Guía de Estudio (Examen Final)

1. Ejercicios de Repaso

A continuación le presentamos una serie de preguntas, ejercicios y problemas, seleccionados como referencia de los contenidos a evaluar en el primer examen parcial.

1.1. Conceptos

1. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas; *en cualquier caso* justifique su respuesta.

   a) Si $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. [F].

   b) Si $|r| < 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$.[F].

   c) Si $0 < a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.[F].

   d) Si 0< $a_n \leq b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.[V].

   e) Si la serie de potencia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge para $x = 2$, entonces también converge para $x = -2$. [F].

2. Encontrar dos series divergentes, tales que su suma sea convergente.

3. Utilizar el hecho de que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ para demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

4. Demostrar que $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^p} dx$ converge si y sólo si $p > 1$.

5. Aproximar la suma de la serie convergente usando el número indicado de términos, incluyendo una estimación del error máximo en su aproximación.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$, seis términos. $S_6 \approx 1.0811, R_6 \approx 0.0015$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$, cuatro términos. $S_4 \approx 0.4049, R_4 \approx 5.6 \times 10^{-8}$

6. Demostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$.

1.2. Operatoria

1. Determinar la convergencia o divergencia de la serie.

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(1.67)^n$. Converge.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\ln n}$. Diverge.

   c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^4}$. Converge.

   d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}$. Diverge.

   e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6n}{5n-1}$. Diverge.

   f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+2n}}$. Converge.

   g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^5}$. Converge.

   h) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-3}$. Converge.

   i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{2n+5}\right)^n$. Diverge.

   j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n^2}}$. Converge.

   k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\times 3\times 5\times ...\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times ...\times(2n)}$. Diverge.

2. Encontrar el polinomio de Taylor de tercer grado para $f(x)=e^{-3x}$ centrado en $c=0$. $P_3(x)=1-3x+\frac{9}{2}x^2-\frac{9}{2}x^3$.

3. Utilizar un polinomio de Taylor para aproximar la $\ln(1.75)$ con un error menor que 0.001.0.559.

4. Encontrar el intervalo de convergencia de la serie de potencias.

   a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{(n+1)^2}$. [1,3].

   b) $\sum_{n=0}^{\infty}n!(x-2)^n$. $x=2$.

5. Encontrar la serie de Maclaurin para la función.

   a) $f(x)=e^{\frac{x^2}{2}}$. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n n!}$.

   b) $f(x)=\ln(1+x)$.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$.

   c) $g(x)=\text{sen}(3x)$.$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

   d) $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

6. Calcule el valor aproximado de cada una de las siguientes, si es que convergen, utilizando 5 términos de la serie, luego estime el error de la aproximación:

   a) $A=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

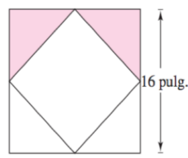
b) $A = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$

c) $A = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!}$

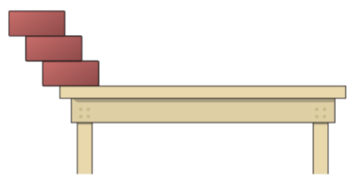
1.3. Aplicaciones

Finalmente, las aplicaciones *sin miedo.*

1. Los lados de un cuadrado son de 16 pulgadas de longitud. Un nuevo cuadrado se forma uniendo los puntos medios de los lados del cuadrado original, y dos de los triángulos fuera del segundo cuadrado están sombreados (ver la figura). Determinar el área de las regiones sombreadas si este patrón de sombreado se repite infinitamente. 128 plg^2 .



2. Se apilan bloques idénticos de una unidad de longitud sobre el borde de una mesa. El centro de gravedad del bloque superior debe quedar sobre el bloque debajo de él, el centro de gravedad de los dos bloques superiores debe quedar sobre el bloque debajo de ellos, y así sucesivamente.



   a) Si hay tres bloques, demostrar que es posible apilarlos de manera que el borde izquierdo del bloque superior se encuentre $\frac{11}{12}$ unidades más allá del borde de la mesa.
   b) ¿Es posible apilar los bloques de manera que el borde derecho del bloque superior se encuentre más allá del borde de la mesa? Sí.
   c) ¿Qué tan lejos de la mesa pueden apilarse los bloques? Cualquier distancia.

3. La función de Bessel de orden 0 es $J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$.
   a) Mostrar que la serie converge para todo x.
   b) Mostrar que la serie es una solución de la ecuación diferencial $x^2 J_0'' + xJ_0' + x^2 J_0 = 0$.

4. Aproximar la probabilidad normal $P(0 < x < 1)$ con un error menor que 0.0001, si la misma está dada por $P(a < x < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.0.3412.