INTRODUCCIÓN AL CURSO

Preng Biba

Agenda

- Programa del Curso.
- Repaso de Estadística.
- Estimadores.
- Pruebas de Hipótesis.

PROGRAMA DEL CURSO

REPASO DE ESTADÍSTICA

Probabilidad

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(E)}$$

Espacio muestral de la tirada de dos dados

- El Espacio muestral de la tirada de dos dados tiene 36 resultados, estos son:

$$E_1 = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6), \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6), \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6), \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6), \\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6), \\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \end{Bmatrix}$$

Definición de probabilidad

Suponga que S es un espacio muestral asociado a un experimento donde a todo evento A en S le asignamos un numero, P(A) llamado probabilidad de A, de modo que cumple con los siguientes axiomas

- $Axioma\ 1\text{:}\ P(A) \geq 0$
- $Axioma\ 2\text{:} P(S) = 1$
- $Axioma\ 3\text{:} A_1, A_2, A_3, \ldots$

$Estos\ forman\ una\ secuencia\ de\ eventos\ porpares\ mutuamente\ excluyentes\ en\ S, entonces$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots,) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

PROBABILIDADES: Regla de la adición

Teorema 2.1

- Sean A1 y A2, dos eventos cualesquiera de un espacio muestrál E, donde se ha definido la medida de Probabilidad “P”, entonces:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Variables Aleatorias

- Se dice que una variable aleatoria X es discreta si puede tomar sólo un número finito (o contablemente infinito) de valores distintos.

Definición
Sea E un espacio muestral y sea

$$X: E \to \mathbb{R}$$

una función definida sobre E, tal que a cada resultado de E le hace corresponder un número real. Puesto que los resultados en E son aleatorios, se dice que la función X, es aleatoria y a tal función se le conoce como **Variable aleatoria**.

Ejemplo 1

Sea $\boldsymbol{E} = \{\boldsymbol{CC}, \boldsymbol{CE}, \boldsymbol{EC}, \boldsymbol{EE}\}$ el espacio muestral del lanzamiento de dos monedas. Hemos llamado “C” a Cara y “E” a Escudo

$$
\begin{aligned}
&X: E \rightarrow \mathbb{R} \\
&CC \rightarrow 0 \\
&CE \rightarrow 1 \\
&EC \rightarrow 1 \\
&EE \rightarrow 2
\end{aligned}
$$

La variable aleatoria “toma” los valores 0,1 y 2

Ejemplo 2

En el lanzamiento de dos dados. Considere la Variable aleatoria:

$$X: E \to \mathbb{R}$$
$$(m, n) \to X(m, n) = m + n$$

la suma de los resultados de las caras del dado.

1. Cual es la cardinalidad de E?
2. Que valores puede tomar X?

Asignación de probabilidades para el nuevo espacio muestral [cont]

- Hemos establecido, para espacios muestrales finitos, o infinitos numerables, que si x es un posible valor de $X(r_i)$ se tiene:

$$P(X = x) = \sum_{X=x} p_i \text{ (Medida del evento)}$$

- Donde $p_i = p(X(r_i) = x_i)$ para un resultado ; extendiéndose la suma a aquellos puntos en los que X tome los mismos valores

Función de densidad de probabilidad (pdf)

- **Definición 5.4.** La probabilidad de que X tome el valor x, $P(X = x)$, se define como la suma de las probabilidades de todos los puntos muéstrales en E a los que se asigna el valor x. A veces denotaremos $P(X = x)$ por $p(x)$. La función de probabilidad sobre la variable aleatoria X se conoce como **función de densidad de probabilidad** (probability density function pdf)

- La función de densidad de probabilidad cumple con:

$$\sum_{x} p(x) = 1$$

Ejemplo 4

Se lanzan al aire dos monedas. Sea *X* la función que asigna a los resultados {CC,CL,LC,LL} el número total de caras que se obtienen, esto es,

X(CC)=2 ; X(CL)=1 ; X(LC)=1 ; X(LL)=0

Se define "p", por medio de:

$$
\begin{array}{lcc}
\mathrm{E} & \xrightarrow{X} & X(\mathrm{E}) \in \Re \\
CL & \to & 1 \\
LC & \to & 1 \\
CC & \to & 2 \\
LL & \to & 0 \\
\kappa \downarrow & & \downarrow \\
P_{\mathrm{E}} & \xrightarrow{P} & [0,1]
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcc}
X(E) & \xrightarrow{p} & [0,1] \\
0 & \to & \frac{1}{4} \\
1 & \to & \frac{1}{2} \\
2 & \to & \frac{1}{4}
\end{array}
$$

Ejemplo 4 [cont]

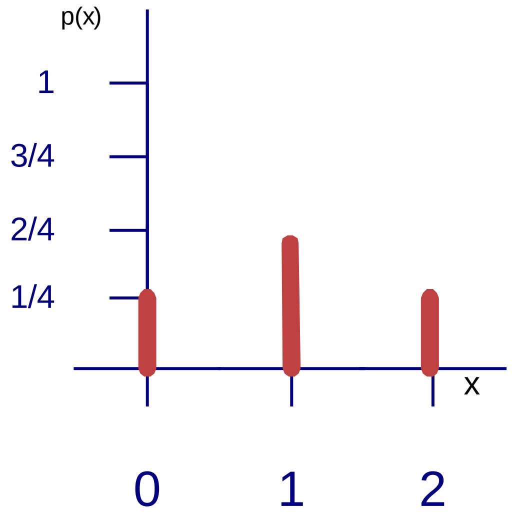
Sean

$$A_0 = \{LL\}$$
$$A_1 = \{LC, CL\}$$
$$A_2 = \{CC\}$$

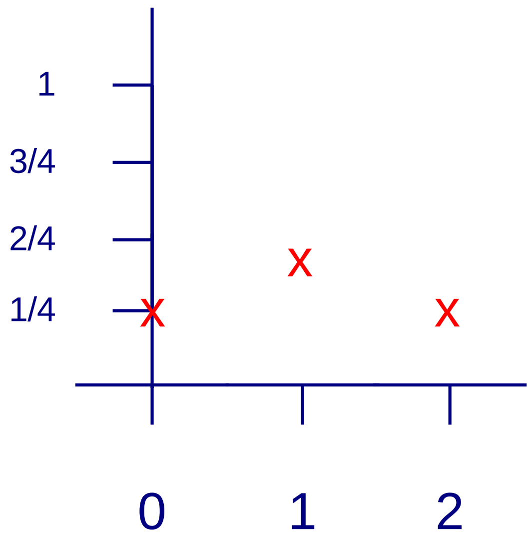
Entonces

$$p(A_0) = \frac{1}{4}$$
$$p(A_1) = \frac{2}{4}$$
$$p(A_2) = \frac{1}{4}$$

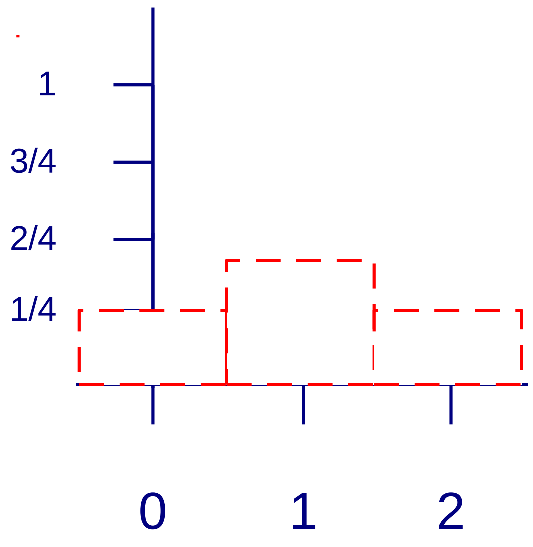
Ejemplo 4 [cont]



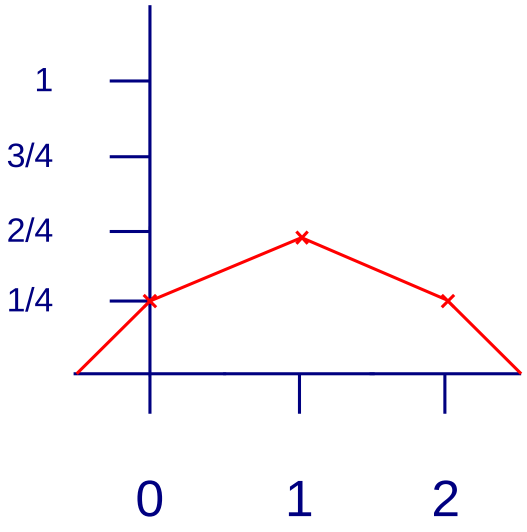
a)
Diagrama de barras



b)
Puntos de la gráfica



c)
Histograma



d)
Polígono de Frecuencias

Función de distribución acumulada (cdf)

- **Definición 5.5.** Una función relacionada con la función de densidad de probabilidad $p: X(E) \to [0,1]$ es la llamada **función de distribución acumulada (CDF)** definida como:

$$F: X(E) \to [0,1]$$

$$x \to F(x) = P(X(A_i) \leq x) = \sum_{t \leq x} p(t)$$

- $F(x)$ nos da la probabilidad de que tome un valor menor o igual que x; mientras que $p(x)$ da la probabilidad de que tome el valor particular x.

