# Bonus 3 - MT5018

Visa med hjälp av momentgenererande funktioner att om $X \sim L(1)$ så är

$$X \overset{d}{=} Y_1 - Y_2$$

där $Y_1, Y_2 \sim \text{Exp}(1)$ är oberoende stokastiska variabler. (Det är tillåtet att ta mgf för exponentialfördelningen från formelbladet, men mgf för Laplacefördelningen behöver härledas.)

---

Vi vet att dessa slumpvariabler är likafördelade om deras momentgenererande funktion är detsamma ty momentgenererande funktioner är unika för fördelningar. Vi kan därmed börja med att härleda momentgenererande funktionen för $X$. Vi vet att täthetsfunktionen för $X$ är (från formelsamlingen) $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ för $-\infty < x < \infty$, detta fås vid insätning i funktionen $\frac{1}{2a}e^{-\frac{|x|}{a}}$ där $a = 1$. Vi får nu enligt definition av den momentgenererande funktionen att $$
\psi{X}(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int{-\infty}^\infty e^{tx} f_{X}(x)dx

$$detgervidinsättningdå$$

\int{-\infty}^\infty e^{tx} \frac{1}{2}e^{\lvert x \rvert } dx = \frac{1}{2} \int{-\infty}^\infty e^{tx}e^{\lvert x \rvert }dx

$$somviintegrerargenomattdelauppitvådelarpga.absolutbeloppet.Alltså,$$

\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\int{-\infty}^0 e^{t x-(-x)} d x+\int_0^{\infty} e^{t x-x} d x\right) \
= \frac{1}{2}\left(\int{-\infty}^0 e^{(t+1) x} d x+\int_0^{\infty} e^{(t-1) x} d x\right)\end{aligned}

$$Noterarattintegralenkonvergeraromm.\$t+1>0\$och\$t-1<0\$, dvs.såmåste\$-1<t<1\$.Vifårdåvidin$$

\frac{1}{2}\left( \left[ \frac{e^{(t+1)x}}{t+1} \right]{-\infty}^0 + \left[ \frac{e^{(t-1)x}}{t-1} \right]{0}^\infty \right) = \frac{1}{2}\left( \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1}\right) = \frac{1}{1-t^2} \qquad -1<t<1

$$Dvs.såär$$

\psi_{X}(t) = \frac{1}{1-t^2}

$$Förattfåframmgf.för\$Y_1+Y_2\$.Viharenligtformelsamlingenatt\$\psi_{Y_1}(t)=\psi_{Y_2}(t)=\frac{1}{1-t}\$för\$t<1\$efter$$

\begin{align}
&\psi{Y{1}+Y{2}}(t) = \psi{Y{1}}(t)\psi{Y_{2}}(t)
\end{align}

$$Eftersomvihar\$Y_1-Y_2\$såmåstevifåfram\$\psi_{-Y_2}\$först.Vianvänderossavegenskapenatt$$

\psi{-Y{2}}(t) = \psi{Y{2}}(-t)

$$Detgerossdåatt$$

\psi{-Y{2}}(t) = \frac{1}{1+t}

$$somdåeftersomoberoendeger$$

```
\begin{align}
\psi{Y{1}-Y{2}}(t) &= \psi{Y{1}}(t) \psi{-Y_{2}}(t) \
&= \frac{1}{1-t} \frac{1}{1+t} \
&= \frac{1}{1-t^2}
\end{align}
```

$$för\$ -1 < t < 1\$. Vihardärmedvisatatt\$X\$och\$Y_1 - Y_2\$harsammafördelningeneftersommgf. ärunikförf$$

```
X \stackrel{d}{=} Y_1-Y_2.
```