Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Сибирский Государственный Университет Телекоммуникаций и Информатики»

Кафедра вычислительных систем

Лабораторная работа
по дисциплине «Моделирование»

Выполнили: студенты 4 курса группы ИС-941
Патрушев Н.В.
Сизов М.А.
Проверил: старший преподаватель кафедры ВС
Петухова Я. В.

Новосибирск
2023 г.

Оглавление

Постановка задачи

Реализовать генератор случайной дискретной величины. Реализовать выборку с возвратом и без возвратов. Проверить корректность работы, задав собственную случайную величину и собрав статистику выборок с возвратом и прозводя выборку без возврата.

Теория

Дискретная случайная величина - случайная величина называется дискретной, если множество ее возможных значений конечно или счетно.

Закон распределения

Чтобы полностью описать дискретную случайную величину, надо указать все её возможные значения и вероятность каждого из них.

Рядом распределения дискретной случайной величины X называется множество всех её возможных значений и их вероятностей.

Обычно ряд распределения дискретной случайной величины X записывают в виде таблицы. В первой строке таблицы указывают значения случайной величины, а во второй строке - их вероятности

Случайная величина X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
Вероятность $P(X = x_n)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Сумма вероятностей всех значений дискретной случайной величины равна 1, то есть $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Математическое ожидание

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных её значений на вероятности этих значений.

$$\mathrm{M}(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n$$

Дисперсия случайной величины

Дисперсией дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения её от математического ожидания:

$$D(X) = M\big(X - M(X)\big)^2$$

Гипергеометри́ческое распределение

Гипергеометрическое распределение в теории вероятностей моделирует количество удачных выборок без возвращения из конечной совокупности.

$$p_k = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$$

Схема Бернулли

Схемой Бернулли называется последовательность независимых в совокупности испытаний, в каждом из которых возможны лишь два исхода — «успех» и «неудача», при этом успех в одном испытании происходит с вероятностью p ∈ (0, 1), а неудача — с вероятностью q=1−p.

При любом k = 0, 1, . . . , n имеет место равенство:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Ход работы

Из урны, в которой 20 белых и 10 черных шаров, наудачу вынимают 4 шара.
Xi — вероятность того что попадется Xi белых шаров
Закон распределения с возвращением:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0.01234	0.09876	0.296	0.39506	0.19753

Вероятности посчитаны с помощью формулы Бернулли:
$P_4(0) = C_4^0 \cdot p^0 \cdot q^4 \approx 0.01234$
$P_4(1) = C_4^1 \cdot p^1 \cdot q^3 \approx 0.09876$
$P_4(2) = C_4^2 \cdot p^2 \cdot q^2 \approx 0.296$
$P_4(3) = C_4^3 \cdot p^3 \cdot q^1 \approx 0.39506$
$P_4(4) = C_4^4 \cdot p^4 \cdot q^0 \approx 0.19753$

