Inés Alarcón
16008450

Hoja de trabajo No. 11

1. Para el sistema $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a) Expresar $\boldsymbol{x}(0)$ como una combinación lineal de los vectores propios. El problema se puede resolver usando $\mathbf{M}^{-1}$.

b) Calcular $\boldsymbol{x}(t)$. Expresar la respuesta como una superposición ponderada de los modos, $e^{\lambda_i t}\boldsymbol{m}_i$, del sistema.

c) Trazar la trayectoria de $\boldsymbol{x}(t)$.

d) Describir la trayectoria que resulta si $\boldsymbol{x}(0) = \alpha\boldsymbol{m}_i$.

a) $\lambda_1 = -1$ $\quad\lambda_2 = -2$

$\underline{x_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{x_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad M = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad M^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$x(t) = Me^{\Lambda t}M^{-1}\underline{x}(0)$$
$$= (Me^{\Lambda t})(M^{-1}\underline{x}(0))$$

$$Me^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-t} & -e^{-2t} \\ e^{-t} + 2\cdot 0 & 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-t} & -e^{-2t} \\ e^{-t} & 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$M^{-1}\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = M e^{\Lambda t} M^{-1} \underline{x}(0)$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-t} & -e^{-2t} \\ e^{-t} & 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7e^{-t} - 5e^{-2t} \\ -7e^{-t} + 10e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t}(7e^{t} - 5) \\ e^{-2t}(-7e^{t} + 10) \end{bmatrix} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 7e^{t} - 5 \\ -7e^{t} + 10 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix} + c_2 e^{\lambda_2 t} \begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = -7 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}(0) = c_1 \underline{x_1} + c_2 \underline{x}_2$$

$$= -7 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

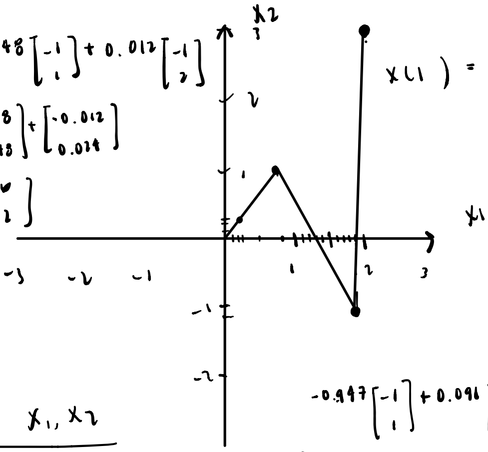
$$x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

c. $\underline{x}(0) = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$x(3) = -0.348 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.012 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.348 \\ -0.348 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.012 \\ 0.024 \end{bmatrix}$$

$$x(3) = \begin{bmatrix} 0.336 \\ 0.372 \end{bmatrix}$$



$$x(1) = -7e^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5e^{-2} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= -2.575 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.676 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.575 \\ -2.575 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.676 \\ 1.352 \end{bmatrix}$$

$$x(1) = \begin{bmatrix} 1.899 \\ -1.223 \end{bmatrix}$$

$$-0.947 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.091 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} 0.947 \\ -0.947 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.091 \\ 0.182 \end{bmatrix}$$

$$x(2) = \begin{bmatrix} 0.937 \\ 1.067 \end{bmatrix}$$

t	x_1, x_2
0	2, 3
1	1.899, -1.223
2	0.937, 1.067
3	0.336, 0.372

d. $e^{\lambda_i t} = 1 + \alpha_0 \lambda_i + \alpha_1 \lambda_i^2$

si $\lambda_i = a_i + j b_i$ con $a_i < 0$ entonces $e^{\lambda_i t} \to 0$ cuando $t \to \infty$

si λ_i es real y negativo entonces $e^{\lambda_i t} \to 0$ cuando $t \to \infty$

describir trayectoria si $x(0) = \alpha m_i$

$$\downarrow$$

$$c_1 x_1$$

cuando la condición inicial es proporcional a uno de los eigenvectores, la trayectoria empieza en $c_1 \underline{x_1}$ y termina en el origen

2. Para el sistema $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

a) Expresar $\boldsymbol{x}(0)$ como una combinación lineal de los vectores propios.

b) Calcular $\boldsymbol{x}(t)$. Expresar la respuesta como una superposición ponderada de los modos, $e^{\lambda_i t}\boldsymbol{m}_i$, del sistema.

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$

$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix}$ $\quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ * linealmente independientes

$$M = [\underline{x}_1 \quad \underline{x}_2 \quad \underline{x}_3] = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -15 & 25 & -10 \\ 0 & 2 & -2 \\ 15 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

$C = M^{-1}\underline{x}(0)$

$\underline{x}(0) \neq 0$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}\underline{x}(0) \\ &= Me^{\Lambda t}M^{-1}x(0) \\ &= Me^{\Lambda t}\{M^{-1}\underline{x}(0)\} \\ &= Me^{\Lambda t}C \end{aligned}$$

donde $e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$

$$Me^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} -1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -14 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{t} & 11e^{-2t} & e^{3t} \\ e^{t} & e^{-2t} & e^{3t} \\ e^{t} & -14e^{-2t} & e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$Me^{\Lambda t}C = \begin{bmatrix} -e^{t} & 11e^{-2t} & e^{3t} \\ e^{t} & e^{-2t} & e^{3t} \\ e^{t} & -14e^{-2t} & e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -c1e^{t} + 11c2e^{-2t} + c3e^{3t} \\ c1e^{t} + c2e^{-2t} + c3e^{3t} \\ c1e^{t} - c2\,14e^{-2t} + c3e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = c1e^{t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c2e^{-2t}\begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix} + c3e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x(0) = c1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c2\begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ -14 \end{bmatrix} + c3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

falta $\begin{bmatrix} c1 \\ c2 \\ c3 \end{bmatrix} = M^{-1}\underline{x}(0) \overset{\text{symbolab}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} -31 \\ 9 \\ -36 \end{bmatrix}$

3. Para el sistema

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u, \ \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \ y = (4 \quad 1)\boldsymbol{x}$$

a) Calcular la solución homogénea y la salida del sistema.

b) Explicar el resultado obtenido aplicando descomposición modal.