7.4.1 微分法在几何上的应用

基础过关

一、填空

1. $\frac{\pi}{4}$.

2. $\frac{a-x}{F_x}=\frac{b-y}{F_y}=\frac{c-z}{F_z}$.

二、切线：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-\frac{1}{2}}{2}=\frac{z-1}{-2}$.

法平面：$x+2y-2z=0$.

三、曲线在点 $(1,-2,1)$ 的切向量 $\vec{\tau}=(1,-\frac{3}{2},2)$ 直线的方向向量 $\vec{s}=(-14,-12,-2)$,

$\vec{\tau}\cdot\vec{s}=0$.

四、切平面：$2x+y-4=0$.

法线：$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-0}{0}$.

五、$4x-2y-3z=3$.

能力拓展

一、$(0,\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{15}}{5})$.

二、$a=-5,b=-2$.

延伸探究

一、$f(tx,ty)=t^2f(x,y)$ 两边对 t 求导得

$$xf_1'(tx,ty)+yf_2'(tx,ty)=2tf(x,y).$$

将 $t=1$ 代入上式得

$$xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)=2f(x,y).$$

将 $x=1,y=-2$ 代入上式得

$$f_x'(1,-2)-2f_y'(1,-2)=2f(1,-2).$$

即 $4-2f_y'(1,-2)=4$. 由此得到 $f_y'(1,-2)=0$. 于是 Σ 在点 P_0 处的法线方程为

$$\frac{x-1}{f_x'(1,-2)}=\frac{y+2}{f_y'(1,-2)}=\frac{z-2}{-1},\text{即}\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-2}{-1}.$$