1. Konfiguracja bez tarcia.

- Statystyka

Opisywany program obsługuje konfigurację, w której dwe strony każdego bloku są poziome. Dzięki temu w układzie wsytępują tylko siły pionowe, masa każdego bloku i siły reakcji. Siły reakcji mogą wystąpic tylko w wierzchołkach bloków i na przecięciach odcinków linii.
Rozkład działajacych sił widać na rysunku:

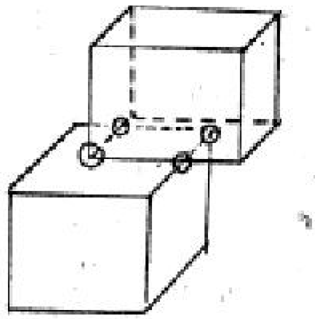


Fig.4

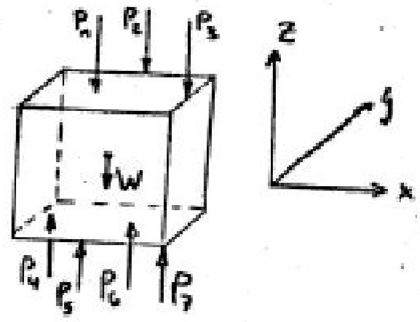


Fig.5

Isnieją trzy równania, które pozwalaja określić nieznaną siłę P1.

$$\sum P_i = 0$$
$$\sum M_i^x = 0$$
$$\sum M_i^y = 0$$

Jeśli mamy n bloków, to mamy 3n równań i 3m nieznanych sił. Jesli m = n to system nazywany jest statystycznie zdeterminowanym, ale przeważnie m>n i siły nie mogą być jednoznacznie określone.

- Stabliność

Zasada stabilności: jeżeli wszystkie sły zostały wprowadzone jak na Fig.5 i rozwiązanie równań 3n, tak że zadna siła nie jest ujemna, to układ jest stabilny. Siła ujemna oznaczałaby, że dwa bloki chcą się rozdzielić, a siła reakcji trzyma je razem. Taka siła nie istnieje, więc bloki spadają.

- Program

Program wykonujacy test stabilności działa następujaco:
I Formułuje równania 3n dla nieznanych sił 3m.
II Siły 3(m-n) są tymaczasowo traktowane jako stałe. Rozwiązywane są równania dla pozostałych sił 3n.

III Rozwiązania przedstawione są w sposób pokazany poniżej, gdzie bi>=0.

positive equations

$$x_1 = b_1 + a_{1,3n+1}x_{3n+1} + \dots + a_{1,m}x_m$$

$$\vdots$$

$$x_k = b_k + a_{k,3n+1}x_{3n+1} + \dots + a_{k,m}x_m$$

negative equations

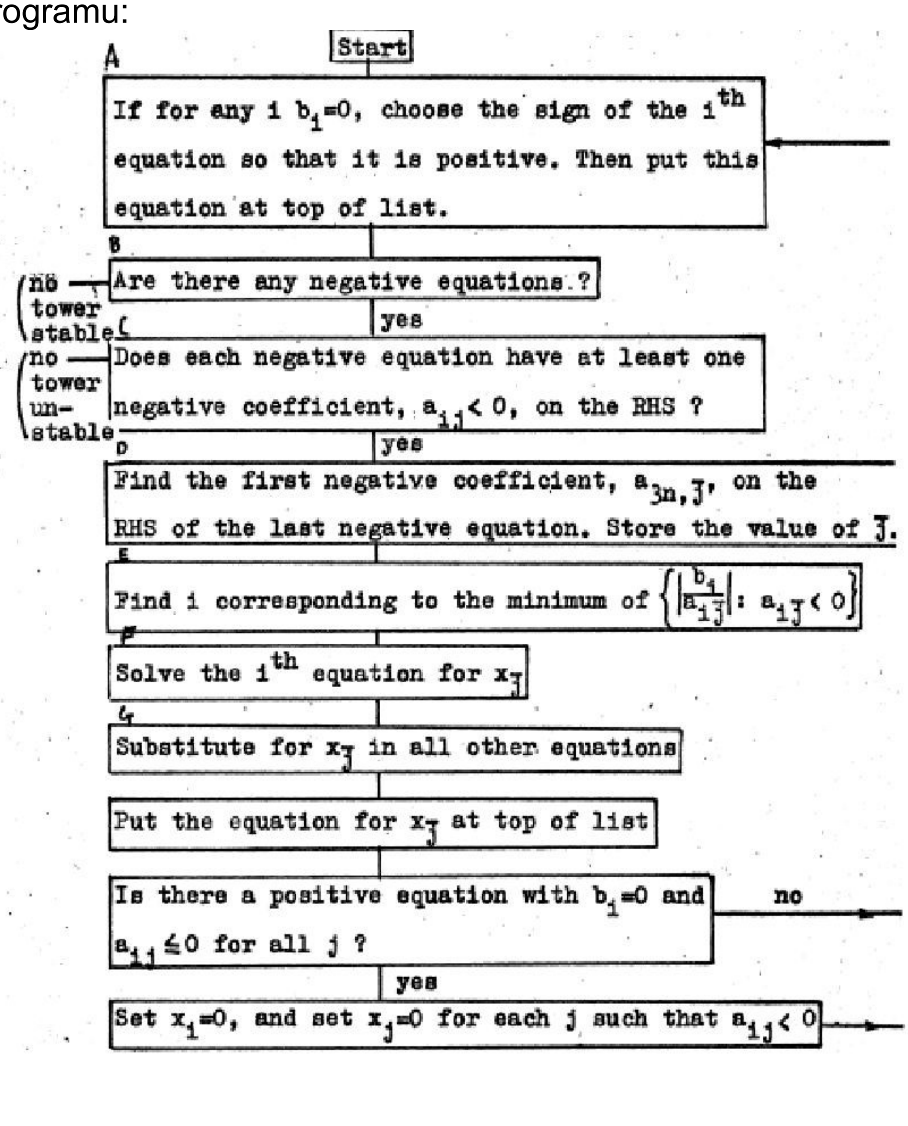
$$-x_{k+1} = b_{k+1} + a_{k+1,3n+1}x_{3n+1} + \dots + a_{k+1,m}x_m$$

