en pulsos binarios. Los niveles de cuantificación están separados por 1/32 volts. El valor raíz cuadrático medio del ruido del canal es de 0.1 volt. (Se supone que las amplitudes de la señal $f(t)$ están uniformemente distribuidas en el rango -2 a 2.) Se supone que los pulsos son binarios y unipolares de amplitud 0 y $K\sigma_n$ en donde $K = 10$. Encontrar lo siguiente:

a) El ancho de banda de transmisión.
b) La razón señal a ruido a la entrada del demodulador.
c) La razón de señal a ruido (de cuantificación) en la salida del demodulador.
d) El mejoramiento de la razón S/N.
e) ¿Cuál es el ancho de banda que se necesita para obtener este mejoramiento de S/N mediante FM?

Repetir el problema para pulsos binarios bipolares de amplitud

$$\frac{-K\sigma_n}{2} \quad \text{y} \quad \frac{K\sigma_n}{2} \qquad (K = 10)$$

Compárese este sistema con el de MPP del problema 13.

16. Repetir el problema 15 con pulsos 4-arios, en lugar de binarios, para transmitir la señal; el nivel de cuantificación es de 1/64 volt. Calcular para pulsos 4-arios unipolares y bipolares. Supóngase $K = 10$ para detección sin error.

Introduccion a la teoria y sistemas de comunicacion

B.P LATHI

Ed. Limusa

1990

CAPITULO 8

Introducción a la transmisión de información

8.1 MEDICION DE INFORMACION

La comunicación tiene por objeto enviar información. Estudiaremos en forma intuitiva y también desde el punto de vista de la ingeniería, la naturaleza del contenido informativo de un mensaje. Se verá que ambos puntos de vista conducen a la misma definición cuantitativa de la unidad de información.

1. Punto de vista intuitivo

En cualquier mensaje se envía información, pero algunos mensajes contienen más que otros. Investigando más minuciosamente, vemos que la probabilidad de ocurrir de un suceso se relaciona mucho con la cantidad de información. Si alguien nos habla de la ocurrencia de un evento sumamente probable, transmite poca información comparada con la que entregaría si el suceso fuese menos probable. El elemento de sorpresa o inseguridad en el ocurrir de un evento parece ser proporcional a la cantidad de información. Si alguien dice que el sol sale por el este, no transmite información alguna, pues todo el mundo lo sabe. No existe inseguridad en el suceso de que el sol sale por el este todos los días. En otras palabras, la probabilidad del evento es uno. Sin embargo, si un día de enero el servicio de radiodifusión nacional anuncia que la temperatura en Mineápolis alcanzó los 150°F, la declaración transmitiría una gran cantidad de información. Esto se debe a que el suceso es completamente inesperado y su probabilidad de ocurrir muy pequeña ($P \to 0$). Es decir, ese evento es muy inseguro y la información tiende a ser muy grande.

Consideremos un cable de un servicio de noticias como "Los Estados Unidos invaden Cuba." Sin duda, la frase contiene una gran cantidad de información porque el evento tiene probabilidad muy pequeña y, en consecuencia, la noticia es una sorpresa. Pero la sorpresa no es tan grande como la de "Cuba invade a los Estados Unidos", porque la probabilidad del segundo reporte es extremadamente pequeña comparada con la del primero. Por supuesto, la sorpresa aparece como resultado de la inseguridad o lo inesperado del suceso. Cuanto menos esperado es un evento, tanto mayor es la sorpresa y, en consecuencia, mayor es la información. La probabilidad de un evento es la medida de lo esperado y por eso se relaciona con el contenido de información del evento.

Desde el punto de vista intuitivo, la cantidad de información que se recibe al conocer el ocurrir de determinado evento se relaciona con la probabilidad de ocurrir de dicho evento. ¿Cuál debe ser la naturaleza de esta relación? Es claro que si el evento es seguro (probabilidad 1) se envía cero cantidad de información. Por otra parte, si el evento es imposible (probabilidad cero), entonces su ocurrir transmite una cantidad infinita de información. Esto sugiere que la cantidad de información debe ser función logarítmica del recíproco de la probabilidad del evento.

$$\text{Información } I \sim \log \frac{1}{P} \qquad (8.1)$$

en donde P es la probabilidad de ocurrir del evento e I es la cantidad de información que se recibe del conocimiento de la ocurrencia del evento.

2. Punto de vista técnico

Demostraremos ahora, desde el punto de vista de la ingeniería, que la información de un evento es idéntica a la que se obtuvo en forma intuitiva (ecuación 8.1) ¿Qué se entiende por tal enfoque? El ingeniero estudia mensajes portadores de información para la comunicación eficiente. Desde este punto de vista, la cantidad de información de un mensaje es proporcional al tiempo necesario para transmitir el mensaje. A continuación veremos que este concepto de información también conduce a la ecuación 8.1, lo cual implica que se requiere menos tiempo para transmitir un mensaje de seguridad alta (o probabilidad alta) con respecto al que se necesita para transmitir mensajes de probabilidad baja. Este hecho se puede verificar fácilmente con el ejemplo de transmitir símbolos alfabéticos del idioma inglés mediante el código Morse.

El código Morse está compuesto por varias combinaciones de dos símbolos (como raya y espacio o pulsos de altura a y $-a$ volts). Cada letra se representa por cierta combinación de estos símbolos y tiene determinada longitud. Es evidente que a las letras *e, t, a* y *o*, las cuales aparecen más a menudo, se les asignan las palabras de código más cortas. Las palabras de código más largas quedan asignadas a las letras *x, k, q,* y *z*, que aparecen con menor frecuencia. Cada una de las letras se puede considerar como mensaje. Es claro que las letras de probabilidad más alta necesitan menos tiempo para transmitirse (palabras de código cortas) que las de probabilidad pequeña. Ahora, demostraremos que el tiempo mínimo que se requiere para transmitir un símbolo (o un mensaje) de probabilidad P es proporcional a $\log(1/P)$.

