



FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY
V PLZNI

KATEDRA
KYBERNETIKY

Diplomová práce

Odhad kovariancí šumů generátoru časového signálu

Tomáš Hefler



FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY
V PLZNI

KATEDRA
KYBERNETIKY

Diplomová práce

Odhad kovariancí šumů generátoru časového signálu

Bc. Tomáš Hefler

Vedoucí práce

Ing. Oliver Kost, Ph.D.

© Tomáš Hefler, 2024.

Všechna práva vyhrazena. Žádná část tohoto dokumentu nesmí být reprodukována ani rozšiřována jakoukoli formou, elektronicky či mechanicky, fotokopírováním, nahráváním nebo jiným způsobem, nebo uložena v systému pro ukládání a vyhledávání informací bez písemného souhlasu držitelů autorských práv.

Citace v seznamu literatury:

HEFLER, Tomáš. *Odhad kovariancí šumů generátoru časového signálu*. Plzeň, 2024. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra kybernetiky. Vedoucí práce Ing. Oliver Kost, Ph.D.

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd

Akademický rok: 2023/2024

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Bc. Tomáš HEFLER**
Osobní číslo: **A22N0089P**
Studijní program: **N0714A150011 Kybernetika a řídicí technika**
Specializace: **Automatické řízení a robotika**
Téma práce: **Odhad kovariancí šumů generátoru časového signálu**
Zadávající katedra: **Katedra kybernetiky**

Zásady pro vypracování

1. Seznamte se s generátorem časového signálu popsaného stavovým stochastickým modelem.
2. Seznamte se a implementujte korelační metodu rozdílů měření pro odhad kovariancí šumů stavového modelu.
3. Analyzujte vliv parametrů metody rozdílů měření a typ modelu na kvalitu odhadu kovariancí šumů a navrhněte přístup pro jeho volbu.
4. Zhodnoťte dosažené výsledky.

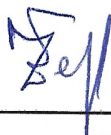
Rozsah diplomové práce: **40-50 stránek A4**
Rozsah grafických prací:
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

- Galleani, L. (2008). A tutorial on the two-state model of the atomic clock noise. Metrologia, 45(6), S175-S182.
- O. Kost, J. Duník, and O. Straka, "Measurement Difference Method: A Universal Tool for Noise Identification," in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 68, no. 3, pp. 1792-1799, March 2023, doi: 10.1109/TAC.2022.3160679.
- J. Duník, O. Straka, O. Kost, and J. Havlík. (2017). Noise covariance matrices in state space models: A survey and comparison of estimation methods—Part I. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 31. 10.1002/acs.2783.

Vedoucí diplomové práce: **Ing. Oliver Kost, Ph.D.**
Výzkumný program 1

Datum zadání diplomové práce: **2. října 2023**
Termín odevzdání diplomové práce: **20. května 2024**



Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.
děkan



Doc. Dr. Ing. Vlasta Radová
vedoucí katedry

V Plzni dne 2. října 2023

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného akademického titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Západočeská univerzita v Plzni má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V Plzni dne 20. května 2024

.....

Tomáš Hefler

V textu jsou použity názvy produktů, technologií, služeb, aplikací, společností apod., které mohou být ochrannými známkami nebo registrovanými ochrannými známkami příslušných vlastníků.

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá vlastnostmi generátorů časového signálu a jejich nepřesnostmi. Práce nejprve zavádí diskrétní stochastický stavový model systému a ukazuje některé statistické vlastnosti modelu. Následně jsou představeny hodiny jako oscilátor a popsán způsob tvorby jejich spojitého modelu spolu s modelováním chyb těchto hodin.

Poté je ukázána Metoda rozdílů měření jako nástroj pro odhad kovariancí šumů, které působí na hodiny. Tato metoda je postupně odvozena z rovnic samotného modelu. Následně je ukázána její aplikace na problematiku odhadu vlastností šumů pomocí dvou různých přístupů. Nakonec je metoda podstoupena simulacím, které ověřují její vlastnosti a kvalitu odhadů.

Abstract

The thesis deals with the properties of time signal generators and their inaccuracies. The thesis first introduces a discrete stochastic state-space model of a system and shows some statistical properties of the model. Subsequently, the clock as an oscillator is introduced and the method of constructing its continuous model is described, together with the modelling of the errors of this clock.

Then, the Measurement Difference Method is shown as a tool for estimating the covariances of the noises acting on the clock. This method is successively derived from the equations of the model itself. Its application to the problem of estimating noise properties is then shown using two different approaches. Finally, the method is subjected to simulations that verify its properties and the quality of the estimates.

Klíčová slova

Stavový model • vlastnosti šumů • kovariance šumů • Metoda rozdílů měření • unifikační matice

Poděkování

Na tomto místě bych velice rád poděkoval Ing. Oliveru Kostovi, Ph.D. za jeho odborné vedení práce a za velice konstruktivní diskuze, rady a podněty, které mi pomohli při vypracování této práce.

Obsah

1	Úvod	3
2	Model stochastického systému a statistické vlastnosti	5
2.1	Náhodné šumy v modelu	6
2.1.1	Střední hodnota a kovariance	6
3	Model generátoru časového signálu	9
3.1	Model hodin a jejich poruch	9
3.1.1	Hodinový šum	10
3.1.2	Wienerův proces a bílý šum	11
3.1.3	Stavový model	11
3.2	Diskretizace stavového modelu	12
4	Metoda rozdílů měření	17
4.1	Predikce a rozdíl měření	17
4.2	Základní myšlenka MDM	22
5	Aplikace metody	29
5.1	Odhad s aproximací kovarianční matice šumů stavu	29
5.2	Simulace odhadu s aproximací kovarianční matice šumů stavu . .	34
5.3	Nový odhad unikátních prvků bez aproximace	39
5.3.1	Univerzální postup rozkladu \mathcal{S}_{vec}	41
5.4	Simulace odhadu bez aproximace	43
5.5	Porovnání výsledků odhadů	45
5.6	Simulační program	49
6	Závěr	51
	Bibliografie	53
	Seznam obrázků	55

V dnešním světě, kde se technologie každým dnem posouvají k vyšší výkonosti a přesnosti, se měření přesného času stává stále podstatnějším problematikou. Ať už se jedná o satelitní navigační systémy, časově závislé výrobní procesy, nebo i běžné fungování většiny elektronických zařízení, je zřejmé, že moderní společnost je závislá na měřicích času. Jedním z problémů tedy zůstávají nedokonalosti konstrukce a měřicích zařízení v hodinách. Ať už mluvíme o atomových hodinách nebo klasických ručičkových hodinách, všechny se s postupujícím časem předbíhají, či opoždějí, i když každé jinou rychlostí.

Přesto, že nedokážeme sestavit naprosto přesné hodiny, můžeme určit vlastnosti nedokonalých hodin a pomocí těchto vlastností určit přesnost měření času, popřípadě odhadnout vývoj budoucí odchylky od reálného času. Ovšem jak získáme tento reálný a naprosto přesný čas? Bez přesných hodin můžeme pouze porovnávat čas naměřený z různých zdrojů a určovat tak odchylky mezi nimi. Tyto odchylky, nebo také šumy, jsou určeny vlastnostmi samotných hodin. V této práci uvažujeme odhad vlastností šumů generátorů časového signálu využívaných v dnešních běžně dostupných technologiích [Hsi14], jejichž signál je porovnáván s řádově přesnějšími atomovými hodinami [LCZ19], jelikož v tomto případě se šumy atomových hodin zdají být nepodstatné vůči šumům hodin s mnohem menší přesností a můžeme je tudíž zanedbat.

Základním prvkem pro analýzu vlastností šumů ve stochastických systémech, jako jsou například měření hodin, je definice jejich modelu. Model systému je vždy jen aproximací a jeho přesnost záleží na množství zanedbané, či špatně modelované dynamiky, popřípadě na nepřesné definici struktury modelu. Každý stochastický model můžeme dělit na dvě části. První částí je část deterministická, která je reprezentována exaktními rovnicemi, jejichž chování lze velmi snadno předpovídat. Druhou a pro tuto práci zajímavější částí je část stochastická, která je reprezentována šumy. Tyto šumy zastupují neznámou, či nemodelovanou dynamiku. V této práci budeme popisovat šumy pomocí dvou hodnot, takzvaných momentů, které popisují jejich chování a následně se pokusíme právě tyto modely odhadnout. Výhodou znalosti momentů šumů je skutečnost, že můžeme na místo zcela náhodného

chování modelu uvažovat pouze určitou oblast, ve které náhoda v podobě šumů působí. Další výhodou znalosti vlastností šumů je, že známý popis šumu je jedním z prvních kroků při snaze jej potlačit.

Jako odhad se v této práci rozumí využití dostupných informací o dynamice systému a hodnot získaných jeho měřením, ze kterých se pokusíme pomocí matematických rovnic určit právě hledané vlastnosti šumů. Samozřejmě jak již samotný název napovídá, odhad nemusí být roven přesně hledané hodnotě. Existuje nespočet metod ([DKS18], [Meh72], [Lee80], [Fri82], [Ma+11], atd.), které slouží k odhadování neznámých parametrů, kde každá má své výhody a nevýhody. V této práci se zaměříme výhradně na Metodu rozdílu měření [Kos22], jednu z nejnovějších metod, kterou aplikujeme na problematiku odhadu momentů šumů hodin.

Model stochastického systému a statistické vlastnosti

2

Jako stochastický model systému v této práci se používá diskretní stavový model [Söd02], který se skládá ze dvou částí. První částí je stavová rovnice

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \quad (2.1)$$

pro $k = 1, 2, 3, \dots, \tau$, kde $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ je neznámý vektor stavu, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ představuje známý vektor řízení, $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ je neměřitelný vektor šumu stavu a matice $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ je známá matice dynamiky.

K rovnici stavu náleží druhá část modelu, kterou je rovnice měření

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (2.2)$$

kde $\mathbf{z}_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ je známý vektor měření, $\mathbf{H}_k \in \mathbb{R}^{n_z \times n_x}$ je známá matice měření a $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{n_z}$ je neměřitelný vektor šumu měření.

Pro stavový model systému je definována matice pozorovatelnosti jako

$$\mathcal{O}^{n_x} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}\mathbf{F} \\ \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{F} \\ \vdots \\ \mathbf{H} \prod_{i=1}^{n_x-1} \mathbf{F} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n_z n_x \times n_x}, \quad (2.3)$$

kde \mathbf{H} a \mathbf{F} jsou matice z rovnic (2.1) a (2.2) a $\prod_{i=1}^{n_x-1} \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ je maticový součin. Pokud má matice pozorovatelnosti \mathcal{O}^{n_x} plnou hodnotu je systém označován jako pozorovatelný a je možné v každém okamžiku získat odhad stavu z posloupnosti měření $[\mathbf{z}_k^T, \mathbf{z}_{k+1}^T, \mathbf{z}_{k+2}^T, \dots, \mathbf{z}_{k+(n_x-1)}^T]^T$ a posloupnosti řízení $[\mathbf{u}_k^T, \mathbf{u}_{k+1}^T, \mathbf{u}_{k+2}^T, \dots, \mathbf{u}_{k+(n_x-2)}^T]^T$ pro všechny časové okamžiky k .

2.1 Náhodné šumy v modelu

Šumy představují náhodné složky modelu, jejichž budoucí hodnoty nelze předpovídat. Těmito náhodnými složkami modelu jsou šum stavu \mathbf{w}_k a šum měření \mathbf{v}_k . Šum stavu v sobě obsahuje vliv náhodných poruch, vliv okolního prostředí nebo nemoделovanou dynamiku samotného systému. Šum měření představuje nedokonalost měřících zařízení a elektrických obvodů. Tyto náhodné veličiny bývají popisovány buď známými funkcemi (např. funkce hustoty pravděpodobnosti), nebo pomocí konečných momentů. V této práci se všechny náhodné veličiny popisují pomocí jejich střední hodnoty a variance, popřípadě kovariance.

2.1.1 Střední hodnota a kovariance

Střední hodnota $E[X]$ vyjadřuje očekávanou hodnotu náhodné veličiny (viz. anglický název *expected value*) a vyjadřuje v jistém smyslu průměr všech možných hodnot X vážený pravděpodobností jejich výskytu a pro spojitě náhodnou veličinu se počítá jako

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} xp(x)dx, \quad (2.4)$$

kde $p(x)$ je funkce hustoty pravděpodobnosti náhodné veličiny. V případě určování střední hodnoty z naměřených dat z diskrétních časových okamžiků nebo v simulacích se využívá takzvané výběrové střední hodnoty. Pro její výpočet se používá vzorec

$$E[X_n] = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad (2.5)$$

kde X_n je vektor n naměřených realizací náhodné veličiny a x_i jsou jednotlivé realizace.

Výběrová střední hodnota je tedy průměr z naměřených dat. Pro počet dat blížící se k nekonečnu říkáme, že výběrová střední hodnota se blíží ke skutečné střední hodnotě veličiny.

Druhým parametrem je σ^2 , neboli variance náhodné veličiny definovaná jako

$$\sigma^2 = E[(X - E[X])^2], \quad (2.6)$$

kde $E[X]$ je již dříve zavedená střední hodnota. Zatím co střední hodnota udává očekávanou hodnotu náhodné veličiny, variance udává střední kvadratickou odchylku náhodné veličiny od její střední hodnoty.

U vícerozměrných náhodných veličin se na místo variance zavádí takzvaná kovariance. Tato veličina je reprezentována kovarianční maticí

$$\text{cov}[X_1, X_2] = E[(X_1 - E[X_1])(X_2 - E[X_2])^T], \quad (2.7)$$

kde $cov[X_1, X_2] \in \mathbb{R}^{n_{X_1} \times n_{X_1}}$ je čtvercová kovarianční matice a X_1 a X_2 jsou náhodné vektory. Definiční vztah kovariance lze upravit do podoby

$$cov[X_1, X_2] = E[X_1 X_2^T] - E[X_1]E[X_2]. \quad (2.8)$$

Pokud jsou všechny střední hodnoty náhodných veličin rovny nule a máme vektory diskrétních realizací, je kovariance náhodných veličin rovna jejich korelaci, která je definovaná jako

$$cov[X_1, X_2] = E[X_1 X_2^T]. \quad (2.9)$$

Model generátoru časového signálu

3

V této práci se jako zdroj časového signálu uvažují atomové hodiny, či podobné velmi přesné měřiče času. Tyto hodiny pracují na principu měření fáze kmitání atomů na jejich rezonanční frekvenci a dosahují vysoké přesnosti.

3.1 Model hodin a jejich poruch

Jak již bylo řečeno, generátory časového signálu obvykle měří čas pomocí snímání kmitů atomů, krystalů, či jiných zdrojů stálých oscilací, jedná se tedy o oscilátory [Gal08]. V ideálním případě by tento systém byl naprosto přesný a řídil se rovnicí oscilátoru

$$u(t) = U_0 \sin(2\pi\omega_0 t), \quad (3.1)$$

kde U_0 je amplituda kmitů a ω_0 je jejich frekvence.

Pro hodiny tvořené dokonalým oscilátorem by platila rovnice měření času

$$h_0(t) = t, \quad (3.2)$$

neboli měření, které přesně odpovídá času.

V reálném světě ovšem není možné vytvořit zcela přesný oscilátor a tak všechny hodiny podléhají poruchám. Uvažují se dva základní druhy poruch, první je porucha v amplitudě U a druhou je porucha ve frekvenci ω . Po doplnění rovnice (3.1) o poruchy vypadá model oscilátoru následovně

$$u(t) = (U_0 + \epsilon(t)) \sin(2\pi\omega_0 t + \varphi(t)), \quad (3.3)$$

kde $\epsilon(t)$ značí posuv v amplitudě a $\varphi(t)$ je porucha frekvence oscilátoru.

