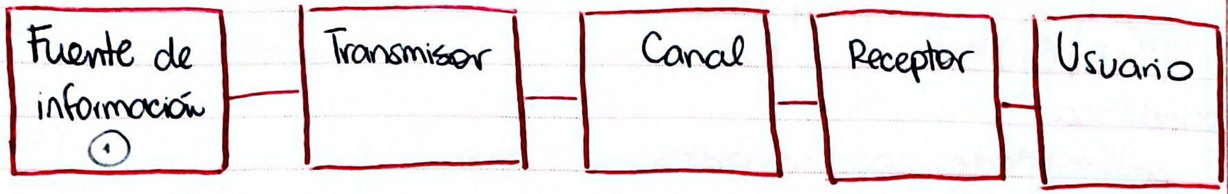
Probabilidad de variables discretas

¿para qué sirve?
¿Porqué ese día?
¿Qué debo poder hacer?

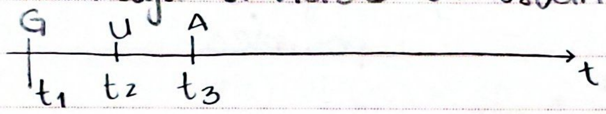
↳ Nos interesa el sistema de comunicación



1. Información que se desea transmitir.

- transductor
  ↳ pasa una señal a otra diferente.
- Fuentes discretas, aleatoria y sin memoria
  ↳ cada símbolo se envía cada t en el tiempo.

Una computadora o sistema no envía la siguiente letra hasta que el anterior se haya enviado al usuario.

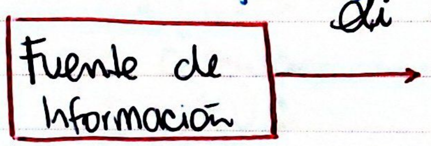


- XON / XOFF → UDP
- Polled Mode → envía si el receptor es capaz de recibirlo
- Polled Mode V.2 → TCP

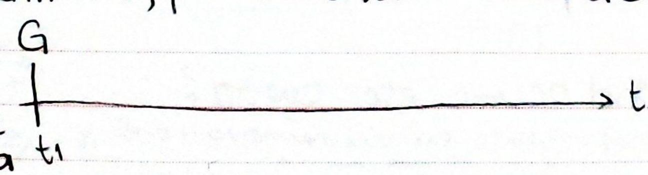
símbolo de la fuente ↓ ; alfabeto de la fuente ↙

$$s_i \in S = \{A_1, A_2, \dots, A_q\}$$

de símbolo en S.



tiempo es continuo, pero la señal es discreta.



- existe una $\boxed{\text{probabilidad}}$ que ocurra esa letra de primero

por eso es aleatoria. la probabilidad

No todos los símbolos tienen la probabilidad de ocurrir.

Fecha:

G ?

$P(u|G) = ?$

estadística

probabilidades condicionadas

$P(A|G) = ?$

Definiciones

Sea ξ_i un resultado posible de un experimento aleatorio.

Dado → 1/6

Discretas → finito

Analógicas → Infinito

Fuente tiene un número finito

$S = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ Conjunto de los resultados posibles.

espacio muestral

Un evento es un subconjunto de S. Los eventos tienen una probabilidad de ocurrir.

Ejemplo: dado

¿Qué quiero?

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ definir eventos.

subconjuntos:

eventos $\begin{cases} A = \{1, 2, 3\} \\ B = \{6\} \\ C = \{3, 4, 5\} \end{cases}$

¿Con qué probabilidad ocurre ese evento?

$P(B)$ → mapea el evento en un número real

$P(B)$ = probabilidad de que ocurra el evento B.

→ respuesta correcta si su dado es honesto.

Fecha:

$P(B)$ = probabilidad de que ocurra el evento B.

$P(B) = \begin{cases} 1 \leftarrow \text{cantidad de elementos en el evento elegido.} \\ 6 \leftarrow \text{número de elementos en el espacio muestrial.} \end{cases}$

Suponiendo que los resultados posibles son equiprobables (tiene probabilidad que suceda todos los eventos)

$P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ → equiprobables

Axioma: argumento que se da sin requerimiento de demostración.

① $P(A) \geq 0$

probabilidad de un evento es mayor que 0.

① # de eventos diferentes que se puede definir (finito)

$= \binom{1}{6} + \binom{2}{6} + \binom{3}{6} + \ldots + \binom{6}{6}$

Dados →

② $P(S) = 1$ (argumento de P.)

② $P(S) = \frac{6}{6} = 1.$

③ Si $A \cap B = \emptyset$. se tiene que cumplir para poder lograr

entonces $P(\underbrace{A \cup B}_{\text{evento}}) = P(A) + P(B)$ $= \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ //

$D = A \cup B$ $\qquad P(D) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ //

$= \{1, 2, 3, 6\}$

Ejemplo: Calcular $P(A \cup C)$

$D = A \cup C$

$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$P(D) = \frac{5}{6}$ //

$A \cap C = \{3\} \neq \emptyset$ porque se repitio un elemento.

Hecho #1 Si $A \cap B \neq \emptyset$ entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(D) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ //

Fecha:

Hecho #2 Si A^c denota el complemento de A. entonces

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Demostración

- $A \cup A^c = S$
- $A \cap A^c = \emptyset$

por lo tanto $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$

$$1 = P(A) + P(A^c)$$

nuevo evento:

$D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$P(B) = \frac{1}{6}$ $\quad P(D) = 1 - \frac{1}{6}$

Se puede observar que B es complemento de D. (D le falta el elemento de B)

Hecho #3 $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ "dado que" $\quad P(A \cap F)$

probabilidad condicional en un evento.