Empezamos por suponer que necesitamos transmitir uno cualquiera de dos mensajes, a y b, que tienen la misma probabilidad.* Estos pueden ser, por ejemplo, reseñas del tiempo como "asoleado" o "lluvioso". Podemos transmitir cada uno de estos mensajes mediante una forma de onda apropiada. Si suponemos que empleamos pulsos binarios para su transmisión, se puede asignar la no existencia de pulso (pulso de cero volt) al mensaje a (asoleado) y un pulso (de 1 volt) al mensaje b (lluvioso).

Sin duda, se necesita un mínimo de 1 pulso binario para transmitir cualquiera de los dos mensajes equiprobables.* En consecuencia, la información de cualquiera de ellos se define como 1 bit.** Nótese que la longitud del mensaje no tiene nada que ver con su contenido de información. Siempre se necesitará un pulso binario para transmitir cualquiera de los dos mensajes equiprobables, al margen de su longitud o cualquier otra característica. También, es evidente que un pulso binario es capaz de transmitir un bit de información.

En seguida, considérese el caso de 4 mensajes equiprobables. Si estos mensajes se transmiten mediante pulsos binarios, necesitamos un grupo de dos pulsos binarios para transmitir cualquiera de ellos. Cada pulso binario puede representar dos estados, y por eso se forman cuatro patrones distintos con la combinación de dos pulsos, los cuales se pueden asignar a cada uno de los cuatro mensajes (figura 8.1). Por lo tanto, se necesitan dos pulsos binarios para transmitir cualquiera de los cuatro mensajes equiprobables. Cada uno de estos mensajes requiere el doble de tiempo de transmisión respecto del requerido para transmitir cualquiera de los dos mensajes equiprobables y, por lo tanto, contiene el doble de información, es decir, 2 bits.

De igual manera, se puede transmitir cualquiera de 8 mensajes equiprobables mediante un grupo de 3 pulsos binarios. Esto se debe a que 3 pulsos

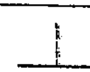
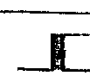
Símbolo	Dígito binario equivalente	Forma de onda del pulso binario	Dígito cuaternario equivalente	Forma de onda del pulso cuaternario
A	00		0	
B	01		1	
C	10		2	
D	11		3	

Figura 8.1

* N. del T. Llamaremos equiprobables a dos mensajes a y b que tienen la misma probabilidad.

** N. del T. "bit" proviene de las palabras inglesas *BInary UniT*.

binarios forman 8 patrones distintos que pueden representar cada uno de los 8 mensajes. En consecuencia, cada uno de los 8 mensajes contiene 3 bits de información. Se puede ver fácilmente que, en general, cualquiera de n mensajes equiprobables contiene $\log_2 n$ bits de información de acuerdo con los fundamentos de la ingeniería de información. Insistimos: la cantidad de información contenida en cualquiera de los n mensajes equiprobables es igual a $\log_2 n$ bits. Esto implica que, para transmitir tal mensaje, se necesita un mínimo de $\log_2 n$ pulsos binarios. Nótese que P, la probabilidad de ocurrir de cualquiera de estos eventos, es $1/n$. Por lo tanto

$$\text{Información } I = \log_2 n$$
$$= \log_2 \frac{1}{P} \tag{8.2}$$

Este resultado se ha demostrado en un caso muy especial, el de mensajes equiprobables. También se puede demostrar que, aun si los mensajes no son ✓ equiprobables, se necesita un promedio de $\log_2 (1/P)$ pulsos binarios para transmitir un mensaje de probabilidad P. La prueba se hace en el Apéndice (al final de este capítulo).

A partir del estudio anterior, es claro que la medida de la información (en bits) de un mensaje es igual al número mínimo de pulsos binarios que se necesitan para codificar el mensaje.

Aparentemente, esta definición de información es restrictiva pues se aplica solamente a la información de naturaleza discreta como es la transmisión de algún número discreto y finito de símbolos o mensajes. Sin embargo, el principal resultado de la teoría de la información es que cualquier forma de ✓ información para transmitir siempre puede representarse en forma binaria sin perder generalidad. Ya hemos visto, en el capítulo anterior, que la información de una señal continua limitada en banda se puede representar por un número discreto de valores-muestra por segundo. Entonces, es posible representar estas muestras mediante un código de pulsos binarios.

En la siguiente sección, demostraremos que todo sistema (o canal) de comunicación es capaz de transmitir determinada cantidad de información por segundo. Esto se conoce como la capacidad C del canal. Así, determinado canal puede transmitir una cantidad de información no mayor de C bits por segundo. Se verá que la capacidad del canal está limitada por el ancho de banda y por la razón de potencia de señal a ruido del sistema.

En lugar de pulsos binarios se pueden emplear pulsos M-arios (pulsos que pueden tomar M valores distintos) para la codificación. A continuación demostraremos que cada pulso M-ario puede llevar una cantidad de información de $\log_2 M$ bits.

Para demostrar lo anterior, supóngase que necesitamos transmitir uno cualquiera de cuatro mensajes equiprobables, en lugar de dos. Claramente, no es posible transmitir esta información con un solo pulso binario que adquiere únicamente dos estados. Pero se puede transmitir cualquiera de los cuatro pulsos mediante un grupo de dos pulsos binarios. Cada pulso binario puede adquirir dos estados y, en consecuencia, se formarán cuatro patrones distintos (como se ilustra en la figura 8.1) con la combinación de dos pulsos. El estado cero de un pulso (ausencia de pulso) se representa por una línea punteada. Por lo tanto, se necesitan dos pulsos binarios para transmitir cualquiera de los cuatro mensajes equiprobables. Así, la información que se transmite por mensaje es de 2 bits.