Pro potřeby měření času je porucha v amplitudě zanedbatelná, jelikož je její vliv na frekvenci a fázi oscilátoru minimální. Pro reálné měření času se uvažuje rovnice měření času

$$h(t) = h_0(t) + \frac{\varphi(t)}{2\pi\omega_0}. \quad (3.4)$$

Ideální měření $h_0(t)$ je ovlivněno fázovým posuvem. Pro modelování chyb v hodinách se zavádí rovnice fázového posuvu

$$x(t) = h(t) - h_0(t). \quad (3.5)$$

Tato rovnice vyjadřuje fázový posuv v každém okamžiku měření. Po dosazení do rovnice (3.5) získáme rovnici

$$x(t) = \frac{\varphi(t)}{2\pi\omega_0}. \quad (3.6)$$

Tuto rovnici lze chápat jako první způsob měření poruch v hodinách, konkrétně jejich fázového posuvu.

Pro oscilátor se definuje okamžitá frekvence jako

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (3.7)$$

S pomocí okamžité frekvence lze určit normalizovanou frekvenční odchylku

$$y(t) = \frac{\omega(t) - \omega_0}{\omega_0}, \quad (3.8)$$

po dosazení za $\omega(t)$ z (3.7) získáme

$$y(t) = \frac{1}{2\pi\omega_0} \frac{d\varphi(t)}{dt}. \quad (3.9)$$

Při porovnání rovnice normalizované frekvenční odchylky (3.9) a rovnice fázového posuvu (3.6) vidíme, že platí

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}. \quad (3.10)$$

Normalizovaná frekvenční odchylka představuje druhý způsob měření poruch v hodinovém signálu. Hodnotu normalizované frekvenční odchylky v praxi určíme pomocí diferencí fázových posuvů $x(t)$ [Bre93].

3.1.1 Hodinový šum

Jelikož v minulosti bylo již měřeno chování různých generátorů časového signálu [ZT05], bylo experimentálně zjištěno, jaký model popisuje šumy pomocí Allanovy variance [All66]. Allanova variance umožňuje analyzovat naměřená data z oscilujících systémů, jako jsou právě generátory časového signálu. Pomocí Allanovy variance se zjišťuje stabilita systému, ale umožňuje také identifikovat náhodné vlastnosti náhodných procesů působících na systém.

Pomocí Allanovy variance bylo zjištěno, že normalizovaná frekvenční odchylka hodin se skládá ze dvou náhodných veličin. První veličinou je bílý šum a druhým

je Wienerův proces. S touto znalostí je možné přepsat rovnici normalizované frekvenční odchylky jako

$$y(t) = \xi_1(t) + W_2(t), \quad (3.11)$$

kde $\xi_1(t)$ představuje bílý šum a $W_2(t)$ je Wienerův proces.

3.1.2 Wienerův proces a bílý šum

Wienerův proces je stochastický proces s nulovou střední hodnotou a časově nezávislými přírůstky. Wienerův proces se dá chápat jako model realizace náhodné procházky. Lze jej popsat rovnicí

$$W_2(t_n) = \int_0^{t_n} \xi(\tau) d\tau, \quad (3.12)$$

kde $W_2(0) = 0$ a $\xi(\tau)$ představuje bílý šum.

Jako bílý šum se nazývá náhodný proces, jehož současná hodnota není nijak závislá na hodnotách minulých ani budoucích. Jeho realizací je vektor náhodných hodnot, pro které platí, že kovariance libovolných dvou vzorků ze dvou různých časových okamžiků je rovna nule

$$\text{cov}(\xi(t_1), \xi(t_2)) = \delta(t_1 - t_2)Q. \quad (3.13)$$

V rovnici představuje $\xi(t)$ bílý šum, Q jeho kovarianční matice a $\delta(x)$ je Diracova funkce definovaná jako

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty & \text{pro } x = 0 \\ 0 & \text{pro } x \neq 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

a jejíž integrál přes celý obor reálných čísel je roven jedné.

3.1.3 Stavový model

Dalším krokem potřebným pro následné odhady vlastností šumů hodin je vytvoření stavového modelu. Nejprve vyjádříme frekvenční odchylku $y(t)$ jako součet bílého šumu a Wienerova procesu, který je dán jako integrál bílého šumu

$$y(t) = \xi_1(t) + \int_0^t \xi_2(\tau) d\tau. \quad (3.15)$$

Tato rovnice představuje základní kámen pro tvorbu stavového modelu. Nejprve zavedeme dvě nové proměnné, které budou reprezentovat stavy modelu

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x(t), \\ x_2(t) &= \int_0^t \xi_2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Po derivaci obou rovnic podle času získáme

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= \frac{dx(t)}{dt} = y, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \xi_2(t). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Po dosazení za y z (3.15) získáme model popisující vývoj frekvenční odchylky hodin. V maticové podobě vypadá model následovně

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}_s(t)\mathbf{x}(t) + \xi(t), \quad (3.18)$$

kde $\mathbf{x}(t)$ představuje vektor stavů, $\mathbf{F}_s(t)$ je matice dynamiky a $\xi(t)$ je vektor obsahující šumy

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_s(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \xi(t) = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

U matice dynamiky \mathbf{F}_s nepředpokládáme změny v čase, bude tedy nadále uváděna bez časové závislosti. Vzhledem k tomu, že poruchy v modelu jsou uvažované jako bílé šumy, je kovarianční matice poruch diagonální

$$\mathbf{Q}_s = \text{cov}[\xi(t_1), \xi(t_2)] = \delta(t_1 - t_2) \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

kde q_1 a q_2 představují spektrální hustoty jednotlivých šumů.

3.2 Diskretizace stavového modelu

Pro potřeby numerických simulací a pro aplikaci metod odhadu vlastností poruch je potřeba spojitý model převést do diskrétní podoby, jelikož simulační i reálná data jsou měřena diskrétně. Pro diskrétní modely platí, že spojitá časová osa je rozdělena podle známé vzorkovací periody T_s na jednotlivé časové okamžiky

$$t_k = kT_s, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \tau. \quad (3.21)$$

T_s je známá vzorkovací perioda a k je krok, který vyjadřuje počet uběhlých period.

Uvažujeme tedy převod

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}_s\mathbf{x}(t) + \xi(t) \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_k + \xi_k, \quad (3.22)$$

kde $k = 0, 1, 2, \dots, \tau$ značí krok a matice \mathbf{F} je matice dynamiky diskrétního modelu určená vzorkovací periodou.

Nejprve je potřeba diskretizovat matici \mathbf{F}_s . Vzhledem k tomu, že se jedná o matici dynamiky, u které se nepředpokládají změny v čase, je její diskrétní verze dána maticovou exponenciálou

$$\mathbf{F}(T_s) = e^{\mathbf{F}_s T_s}. \quad (3.23)$$

Výpočet maticové exponenciály lze rozepsat jako součet

$$e^{At} = \mathbf{I}_{n_x \times n_x} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 t^2 + \dots + \frac{1}{n!}\mathbf{A}^n t^n + \dots, \quad (3.24)$$

kde \mathbf{A} je diskretizovaná matice dynamiky a $\mathbf{I}_{n_x \times n_x}$ je identická matice jejíž dimenze odpovídá počtu stavů. Za \mathbf{A} dosadíme matici dynamiky modelu \mathbf{F}_s z (3.19). Vzhledem k podobě matice \mathbf{F}_s se výpočet zjednoduší na

$$\mathbf{F}(T_s) = e^{\mathbf{F}_s T_s} = \mathbf{I}_{2 \times 2} + \mathbf{F}_s T_s = \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

jelikož platí, že $\prod_{i=1}^2 \mathbf{F}_s = \mathbf{0}$ a tak všechny další násobky matice $\prod_{i=1}^n \mathbf{F}_s$ jsou pro $n \geq 2$ rovny matici samých nul.

Pro kompletní odvození diskrétního modelu zbývá zjištění vlastností diskrétního šumu. Diskrétní šum lze popsat jako

$$\xi_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{F}(t_k - \tau) \xi_s(\tau) d\tau, \quad (3.26)$$

kde $\mathbf{F}(t_k - \tau)$ je diskretizovaná matice dynamiky (3.25) a $\xi_s(\tau)$ je spojitý šum (3.19). Diskrétní šum je tedy integrací šumu spojitého a matice dynamiky.

U diskrétního šumu je potřeba odvodit střední hodnotu a kovarianční matici z důvodu budoucích simulací a pro možnost odhadu hodnot v kovarianční matici. Tyto dva parametry dostačují k popisu diskrétního šumu, protože operace integrace je lineární operátor a tak je diskrétní šum Gaussovský a bílý.

Střední hodnota diskrétního šumu je

$$\mu_k = E[\xi_k] = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{F}(t_k - \tau) E[\xi_s(\tau)] d\tau, \quad (3.27)$$

kde $E[\xi_s(\tau)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ je známý vektor středních hodnot spojitých šumů.

Po dosazení je tedy střední hodnota diskretizovaného šumu

$$\mu_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Kovarianční matice šumu je dána vzhledem k nulové střední hodnotě šumů jako

$$Q_k = \text{cov}(\xi_k \xi_k^T), \quad (3.29)$$

$$= E[\xi_k \xi_k^T]. \quad (3.30)$$

Tento vztah je možné s využitím (3.26) rozepsat do podoby

$$Q_k = E \left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{F}(t_k - \tau) \xi_s(\tau) \xi_s^T(\tau') \mathbf{F}^T(t_k - \tau') d\tau d\tau' \right]. \quad (3.31)$$

Jelikož je matice $\mathbf{F}(t_k - \tau)$ konstantní, můžeme přesunout operátor střední hodnoty přímo k členu $\xi_s(\tau) \xi_s^T(\tau')$. Tato střední hodnota je známá jako

$$E[\xi_s(\tau) \xi_s^T(\tau')] = Q_s \delta(\tau' - \tau), \quad (3.32)$$

kde Q_s je kovarianční matice spojitého šumu (3.20) a $\delta(\tau' - \tau)$ je Kroneckerova funkce, která vyjadřuje, že šum je časově nezávislý a je definována jako

$$\delta(\tau' - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } \tau' = \tau \\ 0 & \text{je-li } \tau' \neq \tau \end{cases} \quad (3.33)$$

Po dosazení do původní rovnice získáme

$$Q_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{F}(t_k - \tau) Q_s \delta(\tau' - \tau) \mathbf{F}^T(t_k - \tau') d\tau d\tau', \quad (3.34)$$

$$= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{F}(t_k - \tau) Q_s \mathbf{F}^T(t_k - \tau) d\tau, \quad (3.35)$$

jelikož integrál kroneckerovy funkce je roven 1. Po dosazení známých matic \mathbf{F} a Q_s získáme rovnici ve tvaru

$$Q_k = \begin{bmatrix} Q_{1,1} & Q_{1,2} \\ Q_{2,1} & Q_{2,2} \end{bmatrix} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \begin{bmatrix} q_1 + q_2(t_k - \tau)^2 & q_2(t_k - \tau) \\ q_2(t_k - \tau) & q_2 \end{bmatrix} d\tau. \quad (3.36)$$

Abychom získali výslednou podobu kovarianční matice, musíme integrovat všechny členy z matice v (3.36). První člen výsledné kovarianční matice vypočteme jako

$$Q_{1,1} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} q_1 + q_2(t_k - \tau)^2 d\tau, \quad (3.37)$$

$$= \left[q_1 \tau + q_2 \left(t_k^2 \tau - t_k \tau^2 + \frac{1}{3} \tau^3 \right) \right]_{t_{k-1}}^{t_k}, \quad (3.38)$$

$$= q_1(t_k - t_{k-1}) + q_2 \left(t_k^3 - t_k^3 + \frac{1}{3} t_k^3 - t_k^2 t_{k-1} + t_k t_{k-1}^2 - \frac{1}{3} t_{k-1}^3 \right). \quad (3.39)$$

Z (3.21) víme, že spojitý čas lze rozdělit na diskrétní časové okamžiky a je tak možné napsat, že $t_k = t_{k-1} + T_s$. S využitím této substituce můžeme dále upravit rovnici

(3.39) a získat konečný tvar prvního členu kovarianční matice diskretizovaného šumu

$$\begin{aligned}
 Q_{1,1} &= q_1 T_s + q_2 \left(\frac{1}{3} (t_{k-1} + T_s)^3 - (t_{k-1} + T_s)^2 t_{k-1} + (t_{k-1} + T_s) t_{k-1}^2 - \frac{1}{3} t_{k-1}^3 \right), \\
 &= q_1 T_s + q_2 \left(\frac{1}{3} t_{k-1}^3 + t_{k-1}^2 T_s + t_{k-1} T_s^2 + \frac{1}{3} T_s^3 - t_{k-1}^3 - 2 t_{k-1}^2 T_s - t_{k-1} T_s^2 + \right. \\
 &\quad \left. + t_{k-1}^3 + t_{k-1}^2 T_s - \frac{1}{3} t_{k-1}^3 \right), \\
 &= q_1 T_s + q_2 \frac{T_s^3}{3}.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Druhý a třetí člen kovarianční matice jsou totožné $Q_{1,2} = Q_{2,1}$ a tak je lze určit jediným výpočtem

$$\begin{aligned}
 Q_{1,2} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} q_2 (t_k - \tau) d\tau, \\
 &= q_2 \left[t_k \tau - \frac{1}{2} \tau^2 \right]_{t_{k-1}}^{t_k}, \\
 &= q_2 \left(t_k^2 - \frac{1}{2} t_k^2 - t_k t_{k-1} + \frac{1}{2} t_{k-1}^2 \right).
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Opět využijeme zavedené vzorkovací periody a dosadíme

$$\begin{aligned}
 Q_{1,2} &= q_2 \left(\frac{1}{2} (t_{k-1} + T_s)^2 - t_{k-1}^2 - t_{k-1} T_s + \frac{1}{2} t_{k-1}^2 \right), \\
 &= q_2 \frac{T_s^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

A poslední člen $Q_{2,2}$ určíme jako

$$\begin{aligned}
 Q_{2,2} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} q_2 d\tau, \\
 &= q_2 (t_k - t_{k-1}), \\
 &= q_2 T_s.
 \end{aligned} \tag{3.43}$$

Nyní stačí pouze poskládat známé členy a získáme podobu kovarianční matice šumů diskretizovaného modelu jako

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 T_s + q_2 \frac{T_s^3}{3} & q_2 \frac{T_s^2}{2} \\ q_2 \frac{T_s^2}{2} & q_2 T_s \end{bmatrix}, \tag{3.44}$$

kde časový index k lze vynechat, jelikož tato kovarianční matice nezávisí na čase.

Výsledný diskretizovaný model má podobu

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1 & T_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k, \\ \mathbf{z}_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k,\end{aligned}\tag{3.45}$$

kde \mathbf{z}_k je měření, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ je matice měření a \mathbf{v}_k je šum měření s variancí R . Tato podoba matice měření určuje, že měření z_k odpovídá normalizované frekvenční odchylce y .

Metoda rozdílu měření

4

Metoda rozdílu měření [Kos22] a [KDS23] (dále jako MDM, z anglického Measurement difference method) je metoda určená pro odhad parametrů popisujících šumy ve stochastických procesech. Metoda využívá statistickou analýzu rozdílu reálného a predikovaného měření procesu, která navazuje na celou řadu starších přístupů k odhadování vlastností šumů ve stochastických systémech [Dun+17].

