Inlämningsuppgift 3 | MT5018

Sebastijan Babic

21st April 2025

Problem

Visa med hjälp av momentgenererande funktioner att om $X \sim L(1)$ så är

$$X \overset{d}{=} Y_1 - Y_2$$

där $Y_1, Y_2 \sim \text{Exp}(1)$ är oberoende stokastiska variabler.

Proof. Vi vet att dessa slumpvariabler är likafördelade om deras momentgenererande funktion är detsamma ty momentgenererande funktioner är unika för fördelningar. Vi kan därmed börja med att härleda momentgenererande funktionen för X. Vi vet att täthetsfunktionen för X är (från formelsamlingen) $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ för $-\infty < x < \infty$, detta fås vid insätning i funktionen $\frac{1}{2a}e^{-\frac{|x|}{a}}$ där $a = 1$. Vi får nu enligt definition av den momentgenererande funktionen att

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx$$

det ger då vid insättning

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{2} e^{|x|} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{|x|} dx$$

som vi integrerar genom att dela upp integralen där tecknet byts. Alltså,

$$\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{tx-(-x)} dx + \int_{0}^{\infty} e^{tx-x} dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(t+1)x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{(t-1)x} dx\right)$$

Noterar att integralen konvergerar omm. $t + 1 > 0$ och $t - 1 < 0$, dvs. så måste $-1 < t < 1$. Vi får då vid integrering

$$\frac{1}{2}\left(\left[\frac{e^{(t+1)x}}{t+1}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{(t-1)x}}{t-1}\right]_{0}^{\infty}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-1}\right) = \frac{1}{1-t^2} \qquad -1 < t < 1$$

Dvs. så är

$$\psi_X(t) = \frac{1}{1-t^2}$$

För att få fram mgf. för $Y_1 + Y_2$. Vi har enligt formelsamlingen att $\psi_{Y_1}(t) = \psi_{Y_2}(t) = \frac{1}{1-t}$ för $t < 1$ eftersom $\lambda = 1$. Använder oss då av egenskapen att eftersom oberoende slumpvariabler så kan vi skriva

$$\psi_{Y_1+Y_2}(t) = \psi_{Y_1}(t)\psi_{Y_2}(t)$$

Eftersom vi har $Y_1 - Y_2$ så måste vi få fram ψ_{-Y_2} först. Vi använder oss av egenskapen att

$$\psi_{-Y_2}(t) = \psi_{Y_2}(-t)$$

Det ger oss då att

$$\psi_{-Y_2}(t) = \frac{1}{1+t}$$

som då eftersom oberoende ger

$$\begin{aligned}\psi_{Y_1-Y_2}(t) &= \psi_{Y_1}(t)\psi_{-Y_2}(t)\\ &= \frac{1}{1-t}\frac{1}{1+t}\\ &= \frac{1}{1-t^2}\end{aligned}$$

för $-1 < t < 1$. Vi har därmed visat att X och $Y_1 - Y_2$ har samma fördelningen eftersom mgf. är unik för fördelningen. Alltså så gäller det att

$$X \overset{d}{=} Y_1 - Y_2.$$

$\square$