También se puede transmitir esta información con un pulso cuaternario que pueda tomar cuatro estados o niveles, por ejemplo 0, 1, 2 y 3 volts. Cada estado corresponde a uno de los cuatro posibles símbolos. Es evidente que cualquiera de los cuatro símbolos posibles se puede transmitir con un solo pulso cuaternario (figura 8.1). Se deduce que un pulso cuaternario puede transmitir la información de dos pulsos binarios y, en consecuencia, transmite 2 bits de información. Del mismo modo, si se desea transmitir uno cualquiera de ocho mensajes posibles, necesitamos un grupo de tres pulsos binarios. Como cada pulso binario tiene dos estados, la combinación de tres pulsos nos dará ocho patrones distintos. Cada uno de los ocho posibles mensajes también se puede transmitir con un solo pulso 8-ario (pulso que puede tomar 8 estados o valores). Por lo tanto, un pulso 8-ario transmite 3 bits de información. Es fácil ver que un pulso que pueda tomar M estados o niveles distintos transmite la información de $\log_2 M$ bits.

Se deduce, por lo tanto, que cuanto mayor sea el número de niveles distintos que pueda tomar un pulso, tanto mayor es la información transmitida por cada pulso. Un pulso capaz de tomar un número infinito de valores distintos transmite una cantidad infinita de información. Esto significa que se puede transmitir cualquier cantidad de información con un solo pulso que tome un número infinito de valores distintos. Aunque este resultado parece fantástico es perfectamente lógico y razonable. Si un pulso puede tomar un número infinito de niveles distintos, entonces es posible asignar uno de los niveles a cualquier mensaje o señal concebible, sin importar su longitud. Por ejemplo, se puede asignar uno de los niveles infinitos para representar todo el contenido de este libro. Ahora bien, si se desea transmitir dicho contenido, tan sólo será preciso transmitir un pulso del nivel correspondiente. Como existe un número infinito de niveles, es posible asignar un nivel a cualquier mensaje o señal de cualquier longitud concebible en este universo. Catalogar el código en este caso podrá resultar poco menos que imposible; sin embargo, esto ilustra la posibilidad de transmitir una cantidad infinita de información mediante un solo pulso.

A estas alturas, podemos preguntar por qué no usamos pulsos capaces de tomar un número infinito de niveles distintos. Se limita el sistema debido a consideraciones prácticas. Se debe recordar que, en nuestro estudio sobre transmitir información mediante pulsos, nos referimos al sistema compuesto que transmite la información en el transmisor y la recibe en el punto de destino. Por lo tanto, para transmitir determinada información, debemos poder así transmitir cómo recibir tales pulsos. Además, debemos reconocer los niveles distintos de los pulsos. Ahora bien, ¿que nos prohíbe transmitir pulsos que tomen un número infinito de valores? Es evidente que, como por consideraciones prácticas los pulsos deben tener amplitudes finitas, el número infinito de estados distintos implica que cada estado está separado del estado vecino por una cantidad infinitesimal. Ya que, en cualquier canal, siempre existe determinada cantidad de ruido, será imposible distinguir en el receptor los niveles que queden dentro de la amplitud de la señal de ruido.

✓ Por lo tanto, la consideración del ruido indica que los niveles deben estar separados, como mínimo, por la amplitud de la señal de ruido.

8.2 CAPACIDAD DE CANAL

Enunciamos antes que el ancho de banda y la potencia de ruido restringen la cantidad de información que puede transmitirse por un canal. Se puede demostrar con rigor que en un canal afectado por ruido blanco gaussiano, se puede transmitir información con una velocidad no mayor de C bits por segundo, en donde C es la capacidad del canal, dada por ✓

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) \tag{8.3}$$

B es el ancho de banda del canal en Hz, S es la potencia de señal y N es la potencia de ruido. La expresión de la ecuación 8.3 de la capacidad de canal es válida para ruido blanco gaussiano. Con otros tipos de ruido, la expresión se modifica. Queda fuera de los objetivos de este libro la comprobación rigurosa de esta fórmula.* En su lugar presentaremos una prueba rudimentaria, basada en la suposición plausible de que si una señal se mezcla con ruido, se puede reconocer la amplitud de la señal solamente dentro del voltaje de ruido raíz cuadrático medio. En otras palabras, la inseguridad de reconocer la amplitud exacta de la señal es igual al voltaje de ruido raíz cuadrático medio.

Supongamos que la potencia promedio de señal y la potencia de ruido son respectivamente S watts y N watts. La conclusión evidente indica que el valor cuadrático medio de la señal recibida es $\sqrt{S+N}$ volts y el valor cuadrático medio del voltaje de ruido $\sqrt{N}$ volts. Queremos distinguir la señal recibida de amplitud $\sqrt{S+N}$ volts en presencia del ruido de amplitud $\sqrt{N}$ volts. Se deduce, de nuestra suposición, que una variación menor de $\sqrt{N}$ ✓ volts de la señal de entrada no será perceptible en el receptor. En consecuencia, el número de niveles distintos que se pueden distinguir sin error estará dado por

$$M = \frac{\sqrt{S+N}}{\sqrt{N}} = \sqrt{1 + \frac{S}{N}} \tag{8.4}$$

Por lo tanto, el máximo valor de M se determina por la ecuación 8.4. La máxima cantidad de información transmitida por cada pulso con $\sqrt{1+S/N}$ niveles distintos es

$$I = \log_2 \sqrt{1 + \frac{S}{N}} \tag{8.5}$$

$$= \tfrac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) \quad \text{bits} \tag{8.6}$$

* Ver Bibliografía.

