9.1.3 格林公式 9.1.4 曲线积分与路径无关条件

基础过关

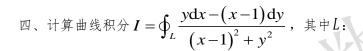
一、填空题

- 1. 设 L 是 |x| + |y| = 1 逆时针方向一周,则 $\oint_L \frac{x dy y dx}{|x| + |y|} =$ _____

- 4. 设 L 是椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 顺时针方向一周,

- 5. $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy y^4 + 3) dx + (x^2 4xy^3) dy = \underline{\hspace{1cm}}$
- 6. 若 L 是光滑曲线,曲线积分 $\int_L (x^4 + 4xy^a) dx + (6x^{a-1}y^2 5y^4) dy$ 与路径无关,则 a 的值 $\mathcal{E}_{\underline{}}$. 7. $(x+2y)dx + (2x+y)dy = d(\underline{}$
- 二、计算曲线积分 $I = \oint_L (2x y + 4) dx + (5y + 3x 6) dy$, 其中 L 是三顶点 (0,0), (3,0) 和 (3,2)的三角形正向边界.

三、计算曲线积分 $I = \int_L \sqrt{x^2 + y^2} dx + y \ln \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) dy$, 其中 L 是从点 A(1,0) 沿上半圆周 $(x-2)^2 + y^2 = 1 (y \ge 0)$ 到点 B(3,0) 的路径.



1.
$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$
 的正向;

2.
$$4x^2 + y^2 - 8x = 0$$
 的正向.

五、验证:
$$\left(\frac{y}{x} + \frac{2x}{y}\right) dx + \left(\ln x - \frac{x^2}{y^2}\right) dy$$
, $(x > 0, y > 0)$ 是某个二元函数 $u(x, y)$ 的全微分,

并求
$$u(x,y)$$
及 $\int_{(1,1)}^{(2,3)} \left(\frac{y}{x} + \frac{2x}{y}\right) dx + \left(\ln x - \frac{x^2}{y^2}\right) dy$.



六. 利用曲线积分求摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), (0 \le t \le 2\pi)$ 与 x 轴所围图形的面积.

七. 确定逆时针走向的光滑闭曲线 C,使曲线积分 $\oint_C \left(x + \frac{y^3}{3}\right) dx + \left(y + x - \frac{2}{3}x^3\right) dy$ 达到最大值.

八. 设 \widehat{AO} 由点A(a,0)到点O(0,0)的上半圆周 $x^2 + y^2 = ax$, 计算:

- (1) $I_1 = \int_{AO} (e^x \sin y my) dx + (e^x \cos y m) dy$;
- (2) $I_2 = \int_{AQ} (e^x \sin y m) dx + (e^x \cos y mx) dy$;
- (3) $I_3 = \int_{AO} (e^x \sin y my) dx + (e^x \cos y mx) dy$.

能力提升

一、设函数 $Q(x,y) = \frac{x}{v^2}$,如果对上半平面(y>0)内任意有向光滑闭曲线 C都有

$$\oint_C P(x,y) dx + Q(x,y) dy = 0$$
, 那么函数 $P(x,y)$ 可取为 ()

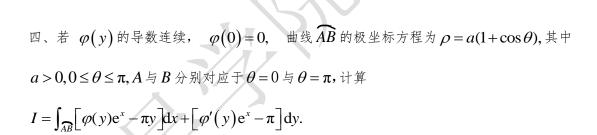
(A)
$$y - \frac{x^2}{y^3}$$
 (B) $\frac{1}{y} - \frac{x^2}{y^3}$ (C) $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ (D) $x - \frac{1}{y}$

二、设 $L_1: x^2 + y^2 = 1, L_2: x^2 + y^2 = 2, L_3: x^2 + 2y^2 = 2, L_4: 2x^2 + y^2 = 2$ 为四条逆时针方向

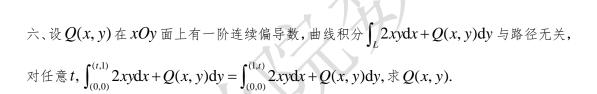
的平面曲线,记 $I_i = \oint_{I_i} (y + \frac{y^3}{6}) dx + (2x - \frac{x^3}{3}) dy$,(i = 1, 2, 3, 4),则 $\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\} = \underline{\hspace{1cm}}$.

三、设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是有界单连通区域, $I(D) = \iint_{\mathbb{D}} (4-x^2-y^2) dxdy$ 取得最大值的积分区域记为 D_1 ,求:

(1)
$$I(D_1)$$
的值; (2) $\int_{\partial D_1} \frac{\left(xe^{x^2+4y^2}+y\right)dx+\left(4ye^{x^2+4y^2}-x\right)dy}{x^2+4y^2}$.



五、设曲线 y=x(t-x)(t>0) 与 x 轴的交点为原点 O 与 A, \widehat{OA} 为自原点 O 经 y=x(t-x) 到 A 的路线,若 $I(t)=\int_{\widehat{OA}}(1-y-\frac{\cos y}{1+x})\mathrm{d}x+(2+x+\sin y\cdot\ln(1+x))\mathrm{d}y$, 求 t 的值,使 I(t) 取最大值.



延伸探究

- 一、已知曲线积分 $\int_L \frac{x \mathrm{d}y y \mathrm{d}x}{f(x) + 8y^2}$ 恒等于常数 A, 其中 f(x) 连续可导,且 f(1) = 1, L 为任意包含原点 (0,0) 的简单封闭曲线,取正向.
- (1) 若G 为不含原点的单连通域,证明: $\int_C \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{f(x)+8y^2}$ 与路径无关,其中C 为完全位于G 内的曲线;
- (2) 求函数 f(x) 和常数 A.