**Departamento de Matemática Aplicada**
**Matemática VI – FISICC**
**Desarrollo de Semi-Intervalo**

# Hoja de Trabajo No. 3- Solución

**Instrucciones:**

- Resuelva cada una de las cuestiones que se le presentan a continuación dejando constancia de todo procedimiento y razonamiento hecho.
- Favor de entregar su trabajo en hojas debidamente identificadas.
- Entregue su solución a través del GES, en un archivo en formato PDF.

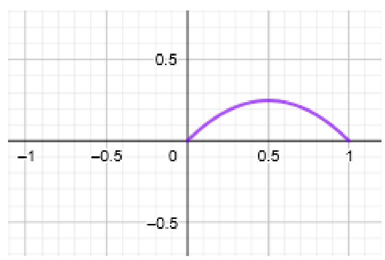
---

**Problema 1**
Considere la función:

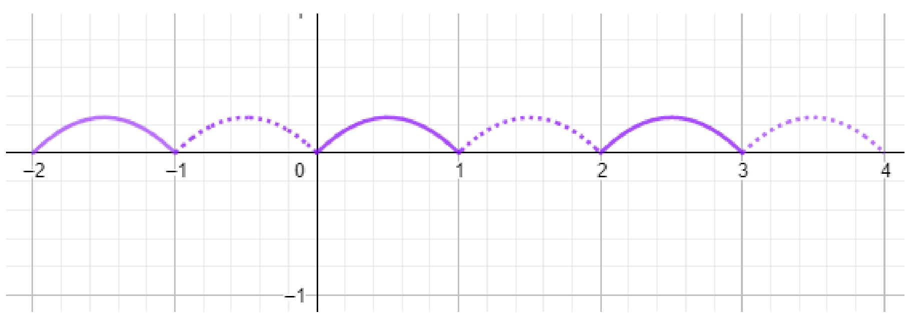
$$f(t) = t - t^2 \quad 0 < t < 1$$

definida en $(0, 1)$.

1. Esboce la gráfica de la función.




2. Construya la extensión par de la función $f_{even}$ y dibuje su gráfica.




3. Calcule la serie de Fourier de $f_{even}$.
   Extensión par: serie de cosenos

$$a_0 = \int_0^1 (t - t^2)\, dt = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$a_n = 2\int_0^1 (t - t^2)\cos(n\pi t)\, dt = 2\int_0^1 t\cos(n\pi t)\, dt - 2\int_0^1 t^2\cos(n\pi t)\, dt$$

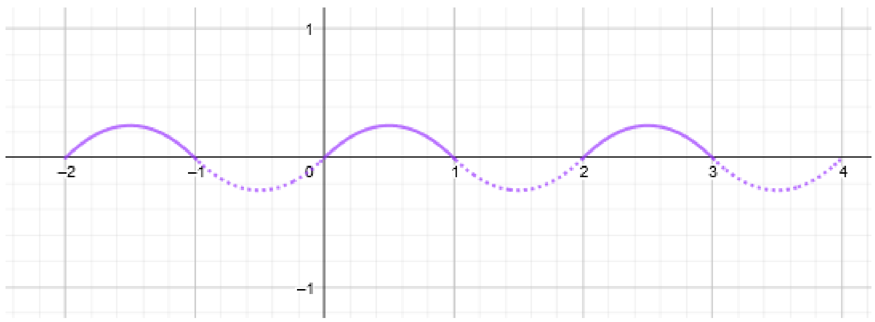
$$= 2\left[\frac{t\sin(n\pi t)}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi t)}{n^2\pi}\right]\Bigg|_0^1 - 2\left[\frac{t\sin(n\pi t)}{n\pi} - 2\left(\frac{-t\cos(n\pi t)}{n^2\pi} + \frac{\sin(n\pi t)}{n^3\pi}\right)\right]\Bigg|_0^1$$

$$= 2\left[\frac{\sin(n\pi)}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi)}{n^2\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\right] - 2\left[\frac{\sin(n\pi)}{n\pi} - 2\left(\frac{-\cos(n\pi)}{n^2\pi} + \frac{\sin(n\pi)}{n^3\pi}\right)\right]$$

$$= -2\frac{\cos(n\pi)}{n^2\pi} - \frac{2}{n^2\pi} + 4\frac{\sin(n\pi)}{n^3\pi}$$

$$f(t) = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-2\frac{(-1)^n}{n^2\pi} - \frac{2}{n^2\pi} + 4\frac{\sin(n\pi)}{n^3\pi}\right]\cos(n\pi t)$$

4. Dibuje la gráfica la extinción impar de $f$ y calcule su serie de senos.




Extensión impar: serie de senos.

