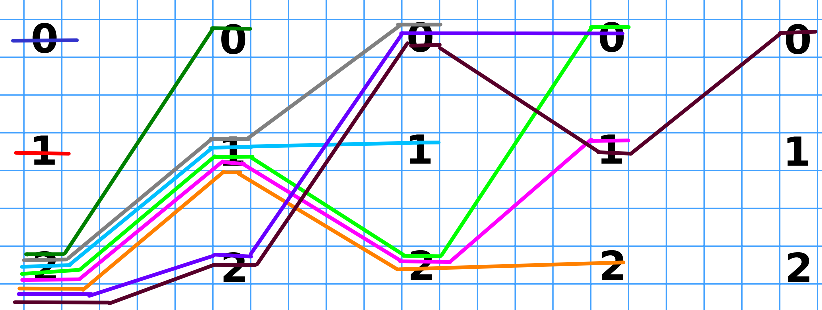
HT - 8

1. Especifique un código instantáneo ternario para los códigos $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. Use el alfabeto X = {0,1,2} y el método descrito en la sección 3.6

	longitud de palabra l_i: 1	2	3	4	5
Número de palabras con longitud l_i en cada código:					
Código $\mathcal{A}$	2	1	2	4	1
Código $\mathcal{B}$	2	2	2	1	1
Código $\mathcal{C}$	1	4	6	0	0
Código $\mathcal{D}$	2	2	2	2	3

A: $$\sum_{S} r^{-l_i} \le 1 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3^2}\right)+2\left(\frac{1}{3^3}\right)+4\left(\frac{1}{3^4}\right)+\left(\frac{1}{3^5}\right) \le 1$$

$$\frac{220}{243} \approx 0.91 \le 1$$

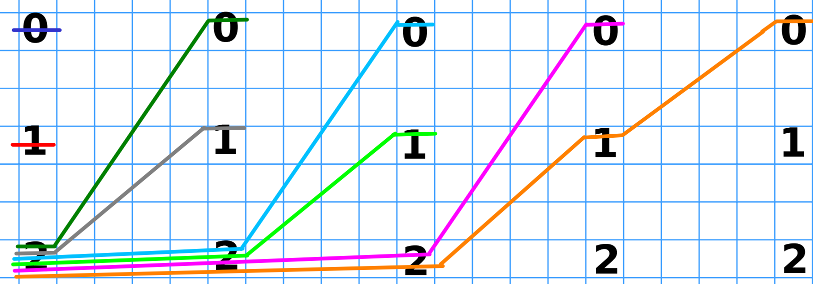


s_i	$\mathcal{A}$
s_1	0
s_2	1
s_3	2 0
s_4	2 1 0
s_5	2 1 1
s_6	2 1 2 0
s_7	2 1 2 1
s_8	2 1 2 2
s_9	2 2 0 0
s_{10}	2 2 0 1 0

l_i	$\mathcal{A}$	
1	0 1	$n_1 = 2$ $n_1 \le 3$ ✓
2	2 0	$n_2 = 1$ $n_2 \le (r - n_1)r \Rightarrow n_2 \le (3-2)3 \Rightarrow n_2 \le 3$ ✓
3	2 1 0 2 1 1	$n_3 = 2$ $n_3 \le ((r-n_1)r - n_2)r \Rightarrow n_3 \le (3-1)3 \Rightarrow n_3 \le 6$ ✓
4	2 1 2 0 2 1 2 1 2 1 2 2 2 2 0 0	$n_4 = 4$ $n_4 \le (((r-n_1)r-n_2)r-n_3)r \Rightarrow n_4 \le (6-2)3 \Rightarrow n_4 \le 12$ ✓
5	2 2 0 1 0	$n_5 = 1$ $n_5 \le [((((r-n_1)r-n_2)r-n_3)r-n_4)r] \Rightarrow n_5 \le (12-4)3 \Rightarrow n_5 \le 24$ ✓

