Hoja 1

viernes, 24 de julio de 2020 09:10 a. m.

Harim Palma 1800 1882

AN

**Problema 1**

Sea $V$ un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Demuestre que se cumplen las siguientes propiedades.

1. Demuestre que si $\mathbf{e_1}$ y $\mathbf{e_2}$ son ortogonales, entonces $\|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 = \|\mathbf{e_1}\|^2 + \|\mathbf{e_2}\|^2$

$$\|e_1+e_2\|^2 = \langle e_1+e_2 | e_1+e_2 \rangle$$
$$= \langle e_1|e_1\rangle + \langle e_2|e_2\rangle + \langle e_1|e_2\rangle + \langle e_2|e_1\rangle$$
$$= \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 + \cancel{\langle e_1|e_2\rangle}^{0} + \cancel{\langle e_1|e_2\rangle^*}^{0} \quad // \langle e_1|e_2\rangle = 0$$
$$= \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2$$

QED

2. **Identidad del Paralelogramo:**

$$2(\|\mathbf{e_1}\|^2 + \|\mathbf{e_2}\|^2) = \|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 + \|\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}\|^2$$

$$\|e_1+e_2\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2$$

$$\|e_1-e_2\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 - \cancel{\langle e_1|e_2\rangle}^{0} - \cancel{\langle e_1|e_2\rangle^*}^{0}$$
$$= \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2$$

// Seguimos asumiendo que $e_1$ y $e_2$ son ortogonales

$$\Rightarrow \|e_1+e_2\|^2 + \|e_1-e_2\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 + \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2$$
$$= 2\|e_1\|^2 + 2\|e_2\|^2$$
$$= 2(\|e_1\|^2 + \|e_2\|^2)$$

QED

3. **Identidad de Polarización Real:**

$$\langle \mathbf{e_1} | \mathbf{e_2} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 - \|\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}\|^2\right)$$

$$\frac{1}{4}\left(\|e_1+e_2\|^2 - \|e_1-e_2\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\langle e_1+e_2, e_1+e_2\rangle - \langle e_1-e_2, e_1-e_2\rangle\right)$$

$$\frac{1}{4}\left(\|e_1+e_2\|^2-\|e_1-e_2\|^2\right)=\frac{1}{4}\left(\langle e_1+e_2, e_1+e_2\rangle-\langle e_1-e_2, e_1-e_2\rangle\right)$$

$$=\frac{1}{4}\big(\langle e_1, e_1+e_2\rangle+\langle e_2, e_1+e_2\rangle - \langle e_1, e_1-e_2\rangle-\langle -e_2, e_1-e_2\rangle\big)$$

$$=\frac{1}{4}\big(\langle e_1,e_1\rangle+\langle e_1,e_2\rangle+\langle e_2,e_1\rangle+\langle e_2,e_2\rangle - \langle e_1,e_1\rangle-\langle e_1,-e_2\rangle-\langle -e_2,e_1\rangle-\langle -e_2,-e_2\rangle\big)$$

$$=\frac{1}{4}\big(\cancel{\langle e_1,e_1\rangle}+\langle e_1,e_2\rangle+\langle e_2,e_1\rangle+\cancel{\langle e_2,e_2\rangle} - \cancel{\langle e_1,e_1\rangle}+\langle e_1,e_2\rangle+\langle e_1,e_2\rangle-\cancel{\langle e_2,e_2\rangle}\big)$$

$$=\frac{1}{\cancel{4}}\left(\cancel{4}\langle e_1,e_2\rangle\right)$$

$$=\langle e_1,e_2\rangle \qquad \text{QED}$$

**Problema 2**

Los polinomios de Legendre $P_k(t)$ se definen de forma recursiva de la siguiente forma:

$P_0(t) = 1,$

$P_1(t) = t,$

$P_{k+1}(t) = \dfrac{(2k+1)tP_k(t) - kP_{k-1}(t)}{k+1}$ para $k \geq 1$.

1. Calcule $P_2(t)$ y $P_3(t)$.

$$P_2(t) = \frac{3t\,P_1(t) - 1\,P_0(t)}{2} = \frac{3t^2-1}{2}$$

$$P_3(t) = \frac{5t\,P_2(t) - 2P_1}{3} = \frac{5t\left(\frac{3t^2-1}{2}\right)-2t}{3} = \frac{t(5t^2-3)}{2}$$

2. Verifique que $P_2(t)$ y $P_3(t)$ son ortogonales con respecto al siguiente producto interno:

$$\langle f \,|\, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

$$\langle P_2(t), P_3(t)\rangle = \int^{1} (3t^2-1)\,\big(t(5t^2-3)\big)\,dt$$

$$\langle P_2(t), P_3(t)\rangle = \int_{-1}^{1} \left(\frac{3t^2-1}{2}\right)\left(\frac{t(5t^2-3)}{2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} (3t^2-1)(5t^3-3t)\, dt$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} 15t^5 - 14t^3 + 3t \; dt \quad // \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

$$= \frac{1}{4}(0) = 0 \quad \therefore \text{son ortogonales}$$

**Problema 3**
Considere un espacio vectorial con el siguiente producto interno.

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{-L}^{L} f(t)g(t)dt,$$

con $L > 0$.
Demuestre que para cualesquiera $n$ y $m$ enteros positivos, las funciones $f(t) = \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)$ y $g(t) = \cos\left(\frac{m\pi t}{L}\right)$ son ortogonales.

$$\langle f \mid g\rangle = \int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi t}{L}\right) dt$$

$$\sin(s)\cos(t) = \frac{\sin(s+t) + \sin(s-t)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi t + m\pi t}{L}\right) + \sin\left(\frac{n\pi t - m\pi t}{L}\right)}_{\text{función impar}} dt$$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \quad \therefore \; f(t)$ y $g(t)$ son ortogonales

**Problema 4**

Sea $\mathcal{O} = \{\mathbf{e_i}\}_{i=1}^{\infty}$ un conjunto ortogonal de vectores. Demuestre que si $f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbf{e_k}$, entonces $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \|\mathbf{e_k}\|^2$. Esta identidad se conoce como la *Identidad de Parseval*.

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$$

$$= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k , \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \right\rangle$$

$$= \alpha_1^2 e_1^2 + \alpha_2^2 e_2^2 + \alpha_3^2 e_3^2 \ldots$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \|e_k\|^2$$

QED