§11.1 微分方程的基本概念 一阶微分方程

一、求以 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-x$ 为通解的微分方程（C_1,C_2 为任意常数）.

$(y+x)e^x=c_1e^{2x}+c_2$,

两边求导得 $(y'+1)e^x+(y+x)e^x=2c_1e^{2x}$

即 $(y'+y+x+1)e^{-x}=2c_1$

两边再求导得 $(y''+y'+1-y'-y-x-1)e^{-x}=0$

$\therefore y''-y-x=0$.

二、求下列微分方程的通解.

1. $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$;

$\dfrac{dy}{y}=\dfrac{1-x}{x}dx$

$\int\dfrac{dy}{y}=\int(\dfrac{1}{x}-1)dx$

$\ln|y|=\ln|x|-x+c$, $\therefore \ln|\dfrac{y}{x}|=-x+c$ $\therefore y=cxe^{-x}$

2. $ydx+(x^2-4x)dy=0$;

$\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dx}{4x-x^2}$. $\int\dfrac{dy}{y}=\dfrac{1}{4}\int(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{4-x})dx$

$\ln|y|=\dfrac{1}{4}\ln|x|-\dfrac{1}{4}\ln|4-x|+c$, $\therefore y^4=\dfrac{cx}{4-x}$

3. $(x+1)y'+1=2e^{-y}$;

$(x+1)\dfrac{dy}{dx}=2e^{-y}-1$, $\int\dfrac{e^y dy}{2-e^y}=\int\dfrac{dx}{x+1}$

$-\ln|2-e^y|=\ln|x+1|+c$,

$\therefore (2-e^y)(x+1)=c$.

4. $\sec^2 x \tan y dx + \sec^2 y \tan x dy = 0$;

$$\int \frac{\sec^2 y\, dy}{\tan y} = -\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx, \quad \ln|\tan y| = -\ln|\tan x| + C$$

$$\therefore \tan x \cdot \tan y = C$$

三、求下列微分方程的特解.

1. $(1+x^2)y' = \arctan x, y|_{x=0} = 0$;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\arctan x}{1+x^2}, \therefore y = \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C,$$

$$\because y|_{x=0} = 0, \quad \therefore C = 0. \quad \therefore y = \frac{1}{2}(\arctan x)^2$$

2. $xy' + y = 0, y(1) = 1$.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \quad \ln|y| = -\ln|x| + C \quad \therefore xy = C, \quad \because y(1) = 1$$

$$\therefore C = 1. \quad \therefore xy = 1$$

四、若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x) = \int_0^{2x} f(\frac{t}{2})\, dt + \ln 2$, 求 $f(x)$.

令 $f(x) = y$, 则 $y' = f(x) \cdot 2 + 0$

即 $\begin{cases} y' = 2y \\ y(0) = \ln 2 \end{cases}$

$$\therefore \int \frac{dy}{y} = \int 2dx \quad \ln|y| = 2x + C, \quad y = Ce^{2x}$$

$$\because y(0) = \ln 2, \quad \therefore \ln 2 = C, \quad \therefore y = \ln 2 \cdot e^{2x}$$

五、求下列微分方程的通解.

1. $(3x^2+2xy-y^2)dx+(x^2-2xy)dy=0$;

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2+2xy-y^2}{x^2-2xy}=-\frac{3+2\cdot\frac{y}{x}-(\frac{y}{x})^2}{1-2\cdot\frac{y}{x}}$$

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $y=ux$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，原方程可化

$u+x\frac{du}{dx}=-\frac{3+2u-u^2}{1-2u}$，即 $x\frac{du}{dx}=\frac{3u^2-3u-3}{1-2u}$，$-\frac{1}{3}\int\frac{-2u-1}{u^2-u-1}du=\int\frac{1}{x}dx$

$\therefore -\frac{1}{3}\ln|u^2-u-1|=\ln|x|+\ln C_1$，$\therefore u^2-u-1=Cx^{-3}$，

$\therefore \underline{xy^2-x^2y-x^3=C}$ $(C\in R)$

2. $xy'=xe^{\frac{y}{x}}+y$;

$y'=e^{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$ （齐次）

令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y=xu$，$y'=u+x\frac{du}{dx}$，$u+x\frac{du}{dx}=e^u+u$

$\therefore e^{-u}du=\frac{1}{x}dx$ $\int e^{-u}du=\int\frac{1}{x}dx$，$-e^{-u}=\ln|x|+C_1$

$\therefore -e^{-\frac{y}{x}}=\ln Cx$ $(C\neq 0)$

3. $(y^2-3x^2)dy+2xydx=0$.

