Problema 3

Sea $\mathcal{O} = \{\mathbf{e_i}\}_{i=1}^{\infty}$ un conjunto ortogonal de vectores. Demuestre que si $f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbf{e_k}$, entonces $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \|\mathbf{e_k}\|^2$. Esta identidad se conoce como la *Identidad de Parseval*.

$\langle \bar{e}_i | \bar{e}_j \rangle = 0$ si $i \neq j$.

$f_N = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k \Rightarrow \|f_N\|^2 = \langle f_N | f_N \rangle = \langle \sum_{l=1}^{N} \alpha_l e_l | \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k \rangle =$

$\sum_{l=1}^{N} \alpha_l^* \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \langle e_l | e_k \rangle = \sum_{l=1}^{N} \alpha_l^* \cdot \alpha_l \langle e_l | e_l \rangle = \sum_{l=1}^{N} |\alpha_l|^2 \|e_l\|^2$

$N \to \infty \Rightarrow \|f\|^2 = \sum_{l=1}^{\infty} |\alpha_l|^2 \|e_l\|^2.$

Problema 4

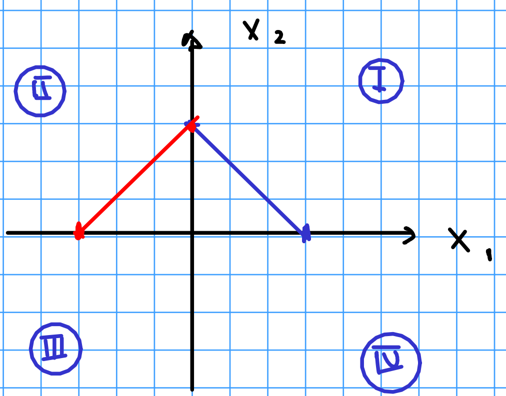
Considere $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2| .$$

1. Demuestre que $\|\cdot\|_1$ es una norma en $\mathbb{R}^2$.
2. Describa el conjunto:

$$B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_1 \leq 1\}.$$

2. $\|\bar{x}\|_1 = 1 \Rightarrow \|(x_1, x_2)\|_1 = 1 \Rightarrow |x_1| + |x_2| = 1$



I: $x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - x_1$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \qquad 0 \leq x_1 \leq 1$

II: $-x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 + x_1$

$x_1 \leq 0 \quad x_2 \geq 0 \qquad -1 \leq x_1 \leq 0$