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{6} \times \frac{6}{3} =$$

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A = \{1, 3, 5\}$

$C = \{2, 4, 6\}$

$D = \{1\}$ $E = \{2\}$ $F = \{3\}$ $G = \{4\}$ $H\{5\}$ $I = \{6\}$ $J = \{2, 4\}$

Hecho #4 Teorema de probabilidad total.

probabilidad no condicionada $\rightarrow P(B) = \sum_{i=0} P(A_i \cap B)$

donde ① $A_i \cap A_j = \emptyset \rightarrow$ (los eventos son mutuamente exclusivos)

y ② $\cup A_i = S$ $\rightarrow$ (S es exhaustivo)

Fecha :

entonces

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

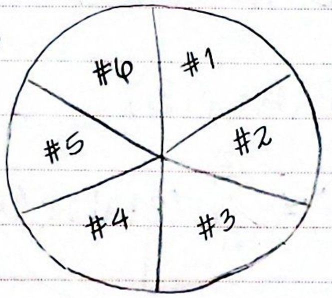
viendo el hecho #3

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\,P(A_i)}$$

Problema #2 hoja de trabajo #1

2 eventos:

1. seleccionar un compartimiento
2. agarrar uno de 10Ω.



$$S_1 = \{ R_{10}^{1}, R_{10}^{2}, \ldots R_{10}^{500}, R_{100}^{1}, \ldots R_{100}^{300}, R_{1000}^{1}, \ldots, R_{1000}^{200} \}$$

$\cup = o \qquad \cap = y$

	#1	#2	#3	#4	#5	#6	Total
10Ω	500	0				1000	
100Ω	300	400				0	
1000Ω	200	600				1000	
	1000	1000				2000	

¿Cuál es la probabilidad que salga uno de 10Ω?

1. Definir los eventos

evento → terminado agarrando un resistor 10Ω.

utilizar el hecho #3 ⟶ $P(B|A_i)$

B → resistores $\quad$ A_i → compartimientos. $\quad P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

- $P(A_1)$ = Prob. de seleccionar el comp. #1.
- $P(A_6)$ = " " " " " #6.

$P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_6) = \dfrac{1}{6}$

- $P(B|A_4) =$ ____
- $P(B|A_5) =$ ____

entonces

- $P(B|A_1) = \dfrac{50\cancel{0}}{100\cancel{0}} = \dfrac{1}{2}$
- $P(B|A_2) = \dfrac{0}{1000} = 0$
- $P(B|A_3) =$ ____
- $P(B|A_6) = \dfrac{1000}{2000} = \dfrac{1}{2}$

Fecha:

Recordatorio

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i \overset{\text{"y"}}{\cap} B)$$

Ejemplo

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$C = \{1, 2\}$

$D = \{3, 4\}$

$P(C \overset{\text{"o"}}{\cup} D) = P(C) + P(D)$

$$P[\underbrace{(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)}_{\text{mutuamente exclusivas}}] =$$

A_i - compartimientos

B = resistores

$$= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{2} P(B|A_i)P(A_i)$$

Ejercicio #2 hoja de trabajo #1

$$P\left(\text{resistor haya estado en el compartimiento \#3} \;\middle|\; \text{resistor de } 10\Omega \text{ fue seleccionado}\right)$$

Definición: $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$$P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$$

$P(A|B)\,P(B) = P(B \cap A)$

$P(A|B)\,P(B) = P(B|A)\,P(A)$

Regla de Bayes

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}}$$

Fecha:

Ejercicio #3 hoja de trabajo #1.

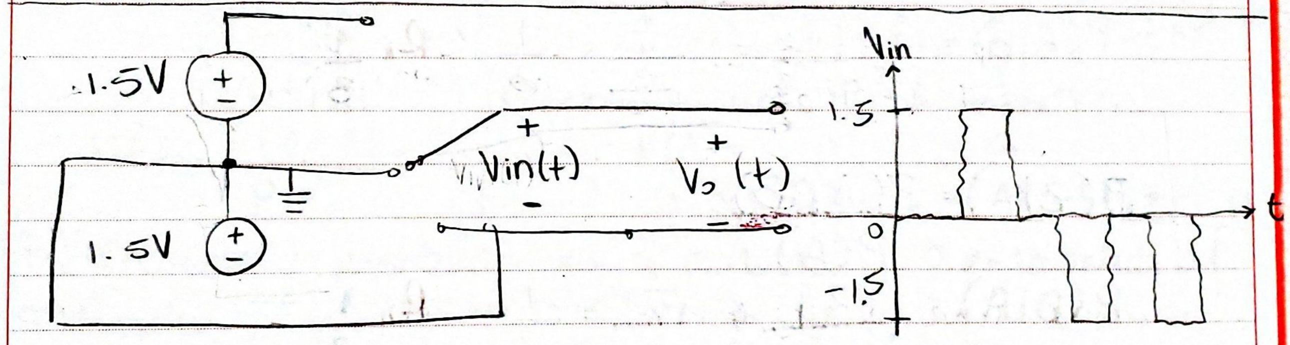
Fuente de información binaria — $\alpha_i \in S = \{\alpha_0, \alpha_1\}$ — Canal — 0/1 — $P(0|0) = 0.9$

$P(\alpha_0) = 0.2 \quad P(\alpha_1) = 0.8$

donde $\alpha_0 = 0, \; \alpha_1 = 1.$

Suma de probabilidades $= 1$

$P(S_0) + P(S_1) = 1$



entonces $\quad e \rightarrow$ entrada $\quad s \rightarrow$ salida

Fuente — $P(0_{\text{entrada al canal}}) = 0.2$ — $P(1_{\text{entrada al canal}}) = 0.8$ — Canal — $P(0_s|0_e) = 0.9$ — $P(0_s|1_e) = 0.2$

Probabilidades condicionadas y no condicionadas

NOTA.

$P(0_s|0_e) + P(1_s|0_e) = 1.$

¿Cuál es la probabilidad que se produzca un 0 en el canal?

$\rightarrow$ hecho #4

a) $P(0_s) = ?$ $\qquad$ b) $P(0_e|1_s) = ?$

Fecha:

Hoja de Trabajo #1

1. Considere el experimento de tirar un dado. Defina el evento A como A= (1,2). Defina B como el evento de obtener un número par. B = (2, 4, 6). Encuentre P(A|B) y P(B|A).