B: $\sum_{s} r^{-l_i} \leq 1 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3^2}\right) + 2\left(\frac{1}{3^3}\right) + \left(\frac{1}{3^4}\right) + \left(\frac{1}{3^5}\right) \leq 1$

$$\frac{238}{243} \approx 0.98 \leq 1$$

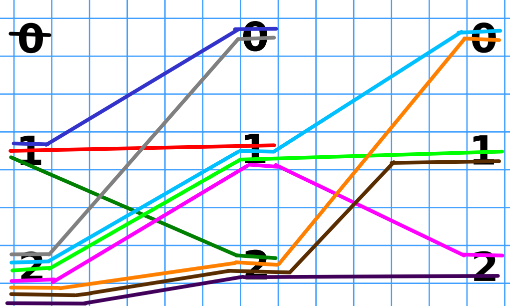


Si	B
S1	0
S2	1
S3	2 0
S4	2 1
S5	2 2 0
S6	2 2 1
S7	2 2 2 0
S8	2 2 2 1 0

l_i	B	
1	0 1	$n_1 = 2$ $n_1 \leq 3$ ✓
2	2 0 2 1	$n_2 = 2$ $n_2 \leq (r-n_1)r \Rightarrow n_2 \leq (3-2)3 \Rightarrow n_2 \leq 3$ ✓
3	2 2 0 2 2 1	$n_3 = 2$ $n_3 \leq ((r-n_1)r-n_2)r \Rightarrow n_3 \leq (3-2)3 \Rightarrow n_3 \leq 3$ ✓
4	2 2 2 0	$n_4 = 1$ $n_4 \leq (((r-n_1)r-n_2)r-n_3)r \Rightarrow n_4 \leq (3-2)3 \Rightarrow n_4 \leq 3$ ✓
5	2 2 2 1 0	$n_5 = 1$ $n_5 \leq ((((r-n_1)r-n_2)r-n_3)r-n_4)r \Rightarrow n_5 \leq (3-1)3 \Rightarrow n_5 \leq 6$ ✓

C: $\sum_{s} r^{-l_i} \leq 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{1}{3^2}\right) + 6\left(\frac{1}{3^3}\right) \leq 1$

$$\frac{27}{27} = 1$$

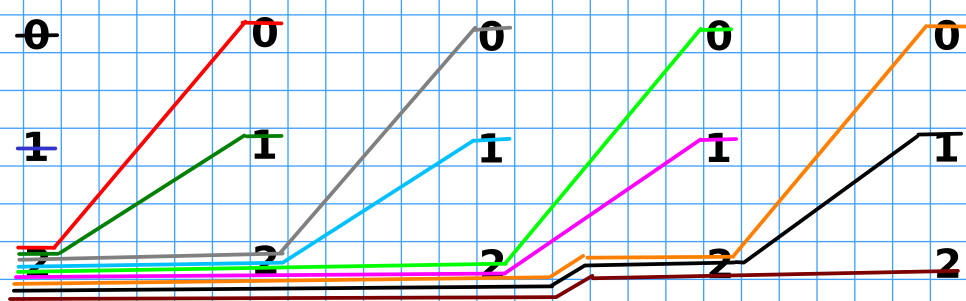


Si	C
S1	0
S2	1 0
S3	1 1
S4	1 2
S5	2 0
S6	2 1 0
S7	2 1 1
S8	2 1 2
S9	2 2 0
S10	2 2 1
S11	2 2 2

l_i	C	
1	0	$n_1 = 1$ $n_1 \le 3$ ✓
2	1 0 1 1 1 2 2 0	$n_2 = 4$ $n_2 \le (r - n_1) r \Rightarrow n_2 \le (3-1)3 \Rightarrow n_2 \le 6$ ✓
3	2 1 0 2 1 1 2 1 2 2 2 0 2 2 1 2 2 2	$n_3 = 6$ $n_3 \le ((r - n_1) r - n_2) \Rightarrow n_3 \le (6-4)3 \Rightarrow n_3 \le 6$ ✓

