EXTENSIONES DE UNA FUENTE DE INFORMACIÓN DE MEMORIA NULA

1. (Cap. 2 – Prob. 9) Sea S_0 la tercera extensión de una fuente binaria de memoria nula con $P(0) = 0.2$ Otra fuente, S, observa las salidas de S_0 y emite un 0,1,2, ó 3 según la salida de S_0 tuvo 0,1,2 ó 3 ceros.

   a) Calcule $H(S_0)$ y $H(S)$.

   b) Calcule $H(S_0)$ - $H(S)$. Interprete el resultado.

2. Considere una fuente discreta de información de memoria nula con alfabeto $S = \{s_1, s_2\}$. $P_1 = P(s_1)$ y $P_2 = P(s_2)$. El alfabeto de la segunda extensión es $s^2 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$ donde $\sigma_1 = s_1 s_1$, $\sigma_2 = s_1 s_2$, $\sigma_3 = s_2 s_1$ y $\sigma_4 = s_2 s_2$. Demostrar: $H(S^2) = 2H(S)$.

HT - 4

1

$$S_1 = \{0, 1\} \qquad P(0) = 0.2 \, , \quad P(1) = 1 - P(0) = 0.8$$

$$S_0 = S_1^3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8\}$$

	i	j	k	$P(\sigma_i)$	$s \in S$
σ_1	0	0	0	0.008	3
σ_2	0	0	1	0.032	2
σ_3	0	1	0	0.032	2
σ_4	0	1	1	0.128	1
σ_5	1	0	0	0.032	2
σ_6	1	0	1	0.128	1
σ_7	1	1	0	0.128	1
σ_8	1	1	1	0.512	0

$$\Rightarrow \quad S = \{0, 1, 2, 3\} \quad P(0) = \frac{64}{125} \, , \; P(1) = \frac{48}{125}$$

$$P(2) = \frac{12}{125} \, , \; P(3) = \frac{1}{125}$$

a) $$H(S_0) = 3\,H(S_1) = 3\left[0.2 \log\left(\frac{1}{0.2}\right) + 0.8 \log\left(\frac{1}{0.8}\right)\right] = \underline{2.1658}$$

$$H(S) = \frac{64}{125}\log\left(\frac{125}{64}\right) + \frac{48}{125}\log\left(\frac{125}{48}\right) + \frac{12}{125}\log\left(\frac{125}{12}\right) + \frac{1}{125}\log(125) = 1.4050$$

b) $$H(S_0) - H(S) = \underline{0.7608}$$

Interpretacion:

Como H(S1) - H(S) > 0, significa que la cantidad media de información por simbolo de la fuente extendida S1 es mayor a la cantidad media de información por simbolo de la fuente S

2 $S = \{s_1, s_2\}$ $\quad P_1 = P(s_1)$, $\quad P_2 = P(s_2)$

$S^2 = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$

	i	j
σ_1	0	0
σ_2	0	1
σ_3	1	0
σ_4	1	1

$$P(\sigma_i) = \prod_{j=1}^{q} P_{ij}$$

Como es una fuente de memoria nula, es decir cada símbolo del alfabeto es un evento independiente, la probabilidad de una secuencia de eventos, es la multiplicación de cada probabilidad de cada evento.

Demostración:

$$H(S^n) = n H(S)$$

$$\sum_{S^n} \sigma_i \log\left(\frac{1}{P(\sigma_i)}\right) = n \sum_{S} P_i \log\left(\frac{1}{P_i}\right)$$

Para n=2:

$$= \sigma_1 \log\left(\frac{1}{P(\sigma_1)}\right) + \sigma_2 \log\left(\frac{1}{P(\sigma_2)}\right) + \sigma_3 \log\left(\frac{1}{P(\sigma_3)}\right) + \sigma_4 \log\left(\frac{1}{P(\sigma_4)}\right)$$

$$= P_1P_1 \log\left(\frac{1}{P_1P_1}\right) + P_1P_2 \log\left(\frac{1}{P_1P_2}\right) + P_2P_1 \log\left(\frac{1}{P_2P_1}\right) + P_2P_2 \log\left(\frac{1}{P_2P_2}\right)$$

$$= P_1P_1\left[\log\left(\frac{1}{P_1}\right) + \log\left(\frac{1}{P_1}\right)\right] + P_1P_2\left[\log\left(\frac{1}{P_1}\right) + \log\left(\frac{1}{P_2}\right)\right] + P_2P_1\left[\log\left(\frac{1}{P_2}\right) + \log\left(\frac{1}{P_1}\right)\right] + P_2P_2\left[\log\left(\frac{1}{P_2}\right) + \log\left(\frac{1}{P_2}\right)\right]$$

$$= \log\left(\frac{1}{P_1}\right)\left[P_1P_1 + P_1P_1 + P_1P_2 + P_2P_1\right] + \log\left(\frac{1}{P_2}\right)\left[P_1P_2 + P_2P_1 + P_2P_2 + P_2P_2\right]$$

$$= \log\left(\frac{1}{P_1}\right)\left[P_1\underbrace{(P_1 + P_1 + P_2 + P_2)}_{2}\right] + \log\left(\frac{1}{P_2}\right)\left[P_2\underbrace{(P_1 + P_1 + P_2 + P_2)}_{2}\right]$$

$$= 2P_1 \log\left(\frac{1}{P_1}\right) + 2P_2 \log\left(\frac{1}{P_2}\right)$$

$$= 2\left[P_1 \log\left(\frac{1}{P_1}\right) + P_2 \log\left(\frac{1}{P_2}\right)\right]$$

$$= 2\sum_{S} P_i \log\left(\frac{1}{P_i}\right) = 2H(S)$$