Hoja de Trabajo No. 1

Instrucciones:

- Resuelva cada una de las cuestiones que se le presentan a continuación dejando constancia de todo procedimiento y razonamiento hecho.
- Favor de entregar su trabajo en hojas debidamente identificadas.
- Entregue su solución a través del GES, en un archivo en formato PDF.

Problema 1
Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Demuestre que se cumplen las siguientes propiedades.

1. Demuestre que si $\mathbf{e_1}$ y $\mathbf{e_2}$ son ortogonales, entonces $\|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 = \|\mathbf{e_1}\|^2 + \|\mathbf{e_2}\|^2$
2. **Identidad del Paralelogramo**:
$$2(\|\mathbf{e_1}\|^2 + \|\mathbf{e_2}\|^2) = \|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 + \|\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}\|^2$$
3. **Identidad de Polarización Real**:
$$\langle \mathbf{e_1} \,|\, \mathbf{e_2} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{e_1}+\mathbf{e_2}\|^2 - \|\mathbf{e_1}-\mathbf{e_2}\|^2\right)$$

Problema 2
Los polinomios de Legendre $P_k(t)$ se definen de forma recursiva de la siguiente forma:

$$P_0(t) = 1,$$
$$P_1(t) = t,$$
$$P_{k+1}(t) = \frac{(2k+1)tP_k(t) - kP_{k-1}(t)}{k+1} \text{ para } k \geq 1.$$

1. Calcule $P_2(t)$ y $P_3(t)$.
2. Verifique que $P_2(t)$ y $P_3(t)$ son ortogonales con respecto al siguiente producto interno:
$$\langle\, f \,|\, g \,\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

Problema 3
Sea $\mathcal{O} = \{\, \mathbf{e_i} \,\}_{i=1}^{\infty}$ un conjunto ortogonal de vectores. Demuestre que si $f = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbf{e_k}$, entonces $\|f\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \|\mathbf{e_k}\|^2$. Esta identidad se conoce como la *Identidad de Parseval.*

Problema 4

Considere $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|\,.$$

a) Demuestre que $\|\cdot\|_1$ es una norma en $\mathbb{R}^2$.

b) Describa el conjunto:

$$B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|_1 \leq 1\}.$$

Soluciones del parcial: Respuestas