8.3.2　8.3.3 柱面坐标和球面坐标系下的三重积分

基础过关

一、计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成的形体.

二、计算 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 及抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围成的形体.

三、设 $\Omega: x^2+y^2+z^2\le 1$，计算

1. $I=\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；2. $I=\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；3. $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

四、设Ω是由平面$z=0, z=y, y=1$以及抛物柱面$y=x^2$所围的几何体，计算：

1. $I=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$； 2. $I=\iiint\limits_{\Omega} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$

能力提升

一、计算三次积分$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2}\mathrm{e}^{-(1-z)^2}r\mathrm{d}z.$

二、计算三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$其中$\Omega$是由$x^2+y^2\le 2z,$

$x^2+y^2+z^2\le 3$所围区域.

三、设$\Omega: x^2+y^2+z^2 \le 2tz,\ f \in C(\Omega),\ f(0)=0,\ f'(0)=1,$ 求

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^4}\iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

四、计算三重积分$I=\iiint_{\Omega}(x^2+xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$ 其中Ω是椭球体$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1.$

五、当球$\Omega_1: x^2+y^2+z^2 \le R^2$和球$\Omega_2: x^2+y^2+z^2 \le 2Rz (R>0)$的公共部分体积为$\dfrac{5\pi}{12}$时，求$\Omega_1$的表面位于$\Omega_2$内的部分$S_1$的面积.

延伸探究

一、某物体所在的空间区域为$\Omega: x^2+y^2+2z^2 \le x+y+2z$,密度函数为$x^2+y^2+z^2$,求该物体的质量.