En el ejemplo de la TIRADA DE DOS DADOS

$$F(2) = P\left(X(r_i) \leq 2\right) = \sum_{t \leq 2} p(t) = p(2) = \frac{1}{36}$$

$$F(3) = P\left(X(r_i) \leq 3\right) = \sum_{t \leq 3} p(t) = p(2) + p(3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36}$$

$$F(4) = P\left(X(r_i) \leq 4\right) = \sum_{t \leq 4} p(t) = p(2) + p(3) + p(4) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36}$$

$$F(5) = P\left(X(r_i) \leq 5\right) = \sum_{t \leq 5} p(t) = p(2) + p(3) + p(4) + p(5) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36}$$

$$F(6) = P\left(X(r_i) \leq 6\right) = \sum_{t \leq 6} p(t) = p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = \frac{5}{18} + \frac{5}{36} = \frac{15}{36}$$

… Función de Distribución Acuulada

En el ejemplo de la TIRADA DE DOS DADOS

$$F(7) = P\left(X(r_i) \le 7\right) = \sum_{t \le 7} p(t) = p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) + p(7) = \frac{15}{36} + \frac{6}{36} = \frac{21}{36}$$

$$F(8) = P\left(X \le 8\right) = \sum_{t \le 8} p(t) = \frac{21}{36} + \frac{5}{36} = \frac{26}{36}$$

$$F(9) = P\left(X \le 9\right) = \sum_{t \le 9} p(t) = \frac{26}{36} + \frac{4}{36} = \frac{30}{36}$$

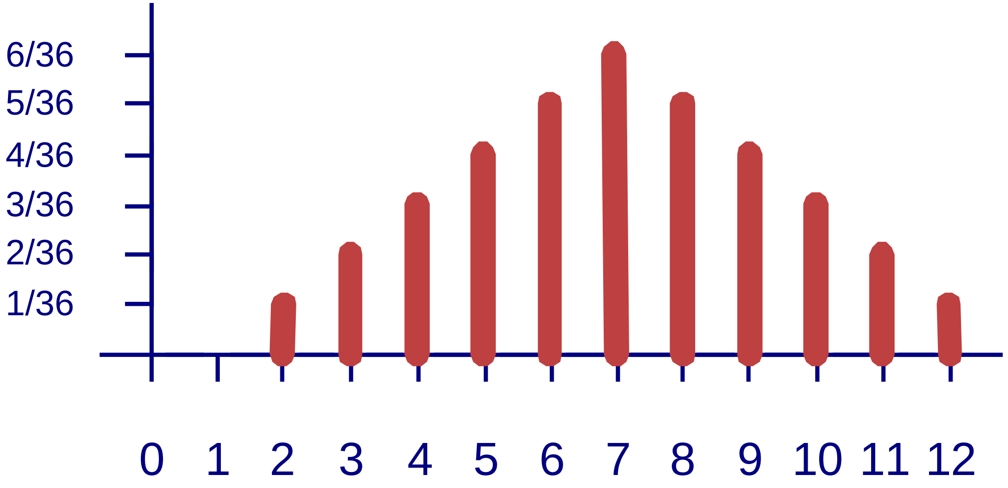
$$F(10) = P\left(X \le 10\right) = \sum_{t \le 10} p(t) = \frac{30}{36} + \frac{3}{36} = \frac{33}{36}$$

$$F(11) = P\left(X \le 11\right) = \sum_{t \le 11} p(t) = \frac{33}{36} + \frac{2}{36} = \frac{35}{36}$$

$$F(12) = P\left(X \le 12\right) = \sum_{t \le 12} p(t) = \frac{35}{36} + \frac{1}{36} = \frac{36}{36} = 1 \qquad (3.8)$$

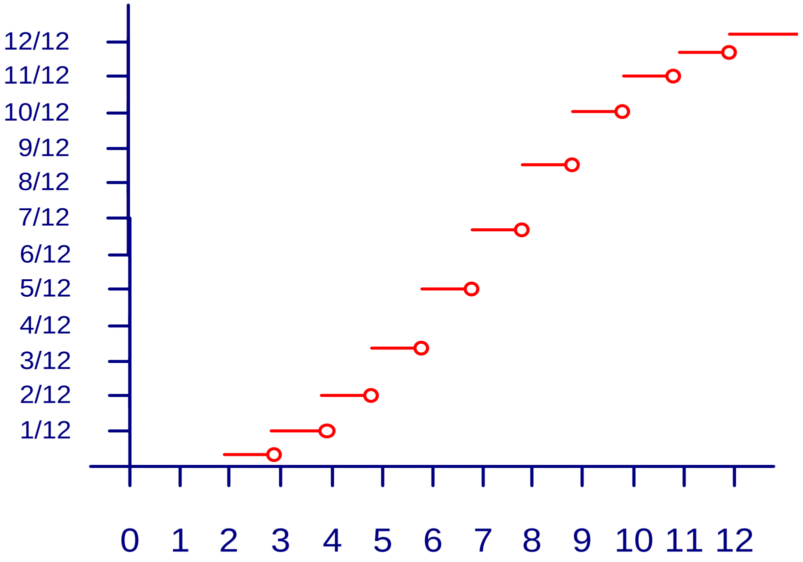
Ejemplo: Función de distribución acumulada para la tirada de dos dados

- .



Función de Densidad

(Diagrama de barras)



Función de Distribución Acumulada

Fig. 3.9

Teorema. $P(X > x) = 1 - F(x)$

Demostración.

$$1 = P(X \leq x) + P(X > x)$$

Quiere decir que,

$$1 = F(x) + P(X > x)$$

Teorema.

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; \Pr(x_1 < X \leq x_2) \;=\; F(x_2) - F(x_1).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
&\Pr(x_1 < X \leq x_2) \\
&\;= \;\Pr(X > x_1 \;\cap\; X \leq x_2) \\
&\;= \;\Pr(X > x_1) + \Pr(X \leq x_2) - \Pr(X > x_1 \;\cup\; X \leq x_2) \\
&\;= \;1 - F(x_1) + F(x_2) - 1.
\end{aligned}$$

4.1 *Valor Esperado de una Variable Aleatoria*

- **Definición 4.1**: Sea X una variable aleatoria discreta con función de densidad de probabilidad *p.* Entonces, el valor esperado de esta definida por:

$$E(X) = \sum_{x} x \; p(x)$$

- Formalmente hablando, el valor esperado de *X* (variable aleatoria discreta) existe, si la suma dada $\sum x\, p(x)$ converge absolutamente, es decir

$$\sum_{X} |x| \, p(x) < \infty$$

Varianza

Si Y es una variable aleatoria con media $E(Y) = \mu$, la varianza de una variable aleatoria Y se define como el valor esperado de $(Y - \mu)^2$. Esto es,

$$V(Y) = E[(Y - \mu)^2].$$

La *desviación estándar* de Y es la raíz cuadrada positiva de $V(Y)$.

Distribución Normal de Probabilidades (La función de densidad Normal)

Definición. Una variable aleatoria X se dice que tiene una distribución de probabilidad (densidad) normal, si:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad ; \qquad \sigma > 0, \quad -\infty < \mu < \infty; \quad -\infty < x < \infty$$

Nótese que la función de densidad tiene dos parámetros que son μ y σ^2.

- **Ejemplo**. Ciertos estudios muestran que el rendimiento de la gasolina para autos compactos vendidos en USA es de 49.10 Km./gal y una desviación estándar de 7.245 Km./gal. Si un fabricante desea diseñar un carro compacto más económico que el 95% de los vehículos compactos vendidos en USA, ¿Cuál debe ser el rendimiento mínimo del nuevo vehículo?

