Inlämningsuppgift 1 | MT5018

Sebastijan Babic

3rd April 2025

Problem

Visa att om $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ och $Y \sim \chi^2(n)$ är oberoende stokastiska variabler så är

$$\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n).$$

Proof. Låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler där $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ och $Y \sim \chi^2(n)$. Vi vill härleda fördelningen för $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$. Den simultana täthetsfunktionen är $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$, där

$$\begin{cases} f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} & -\infty < x < \infty, \\ f_Y(y) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}y^{n/2-1}e^{-y/2} & y > 0. \end{cases}$$

Vi använder variabeltransformationen $T = X/\sqrt{Y/n}$ och $U = Y$, vilket ger $X = T\sqrt{U/n}$, $Y = U$. Jacobian-determinanten är $|\mathbf{J}| = \sqrt{u/n}$. Den simultana täthetsfunktionen för (T,U) blir:

$$f_{T,U}(t,u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}2^{n/2}\Gamma(n/2)}u^{\frac{n+1}{2}-1}e^{-\frac{u}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)}, \quad u > 0, t \in \mathbb{R}.$$

För att finna marginalfördelningen för T, $f_T(t)$, integrerar vi med avseende på u:

$$f_T(t) = \int_0^\infty f_{T,U}(t,u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}2^{n/2}\Gamma(n/2)}\int_0^\infty u^{\frac{n+1}{2}-1}e^{-u\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)\right]}\,du.$$

Låt $p = \frac{n+1}{2}$ och $a = \frac{1}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)$. Integralen är $\int_0^\infty u^{p-1}e^{-au}\,du$. Vi känner igen detta som en del av en $\Gamma(p,a)$-fördelning, vars täthetsfunktion är $f_Z(u) = \frac{a^p}{\Gamma(p)}u^{p-1}e^{-au}$. Vi multiplicerar och dividerar med normeringskonstanten $\frac{a^p}{\Gamma(p)}$ som är ej beroende på u och vi kan därför ta en av faktorerna ur normeringskonstanten ut ur integralen, alltså:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}2^{n/2}\Gamma(n/2)}\int_0^\infty \underbrace{\frac{\Gamma(p)}{a^p}\cdot\frac{a^p}{\Gamma(p)}}_{=1}u^{p-1}e^{-au}\,du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}2^{n/2}\Gamma(n/2)}\cdot\frac{\Gamma(p)}{a^p}\int_0^\infty \underbrace{\left(\frac{a^p}{\Gamma(p)}u^{p-1}e^{-au}\right)}_{\text{täthetsfunktionen för } \Gamma(p,a)}\,du \end{aligned}$$

Integralen av täthetsfunktionen är 1. Vi sätter tillbaka uttrycken för p och a:

$$\begin{aligned} f_T(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}2^{n/2}\Gamma(n/2)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)\right]^{\frac{n+1}{2}}}\cdot 1 \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}2^{n/2}}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}2^{n/2}}\frac{2^{\frac{n+1}{2}}}{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}. \end{aligned}$$

Som kan vidare skrivas om som

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}} \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2^{n/2}} 2^{\frac{n+1}{2}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi n}} \frac{2^{(n+1)/2}}{2^{(n+1)/2}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} .
\end{aligned}
$$

Detta är täthetsfunktionen för $t(n)$-fördelningen och vi har därmed visat påståendet. $\square$