

7.5 多元函数的极值

基础过关

一、选择题

1. 点 (x_0, y_0) 使 $f'_x(x, y) = 0$ 且 $f'_y(x, y) = 0$ 成立, 则 ()

- A. (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的极值点 B. (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的最小值点
C. (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 的最大值点 D. (x_0, y_0) 可能是 $f(x, y)$ 的极值点

2. 函数 $z = xy(1 - x - y)$ 的极值点是 ()

- A. $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ B. $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ C. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ D. $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

二、求二元函数 $z = f(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$ 在由直线 $x + y = 6$ 及 x 轴与 y 轴所围成的闭区域 D 上的极值、最大值与最小值.

三、设有曲线 $L: \begin{cases} z = x^2 + 3y^2, \\ z = 4 - 3x^2 - y^2, \end{cases}$ 求 L 在 xOy 平面上的投影, 并求 L 上的 z 坐标的最大值和最小值.

四、在 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短.

五、在已给的椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 内一切内接的长方体（各边分别平行坐标轴）中，求其体积最大者.

六、欲造一无盖的长方体容器，已知底部造价为每平方米 3 元，侧面造价均为每平方米 1 元，现想用 36 元造一个容积最大的容器，求它的尺寸.

能力拓展

一、如果函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是（ ）

A. $f(0)>1, f''(0)>0$

B. $f(0)>1, f''(0)<0$

C. $f(0)<1, f''(0)>0$

D. $f(0)<1, f''(0)<0$

二、求函数 $z = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$ 的极值.

三、已知函数 $f(x, y)$ 满足 $f_{xy}(x, y) = 2(y+1)e^x$, $f_x(x, 0) = (x+1)e^x$, $f(0, y) = y^2 + 2y$, 求 $f(x, y)$ 的极值.

延伸探究

一、已知二元函数 $f(x, y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数, 对任意角度 α , 定义一元函数

$g_\alpha(t) = f(t \cos \alpha, t \sin \alpha)$, 如果对任何 α 都有 $\frac{dg_\alpha(0)}{dt} = 0$ 且 $\frac{d^2g_\alpha(0)}{dt^2} > 0$, 证明: $f(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值.

二、周长为 $2l$ 的三角形，绕其一边旋转，试设计三条边的长，使其旋转体体积最大.