Inlämning 5 - MT5018

Sebastijan Babic

05 May 2025

Exercise: Låt $X_1, X_2 \sim N(0,1)$ oberoende slumpvariabler och låt

$$Y_1 = X - 1 - 3X_2 + 2$$
$$Y_2 = 2X_1 - X_2 - 1$$

1. Bestäm fördelningen av $\boldsymbol{Y}$
2. Bestäm fördelning av $Y_1 \mid Y_2 = y$

Vi har

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

så vi har alltså skrivit $\boldsymbol{Y}$ på formen $\boldsymbol{Y} = A\boldsymbol{X} + \boldsymbol{d}$. Vi vet även $\boldsymbol{\mu_Y} = A\boldsymbol{\mu_X} + \boldsymbol{d}$ och $\Lambda_Y = A\Lambda_X A^T$. Alltså

$$\boldsymbol{\mu_Y} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

och

$$\Lambda_Y = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Alltså har vi att

$$\boldsymbol{Y} \sim N\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \right)$$

Vi har från boken att $Y_1 \mid Y_2 = y \sim N\left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_1 - \mu_2), \sigma_2^2(1 - \rho^2)\right)$. Vi vet att

$$\Lambda_{\boldsymbol{Y}} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

alltså

$$\begin{cases} \sigma_1^2 = 10 \Rightarrow \sigma_1 = \sqrt{10} \\ \sigma_2^2 = 5 \Rightarrow \sigma_2 = \sqrt{5} \end{cases}$$

så från matrisen $\rho\sqrt{10}\sqrt{5} = 5$ vilket innebär $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}$ vid förenkling. Värt att notera att $\det(\Lambda) > 0$ Alltså har vi

$$\mathbb{E}[Y_1 \mid Y_2 = y] = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}(y + 1) = y + 3$$

och

$$\operatorname{Var}[Y_1 \mid Y_2 = y] = 10\left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right) = 5$$

Slutsatsen blir då att

$$Y_1 \mid Y_2 = y \sim N(y + 3, 5)$$