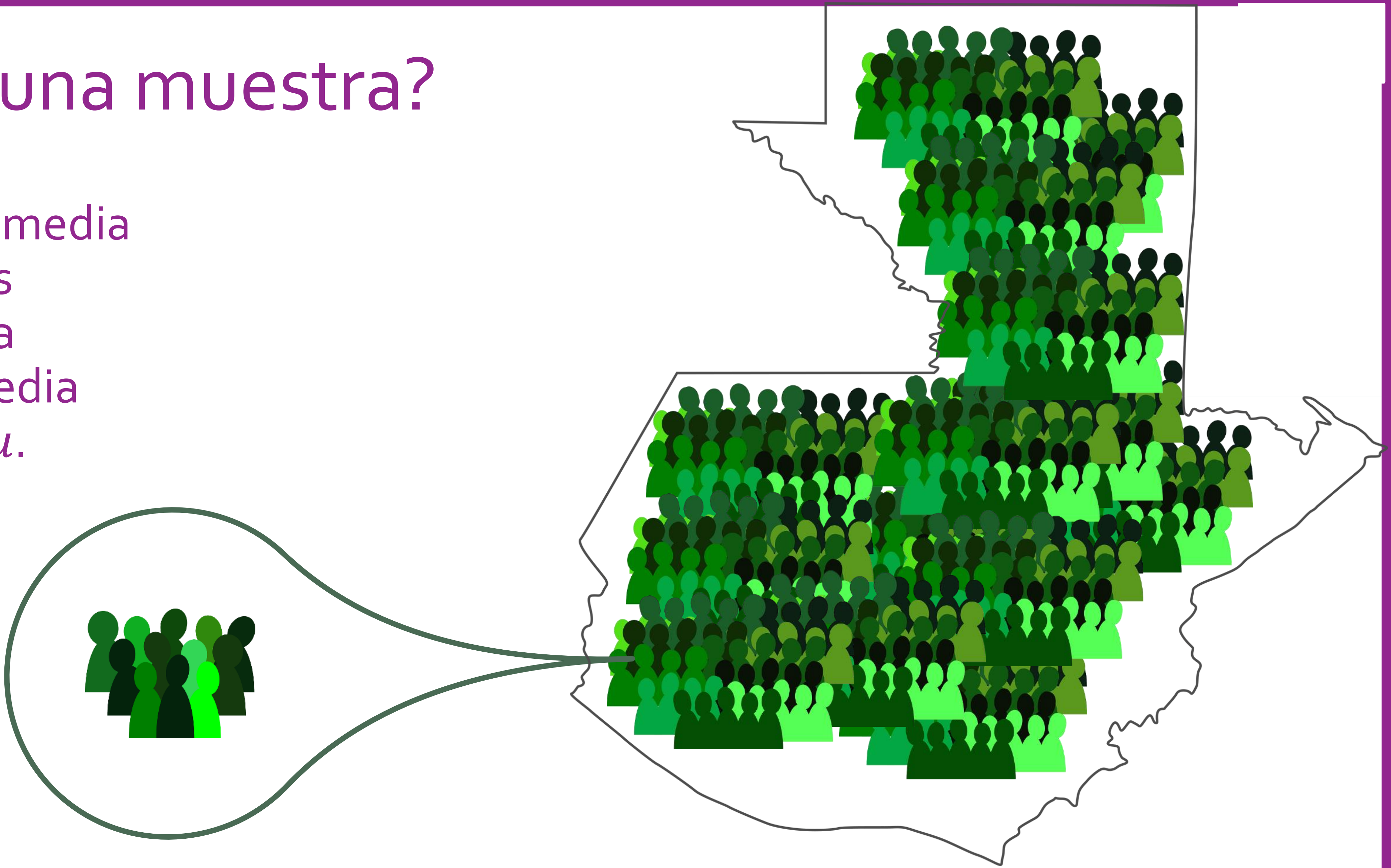
ESTIMADORES

ESTIMATION

- Existen dos tipos de inferencia:
  - Estimación
  - Prueba de hipótesis
- El objetivo de una **estimación** es determinar el **valor aproximado** de un parámetro poblacional basado en una muestra estadística.
- El objetivo de una **prueba de hipótesis** es verificar la **veracidad** de una hipótesis propuesta.

Que es una muestra?

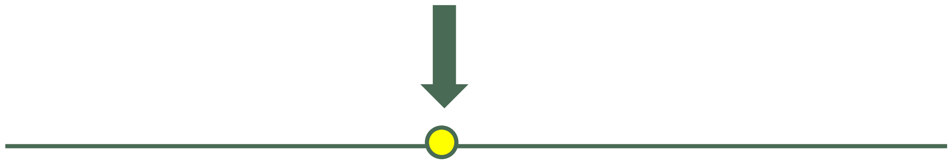
- Ejemplo: La media muestral $\bar{x}$ es utilizada para estimar la media poblacional μ.



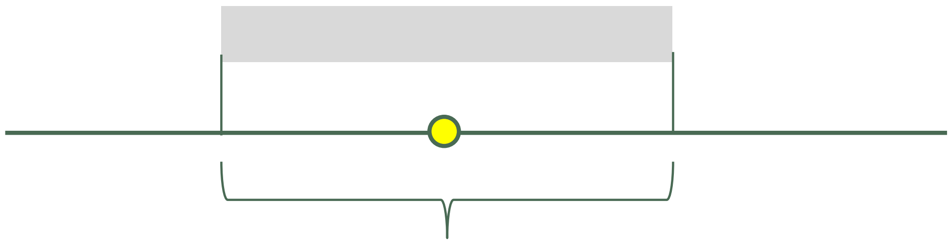
Estimación

- El objetivo de una **estimación** es determinar el **valor aproximado** de un parámetro poblacional basado en una muestra estadística.
- Existen dos tipos de estimadores:

1. Estimador puntual

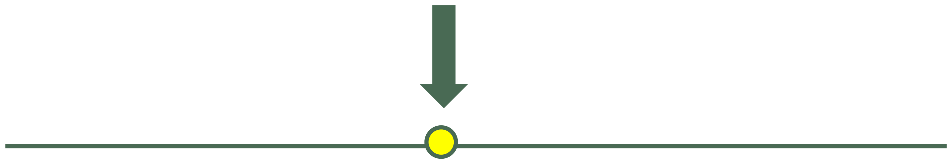


2. Estimador por intervalo



Estimador Puntual

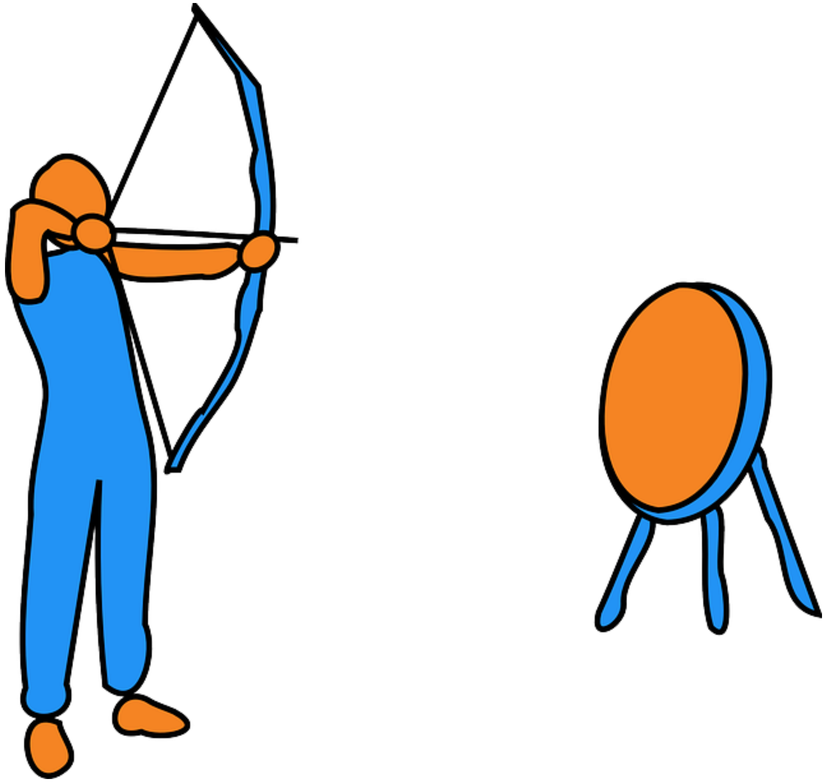
- Un **estimador puntual** hace inferencias sobre una población, estimando el valor del parámetro desconocido utilizando un único valor o punto.



La **estimación puntual** es similar al proceso de disparar una flecha con un arco a un blanco.

- El estimador que genera estimaciones = el arco + el tirador;
- Una muestra particular, una flecha;
- Parámetro de nuestro interés = el blanco.

Sacar una muestra de la población y estimar el valor del parámetro es el equivalente de disparar una sola flecha al blanco.



Estimador Puntual

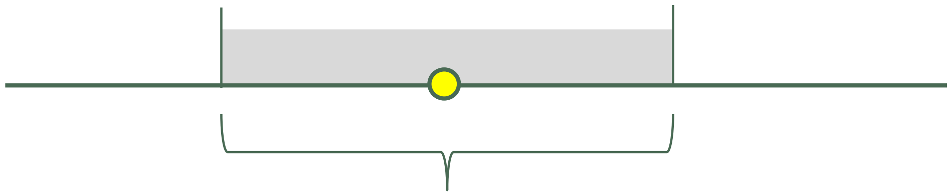
- Recordemos que la probabilidad de un punto en un espacio continuo es cero!

$$P(x = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$$

- De la misma forma, esperaríamos que un estimador puntual se acerque al valor del parámetro conforme el tamaño de la muestral crece.
- Sin embargo, los estimadores puntuales no reflejan los efectos de muestras grandes.
- Por lo tanto, necesitamos emplear un estimador de intervalo para estimar parámetros poblacionales.

Estimador por intervalo

- Un **estimador por intervalo** hace inferencias sobre una población estimado el valor del parámetro desconocido utilizando un intervalo.



- De esta forma, nosotros podemos decir (con cierto porcentaje de certidumbre) que algún parámetro poblacional particular se encuentra acotado por ciertos valores.

Ejemplo

- ¿Cuanto cobra, en promedio, por hora un consultor?
  - $n =?$
  - El **estimador puntual** $\bar{x}$ es ________.

- Alternativamente, podemos decir, usando un **estimador por intervalo**, que el costo promedio por hora de un consultor es entre $100 y $200 la hora.