V následujících kapitolách budou představeny rovnice používané samotnou metodou, určen postup výpočtu predikce měření a nakonec se představí postup výpočtu odhadu kovarianční matice šumů stochastického modelu.

4.1 Predikce a rozdíl měření

V této kapitole je popsán způsob výpočtu neznámého vektoru stavu systému, následně je ukázána predikce budoucích výstupů a nakonec rozdíl mezi měřením a jeho predikcí.

Aby bylo možné určit predikci výstupu systému, je nejprve nutné určit neznámý stav systému. Z kapitoly o stochastickém modelu víme, že to je možné, pokud je systém pozorovatelný, neboli když má jeho matice pozorovatelnosti \mathcal{O}^{n_x} (2.3) plnou hodnotu. V tomto případě můžeme vypočítat stavy systému úpravou rovnice (2.2)

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (4.1)$$

Jelikož matice \mathbf{H} zpravidla nebývá čtvercová, nelze přímo vynásobit obě strany rovnice její inverzí, jelikož tato inverze není definována. Vynásobením celé rovnice členem $(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T$ zprava dostaneme rovnici

$$(\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{z}_k = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \mathbf{x}_k + (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{v}_k. \quad (4.2)$$

Na pravé straně rovnice vidíme, že se člen $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ násobí zprava svojí inverzí a tedy že výsledkem tohoto násobení bude jednotková matice. Postup využití členu $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$,

kde $A \in \mathbb{R}^{i \times j}, \forall i, j = 1, 2, \dots, N$ v rovnicích jako je (4.2) se nazývá pseudoinverze matice \mathbf{A} a značí se \mathbf{A}^\dagger . Z rovnice nyní můžeme vytknout x_k . Po těchto úpravách získáme

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{H}^\dagger \mathbf{z}_k - \mathbf{H}^\dagger \mathbf{v}_k. \quad (4.3)$$

Dosazením za x_k z (4.3) do rovnice měření (2.1) získáme

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}\mathbf{H}^\dagger \mathbf{z}_k - \mathbf{F}\mathbf{H}^\dagger \mathbf{v}_k + \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k. \quad (4.4)$$

Tímto způsobem je možné určit budoucí hodnoty stavů systému z minulé hodnoty měření, za předpokladu znalosti hodnot šumů v okamžiku k .

Dosazením predikce stavu do rovnice měření (2.2) a roznásobením získáme

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{H}^\dagger \mathbf{z}_k - \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{H}^\dagger \mathbf{v}_k + \mathbf{H}\mathbf{u}_k + \mathbf{H}\mathbf{w}_k + \mathbf{v}_{k+1}. \quad (4.5)$$

Vidíme, že nyní výpočet budoucí hodnoty měření závisí na minulém měření \mathbf{z}_k a vstupu \mathbf{u}_k a na hodnotách náhodných šumů.

Tuto rovnici můžeme přepsat do zkrácené podoby

$$\mathbf{z}_{k+1} = \hat{\mathbf{z}}_{k+1} + \tilde{\mathbf{z}}_{k+1}, \quad (4.6)$$

kde $\hat{\mathbf{z}}_{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{H}^\dagger \mathbf{z}_k + \mathbf{H}\mathbf{u}_k$ je predikce měření a $\tilde{\mathbf{z}}_{k+1} = -\mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{H}^\dagger \mathbf{v}_k + \mathbf{H}\mathbf{w}_k + \mathbf{v}_{k+1}$ je chyba predikce.

Nyní můžeme zavést rovnici rozdílu měření

$$\tilde{\mathbf{z}}_k = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k, \quad (4.7)$$

vzniklá úpravou rovnice (4.6), kde člen $\tilde{\mathbf{z}}_k$ bude označován jako chyba predikce. Tato rovnice je základem MDM, jelikož umožňuje výpočet rozdílu měření, který v sobě obsahuje informaci o vlastnostech šumů systému, pouze ze známých hodnot měření a vstupů.

Protože rovnice (4.7) obsahuje deterministickou složku v podobě $\hat{\mathbf{z}}_k$ a zároveň i stochastickou složku \mathbf{z}_k , ve které je obsažen šum měření \mathbf{v}_k i šum stavu v \mathbf{x}_{k-1} , jedná se o stochastický proces.

Definuje rozšířený vektor měření

$$\mathbf{Z}_k^L = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} \\ \mathbf{z}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{z}_{k+L-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{Ln_z}, \text{ pro } k = 0, 1, \dots, \tau + L - 1, \quad (4.8)$$

pro konečné celé $L \geq 1$. Tento vektor obsahuje posloupnost L po sobě jdoucích měření. Pro budoucí využití MDM je potřeba z rozšířeného vektoru měření \mathbf{Z}_k^L určit

N-krokovou predikci měření $\widehat{\mathbf{Z}}_k^{L,N}$. Prvním krokem je způsob výpočtu samotného rozšířeného vektoru měření

$$\mathbf{Z}_k^L = \mathbf{O}^L \mathbf{x}_k + \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_k^{L-1} + \mathbf{V}_k^L + \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1}, \quad (4.9)$$

kde \mathbf{O}^L je matice pozorovatelnosti z rovnice (2.3), matice $\Gamma^{L-1} \in \mathbb{R}^{Ln_z \times (L-1)n_x}$ je definována jako

$$\Gamma^{L-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \dots & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} \\ \mathbf{H} & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} & \dots & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} \\ \mathbf{HF} & \mathbf{H} & \dots & \mathbf{0}_{n_z \times n_x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H} \prod_{i=1}^{L-2} \mathbf{F} & \mathbf{H} \prod_{i=1}^{L-3} \mathbf{F} & \dots & \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

a vektory $\mathbf{W}_k^{L-1} \in \mathbb{R}^{(L-1)n_x}$, $\mathbf{V}_k^L \in \mathbb{R}^{Ln_z}$ a $\mathbf{U}_k^{L-1} \in \mathbb{R}^{(L-1)n_x}$ jsou určeny jako

$$\mathbf{W}_k^{L-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{w}_{k+1} \\ \mathbf{w}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{k+L-2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_k^L = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_{k+1} \\ \mathbf{v}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{k+L-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_k^{L-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ \mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{u}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{k+L-2} \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Ukázka platnosti (4.9)

Platnost rovnice je zde ukázána na odvození prvních 3 měření, neboli $L = 3$, čemuž odpovídají měření z_k , z_{k+1} a z_{k+2} . Nejprve tedy začneme se známou rovnicí měření

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k.$$

Rovnice pro výpočet \mathbf{z}_{k+1} je složitější, jelikož je nutné využít i rovnici dynamiky systému (2.1) pro výpočet hodnoty stavu \mathbf{x}_{k+1}

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}.$$

Po dosazení (2.1) získáme

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{x}_k + \mathbf{H}\mathbf{u}_k + \mathbf{H}\mathbf{w}_k + \mathbf{v}_{k+1}.$$

Pro z_{k+2} postupuje obdobně, nejprve vyjdeme z rovnice

$$\mathbf{z}_{k+2} = \mathbf{H}\mathbf{x}_{k+2} + \mathbf{v}_{k+2},$$

do které dosadíme za \mathbf{x}_{k+2} a získáme

$$\mathbf{z}_{k+2} = \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{H}\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{H}\mathbf{w}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+2}.$$

Finální tvar rovnice dostaneme dosazením z (2.1) za \mathbf{x}_{k+1}

$$\mathbf{z}_{k+2} = \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{F}\mathbf{x}_k + \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{u}_k + \mathbf{H}\mathbf{F}\mathbf{w}_k + \mathbf{H}\mathbf{u}_{k+1} + \mathbf{H}\mathbf{w}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+2}.$$

Po přepsání do maticové podoby vypadá výsledná rovnice následovně

$$\mathbf{Z}_k^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_k \\ \mathbf{z}_{k+1} \\ \mathbf{z}_{k+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{HF} \\ \mathbf{HFF} \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{H} & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{HF} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \mathbf{W}_k^2 + \mathbf{V}_k^3 + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{H} & \mathbf{0}_{1 \times 2} \\ \mathbf{HF} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \mathbf{U}_k^2,$$

Obdobným způsobem lze odvodit podobu výpočtu \mathbf{Z}_k^L pro všechny možné hodnoty L .

Dalším krokem potřebným pro výpočet rozdílu měření je výpočet stavu \mathbf{x}_k s využitím rozšířeného vektoru měření \mathbf{Z}_k^L . Výchozí rovnicí je rovnice výpočtu \mathbf{Z}_k^L (4.9) jejíž úpravou je možné vyčíslit stav systému. Rovnice pro výpočet stavu pak tedy vypadá následovně

$$\mathbf{x}_k = (\mathbf{O}^L)^\dagger \mathbf{Z}_k^L - (\mathbf{O}^L)^\dagger \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1} - (\mathbf{O}^L)^\dagger \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_k^{L-1} - (\mathbf{O}^L)^\dagger \mathbf{V}_k^L. \quad (4.12)$$

S využitím známé hodnoty stavu je možné vypočítat predikci budoucích stavů systému. Tato hodnota se dá odvodit z rovnice dynamiky systému (2.1) jako

$$\mathbf{x}_k = \prod_{i=1}^N \mathbf{F} \mathbf{x}_{k-N} + \Xi^N \mathbf{U}_{k-N}^N + \Xi^N \mathbf{W}_{k-N}^N, \quad (4.13)$$

pro $k = 1, 2, \dots, \tau$ a $N \geq 1$, kde $\Xi^N = [\prod_{i=1}^{N-1} \mathbf{F}, \prod_{i=1}^{N-2} \mathbf{F}, \dots, \mathbf{F}, \mathbf{I}_{n_x}] \in \mathbb{R}^{n_x \times N n_x}$.

Po dosazení za \mathbf{x}_{k-N} z rovnice (4.12) získáme

$$\mathbf{x}_k = \prod_{i=1}^N \mathbf{F}(\mathcal{O}^L)^\dagger (\mathbf{Z}_{k-N}^L - \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_{k-N}^{L-1} - \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_{k-N}^{L-1} - \mathbf{V}_{k-N}^L) + \Xi^N \mathbf{U}_{k-N}^N + \Xi^N \mathbf{W}_{k-N}^N. \quad (4.14)$$

Se známými hodnotami predikce stavů systému je možné vypočítat budoucí měření $\mathbf{Z}_k^{L,N}$ s využitím rovnice (4.9) do které místo \mathbf{x}_k dosadíme z rovnice (4.14) a získáme

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_k^{L,N} = & \mathcal{O}^L \prod_{i=1}^N \mathbf{F}(\mathcal{O}^L)^\dagger (\mathbf{Z}_{k-N}^L - \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_{k-N}^{L-1} - \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_{k-N}^{L-1} - \mathbf{V}_{k-N}^L) + \\ & + \mathcal{O}^L \Xi^N \mathbf{U}_{k-N}^N + \mathcal{O}^L \Xi^N \mathbf{W}_{k-N}^N + \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1} + \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_k^{L-1} + \mathbf{V}_k^L, \end{aligned} \quad (4.15)$$

kde $\mathbf{Z}_k^{L,N} \in \mathbb{R}^{L n_z}$ je vektor budoucích měření. Nyní můžeme definovat predikci měření $\widehat{\mathbf{Z}}_k^{L,N}$ jako

$$\widehat{\mathbf{Z}}_k^{L,N} = \mathcal{O}^L \prod_{i=1}^N \mathbf{F}(\mathcal{O}^L)^\dagger (\mathbf{Z}_{k-N}^L - \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_{k-N}^{L-1}) + \mathcal{O}^L \Xi^N \mathbf{U}_{k-N}^N + \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1}, \quad (4.16)$$

a chybu predikce měření $\widetilde{\mathbf{Z}}_k$ jako

$$\widetilde{\mathbf{Z}}_k = \mathcal{O}^L \prod_{i=1}^N \mathbf{F}(\mathcal{O}^L)^\dagger (-\Gamma^{L-1} \mathbf{W}_{k-N}^{L-1} - \mathbf{V}_{k-N}^L) + \mathcal{O}^L \Xi^N \mathbf{W}_{k-N}^N + \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_k^{L-1} + \mathbf{V}_k^L. \quad (4.17)$$

Dosazením z (4.16) a (4.17) do rovnice (4.15) a vyjádřením $\widetilde{\mathbf{Z}}_k$ se definuje stochastický proces chyby predikce měření jako

$$\widetilde{\mathbf{Z}}_k = \mathbf{Z}_k - \widehat{\mathbf{Z}}_k^{L,N}, \quad (4.18)$$

kde $\widetilde{\mathbf{Z}}_k \in \mathbb{R}^{L n_z}$ je rozdíl mezi reálnými měřeními a jeho predikovanými hodnotami.

4.2 Základní myšlenka MDM

V této kapitole je dokončeno odvozování rovnic používaných v MDM a ukázán postup využití metody pro odhad prvků kovarianční matice šumů stochastického systému.

Z předchozí kapitoly je známa rovnice výpočtu chyby predikce měření (4.18), tuto rovnici lze přepsat do podoby

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k = \mathbf{A} \mathcal{E}_k, \quad (4.19)$$

kde vektor $\mathcal{E}_k \in \mathbb{R}^{(P-1)n_x + Pn_z}$ a matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{Ln_z \times (P-1)n_x + Pn_z}$ pro $P = L + N$ jsou definovány jako

$$\mathcal{E}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^w & \mathbf{A}^v \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

kde matice $\mathbf{A}^w \in \mathbb{R}^{Ln_z \times (P-1)n_x}$ a $\mathbf{A}^v \in \mathbb{R}^{Ln_z \times Pn_z}$ jsou definovány ve tvaru

$$\mathbf{A}^w = [\mathbf{I}_{Ln_z}, \mathbf{I}_{Ln_z}] \begin{bmatrix} [\mathcal{O}^L \Xi^N, \Gamma^{L-1}] \\ [-\mathcal{O}^L \prod_{i=1}^N \mathbf{F} (\mathcal{O}^L)^\dagger \Gamma^{L-1}, \mathbf{0}_{Ln_z \times Nn_x}] \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

$$\mathbf{A}^v = [\mathbf{I}_{Ln_z}, \mathbf{I}_{Ln_z}] \begin{bmatrix} [\mathbf{0}_{Ln_z \times Nn_z}, \mathbf{I}_{Ln_z}] \\ [-\mathcal{O}^L \prod_{i=1}^N \mathbf{F} (\mathcal{O}^L)^\dagger, \mathbf{0}_{Ln_z \times Nn_z}] \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

kde $\mathbf{0}_{i \times j}$ je matice samých nul o rozměrech $i \times j$.

