Labb 2

Sebastijan Babic & Esbjörn Runesson

XXXX–XX–XX

Givna funktioner

```r
# Denna funktion simulerar en spelomgång med vinstsannolikhet p och ett visst kapital.
# Funktionen returnerar det nya kapitalet beroende på utfallet.
en_spelomgang <- function(p, kapital) {
  if (runif(1) < p) { # om vi vunnit
    return(kapital + 1)
  } else { # annars har vi förlorat
    return(kapital - 1)
  }
}
```

```r
# Denna funktion räknar ut matrisen A upphöjt till n, enligt den iterativa
# definitionen A^n = A %*% A %*% ... %*% A (n stycken A), med A^0 = I.
# Exempel: mpow(A, 3) == A %*% A %*% A
mpow <- function(A, n) {
  resultat <- diag(nrow(A))
  potens <- n
  while (potens > 0) {
  resultat <- A %*% resultat
  potens <- potens - 1
  }
  return(resultat)
}
# Låt A vara en matris innehållandes sannolikheter. Denna funktion testar om
# raderna i A är identiska upp till de d första decimalerna. Som ett exempel,
# talet 0.12309 är lika med 0.12301 upp till den fjärde decimalen, men avrundat
# till 4 decimaler är dessa tal ej lika.
# Funktionen returnerar TRUE om raderna är identiska; FALSE annars.
rows_equal <- function(A, d = 4) {
  A_new <- trunc(A * 10^d) # förstora talet och ta heltalsdelen
  for (k in 2:nrow(A_new)) {
  # Kolla om alla element i rad 1 är lika med motsvarande element i rad k
    if (!all(A_new[1, ] == A_new[k, ])) {
    # Om något element skiljer sig så är raderna ej lika
    return(FALSE)
    }
```

```r
  }
# Hamnar vi här så var alla rader lika
  return(TRUE)
}



# Låt A och B vara matriser innehållandes sannolikheter. Denna funktion testar
# om elementen A är identiska, upp till de d första decimalerna, med motsvarande
# element i matrisen B.
# Funktionen returnerar TRUE om matriserna är identiska; FALSE annars.
matrices_equal <- function(A, B, d = 4) {
  A_new <- trunc(A * 10^d)
  B_new <- trunc(B * 10^d)
  if (all(A_new == B_new)) {
    return(TRUE)
  } else {
    return(FALSE)
  }
}
```

Uppgift 1

Uppgift 1.1

Funktionen en_spelomgang i avsnittet "Användbara funktioner" tar en vinstsannolikhet p och ett kapital kapital som input, och ger som output det nya kapitalet efter en spelomgång, enligt definitionen som gavs i introduktionen ovan. Denna funktion utnyttjar kommandot runif (1) som genererar en slumpvariabel U från en likformig fördelning på intervallet $[0, 1]$. Som du bör känna till vid det här laget så gäller det att $\mathbb{P}(U < p) = p$ för $p \in [0, 1]$. Din uppgift är nu att skriva en funktion kim_spelar, som simulerar Kims spelande enligt definitionen som gavs i introduktionen. Funktionen ska ta som input en vinstsannolikhet p och ett startkapital kapital. Som output ska funktionen returnera en 1:a (dvs return(1)) om Kims kapital når 6 kronor (Kim vinner), och en 0:a (dvs return(0)) om Kims kapital når 0 kronor (Kim förlorar). Funktionen kim_spelar ska använda sig av funktionen en_spelomgang. Tips: - Det kan vara fördelaktigt att definiera en tillfällig variabel för att spåra det aktuella kapitalet, vilken uppdateras efter varje spelomgång. - Kommandot repeat . . . fungerar som en oändlig loop, men kan brytas genom att använda break eller return (. . .) någonstans innanför { och }. Här ersätts . . . med kod.

Uppgift 1.2

Skriv en funktion sim_kim, som gör n simuleringar av Kims spelande och räknar hur många gånger hen går med vinst. Funktionen ska använda sig av kim_spelar ovan, och ska som argument ta en vinstsannolikhet p, ett startkapital kapital, och antalet simuleringar n (default = 1000). Output ska vara antalet simuleringar som slutade med vinst. Gör nu 1000 simuleringar med hjälp av funktionen du just skrev. Hur många gånger lyckades Kim nå sitt mål, respektive blev pank? Antag att Kim startar med 1 krona i kapital vid varje simulering, och att vinstsannolikheten vid varje spelomgång är 0.5 . Använd funktionen set.seed med ditt 6 -siffriga födelsedatum som argument innan du anropar sim_kim.

Uppgift 1.3

Om Kim har 2 kronor att starta med så är det rimligt att tro att chansen att lyckas nå fram till 6 kronor är större. Undersök genom simulering hur det går för en spelare som har 2, 3, 4 eller 5 kronor i startkapital. Gör 1000 experiment för vart och ett av dessa fyra fall också, och anteckna hur ofta spelet slutar lyckligt. Anmärkning:

- Att generalisera ett problem och dela upp det i mindre delproblem är en effektiv strategi. Genom att skriva korta precisa funktioner, som vi har gjort här, kan vi öka kodens tydlighet och återanvändbarhet.

