Hoja de Trabajo No. 1 - Solución

Instrucciones:

- Resuelva cada una de las cuestiones que se le presentan a continuación dejando constancia de todo procedimiento y razonamiento hecho.
- Favor de entregar su trabajo en hojas debidamente identificadas.
- Entregue su solución a través del GES, en un archivo en formato PDF.

Problema 1

Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Demuestre que se cumplen las siguientes propiedades.

1. Demuestre que si $\mathbf{e_1}$ y $\mathbf{e_2}$ son ortogonales, entonces $\|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 = \|\mathbf{e_1}\|^2 + \|\mathbf{e_2}\|^2$

   Tenemos que,

$$\|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 = \langle e_1 + e_2, e_1 + e_2 \rangle$$

$$\|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 = \langle e_1, e_1 \rangle + \langle e_2, e_2 \rangle + \langle e_1, e_2 \rangle + \langle e_2, e_1 \rangle$$

   Como son ortogonales,

$$\|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 = \langle e_1, e_1 \rangle + \langle e_2, e_2 \rangle + \cancelto{0}{\langle e_1, e_2 \rangle} + \cancelto{0}{\langle e_2, e_1 \rangle}$$

$$\|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 = \|\mathbf{e_1}\|^2 + \|\mathbf{e_2}\|^2$$

2. **Identidad del Paralelogramo**:

$$2(\|\mathbf{e_1}\|^2 + \|\mathbf{e_2}\|^2) = \|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 + \|\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}\|^2$$

   Sabemos que,

$$\|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 = \|\mathbf{e_1}\|^2 + \|\mathbf{e_2}\|^2 + \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle + \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle^* \quad (1)$$

$$\|\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}\|^2 = \|\mathbf{e_1}\|^2 + \|\mathbf{e_2}\|^2 - \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle - \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle^* \quad (2)$$

   Sumando (1) y (2),

$$\|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 + \|\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}\|^2 = \|\mathbf{e_1}\|^2 + \|\mathbf{e_2}\|^2 + \cancel{\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle} + \cancel{\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle^*} + \|\mathbf{e_1}\|^2 + \|\mathbf{e_2}\|^2 - \cancel{\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle} - \cancel{\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle^*}$$

$$\|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 + \|\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}\|^2 = \|\mathbf{e_1}\|^2 + \|\mathbf{e_2}\|^2 + \|\mathbf{e_1}\|^2 + \|\mathbf{e_2}\|^2$$

$$\|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 + \|\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}\|^2 = 2\|\mathbf{e_1}\|^2 + 2\|\mathbf{e_2}\|^2$$

$$\|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 + \|\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}\|^2 = 2(\|\mathbf{e_1}\|^2 + \|\mathbf{e_2}\|^2)$$

3. **Identidad de Polarización Real**:

$$\langle \mathbf{e_1} \mid \mathbf{e_2} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 - \|\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}\|^2\right)$$

Sean $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \in \mathbb{R}$, entonces,

$$\|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 = \|\mathbf{e_1}\|^2 + \|\mathbf{e_2}\|^2 + \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle + \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle \tag{3}$$

$$\|\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}\|^2 = \|\mathbf{e_1}\|^2 + \|\mathbf{e_2}\|^2 - \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle - \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle \tag{4}$$

Restando (3) y (4),

$$\|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 - \|\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}\|^2 = \cancel{\|\mathbf{e_1}\|^2} + \cancel{\|\mathbf{e_2}\|^2} + \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle + \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle - \cancel{\|\mathbf{e_1}\|^2} - \cancel{\|\mathbf{e_2}\|^2} + \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle + \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle$$

$$\|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 - \|\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}\|^2 = 4(\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle)$$

$$\frac{\|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 - \|\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}\|^2}{4} = \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle$$

Problema 2

Los polinomios de Legendre $P_k(t)$ se definen de forma recursiva de la siguiente forma:

$P_0(t) = 1,$

$P_1(t) = t,$

$P_{k+1}(t) = \dfrac{(2k+1)tP_k(t) - kP_{k-1}(t)}{k+1}$ para $k \geq 1$.

1. Calcule $P_2(t)$ y $P_3(t)$

$$P_2(t) = \frac{(2(1)+1)tP_1(t) - kP_0(t)}{2} = \frac{3t(t)-1}{2} = \frac{3t^2-1}{2}$$

$$P_3(t) = \frac{(2(2)+1)tP_2(t) - kP_1(t)}{3} = \frac{5t\left(\frac{3t^2-1}{2}\right) - 2t}{3} = \frac{15t^3-9t}{6} = \frac{5t^3-3t}{2}$$

2. Verifique que $P_2(t)$ y $P_3(t)$ son ortogonales con respecto al siguiente producto interno:

$$\langle\, f \mid g \,\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{3t^2-1}{2}\right)\left(\frac{5t^3-3t}{2}\right) dt = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} (15t^5 - 14t^3 + 3t)\, dt = \frac{5}{2}t^6 - \frac{7}{2}t^4 + \frac{3}{2}t^2 \Big|_{-1}^{1} = 0$$

$\therefore$ Son ortogonales.