$S = \{1,2,3,4,5,6\}$ $A = \{1,2\}$ $B = \{2,4,6\}$

$P(A|B) = ?$ Definición de prueba condicionada

- $$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$P(A|B) = \frac{\{2\}}{\{2,4,6\}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$ R. $\frac{1}{3}$

- $$P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$P(B|A) = \frac{\{2\}}{\{1,2\}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2}$$ R. $\frac{1}{2}$

2. Carusel con 6 compartimientos. Cada compartimiento contiene resistores.

Ohms	Número de compartimiento					
	1	2	3	4	5	6
10Ω	500	0	200	800	1200	1000
100Ω	300	400	600	200	800	0
1000Ω	200	600	200	600	0	1000
	1000	1000	1000	1600	2000	2000

a) Si se selecciona aleatoriamente un compartimiento y se toma un resistor, ¿cuál es la probabilidad de haber escogido un resistor de 10Ω?

equiprobable

Definición de teorema de probabilidad total. $P(A_i) = \frac{1}{6}$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\,P(A_i) \qquad B = 10\Omega,\ n = 6$$

$$P(10) = \sum_{i=1}^{6} P(B|A_i)P(A_i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} P(B|A_i) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\frac{P(A_i\cap B)}{P(A_i)} = \frac{1}{6}\left(\frac{500}{1000} + \frac{0}{1000} + \frac{200}{1000} + \frac{800}{1600} + \frac{1200}{2000} + \frac{1000}{2000}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right) = 0.3833$$ R. 0.3833

Fecha:

b) Si este resulta ser 10Ω. Cuál es la probabilidad de que el resistor haya estado en el compartimiento #3? Teorema de Bayes. $A_i = \{3\}$, $B = 10\Omega$

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{\left(\frac{200}{1000}\right)\left(\frac{1}{6}\right)}{\frac{23}{60}} = 0.0869$$

R// 0.0869

3. Fuente binaria produce 0 y 1 independientemente con probabilidad $P(0) = 0.2$ y $P(1) = 0.8$. Los dígitos binarios son transmitidos a través de un canal que reproduce un 0 en la salida con probabilidad 0.9 y produce un 0 erroneamente con probabilidad 0.2. Es decir, $P(0|0) = 0.9$ y $P(0|1) = 0.2$.

a) Encuentre $P(1|0)$ y $P(1|1)$.

reproduce, produce

$P(0) = 0.2$ $P(1) = 0.8$ $P(0|0) = 0.9$ $P(0|1) = 0.2$

reproduce, produce

$$P(1|0) = \frac{P(1\cap 0)}{P(0)} = \frac{P(1)P(0)}{P(0)} = P(1) = 1 - P(0) = 0.1$$ reproduce correctamente

reproduce incorrectamente

$$P(1|1) = \frac{P(1\cap 1)}{P(1)} = \frac{P(1)P(1)}{P(1)} = P(1) = 1 - P(0) = 0.8$$

R// $P(1|0) = 0.1$ $P(1|1) = 0.8$

b) Encuentre la probabilidad que se produzca un 0 en la salida del canal.

probabilidad que se reproduzca un 0.

$$P(0) = P(0|0)P(0) + P(0|1)P(1)$$

reproduce, produce

R// 0.34

$$= (0.9)(0.2) + (0.2)(0.8) = \frac{17}{50} = 0.34$$

c) Si se produce un 1 en la salida del canal, calcule la probabilidad de que un 0 haya sido transmitido.

$$P(0|1)$$

produce, reproduce

reproduce, produce, produce

$$\frac{P(1|0)P(0)}{P(1)}$$

reproducir 1

$$= \frac{P(1|0)P(0)}{(1 - P(0))} = \frac{(0.1)(0.2)}{1 - 0.34} = \frac{(0.1)(0.2)}{0.66} = \frac{1}{33} = 0.0303$$

hecho #4 que reproduce 0.

R// 0.0303

Fuente discreta, aleatoria y sin memoria Fecha:

Fuente de Información

$$\alpha_i \in S = \{\overbrace{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q}^{\text{eventos}}\}$$

emite un símbolo

Probabilidad que ocurra es evento

$$\begin{cases} P_1 = P(\alpha_1) \\ P_2 = P(\alpha_2) \\ \vdots \\ P_q = P(\alpha_q) \end{cases}$$

Definición

Sea E un evento que ocurre con probabilidad $P(E)$ si el evento ocurre entonces lo recibe $I(E)$ unidades de información,

objetivo → cuantificar la información

donde $I(E) = \log_b \left(\frac{1}{P(E)}\right)$ — probabilidad de que envía una hoja en blanco.

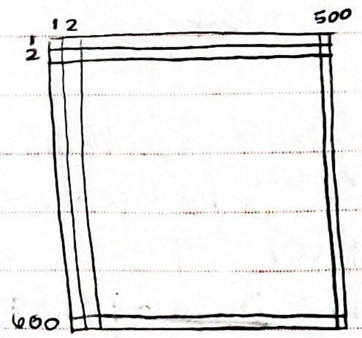
Si $b = 2$ las unidades de $I(E)$ son bits

(Se recibe $I(E)$ unidades binarias de información)

Calcular $\log_2(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$

binary units (bits)

binary digits (binits)



10 colores

300,000 elementos de imagen

código binario de 4 dígitos por elemento de imagen.

$300{,}000 \times 4 = 1.2 \times 10^{6} \frac{\text{binits}}{\text{imagen}}$

Combinaciones

300,000

□□□ . . . □

1 1 1
2 2 2
3 3 3
⋮ ⋮ ⋮
10 10 10

$10^3 \ldots$ 10^{300k}

\# de imágenes diferentes $= 10^{300{,}000}$

→ nos envía una imagen, cuál es su probabilidad que recibe la imagen.

$$I(E) = \log_2 \left(\frac{1}{\frac{1}{10^{300{,}000}}}\right) = \log_2 \left(10^{300{,}000}\right)$$

Fecha:

$= \log_2 (10^{300,000})$ examen $\rightarrow$ 4 cifras significativas!

