自测题一（向量代数与空间解析几何）

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

$(a+b)\cdot(a+b)=(a-b)\cdot(a-b)$

1、已知 a ,b 为非零向量，且$|a+b|=|a-b|$，则必有：（ C ）

A、$a-b=0$； B、$a+b=0$； C、$a\cdot b=0$； D、$a\times b=0$

2、设 a ,b ,c为非零向量且$(a\times b)\cdot c=2$，则$[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a)=$（ A）

A、4; B、2; C、-2； D、0.

注意 $(a\times b)\cdot c=(b\times c)\cdot a=(c\times a)\cdot b$

3、直线$\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-1}{1}$与平面$2x+y-z+4=0$的夹角为：（ B）

$\sin\alpha=\dfrac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

A、$\dfrac{\pi}{6}$ B、$\dfrac{\pi}{3}$ C、$\dfrac{\pi}{4}$ D、$\dfrac{\pi}{2}$

4、点$(1,1,1)$在平面$x+2y-z+1=0$的投影为：（ c ） ~~垂直平面~~ 垂线方程 $x=1+t$ $y=1+2t$ $z=1-t$ 代入平面得 $t=-\frac{1}{2}$

A、$(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{3}{2})$； B、$(1,-1,0)$； C、$(\dfrac{1}{2},0,\dfrac{3}{2})$； D、$(0,1,-1)$

5、方程$x^2-y^2+z^2=1$表示的旋转曲面和旋转轴为（ C ）

A、单叶双曲面、x 轴； B、双叶双曲面、x 轴；

C、单叶双曲面、y 轴； D、双叶双曲面、y 轴。

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

$\vec{s}=(-1,3,1)$

1、过点$M(1,2,-1)$且与直线$\begin{cases}x=-t+2\\ y=3t-4\\ x=t-1\end{cases}$垂直的平面方程是 $x-3y-z+4=0$

$\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 6&-3&2\\ 4&-1&2\end{vmatrix}=(-4,-4,6)$

2、设一平面过原点及点$(6,-3,2)$且与平面$4x-y+2z=8$垂直，则此平面方程是 $2x+2y-3z=0$

3、曲面$z=2-\sqrt{x^2+y^2}$可以由曲线$\begin{cases}z=2-y\\ x=0\end{cases}$或$\begin{cases}z=2-x\\ y=0\end{cases}$绕 Z 轴旋转一周得到。

4、曲线$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=x^2\end{cases}$在 yOz面上的投影为 $\begin{cases}z+y^2=1\\ x=0\end{cases}$ $(-1\le y\le 1)$ 先消去x 得投影柱面 $y^2+z=1$

5.点$P(3,-1,2)$到直线$\begin{cases}x+y-z+1=0\\ 2x-y+z-4=0\end{cases}$的距离为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ $d=\dfrac{|\overrightarrow{PM}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}$

三.解下列各题（每题 10 分，共 40 分）

1、求直线$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+2=0 \end{cases}$的对称式方程和参数式方程.

$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (4,-1,-3)$. $\therefore \frac{x+1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-3}$

参数式方程：$\begin{cases} x = 4t-1 \\ y = -t \\ z = -3t \end{cases}$

2、化曲线的一般方程$\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases}$为参数方程.

令 $x-1=\cos t$，$y=\sin t$，代入方程 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 得 $z=2\sin\frac{t}{2}$ $(0\le t\le 2\pi)$

$\therefore \begin{cases} x=1+\cos t \\ y=\sin t \\ z=2\sin\frac{t}{2} \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$

3、设一向量与x轴 y 轴夹角相等，而与z轴所成的角是它们的两倍，求该向量的单位向量.

设该单位向量为 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，则 $\beta=\alpha$，$\gamma=2\alpha$.