$$b_n = 2\int_0^1 (t - t^2)\sin(n\pi t)\,dt = 2\int_0^1 t\sin(n\pi t)\,dt - 2\int_0^1 t^2\sin(n\pi t)\,dt$$

$$= 2\left[\frac{-t\cos(n\pi t)}{n\pi} + \frac{\sin(n\pi t)}{n^2\pi}\right]\Bigg|_0^1 - 2\left[\frac{-t^2\cos(n\pi t)}{n\pi} + 2\left(\frac{t\sin(n\pi t)}{n^2\pi} + \frac{\cos(n\pi t)}{n^3\pi}\right)\right]\Bigg|_0^1$$

$$= 2\left[\frac{-\cos(n\pi)}{n\pi} + \frac{\sin(n\pi)}{n^2\pi}\right] - 2\left[\frac{-\cos(n\pi)}{n\pi} + 2\left(\frac{\sin(n\pi)}{n^2\pi} + \frac{\cos(n\pi)}{n^3\pi}\right) - \frac{2}{n^3\pi}\right]$$

$$= -2\frac{\sin(n\pi)}{n^2\pi} - 4\frac{\cos(n\pi)}{n^3\pi} + \frac{4}{n^3\pi}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-2\frac{\sin(n\pi)}{n^2\pi} - 4\frac{(-1)^n}{n^3\pi} + \frac{4}{n^3\pi}\right]\sin(n\pi t)$$

**Problema 2**
Considere un circuito $LC$ con función de entrada:

$$f(t) = 1 - |t| \quad -1 < t < 1 \qquad f(t+2) = f(t).$$

Encuentre la solución al estado estable para $q(t)$.
$f(t)$ es una función par por lo que su serie de Fourier es una serie de cosenos:

$$a_0 = 2\int_0^1 (1-|t|)\,dt = 2\left[t - \frac{t|t|}{2}\right]\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$a_n = 2\int_0^1 (1-|t|)\cos(n\pi t)\,dt = 2\int_0^1 \cos(n\pi t)\,dt - 2int_0^1 t\cos(n\pi t)\,dt$$

$$= 2\left[\frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\right]\Big|_0^1 - 2\left[\frac{t\sin(n\pi t)}{n\pi} + \frac{cos(n\pi t)}{n^2\pi}\right]\Big|_0^1$$

$$= 2\left[\frac{\sin(n\pi)}{n\pi}\right] - 2\left[\frac{\sin(n\pi)}{n\pi} + \frac{cos(n\pi)}{n^2\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\right]$$

$$= \frac{2(-1)^n}{n^2\pi} - \frac{2}{n^2\pi}$$

$$\hat{f}(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n - 2}{n^2\pi}\right]\cos(n\pi t)$$

Necesitamos encontrar una solución particular para la ecuación diferencial:

$$Lq'' + \frac{1}{C}q = \hat{f}(t) \to q'' + \frac{q}{LC} = \frac{\hat{f}(t)}{L}$$

Supongamos que,

$$q = A + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\pi t)$$

Derivando,

$$q' = \sum_{n=1}^{\infty} -A_n n\pi\sin(n\pi t)$$

$$q'' = \sum_{n=1}^{\infty} -A_n n^2\pi^2\cos(n\pi t)$$

Sustituyendo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} -A_n n^2\pi^2\cos(n\pi t) + \frac{1}{LC}\left[A + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\pi t)\right] = \frac{1}{L}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n - 2}{n^2\pi}\right]\cos(n\pi t)\right]$$

De donde,

$$-A_n n^2\pi^2 + \frac{A_n}{LC} = \frac{2(-1)^n - 2}{Ln^2\pi}$$

$$A_n\left(-n^2\pi^2 + \frac{1}{LC}\right) = \frac{2(-1)^n - 2}{Ln^2\pi}$$

$$A_n = \frac{\dfrac{2(-1)^n - 2}{Ln^2\pi}}{-n^2\pi^2 + \dfrac{1}{LC}} = \frac{2(-1)^n - 2}{(Ln^2\pi)\left(-n^2\pi^2 + \dfrac{1}{LC}\right)} = \frac{2(-1)^n - 2}{Ln^4\pi^4 + \frac{n^2\pi^2}{C}}$$

Para $A$ igualamos los términos independientes:

$$\frac{A}{LC} = \frac{1}{L}$$

$$\frac{A}{C} = 1$$

$$A = C$$

$$\therefore q(t) = C + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n - 2}{Ln^4\pi^4 + \frac{n^2\pi^2}{C}}\right]\cos(n\pi t)$$

**Problema 3**

Encuentre la solución general de la ecuación de calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sujeta a:

$$u(x,0) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0.$$

Tenemos que $u(x,t) = M(x)N(t)$ entonces,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M(x)N'(t) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = M''(x)N(t)$$

$$M(x)N'(t) = kM''(x)N(t)$$

Dividiendo dentro de $M(x)N(t)$,

$$\frac{M(x)N'(t)}{M(x)N(t)} = k\frac{M''(x)N(t)}{M(x)N(t)}$$

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = k\frac{M''(x)}{M(x)} = \lambda$$

$$M''(x) - \lambda M(x) = 0 \qquad N'(t) = k\lambda N(t)$$

Vamos a considerar los siguientes casos:

- $\lambda = 0$

$$M''(x) = 0$$
$$M'(x) = A_1$$
$$M(x) = A_1 x + A_2$$

Tenemos las siguientes condiciones iniciales:

$$u(x,0) = M(x)N(0) = f(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = M(0)N'(t) = 0 \Rightarrow M(0) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = M'(L)N(t) = 0 \Rightarrow M'(L) = 0$$

De donde,

$$M(0) = A_1(0) + A_2 = 0 \Rightarrow B = 0$$
$$M'(L) = A_1 = 0$$

Como $A_1 = A_2 = 0$, entonces $M(x) = 0$.
Pero $u(x,0) = M(x)N(0) \neq 0$ por lo que este caso no es posible.