Parámetro de la Población	Puntual	de Intervalo
Media	1. El guatemalteco medio consume anualmente 40 lbs. de frijol. 2. Un automóvil común de 4 cilindros da en promedio 7 Km./l.	1. El consumo medio anual de frijoles en Guatemala fluctúa entre 15 Kg. y 25 Kg. 2. Un automóvil común de 4 cilindros da en promedio entre 6 y 8 Km./l
Proporción	1. El 22% de los capitalinos se oponen a límites de velocidad más altos. 2. La proporción de estudiantes de estos cursos superiores de economía, que no son del Banco de Guatemala es del 40%.	1. Entre el 18% y el 26% de los residentes capitalinos se oponen a mayores límites de velocidad. 2. La proporción de estudiantes de estos cursos superiores, que no son del Banco de Guatemala está entre el 37% y el 43%.
Desviación Estándar	1. La desviación estándar del recorrido de llantas radiales es de 2,000 millas. 2. La desviación estándar, de la temperatura ambiente del agua de una piscina sin calefacción es de 15 grados centígrados aproximadamente.	1. La desviación estándar del recorrido de llantas radiales está entre 1,500 y 2,500 millas. 2. La desviación estándar, de la temperatura ambiente del agua de una piscina sin calefacción está entre 12 y 20 grados centígrados.

Cualidades de un Estimador

- Las cualidades deseadas de un estimador incluyen:
  - (In) Sesgo
    - Queremos que el estimador sea **insesgado.**
  - Consistencia
    - Queremos que el estimador sea **consistente**.
  - Eficiencia relativa
    - Queremos que el estimador sea **relativamente eficiente**.

Cualidades de un estimador

- Un estimador **insesgado** de un parámetro poblacional es un estimador cuyo valor esperado es igual al parámetro.
- Desearíamos que la distribución de las estimaciones (la distribución muestral del estimador) se centrara alrededor de θ. Esto es, nos gustaría que la media o valor esperado de la distribución de los estimaciones fuera igual a θ.

Unbiased estimator

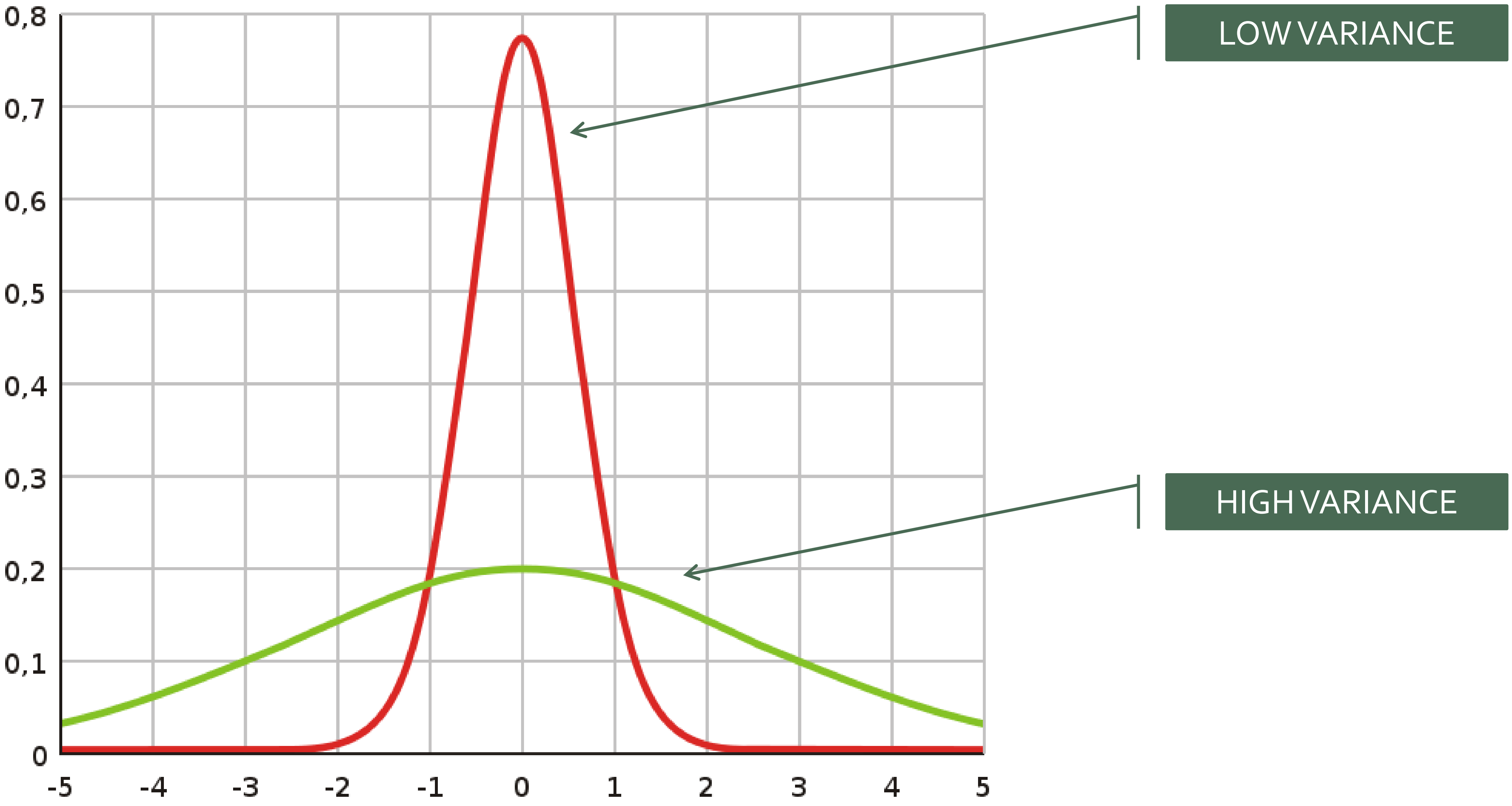
- Se dice que un **estimador es insesgado** si el valor esperado de la distribución de los estimaciones fuera igual a θ.
- Es decir, $E(\hat{\theta}) = \theta$.
- De lo contrario se dice que el estimador es sesgado.
- El sesgo, B, de un estimar puntual se calcula de la siguiente forma:

$$B = E(\hat{\theta}) - \theta$$

Consistencia del estimador

- Un estimador insesgado se dice que es **consistente** si la diferencia entre el estimador y el parámetro se hace mas pequeña mientras el tamaño de la muestra se hace mas grande.
- Esto significa que necesitamos que la dispersión del estimador $\hat{\theta}$ sea la menor posible; esto es de una varianza mínima para que la mayor fracción de valores $\widehat{\theta}$ estén cerca de θ.

Varianza



0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
LOW VARIANCE
HIGH VARIANCE

Eficiencia relativa

- Dados dos estimadores insesgados, el estimador con varianza mas pequeña se dice que es **relativamente eficiente**.
- Siempre tomaremos el estimador que tenga varianza mínima!

Unbiased and mínimum variance

En lugar de utilizar el sesgo y la varianza para describir la bondad de un estimador puntual, se emplea el valor esperado de $(\hat{\theta} - \theta)^2$, esto es el cuadrado de la distancia entre el estimador y su parámetro objetivo.

UN POCO DE FORMALISMO...

- La media del cuadrado del error de un estimador puntual $\hat{\theta}$ se define como el valor esperado de $(\hat{\theta}-\theta)^2$; es decir

$$E\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2$$

- La media del cuadrado del error de un estimador $\hat{\theta}$, denotado como MCE $(\hat{\theta})$, es una función al mismo tiempo de su varianza y del sesgo.

PARA LOS INTERESADOS...

- **Teorema 10.1:** $MCE(\hat{\theta}) = \operatorname{var}(\hat{\theta}) + B^2$
- En efecto:

$$(\hat{\theta}-\theta) = (\hat{\theta}-E(\hat{\theta})+E(\hat{\theta})-\theta) = \hat{\theta}-E(\hat{\theta})+B =$$

$$(\hat{\theta}-\theta)^2 = [(\hat{\theta}-E(\hat{\theta}))+B]^2 = (\hat{\theta}-E(\hat{\theta}))^2 + B^2 + 2B(\hat{\theta}-E(\hat{\theta}))$$

$$MCE(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta}-\theta)^2] = E[(\hat{\theta}-E(\hat{\theta}))^2 + B^2 + 2B(\hat{\theta}-E(\hat{\theta}))] =$$

$$MCE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) + [E(E(\theta)]^2 - 2E[(\hat{\theta})E(\hat{\theta})] + E(B^2) + 2BE(\hat{\theta}-E(\hat{\theta})) =$$

$$MCE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) + [E(\theta)]^2 - 2E(\hat{\theta})E(\hat{\theta})] + B^2 + 2B[E(\hat{\theta})-E(\hat{\theta})] =$$

$$MCE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) - [(E(\theta)]^2 + B^2 = \operatorname{var}(\theta) + B^2$$

Nótese que si $\hat{\theta}$ es insesgado esto implica que:

$$\text{MCE} \ (\hat{\theta}) = \operatorname{var}(\hat{\theta})$$

ESTIMADOR POR INTERVALO

Estimador por intervalo

- Es deseable que el intervalo de la estimación por intervalo:

1. Contenga al parámetro objetivo θ.
2. Sea lo mas estrecho posible.

Estimador por intervalo

- Es claro que uno o ambos extremos variarían en forma aleatoria ya que depende de las mediciones de la muestra.
- Así, la longitud y localización son aleatorias y no se puede garantizar que contengan a θ pues se trata de una sola muestra.
- Por lo anterior, el objetivo será encontrar un estimador de intervalo que genere intervalos angostos que contenga a θ con una alta probabilidad.

