FUENTES DISCRETAS DE INFORMACIÓN DE MEMORIA NULA

1. (Cap. 1 – Prob. 1) En la sección 1.4 se definieron dos códigos, $A$ y $B$, utilizados en la transmisión del estado del tiempo en Los Angeles. La longitud media del código $A$ fue de dos binits por mensaje, y la del código $B$, 17/8 binits por mensaje. La menor longitud media posible de un código para el problema de la tabla 1-5 es de 7/4 binits por mensaje:

| Mensajes | Probabilidades |
|---|---|
| Asoleado | 1/4 |
| Nublado | 1/8 |
| Lluvioso | 1/8 |
| Brumoso | 1/2 |

   Intente encontrar un código que tenga una longitud media igual a 7/4 binits por mensaje.

2. (Cap. 2 – Prob. 3a) Dos fuentes de memoria nula, $S_1$ y $S_2$, tienen $q_1$ y $q_2$ símbolos, respectivamente. Los símbolos de $S_1$ se representan con probabilidades $P_i$, $i = 1,2, \dots, q_1$; los de $S_2$ con $Q_i$, $i = 1,2, \dots, q_2$; las entropías de ambas son $H_1$ y $H_2$, respectivamente. Una nueva fuente de memoria nula $S(\lambda)$, denominada compuesta de $S_1$ y $S_2$ está formada con $q_1 + q_2$ símbolos. Los $q_1$ primeros símbolos de $S(\lambda)$ tienen probabilidades $\lambda P_i$, $i = 1,2, \dots, q_1$, y los últimos $q_2$ probabilidades $\bar{\lambda} Q_i$, $i = 1,2, \dots, q_2$. $(\bar{\lambda} = 1 - \lambda)$.

   Demostrar: $H[S(\lambda)] = \lambda H_1 + \bar{\lambda} H_2 + H(\lambda)$. Interprete esta igualdad.

3. (Cap. 2 – Prob. 14) Sea $S$ una fuente de memoria nula, de alfabeto $S = \{s_i\}$, $i = 1,2, \dots, q$ cuyos símbolos tienen probabilidades $P_1, P_2, \dots, P_q$. Crear una nueva fuente de memoria nula, $S'$, de doble número de símbolos, $S' = \{s_i'\}$, $i = 1,2, \dots ,2q$ con símbolos de probabilidades definidas por $P_i' = (1 - \varepsilon) P_i$, $i = 1,2, \dots, q$ y $P_i' = \varepsilon P_{i-q}$, $i = q + 1, q + 2, \dots ,2q$.

   Expresar $H(S')$ en función de $H(S)$.

# HT - 2

2. Demostración:

$$H_1 = H(S_1) = \sum_{S_1} P_i \log\left(\frac{1}{P_i}\right) \quad y \quad H_2 = H(S_2) = \sum_{S_2} Q_i \log\left(\frac{1}{Q_i}\right)$$

$$S(\lambda) = \{x_1, x_2, \dots, x_{q_1+q_2}\}$$

$$\Rightarrow \underset{i=1,2,\dots,q_1}{P(x_i) = \lambda P_i} \quad y \quad \underset{i=q_1+1,\, q_1+2,\, \dots,\, q_1+q_2}{P(x_i) = \bar{\lambda} Q_{i-q_1}} \quad \Rightarrow \quad H[S(\lambda)] = \sum_{S'} P(x_i) \log\left(\frac{1}{P(x_i)}\right)$$

$$H[S(\lambda)] = \sum_{i=1}^{q_1} \lambda P_i \log\left(\frac{1}{\lambda P_i}\right) + \sum_{i=1}^{q_2} \bar{\lambda} Q_i \log\left(\frac{1}{\bar{\lambda} Q_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{q_1} \lambda P_i \left[\log\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \log\left(\frac{1}{P_i}\right)\right] + \sum_{i=1}^{q_2} \bar{\lambda} Q_i \left[\log\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right) + \log\left(\frac{1}{Q_i}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{q_1} \lambda P_i \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \sum_{i=1}^{q_1} \lambda P_i \log\left(\frac{1}{P_i}\right) + \sum_{i=1}^{q_2} \bar{\lambda} Q_i \log\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right) + \sum_{i=1}^{q_2} \bar{\lambda} Q_i \log\left(\frac{1}{Q_i}\right)$$

