8.3.1 直角坐标系下的三重积分

基础过关

一、填空题

1．设$\Omega: x^2+y^2+z^2 \le R^2$，则$\iiint\limits_{\Omega}\left[\left(x^2+y^2\right)z+3\right]\mathrm{d}v=$______________．

2．设Ω为$a \le x \le b, c \le y \le d, l \le z \le m$，则$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$______________．

3．设Ω由曲面$z=2x^2+3y^2$及$z=3-x^2$所围成的闭区域，

化三重积分$I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$为三次积分是______________.

二、设Ω是由平面$x+y+z=1$及三坐标面所围成的区域，计算

（1）$I=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$；　　（2）$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(x+2y+3z\right)\mathrm{d}v$.

三、求底圆半径相等的两个直交圆柱面$x^2+y^2=16$及$x^2+z^2=16$所围立体的表面积和体积.

能力提升

一、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证：$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^{1} f(u)(1-u^2)\mathrm{d}u.$

延伸拓展

一、已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=m,$ 求 $\int_0^1\int_x^1\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$