Problema 3
Considere un espacio vectorial con el siguiente producto interno.

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-L}^{L} f(t)g(t)\,dt$$

con $L > 0$.
Demuestre que para cualesquiera n y m enteros positivos, las funciones $f(t) = \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$ y $g(t) = \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$ son ortogonales.

$$\langle \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \mid \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \rangle = \int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\,dt$$

Utilizando la identidad trigonométrica,

$$\sin(A)\cos(B) = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

NOTA:
$\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$
$\cos(A)\sin(B) = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) - \sin(A-B)\right]$

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi + m\pi}{L}\right) + \sin\left(\frac{n\pi - m\pi}{L}\right)\,dt$$

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{L}{n\pi + m\pi}\cos\left(\frac{n\pi + m\pi}{L}\right) - \frac{L}{n\pi - m\pi}\cos\left(\frac{n\pi - m\pi}{L}\right)\right]_{-L}^{L}$$

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{L\cos(n\pi + m\pi)}{n\pi + m\pi} - \frac{L\cos(n\pi - m\pi)}{n\pi - m\pi} + \frac{L\cos(-(n\pi + m\pi))}{n\pi + m\pi} + \frac{L\cos(-(n\pi - m\pi))}{n\pi - m\pi}\right]$$

Como $\cos(-(n\pi - m\pi)) = \cos(n\pi - m\pi)$, entonces,

$$\frac{1}{2}\left[-\cancel{\frac{L\cos(n\pi + m\pi)}{n\pi + m\pi}} - \cancel{\frac{L\cos(n\pi - m\pi)}{n\pi - m\pi}} + \cancel{\frac{L\cos(-(n\pi + m\pi))}{n\pi + m\pi}} + \cancel{\frac{L\cos(-(n\pi - m\pi))}{n\pi - m\pi}}\right]$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\,dt = 0$$

Problema 4

Sea $\mathcal{O} = \{\, \mathbf{e_i} \,\}_{i=1}^{\infty}$ un conjunto ortogonal de vectores. Demuestre que si $f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbf{e_k}$, entonces $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \|\mathbf{e_k}\|^2$. Esta identidad se conoce como la *Identidad de Parseval.*

Sea $f = \alpha_1 \mathbf{e_1} + \alpha_2 \mathbf{e_2} + \alpha_3 \mathbf{e_3} + \cdots$ y

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$$

expandiendo,

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \langle \alpha_1 \mathbf{e_1} + \alpha_2 \mathbf{e_2} + \alpha_3 \mathbf{e_3} + \cdots, \alpha_1 \mathbf{e_1} + \alpha_2 \mathbf{e_2} + \alpha_3 \mathbf{e_3} + \cdots \rangle \\ &= \alpha_1 \alpha_1^* \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_1} \rangle + \alpha_1 \alpha_2^* \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle + \alpha_1 \alpha_3^* \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_3} \rangle + \cdots + \alpha_2 \alpha_2^* \langle \mathbf{e_2}, \mathbf{e_2} \rangle + \cdots \end{aligned}$$

Como es un conjunto ortogonal, para $m \neq n$ tenemos $\langle \mathbf{e_m}, \mathbf{e_n} \rangle = 0$, entonces

$$\begin{aligned} &= \alpha_1 \alpha_1^* \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_1} \rangle + \alpha_1 \alpha_2^* \cancelto{0}{\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2} \rangle} + \alpha_1 \alpha_3^* \cancelto{0}{\langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_3} \rangle} + \cdots + \alpha_2 \alpha_2^* \langle \mathbf{e_2}, \mathbf{e_2} \rangle + \cdots \\ &= |\alpha_1|^2 \langle \mathbf{e_1}, \mathbf{e_1} \rangle + |\alpha_2|^2 \langle \mathbf{e_2}, \mathbf{e_2} \rangle + |\alpha_3|^2 \langle \mathbf{e_3}, \mathbf{e_3} \rangle + \cdots \\ & |\alpha_1|^2 \|\mathbf{e_1}\|^2 + |\alpha_2|^2 \|\mathbf{e_2}\|^2 + |\alpha_3|^2 \|\mathbf{e_3}\|^2 + \cdots \\ \|f\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \|\mathbf{e_k}\|^2 \end{aligned}$$