§9.1 曲线积分

一、填空

1．设 $L: y=-\sqrt{1-x^2}$，则 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ ___ π ___ ($=\int_L ds$ 半圆弧长)

2．设 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2\,(a>0)$，则 $\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ ___ $2\pi a^3$ ___；

$\oint_L y^2\mathrm{d}s=$ ___ πa^3 ___；$\oint_L (2x^2+3y^2)\mathrm{d}s=$ ___ $5\pi a^3$ ___． (由对称性)

3．设 L 为曲线 $x^2+y^2=1\,(y\ge 0)$，则 $\int_L e^{x^2+y^2}\arctan\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=$ ___ $\int_L e\cdot\frac{\pi}{4}ds=\frac{\pi^2}{4}e$ ___． 半圆上.

4．设 Γ 为曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=8 \\ z=2 \end{cases}$，则 $\oint_\Gamma \dfrac{\mathrm{d}s}{x^2+y^2+z^2}=$ ___ $\int_C \frac{ds}{8}=\frac{2\pi\times 2}{8}=\frac{\pi}{2}$ ___． 圆：$x^2+y^2=4$

5．设 Γ 为 $x^2+y^2=4$ 的正向，则 $\oint_\Gamma \dfrac{x\mathrm{d}y+2y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=$ ___ $\int_C \frac{xdy+2ydx}{4}$ ___． $=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(4\cos^2t-8\sin^2t)dt=-4\int_0^{2\pi}\sin^2t\,dt$

$=-\pi$

6．设 Γ 是从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的一段直线，则 $\int_\Gamma x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(x+y-1)\mathrm{d}z=$ ___ 13 ___．

$\vec{s}=(1,2,3)$， $x=1+t$，$y=1+2t$，$z=1+3t$．

二、计算曲线积分 $I=\oint_L x\mathrm{d}s$，其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界.

$\int_0^1[(t+1)+2(1+2t)+3(1+3t)]dt=\int_0^1(6+14t)dt$

$=7t^2+6t\Big|_0^1=13$

$I=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx+\int_0^1 x\sqrt{1+1^2}\,dx$

$=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2\Big|_0^1$

$=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}$

三、计算曲线积分$I=\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$，其中

1．L为圆周$x^2+y^2=4x$；

$$L:\begin{cases}x=2+2\cos t\\ y=2\sin t.\end{cases}\quad t\in[0,2\pi].$$

$$I=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\overset{2+2\cos t}{x}}\cdot\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}\,dt$$

$$=4\int_0^{2\pi}2\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=16\int_0^{\pi}|\cos u|\,du$$

$$=32$$

2．L为$D=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le x\le\sqrt{2-y^2}\right\}$的边界.

$\overline{OA}$: $y=0$

$\widehat{AB}$: $x^2+y^2=2$

$\overline{BO}$: $y=x$

$$I=\left(\int_{\overline{OA}}+\int_{\widehat{AB}}+\int_{\overline{BO}}\right)\sqrt{x^2+y^2}\,ds$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}x\,dx+\int_{\widehat{AB}}\sqrt{2}\,ds+\int_0^1\sqrt{2}\,x\sqrt{2}\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\times\frac{\pi\sqrt{2}}{4}+\frac{2}{2}=2+\frac{\pi}{2}$$

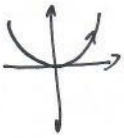
四、计算曲线积分$I=\int_\Gamma\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$，其中$\Gamma$为曲线$\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\cos t\\ y=\mathrm{e}^t\sin t\\ z=\mathrm{e}^t\end{cases}$上相应于$t$从0变到2的一段弧.

$$I=\int_0^2\frac{1}{2e^{2t}}\sqrt{[e^t(\cos t-\sin t)]^2+[e^t(\cos t+\sin t)]^2+(e^t)^2}\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^2e^{-t}dt=-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t}\Big|_0^2=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2})$$