Estamos ahora en condiciones de determinar la capacidad de canal. La capacidad de canal es la máxima cantidad de información por segundo que se puede transmitir por un canal. Si el canal puede transmitir un máximo de K pulsos por segundo, entonces, sin duda, la capacidad C del canal está dada por

$$C = \frac{K}{2} \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) \quad \text{bits por segundo} \tag{8.7}$$

Se demostró en el capítulo 5, con relación a los requisitos de ancho de banda de señales MAP, que un sistema con ancho de banda nf_m Hz puede transmitir $2nf_m$ pulsos independientes por segundo. Se demostró que bajo estas condiciones la señal que se recibe producirá los valores correctos de las amplitudes de los pulsos pero no reproducirá los detalles de las formas de pulso. Pero tan sólo nos interesa las amplitudes de pulso y no sus formas, y deducimos que un sistema con ancho de banda de B Hz puede transmitir un máximo de $2B$ pulsos por segundo. Como cada pulso puede llevar una información máxima de $1/2 \log_2 (1 + S/N)$ bits, se infiere que un sistema de ancho de banda B puede transmitir información a una velocidad máxima de

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) \quad \text{bits por segundo} \tag{8.8}$$

Así, la capacidad del canal está limitada por el ancho de banda del canal (o del sistema) y por la señal de ruido. Para un canal sin ruido, $N = 0$ y la capacidad del canal es infinita. Sin embargo, en la práctica N siempre es finito y también lo es la capacidad del canal.*

La ecuación 8.8 se conoce como ley de Shannon-Hartley y se considera ✓ como el teorema central de la Teoría de la Información.** Por este teorema,

* Esto es válido aun si el ancho de banda B es infinito. La señal de ruido es ruido blanco con espectro de densidad de potencia uniforme en todo el rango de frecuencias. En consecuencia, a medida que el ancho de banda B se incrementa, N crece también y la capacidad de canal permanece finita aun cuando $B = \infty$. Si $\mathcal{N}/2$ es la densidad de potencia, entonces $N = \mathcal{N}B$ y

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{\mathcal{N}B}\right)$$

y

$$\lim_{B\to\infty} C = \frac{S}{\mathcal{N}} \frac{\mathcal{N}B}{S} \log_2 \left(1 + \frac{S}{\mathcal{N}B}\right)$$

El último límite se puede encontrar si se observa que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \log_2 (1 + x) = \log_2 e = 1.44$$

por lo tanto

$$\lim_{B\to\infty} C = \frac{S}{\mathcal{N}} \log_2 e = 1.44 \frac{S}{\mathcal{N}}$$

** La teoría de la información es un conjunto de resultados que se basan en una definición cuantitativa particular de una cantidad de información y es una subdivisión de un campo más amplio, la teoría estadística de la comunicación, que incluye todo el análisis probabilístico de los problemas de comunicaciones. Véase por ejemplo, P. Elias, *"Information Theory"*, en Grabbe, Ramo, y Wooldridge, *Handbook of Automation, Computation and Control*, Vol. 1, ch. 16, John Wiley and Sons, New York, 1961.

vemos que el ancho de banda y la potencia de señal pueden intercambiarse. Para transmitir la información a una velocidad determinada, podemos reducir la potencia de señal transmitida, siempre que el ancho de banda se incremente en forma correspondiente. De igual manera, se puede reducir el ancho de banda a condición de incrementar la potencia de la señal. Como ya dijimos, el fin del proceso de la modulación consiste realmente en efectuar esta combinación entre el ancho de banda y la razón señal a ruido. A la luz de este teorema, se puede entender adecuadamente el mejoramiento de la razón señal a ruido en FM de banda ancha y en MPC.

Sin embargo, se debe recordar que la capacidad de canal representa la máxima cantidad de información por segundo que se puede transmitir por el canal. Para alcanzar esta velocidad de transmisión, la información debe procesarse o codificarse de la manera más eficiente. La viabilidad de tal codificación constituye uno de los resultados importantes de la teoría de la información atribuida a Shannon. En la realidad, sin embargo, no todos los sistemas de comunicación que se emplean (sistemas no codificados como AM, FM, etc.) alcanzan esta velocidad máxima.

8.3 TRANSMISION DE SEÑALES CONTINUAS

Expondremos las implicaciones de la ley Shannon-Hartley considerando la combinación del ancho de banda y la razón señal a ruido de una señal continua de banda limitada a f_m Hz. Sabemos por el teorema de muestreo que la información de tal señal queda completamente especificada por $2f_m$ muestras por segundo. Así, para transmitir la información de tal señal tan sólo es preciso transmitir esas muestras discretas.

La siguiente pregunta importante es: ¿Cuánta información contiene cada muestra? Esto depende de los niveles o valores discretos que puede tomar cada muestra. En realidad, estas muestras pueden tomar cualquier valor y, en consecuencia, para transmitirlas necesitamos pulsos capaces de tomar un número infinito de niveles. Sin duda, la información transmitida por cada muestra es de infinitos bits. Por lo tanto, la información de una señal continua y limitada en banda es infinita. En presencia de ruido (valor finito de N), la capacidad del canal es finita. En consecuencia, es imposible transmitir toda la información de una señal limitada en banda por un canal físico con ruido (que existe en la misma banda). En ausencia de ruido, $N = 0$, la capacidad del canal es infinita y se puede transmitir cualquier señal. Desde luego, es imposible transmitir toda la información de una señal continua a menos que la potencia de señal transmitida sea infinita. Debido al ruido, siempre existe una cierta inseguridad en la señal que se recibe. La transmisión de toda la información de una señal significaría cero de inseguridad. Realmente, la inseguridad se hace tan pequeña como se quiera al incrementar la capacidad del canal (incrementar el ancho de banda y/o incrementar la potencia de señal), pero nunca puede hacerse cero.

Es importante notar que la inseguridad se introduce en el proceso de transmisión. Por lo tanto, aunque sea posible transmitir toda la información de una señal continua en el extremo transmisor, es imposible recuperar esta cantidad infinita de información en el receptor. La cantidad de información

que se puede recuperar por segundo en el receptor es de no más de C bits por segundo en donde C es la capacidad de canal. Esto es precisamente lo que sucede cuando se transmite en forma directa una señal continua, como por ejemplo AM y FM. En estos casos se envía la información completa de una señal en el transmisor. Pero como el canal tiene una capacidad finita de C bits por segundo no se puede recuperar más que C bits de información en el receptor.