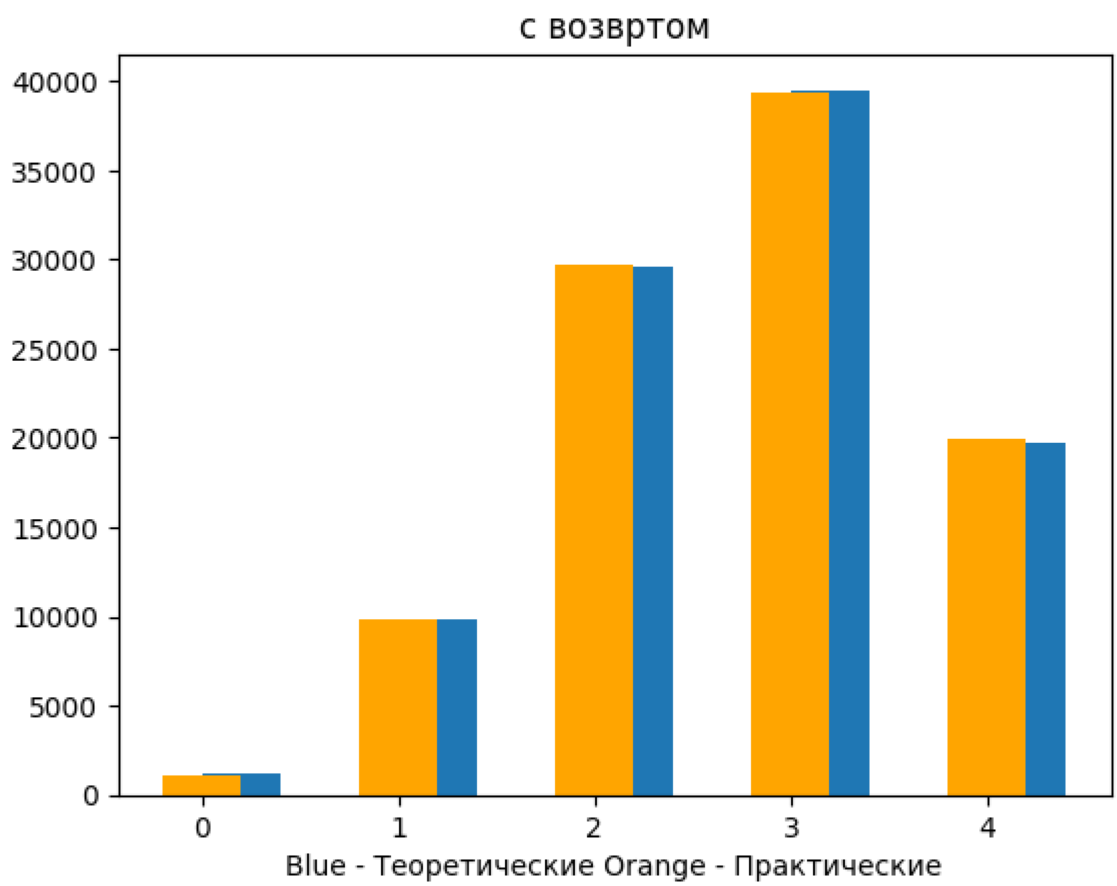
Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.01234, & 0 < x \le 1 \\ 0.111105 & 1 < x \le 2 \\ 0.407105 & 2 < x \le 3 \\ 0.802165 & 3 < x \le 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

Генерируются 50 000 чисел и считается количество повторений выпадения значения в интервале, на рисунке 3.1-3.2 приведена статистика для данного закона распределения:

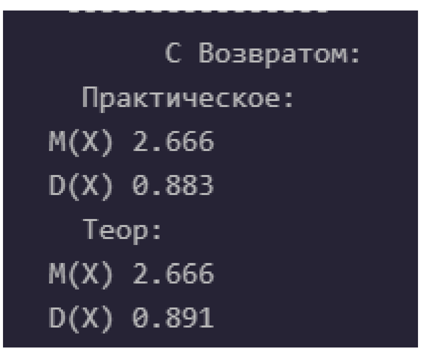
```
С Возвтратом
Практические
Counter({3: 39408, 2: 29699, 4: 19918, 1: 9881, 0: 1094})
```

(Рис 3.1)



(Рис 3.2)

Математическое ожидание и дисперсия для теоретических и практических данных (рис 3.3):



```
      С Возвратом:
  Практическое:
M(X) 2.666
D(X) 0.883
  Теор:
M(X) 2.666
D(X) 0.891
```

(Рис 3.3)

Закон распределения дискретной случайной величины без возврата

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0.00766	0.08757	0.311987	0.415982	0.176793

Вероятности посчитаны по формуле гипергеометрической вероятности:

