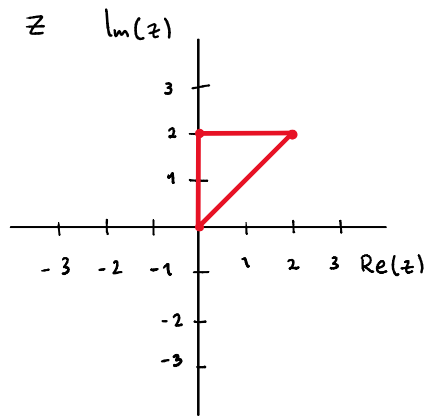
# 1 Ges

viernes, 19 de febrero de 2021 11:20

16003303 - Darwin Galicia
Matemática VII

1. Ver en el GES los videos en la Pestaña de *Material Virtual de Apoyo* del Tema 4: Introducción a Mapeos. En base a ello, determinar la imagen del triángulo con vértices en 0, $2+2i$ y $2i$ por cada uno de los siguientes mapeos:

   a) $f(z) = z + 1$
   b) $g(z) = 3z$
   c) $h(z) = z - 3i$
   d) $t(z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z$

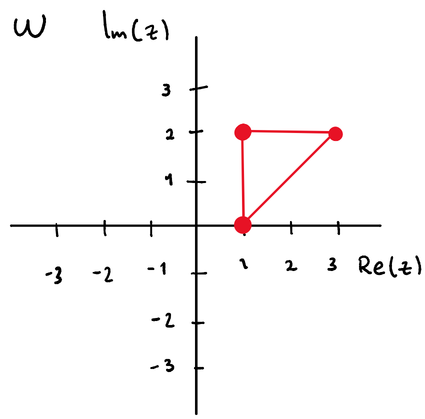



a) $f(z) = z + 1$

$f(0) = 0 + 1 = 1$

$f(2+2i) = 2 + 2i + 1 = 3 + 2i$

$f(2i) = 1 + 2i$

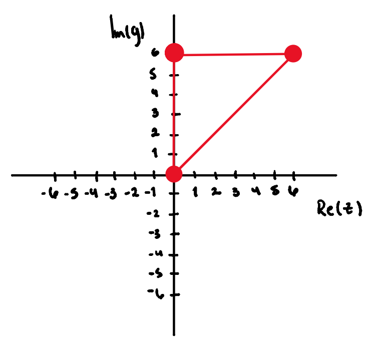



b) $g(z) = 3z$

$g(0) = 0$

$g(2+2i) = 3(2+2i) = 6 + 6i$

$g(2i) = 3(2i) = 6i$

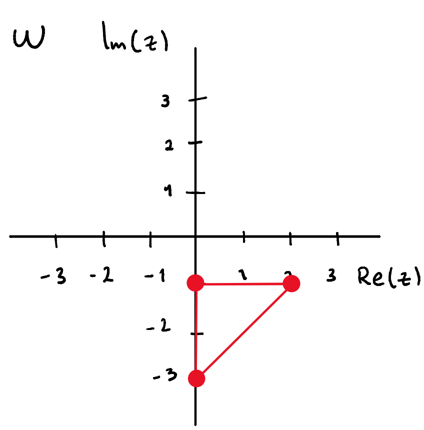



c) $h(z) = z - 3i$

$h(0) = 0 - 3i = -3i$

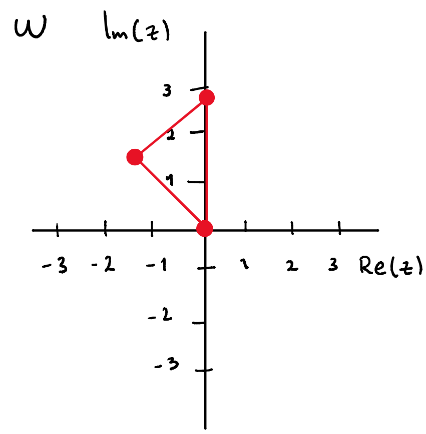
$h(2+2i) = 2 + 2i - 3i = 2 - i$

$h(2i) = 2i - 3i = -i$



d) $t(z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) z$

$t(0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) 0 = 0$




$t(2+2i) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)(2+2i)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}(2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(2i) + \frac{\sqrt{2}}{2} i (2) + \frac{\sqrt{2}\, i}{\cancel{2}}(\cancel{2} i)$