De otra manera, en lugar de transmitir toda la información en el transmisor, se puede aproximar la señal para que su contenido de información se reduzca a C bits por segundo y transmitir esta señal aproximada que tiene un contenido finito de información. Será posible, con esto, recuperar toda la información que se ha transmitido. Esto es exactamente lo que se hace en modulación por pulsos codificados. ¿Cómo podemos aproximar una señal de suerte que la señal aproximada tenga un contenido finito de información por segundo? Esto se puede llevar a cabo con el proceso de cuantificación que se estudió en el capítulo 7. Considérese la señal continua limitada en banda a f_m Hz, como se ilustra en la figura 8.2. Para transmitir la información de esta señal, es necesario transmitir $2f_m$ muestras por segundo. Las

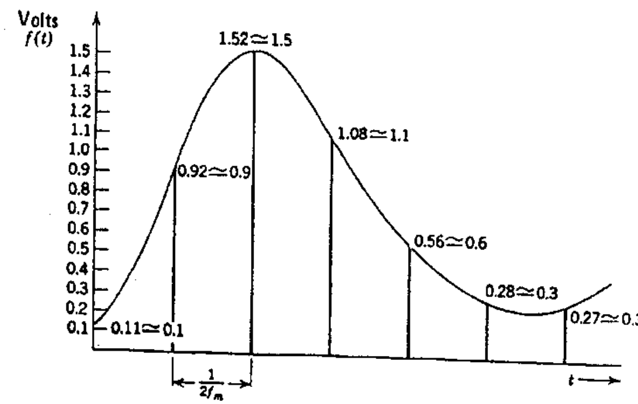


Figura 8.2

muestras también se ilustran en la figura. Como ya se dijo antes, las muestras pueden tomar cualquier valor y para transmitirlas directamente se necesitan pulsos que puedan adquirir un número infinito de niveles. (Hemos visto que aunque sea posible transmitir tales pulsos en el extremo transmisor, debido al ruido no es posible recuperar las alturas exactas de estos pulsos en el receptor.) Por lo tanto, en lugar de transmitir los valores exactos de dichos pulsos, aproximamos las amplitudes al valor más cercano del número finito de valores permitidos. En este ejemplo, todos los pulsos están aproximados al décimo de volt más cercano. Es evidente, de la figura, que cada uno de los pulsos transmitidos toma cualquiera de los 16 niveles y, en consecuencia, transmite una cantidad de información de $\log_2$

$16 = 4$ bits. Como existen $2f_m$ muestras por segundo, el contenido total de información de la señal aproximada es de $8f_m$ bits por segundo. Si la capacidad del canal es mayor o igual a $8f_m$ bits por segundo toda la información que ha sido transmitida se recuperará íntegramente, sin incertidumbre. Esto significa que la señal que se recibe será réplica exacta de la señal aproximada que se transmitió.

El problema consiste en que el ruido que se introduce en el proceso de transmisión podría causar un grado adicional de inseguridad, capaz de incrementar la inseguridad total a más de 0.1 volts en la amplitud de la señal recibida. Se puede demostrar fácilmente que, si la capacidad del canal es $8f_m$ bits por segundo, el proceso de transmisión no introduce grado adicional alguno de inseguridad. Supongamos que se emplea un canal con ancho de banda de f_m Hz para transmitir esas muestras; entonces, como la capacidad de canal que se requiere es de $8f_m$ bits por segundo, la razón de potencia de señal a ruido necesaria estará dada por

$$8f_m = f_m \log_2 \left(\frac{S+N}{N}\right)$$

Por lo tanto,

$$\frac{S+N}{N} = 256$$

Se vio antes que el número de niveles que se pueden distinguir en el receptor es de $\sqrt{(S+N)/N}$. Se deduce que, en este caso, el receptor puede distinguir los 16 estados sin error. En consecuencia, aunque el proceso de transmisión introduce algo de ruido en la señal deseable, los niveles están suficientemente separados para distinguirse en el receptor. Esta es otra forma de decir que un canal con la capacidad de $8f_m$ bits por segundo puede transmitir, sin error, $8f_m$ bits por segundo.

8.4 INTERCAMBIO ENTRE EL ANCHO DE BANDA Y LA RAZON SEÑAL A RUIDO

Por un canal de capacidad finita, se puede transmitir determinada señal con cierta cantidad de inseguridad. Hemos visto que se puede obtener una capacidad mediante cualquier número de combinaciones del ancho de banda y la potencia de señal. De hecho, es posible cambiar una en función de la otra. En seguida, demostraremos que el cambio se puede realizar.

Considérese la transmisión de la señal $f(t)$ de la figura 8.2. Se ha visto que si se tolera una inseguridad de 0.1 volt, el contenido de información de la señal está dado por $8f_m$ bits por segundo. Ahora, se demostrará que esta información se puede transmitir con diferentes combinaciones de ancho de banda y potencia de señal.

Una forma posible de transmisión es enviar directamente $2f_m$ muestras por segundo. Cada muestra puede tomar cualquiera de los 16 estados (pulso 16-ario). En este caso debemos tener una razón señal a ruido que nos permita distinguir 16 estados. Es evidente que $\sqrt{S+N}/\sqrt{N} = 16$. Además,

para transmitir $2f_m$ pulsos por segundo, necesitamos un canal con ancho de banda de f_m Hz. En consecuencia, la capacidad C de canal requerida está dada por (ecuación 8.8)

$$\begin{aligned} C &= f_m \log_2 \frac{S+N}{N} \\ &= f_m \log_2 (16)^2 \\ &= 8f_m \qquad \text{bits por segundo} \end{aligned}$$

Así, la capacidad de canal es exactamente igual a la cantidad de información por segundo de la señal $f(t)$.