Tento předpis ovšem neumožňuje výpočet chyby predikce, protože posloupnosti šumů \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} a \mathbf{V}_{k-N}^P nejsou známy ani měřitelné. Z rovnic (4.19) a (4.16) víme, že chybu predikce je možné určit z posloupností měření a vstupů. V MDM lze stejný výsledek určit pomocí

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k = \mathbf{A} \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{Z}_{k-N}^P \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Ukázka platnosti rovnice (4.24)

Nejprve zapišme rovnici (4.24), tak že místo matice \mathbf{A} (4.21) rozepíšeme její složky

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^w & \mathbf{A}^v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{Z}_{k-N}^P \end{bmatrix}.$$

Z vlastností maticového násobení platí, že můžeme upravit tuto rovnici do tvaru

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k = \mathbf{A}^v \mathbf{Z}_{k-N}^P - \mathbf{A}^w \mathbf{U}_{k-N}^{P-1}.$$

Nyní se zaměříme na člen $\mathbf{A}^v \mathbf{Z}_{k-N}^P$, pokud roznásobíme matici \mathbf{A}^v (4.23) s vektorem měření, dostaneme

$$\mathbf{A}^v \mathbf{Z}_{k-N}^P = \mathbf{Z}_k^L - \mathcal{O}^L \prod_{i=1}^N \mathbf{F}(\mathcal{O}^L)^\dagger \mathbf{Z}_{k-N}^L.$$

Tuto rovnici můžeme dále upravovat s pomocí rovnic (4.9) a (4.13) do následující podoby

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^v \mathbf{Z}_k^P &= \mathcal{O}^L \mathbf{x}_k + \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_k^{L-1} + \mathbf{V}_k^L + \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1} \\ &\quad - \mathcal{O}^L \prod_{i=1}^N \mathbf{F}(\mathcal{O}^L)^\dagger \left(\mathcal{O}^L \mathbf{x}_{k-N} + \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_{k-N}^{L-1} + \mathbf{V}_{k-N}^L + \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_{k-N}^{L-1} \right) \\ &= \mathcal{O}^L \mathbf{x}_k + \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_k^{L-1} + \mathbf{V}_k^L + \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1} \\ &\quad - \mathcal{O}^L \prod_{i=1}^N \mathbf{F} \mathbf{x}_{k-N} \\ &\quad - \mathcal{O}^L \prod_{i=1}^N \mathbf{F}(\mathcal{O}^L)^\dagger \left(\Gamma^{L-1} \mathbf{W}_{k-N}^{L-1} + \mathbf{V}_{k-N}^L + \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_{k-N}^{L-1} \right) \\ &= \mathcal{O}^L \mathbf{x}_k + \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_k^{L-1} + \mathbf{V}_k^L + \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1} \\ &\quad - \mathcal{O}^L \prod_{i=1}^{N-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}_{k-N+1} - \mathbf{w}_{k-N} - \mathbf{u}_{k-N}) \\ &\quad - \mathcal{O}^L \prod_{i=1}^N \mathbf{F}(\mathcal{O}^L)^\dagger \left(\Gamma^{L-1} \mathbf{W}_{k-N}^{L-1} + \mathbf{V}_{k-N}^L + \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_{k-N}^{L-1} \right) \\ &= \mathcal{O}^L \mathbf{x}_k + \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_k^{L-1} + \mathbf{V}_k^L + \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1} \\ &\quad - \mathcal{O}^L \mathbf{x}_k - \mathcal{O}^L \left(-\mathbf{w}_{k-1} - \mathbf{F} \mathbf{w}_{k-2} - \dots - \prod_{i=1}^{N-1} \mathbf{F} \mathbf{w}_{k-N} \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{u}_{k-1} - \mathbf{F} \mathbf{u}_{k-2} - \dots - \prod_{i=1}^{N-1} \mathbf{F} \mathbf{u}_{k-N} \right) \\ &\quad - \mathcal{O}^L \prod_{i=1}^N \mathbf{F}(\mathcal{O}^L)^\dagger \left(\Gamma^{L-1} \mathbf{W}_{k-N}^{L-1} + \mathbf{V}_{k-N}^L + \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_{k-N}^{L-1} \right). \end{aligned}$$

Vidíme, že oba členy obsahující stav \mathbf{x}_k se navzájem odečtou a zbude rovnice obsahující pouze šumy stavů a měření a vstupy systému. Tuto rovnici lze zkrátce zapsat jako

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^v \mathbf{Z}_k^P &= \mathcal{O}^L \Xi^N \mathbf{W}_{k-N}^N + \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_k^{L-1} - \mathcal{O}^L \prod_{i=1}^N \mathbf{F}(\mathcal{O}^L)^\dagger \Gamma^{L-1} \mathbf{W}_{k-N}^{L-1} \\ &\quad + \mathbf{V}_k^L - \mathcal{O}^L \prod_{i=1}^N \mathbf{F}(\mathcal{O}^L)^\dagger \mathbf{V}_{k-N}^L \\ &\quad + \mathcal{O}^L \Xi^N \mathbf{U}_{k-N}^N + \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_k^{L-1} - \mathcal{O}^L \prod_{i=1}^N \mathbf{F}(\mathcal{O}^L)^\dagger \Gamma^{L-1} \mathbf{U}_{k-N}^{L-1} \\ &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix} + \mathbf{A}^w \mathbf{U}_{k-N}^P. \end{aligned}$$

Z této rovnice lze jednoduchou úpravou ukázat, že platí

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k = \mathbf{A} \begin{bmatrix} -\mathbf{U}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{Z}_{k-N}^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix},$$

neboli, že rovnice (4.24) a (4.19) jsou ekvivalentní.

Nyní se vrátíme zpět k rovnici (4.19), pokud obě strany rovnice umocníme na druhou získáme

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k \tilde{\mathbf{Z}}_k^T = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} \\ \mathbf{V}_{k-N}^P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{W}_{k-N}^{P-1})^T & (\mathbf{V}_{k-N}^P)^T \end{bmatrix} \mathbf{A}^T \quad (4.25)$$

Po roznásobení získáme

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k \tilde{\mathbf{Z}}_k^T = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} (\mathbf{W}_{k-N}^{P-1})^T & \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} (\mathbf{V}_{k-N}^P)^T \\ \mathbf{V}_{k-N}^P (\mathbf{W}_{k-N}^{P-1})^T & \mathbf{V}_{k-N}^P (\mathbf{V}_{k-N}^P)^T \end{bmatrix} \mathbf{A}^T. \quad (4.26)$$

Pokud aplikujeme operátor střední hodnoty na danou rovnici, získáme

$$E \left[\tilde{\mathbf{Z}}_k \tilde{\mathbf{Z}}_k^T \right] = \mathbf{A} \left(E \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} (\mathbf{W}_{k-N}^{P-1})^T & \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} (\mathbf{V}_{k-N}^P)^T \\ \mathbf{V}_{k-N}^P (\mathbf{W}_{k-N}^{P-1})^T & \mathbf{V}_{k-N}^P (\mathbf{V}_{k-N}^P)^T \end{bmatrix} \right) \mathbf{A}^T. \quad (4.27)$$

Na pravé straně rovnice vidíme, že matice uvnitř střední hodnoty odpovídá kovarianční matici šumů samotného systému. V tomto případě se ovšem jedná jen o výběrovou kovarianční matici, jelikož máme k dispozici pouze omezený počet měření a tak nelze přímo tuto kovarianční matici nahradit kovarianční maticí šumů samotného systému. Nyní zdefinujeme nový proces ve tvaru

$$E \left[\tilde{\mathbf{Z}}_k \tilde{\mathbf{Z}}_k^T \right] = \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^T, \quad (4.28)$$

kde matice $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{(P-1)n_x + Pn_z \times (P-1)n_x + Pn_z}$ je kovarianční matice definována jako

$$\mathbf{S} = \text{BlkDiag}(\mathbf{I}_{P-1 \times P-1} \otimes \mathbf{Q}, \mathbf{I}_{P \times P} \otimes \mathbf{R}), \quad (4.29)$$

kde \mathbf{Q} je kovarianční matice šumů stavu a \mathbf{R} je kovarianční matice šumu měření a operátor \otimes značí Kroneckerův součin a kde $\text{BlkDiag}()$ je funkce vytvářející blokově diagonální matici z bloků ve svém argumentu. Kovarianční matice \mathbf{S} je tedy blokově diagonální matice, na jejíž diagonále se nachází $P-1$ bloků matice \mathbf{Q} a P bloků matice \mathbf{R} .

Pokud tedy budeme uvažovat, že rovnici (4.28) použijeme namísto původní rovnice (4.26) dopustíme se chyby. Když přidáme vyjádření této chyby do rovnice získáme

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k \tilde{\mathbf{Z}}_k^T = \mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^T + \mathcal{V}_k, \quad (4.30)$$

kde matice \mathcal{V}_k je definována jako

$$\mathcal{V}_k = \mathbf{A}_k \left(\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} (\mathbf{W}_{k-N}^{P-1})^T & \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} (\mathbf{V}_{k-N}^P)^T \\ \mathbf{V}_{k-N}^P (\mathbf{W}_{k-N}^{P-1})^T & \mathbf{V}_{k-N}^P (\mathbf{V}_{k-N}^P)^T \end{bmatrix} - \mathbf{S} \right) \mathbf{A}_k^T, \quad (4.31)$$

Analýzou chyby \mathcal{V}_k zjistíme, že

$$\begin{aligned} E[\mathcal{V}_k] &= E \left[\mathbf{A}_k \left(\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} (\mathbf{W}_{k-N}^{P-1})^T & \mathbf{W}_{k-N}^{P-1} (\mathbf{V}_{k-N}^P)^T \\ \mathbf{V}_{k-N}^P (\mathbf{W}_{k-N}^{P-1})^T & \mathbf{V}_{k-N}^P (\mathbf{V}_{k-N}^P)^T \end{bmatrix} - \mathbf{S} \right) \mathbf{A}_k^T \right], \\ &= \mathbf{A}_k (\mathbf{S} - \mathbf{S}) \mathbf{A}_k^T, \\ &= \mathbf{0}_{n_z^2}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Chyba \mathcal{V}_k má tedy pro všechny možné k nulovou střední hodnotu.

Aby bylo možné dále pracovat s rovnicí (4.30), převedme ji nyní do vektorizované podoby

$$\left(\tilde{\mathbf{Z}}_k \tilde{\mathbf{Z}}_k^T\right)_{vec} = \left(\mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^T + \mathcal{V}_k\right)_{vec}, \quad (4.33)$$

kde index vec znamená převedení matice do sloupcového vektoru. Protože vektorizace je lineární operace, je možné upravit rovnici do tvaru

$$\left(\tilde{\mathbf{Z}}_k \tilde{\mathbf{Z}}_k^T\right)_{vec} = \left(\mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^T\right)_{vec} + (\mathcal{V}_k)_{vec}. \quad (4.34)$$

Na člen $(\mathbf{A} \mathbf{S} \mathbf{A}^T)_{vec}$ můžeme využít jednu z vlastností Kroneckerova součinu

$$(\mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D}^T)_{vec} = (\mathbf{D} \otimes \mathbf{B}) \mathbf{C}_{vec}, \quad (4.35)$$

kde \mathbf{C} , \mathbf{B} a \mathbf{D} jsou dané matice. Po využití tohoto pravidla se změnění (4.34) na

$$\left(\tilde{\mathbf{Z}}_k \tilde{\mathbf{Z}}_k^T\right)_{vec} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \mathbf{S}_{vec} + (\mathcal{V}_k)_{vec}. \quad (4.36)$$

Cílem MDM je odhadnout prvky kovarianční matice \mathbf{S} (4.29). Povšimněme si, že většinu prvků této matice tvoří nuly a na zbylých pozicích se opakuje v daném tvaru známý počet hledaných parametrů. Tato podoba není vhodná pro následný odhad, jelikož maximální možný počet odhadnutých hodnot závisí na dimenzi stavů a měření, jak uvádí Kost [Kos22], v případě modelu hodinového šumu se jedná o maximální počet tří odhadovaných prvků. Abychom dodrželi tento počet odhadovaných prvků, je nutné nejprve vytvořit vektor unikátních prvků \mathbf{S}_{vec}^u , pro který platí

$$\mathbf{S}_{vec} = \Psi \mathbf{S}_{vec}^u, \quad (4.37)$$

kde $\mathbf{S}_{vec}^u \in \mathbb{R}^{n_u}$, n_u je počet unikátních prvků a $\Psi \in \mathbb{R}^{n_{Svec} \times n_{Qu}}$ je unifikační matice obsahující pouze nuly a jedničky, jejíž konstrukce bude popsána v dalších kapitolách na modelu generátoru hodinového signálu.

Dosazením za \mathbf{S}_{vec} do (4.36) získáme

$$\left(\tilde{\mathbf{Z}}_k \tilde{\mathbf{Z}}_k^T\right)_{vec} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \mathbf{S}_{vec}^u + (\mathcal{V}_k)_{vec}. \quad (4.38)$$

Tuto rovnici můžeme využít opakovaně pro různé rozdíly měření $\tilde{\mathbf{Z}}_k$, neboli v maticové podobě

$$\begin{bmatrix} \left(\tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T\right)_{vec} \\ \left(\tilde{\mathbf{Z}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2^T\right)_{vec} \\ \vdots \\ \left(\tilde{\mathbf{Z}}_n \tilde{\mathbf{Z}}_n^T\right)_{vec} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \\ \vdots \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \end{bmatrix} \mathbf{S}_{vec}^u + \begin{bmatrix} (\mathcal{V}_1)_{vec} \\ (\mathcal{V}_2)_{vec} \\ \vdots \\ (\mathcal{V}_n)_{vec} \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Pokud na tuto rovnici použijeme metodu nejmenších čtverců, můžeme odhadnout prvky vektoru \mathcal{S}_{vec}^u jako

$$\hat{\mathcal{S}}_{vec}^u = \begin{bmatrix} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \\ \dots \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} \left(\tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T\right)_{vec} \\ \left(\tilde{\mathbf{Z}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2^T\right)_{vec} \\ \dots \\ \left(\tilde{\mathbf{Z}}_n \tilde{\mathbf{Z}}_n^T\right)_{vec} \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Pokud rozepíšeme operátor pseudoinverze, získáme

$$\hat{\mathcal{S}}_{vec}^u = \left(\begin{bmatrix} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \\ \dots \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \\ \dots \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \\ \dots \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \left(\tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T\right)_{vec} \\ \left(\tilde{\mathbf{Z}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2^T\right)_{vec} \\ \dots \\ \left(\tilde{\mathbf{Z}}_n \tilde{\mathbf{Z}}_n^T\right)_{vec} \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

kde díky časové nezávislosti $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi$ můžeme upravit část rovnice

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \\ \dots \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \left(\tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T\right)_{vec} \\ \left(\tilde{\mathbf{Z}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2^T\right)_{vec} \\ \dots \\ \left(\tilde{\mathbf{Z}}_n \tilde{\mathbf{Z}}_n^T\right)_{vec} \end{bmatrix} = ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi)^T \left[\left(\tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T\right)_{vec} + \left(\tilde{\mathbf{Z}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2^T\right)_{vec} + \dots + \left(\tilde{\mathbf{Z}}_n \tilde{\mathbf{Z}}_n^T\right)_{vec} \right]. \quad (4.42)$$

Zároveň můžeme upravit i člen v inverzi

$$\left(\begin{bmatrix} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \\ \dots \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \\ \dots \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{n} [((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi)^T (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi]^{-1}, \quad (4.43)$$

kde n značí počet dostupných rozdílů měření $\tilde{\mathbf{Z}}_i$. Pokud nyní využijeme obě tyto úpravy do původní rovnice (4.41), dostaneme

$$\hat{\mathcal{S}}_{vec}^u = \frac{1}{n} [((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi)^T (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi]^{-1} ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi)^T \cdot \left[\left(\tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T\right)_{vec} + \left(\tilde{\mathbf{Z}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2^T\right)_{vec} + \dots + \left(\tilde{\mathbf{Z}}_n \tilde{\mathbf{Z}}_n^T\right)_{vec} \right] \quad (4.44)$$

$$= \frac{1}{n} ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi)^\dagger \left[\left(\tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T\right)_{vec} + \left(\tilde{\mathbf{Z}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2^T\right)_{vec} + \dots + \left(\tilde{\mathbf{Z}}_n \tilde{\mathbf{Z}}_n^T\right)_{vec} \right] \quad (4.45)$$

Pomocí této rovnice je možné odhadnout prvky kovarianční matice šumů dříve definovaného stochastického systému.