Intervalos de confianza

- Los estimadores por intervalo se denominan **intervalos de confianza**, sus extremos se llaman límite inferior y superior de confianza y la probabilidad de que un intervalo de confianza contenga a θ, se conoce como coeficiente de confianza.

- Si se sabe que $(1-\alpha)$ asociado a nuestro estimador es alto, estaremos altamente confiados en que un intervalo de confianza de los construidos a partir de una sola muestra, contendrá a θ con una alta probabilidad.

Confidence Interval Estimator for μ

La probabilidad $1-\alpha$ es llamada ***nivel de confianza***.

Usually represented with a "plus/minus" (±) sign

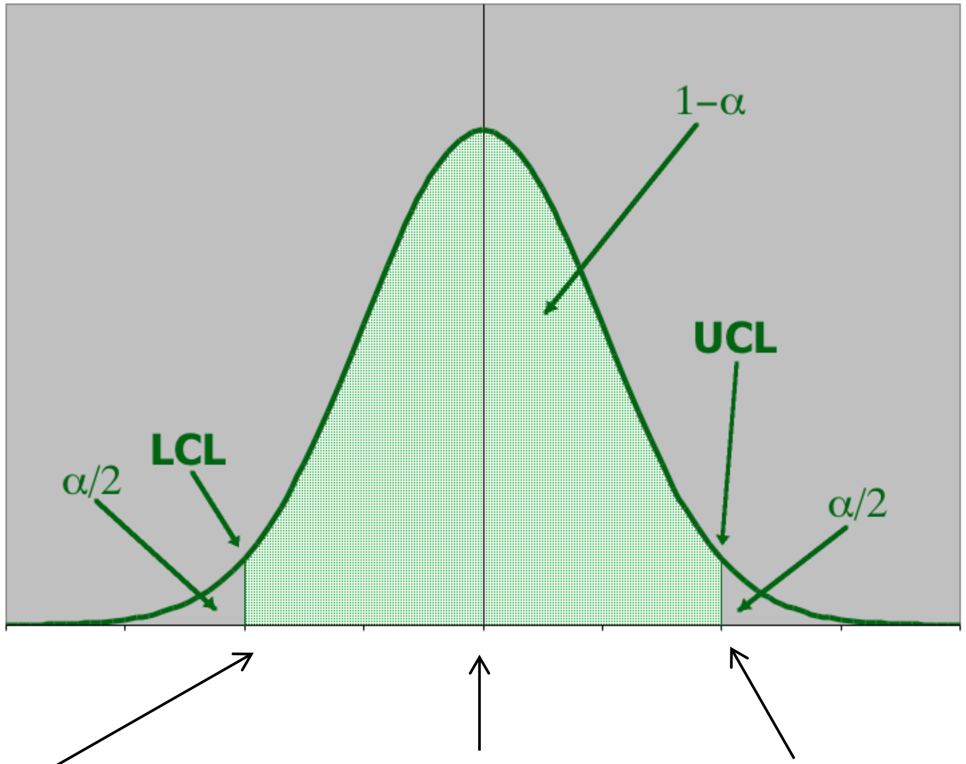
upper confidence limit (UCL)

$$\bar{X} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \left\{ \bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\}$$

lower confidence limit (LCL)

Graficamente…

- ¿Dònde esta exactamente la media poblacional?



Tal vez aquí? … o aquí?… …o probablemente aquí…

4 niveles de confianza tipicos

- Niveles de confianza

$1-\alpha$	α	$\alpha/2$	$z_{\alpha/2}$
.90	.10	.05	$z_{.05} = 1.645$
.95	.05	.025	$z_{.025} = 1.96$
.98	.02	.01	$z_{.01} = 2.33$
.99	.01	.005	$z_{.005} = 2.575$

Intervalos de Confianza

There is a constant multiplier, usually a constant around 2 or a little higher, that comes from the distribution being used and the degree of confidence required.

The "margin of error" is some multiplier times the standard error, and it is added to and subtracted from the mean to get the endpoints of the interval.

$$\overline{X} \pm 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

The sample mean is the best point estimate and so it is the center of the confidence interval.

The standard error of the mean, which is the standard deviation of the sampling distribution, is $\sigma/\sqrt{n}$.

Grafico tomado de www.psu.edu.

Ejemplo

Se ha obtenido una muestra de 25 alumnos de una Facultad para estimar la calificación media de los expedientes de los alumnos en la Facultad. Se sabe por otros cursos que la desviación típica de las puntuaciones en dicha Facultad es de 2.01 puntos.

La media de la muestra fue de 4.9.

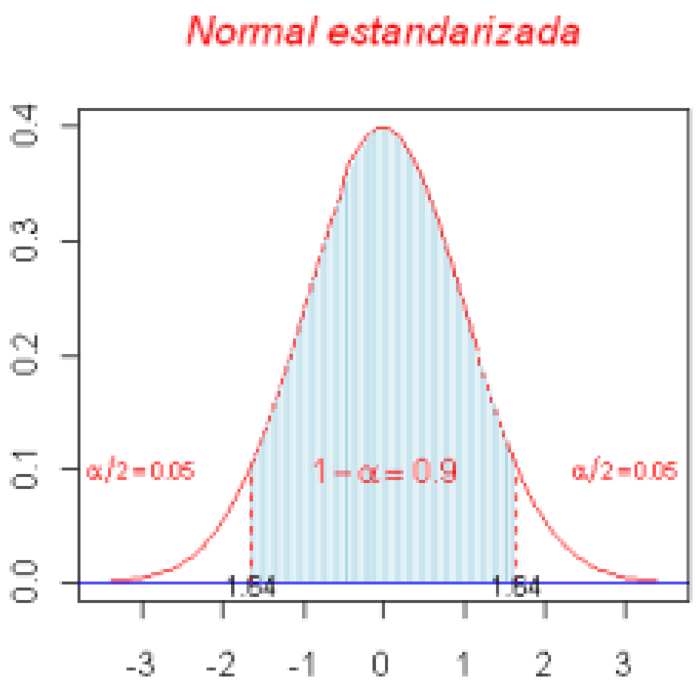
1. Intervalo de confianza al 90 %.
2. Intervalo de confianza al 99 %.

Solución

1. Intervalo de confianza al 90 %. Usamos la fórmula:

$$\overline{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Los cuantiles de orden 0.05 y 0.95, que encierran en el centro de la distribución normal un área igual a 0.9 se muestran en el gráfico siguiente:



(4.24,5.56)

Por último, sustituyendo los datos en la fórmula del intervalo, tenemos:

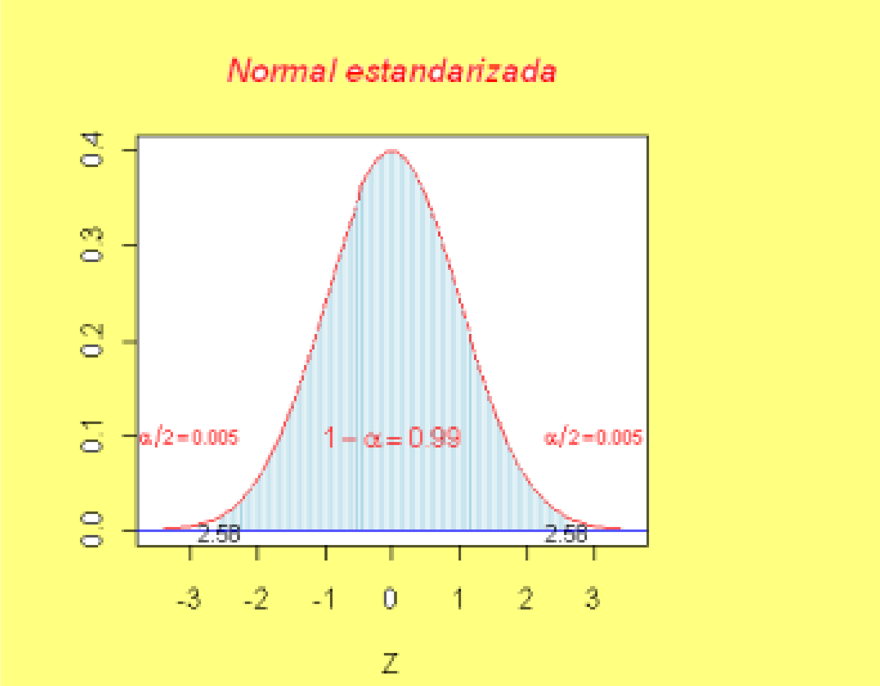
$$4{,}9 \pm 1{,}64 \frac{2{,}01}{\sqrt{25}} \equiv 4{,}9 \pm 0{,}66$$

Tabla

2. Intervalo de confianza al 99 %.

$$\overline{X} \pm z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

De modo similar obtenemos los cuantiles de orden 0.005 y 0.995 que describen en el modelo normal una confianza del 99 %



(3.86,5.94)

Por último, sustituyendo los datos en la fórmula del intervalo, tenemos:

$$4{,}9 \pm 2{,}58\frac{2{,}01}{\sqrt{25}} = 4{,}9 \pm 1{,}04$$

Tabla

Sample Size

- Como calculamos el tamaño de una muestra?