D: $$\sum_{S} r^{-l_i} \le 1 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3^2}\right) + 2\left(\frac{1}{3^3}\right) + 2\left(\frac{1}{3^4}\right) + 3\left(\frac{1}{3^5}\right) \le 1$$

$$\frac{243}{243} = 1$$



s_i	D
s_1	0
s_2	1
s_3	2 0
s_4	2 1
s_5	2 2 0
s_6	2 2 1
s_7	2 2 2 0
s_8	2 2 2 1
s_9	2 2 2 2 0
s_{10}	2 2 2 2 1
s_{11}	2 2 2 2 2

l_i	D	
1	0 1	$n_1 = 2$ $n_1 \le 3$ ✓
2	2 0 2 1	$n_2 = 2$ $n_2 \le (r - n_1) r \Rightarrow n_2 \le (3-2)3 \Rightarrow n_2 \le 3$ ✓
3	2 2 0 2 2 1	$n_3 = 2$ $n_3 \le ((r - n_1) r - n_2) r \Rightarrow n_3 \le (3-2)3 \Rightarrow n_3 \le 3$ ✓
4	2 2 2 0 2 2 2 1	$n_4 = 2$ $n_4 \le (((r - n_1) r - n_2) r - n_3) r \Rightarrow n_4 \le (3-2)3 \Rightarrow n_3 \le 3$ ✓
5	2 2 2 2 0 2 2 2 2 1 2 2 2 2 2	$n_5 = 3$ $n_5 \le ((((r - n_1) r - n_2) r - n_3) r - n_4) r \Rightarrow n_5 \le (3-2)3 \Rightarrow n_5 \le 3$ ✓

2. a) Especifique un código ternario instantáneo para una fuente con diez símbolos. Las longitudes de las palabras de código deben ser 1,2,2,2,2,2,3,3,3, y 3.
R: No es posible. Justifique.

b) Repita el inciso anterior asumiendo longitudes de palabras deseadas de 1,2,2,2,2,3,3,3,3,4.

a. La condición de Kraft es necesaria y suficiente para que exista por lo menos un código instantáneo con esas longitudes:

$$\sum_{s} r^{-l_i} \le 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right) + 5\left(\frac{1}{3^2}\right) + 4\left(\frac{1}{3^3}\right) \le 1$$

$$\frac{28}{27} \approx 1.01 > 1$$

✗ no cumple la desigualdad de kraft

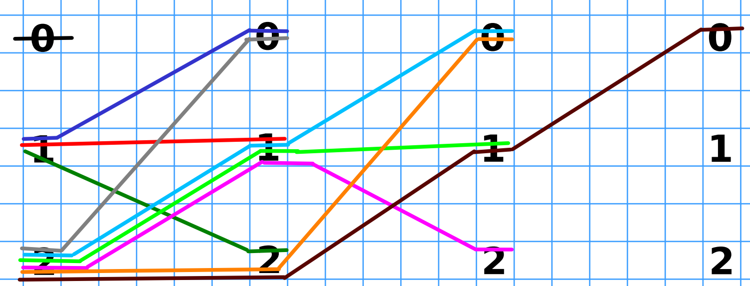
b.

$$\sum_{s} r^{-l_i} \le 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right) + 4\left(\frac{1}{3^2}\right) + 4\left(\frac{1}{3^3}\right) + \left(\frac{1}{3^4}\right) \le 1$$

$$\frac{76}{81} \approx 0.94 \le 1$$

✓ si cumple la desigualdad de kraft

Método descrito en clase:



s_i	X
s_1	0
s_2	1 0
s_3	1 1
s_4	1 2
s_5	2 0
s_6	2 1 0
s_7	2 1 1
s_8	2 1 2
s_9	2 2 0
s_{10}	2 2 1 0

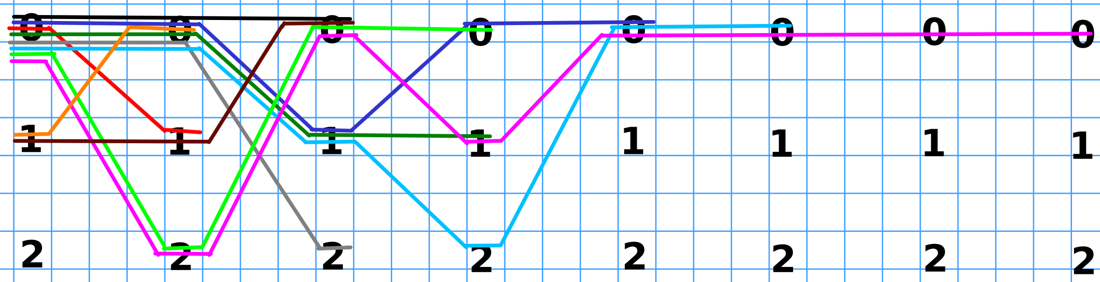
3. a) Especifique un código ternario instantáneo para una fuente cuyo alfabeto es $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_{10}\}$. Se requiere $l_1 = 3$, $l_2 = 5$, $l_3 = 2$, $l_4 = 4$, $l_5 = 3$, $l_6 = 6$, $l_7 = 4$, $l_8 = 8$, $l_9 = 2$, y $l_{10} = 3$. Asuma como alfabeto de código $X = \{0,1,2\}$. Utilice el método descrito en clase.