五、计算曲线积分 $I=\int_L\left(x^2-2xy\right)\mathrm{d}x+\left(y^2-2xy\right)\mathrm{d}y$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

$$I=\int_{-1}^{1}[(x^2-2x^3)+(x^4-2x^3)\cdot 2x]dx$$



$$=\int_{-1}^{1}(x^2-4x^4)dx$$

$$=2\left(\frac{x^3}{3}-\frac{4}{5}x^5\right)\Big|_0^1=-\frac{14}{15}$$

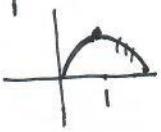
六、计算曲线积分 $I=\int_L\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y$，$L$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$

(1) L 的方程为 $y=x^5$；

(2) L 的方程为 $y=\sqrt{2x-x^2}$；

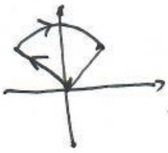
(3) L 是从 O 沿 $y=-x$ 经 $B(-1,1)$ 再沿 $y=\sqrt{2-x^2}$ 到点 A.

(1) $I=\int_0^1[(x^2-x^{10})+x^6\cdot 5x^4]dx=\frac{1}{3}+\frac{4}{11}=\frac{23}{33}$



(2) $I=\int_0^1\left[x^2-(2x-x^2)+x\sqrt{2x-x^2}\cdot\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right]dx$

$$=\int_0^1(x^2-x)dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}$$



(3) $I=\int_0^{-1}[x^2-(-x)^2+x\cdot(-x)\cdot(-1)]dx+\int_{-1}^{1}\left[x^2-(2-x^2)+x\sqrt{2-x^2}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}\right]$

$$=\int_0^{-1}x^2dx+\int_{-1}^{1}(x^2-2)dx$$

$$=\frac{x^3}{3}\Big|_0^{-1}+\left(\frac{x^3}{3}-2x\right)\Big|_{-1}^{1}=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-4=\cancel{2}-\frac{11}{3}$$

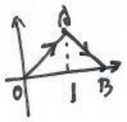
七、计算曲线积分 $I=\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y$，其中 L 分别为

1．$y=1-|1-x|$ 从 $O(0,0)$ 经 $A(1,1)$ 到点 $B(2,0)$ 的折线；2．沿圆周 $(x-1)^2+y^2=1$ 的上半部分从 $O(0,0)$ 到 $B(2,0)$ 的一段弧.

$\overline{OA}$: $y=x$, $x: 0\to1$

$\overline{AB}$: $y=2-x$, $x: 1\to2$

1. $I=\left(\int_{\overline{OA}}+\int_{\overline{AB}}\right)(x^2+y^2)dx+2xy\,dy$



$$=\int_0^1(2x^2+2x^2\cdot1)dx+\int_1^2[x^2+(2-x)^2+2x(2-x)\cdot(-1)]dx$$

$$=\int_0^1 4x^2dx+\int_1^2(4x^2-8x+4)dx=\frac{4}{3}+4\cdot\frac{(x-1)^3}{3}\Big|_1^2=\frac{8}{3}$$

2. 令 $x=1+\cos t$, $y=\sin t$, $t:\pi\to0$

$$I=\int_\pi^0[2(1+\cos t)(-\sin t)+2(1+\cos t)\sin t\cdot\cos t]dt$$

$$=-\int_0^\pi(-2\sin t+2\sin t\cdot\cos^2t)dt=4+\frac{2}{3}\cos^3t\Big|_0^\pi=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

八、设 Γ 为曲线 $\begin{cases}x=t\\ y=t^2\\ z=t^3\end{cases}$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧，把对坐标的曲线积分

$\int_\Gamma xyz\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z$ 化为对弧长的曲线积分.

$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\sqrt{1+4t^2+9t^4}\,dt$ $dx=dt$, $dy=2t\,dt$, $dz=3t^2dt$

$$\therefore\int_\Gamma xyz\,dx+yz\,dy+xz\,dz=\int_\Gamma\left[xyz\cdot\frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}+yz\cdot\frac{2t^{\,''x}}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}+xz\cdot\frac{3t^{2\,''y}}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}\right]ds$$

$$=\int_\Gamma\frac{xyz+2xyz+3xyz}{\sqrt{1+4y+9z}}ds=\int_\Gamma\frac{6xyz}{\sqrt{1+4y+9z}}ds$$