$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{3x^2-y^2}$，$\frac{dx}{dy}=\frac{3x^2-y^2}{2xy}=\frac{3(\frac{x}{y})^2-1}{2\frac{x}{y}}$，

令 $\frac{x}{y}=u$，则 $x=uy$，$\frac{dx}{dy}=u+y\frac{du}{dy}$，

$u+y\frac{du}{dy}=\frac{3u^2-1}{2u}$，$\therefore \int\frac{2u}{u^2-1}du=\int\frac{1}{y}dy$，$\ln|u^2-1|=\ln|y|+C_1$

$\therefore u^2-1=Cy$，即 $(\frac{x}{y})^2-1=Cy$，$\underline{x^2-y^2=Cy^3}$ $(C\in R)$

六. 求微分方程的特解：$xy\frac{dy}{dx}=x^2+y^2, y|_{x=e}=2e$.

$\frac{dy}{dx}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{\frac{y}{x}}$，令 $y=ux$，则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，

$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{u}$，$x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}$，

$\therefore \int u\,du=\int\frac{1}{x}dx$，$\frac{1}{2}u^2=\ln|x|+C$

$\frac{1}{2}(\frac{y}{x})^2=\ln|x|+C$，$\therefore y^2=2x^2(\ln|x|+C)$

由 $y|_{x=e}=2e$ 得 $C=1$ $\therefore$ 特解为 $\underline{y^2=2x^2(\ln|x|+1)}$

七、求下列微分方程的通解.

1. $(y+x^2e^{-x})dx-xdy=0$;

$$y'-\frac{1}{x}y=xe^{-x}$$

$$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int xe^{-x}\cdot e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+c\right]$$

$$=e^{\ln x}\left[\int xe^{-x}\cdot e^{-\ln x}dx+c\right]$$

$$=x\{\int e^{-x}dx+c]$$

$$\therefore y=\cancel{x}e^{-x}+cx \qquad (c\in\mathbb{R})$$

2. $y'+y\tan x=\cos x$;

$$y=e^{-\int\tan x dx}\left[\int\cos x\cdot e^{\int\tan x dx}dx+c\right]$$

$$=e^{\ln\cos x}\left[\int\cos x\cdot\frac{1}{\cos x}dx+c\right]$$

$$\therefore y=\cos x(x+c) \qquad (c\in\mathbb{R})$$

八、求微分方程的特解：$(y+x^3)dx-2xdy=0, y|_{x=1}=\frac{6}{5}$.

$$y'-\frac{1}{2x}\cdot y=\frac{x^2}{2}$$

$$y=e^{\int\frac{1}{2x}dx}\left[\int\frac{x^2}{2}\cdot e^{-\int\frac{1}{2x}dx}dx+c\right]$$

$$=e^{\frac{1}{2}\ln x}\left[\int\frac{x^2}{2}e^{-\frac{1}{2}\ln x}dx+c\right]$$

$$=\sqrt{x}\left[\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx+c\right]$$

$$=\sqrt{x}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+c\right)$$

$$\therefore y=\frac{1}{5}x^3+c\sqrt{x}$$

$$\because y|_{x=1}=\frac{6}{5},\ \therefore c=1$$

$$\therefore y=\frac{1}{5}x^3+\sqrt{x}.$$

自测题六（常微分方程）

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1．$y=C-x$（C 为任意常数）是微分方程 $xy''+y'=-1$ 的（ D ）

