Inés Alarcón
16008450

Hoja de trabajo No. 12

1. Para el sistema representado en el espacio de estados

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B} \underbrace{e^{-t}}_{U \text{ transformar.}}, \quad t \geq 0, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y = (1 \quad 3)\boldsymbol{x}$$

   a) Resolver las ecuaciones de estado por transformación de Laplace.

   b) Calcular $y(t)$.

   c) Encontrar los valores propios del sistema.

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -2 \\ 3 & s+5 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \begin{bmatrix} s+5 & 2 \\ -3 & s \end{bmatrix}$$

$$BU(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} [X(0) + BU(s)] = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \cdot \begin{bmatrix} 2(s^2 + 7s + 7) \\ s^2 - 4s - 6 \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = [1 \quad 3] X(s) = \frac{5s^2 + 2s - 4}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{-0.5}{s+1} - \frac{12}{s+2} + \frac{17.5}{s+3}$$

$$y(t) = -0.5e^{t} - 12e^{-2t} + 17.5e^{-3t}$$

c. $\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = -3.$

2. Para el sistema representado en el espacio de estados

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \underbrace{e^{-t}}_{u}, \quad t \geq 0, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0},$$

transformar

$$y = (0 \quad 0 \quad 1)\boldsymbol{x}$$

a) Resolver las ecuaciones de estado por transformación de Laplace.

b) Calcular $y(t)$.

c) Encontrar los valores propios del sistema.

$$X = (sI - A)^{-1} (x_0 + BU)$$

$$= \left(s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \right)^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{s+1} \right)$$

procedimiento.

$$Y(s) = [0 \quad 0 \quad 1] \, x$$

$$= \frac{s^2 + 4s + 2}{(s+6)(s+1)(s+0.58)(s+3.41)}$$

3. Demostrar: Los valores propios de un sistema (representado en el espacio de estados) con una entrada y una salida son iguales a los polos del sistema.

$$\underline{x}(s) = (sI - A)^{-1}\underline{x}(0) + (sI - A)^{-1} B\underline{u}(s)$$

$$Y(s) = C\underline{x}(s) + D\underline{w}(s)$$

→ con $D = 0$:

$$Y(s) = \frac{C \operatorname{adj}(sI - A)[\underline{x}(0) + B\underline{w}(s)]}{\det(sI - A)}$$

si $\underline{x}(0) = 0$ entonces

$$Y(s) = \frac{C \operatorname{adj}(sI - A) B\underline{w}(s)}{\det(sI - A)}$$

si el sistema tiene una entrada y salida entonces

$$Y(s) = \frac{C \operatorname{adj}(sI - A) B\underline{w}(s)}{\det(sI - A)}$$

La función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{C \operatorname{adj}(sI - A) B}{\det(sI - A)}$$

$Y(s)$ tiene como denominador $\det(sI - A)$. Los eigenvalores se encuentran resolviendo $\det(sI - A) = 0$.

$G(s)$ tiene como denominador $\det(sI - A)$. Los polos de un sistema (lineal e invariante) se encuentran igualando el polinomio característico del sistema a "0" y resolviendo la ecuación resultante. (ecuación característica del sistema). El polinomio característico es $\det(sI - A)$, los polos se encuentran resolviendo $\det(sI - A) = 0$.