PROBABILIDAD DE VARIABLES DISCRETAS - 1

1. Considere el experimento de tirar un dado. Defina el evento A como A = {1,2} (la ocurrencia de 1 o 2). Defina B como el evento de obtener un número par. B = {2,4,6}. Encuentre P(A|B) y P(B|A).

2. Considere un carusel con seis compartimientos. Cada compartimiento contiene los resistores que se muestran en la tabla.

	Número de Compartimiento					
Ohms	1	2	3	4	5	6
10Ω	500	0	200	800	1200	1000
100Ω	300	400	600	200	800	0
1000Ω	200	600	200	600	0	1000

a) Si se selecciona aleatoriamente un compartimiento y se toma un resistor, cuál es la probabilidad de haber escogido un resistor de 10Ω? R: 0.3833

b) Suponga que al seleccionar aleatoriamente un resistor del carusel, este resulta ser de 10Ω. Cuál es la probabilidad de que el resistor haya estado en el compartimiento #3? Ayuda: utilice el teorema de Bayes.

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}, \quad \text{R: } 0.0869$$

3. Una fuente binaria produce ceros y unos independientemente con probabilidades P(0) = 0.2 y P(1) = 0.8 Los dígitos binarios son transmitidos a través de un canal que reproduce un cero en la salida con probabilidad 0.9 y produce un cero erróneamente con probabilidad 0.2 Es decir, P(0|0) = 0.9 y P(0|1) = 0.2

a) Encuentre P(1|0) y P(1|1). R: 0.1, 0.8

b) Encuentre la probabilidad que se produzca un cero en la salida del canal. R: 0.34

c) Si se produce un uno en la salida del canal, calcule la probabilidad de que un cero haya sido transmitido.
R: 0.0303

HT - 1

1 Por definición de probabilidad condicionada:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

a) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\{2\})}{P(\{2,4,6\})} = \frac{1/6}{3/6} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

b) $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(\{2\})}{P(\{1,2\})} = \frac{1/6}{2/6} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

2 Por teorema de probabilidad total:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{m} P(B|A_i)P(A_i)$$

a) $P(A_i) = \frac{1}{6}$ → Todos los compartimientos tienen la misma prob. de ocurrir

Si $B = 10\,\Omega$ y $m = 6$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{6} P(B|A_i)P(A_i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1} P(B|A_i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)}$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{500}{1000} + \frac{0}{1000} + \frac{200}{1000} + \frac{800}{1600} + \frac{1200}{2000} + \frac{1000}{2000}\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{6}{10} + \frac{1}{2}\right] = \frac{23}{60} = \underline{\underline{0.3833}}$$

b) Por teorema de bayes:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

Compartimiento 3 seleccionado

$A_i = \{3\}$ $\quad B = 10\,\Omega$

Que haya sido seleccionado 1 resistor de 10 ohmios

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{(200/1000)(1/6)}{(23/60)} = \frac{(1/30)}{(23/60)} = \frac{2}{23} = \underline{\underline{0.0869}}$$

Probabilidad total de que sea un resistor de 10 ohmios

3 $\quad$ 0 y 1 Eventos independientes $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Reproduce $\quad$ Produce

a) $P(0) = 0.2 \quad P(1) = 0.8 \quad P(0|0) = 0.9 \quad P(0|1) = 0.2$

Reproduce $\quad$ Produce $\quad$ Reproducir 0 correctamente

$$P(1|0) = \frac{P(1 \cap 0)}{P(0)} = \frac{P(1)P(0)}{P(0)} = P(1) = 1 - P(0) = \underline{\underline{0.1}}$$

Produce $\quad$ Reproducir 0 incorrectamente

$$P(1|1) = \frac{P(1 \cap 1)}{P(1)} = \frac{P(1)P(1)}{P(1)} = P(1) = 1 - P(0) = \underline{\underline{0.8}}$$

Probabilidad total de que se reproduzca un 0

b) $P(0) = P(0|0)P(0) + P(0|1)P(1)$

Reproduce $\quad$ Produce

$$= (0.9)(0.2) + (0.2)(0.8) = \frac{17}{50} = \underline{\underline{0.34}}$$

Produce $\quad$ Reproduce $\quad$ Reproduce $\quad$ Produce $\quad$ Produce

c) $P(0|1) = \dfrac{P(1|0)P(0)}{P(1)}$

Probabilidad total de reproducir un 1

$$= \frac{P(1|0)P(0)}{(1 - P(0))} = \frac{(0.1)(0.2)}{(1 - 0.34)} = \frac{(0.1)(0.2)}{(0.66)} = \frac{1}{33} = \underline{\underline{0.0303}}$$

Probabilidad total de reproducir un 0