V této kapitole je popsán způsob využití MDM pro odhad prvků kovarianční matice šumů generátoru časového signálu. Následně budou provedeny simulace s využitím programu MATLAB [Mat21] za účelem ověření kvality odhadů.

Nejprve je vhodné upravit obecné rovnice MDM. Jelikož předpokládáme, že hodiny nemají vstupní signál, můžeme upravit rovnici (4.24), která slouží pro výpočet rozdílu měření, na

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{Z}}_k &= [\mathbf{A}^w \mathbf{A}^v] \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(P-1)n_x} \\ \mathbf{Z}_{k-N}^P \end{bmatrix}, \\ &= \mathbf{A}^v \mathbf{Z}_{k-N}^P.\end{aligned}\quad (5.1)$$

Předpokládáme, že generátor časového signálu odpovídá definovanému modelu (3.45). V tom případě je známá podoba kovariančních matic stavového šumu (3.44) a šumu měření \mathbf{R} a můžeme psát, že kovarianční matice \mathbf{S} (4.29) má tvar

$$\mathbf{S} = \text{BlkDiag}(\mathbf{I}_{P-1 \times P-1} \otimes \mathbf{Q}, \mathbf{I}_{P \times P} \otimes \mathbf{R}), \quad (5.2)$$

Abychom mohli udělat odhad prvků této matice, musíme nejprve vytvořit rozklad (4.37), kde již můžeme určit podobu vektoru unikátních prvků jako

$$\mathbf{S}_{vec}^u = \begin{bmatrix} q_1 T_s + \frac{T_s^3}{3} \\ q_2 \frac{T_s^2}{2} \\ q_2 T_s \\ R \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

5.1 Odhad s aproximací kovarianční matice šumů stavu

V této kapitole je popsán způsob odhadu parametrů šumů modelu s využitím známých vlastností generátoru časového signálu a aproximace matice \mathbf{Q} .

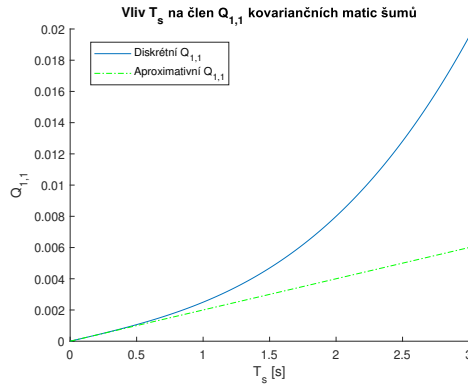
Jelikož kovarianční matice \mathbf{S} obsahuje složené členy $q_1 T_s + \frac{T_s^3}{3}$, popřípadě závislé členy $q_2 \frac{T_s^2}{2}$ a $q_2 T_s$, nelze najít unifikační matici Ψ tvořenou kombinací nul a jedniček, která by umožňovala rozklad (4.37), jehož výsledkem by byl vektor s počtem odhadovaných parametrů menší než čtyři. Jedním ze způsobů řešení tohoto problému je nejprve analyzovat model systému a hledat možné řešení pomocí úprav kovariančních matic.

Při bližším pohledu na kovarianční matici šumů stavu systému (3.44) si můžeme všimnout, že všechny členy jsou ovlivněny vzorkovací periodou T_s . Tato závislost se dá využít pro zjednodušení kovarianční matice. Pokud budeme měnit velikost vzorkovací periody, můžeme si všimnout, že pokud snižujeme vzorkovací periodu, platí přibližně

$$\begin{bmatrix} q_1 T_s + q_2 \frac{T_s^3}{3} & q_2 \frac{T_s^2}{2} \\ q_2 \frac{T_s^2}{2} & q_2 T_s \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} q_1 T_s & 0 \\ 0 & q_2 T_s \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

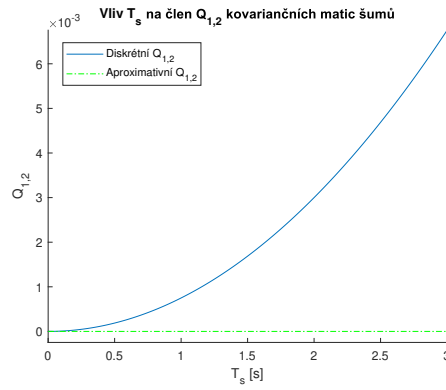
neboli při snižující se vzorkovací periodě se kovarianční matice diskrétních šumů blíží ke kovarianční matici šumů spojitých. Toto tvrzení jsem ověřil pomocí grafů, ve kterých jsem uvažoval vzorkovací periodu $T_s \in \langle 10^{-6}, 3 \rangle$ a jako parametry jsem použil $q_1 = 0,002$ a $q_2 = 0,0015$.

Pro první člen kovarianční matice $Q_{1,1}$ jsem získal graf:



Obrázek 5.1: Vliv velikosti vzorkovací periody na člen $Q_{1,1}$.

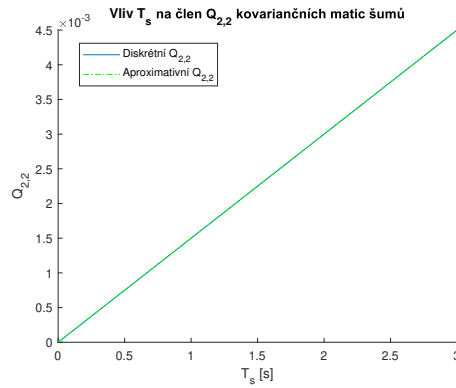
Z průběhu grafů hodnoty členu $Q_{1,1}$ přesné hodnoty a aproximace je zřejmé, že snižující vzorkovací periodou se aproximace blíží ke skutečné hodnotě. Pro členy mimo diagonálu $Q_{1,2}$ a $Q_{2,1}$ vyšel graf:



Obrázek 5.2: Vliv velikosti vzorkovací periody na člen $Q_{1,2}$.

Tento graf vyjadřuje očekávanou vlastnost, že člen diskrétní kovarianční matice $Q_{1,2}$ se blíží k nule pokud se i T_s blíží k nule.

Poslednímu členu $Q_{2,2}$ odpovídá graf:



Obrázek 5.3: Vliv velikosti vzorkovací periody na člen $Q_{2,2}$.

Tento graf ukazuje lineární vliv velikosti T_s na hodnotu diskrétního členu $Q_{2,2}$. Jelikož aproximace na tento člen nemá žádný vliv, obě hodnoty si přesně odpovídají. To ovšem nelze tvrdit o vlivu na samotné odhady, jelikož na odhad $Q_{2,2}$ budou působit i aproximace ostatních členů.

Celkově můžeme říct, že tvrzení o vlivu velikosti periody na podobnost diskrétní a spojité kovarianční matice se zdá být pravdivé a tudíž lze zavést aproximativní diskrétní kovarianční matici

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

pro kterou platí, že $\frac{\tilde{Q}_{11}}{T_s} \approx q_1$ a $\frac{\tilde{Q}_{22}}{T_s} \approx q_2$, při vhodné volbě T_s .

Pokud nyní na místo \mathbf{Q} (3.44) využijeme novou $\tilde{\mathbf{Q}}$, můžeme opět poskládat matici \mathcal{S} (4.29), která má následně podobu

$$\tilde{\mathcal{S}} = \text{BlkDiag} \left(\mathbf{I}_{P-1 \times P-1} \otimes \tilde{\mathbf{Q}}, \mathbf{I}_{P \times P} \otimes \mathbf{R} \right), \quad (5.6)$$

kde $\text{BlkDiag}()$ vytvoří blokově diagonální matici z bloků v jejím argumentu. O této matici víme, že všechny její prvky mimo hlavní diagonálu jsou nulové a tudíž je možné ji rozložit na unifikační matici a vektor unikátních prvků (4.37).

Samotný rozklad této matice je přímočarý proces skládající se jen z několika kroků. Prvním krokem je stanovení samotných unikátních prvků, které se snažíme odhadnout. V matici se opakovaně objevují jen tři prvky odpovídající hledaným parametrům a tak vektor unikátních prvků lze zapsat jako

$$\tilde{\mathcal{S}}_{vec}^u = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11} \\ \tilde{Q}_{22} \\ R \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Druhým krokem je stanovení pozic každého z prvků. Pokud vytvoříme vektor $\tilde{\mathcal{S}}_{vec}$, můžeme vidět, že člen \tilde{Q}_{11} se nachází na každé pozici odpovídající posloupnosti

$$a_0 = 1, \quad a_{i+1} = a_i + 2n_{\tilde{\mathcal{S}}} + 2, \quad \text{pro } i = 0, 1, \dots, P-2, \quad (5.8)$$

kde $n_{\tilde{\mathcal{S}}}$ značí počet sloupců matice $\tilde{\mathcal{S}}$. Nyní vytvoříme vektor samých nul o velikosti $n_{\tilde{\mathcal{S}}_{vec}}$ a na všechny pozice odpovídající posloupnosti a dáme jedničky, tento vektor označíme jako Ψ_1 . Stejně postupujeme u členu \tilde{Q}_{22} . Pro tento člen získáme posloupnost pozic

$$b_0 = n_{\tilde{\mathcal{S}}} + 2, \quad b_{i+1} = b_i + 2n_{\tilde{\mathcal{S}}} + 2, \quad \text{pro } i = 0, 1, \dots, P-2 \quad (5.9)$$

a opět vytvoříme vektor samých nul a pozice odpovídající posloupnosti b změníme na 1, tak vznikne vektor Ψ_2 .

A pro člen R vyjde posloupnost

$$c_0 = 2n_{\tilde{\mathcal{S}}}(P-1) + n_{\tilde{\mathcal{S}}} - P + 1, \quad c_{i+1} = c_i + n_{\tilde{\mathcal{S}}} + 1, \quad \text{pro } i = 0, 1, \dots, P-1. \quad (5.10)$$

Stejným postupem jako v předchozích případech vytvoříme vektor Ψ_3 .

Nakonec poskládáme výslednou unifikační matici jako

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

neboli výsledná unifikační matice Ψ je tvořena sloupcovými vektory Ψ_1 , Ψ_2 a Ψ_3 , které tvoří její tři sloupce.

Ukázka výpočtu unifikačně matice Ψ

Mějme kovarianční matici $\tilde{\mathcal{S}}$ (5.6) o velikosti $n_{\tilde{\mathcal{S}}} = 4$ odpovídající parametrům odhadu $L = 1$, $N = 1$ a $P = 2$ v podobě

$$\tilde{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \tilde{Q}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{Q}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix}.$$

Nejprve stanovíme všechny členy posloupností a_n (5.8), b_n (5.9) a c_n (5.10)

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, & b_0 &= 6, & c_0 &= 11, \\ & & & & c_1 &= 16 \end{aligned}$$

Nyní vytvoříme vektory Ψ_1 , Ψ_2 a Ψ_3 ve tvaru

$$\Psi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Neboli vytvoříme vektory samých nul, do kterých na pozice příslušné prvkům posloupností dáme jedničky, neboli vektor Ψ_1 má jedničku na pozici a_0 , vektor Ψ_2 ji má na pozici b_0 a do vektoru Ψ_3 doplníme jedničky na pozice c_0 a c_1 . Nakonec pouze poskládáme tyto vektory jako sloupce matice Ψ (5.17).

Tímto postupem získáme potřebný rozklad vektoru $\tilde{\mathcal{S}}_{vec}$, který můžeme dosadit do

rovnice odhadu (4.45)

$$\begin{bmatrix} \hat{q}_1 T_s \\ \hat{q}_2 T_s \\ \hat{R} \end{bmatrix} \approx \frac{1}{n} ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi)^\dagger \left[\left(\tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T \right)_{vec} + \left(\tilde{\mathbf{Z}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2^T \right)_{vec} + \dots + \left(\tilde{\mathbf{Z}}_n \tilde{\mathbf{Z}}_n^T \right)_{vec} \right]. \quad (5.12)$$

Výsledné odhady \hat{q}_1 a \hat{q}_2 pak získáme vydělením známou vzorkovací periodou.

5.2 Simulace odhadu s aproximací kovarianční matice šumů stavu

Jelikož se podařilo pro známý model hodinového šumu odvodit aproximativní rozklad matice \mathcal{S} (5.3) a matici \mathbf{A} (4.21) lze jednoduše dopočítat ze známých matic modelu, je nyní možné ověřit vlastnosti odhadu pomocí simulací.

Protože bylo využito aproximací kovarianční matice šumů diskrétního modelu, je nutné ověřit vliv této aproximace na kvalitu samotného odhadu. V předchozí části bylo ukázáno, že různá volba velikosti vzorkovací periody T_s má vliv na přesnost aproximace a tak bude nyní zkoumán vliv vzorkovací periody na výsledky odhadu. Proto nyní zafixujeme ostatní parametry odhadu. Počet měření L , který udává velikost vektoru \mathbf{Z} (4.8) jsem zafixoval na hodnotě 5 a počet kroků predikce N jsem pro tuto simulaci nastavil na 1. Pro samotnou simulaci jsou také potřeba parametry modelu chyb hodin. Těmito parametry jsou hodnoty q_1 a q_2 spojitě kovarianční matice šumů. Tyto hodnoty byly pro různé druhy hodin v minulosti již odhadovány a tak jsem využil známé hodnoty $q_1 = 0,04 m^2 s^{-3}$ a $q_2 = 0,01 m^2 s^{-1}$, které odpovídají hodinám TCXO [Gro13]. Tyto hodnoty jsou převzaty z aplikace v navigačním systému a udávají vztah mezi chybou polohy a šumy generátoru časového signálu. Pro potřeby této práce se více hodí hodnoty vyjadřující čistě parametry šumů generátoru časového signálu a proto převedeme hodnoty parametrů na čistě časové jednotky

$$q_1 s^{-1} = \frac{q_1 [m^2 s^{-3}]}{c^2} = 4,45 \cdot 10^{-19} s^{-1}, \quad (5.13)$$

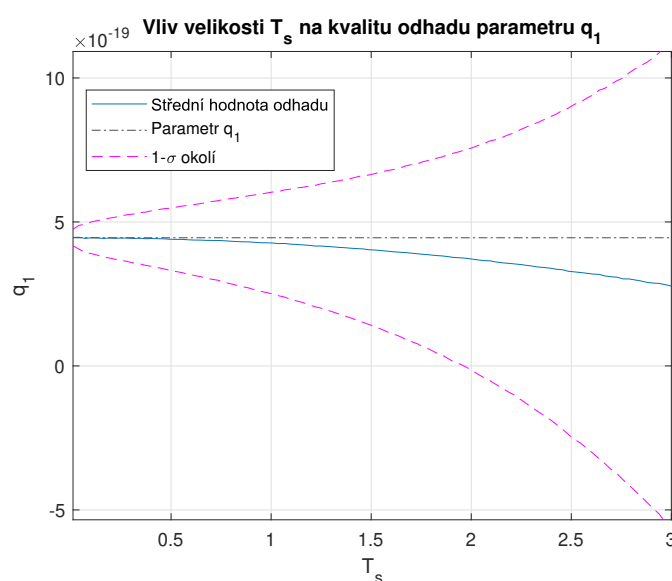
$$q_2 \left[\frac{s}{s} \right] = \frac{q_2 [m^2 s^{-1}]}{c^2} = 1,1127 \cdot 10^{-19} \frac{s}{s}, \quad (5.14)$$

$$(5.15)$$

kde $c = 299792458 m s^{-1}$ je rychlost světla. Jako varianci šumu měření byla použita hodnota $R = 2,1 \cdot 10^{-19} s^{-1}$.