$$p_0 = \frac{C_{20}^{0} C_{10}^{4}}{C_{30}^{4}} = 0.00766$$

$$p_1 = \frac{C_{20}^{1} C_{10}^{3}}{C_{30}^{4}} = 0.08757$$

$$p_2 = \frac{C_{20}^{2} C_{10}^{2}}{C_{30}^{4}} = 0.311987$$

$$p_3 = \frac{C_{20}^{3} C_{10}^{1}}{C_{30}^{4}} = 0.415982$$

$$p_4 = \frac{C_{20}^{4} C_{10}^{0}}{C_{30}^{4}} = 0.176793$$

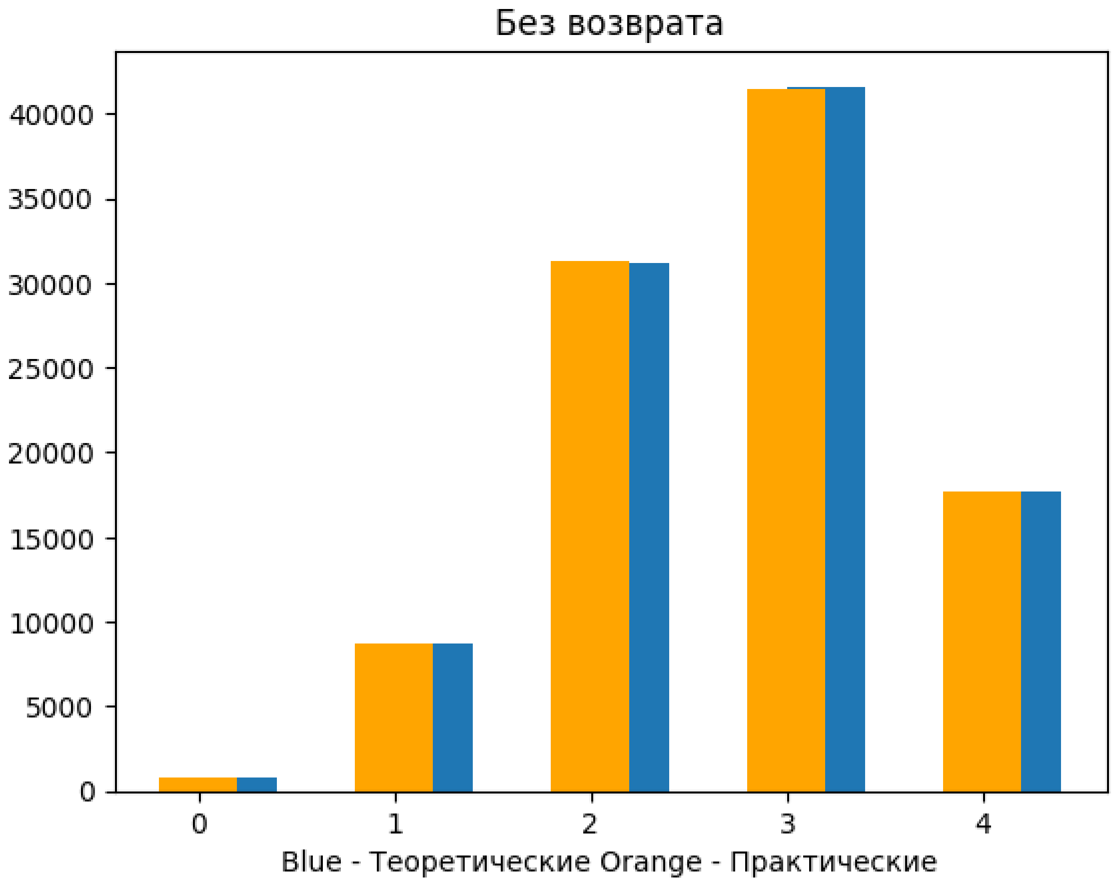
Функция распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 0.00766, & 0 < x \leq 1 \\ 0.09523 & 1 < x \leq 2 \\ 0.407217 & 2 < x \leq 3 \\ 0.823199 & 3 < x \leq 4 \\ 1 & x > 4 \end{cases}$$

Генерируются 50 000 чисел и считается количество повторений выпадения значения в интервале, на рисунке 4.1-4.2 приведена статистика для данного закона распределения:

```
Без Возврата
Практические
Counter({3: 41471, 2: 31293, 4: 17705, 1: 8747, 0: 784})
```

(Рис 4.1)



(Рис 4.2)

Математическое ожидание и дисперсия для теоретических и практических данных (рис 3.3):

```
      Без Возврата:
  Практическое:
M(X) 2.668
D(X) 0.797
  Теор:
M(X) 2.667
D(X) 0.797
```

