver das Portfolio bestimmen. Dafür brauchen wir folgende: Zielfunktion(Z(a1,a2,a3,a4,a5)), Variablen Zellen(a1, a2, a3, a4, a5) und Nebenbedingungen. Die Zielfunktion ist hier die Varianz mit Variablen a1,a2,a3,a4,a5(Anteile von 5 Anlagen). Es gibt zwei Nebenbedingungen. 1) Die Summe der 5 Varaiblen ist 1. 2) Die erwartete Rendite dieser Portfolio soll gleich wie die erwartete Rendite des Referenz-Portfolios. Dann erhalten wir das Ergebnis:

a1	0,4346
a2	0,1099
a3	0,2599
a4	0,2066
a5	-0,0111

Somit werden Aktien5(Airbus SE) im Wert von 1,11% des Portfoliovermögens leerverkauft, sodass 101,11% des Portfoliovermögens in Aktien vom Typ 1,2,3 und 4 angelegt werden. Ohne Leerverkäufe besteht das Minimum-Varianz-Portfolio(mit erwarteter Rendite = 0,2920) zu 100% aus Aktien vom Typ 1,2,3 und 4.

Momente des optimalen Portfolios	
Erwartungswert	0,2920
Varianz	0,0518
Standardabweichung	0,2276

Der Erwartungswert (0,2920) ist gleich wie der Erwartungswert vom Referenz-Portfolio(0,2920) und die Varianz (0,0518) ist kleiner als die Varianz vom Referenz-Portfolio(0,0618).

6. Minimale Varianz

Jetzt bestimmen wir das Portfolio mit minimaler Varianz. Das heißt, wir nur eine Nebenbedingung haben, die Summe der 5 Varaiblen(a1, a2, a3, a4, a5) ist 1. Wir werden noch mal mit dem Excel-Solver das Portfolio bestimmen. Die Zielfunktion ist hier die Varianz mit Variablen a1,a2,a3,a4,a5(Anteile von 5 Anlagen). Dann erhalten wir das Ergebnis:

a1	0,6528
a2	0,1577
a3	0,0376
a4	0,1117
a5	0,0402

Momente des optimalen Portfolios	
Erwartungswert	0,2224
Varianz	0,0445
Standardabweichung	0,2109

Man kann sehen, dass die Varianz dieses Portfolios kleiner als alle Varianzen der obigen 3 Portfolios(0,0618, 0,0618, 0,0518) ist.

Man kann diese Anteilen(a1,a2,a3,a4,a5) auch direkt berechnen:

$$\vec{\alpha}_{MVP} = \frac{C^{-1}\vec{e}}{<\vec{e}, C^{-1}\vec{e}>}$$

Man kann die Formel mit der Methode der Lagrange beweisen.

Mit dieser Formel erhalten wir das gleiche Ergebnis wie oben.

7. Supereffiziente Portfolio

Angenommen der risikolose Zinssatz sei 0%. Das heißt, r0 = 0. Wir werden die folgende Formel verwenden um die Anteilen a1, a2, a3, a4, a5 von dem supereffizienten Portfolio zu berechnen:

$$\vec{\alpha}_{SEP} = \frac{C^{-1}\left(\vec{\mu} - r_0\vec{e}\right)}{<\vec{e}; C^{-1}\left(\vec{\mu} - r_0\vec{e}\right)>}.$$

Wir haben schon C(Kovarianzmatrix) und mü(einfacher Renditeerwartungswert) berechnet und e = (1 1 1 1 1)^T. Dann erhalten wir das Ergebnis:

a1	0,2369
a2	0,0667
a3	0,4614
a4	0,2925
a5	-0,0575

Somit werden Aktien5(Airbus SE) im Wert von 5,75% des Portfoliovermögens leerverkauft, sodass 105,75% des Portfoliovermögens in Aktien vom Typ 1,2,3 und 4 angelegt werden.

Momente des supereffizienten Portfolios(Tangentialportfolio)	
mü_T(Erwartungswert)	0,3551
sigma_T(Standardabweichung)	0,2665

Die Menge aller effizienten Portfolios von allen zulässigen Gesamtportfolios(mit einer risikolosen Anlage) ist die Gerade durch die Punkte (0, r0) = (0,0) und (mü_T, sigma_T) = (0,3551, 0,2665).