Resolución ex 1

lunes, 1 de marzo de 2021 20:45

Problema #1

$$\left(\frac{-8+9i}{-2+i} + \frac{3+79i}{3+4i}\right)$$

$$\frac{-8+9i}{-2+i} * \frac{-2-i}{-2-i} = \frac{(-8+9i)(-2-i)}{(-2)^2-(i)^2} = \frac{16+8i-18i-9i^2}{5} = 5-2i$$

$$\frac{3+79i}{3+4i} * \frac{(3-4i)}{(3-4i)} = \frac{(3+79i)(3-4i)}{(3)^2-(4i)^2} = \frac{9-12i+87i-116(i)^2}{25} = 5+3i$$

$$5-2i+5+3i = \underline{\underline{10+i}}$$

Problema #2.

$$ie^{iz}\sin z = 1.$$

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

$$ie^{iz}\left[\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2\cancel{i}}\right] = 1$$

$$e^{iz}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right) = 2 \simeq e^{iz}\cdot e^{iz} - e^{iz}\cdot e^{-iz} = 2.$$

$$e^{2iz} - \cancel{e^{0}}^{1} = 2 \simeq e^{2iz} = 2+1 \simeq e^{2iz} = 3 \quad * \ln(\,).$$

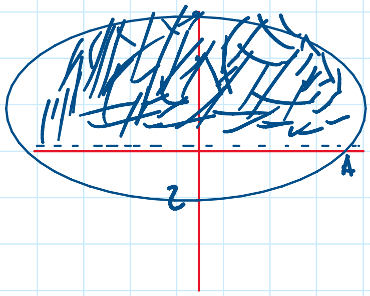
$$2iz = \ln(3)$$

$$iz = \frac{\ln(3)}{2}$$

$$z = \frac{\ln(3)}{2i}$$

Problema #3

$A = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - 2i| \leq 4$ y $\arg(z) \in (0, \pi) \}$.



Es una circunferencia de radio 4 rellena, con centro en 2i

Problema #4

a) $f(z) = e^{z^2} =$ $\qquad z = x + iy$

$$e^{(x+iy)^2} = e^{x^2+2ixy-y^2} = e^{x^2-y^2} \cdot e^{2ixy}$$

$$= e^{x^2-y^2}\left(\cos(2xy) + i\,\text{sen}(2xy)\right)$$

$\text{Re}(z) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy)$ $\qquad \text{Im}(z) = e^{x^2-y^2}\,\text{sen}(2xy)$

b) $g(z) = e^{e^z}$ $\qquad e^z = e^x(\cos y + i\,\text{sen}\, y)$

$$g(z) = e^{e^x \cos y + e^x \text{sen}\, y\, i}$$

$$= e^{e^x \cos y} \cdot e^{e^x \text{sen}\, y\, i}$$

$$= e^{e^x \cos y}\left(\cos(e^x \,\text{sen}\, y) + i\,\text{sen}(e^x\, \text{sen}\, y)\right)$$

$$\text{Re}(z) = e^{e^x \cos y} \cos(e^x\, \text{sen}\, y)$$

$$\operatorname{Im}(z) = e^{e^{x}\cos y} \cdot \operatorname{sen}(e^{x} \operatorname{sen} y))$$

Problema #5

$$\sinh(z+2\pi i) = \sinh(z)$$

$$\operatorname{senh}(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{senh}(z+2\pi i) = \frac{e^{z+2\pi i} - e^{-z-2\pi i}}{2} = \frac{e^{z} \cdot e^{2\pi i} - e^{-z} \cdot e^{-2\pi i}}{2}$$

Pero

$$e^{2\pi i} = e^{-2\pi i} = 1$$

$$\operatorname{senh}(z+2\pi i) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = \operatorname{senh}(z)$$

Problema #6

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{\bar{z}} = \lim_{z\to(0,y)} \frac{x+yi}{x-yi} = -1.$$

$$\lim_{z\to(x,0)} = \frac{x}{x} = 1$$

no son iguales por lo tanto no existen.

Problema #7

$$f(x+iy) = (xe^{-x}\cos y + ye^{-x}\sin y) + i(ye^{-x}\cos y - xe^{-x}\sin y)$$

$$u_x = e^{-x}(-x\cos y - y\sin y + \cos y)$$

Como

$u_x = e^{-x}(-x\cos y - y\sin y + \cos y)$

$u_y = e^{-x}(-x\sin y + \sin y + y\cos(y))$

$v_x = e^{-x}(x\sin y - \sin y - y\cos y)$

$v_y = e^{-x}(-x\cos y - y\sin y + \cos y)$

Como

Como se cumple CR es holomorfa

calcule $\frac{df}{dz}$

$$\frac{df}{dz} = u_x + v_x i$$

$$= e^{-x}(\cos y - x\cos y - y\,\mathrm{sen}\,y) + ie^{-x}(-y\cos y - \mathrm{sen}\,y + x\,\mathrm{sen}\,y)$$

Problema #8

$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ entonces.

$F(x+iy) = u(x,-y) - iv(x,-y)$ es tambien holomorfa en $\mathbb{C}$

$$u_x(x,y) = v_y(x,y)$$
$$u_y(x,y) = -v_x(x,y)$$

$\hat{u}(x,y) = u(x,-y) \longrightarrow$ Real

$\hat{v}(x,y) = -v(x,-y) \longrightarrow$ Imaginaria

Para demostrar lo hacemos por CR.

$$\hat{u}_x(x,y) = u_x(x,-y)$$

$$\hat{u}_y(x,y) = -u_y(x,-y)$$

$$\hat{v}_x(x,y) = -v_x(x,-y) = u_y(x,-y)$$

$$\hat{v}_y(x,y) = -v_y(x,-y)(-1)$$

$$= v_y(x,-y)$$

Como se cumple C.R. queda demostrado que

$$\hat{u}_x = \hat{v}_y$$

$$\hat{u}_y = -\hat{v}_x$$

es holomorfa