- $\lambda = \omega^2 > 0$

$$M''(x) - \omega^2 M(x) = 0$$
$$M(x) = A_1 e^{\omega x} + A_2 e^{-\omega x}$$
$$M(0) = A_1 + A_2 = 0$$
$$M'(L) = A_1 \omega e^{\omega L} - A_2 \omega e^{-\omega L} = 0$$

Resolviendo el sistema por Regla de Cramer:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega e^{\omega L} & -\omega e^{-\omega L} \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\omega e^{-\omega L} \end{pmatrix}$$

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\omega e^{-\omega L} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \omega e^{\omega L} & -\omega e^{-\omega L} \end{vmatrix}} = \frac{0}{-\omega e^{-\omega L} - \omega e^{\omega L}} = 0$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega e^{\omega L} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \frac{M = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \omega e^{\omega L} & 0 \end{vmatrix}}{M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \omega e^{\omega L} & -\omega e^{-\omega L} \end{vmatrix}} = \frac{0}{-\omega e^{-\omega L} - \omega e^{\omega L}} = 0$$

Como $A_1 = A_2 = 0$, entonces $M(x) = 0$.
Pero $u(x,0) = M(x)N(0) \neq 0$ por lo que este caso tampoco es posible.

- $\lambda = -\omega^2 < 0$

$$M''(x) + \omega^2 M(x) = 0$$
$$M(x) = A_1\cos(\omega x) + A_2\sin(\omega x)$$
$$M(0) = A_1\cos(0) + A_2\sin(\omega x)$$
$$M(0) = A_1\cos(0) + \cancel{A_2\sin(\omega x)}^{\,0}$$
$$0 = A_1\cos(0) \Rightarrow A_1 = 0$$
$$M(x) = A_2\sin(\omega x)$$
$$M'(x) = A_2\omega\cos(\omega x)$$
$$M'(L) = A_2\omega\cos(L\omega) = 0$$
$$\Rightarrow \cos(L\omega) = 0 \Rightarrow L\omega = \frac{n\pi}{2} \Rightarrow \omega = \frac{n\pi}{2L} \qquad n = 1, 2, 3\cdots$$

Como existe una solución para cada $n$ tenemos una solución de la forma:

$$M_n(x) = A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)$$

Resolviendo para $N(t)$:

$$N'(t) = k\lambda N(t)$$

Por separación de variables,

$$\frac{dN}{dt} = k\lambda N \Rightarrow \int\frac{dN}{N} = k\lambda\int dt$$
$$N(t) = Be^{k\lambda t}$$

Sustituimos $\lambda = -\omega^2 = -\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2$

$$N(t) = Be^{-k\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 t}$$

Como existe una solución para cada $n$, tenemos:

$$N_n(t) = B_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 t}$$

Así, $u(x,t)$ tiene infinitas soluciones,

$$u_n(x,t) = M_n(x)N_n(t) = A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)B_n e^{-k\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 t} = C_n\sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)e^{-k\left(\frac{n\pi}{2L}\right)^2 t}$$

Por las condiciones iniciales, $u(x,0) = f(x)$,

$$u(x,0) = C_n\sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)\cancel{e^0}^{\,1} = f(x)$$

Por lo que la solución general de la ecuación de calor es cualquier combinación lineal de $u$, es decir,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)$$

**Problema 4** (Python)
Construya un procedimiento para construir la extensión periódica impar para una función $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ y calcular su serie de senos hasta $N$ términos. Reciba como entrada $f, L, N$.

```python

#Importamos todo el modulo sympy
from sympy import *
#importamos las variables simbolicas 'n' y 't'
from sympy.abc import t, n


def Fourier(funcion,L,N):
#Coeficiente a_0
ao = integrate(funcion, (t, 0, L))
print("a0 = ")
pprint(ao)

#Coeficiente a_n
an = integrate((funcion) * cos(2 * n * t), (t, 0, L))
print("an = ")
pprint(an)

#Coeficiente b_n
bn = together(integrate((funcion) * sin(2 * n * t), (t, 0, L)))
print("bn = ")
pprint(bn)


#Obtenemos la serie
print("f(x) = ")
serie = (ao/2)
for i in range(1, N + 1):
serie = serie + (an*cos(2*n*t)).subs(n, i)
for j in range(1, N + 1):
serie = serie + (bn*sin(2*n*t)).subs(n, j)

pprint(serie)

Fourier(t+1,pi/2,7)
```