Parcial 2

Problema 1 (14 pts)

1. La serie de Laurent de una singularidad removible tiene infinitos términos con exponente negativo.

   Falso.

   Una singularidad aislada de $f(z)$ es removible si la serie de Laurent no tiene términos con exponente negativo.

2. La serie de Laurent de una singularidad esencial tiene infinitos términos con exponente positivo.

   Falso.

   Según los apuntes de clase se concluye que es falso pero en realidad es verdadero

3. Si $f(z)$ es analítica en un dominio simplemente conexo D, entonces para cualquier curva cerrada simple C en el interior de D se cumple que $\oint_c f(z)\,dz = 0$.

Verdadero.

4. La singularidad $z=0$ es un polo de orden 5 de la función $f(z) = \frac{1}{z^5}$.

Verdadero.

$f(z)$ tiene una cantidad finita de términos con exponente negativo, por lo tanto es un polo de orden 5.

5. El teorema de Cauchy se puede demostrar utilizando el teorema de Green de las integrales de línea.

Verdadero.

Es consecuencia directa del teorema de Green, tema visto en clase.

6. Si $f(z)$ es una función holomorfa en un conjunto abierto que contiene a una curva C, entonces $\int_C f(z)dz = f(b) - f(a)$, en donde b y a son los extremos final e inicial de la curva, respectivamente.

Falso.

El error está en la integral, debería ser:

$$\int_C f'(z)\,dz = f(b) - f(a)$$

7. Si $\int_C f(z)\,dz = 0$ en alguna curva cerrada simple C, entonces f es holomorfa en C y en el interior.

Falso.

El teorema de Cauchy es "si, entonces" y no "si y sólo si".

Problema 2 (30 pts)

Exprese cada una de las siguientes funciones como una serie de Laurent y clasifique las singularidades.

(a) $f(z) = \frac{1}{z^2}$

$$\frac{1}{z^2} = \cdots + \frac{0}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{0}{z} + 0 + 0 \cdot z + \cdots$$

Como tiene una cantidad finita de términos con exponente negativo entonces es un polo de orden 2.

(b) $f(z) = z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\cos\left(\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^4}{4!} - \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^6}{6!} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{z^2 \cdot 2!} + \frac{1}{z^4 \cdot 4!} - \frac{1}{z^6 \cdot 6!} + \cdots$$

$$z^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{z}\right) = z^3 - \frac{z}{2!} + \frac{1}{z \cdot 4!} - \frac{1}{z^3 \cdot 6!} + \cdots$$

Como tiene una cantidad infinita de términos con exponente negativo entonces es una singularidad esencial.

(c) $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$\frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots$$

Como tiene una cantidad finita de términos con exponente negativo entonces es un polo de orden 1.

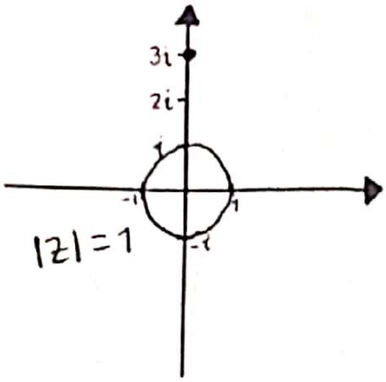
Problema 3 (10 pts)

Utilice el teorema de cauchy para demostrar que:

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z-3i}\,dz = 0$$

$f(z) = \dfrac{e^z}{z-3i}$ es analítica/holomorfa en el dominio simplemente conexo $\mathbb{C} \setminus \{3i\}$, entonces para la curva cerrada $|z|=1$, por el teorema de cauchy

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^z}{z-3i}\,dz = 0$$

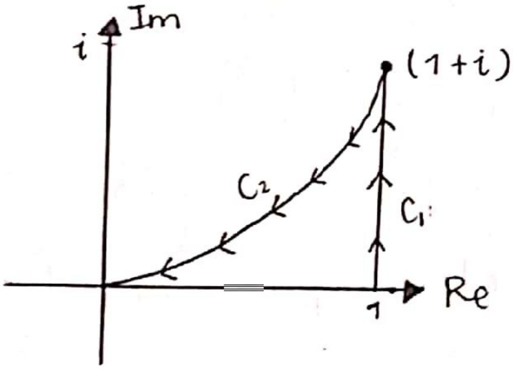


singularidad en $3i$

Problema 4 (10 pts)

sea C la curva formada por el segmento de recta de 1 a $1+i$ seguida del segmento de parábola $y=x^2$ de $1+i$ a 0. Para $f(x+iy)=2xy+yi$ calcule:

$$\int_C f(z)\,dz$$



$$\int_C f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz$$

C_1: $x(t)=1$

$y(t)=t \qquad 0\leq t\leq 1$

$z(t)=1+it \quad , \quad z'(t)=i$

$$\Rightarrow \int_{C_1} f(z)dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 f(1+it)\,i\,dt = i\int_0^1 2(1)(t) + (t)i\;dt$$