$$\vdots$$

$$-x_{3n} = b_{3n} + a_{3n,3n+1}x_{3n+1} + \dots + a_{3n,m}x_m$$

Rzeczywsity program testujacy działanie próbuje pozbyć się ujemnych równań, ponieważ jeśli wszystkie równania będą dodatnie to zmienne RHS będą mogły być ustawione na zero, co oznacza, że wymóg stabilności jest spełniony. Jeśli dojdzie do równania ujemnego, które ma tylko dodatnie współczynniki RHS, to równanie to nigdy nie może być spełnione przy pomocy sił dodatnich, a to oznacza, że układ jest niestabilny.

Schemat programu:



2. Dwuwymiarowa konfiguracja z tarciem.

- Statystyka

Rysunek poniżej pokazuje typową dwuwymiarową konfigurację z tarciem.

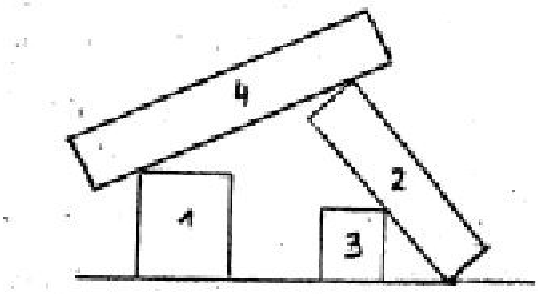


Fig.6

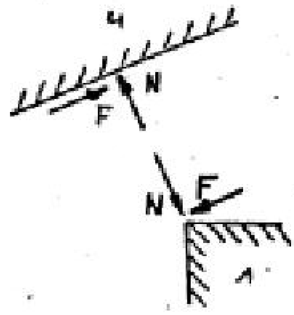


Fig.7

Jest jasne, że prostokąt 4 może, ale nie musi spaść. To zależy od tarcia między prostokątem 4 i 1 o raz 4 i 2. Siła reakcji w punkcie styku może być rozłożona na siłę N i F. Siła N może być tylko dodatnia, jest podobna do siły reakcji w konfiguracji bez tarcia.
F jest siła tarcia, co oznacza opór dwóch ciał pozostających w spoczynku. Opór ten nie może być nieograniczony. Opór jest zależny od powierzchni bloków i od sił, które sprawiaja, że przyciskają się do siebie. Pewna siła F może przekroczyć limit i bloki zaczną się ześlizgiwać, konfiguracja będzie wtedy niestablina.
Eksperymenty wykazały, że |F| <=μN jest dobrym przybliżeniem górnego limitu.
M jest parametrem powierzchniowym, a N jest siłą normalną w punkcjie styku.
Geometria wokół punktu tarcia nie wpływa na parametr powierzchni. Ponadto zakładamy, że prostokąty są wykonane z tego samego materiały, dzięki czmu możemy uznać μ za stałą dla całego układu.
Istnieją trzy warunki równania dla każdego prostokąta.

$\Sigma P_x = 0$ forces in the direction of the x-axis

$\Sigma P_z = 0$ forces in the direction of the z-axis

$\Sigma M_y = 0$ moments with respect to the y-axis

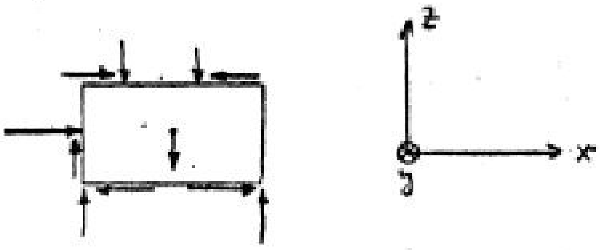


Fig.9

- Stabilność

Tak jak poprzednio siły muszą być nie ujemne, ponadto siły tarcia muszą być uwzględnione.

$$|F_i| <= \mu N_i, \qquad (1)$$

gdzie Fi może być dodatnie lb ujemne, w zależności od kierunku, w którym zostało wprowadzone.

