Hoja de Trabajo No. 2 – RESPUESTAS

Instrucciones:

- Resuelva cada una de las cuestiones que se le presentan a continuación dejando constancia de todo procedimiento y razonamiento hecho.
- Favor de entregar su trabajo en hojas tamaño carta debidamente engrapadas e identificadas con su nombre, número de carnet, fecha, curso y sección.

Serie 1 (Sec. 11.3, Larson: Cálculo 2 de Varias Variables)

Ejercicio 1
Sean los vectores $\vec{a} = \langle 6, -4 \rangle$ y $\vec{b} = \langle -3, 2 \rangle$, realizar las siguientes productos escalares:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -26$

b) $\vec{a} \cdot \vec{a} = 52$

c) $\| \vec{a} \| = 52$

d) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right) \vec{b} = \langle 78, -52 \rangle$

e) $\vec{a} \cdot \left(2\vec{b} \right) = -52$

Ejercicio 2
Sean los vectores $\vec{a} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$ y $\vec{b} = \hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$, realizar las siguientes productos escalares:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -5$

b) $\vec{a} \cdot \vec{a} = 9$

c) $\| \vec{a} \| = 9$

d) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right) \vec{b} = -5\hat{\mathbf{i}} + 15\hat{\mathbf{j}} - 10\hat{\mathbf{k}}$

e) $\vec{a} \cdot \left(2\vec{b} \right) = -10$

Ejercicio 3 (Ángulo entre Vectores)
Determinar el ángulo entre los vectores en radianes y grados.

a) $\vec{a} = \langle 3, 1 \rangle$
$\vec{b} = \langle 2, -1 \rangle$

b) $\vec{a} = 2\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$
$\vec{b} = \hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$

a) $\angle \vec{a}\,\vec{b} = \frac{\pi}{4}$

b) $\angle \vec{a}\,\vec{b} \approx 10.9^\circ$

Ejercicio 4 (Comparación de Vectores)
Determinar si los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales, paralelos, o ninguno de los dos.

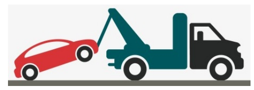
a) $\vec{a} = \langle 4, 3 \rangle$
$\vec{b} = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{2}{3} \right\rangle$

b) $\vec{a} = \langle 2, -3, 1 \rangle$
$\vec{b} = \langle -1, -1, -1 \rangle$

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow$ Ortogonal

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow$ Ortogonal

Ejercicio 5 (Trabajo)
Un carro se remolca usando una fuerza de 1,600 Newtons.La cadena que se usa para jalar el carro forma un ángulo de 25° con la horizontal. Utilizar el producto punto para determinar el trabajo que se realiza al remolcar el carro 2 kilómetros.



a) Describa el vector de fuerza **F** que realiza el trabajo.
b) Describa el vector **v** de desplazamiento horizontal del carro remolcado.
c) Calcular el trabajo realizado $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$.

a) $\mathbf{F}$=$1600\cos(25°) + 1600\sin(25°)$

b) Vector **v** de desplazamiento $\mathbf{v} = 2000\hat{\mathbf{i}}$

c) $W = \langle 1600\cos(25°) + 1600\sin(25°)\rangle \cdot \langle 2000, 0\rangle = 1600(2000)\cos(25°) = 2900.2$ [KmN]

Serie 2 (Sec. 11.4, Larson: Cálculo 2 de Varias Variables)

Ejercicio 6 (Producto Vectorial)
Sean los vectores $\vec{a} = \langle 7, 3, 2\rangle$ y $\vec{b} = \langle 1, -1, 5\rangle$, realizar las siguientes productos vectoriales:

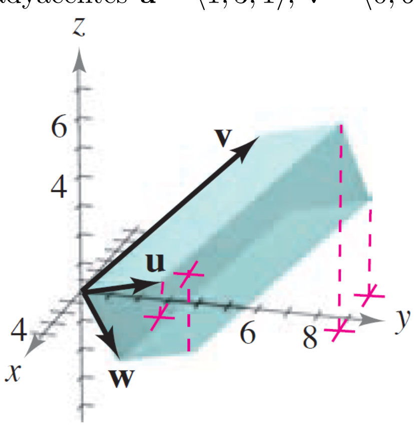
a) $\vec{a} \times \vec{b} = 17\hat{\mathbf{i}} - 33\hat{\mathbf{j}} - 10\hat{\mathbf{k}}$ b) $\vec{b} \times \vec{a} = -17\hat{\mathbf{i}} + 33\hat{\mathbf{j}} + 10\hat{\mathbf{k}}$ c) $\vec{a} \times \vec{a} = 0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + 0\hat{\mathbf{k}}$

Ejercicio 7 (Área)
Calcular el área del paralelogramo que tiene los vectores **u** y **v** como lados adyacentes.

a) $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1\rangle$
$\mathbf{v} = \langle 1, 2, 3\rangle$

Área $= 6\sqrt{5} \approx 13.42$ u^2

Ejercicio 8 (Volumen)
Usar el triple producto escalar para encontrar el volumen del paralelepípedo que tiene como aristas adyacentes $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 6, 6\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle -4, 0, -4\rangle$.



Volumen $= \| \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \| = 72$ u^3

3. $\mathbf{u} = \langle 6, -4\rangle, \mathbf{v} = \langle -3, 2\rangle$

(a) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 6(-3) + (-4)(2) = -26$

(b) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 6(6) + (-4)(-4) = 52$

(c) $\|\mathbf{u}\|^2 = 6^2 + (-4)^2 = 52$

(d) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} = -26\langle -3, 2\rangle = \langle 78, -52\rangle$

(e) $\mathbf{u}\cdot(2\mathbf{v}) = 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = 2(-26) = -52$

8. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

(a) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 2(1) + 1(-3) + (-2)(2) = -5$

(b) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 2(2) + 1(1) + (-2)(-2) = 9$

(c) $\|\mathbf{u}\|^2 = 2^2 + 1^2 + (-2)^2 = 9$

(d) $(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v} = -5(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = -5\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

(e) $\mathbf{u}\cdot(2\mathbf{v}) = 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) = 2(-5) = -10$

12. $\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -1\rangle$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

18. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{9}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{9}{2\sqrt{21}} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{3\sqrt{21}}{14}\right) \approx 10.9^\circ$$

21. $\mathbf{u} = \langle 4, 3\rangle, \mathbf{v} = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right\rangle$

$\mathbf{u} \neq c\mathbf{v} \Rightarrow$ not parallel

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \Rightarrow$ orthogonal

25. $\mathbf{u} = \langle 2, -3, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, -1, -1\rangle$

$\mathbf{u} \neq c\mathbf{v} \Rightarrow$ not parallel

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \Rightarrow$ orthogonal

75. $\mathbf{F} = 1600(\cos 25^\circ\,\mathbf{i} + \sin 25^\circ\,\mathbf{j})$

$\mathbf{v} = 2000\mathbf{i}$

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = 1600(2000)\cos 25^\circ$$

$\approx 2{,}900{,}184.9$ Newton meters (Joules)

≈ 2900.2 km-N

9. (a) $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 7 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 17\mathbf{i} - 33\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{v}\times\mathbf{u} = -(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = -17\mathbf{i} + 33\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{v}\times\mathbf{v} = \mathbf{0}$

29. $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1\rangle$

$\mathbf{v} = \langle 1, 2, 3\rangle$

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \langle 8, -10, 4\rangle$$

$$A = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \|\langle 8, -10, 4\rangle\| = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

46. $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 6 \\ -4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -72$

$$V = |\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})| = 72$$