Recordemos

Asumamos $\hat{p} = \frac{X}{n}$

Y además, $E(X) = np; \quad var(X) = npq$

Entonces:

$$E(\hat{p}) = E(X/n) = \frac{1}{n} E(X) = \frac{1}{n} np = p$$

Y,

$$var(\hat{p}) = var\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2} var(X) = \frac{1}{n^2} npq = \frac{pq}{n}$$

Por lo que:

$$\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Entonces, como se calcula?

En primer lugar nos preguntamos qué error estamos dispuestos a aceptar. Unas vez resuelto este dilema (supongamos que aceptamos el error "ε"). Asignamos este valor a la distancia entre el centro del intervalo (el estimador puntual) y un extremo del intervalo de confianza (es decir: δ); esto es: $\varepsilon = \delta$.

Y como sabemos que $\delta = z_{\alpha/2} * \sigma$

Entonces podemos escribir :

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} * \sqrt{\frac{pq}{n}}$$

Si no se tiene información para p, suele usarse p = 0.5

Ejemplo

- Determinara el tamaño de la muestra para hacer una estimación de la intención de voto para las próximas elecciones, aceptando un error del 2%, con un nivel de significancia de $\alpha = 5\% = 0.05$. (Entonces $\alpha/2 = 0.025$).

- Sustituyendo los valores $0.02 = 1.96 * \sqrt{\frac{0.5 * 0.5}{n}}$

Tabla

- por lo que: $0.02\sqrt{n} = 1.96 * 0.5$ entonces .

$$n = \left(\frac{0.98}{0.02}\right)^2 = 49^2 = 2401$$

- Esto significa que se requerirá una muestra aleatoria de 2, 401 personas.

PRUEBAS DE HIPÓTESIS

Agenda

- Generalidades
- Formulación de Pruebas de Hipótesis.
- Errores en Pruebas de Hipótesis.
- Ejemplo 1
- Valor – P.
- Ejemplo 2
- Pruebas de Hipótesis para muestras pequeñas.

Pruebas de Hipótesis

- Se refiere a un mecanismo de estadística inferencial para demostrar la veracidad o falsedad de una afirmación (hipótesis).

Pruebas de Hipótesis

- Cuando se hace una prueba de hipótesis se empieza por hacer una suposición tentativa acerca del parámetro poblacional. A esta suposición tentativa se le llama **hipótesis nula** y se denota por H_o. Después se define otra hipótesis, llamada **hipótesis alternativa**, que dice lo contrario de lo que establece la hipótesis nula. La hipótesis alternativa se denota H_a.

FORMULACIÓN DE PRUEBAS DE HIPÓTESIS

Formulación para Investigación

- En estudios de investigación como éste, las hipótesis nula y alternativa deben formularse de manera que al rechazar H_o se apoye la conclusión de la investigación. La hipótesis de la investigación, entonces, debe expresarse como hipótesis alternativa.

Validez de Afirmación

- En toda situación en la que se desee probar la validez de una afirmación, la hipótesis nula se suele basar en la suposición de que la afirmación sea verdadera. Entonces, la hipótesis alternativa se formula de manera que rechazar H_o proporcione la evidencia estadística de que la suposición establecida es incorrecta.

- Siempre que se rechace H_o deberán considerarse las medidas necesarias para corregir la afirmación.

Toma de Decisiones

- En general, este tipo de situaciones se presentan cuando la persona que debe tomar una decisión tiene que elegir entre dos líneas de acción, una relacionada con la hipótesis nula y otra con la hipótesis alternativa.

Resumen

$H_0: \mu \geq \mu_0$ $H_a: \mu < \mu_0$	$H_0: \mu \leq \mu_0$ $H_a: \mu > \mu_0$	$H_0: \mu = \mu_0$ $H_a: \mu \neq \mu_0$

Prueba de una Cola

Prueba de dos Colas

ERRORES EN PRUEBAS DE HIPÓTESIS

Errores Tipo I (α) y II (β)

- La hipótesis nula y alternativa son afirmaciones opuestas acerca de una población, Una de las dos puede ser verdadera, en consecuencia la otra debe ser falsa.

- Sin embargo puede existir error al probar una hipótesis ya que las mediciones se están realizando sobre una muestra y no sobre una población.

Errores Tipo I (α) y II (β)

- Error Tipo 1: Si rechazamos la hipótesis nula y esta en realidad era verdadera.

- Error Tipo 2: Si aceptamos la hipótesis nula y en realidad era falsa.

Errores Tipo I (α) y II (β)

Decisión	Verdadera	Falsa
Rechazar H_0	Error tipo I (α)	Decisión correcta
Aceptar H_0	Decisión correcta	Error tipo II (β)

Estadístico de Prueba

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{(\sigma/\sqrt{n})}$$

EJEMPLO 1

Ejemplo 1

- Sunshine Rice una empresa que se dedica a la producción de cereales desea evaluar si el proceso de llenado en su cadena de suministro cumple con las condiciones especificadas por la entidad reguladora de empresas productoras de cereales y semillas.

- La entidad reguladora exige que el contenido de un producto no se desvié más de 1.667% del contenido especificado en la etiqueta.

Ejemplo 1

- Suponga que el contenido de la presentación pequeña de Sunshine Rice es de 300 g, use una prueba de hipótesis para decidir si Sunshine debe mejorar sus procesos de llenado.

- Suponga que se toma una muestra de 36 y se sabe que la desviación estándar de la población es de 15.

Ejemplo #1

- Ya que la prueba de hipótesis llevará a la toma de una decisión, debemos formular la siguiente prueba de hipótesis.

$$H_0: \mu = 300$$
$$H_a: \mu \neq 300$$

Ejemplo 1

- Para el caso de Sunshine, ¿Cuánto es el rango permitido por la entidad reguladora?

$$[295g\ ,305g]$$

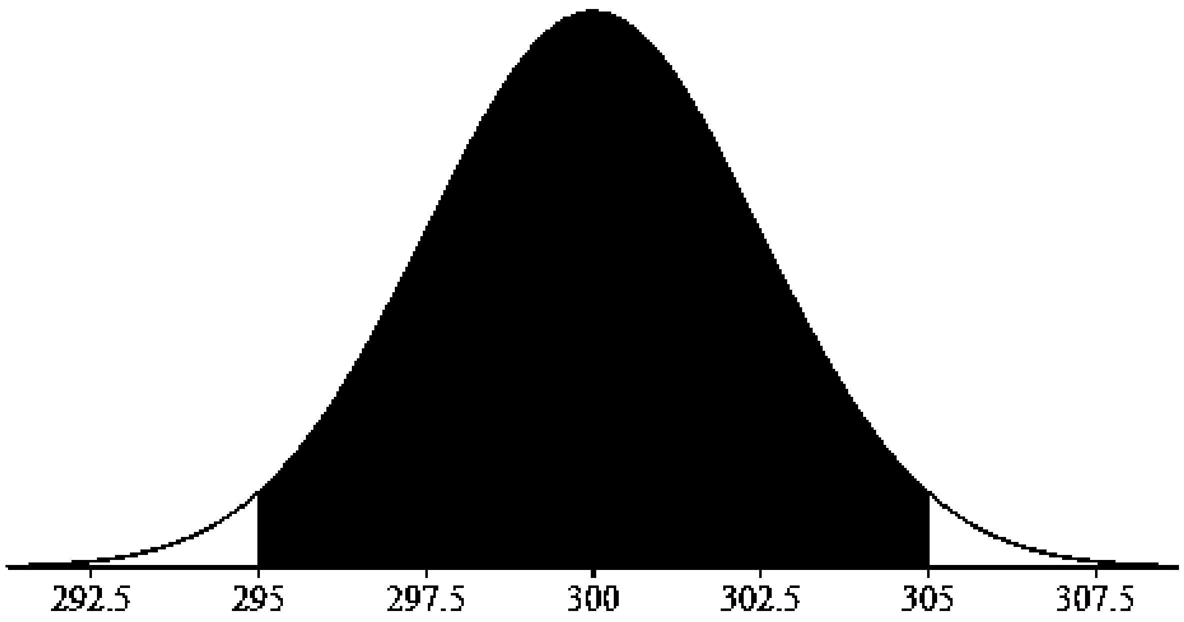
Ejemplo 1

- Primero debemos calcular el estadístico de prueba.

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{(\sigma/\sqrt{n})}$$

Ejemplo #1

- Calculemos la probabilidad de que una observación este dentro del rango



Ejemplo 1

- Recordemos que $H_0: \mu = 300\ g$

- Usando la gráfica anterior, ¿que sería aceptar la hipótesis nula cuando está es falsa?