Uppgift 2

Uppgift 2.1

Ett annat sätt att undersöka Kims chans att lyckas är så här: Om Kims kapital efter n spelomgångar är X_n kronor (där X_0 betecknar startkapitalet) så kommer följden X_n att bilda en Markovkedja. Den kommer förr eller senare att hamna i något av de båda absorberande tillstånden 0 eller 6. Låt oss beteckna dessa båda händelser med $X_\infty = 0$ respektive $X_\infty = 6$. Sannolikheten $\mathbb{P}(X_\infty = 6)$ kan vi approximativt räkna ut genom att utnyttja en ekvation som säger att om $\boldsymbol{P}$ är övergångsmatrisen för en absorberande Markovkedja så gäller att

$$P^n \to \begin{pmatrix} 0 & SR \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

då $n \to \infty$. Här ska matrisen $\boldsymbol{P}$ vara skriven på "standardform", dvs de fem transienta tillstånden (1-5) ska komma först, och de båda rekurrenta sist. Sätt tillstånd 0 sist. 1. Ett av elementen i matrisen $\boldsymbol{SR}$ beskriver sannolikheten att absorption sker i tillstånd 6 när spelaren startar med 1 krona. Vilket element är det?

Uppgift 2.2

2. Skriv en funktion kims_matris i R, som tar som input en vinstsannolikhet p och ger som output övergångsmatrisen för denna vinstsannolikhet. Du får följande till hjälp - allt du behöver göra är att byta ut några av 0:orna mot rätt sannolikhet.

```
kims_matris <- function(p) {
  matrix(c(
    0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
    0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
    0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
    0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
    0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
    0, 0, 0, 0, 0, 0, 0,
    0, 0, 0, 0, 0, 0, 0
  ), nrow = 7, byrow = TRUE)
}
```

Uppgift 2.3

Skriv en funktion hitta_SR som tar som input en övergångsmatris P skriven på standardform och ger som output motsvarande matris $\boldsymbol{SR}$. Matrisen $\boldsymbol{SR}$ kan räknas ut på teoretisk väg eller genom att avgöra för vilket n som $P_n \approx P_{n+1}$ med fyra decimalers noggrannhet. Om du väljer att skriva funktionen med hjälp av de teoretiska resultaten så måste du förklara (i ord och symboler) vad dessa säger först, och var du hittat dem. Om du väljer det andra sättet så kan du få användning av funktionerna mpow och matrices_equal från förra laborationen. Redovisa i detta fall för vilket n som $P_n \approx P_{n+1}$ i fallet då vinstsannolikheten är $p = 0.5$. Hur många av de tusen spelen i uppgift 1 "borde" ha slutat lyckligt för Kim, när startkapitalet var 1,2 , 3,4 respektive 5 kronor? Stämmer talen i $\boldsymbol{SR}$ överens med de tal du kom fram till i uppgift 1 ? Kommentar: - Chansen att lyckas nå till 6 kronor tycks öka med ökande startkapital enligt en ganska enkel formel. Genom att titta på resultaten hittills kan du förmodligen gissa hur formeln ser ut.

Uppgift 3

De flesta kasinon drivs inte ideellt, utan spelarna förlorar pengar i det länga loppet. Vi ska nu undersöka hur chansen att nå sexkronorsnivån ändras när sannolikheten att förlora ett spel är större än chansen att vinna. Ett sådant spel kan beskrivas med en Markovkedja med en likadan övergångsmatris som i uppgift två, med skillnaden att p inte är 50%. Undersök chansen att nå från 1 krona till 6 kronor då $p = 20\%, 35\%, 50\%, 65\%$ och 80%. Vi bryr oss inte om att räkna på något annat startkapital än 1 krona. Använd dels simulering, som i uppgift 1, dels samma metod som i uppgift 2. Här får ni användning av de funktioner ni skrivit tidigare. Tänk på att det n som krävs för konvergens ändras då p ändras. # Uppgift 4 På Rodmans Roulette måste man inte satsa exakt 1 krona vid varje spel. Det är tillåtet att satsa ett valfritt belopp. Om man vinner får man tillbaka dubbla insatsen. Robin brukar besöka Rodmans Roulette ibland. Hen har alltid 1 krona i startkapital, men följer en djärvare strategi än Kim: inför varje spelomgång satsar hen alla pengar hen har. Dock är Robin, precis som Kim, nöjd om hen kan nå upp till 6 kronor. Om hen vid ett visst tillfälle äger 4 eller 5 kronor, satsar hen alltså endast 2 kronor respektive 1 krona. Vi ska undersöka om Robin har bättre eller sämre chans att nå fram till sexkronorsmålet än vad Kim har.

Uppgift 4.1

Robins kapital utvecklas med tiden på ett sätt som beskrivs av en Markovkedja. Beskriv kedjans övergångsmatris om vinstsannolikheten är p, genom att skriva en R-funktion robins_matris som ger denna övergångsmatris som output, givet input p.

Uppgift 4.2

Räkna ut matrisen $\boldsymbol{SR}$ (se uppgift 2) för Robins övergångsmatris och avläs Robins vinstchans, då $p = 20\%, 35\%, 50\%, 65\%$ och 80%. För vilka värden på p bör man spela djärvt respektive försiktigt?