$= 300,000 \log_2 (10) = 300,000 \frac{\ln(10)}{\ln(2)} = 9.966 \times 10^5$ bits

Siempre en base $b = 2$.

Ejemplo:

$$I(\alpha_1) = \log \frac{1}{P(\alpha_1)}$$

$$I(\alpha_2) = \log \frac{1}{P(\alpha_2)}$$

$$\vdots$$

$$I(\alpha_q) = \log \frac{1}{P(\alpha_q)}$$

entonces tenemos que calcular las estaturas y sacar promedio

$$\frac{1.70 + 1.80 + 1.90 + 1.71 + 1.65}{5} \rightarrow \frac{1}{5}(1.70) + \frac{1}{5}(1.80) + \ldots \frac{1}{5}(1.65)$$

peso a la altura

no es aleatorio

entonces, $\rightarrow$ peso = información

$$H(S) = P(S_1)I(S_1) + P(S_2)I(S_2) + \ldots + P(S_q)I(S_q)$$

función entropía.

$$H(S) = \sum_{i=1}^{q} P(S_i) I(S_i)$$

Encontrar la entropía de una fuente de información discreta, aleatoria y sin memoria.

$$H(S) = \sum_{i=1}^{q} P(S_i) \log \frac{1}{P(S_i)}$$

Fecha:

Hoja de Trabajo #2

2. Dos fuentes de memoria nula, S_1 y S_2, tienen q_1 y q_2 símbolos, respectivamente. los símbolos de S_1 se representan con probabilidades P_i, $i=1,2,\dots,q_1$; los de S_2 con Q_i, $i=1,2,\dots,q_2$; las entropías de ambas son H_1 y H_2, respectivamente. Una nueva fuente de memoria nula $S(\lambda)$, denominada compuesta de S_1, y S_2 está formada con q_1+q_2 símbolos. Los q_1 primeros símbolos de $S(\lambda)$ tienen probabilidades λP_1, $i=1,2,\dots q_1$, y los últimos q_2 probabilidades $\bar{\lambda} Q_i$, $i=1,2,\dots q_2$. $(\bar{\lambda}=1-\lambda)$.

$$H(S_1)=\sum_{S_1} P_i \log \frac{1}{P_i} \qquad H(S_2)=\sum_{S_2} Q_i \log \frac{1}{Q_i}$$

$$S(\lambda)=\{X_1, X_2, \dots, X_{q_1+q_2}\}$$

$$\rightarrow \underset{i=1,2,\dots q}{P(x_i)=\lambda P_i} \qquad \underset{i=q+1,q+2+\dots 2q}{P(x_i)=\bar{\lambda} Q_i} \rightarrow H[S(\lambda)]=\sum_{S'} P(x_i)\log\frac{1}{P(x_i)}$$

$$H[S(\lambda)]=\sum_{i=1}^{q_1} \lambda P_i \log\left(\frac{1}{\lambda P_i}\right)+\sum_{i=1}^{q_2} \bar{\lambda} Q_i \log\left(\frac{1}{\bar{\lambda} Q_i}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{q_1} \lambda P_i\left[\log\left(\frac{1}{\lambda}\right)+\log\left(\frac{1}{P_i}\right)\right]+\sum_{i=1}^{q_2} \bar{\lambda} Q_i\left[\log\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right)+\log\left(\frac{1}{Q_i}\right)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{q_1} \lambda P_i \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)+\sum_{i=1}^{q_1} \lambda P_i \log\left(\frac{1}{P_i}\right)+\sum_{i=1}^{q_2} \bar{\lambda} Q_i \log\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right)+\sum_{i=1}^{q_2} \bar{\lambda} Q_i \log\left(\frac{1}{Q_i}\right)$$

$$=\lambda \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)\sum_{i=1}^{q_1} P_i+\lambda \sum_{i=1}^{q_1} P_i \log\left(\frac{1}{P_i}\right)+\bar{\lambda}\log\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right)\sum_{i=1}^{q_2} Q_i+\bar{\lambda}\sum_{i=1}^{q_2} Q_i \log\left(\frac{1}{Q_i}\right)$$

$$=\lambda \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)+\lambda H(S_1)+\bar{\lambda}\log\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right)+\bar{\lambda} H(S_2)$$

$$H[S(\lambda)]=\lambda H(S_1)+\bar{\lambda} H(S_2)+\underbrace{\lambda \log\left(\frac{1}{\lambda}\right)+\bar{\lambda}\log\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right)}_{H(\lambda)}$$

$$H[S(\lambda)]=\lambda H(S_1)+\bar{\lambda} H(S_2)+H(\lambda)$$

Interpretación: $S(\lambda)$ está compuesto por S_1 y S_2, las probabilidades de cada símbolo de S_1 están ponderadas por λ y las de S_2 por $(1-\lambda)$, la entriopía de $S(\lambda)$ viene dada por la suma ponderada de λH_1, $(1-\lambda)H_2$ y la contribución de información media producida por λ.

Fecha:

3. Sea S una fuente de memoria nula, de alfabeto $S = \{s_i\}$, $i = 1, 2, \dots, q$ cuyos símbolos tienen probabilidades $P_1, P_2, \dots P_q$. Crear una nueva fuente de memoria nula, S', de doble número de símbolos, $S' = \{s_i'\}$, $i = 1, 2, \dots 2q$ con símbolos de probabilidades definidas por $P_i' = (1-\varepsilon)P_i$, $i = 1, 2, \dots q$ y $P_i' = \varepsilon P_{i-q}$, $i = q+1, q+2, \dots 2q$. Expresar $H(S')$ en función de $H(S)$.