- Usando la gráfica anterior, ¿Cuánto es la probabilidad de aceptar la hipótesis nula cuando está es falsa?

Nivel de Significancia (α)

- El nivel de significancia es la probabilidad de cometer un error tipo I cuando se considera como igualdad la hipótesis nula.

- También se puede entender como una medida de que tan permitido es cometer un error al asumir que la hipótesis nula es aceptada cuando en realidad es falsa.

VALOR - P

Valor - P

- Se refiere a la probabilidad de haber obtenido una muestra que contradiga la hipótesis nula.

- El valor *p* nos muestra la probabilidad de haber obtenido el resultado que hemos obtenido si suponemos que la hipótesis nula es verdadera.

Valor - P

- Entre más pequeño sea, existe más evidencia contra la hipótesis nula.

Valor - P

- Si $p < 0.01$existe evidencia muy fuerte en contra de la hipótesis nula.

- Si $0.01 \leq p \leq 0.05$ existe evidencia fuerte contra la hipótesis nula.

Valor - P

- Si $0.05 < p \leq 0.1$ existe evidencia en contra de la hipótesis nula.

- Si $p > 0.1$ no existe evidencia suficiente contra la hipótesis nula.

EJEMPLO 2

Ejemplo #2

- La Federal Trade Commission, FTC, realiza periódicamente estudios estadísticos con objeto de comprobar las afirmaciones de los fabricantes acerca de sus productos.
- Por ejemplo, en la etiqueta de una lata grande de Hilltop Coffee dice que la lata contiene 3 libras de café.
- La FTC sabe que el proceso de producción de Hilltop no permite llenar las latas con 3 libras exactas de café por lata, incluso si la media poblacional del peso de llenado de todas las latas es de 3 libras por lata.

Ejemplo #2

- Sin embargo, mientras la media poblacional del peso de llenado sea por lo menos 3 libras por lata, los derechos del consumidor estarán protegidos.
- Por tanto, la FTC interpreta que la información Por tanto, la FTC interpreta que la información de la etiqueta de una lata grande de café Hilltop tiene una media poblacional del peso de llenado de por lo menos 3 libras por lata.

Ejemplo #2

- Suponga que se realiza obtiene una muestra de $n = 36$ con una media de $\bar{x} = 2.92\ lbs$, y una desviación estándar $\sigma = 0.18$.

Ejemplo #2

$$H_0 : \mu \geq 3$$
$$H_a : \mu < 3$$

Ejemplo #2

- Calculamos el Estadístico de Prueba para

- Ahora calculamos el p-valor usando la tabla de la distribución normal.

Ejemplo #2

- Ahora decidamos si utilizando únicamente el Valor - P para rechazar o aceptar la hipótesis nula.

- Si $p < 0.01$existe evidencia muy fuerte en contra de la hipótesis nula.

CONTRASTANDO $valor - p$ CONTRA α

Contraste contra α

- Si el valor de *p* es inferior al nivel de significación, lo más creíble es que la hipótesis nula es falsa. Sin embargo, también es posible que estemos ante una observación atípica, por lo que estaríamos cometiendo el error estadístico de rechazar la hipótesis nula cuando ésta es verdadera basándonos en que hemos tenido la *mala suerte* de encontrar una observación atípica. (error tipo I).

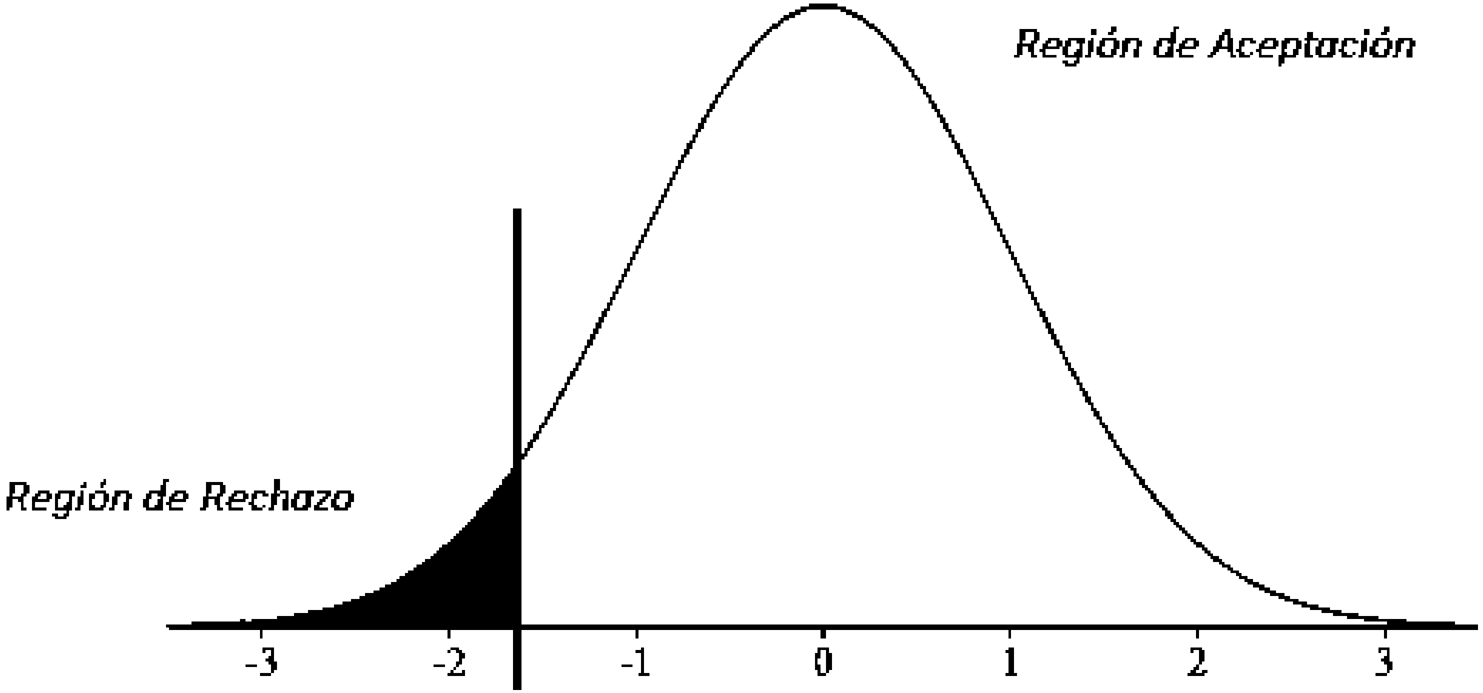
Contraste contra α

- Este tipo de errores se puede afrontarse; con un valor α más grande por ejemplo 0,05 ya que en esté caso es más probable cometer un error que haber obtenido una observación atípica, de modo que si se cumple que $\boldsymbol{valor - p \leq \alpha}$ en realidad la hipótesis nula no puede ser verdeara.

- También se puede tratar de subsanar dicho error aumentando el tamaño de la muestra obtenida, lo que reduce la posibilidad de que el dato obtenido sea casualmente raro.

Prueba de Hipótesis con valor - P

Se rechaza H_o si $\boldsymbol{valor - p \leq \alpha}$



Conclusión

- Debido a que $\boldsymbol{valor - p \leq \alpha}$ rechazamos la hipótesis nula y aceptamos la hipótesis alternativa $(\mu \leq 3)$.

- Es decir que Hilltop Coffe no cumple con la especificación requerida y será sancionado.