$$= i\int_0^1 2t+it\;dt = i\int_0^1 (2+i)t\,dt$$

$$= i(2+i)\int_0^1 t\,dt = (2i-1)\cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{2i-1}{2}$$

$$= i - \frac{1}{2}$$

C_2: $\quad x(t) = -t$

$\quad y(t) = t^2 \qquad -1 \leq t \leq 0$

$$z(t) = -t + it^2, \quad z'(t) = -1 + 2it$$

$$\Rightarrow \int_{C_2} f(z)dz = \int_{-1}^0 f(-t+it^2)(-1+2it)\,dt$$

$$= \int_{-1}^0 (2(-t)(t^2) + it^2)(-1+2it)\,dt$$

$$= \int_{-1}^0 (-2t^3+it^2)(-1+2it)\,dt$$

$$= \int_{-1}^0 2t^3 - 4it^4 - it^2 + 2i^2t^3\;dt$$

$$= \int_{-1}^0 -4it^4 - it^2\;dt = \frac{-4i}{5}.t^5 - \frac{i}{3}.t^3\Big|_{-1}^0$$

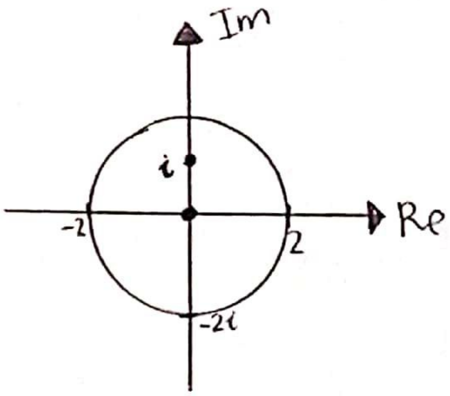
$$= -\left(-\frac{4i}{5}(-1)^5 - \frac{i}{3}(-1)^3\right) = -\left(\frac{4i}{5} + \frac{i}{3}\right) = -\frac{17i}{15}$$

$$\therefore \int_c f(z)\,dz = i - \frac{1}{2} - \frac{17i}{15} = -\frac{1}{2} - \frac{2i}{15}$$

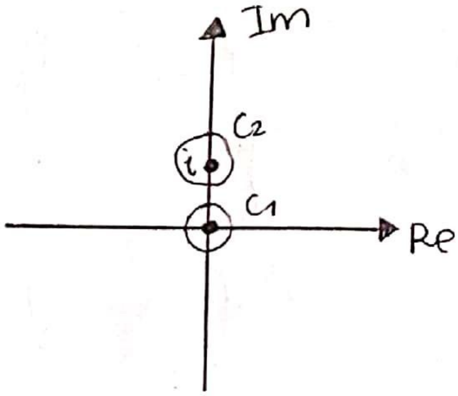
Problema 5 (20 pts)

Utilice la primera fórmula de cauchy para calcular:

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-i)}\,dz$$



deformamos



$$\int_{C_1} \frac{e^z/z-i}{z}\,dz = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i\left(\frac{e^0}{-i}\right)$$

$$= -2\pi$$

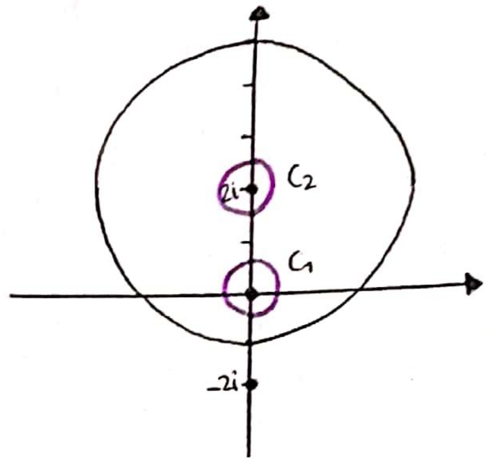
$$\int_{C_2} \frac{e^z/z}{z-i}\,dz = 2\pi i\, f(i) = 2\pi i \cdot \frac{e^i}{i} = 2\pi e^i$$

$$\therefore \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-i)}\,dz = -2\pi + 2\pi e^i$$

Problema 6 (20 pts)

Sea c la curva dada por $|z-2i|=3$. Calcule:

$$\oint_c \frac{dz}{z^2(z^2+4)}$$



$$\oint_c \frac{dz}{z^2(z-2i)(z+2i)} = \oint_c \frac{dz}{z^2(z^2+4)}$$

Deformamos para aplicar la primera fórmula de cauchy

$$\oint_{C_1} \frac{dz/(z-2i)(z+2i)}{z^2} dz = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{(-2i)(2i)} = \frac{2\pi i}{4}$$

$$= \frac{\pi}{2} i$$

$$\oint_{C_2} \frac{dz/z^2(z+2i)}{(z-2i)} = 2\pi i f(2i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{(2i)^2(2i+2i)} = \frac{2\pi i}{(-4)(4i)}$$

$$= -\frac{2\pi}{4\cdot 4} = -\frac{\pi}{8}$$

$$\therefore \oint_c \frac{dz}{z^2(z^2+4)} = \frac{\pi}{2} i - \frac{\pi}{8}$$