Вывод

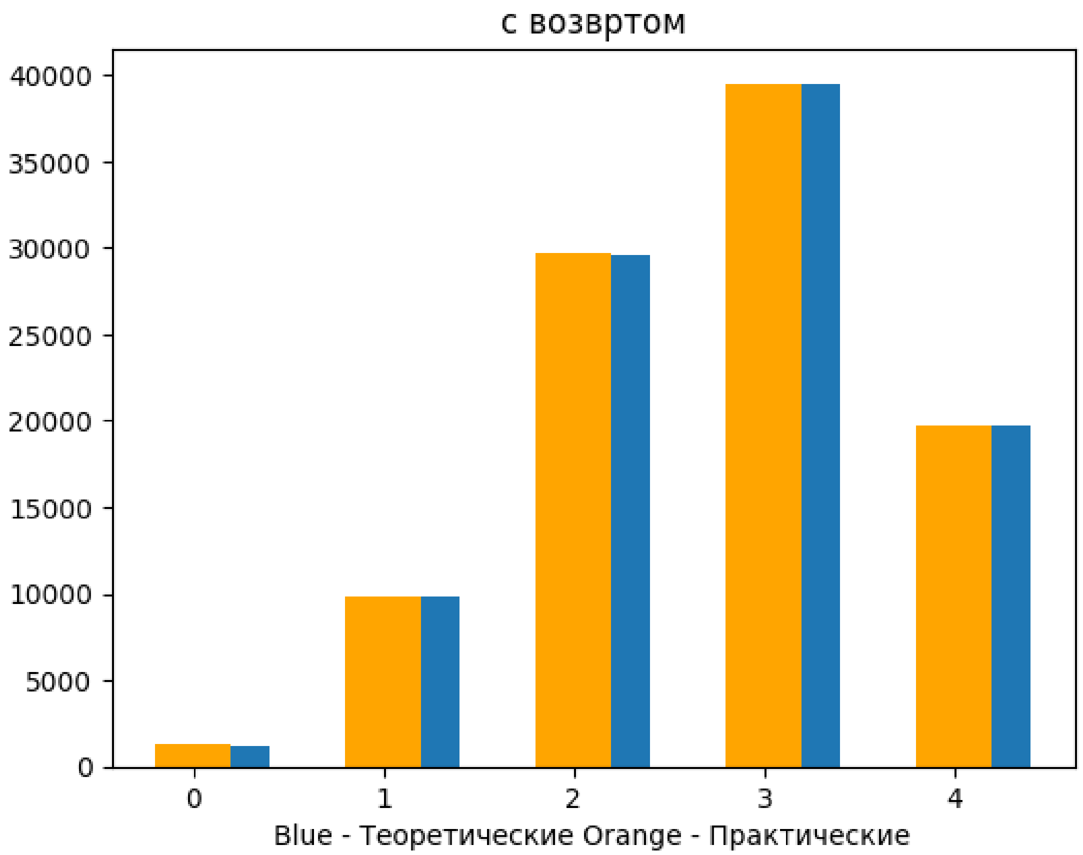
Полученный график и значения математического ожидания и дисперсии распределения дискретной случайной величины соответствует закону распределения, из чего следует, что датчик случайной величины с равномерным распределением от 0 до 1 верный.