Fuente S $\quad S_i \in S = \{S_1, S_2, \dots S_q\}$

$P_1 = P(S_1)$

$P_2 = P(S_2)$

$\vdots$

$P_q = P(S_q)$

Recordamos:

- $P_i' = (1-\varepsilon)P_i$, $i = 1, 2, \dots q$
- $P_i' = \varepsilon P_{i-q}$, $i = q+1, q+2, \dots 2q$.

Fuente S' $\quad S_i' \in S' = \{S_1', S_2', \dots, S_q'\}$

$P_1' = P(S_1') = (1-\varepsilon)P_1 \qquad P_{q+1}' = P(S_{q+1}') = \varepsilon P_1$

$P_2' = (1-\varepsilon)P_2 \qquad P_{q+2}' = P(S_{q+2}') = \varepsilon P_2$

$\vdots \qquad \vdots$

$P_q' = (1-\varepsilon)P_q \qquad P_{2q}' = \varepsilon P_q$

Expresar $H(S')$ en función de $H(S)$

① $H(S) = P_1 \log \frac{1}{P_1} + P_2 \log \frac{1}{P_2} + \dots + P_q \log \frac{1}{P_q}$ ①

② $H(S') = P_1' \log \frac{1}{P_1'} + P_2' \log \frac{1}{P_2'} + \dots + P_q' \log \frac{1}{P_q'} + P_{q+1}' \log \frac{1}{P_{q+1}'} + P_{q+2}' \log \frac{1}{P_{q+2}'} \dots + P_{2q}' \log \frac{1}{P_{2q}'}$

$= (1-\varepsilon)P_1 \log \frac{1}{(1-\varepsilon)P_1} + (1-\varepsilon)P_2 \log \frac{1}{(1-\varepsilon)P_2} + \dots + (1-\varepsilon)P_q \log \frac{1}{(1-\varepsilon)P_q} + \varepsilon P_1 \log \frac{1}{\varepsilon P_1} +$

$+ \varepsilon P_2 \log \frac{1}{\varepsilon P_2} + \dots + \varepsilon P_q \log \frac{1}{\varepsilon P_q}$.

Recordar: $\log \frac{1}{(1-\varepsilon)P_1} = \log \frac{1}{1-\varepsilon} + \log \frac{1}{P_1}$

$\log \frac{1}{\varepsilon P_1} = \log \frac{1}{\varepsilon} + \log \frac{1}{P_1}$

$= (1-\varepsilon)P_1 \left[\log \frac{1}{1-\varepsilon} + \log \frac{1}{P_1}\right] + (1-\varepsilon)P_2 \left[\log \frac{1}{1-\varepsilon} + \log \frac{1}{P_2}\right] + \dots + (1-\varepsilon)P_q \left[\log \frac{1}{1-\varepsilon} + \log \frac{1}{P_q}\right] +$

$= \varepsilon P_1 \left[\log \frac{1}{\varepsilon} + \log \frac{1}{P_1}\right] + \varepsilon P_2 \left[\log \frac{1}{\varepsilon} + \log \frac{1}{P_2}\right] + \dots + \varepsilon P_q \left[\log \frac{1}{\varepsilon} + \log \frac{1}{P_q}\right]$.

$= \underbrace{P_1 \log \frac{1}{P_1} + P_2 \log \frac{1}{P_2} + \dots + P_q \log \frac{1}{P_q}}_{H(S)} + \longrightarrow$ seguimos con el resto $\longrightarrow$

Fecha:

$$[(1-\varepsilon)P_1 + (1-\varepsilon)P_2 + \dots + (1-\varepsilon)P_q] \log \frac{1}{1-\varepsilon}$$

$$+ [\varepsilon P_1 + \varepsilon P_2 + \dots + \varepsilon P_q] \log \frac{1}{\varepsilon} = \qquad \underbrace{\sum_{i=1}^{q} P_i}_{1} = 1$$

$$= (1-\varepsilon)[\overbrace{P_1 + P_2 + \dots + P_q}^{1}] \log \frac{1}{1-\varepsilon} + (\varepsilon)[\overbrace{P_1 + P_2 + \dots + P_q}^{1}] \log \frac{1}{\varepsilon}$$

$$= H(S) + (1-\varepsilon)\log \frac{1}{1-\varepsilon} + \varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}$$

Propiedades de entropía

Información

① $$\sum_{i=1}^{q} x_i \log \frac{1}{x_i} \leq \sum_{i=1}^{q} x_i \log \frac{1}{y_i}$$

Los conjuntos $\{x_i\}$ y $\{y_i\}$ son conjuntos de probabilidades:

$$\sum_{i=1}^{q} x_i = \sum_{i=1}^{q} y_i = 1$$

Fuente S	$s_i \in S = \{s_1, s_2, \dots s_q\}$ →

$x_1 = P(s_1)$
$x_2 = P(s_2)$
$\vdots$ $x_q = P(s_q)$

Calcular entropía.

$$H(S) = x_1 \log \frac{1}{x_1} + x_2 \log \frac{1}{x_2} + \dots + x_q \log \frac{1}{x_q}$$

$$H'(S') = y_1 \log \frac{1}{y_1} + y_2 \log \frac{1}{y_2} + \dots + y_q \log \frac{1}{y_q}$$

$$= \sum_{i=1}^{q} y_i \log \frac{1}{y_i}$$

Fecha:

