Hoja de Trabajo #1. 20/07/2020

Gizeh García Castro
17005256

Problema 1

1. Demuestre que si e_1 y e_2 son ortogonales, $\|e_1+e_2\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2$.

$\|e_1\| = \sqrt{\langle e_1|e_1\rangle} \Rightarrow \|e_1\|^2 = \langle e_1|e_1\rangle$

$\|e_2\| = \sqrt{\langle e_2|e_2\rangle} \Rightarrow \|e_2\|^2 = \langle e_2|e_2\rangle$

$\|e_1\| + \|e_2\| = \sqrt{\langle e_1|e_1\rangle + \langle e_2|e_2\rangle} \Rightarrow \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 = \langle e_1|e_1\rangle + \langle e_2|e_2\rangle$

$\Rightarrow \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 = \|e_1+e_2\|^2 \quad \square$

2. Identidad del paralelogramo.

$2(\|e_1\|^2 + \|e_2\|^2) = \|e_1+e_2\|^2 + \|e_1-e_2\|^2.$

$\|e_1+e_2\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2$ Por la prop. de arriba

$\|e_1+e_2\|^2 + \|e_1-e_2\|^2 = \|e_1+e_2\|\|e_1+e_2\| + \|e_1-e_2\|\|e_1-e_2\|$

$|e_1\cdot e_1| + \cancel{|e_1\cdot e_2|} + \cancel{|e_2\cdot e_1|} + |e_2\cdot e_2| + |e_1\cdot e_1| - \cancel{|e_1\cdot e_2|}$

$- \cancel{|e_2\cdot e_1|} - |e_2\cdot e_2|$

$\Rightarrow 2\|e_1\cdot e_1\| + 2\|e_2\cdot e_2\|$

$\Rightarrow 2(\|e_1\|^2 + \|e_2\|^2) = \|e_1+e_2\|^2 + \|e_1-e_2\|^2 \quad \square$

3. Identidad de polarización Real.

$\langle e_1|e_2\rangle = 1/4\,(\|e_1+e_2\|^2 - \|e_1-e_2\|^2).$

$= 1/4\,(\langle e_1+e_2|e_1+e_2\rangle - \langle e_1-e_2|e_1-e_2\rangle)$

$= 1/4\,(\langle e_1|e_1+e_2\rangle + \langle e_2|e_1+e_2\rangle - \langle e_1|e_1-e_2\rangle - \langle -e_2|e_1-e_2\rangle)$

$= 1/4\,(\cancel{\langle e_1|e_1\rangle} + \langle e_1|e_2\rangle + \langle e_2|e_1\rangle + \cancel{\langle e_2|e_2\rangle}$

$- \cancel{\langle e_1|e_1\rangle} - \langle e_1|-e_2\rangle - \langle -e_2|e_1\rangle - \cancel{\langle -e_2|-e_2\rangle}$

$= \cancel{1/4}\,(\cancel{4}\,\langle e_1|e_2\rangle) = \langle e_1|e_2\rangle \quad \square$

Problema 2. - Polinomios de Legendre

1. Calcule $P_2(t)$ y $P_3(t)$

$$P_2(t) = \frac{(2+1)t\,P_1(t) - 1\,P_0(t)}{2} \qquad K=1$$

$$= \frac{3t\cdot t - 1P_0(t)}{2} = \frac{3t^2-1}{2}$$

$$P_3(t) = \frac{(4+1)t\,P_2(t) - 2P_1(t)}{3} \qquad K=2$$

$$= 5t(3t^2 - 1/2) - 2t = \frac{t(5t^2-3)}{2}$$

2. Verifique que $P_2(t)$ y $P_3(t)$ son ortogonales. con

$$\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,dt.$$

$f(t) = P_2(t)$

$g(t) = P_3(t)$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}\left(\frac{3t^2-1}{2}\right)\left(\frac{t(5t^2-3)}{2}\right)dt = 0.$$

las dos son funciones impares en un intervalo simetrico, entonces son ortogonales $\square$

Problema 3.

$\mathcal{O} = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ un conjunto ortogonal de vectores.
Demuestre que si

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, \Rightarrow \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \|e_k\|^2.$$ (identidad de Parseval)

$\langle e_i | e_j \rangle = 0$ si $i \neq j$

$$f_N = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k \Rightarrow \|f_N\|^2 = \langle f_N | f_N \rangle$$

$$= \langle \sum_{m=1}^{n} \alpha_m e_m \Big| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \rangle = \sum_{m=1}^{N} \alpha_m^* \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle e_m | e_k \rangle$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \alpha_m^* \alpha_m \langle e_m | e_m \rangle$$

$$= \sum_{m=1}^{n} |\alpha_m|^2 \cdot \|e_m\|^2$$

$$N \to \infty \Rightarrow \|f\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} |\alpha_m|^2 \|e_m\|^2$$

Problema 4.

Considere $\|\cdot\|: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$$

1. Demuestre que $\|\cdot\|_1$ es una norma en $\mathbb{R}^2$.

Propiedades

i) si $\|(x_1,x_2)\| = |x_1| + |x_2| \geq 0$ y $|x_1| + |x_2| = 0$

$\Rightarrow (x_1,x_2) = \bar{0}$ $\square$

ii) si $\|\alpha(x_1,x_2)\| = \|(\alpha x_1, \alpha x_2)\|$

$= |\alpha x_1| + |\alpha x_2| = |\alpha||x_1| + |\alpha||x_2|$

$= |\alpha|(|x_1| + |x_2|)$ // factor común

$\Rightarrow |\alpha|\|(x_1,x_2)\|$ $\square$

iii) si $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$

$\|(x_1,x_2) + (y_1,y_2)\| = \|(x_1+y_1, x_2+y_2)\|$

$= |x_1+y_1| + |x_2+y_2|$

$= |x_1+y_1| \leq |x_1| + |y_1|$; $|x_2+y_2| \leq |x_2| + |y_2|$

$\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|$

$\leq |x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|$

$\leq \|(x_1,x_2)\| + \|(y_1,y_2)\|$

$\leq \|x\| + \|y\|$ $\square$

$\therefore \|\cdot\|_1$ es norma en $\mathbb{R}^2$

2. Describa el conjunto.

$$B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 \le 1\}$$

$$\|\bar{x}\|_1 = 1 \Rightarrow \|(x_1, x_2)\|_1 = 1 \Rightarrow |x_1| + |x_2| = 1$$

(1): $x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - x_1$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ $\quad 0 \le x_1 \le 1$

(2): $-x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 + x_1$

$x_1 \le 0 \quad x_2 \geq 0$ $\quad -1 \le x_1 \le 0$

(3): $-x_1 - x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - x_1$

$x_1 \le 0 \quad x_2 \le 0$ $\quad 0 \le x_1 \le -1$

(4): $x_1 - x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 + x_1$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \le 0$ $\quad 1 \le x_1 \le 0$