9.1.3 格林公式 9.1.4 曲线积分与路径无关条件

基础过关

一、填空题

1．设 $\boldsymbol{L}$ 是 $|x|+|y|=1$ 逆时针方向一周，则 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{|x|+|y|}=$ ________ .

2．设 $\boldsymbol{L}$ 是圆 $x^2+y^2=a^2$ 逆时针方向一周，则 $\oint_L \frac{xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}}=$ ________ .

3．设 $\boldsymbol{L}$ 是圆 $x^2+y^2=9$ 逆时针方向一周，则 $\oint_L x\mathrm{d}y=$ ________; $\oint_L x\mathrm{d}s=$ ________ .

4．设 $\boldsymbol{L}$ 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 顺时针方向一周，

则 $\oint_L\left(\sqrt{x+1}+2y\right)\mathrm{d}x+\left(y\cos y+5x\right)\mathrm{d}y=$ ________ .

5．$\int_{(1,0)}^{(2,1)}\left(2xy-y^4+3\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-4xy^3\right)\mathrm{d}y=$ ________ .

6．若 $\boldsymbol{L}$ 是光滑曲线，曲线积分 $\int_L (x^4+4xy^a)\mathrm{d}x+(6x^{a-1}y^2-5y^4)\mathrm{d}y$ 与路径无关，则 a 的值是________.

7． $(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}($________$)$

二、计算曲线积分 $I=\oint_L\left(2x-y+4\right)\mathrm{d}x+\left(5y+3x-6\right)\mathrm{d}y$，其中 L 是三顶点 $(0,0),(3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形正向边界.

三、计算曲线积分 $I=\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+y\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y$，其中 L 是从点 $A(1,0)$ 沿上半圆周 $(x-2)^2+y^2=1(y\ge 0)$ 到点 $B\left(3,0\right)$ 的路径.

四、计算曲线积分 $I=\oint_L \dfrac{y\mathrm{d}x-\left(x-1\right)\mathrm{d}y}{\left(x-1\right)^2+y^2}$，其中 L：

1． $x^2+y^2-2y=0$ 的正向；

2． $4x^2+y^2-8x=0$ 的正向.

五、验证：$\left(\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\ln x-\frac{x^2}{y^2}\right)\mathrm{d}y,(x>0,y>0)$是某个二元函数$u(x,y)$的全微分，

并求$u(x,y)$及$\int_{(1,1)}^{(2,3)}\left(\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\ln x-\frac{x^2}{y^2}\right)\mathrm{d}y$.

六. 利用曲线积分求摆线$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t),(0\le t\le 2\pi)$与$x$轴所围图形的面积.

七. 确定逆时针走向的光滑闭曲线C，使曲线积分$\oint_C\left(x+\frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x+\left(y+x-\frac{2}{3}x^3\right)\mathrm{d}y$达到最大值.

八．设 $\overset{\frown}{AO}$ 由点 $A(a,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$，计算：

（1）$I_1=\int_{\overset{\frown}{AO}}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$；

（2）$I_2=\int_{\overset{\frown}{AO}}(\mathrm{e}^x\sin y-m)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-mx)\mathrm{d}y$；

（3）$I_3=\int_{\overset{\frown}{AO}}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-mx)\mathrm{d}y$.

能力提升

一、设函数 $Q(x,y)=\dfrac{x}{y^2}$，如果对上半平面（y>0）内任意有向光滑闭曲线 C 都有

$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0$，那么函数 $P(x,y)$ 可取为（　　）

（A）$y-\dfrac{x^2}{y^3}$　（B）$\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{y^3}$　（C）$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$　（D）$x-\dfrac{1}{y}$

二、设 $L_1: x^2+y^2=1, L_2: x^2+y^2=2, L_3: x^2+2y^2=2, L_4: 2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针方向的平面曲线，记 $I_i=\oint\limits_{L_i}(y+\dfrac{y^3}{6})\mathrm{d}x+(2x-\dfrac{x^3}{3})\mathrm{d}y, (i=1,2,3,4)$，则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$___.

三、设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是有界单连通区域，$I(D)=\iint\limits_{D}\left(4-x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 取得最大值的积分区域记为 D_1, 求:

（1） $I(D_1)$ 的值；　　（2）$\int_{\partial D_1}\dfrac{\left(x\mathrm{e}^{x^2+4y^2}+y\right)\mathrm{d}x+\left(4y\mathrm{e}^{x^2+4y^2}-x\right)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}$.

四、若 $\varphi(y)$ 的导数连续， $\varphi(0)=0,$ 曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 的极坐标方程为 $\rho=a(1+\cos\theta),$ 其中 $a>0,0\le\theta\le\pi, A$ 与 B 分别对应于 $\theta=0$ 与 $\theta=\pi,$ 计算

$I=\int_{\overset{\frown}{AB}}\left[\varphi(y)\mathrm{e}^x-\pi y\right]\mathrm{d}x+\left[\varphi'(y)\mathrm{e}^x-\pi\right]\mathrm{d}y.$

五、设曲线 $y=x(t-x)(t>0)$ 与 x 轴的交点为原点 O 与 A, $\overset{\frown}{OA}$ 为自原点 O 经 $y=x(t-x)$ 到 A 的路线，若 $I(t)=\int_{\overset{\frown}{OA}}(1-y-\frac{\cos y}{1+x})\mathrm{d}x+(2+x+\sin y\cdot\ln(1+x))\mathrm{d}y$, 求 t 的值，使 $I(t)$ 取最大值.

六、设 $Q(x,y)$ 在 xOy 面上有一阶连续偏导数，曲线积分 $\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，对任意 t, $\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$, 求 $Q(x,y)$.

延伸探究

一、已知曲线积分$\int_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{f(x)+8y^2}$恒等于常数 A,其中 $f(x)$ 连续可导，且 $f(1)=1, L$ 为任意包含原点$(0,0)$的简单封闭曲线，取正向.

（1）若G为不含原点的单连通域，证明：$\int_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{f(x)+8y^2}$与路径无关，其中$C$为完全位于$G$内的曲线；

（2）求函数 $f(x)$ 和常数 A.