Fuente B

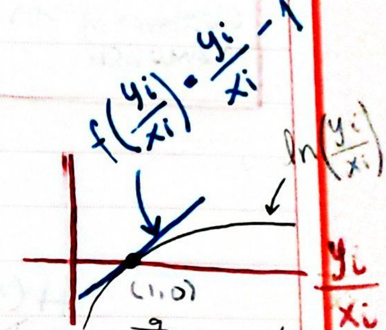
$$S'_i \in S' = \{S'_1 + S'_2 + \dots + S'_q\}$$

$$y_1 = P(S'_1)$$
$$y_2 = P(S_2)$$
$$\vdots$$
$$y_p = P(S'_q)$$

Demostración:

$$H(S) = \sum_{i=1}^{q} P(S_i) \log \frac{1}{P(S_i)}$$

cuento seguro



considere

diferente de 1. (no seguro)

$$\sum_{i=1}^{q} x_i \log \frac{y_i}{x_i} = \sum_{i=1}^{q} x_i \frac{\ln\left(\frac{y_i}{x_i}\right)}{\ln(2)}$$

$$= \frac{1}{\ln(2)} \sum_{i=1}^{q} x_i \ln\left(\frac{y_i}{x_i}\right) = \frac{1}{\ln(2)} \sum_{i=1}^{q} x_i \ln\left(\frac{y_i}{x_i}\right) \leq \frac{1}{\ln(2)} \sum_{i=1}^{q} x_i\, f\left(\frac{y_i}{x_i}\right)$$

$$\frac{1}{\ln(2)} \sum_{i=1}^{q} x_i \ln\left(\frac{y_i}{x_i}\right) \leq \frac{1}{\ln(2)} \sum_{i=1}^{q} x_i \left[\frac{y_i}{x_i} - 1\right]$$

$$\frac{1}{\ln(2)} \sum_{i=1}^{q} x_i \left[\frac{y_i}{x_i} - 1\right] = \frac{1}{\ln(2)} \sum_{i=1}^{q} (y_i - x_i)$$

$$= \frac{1}{\ln(2)} \left[\sum_{i=1}^{q} y_i - \sum_{i=1}^{q} x_i\right] = 0$$

Conclusión:

$$\frac{1}{\ln(2)} \sum_{i=1}^{q} x_i \ln\left(\frac{y_i}{x_i}\right) \leq 0$$

$$\frac{1}{\ln(2)} \sum_{i=1}^{q} x_i \ln\left(\frac{y_i}{x_i}\right) = \frac{1}{\ln(2)} \sum_{i=1}^{q} x_i \left[\ln(y_i) + \ln\left(\frac{1}{x_i}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\ln(2)} \sum_{i=1}^{q} x_i \left[-\ln\left(\frac{1}{y_i}\right) + \ln\left(\frac{1}{x_i}\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{q} x_i \left[-\log\left(\frac{1}{y_i}\right) + \log\left(\frac{1}{x_i}\right)\right] \leq 0$$

conclusión

$$\sum_{i=1}^{q} x_i \log \frac{1}{x_i} \leq \sum_{i=1}^{q} x_i \log \frac{1}{y_i}$$

Propiedades de Entropía

$$\log(q) \geq H(S)$$

Fuente discreta, aleatoria y sin memoria.

$$S_i \in S = \{S_1, S_2, \dots, S_q\}$$

$$P_1 = P(S_1)$$

$$P_2 = P(S_2)$$

$$\vdots$$

$$P_q = P(S_q)$$

$$H(S) = \sum_{i=1}^{q} P_i \log \frac{1}{P_i} \qquad \sum_{i=1}^{q} P_i = 1$$

$$-\log\left(\frac{1}{P_i}\right) = \log(P_i)$$

considere

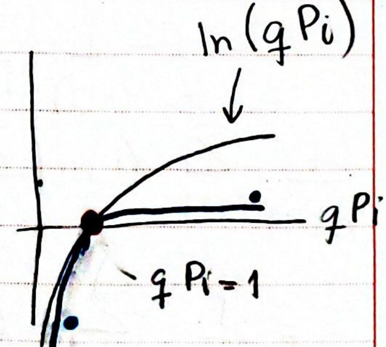
$$\cancelto{\log(q)}{q} - H(S) = \cancelto{\log(q)}{q} - \sum_{i=1}^{q} P_i \log \frac{1}{P_i}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{q} P_i\right) \cancelto{\log(q)}{q} - \sum_{i=1}^{q} P_i \log \frac{1}{P_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{q} P_i \left(\cancelto{\log(q)}{q} - \log \frac{1}{P_i}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{q} P_i \left(\cancelto{\log(q)}{q} + \log(P_i)\right)$$

$$\log(q) - H(S) = \sum_{i=1}^{q} P_i \log(qP_i)$$



$$= \frac{1}{\ln(2)} \sum_{i=1}^{q} P_i \ln(qP_i)$$

$$\frac{1}{\ln(2)} \sum_{i=1}^{q} P_i \ln(qP_i) > \frac{1}{\ln(2)} \sum_{i=1}^{q} P_i f(qP_i)$$

$$\frac{1}{\ln(2)} \sum_{i=1}^{q} P_i \ln(qP_i) \geq \frac{1}{\ln(2)} \sum_{i=1}^{q} P_i \left(1 - \frac{1}{qP_i}\right)$$

$\frac{1}{qP_i} \to \infty - 0$

$\frac{1}{0} = \infty \quad 1 - \infty = -\infty$

$qP_i = 1$

Fecha:

$$\frac{1}{\ln(2)}\sum_{i=1}^{q} p_i\left(1-\frac{1}{qp_i}\right)=\frac{1}{\ln(2)}\sum_{i=1}^{q}\left(p_i-\frac{1}{q}\right)$$

$\cdot \sum_{i=1}^{q}\frac{1}{q}=?$

$\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} 1=?$

$$=\frac{1}{\ln(2)}\left[\sum_{i=1}^{q} p_i-\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{q}\right]$$

$$=\frac{1}{\ln(2)}(1-1)$$

$$=0$$

conclusión

$$\frac{1}{\ln(2)}\sum_{i=1}^{q} p_i\ln(qp_i)\geq 0$$

① $\sum_{i=1}^{q} p_i\log(qp_i)\geq 0$

② $\log(q)-H(S)\geq 0$

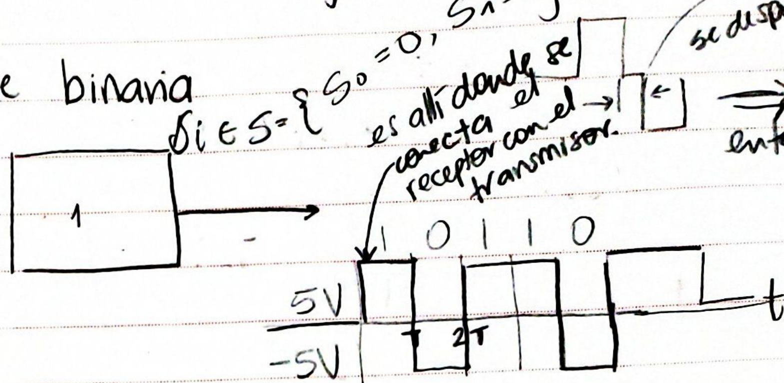
$$\log(q)=H(S)$$

La n-ava extensión de una fuente de información (discreta, aleatoria, y de memoria nula).

