Inés Alarcón
16008450

Hoja de trabajo No.6

Problema 1: Calcular la matriz de transición. e^{At}

1.1 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 1.2 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 100 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1.3 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 1.4 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

1. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

solución: $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda I) = (6-\lambda)[(4-\lambda)(2-\lambda)+2]$$
$$= (6-\lambda)(10-6\lambda+\lambda^2)$$

$(6-\lambda)(10-6\lambda+\lambda^2) = 0$ tiene soluciones $\lambda_1 = 6$, $\lambda_{2,3} = 3 \pm j$

eigenvectores

$x^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ $x^2 = \begin{bmatrix} 1+j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $x^3 = \begin{bmatrix} 1-j \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Definición de la matriz modal M:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1+j & 1-j \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} e^{6t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(3+j)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(3-j)t} \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2j} & -\frac{-j+1}{2j} & 0 \\ \frac{-1}{2j} & \frac{1+j}{2j} & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{3t} e^{jt} \qquad e^{3t} e^{-jt}$$

$$e^{3t} \hat{c}t + i \hat{s} t$$

$$e^{At} = M e^{\lambda t} \cdot M^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1+j & 1-j \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} e^{6t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(3+j)t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(3-j)t} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2j} & -\frac{-j+1}{2j} & 0 \\ \frac{-1}{2j} & \frac{1+j}{2j} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (j+1)e^{(j+3)t} & (-j+1)e^{(3-j)t} \\ 0 & e^{(j+3)t} & e^{(3-j)t} \\ e^{6t} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2j} & -\frac{-j+1}{2j} & 0 \\ \frac{-1}{2j} & \frac{1+j}{2j} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -(1-j)e^{(3-j)t} + (j+1)e^{(j+3)t} & \frac{(1+j)(1-j)e^{(j+3)t} - (1+j)e^{(3-j)t}(1-j)}{2j} & 0 \\ \frac{e^{(j+3)t} - e^{(3-j)t}}{2j} & \frac{(1-j)e^{(j+3)t} - (1+j)e^{(3-j)t}}{2j} & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t} \end{pmatrix}$$

Problema 1: Calcular la matriz de transición.

1.1 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ 1.2 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 100 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

1.3 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 1.4 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

$(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = -2$

- λ_1

$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - (-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$x^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- λ_2

$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - (-2)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$x^2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Matriz modal:

$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

entonces:

$$e^{At} = M e^{\lambda t} M^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -e^{-2t} \\ e^{-t} & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Problema 2: Trazar las trayectorias definidas por los vectores de estado.

2.1 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

2.2 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 100 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

$$x(t) = e^{At} \cdot x(0)$$

2.1 $\quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} \end{bmatrix}$

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Matriz de transición e^{At}

pasos:

1. eigenvalores y vectores de A
2. matriz modal y su inversa
3. $e^{\lambda t}$
4. $e^{At} = M e^{\lambda t} M^{-1}$