§8.1 直角坐标下的二重积分

一、填空题（一）

1．根据二重积分的几何意义，计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \mathrm{d}\sigma =$ <u>πa^2</u>；

圆面积

$\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma =$ <u>$\frac{2}{3}\pi a^3$</u>．上半球体积

2. 已知 $I_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_2 = \iint\limits_{|x|+|y|\le 1} |xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_3 = \iint\limits_{\substack{|x|\le 1\\ |y|\le 1}} |xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则 I_1, I_2, I_3 的大小为

<u>$I_2 < I_1 < I_3$</u>．

3. 设 D 是三角形闭区域，三顶点分别为 $(1,0),(1,1),(\mathrm{e},0)$，比较 $I_1 = \iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与

$I_2 = \iint\limits_D (\ln(x+y))^2\mathrm{d}\sigma$ 的大小关系为 <u>$I_2 < I_1$</u>．

$1 < x+y < e$

4．改换二次积分 $\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x \int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y$ 的积分次序为 <u>$\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)\,dx$</u>．

5．改换二次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$ 的积分次序为 <u>$\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy$</u>．

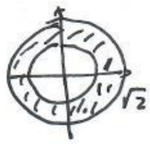
6．设 $D=\{(x,y)\,|\,-3\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$，计算二重积分 $I = \iint\limits_D xy^2\mathrm{d}\sigma =$ <u>$-\frac{5}{8}$</u>．

二、试估计二重积分 $I = \iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$ 的值，其中 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 2\}$．

$$\ln 2 \le \ln(1+x^2+y^2) \le \ln 3$$

$$\therefore \pi\ln 2 = \iint\limits_D \ln 2\, d\sigma \le \iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\,d\sigma \le \iint\limits_D \ln 3\, d\sigma = \pi\cdot\ln 3$$

$$\therefore \quad \pi\ln 2 \le I \le \pi\ln 3$$



三、计算下列二重积分

1．$I = \iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y=x, x=1$ 及 x 轴所围成．

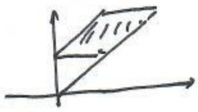
$$D = \{(x,y)\,|\, 0\le y\le x,\ 0\le x\le 1\}$$

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x xy\,dy = \int_0^1 x\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^x dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{8}\Big|_0^1 = \frac{1}{8}$$

2．$I=\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y=x, y=x+1, y=1, y=2$ 围成.

用X型要分块



$D=\{(x,y) \mid y-1 \le x \le y,\ 1 \le y \le 2\}$

$$I=\int_1^2 dy\int_{y-1}^{y}(x^2+y^2)\,dx$$

$$=\int_1^2\left(\frac{x^3}{3}+y^2\cdot x\right)\Big|_{y-1}^{y}dy=\int_1^2\left\{\frac{1}{3}[y^3-(y-1)^3]+y^2\right\}dy$$

$$=\int_1^2\left(2y^2-y+\frac{1}{3}\right)dy=\left(\frac{2}{3}y^3-\frac{y^2}{2}+\frac{y}{3}\right)\Big|_1^2=\frac{7}{2}$$

3．$I=\iint\limits_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是直线 $y=x$ 及曲线 $y=x^2$ 所围成.

$D=\{(x,y) \mid x^2 \le y \le x,\ 0 \le x \le 1\}$

$$I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x}\frac{\sin x}{x}\,dy$$

这两个原函数积不出

$$=\int_0^1\frac{\sin x}{x}\cdot y\Big|_{x^2}^{x}dx=\int_0^1\frac{\sin x}{x}(x-x^2)\,dx$$

$$=\int_0^1\sin x\,dx-\int_0^1 x\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^1+\int_0^1 x\cdot(\cos x)'\,dx$$

$$=-\cos 1+1+x\cos x\Big|_0^1-\sin x\Big|_0^1=1-\sin 1$$

4．$I=\iint\limits_D x^2\sin y^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是曲线 $y=x^3$ 和直线 $y=1, x=0$ 所围的位于第一象限的闭区域.

$D=\{(x,y) \mid 0 \le x \le \sqrt[3]{y},\ 0 \le y \le 1\}$

$$I=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt[3]{y}}x^2\sin y^2\,dx$$

$$=\int_0^1\sin y^2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\sqrt[3]{y}}dy=\frac{1}{3}\int_0^1\sin y^2\cdot y\,dy$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1\sin y^2\,dy^2=-\frac{1}{6}\cos y^2\Big|_0^1=\frac{1}{6}(1-\cos 1)$$

四、计算下列二次积分

1．$I=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$.

必须改为先x再y的积分

$D=\{(x,y) \mid 0\le x\le y,\ 0\le y\le 2\}$

$$I=\int_0^2 dy\int_0^y e^{-y^2}dx=\int_0^2 e^{-y^2}\cdot x\Big|_0^y dy$$

$$=\int_0^2 y\,e^{-y^2}dy=-\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-y^2}d(-y^2)=-\frac{1}{2}e^{-y^2}\Big|_0^2$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{-4})$$

2．$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 x\sin y^3\mathrm{d}y$.

$D_y=\{(x,y) \mid 0\le x\le y,\ 0\le y\le 1\}$

$$I=\int_0^1 dy\int_0^y x\sin y^3\,dx$$

$$=\int_0^1 \sin y^3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^y dy=\frac{1}{2}\int_0^1 y^2\cdot\sin y^3\,dy$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1 \sin y^3\,dy^3=-\frac{1}{6}\cos y^3\Big|_0^1=\frac{1}{6}(1-\cos 1)$$