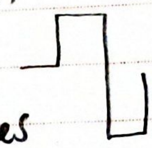
Fuente binaria $\sigma_i \in S = \{S_0 = 0, S_1 = 1\}$

es allí donde se conecta el receptor con el transmisor.

tiempo muy corto se desprecia



entonces



0 = no hay nada en la salida del canal.

hay señal cuando muestreamos ≠ 0.

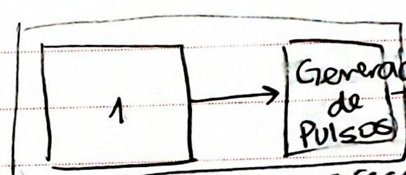
Duración de transmisión de byte: 8T

00 → σ_0 5V

01 → σ_1 10V

10 → σ_2 -5V

11 → σ_3 -10V



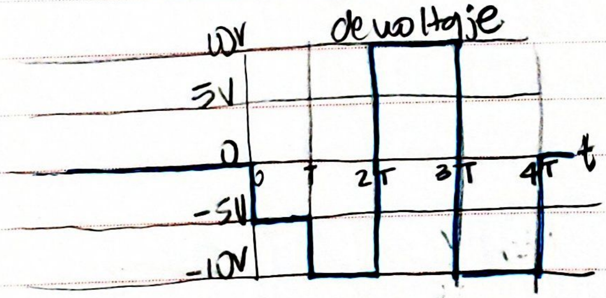
$\sigma_i \in S^2 = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

agrupaciones en 2 en 2

S^4 → 4 en 4.

sacar 2 niveles de voltaje

para sacar + niveles de voltaje.



¿unidades de Tiempo? 4T.

ocupada la línea al 50%.

$$\boxed{H(S^n) = nH(S)}$$

Fecha:

$$H(S^2) = P(\sigma_0)\log\frac{1}{P(\sigma_0)} + P(\sigma_1)\log\frac{1}{P(\sigma_1)} + P(\sigma_2)\log\frac{1}{P(\sigma_2)} + P(\sigma_3)\log\frac{1}{P(\sigma_3)}$$

$P(\sigma_0) = (0\,0)$ 0 atrás de 0 cero.

$P(\sigma_0) = P(0)\,P(0)$

Recordar: $S_i \in S = \{s_0 = 0,\ s_1 = 1\}$

$P_0 = P(s_0)\ ,\ P_1 = P(s_1)$

$P_0' = P(\sigma_0) \qquad P_2' = P(\sigma_2)$

$P_1' = P(\sigma_1) \qquad P_3' = P(\sigma_3)$

columna

Ejemplo: Demostrar $H(S^2) = 2H(S)$:

fila	col	1 2
0	σ_0	00
* 1	σ_1	01
2 →	σ_2	10
	σ_3	11

$* P(\sigma_2) = P_{21} P_{22}$

$= P(s_1)\,P(s_0)$

$$H(S^2) = P(\sigma_0)\log\frac{1}{P(\sigma_0)} + P(\sigma_1)\log\frac{1}{P(\sigma_1)} + P(\sigma_2)\log\frac{1}{P(\sigma_2)} + P(\sigma_3)\log\frac{1}{P(\sigma_3)}$$

$$= \sum_{S^2} P(\sigma_i)\log\frac{1}{P(\sigma_i)}$$

$$= \sum_{S^2} P(\sigma_i)\log\frac{1}{P_{i1}P_{i2}} \quad \text{*recordar}$$

$$H(S^2) = \underbrace{\sum_{S^2} P(\sigma_i)\log\frac{1}{P_{i1}}}_{H(S)} + \underbrace{\sum_{S^2} P(\sigma_i)\log\frac{1}{P_{i2}}}_{H(S)}$$

$$\log\frac{1}{P_{i1}P_{i2}} = \log\left[\left(\frac{1}{P_{i1}}\right)\left(\frac{1}{P_{i2}}\right)\right]$$

$$\sum_{S^2} P(\sigma_i)\log\frac{1}{P(\sigma_i)} = P(\sigma_0)\log\frac{1}{P(\sigma_{01})} + P(\sigma_1)\log\frac{1}{P(\sigma_{11})} + P(\sigma_2)\log\frac{1}{P(\sigma_{21})} + P(\sigma_3)\log\frac{1}{P(\sigma_{31})}$$

$$= P(S_0)P(S_0)\log\frac{1}{P(S_0)} + P(S_0)P(S_1)\log\frac{1}{P(S_0)} + P(S_1)P(S_0)\log\frac{1}{P(S_1)} + P(S_1)P(S_1)\log\frac{1}{P(S_1)}$$

// agrupamos $S_0 + S_1 = H(S)$

$$P(S_0)H(S) + P(S_1)H(S)$$

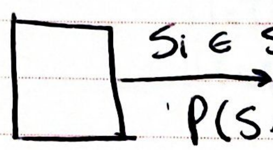
$$= [P(S_0) + P(S_1)]\,H(S) = H(S)$$

Fecha :

Ejercicios

① Demostrar $\sum_{S^2} P(\sigma_i)\log\frac{1}{P_{i2}} = H(S)$

② Considere la fuente



$S_i \in S = \{S_1, S_2, S_3\}$

$P(S_1) = \frac{1}{2}$

$P(S_2) = \frac{1}{4}$

$P(S_3) = \frac{1}{4}$

a) Calcular $H(S^2)$ usando las probabilidades de σ_i.