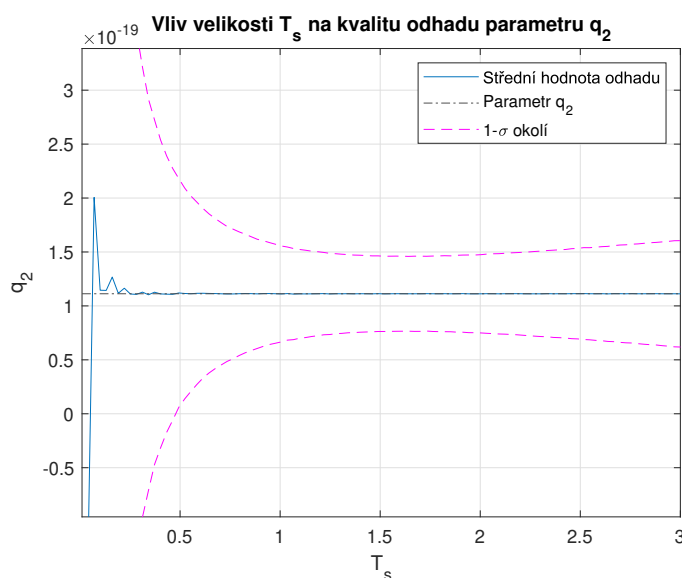
Se známými parametry jsem provedl Monte Carlo simulace sestávající z 100000 simulací odhadů parametrů modelu pomocí MDM, kde jsem v každé simulaci simuloval 10 milionů měření odpovídající vzorkovací periodě $T_s = 0,1 s$. Následně jsem určoval odhady odpovídající různým vzorkovacím periodám z intervalu $\langle 0, 1; 3 \rangle$

sekund. Odhady odpovídající větším velikostem T_s jsem uskutečnil simulací počtu měření, která odpovídá dané vzorkovací periodě v poměru k základní $T_s = 0,1$ s. Ze získaných odhadů pro každou T_s jsem určil výběrovou střední hodnotu a varianci. Pro účely zobrazení kvality odhadu v grafech jsem z variancí určil $1-\sigma$ okolí. Toto okolí vyjadřuje oblast, kolem střední hodnoty odhadu odpovídající \pm odmocnině z variance odhadu. Výsledné hodnoty byly zaneseny v následujících grafech:

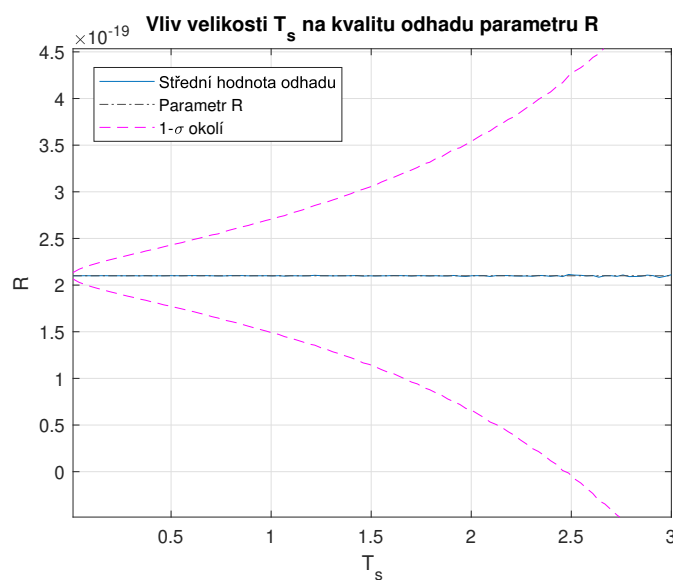


Obrázek 5.4: Vliv velikosti vzorkovací periody na odhad $Q_{1,1}$.

První graf zachycuje vliv velikosti vzorkovací periody na odhadnuté hodnoty hledaného parametru q_1 . Vidíme, že předpoklad o vlivu zmenšování vzorkovací periody na kvalitu odhadu se zdá být pravdivý. Při zvyšování T_s roste nejen variance odhadu, ale také střední hodnota se vzdaluje od hledané hodnoty simulačního parametru. Pro odhad parametru q_1 pomocí této metody by mělo být vhodné využívat malé vzorkovací periody.

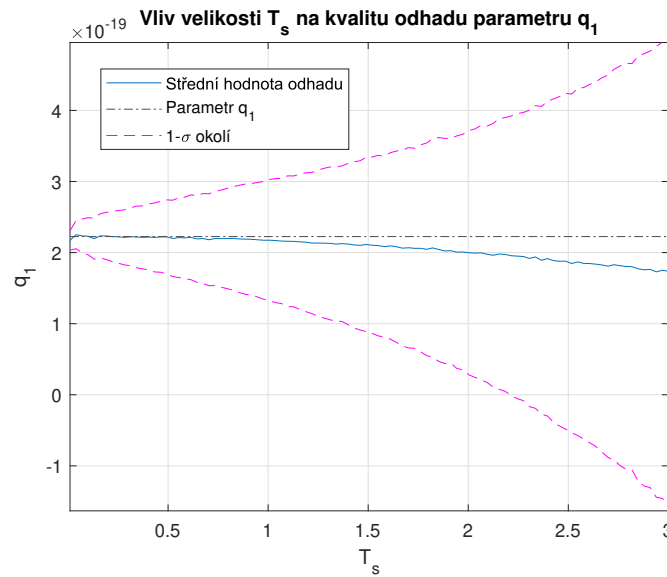
Obrázek 5.5: Vliv velikosti vzorkovací periody na odhad $Q_{2,2}$.

V tomto grafu je zachycen vliv velikosti vzorkovací periody na odhad parametru q_2 . V tomto případě se ukazuje, že příliš malá vzorkovací perioda způsobuje vysokou varianci odhadů a i střední hodnota odhadů se pro velmi malé vzorkovací periody odchyluje od hledané hodnoty. Tato skutečnost by mohla souviset s využitím aproximace. Pro tento model se zdá nejlepší volbou vzorkovací periody být hodnota kolem 1,5s, kde je nízká variance a střední hodnota odhadu je blízko hledanému parametru.

Obrázek 5.6: Vliv velikosti vzorkovací periody na odhad R .

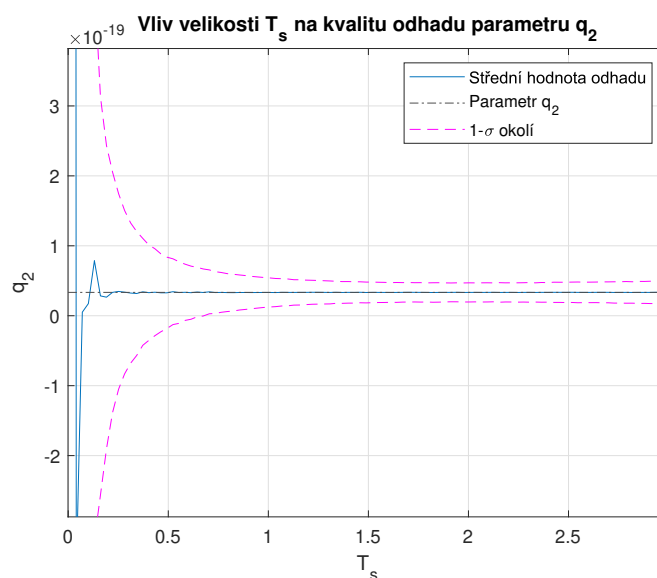
Graf pro třetí parametr, tedy varianci šumu měření R , vykazuje podobné vlastnosti jako odhad q_1 . Opět se snižující se vzorkovací periodou klesá variance odhadu a střední hodnota odhadu zůstává v blízkém okolí hledané hodnoty, bez ohledu na změnu T_s . Pro tento parametr se tedy, stejně jako u odhadu q_1 , zdá nejvhodnější volbou velmi malá vzorkovací perioda.

Na základě simulací se tedy zdá, že s využitím aproximací kovarianční matice šumů modelu chyb generátoru hodinového signálu lze nalézt relativně dobré odhady, i když jsou stranné. Pro odhad každého parametru lze nalézt vhodnou T_s , pro kterou střední hodnota odhadu poměrně přesně odpovídá hledanému parametru. Je ale nutné si uvědomit, že se jedná o simulaci s jedněmi konkrétními parametry. Nelze tedy říct, že nalezené optimální vzorkovací periody platí pro všechny různé generátory časového signálu. Proto jsem provedl další simulace s rozdílnými parametry, abych ověřil vliv modelu na vhodnou hodnotu T_s . Tentokrát jsem využil parametry hodin podobné kvality o hodnotách $q_1 = 2.2253 \cdot 10^{-19} \text{s}^{-1}$, $q_2 = 3.338 \cdot 10^{-20} \frac{\text{s}}{\text{s}}$ a $R = 1 \cdot 10^{-19} \text{s}^{-1}$. Pro tyto odhady jsem opět vykreslil grafy zobrazující střední hodnotu odhadu, $1-\sigma$ okolí a hodnotu hledaného parametru.

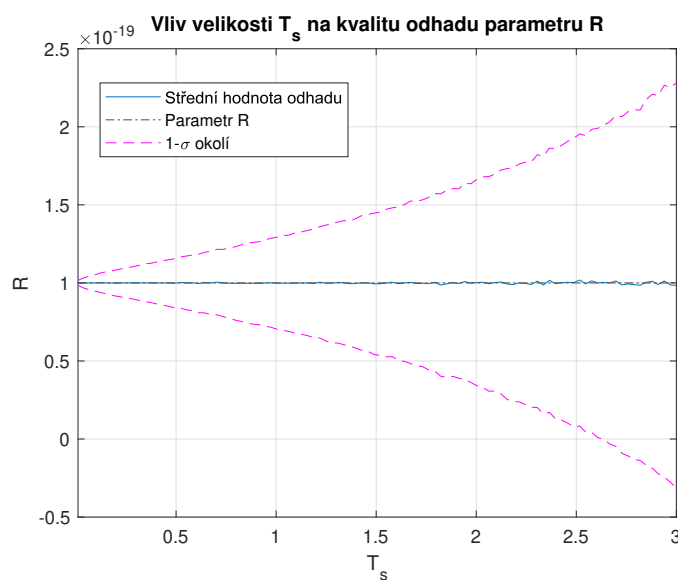


Obrázek 5.7: Vliv velikosti T_s na odhad $Q_{1,1}$ se změněnými parametry.

V grafu odhadů q_1 se změněnými parametry modelu můžeme pozorovat velmi podobné chování, jako u první simulace. Snižující se vzorkovací perioda opět vede ke zlepšení kvality odhadu. Na základě této simulace můžeme usoudit, že pro generátory podobných vlastností je možné odhadnout parametr q_1 s využitím vhodně zvolené malé vzorkovací periody.

Obrázek 5.8: Vliv velikosti T_s na odhad $Q_{2,2}$ se změněnými parametry.

Graf znázorňující vliv T_s na odhad parametru q_2 po změně parametru vykazuje také velmi podobný průběh, jako při simulacích s původními parametry. Opět při příliš malé vzorkovací frekvenci dochází k zásadnímu zhoršení kvality odhadu, ovšem tentokrát se optimální hodnota T_s nachází kolem hodnoty 1,7s, kde je variance odhadu nejmenší a zároveň je střední hodnota odhadů stále velmi blízko hodnotě hledané. Je tedy zřejmé, že pro každý generátor časového signálu bude existovat jiná optimální velikost vzorkovací periody pro odhad q_2 .

Obrázek 5.9: Vliv velikosti T_s na odhad R se změněnými parametry.

Graf Odhadu parametru R je opět velice podobný předešlé simulaci. Opět platí, že čím menší je vzorkovací perioda, tím lepší jsou charakteristiky samotného odhadu.

Na základě těchto dvou simulací z různými parametry se zdá, že pro každou možnou hodnotu hledaných parametrů existuje jiná optimální vzorkovací perioda, která vede na nej přesnější výsledky. Obecně ale můžeme tvrdit, že odhad pomocí MDM s využitím aproximace kovarianční matice šumů modelu může vést na velmi přesné odhady. Zásadním nedostatkem je ovšem obecná neznalost optimální T_s , kterou nelze určit, pokud neznáme přesně hledané parametry.

5.3 Nový odhad unikátních prvků bez aproximace

V této kapitole je popsán způsob odhadu unikátních prvků kovarianční matice šumů bez využití její aproximace.

Jelikož každá aproximace zavádí potenciální nepřesnosti do odhadu, je vhodné pokusit se nalézt řešení, které by aproximace nevyužívalo. Z předchozí kapitoly víme, že při zjednodušení kovarianční matice \mathcal{S} můžeme získat relativně přesné odhady hledaných parametrů, pokud dokážeme zvolit vhodnou vzorkovací periodu, což nemusí být vždy možné. Pokud by existoval postup odhadu, který by toto zjednodušení nevyužíval, dalo by se předpokládat, že vliv velikosti T_s na jeho kvalitu nebude tak zásadní. Pro uskutečnění odhadu bez aproximace kovarianční matice, je nutné pozměnit přístup k jejímu rozkladu (4.37). Dosazením z (5.3) získáme

$$\mathcal{S}_{vec} = \Psi \begin{bmatrix} q_1 T_s + q_2 \frac{T_s^3}{3} \\ q_2 \frac{T_s^2}{2} \\ q_2 T_s \\ R \end{bmatrix}, \quad (5.16)$$

kde Ψ je unifikační matice.

Konstrukce unifikační matice Ψ je prováděna stejným způsobem, jako v rovnici (5.17). Ovšem je nutné si uvědomit, že unifikační matice má v tomto případě jeden sloupec navíc, který odpovídá členu $q_2 \frac{T_s^2}{2}$, který byl v přístupu s aproximací nahrazen nulou a na rozkladu se nijak nepodílel. Unifikační matice má tedy podobu

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 & \Psi_4 \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

kde všechny vektory $\Psi_i \in \mathbb{R}^{n^2}$. Vektory Ψ_1 , Ψ_3 a Ψ_4 odpovídají již nalezeným vektorům z minulé části. Vektor Ψ_1 se získá z posloupnosti (5.8), vektor Ψ_3 je možné určit z posloupnosti (5.9) a vektor Ψ_4 z (5.10). Jediným neznámým vektorem tak

zůstává Ψ_2 . Stejně jako v (5.8) definujeme posloupnost určující jednotkové členy v jinak nulovém vektoru. Pro tento vektor definujeme dvě posloupnosti

$$\begin{aligned} d_0 &= 2, & d_{i+1} &= d_i + 2n_S + 2, & \text{pro } i &= 0, 1, \dots, P-2, \\ e_0 &= n_S + 1, & e_{i+1} &= d_i + 2n_S + 2, & \text{pro } i &= 0, 1, \dots, P-2, \end{aligned} \quad (5.18)$$

kde n_S je počet sloupců matice S . Spojením členů obou posloupností do vektoru $[d, e]$ získáme potřebné indexy a vytvoříme hledaný vektor Ψ_2 .

S tímto novým rozkladem by se mohlo zdát, že můžeme přímo odhadovat prvky kovariančních matic \mathbf{Q} a R , ovšem při bližší analýze tohoto odhadu zjistíme, že jednak prvky v \mathcal{S}_a jsou na sobě závislé a nešlo by tak v obecném případě říct, který z odhadů je ten lepší, ale především člen $((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi)$ z (4.45), na který je aplikována operace inverze, má hodnotu maximálně 3, což pro odhad čtyř parametrů nestačí, jak ukazuje Kost [Kos22].