$\therefore \cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$，即 $\cos^2 2\alpha+\cos 2\alpha=0$

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{4}$ 或 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，所求向量为

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ 或 $(0,0,1)$

4.求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，与柱面 $z^2=2x$ ~~$x^2+y^2=1$ 与 $z=0$~~所围立体在三个坐标面上的投影.

在 xOy 面上：消去 z 得 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2\le 1\\ z=0\end{cases}$

在 yOz 面上：消去 x 得 $\begin{cases}(\frac{z^2}{2}-1)^2+y^2\le 1\\ x=0\end{cases}$

在 zOx 面上：消去 y 得 $\begin{cases}x\le z\le\sqrt{2x}\\ y=0\end{cases}$

四.解下列各题（每题 10 分，共 30 分）

1.试求点 $M_1(3,1,-4)$ 关于直线 $L:\begin{cases}x-y-4z+9=0,\\ 2x+y-2z=0\end{cases}$ 的对称点 M_2 的坐标.

L 的方向向量 $\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 1&-1&-4\\ 2&1&-2\end{vmatrix}=(6,-6,3)=3(2,-2,1)$

L 上有一点 $M_0(1,2,2)$

$\therefore$ L 可以写为参数方程 $\begin{cases}x=1+2t\\ y=2-2t\\ z=2+t\end{cases}$

设 L 上有一点 N 使 $\overrightarrow{M_1N}\perp L$.

$\overrightarrow{M_1N}=(1+2t-3,\ 2-2t-1,\ 2+t+4)=(2t-2,\ 1-2t,\ 6+t)$

则 $\overrightarrow{M_1N}\cdot\vec{s}=0$，即 $4t-4+4t-2+t+6=0$，$\therefore 9t=0$，$t=0$

$\therefore \overrightarrow{M_1M_0}\perp L$. 设 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，则

$\left(\frac{3+x_2}{2},\ \frac{1+y_2}{2},\ \frac{-4+z_2}{2}\right)=(1,2,2)$

$\therefore M_2(x_2,y_2,z_2)=(-1,3,8)$

2.已知点 $A(1,0,0)$， $B(0,2,1)$ 试在 z 轴上找一点 C，使得 ΔABC 的面积最小.

设 $C(0,0,z)$

则 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix}=(2z,\ z-1,\ 2)$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|(2z,z-1,2)|=\frac{1}{2}\sqrt{4z^2+(z-1)^2+4}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{5z^2-2z+5}$，当 $z=\frac{2}{10}$ 时取得最小值 $=\frac{1}{5}$

3.有一束平行于直线 $L:x=y=-z$ 的平行光束照射不透明球面 $S:x^2+y^2+z^2=2z$，求球面在 xOy 面上留下的阴影部分的边界曲线方程.

经过球心与L垂直的平面为 $(x-0)+(y-0)-(z-1)=0$

即 $x+y-z+1=0$

它与球面的交线为 $L_0:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2z \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$

设 $M(x,y,z)$ 是 L_0 的阴影柱面上任一点，$M_1(x_1,y_1,z_1)$ 是

对应的 L_0 上一点．则 $\overrightarrow{MM_1}\parallel(1,1,-1)$，故

$\frac{x_1-x}{1}=\frac{y_1-y}{1}=\frac{z_1-z}{-1}=t$

$\therefore \begin{cases} x_1=x+t \\ y_1=y+t \\ z_1=z-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+t)^2+(y+t)^2+(z-t)^2=2(z-t) \\ (x+t)+(y+t)-(z-t)+1=0 \end{cases}$

—— 柱面方程

令 $z=0$ 得 $\begin{cases} (x+t)^2+(y+t)^2=-2t-t^2, \\ (x+t)+(y+t)=-t-1, \end{cases} \Rightarrow t=-\frac{x+y+1}{3}$

消去 t 得 $\left(\frac{2x-y-1}{3}\right)^2+\left(\frac{2y-x-1}{3}\right)^2+\left(\frac{2-x-y}{3}\right)^2=1$

即 $2x^2+2y^2-2xy-2x-2y-3=0$