自测题五（无穷级数）

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1、设 a 为常数，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{a+n}{n^2}$：（B）

B、发散　B、条件收敛　C、绝对收敛　D、敛散性与 a 的取值有关

2、部分和数列有界是正项级数收敛的(　)

A、充分条件　　B、必要条件　　C、充要条件　D、无关条件

3、幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-1)^n}{n\cdot 2^n}$ 的收敛域为：（B）

B、$[-1,3]$　　B、$(-1,3]$　　C、$[-1,3)$　　D、$(-1,3)$

4、设 $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+(-1)^n}$，$v_n=\dfrac{n^n}{n!}\not\to 0$，则:（C　）　$=(-1)^n\dfrac{\sqrt{n+1}}{n}-\dfrac{1}{n}$

B、$\sum u_n$ 收敛，$\sum v_n$ 发散;　　B、$\sum u_n$ 发散，$\sum v_n$ 收敛;

C、$\sum u_n$ 发散，$\sum v_n$ 发散;　　D 、$\sum u_n$ 收敛，$\sum v_n$ 收敛

5、设 u_n 是数列，则下列正确的是（ A ）

$\Sigma(-1)^n$

B、$\sum u_n$ 收敛蕴含 $\sum(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛 B、$\sum(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛蕴含 $\sum u_n$ 收敛

$\Sigma(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

C、$\sum u_n$ 收敛蕴含 $\sum(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛 D、$\sum(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛蕴含 $\sum u_n$ 收敛

$\Sigma\frac{1}{n}$

三、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1、已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{n^{\lambda}}$ 收敛，则 λ 取值的最大范围是 $\lambda>\frac{1}{2}$

2、级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=$ $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+2)}$

$S_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}$

3、数列 $\{a_n\}$ 单调递减趋于零，$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 无界，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为 $[0,2)$。

取 $x=0$ 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(-1)^n$，以级数收敛.

4、设常数 $a>1$ 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{a^n}=$ $\frac{a}{(a-1)^2}$、　令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$　$x=2$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

$=(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，取 $x=\frac{1}{a}$，原式 $=\frac{1}{a}f($

5、将级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(2^n+3^n)}x^{2n}$ 的收敛域为 $\sqrt{3}$

三、　解下列各题（每题 10 分，共 40 分）

1.求级数$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n+1}$的和函数。

解法一 积分法　令 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}$，则 $\int_0^x s(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=\frac{x}{1-x^2}$

$$s(x)=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n+1}=\frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$　　$-1<x<1$

解法二.（凑导数法）　$s(x)=x\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'$

$$=x\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}$$

2.求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}(x-1)^n$的和函数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}(x-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(x-1)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}(x-1)^n$$

$$=-\ln(1-(x-1))+\frac{1}{x-1}[\ln(1-(x-1))]+1$$

$$=-\ln(2-x)+\cancel{\frac{1}{x-1}[\ln(2-x)+1]}+\frac{\ln(2-x)}{x-1}+1,$$

$x\in(0,1)\cup(1,2)$

3.将函数$f(x)=\frac{1}{x^2-3x-4}$展开成$(x-1)$的幂级数，并求$f^{(n)}(1)$

$$f(x)=\frac{1}{(x-4)(x+1)}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=-\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}}=-\frac{1}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{5\cdot3^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{5\cdot2^{n+1}}\right](x-1)^n$$

收敛域：$|x-1|<2$ 即 $x\in(-1,3)$

4.求$f(x)=\dfrac{x^2+2}{(x-1)^2(1+2x)}$的幂级数展开式，指出其收敛域.

$$f(x)=\frac{(x-1)^2+(1+2x)}{(x-1)^2(1+2x)}=\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{(x-1)^2}\longleftarrow=\left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-2)^n+(n+1)\right]x^n,$$

收敛域：$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cap(-1,1)=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

四、解下列各题（每题 10 分，共 30 分）

1、设有两条抛物线$y=nx^2+\dfrac{1}{n}$和$y=(n+1)x^2+\dfrac{1}{n+1}$，记它们的交点的横坐标的绝对值为$a_n$，它们所围的平面图形的面积为$A_n$，求级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{a_n}$的和.

$$\begin{cases}nx^2+\frac{1}{n}=y\\(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}=y\end{cases}\Rightarrow x^2=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},\quad\therefore a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$A_n=2\int_0^{a_n}\left[\left(nx^2+\frac{1}{n}\right)-(n+1)x^2-\frac{1}{n+1}\right]dx$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-x^2\right]dx$$

$$=2\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}^3}$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{a_n}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{3}.$$

2. . 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n\ (a>0,b>0)$的收敛域.

考虑 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}x^n$，其 ~~a<1时~~，收敛域为$[-\frac{1}{a},\frac{1}{a})$，

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b^n}{n^2}x^n$ 的收敛域为 $[-\frac{1}{b},\frac{1}{b}]$

$\therefore$ 收敛域为 $[-\frac{1}{a},\frac{1}{a})\cap[-\frac{1}{b},\frac{1}{b}]=\begin{cases}[-\frac{1}{b},\frac{1}{b}], & a<b.\\ [-\frac{1}{a},\frac{1}{a}), & a\geq b.\end{cases}$

3、已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})$收敛，且正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$收敛.

令 $S_n=\sum_{i=1}^{n}(U_i-U_{i+1})$，则 $S_n=1-U_{n+1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})$ 收敛 $\Leftrightarrow\{S_n\}$收敛 $\Leftrightarrow\{U_n\}$收敛.

~~∴当n充分大时~~. $\Rightarrow\{U_n\}$有界，即$\exists M>0$，使$|U_n|<M$.

$\therefore |U_nV_n|<MV_n$，而$\sum_{n=1}^{\infty}V_n$收敛，

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}|U_nV_n|$收敛，从而$\sum_{n=1}^{\infty}U_nV_n$收敛