- Program

W dwuwymiarowym układzie z tarciem może zostać wykorzystany poprzedni program. Trik polega na tym, aby wyrazić warunek 1, w taki spoób aby wszystkie siły były dodatnie, żeby zachować stabilność.
Można to zapisać w następujący sposób:

$$F_i + D_i^{(1)} = \mu N_i \qquad (2)$$

$$-F_i + D_i^{(2)} = \mu N_i \qquad (3)$$

Di są dodatnie dla warunku 1. Teraz każde Fi w równaniu równowagi musimy zastąpić równaniem 2 i dodać:

$$D_i^{(1)} + D_i^{(2)} = 2 \mu N_i \qquad (4)$$

Powstały układ równań, można traktować jak te powstały w punkcie pierwszym (Konfiguracja bez tarcia).

3. Główny problem tarcia.

- Statystyka

Rysunek 10 pokazuje typową struktórę bloków.

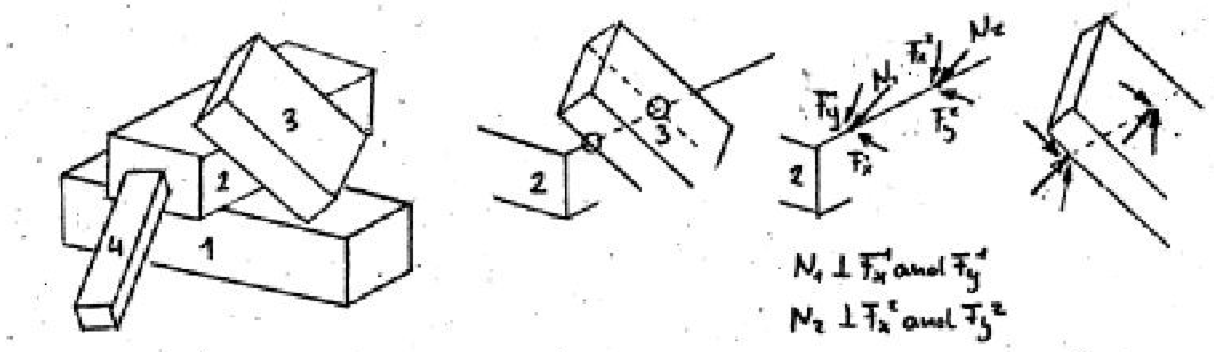


Fig.10 Fig.11 Fig.12

W każdym miejscu mamy normalną siłę i siłę tarcia. Z powodu dodatkowego wymiaru kierunek każdej siły jest nieznany dwuwymarowo, dlatego musimy wprowadzić dwie składowe ortogonalne, Fx i Fy. Fig. 12 pokazuje siły reakcji.

Powstała siła tarcia:

$$|F| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \qquad (5)$$

Ograniczona przez:

$$|F| <= \mu N \qquad (6)$$

To równanie jest nierównością, która mówi kiedy opisywany układ jest niestabliny.

Tak jak poprzednio zakładamy, że μ jest tsałe dla całego układu.

Statystka pojedynczego bloku opisana jest przez 6 równań:

$$\sum P_x = 0 \qquad \sum M_x = 0$$
$$\sum P_y = 0 \qquad \sum M_y = 0$$
$$\sum P_z = 0 \qquad \sum M_z = 0$$

- Stabilność

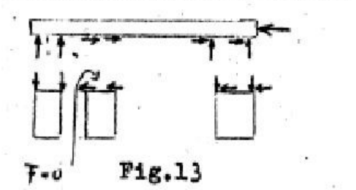
Kryteria stabilności są takie same jak poprzednio. Wszystkie siły normalne muszą być dodatnie, a wszystkie siły tarcia muszą spełniać warunki z równań 5 i 6. Stosunek nieliniowy musimy obliczyć. Jest to zasadnicza różnica między ogólnym przypadkiem tarca z jednej storny a przypadkiem dwuwymiarowym z tarciem, a także z trójwymiarową skrzynką bez tarcia.

- Program.

Jedną ze strategii sprawdzenia stabilności układu jest użycie równań liniowych i poszukiwanie rozwiązania, które będzie stabilne. Jeśli takie rozwiązanie istnieje, wystarczy tylko podstawić wartości sił tarcia do nierówniści takiej jak:

$$\sqrt{F_x^2 + F_y^2} \leq \mu N \qquad (7)$$

Jeśli jest to spełnione to układ jest stabliny. Jeśli nie, to istnieją trzy powody:
I Siły tarcia i siły normalne zostały odrzucone jako zbędne statyczne. Fig. 13 pokazuje taki przypadek.
II Fig. 14 pokazuje przypadek, gdzie siły zostały odrzucone, ale nadal inne siły mogą decydować o stabilności układu.
III Konfiguracja jest rzeczywiście niestabilna.



F=0 because N is discarded

Fig.13

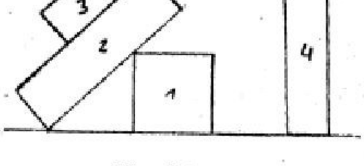


Fig.14