De otra forma, podemos transmitir las muestras de la figura 8.2 mediante pulsos cuaternarios (pulsos que pueden adquirir cuatro estados). Es claro que necesitamos un grupo de dos pulsos cuaternarios para transmitir cada muestra que puede tomar 16 estados. Ahora bien, la razón señal a ruido que se requiere en el receptor para distinguir pulsos que toman cuatro estados diferentes es $\sqrt{S+N}/\sqrt{N} = 4$. Es evidente que en este modo de transmisión se reduce la potencia de señal requerida. Sin embargo, tenemos que transmitir ahora el doble de pulsos por segundo, es decir, $4f_m$ pulsos por segundo. Por lo tanto el ancho de banda necesario es $2f_m$ Hz. La capacidad del canal en este caso es

$$\begin{aligned} C &= 2f_m \log_2 \frac{S+N}{N} \\ &= 2f_m \log_2 (4)^2 \\ &= 8f_m \qquad \text{bits por segundo} \end{aligned}$$

A partir de este ejemplo, es evidente que se puede transmitir una cantidad dada de información mediante diferentes combinaciones de potencia de señal y ancho de banda y que una puede cambiar en función de la otra. La señal $f(t)$ también se puede transmitir por pulsos binarios ($8f_m$ pulsos por segundo), lo cual requiere de $\sqrt{S+N}/\sqrt{N} = 2$ y un ancho de banda de canal de $4f_m$ Hz. Es interesante notar que también se puede transmitir $f(t)$ por un canal con ancho de banda menor que f_m Hz si se transmite suficiente potencia de señal (ver problema 3 al final de este capítulo).

Se debe observar que el proceso de intercambio entre el ancho de banda y la potencia de señal no es automático. Debemos modificar o transformar la información de la señal (codificación) para que ocupe el ancho de banda deseado. En la práctica, esto se realiza mediante diferentes tipos de modulación. Sin embargo, se debe reconocer que no todos los sistemas de comunicación materializan todas sus posibilidades inherentes de ancho de banda y potencia de señal empleados. Algunas formas de modulación son superiores a otras en la utilización de la capacidad de canal. Hemos demostrado en el capítulo 7 que los sistemas codificados son superiores a los no codificados (como FM, MPP) al efectuar el intercambio entre el ancho de banda y la razón S/N.

Se puede deducir, de la ley de Shannon-Hartley, la ley ideal para combinar el ancho de banda con la relación S/N. Considérese un mensaje con ancho de banda de f_m Hz. Supongamos que el contenido de información de esta señal es de I bits por segundo. Supóngase, además, que dicha señal se codifica (o modula) de manera que el ancho de banda resultante es B Hz. ✓ La modulación de la señal no modifica en absoluto el contenido de información de la señal. La señal modulada se aplica, a continuación, a la entrada del demodulador (figura 8.3). Sean S_i y N_i la potencia de la señal y del ruido, respectivamente, a la entrada del demodulador. Es evidente que

$$I = B \log_2 \left(1 + \frac{S_i}{N_i}\right) \tag{8.9}$$

La salida del demodulador produce la señal original $f(t)$, con ancho de banda de f_m, más ruido. Sean S_o y N_o la potencia de señal y de ruido, respectivamente. En un demodulador ideal, la información I de la señal de salida debe ser idéntica a la de la señal de entrada. En consecuencia

$$I = f_m \log_2 \left(1 + \frac{S_o}{N_o}\right) \tag{8.10}$$

Figura 8.3

Por las ecuaciones 8.9 y 8.10 obtenemos

$$B \log_2 \left(1 + \frac{S_i}{N_i}\right) = f_m \log_2 \left(1 + \frac{S_o}{N_o}\right)$$

Por lo tanto,

$$\left(1 + \frac{S_o}{N_o}\right) = \left(1 + \frac{S_i}{N_i}\right)^{B/f_m} \tag{8.11}$$

En la práctica, S_o/N_o y $S_i/N_i \gg 1$ obteniéndose

$$\frac{S_o}{N_o} \simeq \left(\frac{S_i}{N_i}\right)^{B/f_m} \tag{8.12}$$

Si consideramos razones de voltaje de señal a ruido en lugar de razones de potencia, obtenemos

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{vr} \simeq \left(\frac{S_i}{N_i}\right)_{vr}^{B/2f_m} \tag{8.13}$$

Así, en un sistema ideal, la razón de potencia de señal a ruido a la salida (S_o/N_o) se incrementa en forma exponencial con el ancho de banda B. El mismo resultado se obtiene con razones de voltaje de señal a ruido. Sin duda, su comportamiento es bastante superior al de los sistemas no codificados de banda ancha, como FM y MPP, que se discutieron en el capítulo 7. En aquellos sistemas, se demostró que la razón de potencia de señal a ruido se incrementa con el cuadrado del ancho de banda B. En cambio, ✓ en el caso de los sistemas codificados (MPC), se observó que el mejoramiento de la razón señal a ruido es exponencial con el ancho de banda (ecuación 7.79).

Ejemplo 8.1

En este ejemplo, con los conceptos de la teoría de la información, calcularemos el ancho de banda de la señal de video (imagen) para TV.

Se puede considerar una señal de televisión compuesta de aproximadamente 300,000 elementos pequeños de imagen. Cada uno de estos elementos puede tomar 10 niveles perceptibles de brillo (como negro y sombras de gris) para producir el contraste adecuado. Suponemos que, para cualquier elemento de imagen, los 10 niveles de brillo tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Se transmiten 30 cuadros de imagen por segundo. Se establece también que para reproducción satisfactoria de la imagen se necesita una razón de señal a ruido de 1000 (30 db).