$$= \lambda \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) \sum_{i=1}^{q_1} P_i + \lambda \sum_{i=1}^{q_1} P_i \log\left(\frac{1}{P_i}\right) + \bar{\lambda} \log\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right) \sum_{i=1}^{q_2} Q_i + \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{q_2} Q_i \log\left(\frac{1}{Q_i}\right)$$

$$= \lambda \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \lambda H_1 + \bar{\lambda} \log\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right) + \bar{\lambda} H_2$$

$$H[S(\lambda)] = \lambda H_1 + \bar{\lambda} H_2 + \underbrace{\lambda \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \bar{\lambda} \log\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right)}_{H(\lambda)}$$

$$\underline{H[S(\lambda)] = \lambda H_1 + \bar{\lambda} H_2 + H(\lambda)}$$

Interpretación: Como S(lambda) está compuesto por los alfabetos S1 y S2, y las probabilidades de cada símbolo de S1 estan ponderadas por lambda y las de S2 por (1-lambda), la entropía de S(lambda) viene dada por la suma ponderada de H1 con lambda, H2 con (1-lambda) y la contribución de información media producida por lambda.

3. Demostración:

$$H(S) = \sum_{S} P_i \log\left(\frac{1}{P_i}\right) \qquad \varepsilon \in \mathbb{R} \quad y \quad \bar{\varepsilon} = 1-\varepsilon$$

$$S' = \{x_1, x_2, \dots, x_q, x_{q+1}, x_{q+2}, \dots, x_{2q}\}$$

$$\Rightarrow \quad \underset{i=1,2,\dots,q}{P(x_i) = \bar{\varepsilon} P_i} \quad y \quad \underset{i=q+1,q+2,\dots,2q}{P(x_i) = \varepsilon P_{i-q}} \quad \Rightarrow \quad H(S') = \sum_{S'} P(x_i) \log\left(\frac{1}{P(x_i)}\right)$$

$$H(S') = \sum_{i=1}^{q} \bar{\varepsilon} P_i \log\left(\frac{1}{\bar{\varepsilon} P_i}\right) + \sum_{i=1}^{q} \varepsilon P_i \log\left(\frac{1}{\varepsilon P_i}\right)$$

$$H(S') = \sum_{i=1}^{q} \bar{\varepsilon} P_i \left[\log\left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\right) + \log\left(\frac{1}{P_i}\right)\right] + \sum_{i=1}^{q} \varepsilon P_i \left[\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \log\left(\frac{1}{P_i}\right)\right]$$

$$H(S') = \bar{\varepsilon} \log\left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\right) \sum_{i=1}^{q} P_i + \bar{\varepsilon} \sum_{i=1}^{q} P_i \log\left(\frac{1}{P_i}\right) + \varepsilon \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \sum_{i=1}^{q} P_i + \varepsilon \sum_{i=1}^{q} P_i \log\left(\frac{1}{P_i}\right)$$

$$H(S') = \bar{\varepsilon} \log\left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\right) + \bar{\varepsilon} H(S) + \varepsilon \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon H(S)$$

$$H(S') = \bar{\varepsilon} H(S) + \varepsilon H(S) + \bar{\varepsilon} \log\left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\right) + \varepsilon \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$H(S') = (1-\varepsilon) H(S) + \varepsilon H(S) + \bar{\varepsilon} \log\left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\right) + \varepsilon \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$H(S') = H(S)[1-\varepsilon+\varepsilon] + \bar{\varepsilon} \log\left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\right) + \varepsilon \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

$$H(S') = \underline{\underline{H(S) + \bar{\varepsilon} \log\left(\frac{1}{\bar{\varepsilon}}\right) + \varepsilon \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}}$$