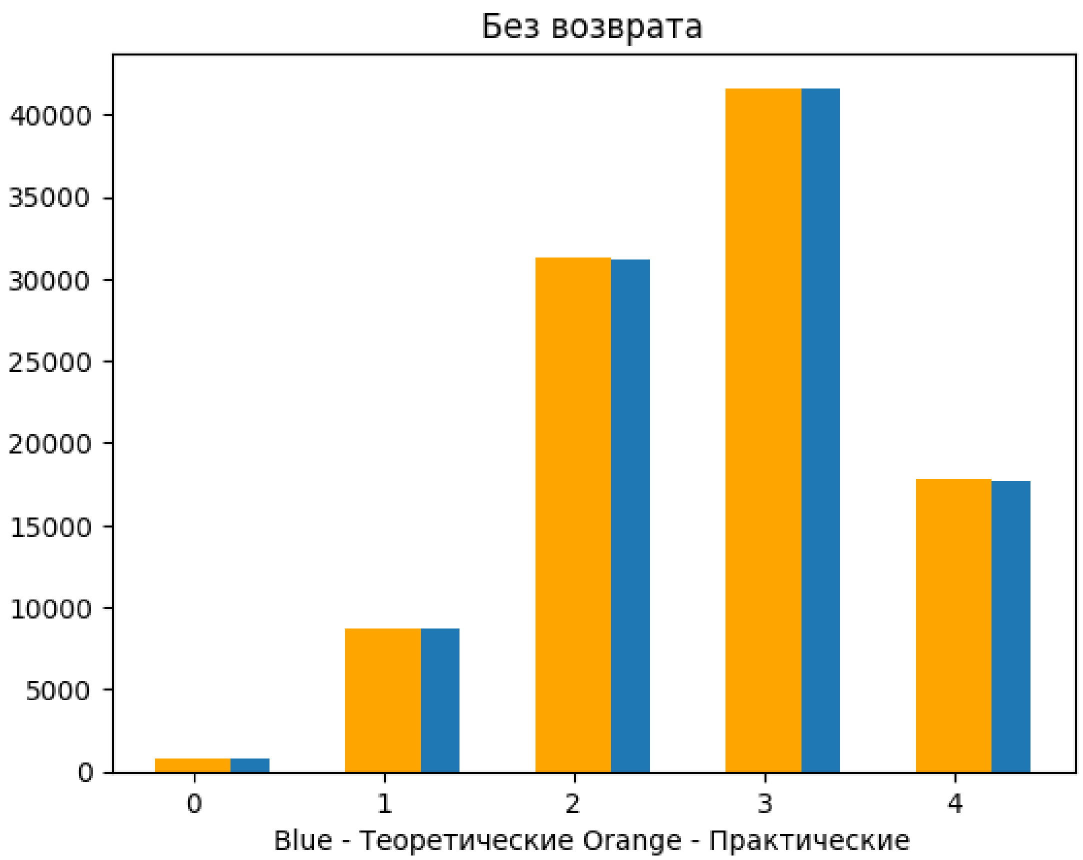
Листинг

2lab.ipynb

```
import random
import pandas as pd
import numpy as np
from numpy import random
from collections import Counter
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
from scipy.stats import hypergeom

count_of_elements = 100000

def make_collection_of_values(list_of_values: list[float]) -> Counter[float
]:
    "Discrete distribution function (frequency polygon)"
    return Counter(list_of_values)

# Binomial
def generate_list_of_values_binomial(count_of_elements: int):
    bin_list = np.random.binomial(n=4, p=0.666666667, size=100000)
    return list(bin_list)


# HYPERGEOM
def generate_hypergeom(size):
    N = 30 # всего
    A = 20 # Общее количество желаемых элементов
    n = 4 # количество опытов
    return list(hypergeom.rvs(N, A, n, size=size))

# display
def display(x_t, y_t, x_p, y_p, title_):
    plt.bar(x_t, y_t, width=0.4, align='edge', label="Теоретические")
    plt.bar(x_p, y_p, width=0.4, color = 'orange', label="Практические")
    plt.xlabel("Blue - Теоретические Orange - Практические")
    plt.title(title_)
    # sns.distplot(x, hist=True, kde=False)
    # # sns.distplot(y, hist=True, kde=False)
    plt.show()


map_intervals_binomial_teoret = Counter({0: 1234, 1: 9876, 2: 29600, 3:3950
0, 4: 19763})
map_intervals_hypergeon_teoret = Counter({0: 766, 1: 8757, 2: 31190, 3:4159
8, 4:17679})
```

```
list_values_binomial: list = generate_list_of_values_binomial(count_of_elem
ents)
list_values_hypergeom: list = generate_hypergeom(count_of_elements)

map_intervals_binomial_practice = make_collection_of_values(list_values_bin
omial)
map_intervals_hypergeon_practice = make_collection_of_values(list_values_hy
pergeom)
display(list(map_intervals_binomial_teoret.keys()), list(map_intervals_bino
mial_teoret.values())\
       ,list(map_intervals_binomial_practice.keys()), list(map_intervals_bi
nomial_practice.values()), "с возвртом")

display(list(map_intervals_hypergeon_teoret.keys()), list(map_intervals_hyp
ergeon_teoret.values())\
       ,list(map_intervals_hypergeon_practice.keys()), list(map_intervals_h
ypergeon_practice.values()), "Без возврата")


# display(list_values_hypergeom)
print ('С Возвтратом')
print ('Практические')
print(map_intervals_binomial_practice)
print ('Теоретические')
print(map_intervals_binomial_teoret)
print ('Без Возврата')
print ('Практические')
print(map_intervals_hypergeon_practice)
print ('Теоретические')
print(map_intervals_hypergeon_teoret)

print(''' ----------------
       С Возвратом:
  Практическое:
M(X) 2.666
D(X) 0.883
  Теор:
M(X) 2.666
D(X) 0.891
       Без Возврата:
  Практическое:
M(X) 2.668
D(X) 0.797
  Теор:
M(X) 2.667
D(X) 0.797
''')
```





С Возвтратом

Практические

```
Counter({3: 39440, 2: 29699, 4: 19743, 1: 9855, 0: 1263})
Теоретические
Counter({3: 39500, 2: 29600, 4: 19763, 1: 9876, 0: 1234})
Без Возврата
Практические
Counter({3: 41530, 2: 31309, 4: 17763, 1: 8660, 0: 738})
Теоретические
Counter({3: 41598, 2: 31190, 4: 17679, 1: 8757, 0: 766})
 ----------------
       С Возвратом:
  Практическое:
M(X) 2.666
D(X) 0.883
  Теор:
M(X) 2.666
D(X) 0.891
       Без Возврата:
  Практическое:
M(X) 2.668
D(X) 0.797
  Теор:
M(X) 2.667
D(X) 0.797
```