（A）通解；（B）特解；（C）不是解；（D）解，既非通解也非特解

2．微分方程 $y\mathrm{d}x+(y^2x-\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0$ 是（ B ）　$\frac{dx}{dy}+yx=\frac{e^y}{y}$

（A）全微分方程；（B）一阶线性方程；（C）可分离变量方程；（D）齐次方程

3.一曲线上任一点的切线的斜率为 $-\dfrac{2x}{y}$，则此曲线是（ C ）

（A）直线　　（B）抛物线　　（C）椭圆　　（D）圆

4.由 $x^2-xy+y^2=C$ 确定的隐函数的微分方程是（ A ）

（A）$(x-2y)y'=2x-y$　（B）$(x-2y)y'=2x$　（C）$xy'=2x-y$（D）$-2yy'=2x-y$

5. 满足方程 $\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=nf(x)$（n 为大于 1 的自然数）的可导函数 $f(x)$ 为（ A ）

令 $tx=u$，则 $\int_0^x f(u)\frac{du}{x}=nf(x)$

$\int_0^x f(u)du=nxf(x)$

求导得 $f(x)=nf(x)+nxf'(x)$

$n\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1-n}{x}\Rightarrow n\ln|f(x)|=(1-n)\ln|x|+\ln C$

$\Rightarrow f(x)=Cx^{\frac{1-n}{n}}$

（A）$Cx^{\frac{1-n}{n}}$　　（B）Cx　　（C）$C\sin nx$　　（D）$C\cos nx$

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1．$xy'''+2y''+x^2y=0$ 是＿＿3＿＿阶微分方程.

2．微分方程 $F(x,y^4,y',(y'')^2)=0$ 的通解中所含任意常数的个数是＿＿2＿＿．2

3．以 $y=C\mathrm{e}^{x^2}$（C 为任意常数）为通解的微分方程是＿$ye^{-x^2}=C\Rightarrow$＿．$y'=2xy$ ✓

4．已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则 $y(1)=$＿＿＿＿．$\pi\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$ ✓

$y'=\frac{y}{1+x^2}$．$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{1+x^2}$

$\ln|y|=\arctan x+c$

$y=Ce^{\arctan x}$　$\because y(0)=\pi$

$\therefore y=\pi e^{\arctan x}$

5. 函数 $y=3\sin x-4\cos x$ 是否为方程 $y''+y=0$ 的解＿＿不是＿＿

三、解下列各题（每题 10 分，共 40 分）

1. 求微分方程的通解：$(\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0.$

$e^x(e^y-1)dx=-e^y(e^x+1)dy$，$\int\frac{e^x}{e^x+1}dx=\int\frac{e^y}{e^y-1}dy$

$\ln(e^x+1)=-\ln|e^y-1|+\ln C$

~~$\therefore(e^x+1)(e^y-1)$~~

$\therefore(e^x+1)(e^y-1)=C$

2. 求微分方程的通解：$(x^2-1)\mathrm{d}y+(2xy-\cos x)\mathrm{d}x=0;$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{x^2-1}\cdot y=\frac{\cos x}{x^2-1}$$

$$\therefore\ y=e^{-\int\frac{2x}{x^2-1}dx}\left[\int\frac{\cos x}{x^2-1}\cdot e^{\int\frac{2x}{x^2-1}dx}dx+C\right]$$

$$=e^{-\ln(x^2-1)}\left[\int\frac{\cos x}{x^2-1}\cdot(x^2-1)\,dx+C\right]$$

$$\therefore y=\frac{1}{x^2-1}(\sin x+C)$$

$C\in\mathbb{R}$

3. 求微分方程的特解：$x^2y'+xy=y^2, y(1)=1;$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-xy}{x^2}=\left(\frac{y}{x}\right)^2-\left(\frac{y}{x}\right).$$

令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y=xu$，$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$.