VALORES CRÍTICOS

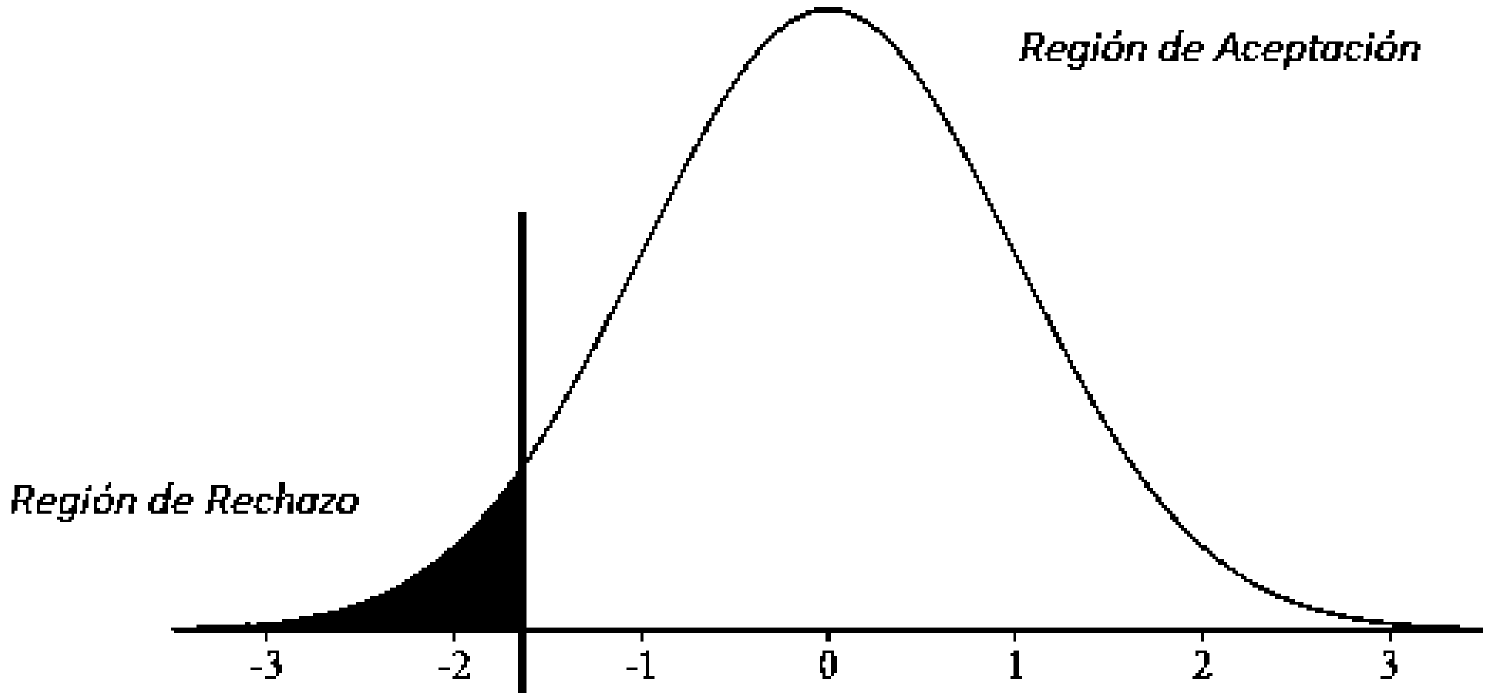
Valores Críticos

- Este procedimiento consiste en comparar el estadístico de prueba contra el valor critico el cual se obtiene a partir del nivel de significancia seleccionado para la prueba.

- El valor crítico es el mayor valor del estadístico de prueba que hará que se rechace la hipótesis nula.

Valores Críticos

- Se rechaza si H_0 si $\boldsymbol{Z} \leq \boldsymbol{Z}_{\alpha}$



Valores Críticos

- ¿Para el nivel de significancia de $\alpha = 0.01$ cuanto es el valor crítico?

- $z_\alpha = -2.33$

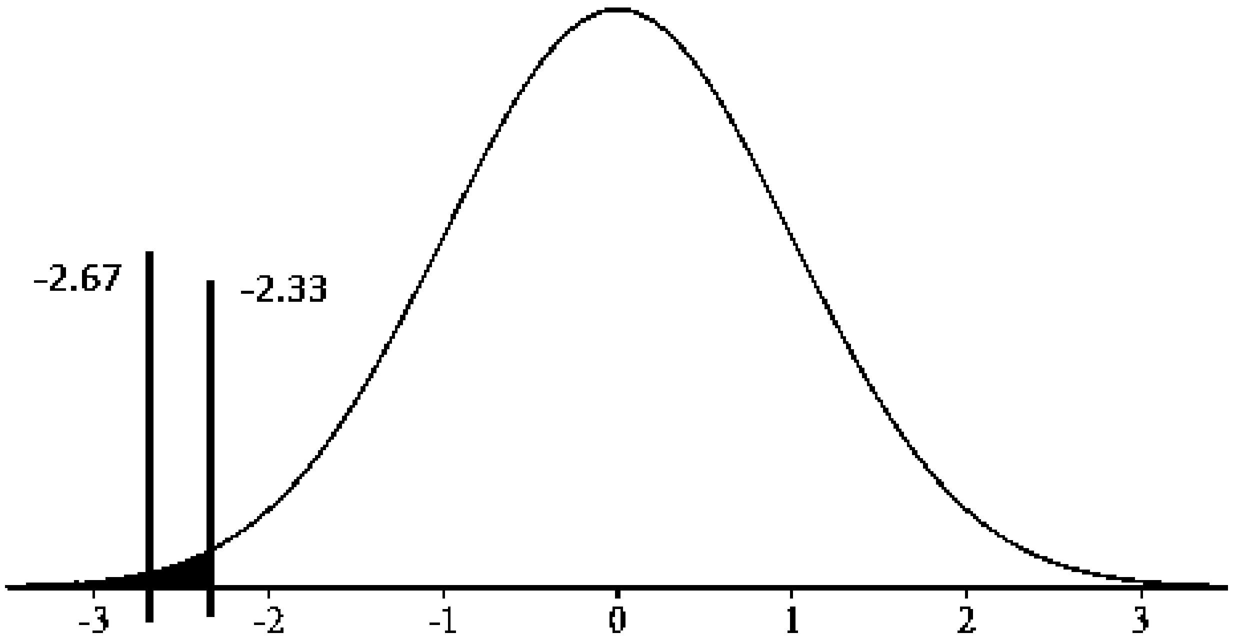
Valores Crítico

- Recordemos que el estadístico de prueba del problema es

- $Z = -2.67$

Valor Crítico

- Debido a que $\boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{z_\alpha}$ rechazamos la hipótesis nula.



Valores Críticos

- ¿A cuanto equivale el valor crítico en la distribución normal con σ conocida?

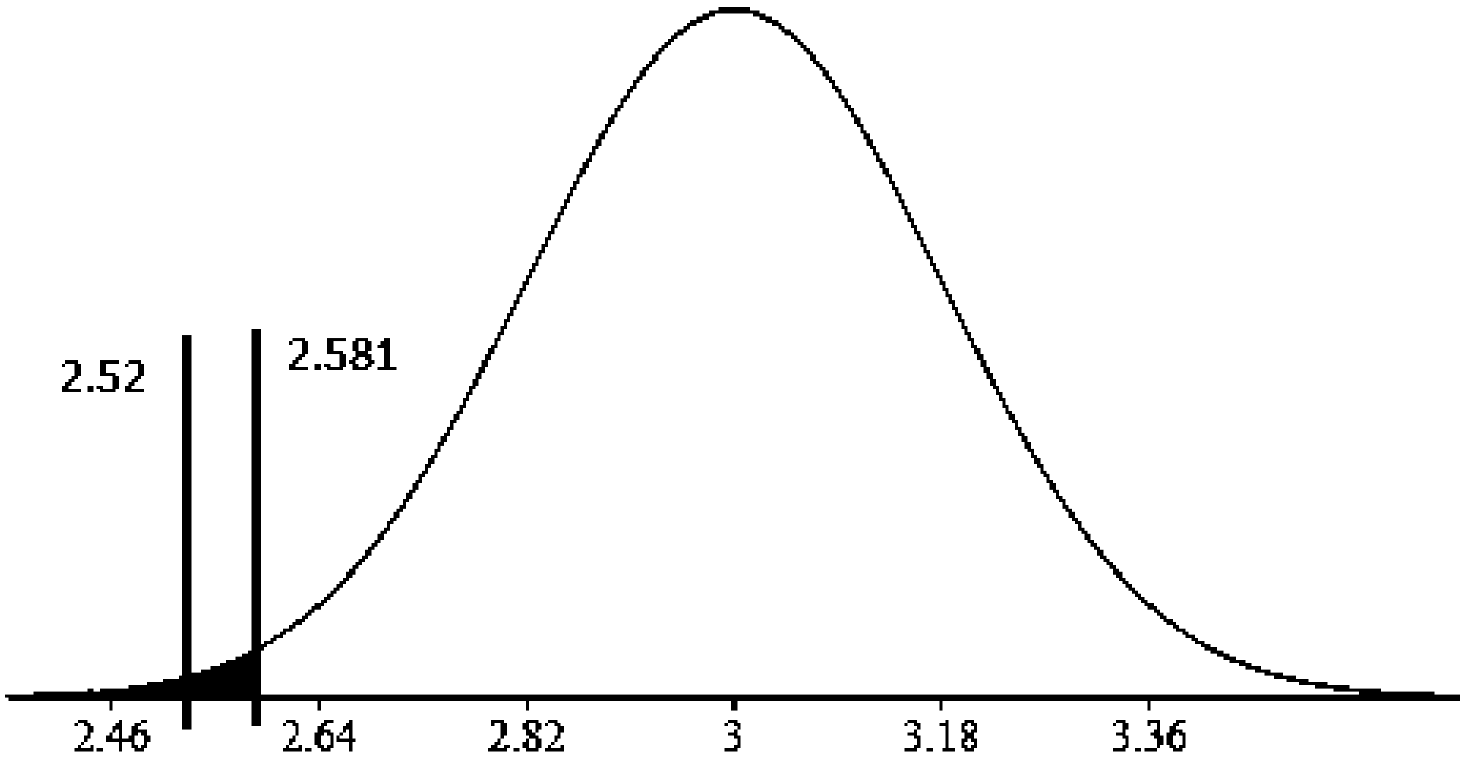
- $x_c = 2.5806\ lbs$

Valores Críticos

- ¿A cuanto equivale ese Estadístico de Prueba en la distribución normal con σ conocida?

- $x = 2.5194\ lbs$

Valores Críticos



Pruebas para muestras pequeñas

- Decimos que una muestra es grande es por que posee 30 muestras o mas.

- Decimos que una muestra es pequeña en caso contrario, cuando esto sucede es necesario utilizar la distribución t-Student.

Para la Próxima Clase

- Introducción a la econometría.