Víme, že vektor \mathcal{S}_{vec}^u obsahuje závislé členy a mocniny známé vzorkovací periody T_s , jejíž hodnotu není nutné odhadovat, zároveň víme, že odhad tří unikátních prvků je pro tento model možný, musíme tedy najít způsob úpravy \mathcal{S}_{vec}^u do podoby s maximálně třemi unikátními prvky. Toho je možné docílit pomocí dalšího rozkladu, v tomto případě bude mít podobu

$$\mathcal{S}_{vec}^u = \Upsilon \mathcal{P}, \quad (5.19)$$

kde \mathcal{P} je vektor parametrů

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ R \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

a Υ je extrakční matice ve tvaru

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} T_s & \frac{T_s^3}{3} & 0 \\ 0 & \frac{T_s^2}{2} & 0 \\ 0 & T_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.21)$$

Pokud nyní spojíme rozklady (5.16) a (5.19) získáme

$$\mathcal{S}_{vec} = \Psi \Upsilon \mathcal{P}, \quad (5.22)$$

neboli způsob, jak získat unikátní prvky z matice \mathcal{S}_{vec} .

S využitím tohoto nového rozkladu dosadíme do rovnice (4.36) získáme

$$\left(\tilde{\mathbf{Z}}_k \tilde{\mathbf{Z}}_k^T \right)_{vec} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}) \Psi \Upsilon \mathcal{P} + (\mathcal{V}_k)_{vec}. \quad (5.23)$$

Z této rovnice můžeme vyjádřit člen \mathcal{S}_{vec}^u a získáme upravenou rovnici pro odhad

$$\hat{\mathcal{P}} = ((\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\Psi\Upsilon)^\dagger \left[\left(\tilde{\mathbf{Z}}_1 \tilde{\mathbf{Z}}_1^T \right)_{vec} + \left(\tilde{\mathbf{Z}}_2 \tilde{\mathbf{Z}}_2^T \right)_{vec} + \dots + \left(\tilde{\mathbf{Z}}_n \tilde{\mathbf{Z}}_n^T \right)_{vec} \right] \frac{1}{n}. \quad (5.24)$$

Tímto postupem by mělo být možné přímo odhadnout parametry původního spojitého generátoru časového signálu.

5.3.1 Univerzální postup rozkladu \mathcal{S}_{vec}

Ukázaný postup tvorby matic Ψ a Υ je možné využít jen, pokud pracujeme s přesně stejným modelem, pokud by se model změnil, neseděli by indexy z posloupností s hledanými indexy kovarianční matice a extrakční matice Υ by také měla jinou podobu.

Proto nyní zavedeme univerzální postup převzatý od Bélanger [Bel74], který umožňuje získat potřebnou matici bez ohledu na rozložení prvků v kovariančních maticích. Bélanger tento postup aplikoval na svoji metodu odhadu, která by byla také aplikovatelná na problematiku odhadu kovariancí šumů v generátorech časového signálu, ovšem v této práci využíváme MDM, kvůli její univerzálnosti, jelikož MDM umožňuje odhadovat všechny momenty náhodné veličiny. Nejprve stanovíme vektor hledaných parametrů \mathcal{P} ve tvaru

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

S využitím vektoru hledaných parametrů zavedeme novou definici kovarianční matice \mathcal{S} (4.29) ve tvaru

$$\mathcal{S} = p_1 \mathcal{K}_1 + p_2 \mathcal{K}_2 + \dots + p_n \mathcal{K}_n, \quad (5.26)$$

kde matice $\mathcal{K}_i \in \mathbb{R}^{ns \times ns}$ jsou známé konstantní matice. Dalším krokem je vektORIZACE celé rovnice

$$\mathcal{S}_{vec} = p_1 \mathcal{K}_{1,vec} + p_2 \mathcal{K}_{2,vec} + \dots + p_n \mathcal{K}_{n,vec}. \quad (5.27)$$

Pokud nyní využijeme vlastností vektorového násobení, můžeme rovnici upravit do tvaru

$$\mathcal{S}_{vec} = \Lambda \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

kde matice Λ je unifikáčně-extrakční matice definovaná jako

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_{1,vec} & \mathcal{K}_{2,vec} & \dots & \mathcal{K}_{n,vec} \end{bmatrix}. \quad (5.29)$$

Ukázka výpočtu unifikačně-extrakční matice Λ

Mějme kovarianční matici \mathcal{S} (4.29) odpovídající volbě $L = 2$ a $N = 1$ v podobě

$$\mathcal{S} = \begin{bmatrix} q_1 T_s + q_2 \frac{T_s^3}{3} & q_2 \frac{T_s^2}{2} & 0 & 0 \\ q_2 \frac{T_s^2}{2} & q_2 T_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix}.$$

Pro tuto matici zavedeme vektor hledaných parametrů jako

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ R \end{bmatrix}$$

Dalším krokem je rozklad podle unikátních prvků

$$\mathcal{S} = q_1 \begin{bmatrix} T_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + q_2 \begin{bmatrix} \frac{T_s^3}{3} & \frac{T_s^2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{T_s^2}{2} & T_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Po vektorizaci a poskládání do maticové podoby získáme finální rozklad v podobě

$$\mathcal{S}_{vec} = \begin{bmatrix} T_s & \frac{T_s^3}{3} & 0 \\ 0 & \frac{T_s^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T_s^2}{2} & 0 \\ 0 & T_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ R \end{bmatrix}$$

Roznásobením pravé strany lze snadno ukázat, že tento rozklad platí.

Definovaná unifikačně-extrakční matice Λ odpovídá také rovnici

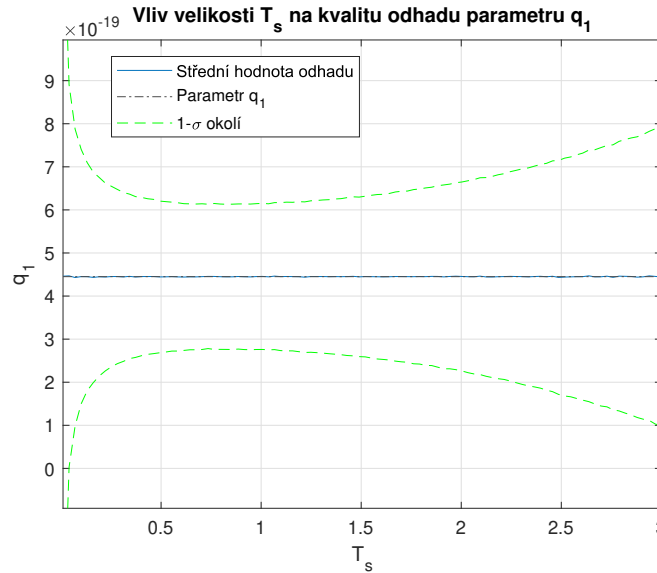
$$\Lambda = \Psi\Upsilon. \quad (5.30)$$

Tudíž ji lze využít jako rozklad na vektor unikátních prvků pro účely odhadu členů kovarianční matice šumů.

5.4 Simulace odhadu bez aproximace

V této kapitole jsou analyzovány výsledky simulačních experimentů za účelem získání charakteristik odhadů.

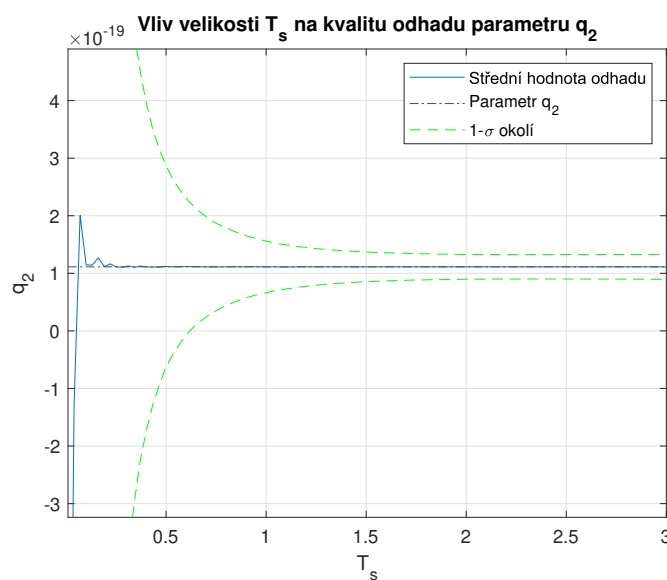
V předchozí kapitole je odvozen nový způsob rozkladu vektorizované kovarianční matice \mathcal{S}_{vec} (5.22), s jehož pomocí je možné odhadovat přímo koeficienty kovarianční matice bez nutnosti využití aproximací. U tohoto odhadu očekáváme minimální vliv velikosti vzorkovací periody T_s . Abychom ověřili tento předpoklad využijeme stejný postup, jako v minulých simulacích. Využijeme již známé parametry hodin TCXO, neboli $q_1 = 4.45 \cdot 10^{-19} s^{-1}$, $q_2 = 1.1127 \cdot 10^{-19} \frac{s}{s}$ a $R = 2, 1 \cdot 10^{-19} s^{-1}$. Ostatní parametry odhadu jsou také zafixovány jako v minulých simulacích, tedy $L = 5$ a $N = 1$. Pro toto ověření také provedeme 100000 Monte Carlo simulací, z nichž každá bude obsahovat 100 tisíc dat. Výsledné střední hodnoty a jejich $1-\sigma$ okolí jsou zaneseny v následujících grafech:



Obrázek 5.10: Vliv velikosti T_s na odhad q_1 bez aproximací.

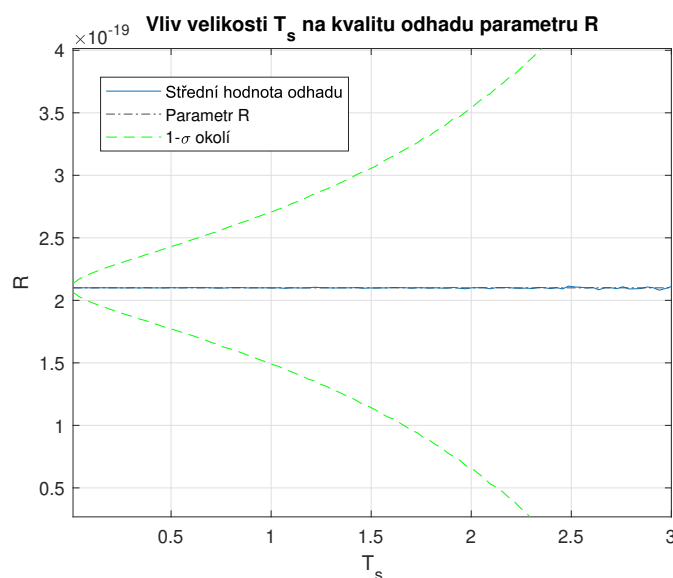
První graf zobrazuje výsledky simulace pro odhad parametru q_1 . Střední hodnota parametru se pohybuje v blízkosti hledané hodnoty parametru. Pokud se zaměříme na varianci odhadu, nebo v případě grafu na $1-\sigma$ okolí, vidíme mírný růst s

rostoucí T_s . Ovšem tento růst by bylo možné spojit se skutečností, že odhady s vyšší T_s využívají menší počet dat, která této těmto vzorkovacím frekvencím náleží. Co se týče nárůstu variance odhadu pro malé vzorkovací frekvence, je možné, že tyto nepřesnosti jsou způsobeny numerickými problémy. Tato problematika bude dále posuzována v následující kapitole.



Obrázek 5.11: Vliv velikosti T_s na odhad q_1 bez aproximací.

V tomto grafu jsou ukázány výsledky simulací odhadu parametru q_2 . Podobně jako v případě odhadu q_1 vidíme malou přesnost odhadů pro velmi malé vzorkovací frekvence. Na druhou stranu, pokud se zaměříme na vzorkovací frekvence vyšší než 1s, můžeme pozorovat, že variance odhadu se ustaluje a neroste jako v případě q_1 .

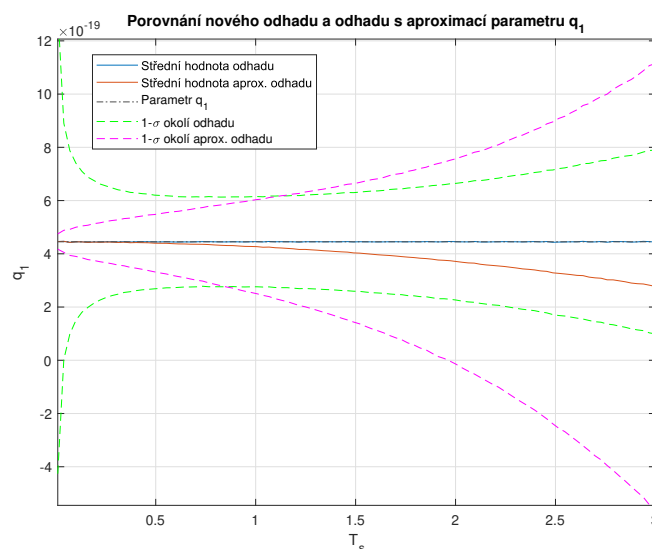
Obrázek 5.12: Vliv velikosti T_s na odhad q_1 bez aproximací.

V případě grafu pro odhad parametru R se ukazuje, že se snižující se T_s klesá variance odhadu, zatím co střední hodnota se zdá být téměř totožná s hledanou hodnotou parametru. Je možné, že růst variance s rostoucí vzorkovací frekvencí je opět zapříčiněno klesajícím počtem dat, jako v případě odhadu q_1 .

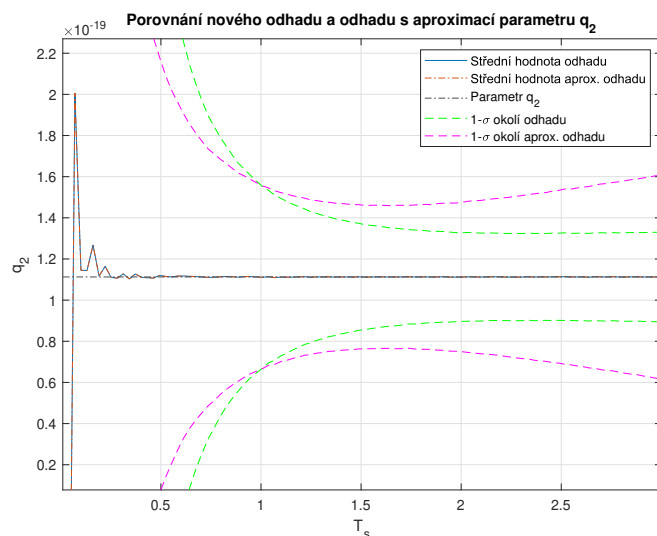
5.5 Porovnání výsledků odhadů

V této kapitole jsou porovnány oba způsoby odhadu parametrů šumů generátoru časového signálu z hlediska jejich kvality.

