Inlämningsuppgift 2 | MT5018

Sebastijan Babic

11th April 2025

Problem

Låt X vara antalet slantsinglingar tills krona erhålls. Antag att sannolikheten för krona är okänd sådan att vi kan uttrycka det som en stokastisk variabel $Y \sim U(0, 1)$.

(a) Bestäm fördelningen av X (jfr problem 3.8.48).

(b) Väntevärdet av en ffg-fördelning existerar och är känt. Hur är det för $\mathbb{E}[X]$?

(c) Antag att värdet $X = n$ observerats. Bestäm a-posteriori-fördelningen av Y, d. v. s. fördelningen av $Y \mid X = n$.

Proof. Vi har alltså att X =antalet slantslingar tills krona fås. Y=sannolikheten för att få krona. Vet att $Y \sim U(0, 1)$. Vi vet även att $X \mid Y = y \sim ffg(y)$.

Lösning (a) Vi ska i få fram fördelningen för X, det gör vi enklast genom att hitta den marginella täthetsfunktionen för X, dvs. $f_X(x)$.

Enligt definitionen av betingade fördelningar kan vi skriva

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Vi har fått givet följande: $\begin{cases} f_Y(y) = 1 \\ f_{X,Y}(x, y) = y(1-y)^{1-k} \end{cases}$ enligt formelsamlingen. Vi är intresserade av det marginella täthetsfunktionen för X som vi kan få från definitionen

$$f_X(x) = \int_0^1 \underbrace{1}_{f_Y(y)} \cdot \underbrace{y(1-y)^{1-k}}_{f_{X|Y}(x|y)} dy$$

som genom variabelbytet

$$\begin{cases} u = 1 - y \implies y = 1 - u \\ \frac{du}{dy} = -1 \implies dy = -du \end{cases}$$

som då ger vid insättning via partiellintegration

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \left[-y\frac{(1-y)^k}{k} \right]_{y=0}^1 - \frac{1}{k}\int_0^1 (1-y)^k dy \\ &= \left[\frac{-(1-y)^{k+1}}{k+1} \right]_{y=0}^1 \\ &= \frac{1}{k}\left(\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{k^2+k} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Detta ger oss precis fördelningen för X.

(b) Vi utgår direkt från definitionen av väntevärdet

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_x x p_X(x)\\ &= \sum_x x \frac{1}{x(x-1)}\\ &= \sum_x \frac{1}{x+1}.\end{aligned}$$

Detta är i princip den divergenta serien $\sum \frac{1}{n}$ med endast ett term som skiljer sig åt. Det vill säga så existerar inte gränsvärdet.

Att använda lagen om itererad väntevärdet skulle vara enklare men den kan tyvärr inte användas eftersom $\mathbb{E}(X) = \infty$.

(c) Vi använder oss av Bayes formula och skriver

$$f_{Y|X=n} = \frac{\mathbb{P}(X = n \mid Y = y) f_Y(y)}{\mathbb{P}(X = n)}$$

och vi vet redan det som står i bråket (bland annat via formelsamlingen) och kan därmed skriva

$$f_{Y|X=n} = \frac{y(1-y)^{n-1} \cdot 1}{\frac{1}{n^2+n}} = (n^2+n)(y(1-y)^{n-1}$$

notera att n är bara en konstant. Vi känner igen denna tätheten som tätheten av en $\beta-$fördelad slumpvariabel med parametrar $r = 2, s = n$, så $Y \mid X = n \sim \beta(2, n)$.

□