Con esta información, calcularemos el ancho de banda que se requiere para transmitir la señal de video de TV. Primero, calcularemos la información por elemento de imagen. Como cada elemento de imagen puede tomar 10 niveles con la misma probabilidad,

$$\text{Información por elemento de imagen} = \log_2 10 = 3.32 \text{ bits/elemento}$$

$$\begin{aligned}\text{Información por cuadro de imagen} &= 300{,}000 \times 3.32 \\ &= 996{,}000 \text{ bits/cuadro de imagen}\end{aligned}$$

Ya que existen 30 cuadros de imagen por segundo, obtenemos

$$\text{Información por segundo} = 996{,}000 \times 30 = 29.9 \times 10^6 \text{ bits/segundo}$$

Así, la señal de video tiene una información de 29.9×10^6 bits por segundo. Para transmitir esta información, la capacidad C del canal debe ser igual a 29.9×10^6 bits por segundo

$$C = 29.9 \times 10^6 \text{ bits/segundo}$$

Pero, para cualquier canal con ancho de banda, B (en Hz) está dada por

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right)$$

Sin embargo, tenemos $S/N = 1000$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}C = 29.9 \times 10^6 &\simeq B \log_2 1000 \\ &= 9.95\, B\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}B &= 3.02 \times 10^6 \\ &\simeq 3 \text{ MHz}\end{aligned}$$

8.5 EFICIENCIA DE LOS SISTEMAS MPC

Aunque el incremento de la razón señal a ruido en la salida para MPC es exponencial con el ancho de banda, como se requiere en un sistema ideal, el comportamiento del sistema MPC aún es inferior al predicho por la ley de Shannon-Hartley. Consideremos un sistema MPC s-ario. La señal mensaje $f(t)$ tiene un ancho de banda de f_m Hz. Existen $2f_m$ muestras por segundo. Supondremos que hay M niveles de cuantificación. Así, una muestra de la señal $f(t)$ se aproxima a cualquiera de los M niveles. Si suponemos que todos los niveles son equiprobables, la informacion por muestra es $\log_2 M$ bits. O sea que el contenido total de información de la señal es $2f_m \log_2 M$ bits por segundo. Para transmitir esta señal en forma ideal, necesitamos una capacidad de canal

$$C = 2f_m \log_2 M \text{ bits/segundo} \tag{8.14}$$

Empleando pulsos s-arios (pulsos que pueden tomar s estados), se necesita un grupo de $\log_s M$ pulsos s-arios para representar una muestra que pueda tomar uno de los M valores. En consecuencia, necesitamos transmitir un total de $2f_m \log_s M$ pulsos s-arios por segundo. El ancho de banda necesario para transmitir estos pulsos está dado por

$$B = f_m \log_s M \qquad \text{Hz} \tag{8.15}$$

De la ecuación 8.14, se deduce que

$$\begin{aligned} C &= (f_m \log_s M)(2 \log_2 s) \\ &= B \log_2 s^2 \end{aligned} \tag{8.16}$$

Pero, para MPC s-ario, la razón de potencia de señal a ruido de entrada está dada por (ecuación 7.81)

$$\frac{S_i}{N_i} = \frac{K^2(s^2 - 1)}{12}$$

Por lo tanto,

$$s^2 = 1 + \frac{12}{K^2}\frac{S_i}{N_i}$$

y

$$C = B \log\left(1 + \frac{12}{K^2}\frac{S_i}{N_i}\right) \tag{8.17}$$

La ecuación 8.17 establece la capacidad teórica de canal necesaria para transmitir el mensaje cuantificado $f(t)$. Sin embargo, en la realidad se transmite este mensaje por un canal de ancho de banda B (ecuación 8.15) y con las potencias de señal y de ruido S_i y N_i, respectivamente. En consecuencia C', la capacidad del canal real empleado, está dada por (ecuación 8.8)

$$C' = B \log\left(1 + \frac{S_i}{N_i}\right) \text{ bits/segundo} \tag{8.18}$$

Así, C (ecuación 8.17) es la capacidad de canal óptima o teórica necesaria para transmitir el mensaje cuantificado $f(t)$ y C' (ecuación 8.18) es la capacidad real del canal necesaria para transmitir $f(t)$ cuantificada mediante MPC. Obviamente, la S_i/N_i de MPC es $K^2/12$ veces la requerida por el sistema ideal. En el capítulo 9 se demuestra que $K = 10$ es un valor razonable para una probabilidad de error aceptable (10^{-6}). En consecuencia, los requisitos de potencia para MPC son, a *grosso modo*, 100/12 (9.2 db) veces los necesarios para el sistema ideal.

Con probabilidad de error de 10^{-5}, la discrepancia es de aproximadamente 8 db. El comportamiento de un sistema ideal y de un sistema MPC, para diferentes valores de s se ilustran en la figura 8.4. El error promedio en detección es 1 en 10^5. La curva real está a la derecha de la curva ideal en 8 db.

En la figura 8.4, se observa el efecto de saturación con respecto a la velocidad máxima de transmisión para una s dada. Así, para $s = 2$ (MPC

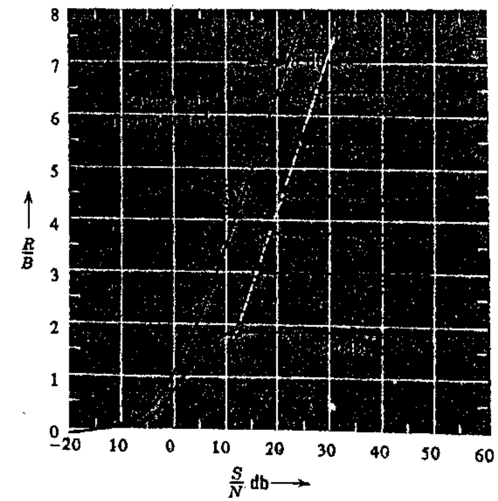


Figura 8.4

binario) la velocidad de transmisión por ancho de banda unitario no se puede incrementar a más de 2 bits. No es difícil entender la razón. Un pulso binario puede transmitir un máximo de 1 bit de información. Si un sistema tiene un ancho de banda de B Hz, entonces podemos transmitir $2B$ pulsos por segundo. Así R, la velocidad de transmisión, está dada por

