
EXAMEN TIPO

Instrucciones:

- Resuelva cada una de las cuestiones que se le presentan a continuación dejando constancia de todo procedimiento y razonamiento hecho.
 - Favor de entregar su trabajo en hojas debidamente identificadas.
 - Entregue su solución a través del GES, en un archivo en formato PDF.
-

Problema 1

Demuestre que para un producto interno general:

$$\|f + ig\|^2 = \|f\|^2 + 2 \operatorname{Im} \langle f | g \rangle + \|g\|^2.$$

Problema 2

Considere el producto interno definido por:

$$\langle f | g \rangle = \int_0^\infty f(x) g(x) e^{-x} dx.$$

Demuestre que los polinomios de Laguerre $f(x) = 1 - x$, $g(x) = \frac{1}{2}(6 - 18x + 9x^2 - x^3)$ son ortogonales.

Problema 3

Demuestre que:

$$\|(x_1, x_2)\| = \sqrt{3x_1^2 + 4x_1 x_2 + 2x_2^2}$$

es una norma en \mathbb{R}^2 .

Problema 4

Considere la función definida por:

$$f(t) = t \quad -\pi < t < \pi \quad f(t + 2\pi) = f(t).$$

1. Encuentre la serie de Fourier de $f(t)$.
2. Dibuje el espectro de potencia para $n = 1, 2, 3, 4, 5$.
3. Encuentre la solución al estado estable de:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 3x = f(t).$$

4. Utilice el teorema de Dirichlet para demostrar que:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots.$$

5. Utilice el teorema de Parseval para demostrar que:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots .$$

Problema 5

Considere la función:

$$f(x) = 1 - x \quad 0 < x < 1.$$

1. Dibuje una expansión periódica par de dicha función en $-4 < x < 6$.
2. Encuentre la serie de cosenos de $f(x)$.
3. Calcule la serie de Fourier compleja de la extensión par.

Problema 6

Considere la ecuación de onda:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sujeta a:

$$u(x, 0) = f(x) \quad u(0, t) = u(L, t) = 0.$$

Encuentre la solución a la ecuación de onda.