b) Compruebe que la inecuación de Kraft es una condición suficiente para que un código instantáneo exista (como ejemplo, especifique un código ternario instantáneo para la fuente que se describe en el problema 3a) utilizando el método que se describe en la sección 3.6: $n_1 \le r$, $n_2 \le (r-n_1)r$, $n_3 \le ((r-n_1)r - n_2)r$, etc.)

a. $\displaystyle\sum_{S} r^{-l_i} \le 1 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{3^2}\right) + 3\left(\frac{1}{3^3}\right) + 2\left(\frac{1}{3^4}\right) + \left(\frac{1}{3^5}\right) + \left(\frac{1}{3^6}\right) + \left(\frac{1}{3^8}\right) \le 1$

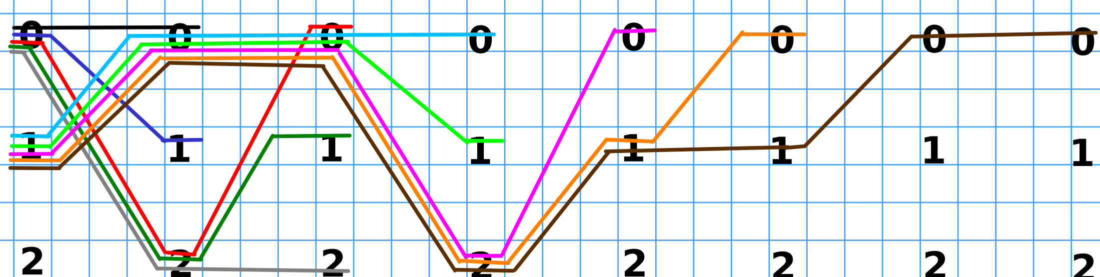
$$\frac{2386}{6561} \approx 0.36 \le 1$$

método descrito en clase:



si	A
s1	000
s2	00100
s3	01
s4	0011
s5	002
s6	001200
s7	0200
s8	02010000
s9	10
s10	110

b. ordenamos por longitud: método sección 3.6



si	B
s1	020
s2	10020
s3	00
s4	1000
s5	021
s6	100210
s7	1001
s8	10021100
s9	01
s10	022

$n_1 = 0$
$n_7 = 0$

l_i	B	
2	00 01	$n_2 = 2$ $n_2 \leq (r - n_1)r \Rightarrow n_2 \leq (3-0)3 \Rightarrow n_2 \leq 9$ ✓
3	020 021 022	$n_3 = 3$ $n_3 \leq ((r-n_1)r - n_2)r \Rightarrow n_3 \leq (9-2)3 \Rightarrow n_3 \leq 21$ ✓
4	1000 1001	$n_4 = 2$ $n_4 \leq (((r-n_1)r-n_2)r-n_3)r \Rightarrow n_4 \leq (21-3)3 \Rightarrow n_4 \leq 54$ ✓
5	10020	$n_5 = 1$ $n_5 \leq ((((r-n_1)r-n_2)r-n_3)r-n_4)r \Rightarrow n_5 \leq (54-2)3 \Rightarrow n_5 \leq 156$ ✓
6	100210	$n_6 = 1$ $n_6 \leq (((((r-n_1)r-n_2)r-n_3)r-n_4)r-n_5)r \Rightarrow n_6 \leq (156-1)3 \Rightarrow n_6 \leq 465$ ✓
8	10021100	$n_8 = 1$ $n_8 = (((((((r-n_1)r-n_2)r-n_3)r-n_4)r-n_5)r-n_6)r-n_7)r \Rightarrow n_8 \leq (1392-0)3$ ✓

∴ LA condición de KRAFT es suficiente para que un código instantáneo exista.