Inlämning 6 - MT5018

Sebastijan Babic

10 May 2025

Exercise: Låt $X_{n1}, X_{n2}, ..., X_{nn}$ vara oberoende stokastika variabler med den gemensamma fördelningen

$$\mathbb{P}(X_{nk} = 0) = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}, \quad \mathbb{P}(X_{nk} = 1) = \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}(X_{nk} = 2) = \frac{1}{n^2}$$

där $k = 1, 2, ..., n$ och $n = 2, 3, ...$ Sätt $S_n = X_{n1} + X_{n2} + ... + X_{nn}$ för $n \geq 2$. Visa att

$$S_n \xrightarrow{d} \text{Po}(1), \quad \text{då } n \to \infty$$

Proof: Vi ska enligt definition av konvergens i fördelning visa att

$$F_{S_n} \to F_{\text{Po}(1)} \quad n \to \infty$$

Det gör vi enklast via genererande funktioner. Mer specifikt eftersom vi har icke-negativa heltalsvärda slumpvariabler, dvs. antar $\{0, 1, 2\}$ så kan vi via satsen

$$g_{S_n}(t) = \left(g_{X_{nk}}(t)\right)^n$$

eftersom vi har att göra med oberoende slumpvariabler och likfördelade slumpvariabler för ett fixt n. Vi behöver alltså ta fram SGF för $S_{X_{nk}}$. Alltså

$$\begin{aligned} g_{X_{nk}}(t) &= \mathbb{E}[t^{X_{nk}}] \\ &= t^0\left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) + t\left(\frac{1}{n}\right) + t^2\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{t-1}{n} + \frac{t^2-1}{n^2} \end{aligned}$$

Alltså har vi enligt tidigare sats

$$g_{S_n}(t) = \left(1 + \frac{1}{n}\left(t - 1 + \frac{t^2-1}{n}\right)\right)^n \quad n \to \infty$$

Detta är ett känt gränsvärde när vi skriver det på denna form. Vi har alltså att

$$g_{S_n}(t) \to e^{(t-1)+\frac{t^2-1}{n}} \quad n \to \infty$$

och vid insättning av gränsvärdet får vi då

$$g_{S_n}(t) = e^{t-1}$$

Vi vill komma fram till formen

$$g(t) = e^{\lambda(t-1)}$$

med $\lambda = 1$. Det är precis det vi har och vi har därmed via kontinuitetssatsen visat att eftersom konvergens i SGF sker så sker det även en konvergens i fördelning.

$\square$