$u+x\frac{du}{dx}=u^2-u$，$\Rightarrow x\frac{du}{dx}=u^2-2u$

$\int\frac{du}{u(u-2)}=\int\frac{1}{x}dx$ $\qquad \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|=\ln C+\ln|x|$

$$\therefore\ \frac{u-2}{u}=Cx^2$$

即 $\frac{y-2x}{y}=Cx^2$

由 $y(1)=1$ 知 $C=-1$. 得特解 $\frac{y-2x}{y}=-x^2$

即 $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

4. 求微分方程的特解：$xy'+y-e^{x}=0, y|_{x=1}=e$.

$$y'+\frac{1}{x}y=\frac{e^x}{x}$$

$$y=e^{-\int\frac{dx}{x}}\left[\int\frac{e^x}{x}\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]$$

$$=e^{-\ln x}\left[\int\frac{e^x}{x}\cdot e^{\ln x}dx+C\right]$$

$$\therefore y=\frac{1}{x}(e^x+C)$$

$$\because y|_{x=1}=e,\ \therefore C=0$$

$\therefore$ 特解为 $\underline{y=\frac{e^x}{x}}$

四、解下列各题（每题 10 分，共 30 分）

1、设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，若由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1, x=t(t>1)$ 与 X 轴所围成的平面图形绕 X 轴旋转一周所成的旋转体体积为 $V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)]$. 试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程，并求该微分方程满足条件 $y|_{x=2}=\frac{2}{9}$ 的解.

$V(t)=\pi\int_1^t f^2(t)dt=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)]$.

两边对 t 求导有 $3f^2(t)=2tf(t)+t^2f'(t)$，故 $y=f(x)$ 满足

$x^2y'=3y^2-2xy$，这是一个一阶齐次方程. 令 $y=xu$，就有

$y'=u+xu'$，$x\frac{du}{dx}=3u(u-1)$. $\frac{u-1}{u}=Cx^3$.

即 $y=Cx^3y+x$. 由条件 $y|_{x=2}=\frac{2}{9}$ 知 $C=-1$

$\therefore$ $\underline{y=-x^3y+x}$ 即 $y=\frac{x}{1+x^3}$

2、求微分方程 $x\mathrm{d}y+(x-2y)\mathrm{d}x=0$ 的一个解 $y=y(x)$, 使得由曲线 $y=y(x)$ 与直线 $x=1, x=2$ 以及X轴所围成的平面图形绕X轴旋转一周的旋转体体积最小.

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x}=-1 \Rightarrow y=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[\int(-1)\cdot e^{-\int\frac{2dx}{x}}dx+C\right]=x^2\left(\int-\frac{1}{x^2}dx+C\right)$$

$$\therefore \quad y=x+cx^2.$$

$$V(c)=\int_1^2\pi(x+cx^2)^2dx=\pi\left(\frac{31}{5}c^2+\frac{15}{2}c+\frac{7}{3}\right)$$

令 $V'(c)=\pi\left(\frac{62}{5}c+\frac{15}{2}\right)=0$，得 $c=-\frac{75}{124}$

此时 $V''(c)=\frac{62}{5}\pi>0$

$\therefore c=-\frac{75}{124}$ 为唯一极值点，也是最小值点.

于是 $y=y(x)=x-\frac{75}{124}x^2$

3. 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且满足 $f(t)=e^{\pi t^2}+\iint\limits_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le t^2\}$，求 $f(t)$.

由此 $f(0)=1$， $\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^t f(\rho)\rho d\rho=2\pi\int_0^t f(\rho)\rho d\rho.$

$$\therefore f(t)=e^{\pi t^2}+2\pi\int_0^t f(\rho)\rho d\rho$$

$$f'(t)=2\pi t e^{\pi t^2}+2\pi t f(t)$$

$$f(t)=e^{\int 2\pi t dt}\left[\int 2\pi t e^{\pi t^2}\cdot e^{-\int 2\pi t dt}dt+C\right]$$

$$=e^{\pi t^2}\left[\int 2\pi t dt+C\right]$$

$$=(\pi t^2+C)e^{\pi t^2}$$

由 $f(0)=1$ 得 $C=1$ $\quad\therefore f(t)=(\pi t^2+1)e^{\pi t^2}.$