Inlämning 4 - MT5018

Sebastijan Babic

29 April 2025

Exercise: Låt $X_1, X_2 \sim N(0,1)$ vara oberoende stokastiska variabler och låt även

$$Y_1 = X_1 + X_2 \qquad Y_2 = 2X_1 + X_2$$

$$Z_1 = X_1\sqrt{2} \qquad Z_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_2$$

1. Bestäm de motsvarande matriserna $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$.
2. Kontrollera att $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$.
3. Visa att $\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}$ har samma normalfördelning och bestäm dess parametrar.

Vi vet att $\boldsymbol{A}$ en vektor så att $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ och motsvarande för $\boldsymbol{B}$. Alltså har vi

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Vi ser omedelbart att $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$ redan från första elementen, dvs. ser vi att $1 \neq \sqrt{2}$.

Om $\boldsymbol{X} \sim N(\mu_{\boldsymbol{X}}, \Lambda_{\boldsymbol{X}})$ så vet vi att $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{d}$. Vi vet även att om normalfördelad så $\boldsymbol{Y} \sim N(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}}, \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{Y}})$ där

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{X}} + \boldsymbol{d}$$

för något konstant vektor $\boldsymbol{d}$ och

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{A}^T$$

i vårt fall har vi då för $\boldsymbol{Y}$

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Vi gör detsamma för $\boldsymbol{Z}$ och får att

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Z}} = 0$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{Z}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Vi vet från utlärd sats att om samma normalfördelning så gäller det att $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{Z}}$ och $\boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{\Lambda}_{\boldsymbol{Z}}$. Vi ser omedelbart att detta gäller och därmed så har dem precis samma normalfördelning som är en följd av en av definitionerna av den multivariata normalfördelningen.