Parcial 1

Harim Palma
18001882 AN

Problema 1

$$\left(\frac{-8+9i}{-2+i} + \frac{3+29i}{3+4i}\right) =$$

$$\frac{-8+9i}{-2+i} \cdot \frac{-2-i}{-2-i} = \frac{16-(-18)+i(8-18)}{(4-2)+\cancel{i(2-2)}^{0}} = \frac{34-i10}{2} = 17-i5$$

$$\frac{3+29i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{9+116+i(-12-116)}{9+16+\cancel{i(-12+12)}^{0}} = \frac{125-i128}{25} = 5-i\frac{128}{25}$$

$$\Rightarrow 17+5-i5-i\frac{128}{25} = 22-i\frac{253}{25} \quad //$$

Problema 2

$$ie^{iz}\sin z = 1$$

$$\cancel{i}e^{iz} \cdot \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2\cancel{i}} = 1$$

$$e^{iz}(e^{iz}-e^{-iz}) = 2$$

$$e^{2iz} - 1 = 2$$

$$e^{2iz} = 2+1 \quad // \ln$$

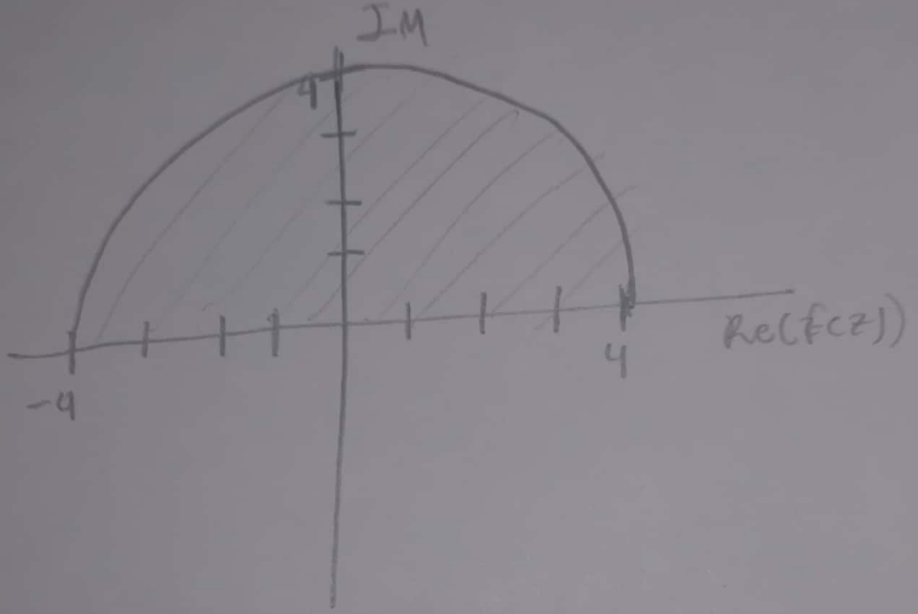
$$2iz = \ln(3)$$

$$z = \frac{\ln(3)}{2i} \quad //$$

Problema 3

$\theta = 0$ has π

$|z-2i| \leq 4$ = Radio = 4



Problema 4

a) $e^{z^2} = e^{(x+iy)^2} = e^{x^2+2ixy-y^2} = e^{x^2-y^2} e^{i2xy}$

$= e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + i \operatorname{sen}(2xy))$

$\Rightarrow Re(f(z)) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy)$

$Im(f(z)) = e^{x^2-y^2} \sin(2xy)$

b) $e^{e^{z}} = e^{e^{x} \cdot e^{iy}} = e^{e^{x}\cos(y) + ie^{x}\sin(y)}$

$= e^{x\cos(y)} \cdot e^{i\, e^{x}\sin(y)}$

$= e^{x\cos y}\left(\cos\left(e^{x}\sin(y)\right) + i\sin\left(e^{x}\sin(y)\right)\right)$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(f(z)) = e^{x\cos y}\cos(e^{x}\sin(y))$

$\operatorname{Im}(f(z)) = e^{x\cos y}\sin(e^{x}\sin(y))$

Problema 5

$\sinh(z+2\pi i) = \sinh z$

Sabemos que; $\sinh(z) = \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2i}$

Entonces:

$\sinh(z+2\pi i) = \dfrac{e^{z+2\pi i} - e^{-z-2\pi i}}{2i}$ $\quad\Big|\quad e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\,\overset{0}{\cancel{\operatorname{sen}(2\pi)}} = 1$

$= \dfrac{e^{z}\cdot \cancel{e^{2\pi i}}^{1} - e^{-z}\cdot\cancel{e^{-2\pi i}}^{1}}{2i}$

$= \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2i} = \sinh(z)$ QED

$\bar{z} = x - iy$

Problema 6

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \frac{\lim_{z \to 0} (z)}{\lim_{z \to 0} (\bar{z})} = \frac{0}{0} \quad \therefore \text{ no existe}$$

QED

$\hookrightarrow$ el conjugado unicamente cambia el signo de la parte imaginaria no afecta al limite

Problema 7

$$F(z) = (x e^{-x} \cos(y) + y e^{-x} \sin y) + i(y e^{-x} \cos(y) - x e^{-x} \sin(y))$$

a) $U_x = \cos(y)\, e^{-x}(-x) + (-x) e^{-x} y \sin y$

$U_y = -x e^{-x} \sin(y) + e^{-x} y \cos(y)$

$V_x = -x e^{-x} y \cos(y) - (-x) e^{-x} \sin(y)$

$V_y = -e^{-x} y \sin(y) - x e^{-x} \cos(y)$

se cumple cauchy - Rieman y las funciones son continuas $\therefore$ es holomorfa

b) $U_x + V_x$

$= \cos(y)\, e^{-x}(-x) + (-x) e^{-x} y \sin y - e^{-x} x y \cos(y) - (-x) e^{-x} \sin y$

Escaneado con CamScanner

Problema 8

si $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es holomorfa entonces sus derivadas parciales quedan asi

$$\frac{\partial}{\partial x}(U) = \frac{\partial}{\partial y}(V) \quad y \quad \frac{\partial}{\partial y}(U) = -\frac{\partial}{\partial x}(V)$$

si conjugamos $f(x+iy)$ quedaria $U(x,-y) - iV(x,-y)$
y como $f(x+iy)$ ya era holomorfa las derivadas parciales seguiran cumpliendo el teorema de Coachy Rieman por lo que $F(x+iy)$ es holomorfa.

QED

Escaneado con CamScanner