$\cancel{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\, i + \sqrt{2}\, i - \cancel{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\, i$

$t(2i) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)(2i)$

$= \sqrt{2}\, i - \sqrt{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$

2. Ver en el GES los videos en la Pestaña de *Material Virtual de Apoyo* del Tema 5: Límites y Continuidad. En base a ello, determinar el siguiente límite:

$$\lim_{z \to 2i} 3iz^2 - z + i.$$

Además demuestre que $f(z) = z^2$ es continua en $i$.

$\lim\limits_{z \to 2i} 3iz^2 - z + i$

$\lim\limits_{z \to 2i} 3i(2i)^2 - (2i) + i$

$\lim\limits_{z \to 2i} 3i(-4) - (2i) + i$

$\lim\limits_{z \to 2i} -12i - 2i + i = -13i$

$f(z) = z^2$

$f'(z) = 2z \quad \therefore \exists f'$ para todo $z$

Como es derivable entonces es continua.

3. Demuestre que la función $f(z) = \sin z$ es holomorfa en $C$ y determine su derivada.

- $\text{sen}(z) = \text{sen}(x+iy)$
- $\text{sen}(z+w) = \text{sen}(z)\cos(w) + \cos(z)\,\text{sen}(w)$

$\text{sen}(x+iy) = \text{sen}(x)\cos(iy) + \cos(x)\,\text{sen}(iy)$

$$\operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen}(x)\cos(iy) + \cos(x)\operatorname{sen}(iy)$$

$$\operatorname{sen}(x)\left[\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\right] + \cos(x)\left[\frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}\cdot\frac{i}{i}\right]$$

$$\operatorname{sen}(x)\left[\frac{e^{-y}+e^{y}}{2}\right] + \cos(x)\left[-i\cdot\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}\right] =$$

$$\operatorname{sen}(x)\left[\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right] + i\cos(x)\left[\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right]$$

$$\underbrace{\operatorname{sen}(x)\cosh(y)}_{u} + \underbrace{i\cos(x)\operatorname{senh}(y)}_{v}$$

$$u_x = \cos(x)\cosh(y) \qquad v_x = -\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)$$

$$u_y = \operatorname{sen}(x)\sinh(y) \qquad v_y = \cos(x)\cosh(y)$$

Como $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ y son continuas, entonces $\operatorname{sen}(z)$ holomorfa en $\mathbb{C}$ //

Como $f(z) = \operatorname{sen}(z)$ es holomorfa, entonces

$$f'(z) = u_x(x,y) + i v_x(x,y)$$

$$f'(z) = \cos(x)\cosh(y) - i\operatorname{sen}(x)\operatorname{senh}(y)$$

$$= \cos(x+iy)$$

$$f'(z) = \cos(z) \text{ //}$$

4. Demuestre que la función $f(z) = \overline{e^{z}}$ no es holomorfa en ninguna parte.

$$e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}e^{iy} = e^{x}[\cos(y) + i\operatorname{sen}(y)]$$

$$= e^{x}\cos(y) + i\, e^{x}\operatorname{sen}(y)$$

$$\overline{e^{z}} = \underbrace{e^{x}\cos(y)}_{u} - \underbrace{i\, e^{x}\operatorname{sen}(y)}_{v}$$

$$u_x = e^{x}\cos(y) \qquad v_x = -e^{x}\operatorname{sen}(y)$$

$u_y = -e^x \sin(y)$ $\qquad$ $v_y = -e^x \cos(y)$

$u_x = v_y$ ✗ $\quad$ No se cumplen las ec. de C-R por lo tanto no se cumple en ninguna parte.

$u_y = -v_x$