$$R = 2B \text{ bits/segundo}$$

y

$$\frac{R}{B} = 2 \text{ bits/segundo/ancho de banda} \tag{8.19}$$

Cuando la razón señal a ruido es pequeña, no se pueden distinguir adecuadamente los pulsos en el receptor y, en consecuencia, existe una alta probabilidad de error. Esto provoca que la cantidad R/B disminuya a menos de 2 para una razón señal a ruido pequeña. A medida que mejora la razón señal a ruido, la probabilidad de error disminuye y R/B se acerca a su valor ideal de 2. Cuando el nivel de la razón señal a ruido llega al valor en que los pulsos se pueden distinguir claramente en el ruido, cualquier incremento adicional de la potencia de señal (o de la razón señal a ruido) ejerce influencia despreciable en el comportamiento del sistema. A esto se debe el efecto de saturación. El nivel de saturación se puede incrementar al aumentar s como se muestra en la figura 8.4. En general, la información máxima transmitida por un pulso s-ario es $\log_2 s$ bits por segundo. Un sistema con ancho de banda B puede transmitir $2B$ pulsos por segundo. Por lo tanto R, velocidad máxima de transmisión de información está dada por

$$R = 2B \log_2 s \text{ bits/segundo}$$

y

$$\frac{R}{B} = 2 \log_2 s \text{ bits/segundo/ancho de banda} \tag{8.20}$$

Así, para $s = 3$

$$\left(\frac{R}{B}\right)_{\text{máx}} = 2 \log_2 3 = 3.16 \text{ bits/segundo/ancho de banda}$$

Para $s = 4$

$$\left(\frac{R}{B}\right)_{\text{máx}} = 2 \log_2 4 = 4 \text{ bits/segundo/ancho de banda}$$

En consecuencia, los niveles de saturación para $s = 3$ y 4 están dados por 3.16 y 4 bits/segundo/ancho de banda, respectivamente.

Notamos aquí, que la capacidad de canal predicha por la Ley de Shannon-Hartley no se puede alcanzar mediante una codificación finita. Se puede llevar a cabo mediante codificación de bloque, en donde una secuencia de N símbolos se considera como un símbolo y en el límite $N \to \infty$. La complejidad de tal codificación es tan grande que, en la práctica, se aceptan con gusto situaciones inferiores a lo idóneo.

APENDICE. CONTENIDO DE INFORMACION DE MENSAJES NO EQUIPROBABLES

Considérese una fuente que genera los mensajes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ con probabilidad $P_1, P_2, \ldots, P_n$. La fuente genera una serie de N mensajes. Si N crece mucho, entonces, de acuerdo con la ley de los números grandes, dicha serie contendrá un número NP_1 de veces el mensaje a_1, un número NP_2 de veces el mensaje a_2, etc. Como el ocurrir de cada mensaje es independiente, la probabilidad $P(S)$ de ocurrencia de cualquier serie S de N mensajes es

$$P(S) = (P_1)^{NP_1}(P_2)^{NP_2} \cdots (P_n)^{NP_n} \tag{A8.1}$$

Nótese que como N es muy grande, cada una de las series posibles tiene el mismo número de mensajes $a_1(NP_1)$, $a_2(NP_2)$, etc. Por lo tanto, todas estas series son equiprobables con probabilidad $P(S)$ dada en la ecuación A8.1. Una de tales series tiene la información $I(S)$

$$I(S) = \log_2 \frac{1}{P(S)}$$

$$= N \sum_{i=1}^{n} P_i \log_2 \frac{1}{P_i} \tag{A8.2}$$

Como la serie S se compone de N mensajes, la información promedio por mensaje es $I(s)/N$:

$$\frac{I(s)}{N} = \sum_{i=1}^{n} P_i \log_2 \frac{1}{P_i} \text{ bits} \tag{A8.3}$$

Esta es la información promedio por mensaje. Como los mensajes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ocurren con probabilidad $P_1, P_2, \ldots, P_n$, es evidente que el mensaje a_k con probabilidad P_k envía una información de $\log 1/P_k$ bits, que es el resultado deseado.

PROBLEMAS

1. La forma de onda de voltaje $Sa(2000\pi t)$ se va a transmitir con una inseguridad que no excede de 1/80 volt. Determinar la capacidad de canal que se requiere (véase la figura 1.12).
2. Repetir el problema 1 para la forma de onda $Sa(2000\pi t)^2$ si la inseguridad no es mayor de 1/64 volt (véase la figura 1.12).
3. Trazar un esquema para transmitir la señal continua $f(t)$ de la figura 8.2 con una inseguridad que no exceda de 0.1 volt por un canal con ancho de banda de $(f_m/2)$ Hz. Supóngase que la señal $f(t)$ es de banda limitada a f_m Hz.
4. Repetir el problema 3 si la inseguridad no excede de 0.025 volts.
5. En el ejemplo 8.1 del texto, se encontró que la cantidad de información por cuadro de la imagen de televisión es aproximadamente de $9.96 \times 10^5 \simeq 10^6$ bits. Un anunciador de radio trata de describir oralmente una imagen de televisión mediante 1000 palabras tomadas de su vocabulario de 10,000. Supóngase que cada una de las 10,000 palabras tiene la misma probabilidad de aparecer en la descripción de esa imagen (una aproximación burda, pero suficientemente buena para dar la idea). Determinar la cantidad de información radiada por el anunciador al describir la imagen. ¿Se pensaría que el anunciador describe fielmente la imagen empleando 1000 palabras? ¿El antiguo adagio "más vale una imagen que 1000 palabras" está exagerando o subestimando la realidad?
6. En la transmisión de imágenes por facsímil, hay aproximadamente 2.25×10^6 elementos de imagen por cuadro. Se necesitan 12 niveles de brillo para una buena reproducción. Supóngase que todos estos niveles tienen la misma probabilidad de ocurrir. Calcular el ancho de banda del canal que se necesita para transmitir la imagen cada 3 minutos. Supóngase que la razón de potencia de señal a ruido en el canal es de 30 db (1000).
7. Considérese la transmisión por cable de las condiciones del tiempo. Existen cuatro posibles mensajes; asoleado, nublado, lluvioso y con neblina. Si cada uno de los mensajes tiene la misma probabilidad ¿Cuál es el número mínimo de pulsos binarios que se requiere por mensaje transmitido? Dar un patrón de código típico para los cuatro mensajes empleando pulsos binarios.