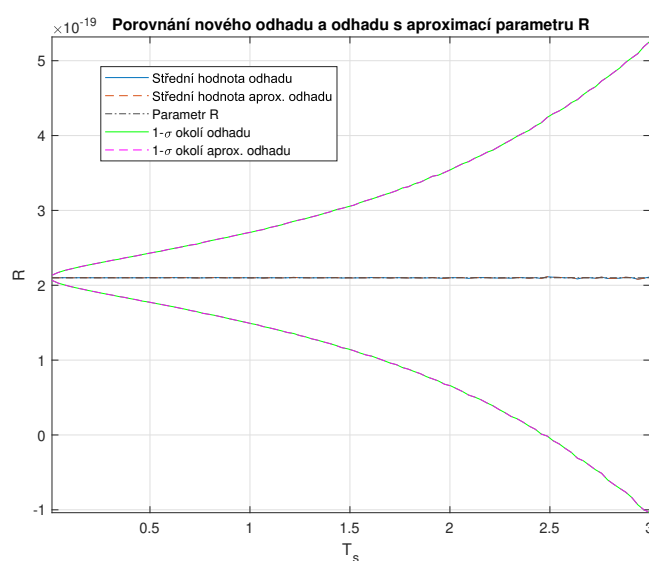
Jelikož máme k dispozici jak simulace odhadů parametrů s využitím aproximace kovarianční matice šumů stavů systému, tak i simulaci nového odhadu bez využití aproximací na totožných datech, můžeme nyní oba odhady navzájem porovnat. Porovnání bude ukázáno vykreslením výsledků obou odhadů do jednoho obrázku. Nejprve tedy porovnáme odhady pro parametr q_1 .


Obrázek 5.13: Porovnání odhadů parametru q_1 .

Při pohledu na odhady parametru q_1 , můžeme konstatovat, že nový odhad bez aproximací se jeví jako lepší z hlediska střední hodnoty odhadu, jelikož jeho střední hodnota je pro všechny vzorkovací frekvence ze simulačního intervalu blíže hledané hodnotě a s rostoucí T_s se výrazně nevzdaluje od skutečné hodnoty parametru. Při pohledu na variance obou odhadů je zřejmé, že variance nového odhadu je méně ovlivněna velikostí vzorkovací frekvence, než variance odhadu s aproximací, až na případ velmi malých vzorkovacích frekvencí.


Obrázek 5.14: Porovnání odhadů parametru q_2 .

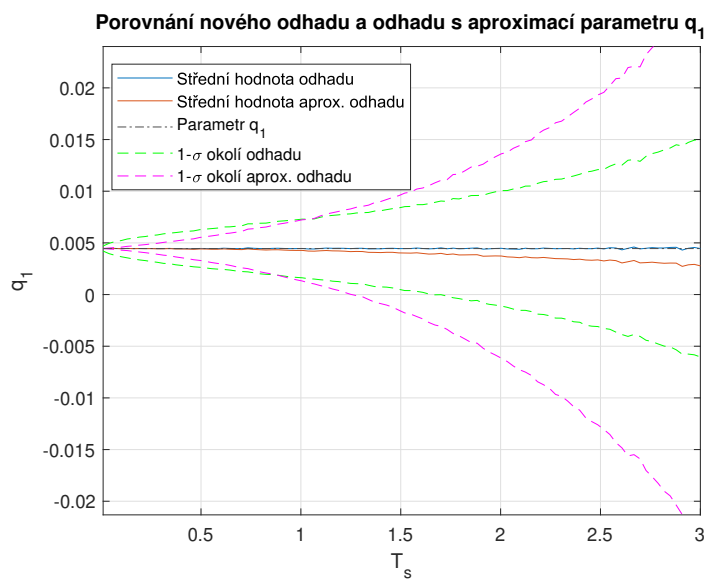
Graf zobrazující porovnání odhadů parametru q_2 ukazuje, že střední hodnoty obou odhadů jsou pro oba přístupy v rámci těchto simulací totožné. V případě variance můžeme konstatovat, že $1-\sigma$ okolí odhadu s aproximací je nižší u malých vzorkovacích frekvencí, naopak u větších T_s se ukazuje, že variance nového odhadu zůstává téměř konstantní, zatím co variance odhadu s aproximací roste.



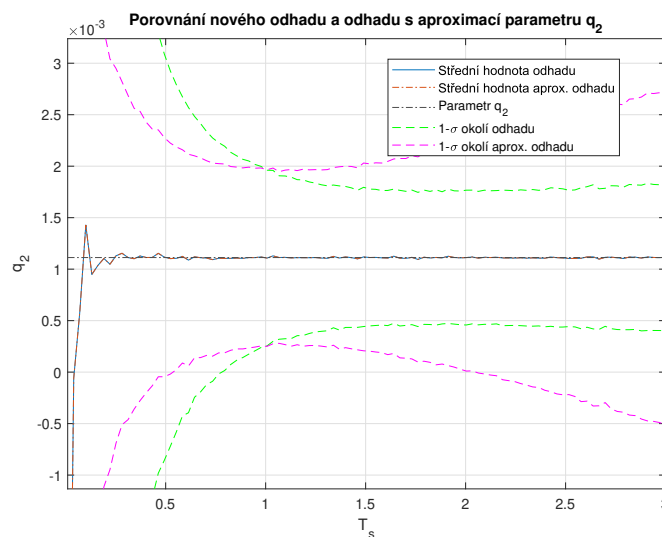
Obrázek 5.15: Porovnání odhadů parametru R .

V případě gradů porovnání odhadů parametru R se ukazuje, že oba přístupy jsou jak v rámci střední hodnoty, tak i variance.

Jelikož jsme u grafů pro porovnání odhadů q_1 a q_2 viděli u malých vzorkovacích frekvencí náhlý nárůst variance u nového odhadu, který může být způsoben numerickými nepřesnostmi, byla provedena další simulace s většími parametry s cílem ověřit možný vliv numerické nestability.

Obrázek 5.16: Porovnání odhadů parametru q_1 s většími parametry.

Při použití parametru $q_1 = 0,04s^{-1}$ se ukazuje, že variance nového odhadu v tomto případě u malých vzorkovacích frekvencí neroste, ale stále zůstává mírně vyšší, než variance odhadu s aproximací. Výsledek této simulace podporuje možnost vlivu numerické nestability na odhad parametru q_1 .

Obrázek 5.17: Porovnání odhadů parametru q_2 s většími parametry.

V případě simulace odhadu parametru $q_2 = 0,01 \frac{s}{s}$ výsledky vykazují velmi podobné chování jako v předchozím případě. Tudíž vliv numerických chyb na tento

odhad zřejmě nebude příliš vysoký a vysoké variance obou odhadů mohou být způsobeny samotnou podobou modelu generátoru časového signálu.

Celkově, s ohledem na všechny odhadované parametry, můžeme tvrdit, že oba přístupy umožňují odhadnout hledané parametry. Zároveň porovnání ukázalo, že pro simulovaný systém poskytuje nový odhad lepší výsledky odhadu parametru q_1 a q_2 při použití větších vzorkovacích frekvencí, v případě simulovaného systému se jedná o $T_s > 1$ s. Tyto vlastnosti bychom mohli předpokládat i při použití odhadů na generátory podobných parametrů.

5.6 Simulační program

Algoritmus použitý pro simulační experimenty vytvořený v programu MATLAB [Mat21] byl zveřejněn na internetové adrese

<https://github.com/Hefik/MDM-clock-noise>.

V adresáři je umístěn samotný simulační program, funkce vytvářející potřebné matice pro MDM, obrázky použité v této práci, výsledky simulací z této práce a kopie této práce. Samotný program je možné využít pro další simulace (např. jiných generátorů hodinového signálu) nebo použít jako základ pro aplikaci na odhad parametrů kovariancí šumů z reálných dat.

Tato práce se zabývala možnostmi odhadování variancí a kovariancí šumů působících na generátory časového signálu. V první části práce byl ukázán postup modelování obecného systému pomocí stavových rovnic. Následně je odvozen model generátoru časového signálu a jeho šumů, které způsobují nepřesnosti měření. Tento model se ukázal jako nepostradatelná součást řešení problému, jelikož bez známé dynamiky systému a definice šumů, nelze provádět žádaný odhad. Následně byla představena Metoda rozdílů měření jako nástroj určený k odhadu kovariancí šumů. Tato metoda byla v práci odvozena pro obecný stochastický systém a byl ukázán postup jejího použití. Ukázalo se, že ze samotné podoby modelu generátoru časového signálu vyplývá maximální možný počet odhadnutelných parametrů, proto byly v kapitole 5 ukázány dva postupy pro rozklad kovarianční matice na vektor unikátních prvků. První postup ukazoval používanou aproximaci a druhý odvodil nový přístup k exaktnímu rozkladu. Oba přístupy byly následně testovány pomocí Monte Carlo simulací, za účelem ověření kvalit jejich odhadů.

Ukázalo se, že při použití rozkladu s aproximací kovarianční matice je zásadní volba vzorkovací frekvence. Nevhodná volba této frekvence může vést na nepřesné odhady s velkou variancí. Z výsledných grafů zobrazujících výsledky simulací bylo usouzeno, že je vhodné volit relativně malé vzorkovací frekvence, při kterých se chyba aproximace zmenšuje. Zásadní nevýhodou tohoto postupu je skutečnost, že nelze, bez předešlé znalosti přesným hodnot kovariancí šumů v systému, určit vhodnou vzorkovací periodu.

Naopak druhý přístup k odhadování kovariancí s novým rozkladem bez aproximací vykazuje, že se vliv volby vzorkovací frekvence velmi výrazně sníží. Větší nepřesnosti v odhadech způsobovaly pouze velmi malé vzorkovací frekvence, kde algoritmus pravděpodobně narážel na problém numerické nestability, ale pro všechny ostatní možné vzorkovací frekvence ze zvoleného intervalu se ukázalo, že vliv tohoto parametru na výsledný odhad je minimální a zvyšování variance odhadu u některých parametrů bylo velmi pravděpodobně způsobeno pouze snižujícím se počtem dostupných dat. Výslednou kvalitu odhadu by bylo možné ovlivnit vhodnou volbou počtu rozdílů měření L a délkou predikce N , ovšem, podobně jako u volby

vhodné vzorkovací frekvence u odhadu s aproximovaným rozkladem, je pravděpodobné, že vhodná volba těchto parametrů závisí na konkrétních hodinách a nelze je tak bez přesné znalosti hodin stanovit.

Celkově se v této práci podařilo aplikovat dva přístupy k odhadu kovariancí šumů působících na generátory hodinového signálu. Oba přístupy byly porovnány pomocí simulačních experimentů, za účelem zjištění vlivu velikosti vzorkovací frekvence na výslednou kvalitu odhadu. Bylo prokázáno, že nový rozklad bez využití aproximace kovariančních matic vede na zkoumaných modelech na kvalitnější odhady s menším vlivem vzorkovací frekvence, než přístup s aproximativními kovariančními maticemi.

Bibliografie

- [All66] ALLAN, D.W. Statistics of atomic frequency standards. *Proceedings of the IEEE*. 1966, roč. 54, č. 2, s. 221–230. Dostupné z doi: 10.1109/PROC.1966.4634.
- [Bel74] BELANGER, Pierre R. Estimation of noise covariance matrices for a linear time-varying stochastic process. *Automatica*. 1974, roč. 10, č. 3, s. 267–275.
- [Bre93] BREAKIRON, Lee A. A comparative study of clock rate and drift estimation. 1993, s. 401–412.
- [DKS18] DUNÍK, Jindřich; KOST, Oliver; STRAKA, Ondřej. Design of measurement difference autocovariance method for estimation of process and measurement noise covariances. *Automatica*. 2018, roč. 90, s. 16–24. ISSN 0005-1098. Dostupné z doi: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.12.040>.
- [Dun+17] DUNÍK, Jindřich; STRAKA, Ondřej; KOST, Oliver; HAVLÍK, Jindřich. Noise covariance matrices in state-space models: A survey and comparison of estimation methods—Part I. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 2017, roč. 31, č. 11, s. 1505–1543. Dostupné z doi: <https://doi.org/10.1002/acs.2783>.
- [Fri82] FRIEDLAND, Bernard. Estimating noise variances by using multiple observers. *IEEE transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 1982, č. 4, s. 442–448.
- [Gal08] GALLEANI, Lorenzo. A tutorial on the two-state model of the atomic clock noise. *Metrologia*. 2008, roč. 45, č. 6, s. 175–182. Dostupné z doi: 10.1088/0026-1394/45/6/S23.
- [Gro13] GROVES, Paul. *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems, Second Edition*. 2013.

- [Hsi14] HSIAO, Keng-Jan. 17.7 A 1.89nW/0.15V self-charged XO for real-time clock generation. In: *2014 IEEE International Solid-State Circuits Conference Digest of Technical Papers (ISSCC)*. 2014, s. 298–299. Dostupné z DOI: 10.1109/ISSCC.2014.6757442.
- [Kos22] KOST, Oliver. *Odhad vlastností šumů v dynamických modelech*. Západočeská univerzita v Plzni, 2022. Dostupné také z: <http://hdl.handle.net/11025/50473>.
- [KDS23] KOST, Oliver; DUNÍK, Jindřich; STRAKA, Ondřej. Measurement Difference Method: A Universal Tool for Noise Identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2023, roč. 68, č. 3, s. 1792–1799. Dostupné z DOI: 10.1109/TAC.2022.3160679.
- [Lee80] LEE, T. A direct approach to identify the noise covariances of Kalman filtering. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1980, roč. 25, č. 4, s. 841–842.
- [LCZ19] LI, Xiang; CAI, Chenglin; ZHANG, Shougang. Research and Performance Evaluation of Atomic Clock in GPS Timing Terminal. 2019, s. 333–336. Dostupné z DOI: 10.1109/ICISCAE48440.2019.221646.
- [Ma+11] MA, Tao; CHEN, Jie; PENG, Zhihong; CHEN, Wenjie. Estimation of time series noise covariance using correlation technology. *Journal of Control Theory and Applications*. 2011, roč. 9, č. 2, s. 165–170.
- [Mat21] MATHWORKS, Inc. *The MATLAB version: 9.12.0 (R2021b)*. Natick, Massachusetts, United States: The MathWorks Inc., 2021. Dostupné také z: <https://www.mathworks.com>.
- [Meh72] MEHRA, Raman. Approaches to adaptive filtering. *IEEE Transactions on automatic control*. 1972, roč. 17, č. 5, s. 693–698.
- [Söd02] SÖDERSTRÖM, Torsten. *Discrete-time stochastic systems: estimation and control*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [ZT05] ZUCCA, C.; TAVELLA, P. The clock model and its relationship with the Allan and related variances. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. 2005, roč. 52, č. 2, s. 289–296. Dostupné z DOI: 10.1109/TUFFC.2005.1406554.

Seznam obrázků

5.1	Vliv velikosti vzorkovací periody na člen $Q_{1,1}$	30
5.2	Vliv velikosti vzorkovací periody na člen $Q_{1,2}$	31
5.3	Vliv velikosti vzorkovací periody na člen $Q_{2,2}$	31
5.4	Vliv velikosti vzorkovací periody na odhad $Q_{1,1}$	35
5.5	Vliv velikosti vzorkovací periody na odhad $Q_{2,2}$	36
5.6	Vliv velikosti vzorkovací periody na odhad R	36
5.7	Vliv velikosti T_s na odhad $Q_{1,1}$ se změněnými parametry.	37
5.8	Vliv velikosti T_s na odhad $Q_{2,2}$ se změněnými parametry.	38
5.9	Vliv velikosti T_s na odhad R se změněnými parametry.	38
5.10	Vliv velikosti T_s na odhad q_1 bez aproximací.	43
5.11	Vliv velikosti T_s na odhad q_1 bez aproximací.	44
5.12	Vliv velikosti T_s na odhad q_1 bez aproximací.	45
5.13	Porovnání odhadů parametru q_1	46
5.14	Porovnání odhadů parametru q_2	46
5.15	Porovnání odhadů parametru R	47
5.16	Porovnání odhadů parametru q_1 s většími parametry.	48
5.17	Porovnání odhadů parametru q_2 s většími parametry.	48