b) Calcular $H(S^2)$ usando el teorema $H(S^2) = 2H(S)$

① $\sum_{S^2} P(\sigma_i)\log\frac{1}{P_{i2}} = P(\sigma_0)\log\frac{1}{P_{02}} + P(\sigma_1)\log\frac{1}{P_{12}} + P(\sigma_2)\log\frac{1}{P_{22}} + P(\sigma_3)\log\frac{1}{P_{32}}$

$= P(S_0)P(S_0)\log\frac{1}{P(S_0)} + P(S_0)P(S_1)\log\frac{1}{P(S_1)} + P(S_1)P(S_0)\log\frac{1}{P(S_0)} + P(S_1)P(S_1)\log\frac{1}{P(S_1)}$

$= P(S_0)\,H(S) + P(S_1)\,H(S)$

$= [P(S_0) + P(S_1)]\,H(S) = H(S)$

entonces

$H(S^2) = H(S) + H(S)$

$H(S^2) = 2H(S)$

Fecha:

2 a) Calcular $H(S^2)$ usando las probabilidades de σ_i. $P(S_1)=\frac{1}{2}$ $P(S_3)=\frac{1}{4}$ $P(S_2)=\frac{1}{4}$

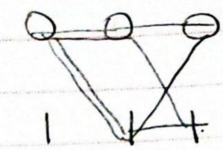
S_1	S_1	$\sigma_0 = S_1 S_1$	$\sigma_3 = S_2 S_1$	$\sigma_6 = S_3 S_1$	$\downarrow 3^2$
S_2	S_2	$\sigma_1 = S_1 S_2$	$\sigma_4 = S_2 S_2$	$\sigma_7 = S_3 S_2$	
S_3	S_3	$\sigma_2 = S_1 S_3$	$\sigma_5 = S_2 S_3$	$\sigma_8 = S_3 S_3$	

$$H(S^2) = P(S_1)P(S_1)\log\frac{1}{P(\sigma_0)} + P(S_1)P(S_2)\log\frac{1}{P(\sigma_1)} + P(S_1)P(S_3)\log\frac{1}{P(\sigma_2)} + P(S_2)P(S_1)\log\frac{1}{P(\sigma_3)} +$$

$$+ P(S_2)P(S_2)\log\frac{1}{P(\sigma_4)} + P(S_2)P(S_3)\log\frac{1}{P(\sigma_5)}$$

Fecha:

aprender



A $\rightarrow$ $S_i \in S = \{0, 1\}$

$P(0) = 0.2$

$P(1) = 0.8$

extensión 3 $\rightarrow$ 8

$H(S) = 0.2 \log \frac{1}{0.2} + 0.8 \log \frac{1}{0.8}$

S_0 $\rightarrow$ $\sigma_i \in S^3 = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots \sigma_7\}$

$P(\sigma_0) = (0.2)^3 \sim$

$P(\sigma_1) = (0.2)^2 (0.8) -$

$\vdots$

$P(\sigma_7) = (0.8)^3 \star$

~ 000

\- 001

010

011

100

101

110

111 $\star$

$H(S^3) = P(\sigma_0) \log \frac{1}{P(\sigma_0)} + \dots + P(\sigma_7) \log \frac{1}{P(\sigma_7)}$

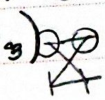
$\sigma_i \in S^2 = \{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$

extensión 2 $\rightarrow$ 4

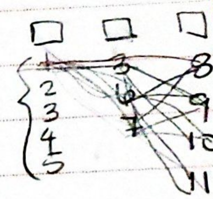
$P(\sigma_0)$ $P(\sigma_3)$

$P(\sigma_1)$

$P(\sigma_2)$



$12 \times 5 = 60$



$4 + 4 + 4 = 12$

$12 * 5 = 60$

S $\rightarrow$ $S_i'' \in S'' = \{0, 1, 2, 3\}$

$P(0) = P(\sigma_7)$

$= (0.8)^3$

(w 0)

$P(1) = P(\sigma_3) + P(\sigma_5) + P(\sigma_6)$

$= (0.2)(0.8)^2 + (0.8)^2(0.2) + (0.8)^2(0.2) = 3(0.2)(0.8)(0.8)$

$\vdots$

$P(3) = P(\sigma_0)$

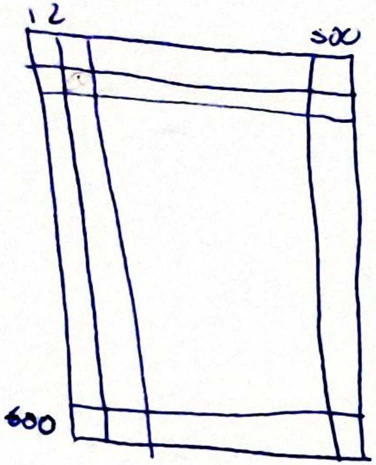
$= (0.2)^3$

$P(2) = P(\sigma_1) + P(\sigma_2) + P(\sigma_4)$

$P(2) = (0.2)^2(0.8) + (0.2)^2(0.8) + (0.8)(0.2)^2$

$P(2) = 3(0.2)(0.2)(0.8)$

1400 6048



10 colores

A) información por cuadro de imagen

$$I(E) = \log_2 \frac{1}{P_i} = \log_2 \frac{1}{\frac{1}{10}} = \cancel{3.322 \text{ bits}}$$

b) información por imagen.

$$I(E) = \log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{10^{300000}}}\right) \qquad 1 \times \frac{10^{300000}}{1}$$

$$= \log_2(10^{300000})$$

$$= \frac{\ln(10^{300000})}{\ln(2)}$$

$$= \frac{300000 \ln(10)}{\ln(2)} = \cancel{9.966 \times 10^5 \text{ bits}}$$