10.1.2 正项级数的审敛法

基础过关

一、下列正项级数中收敛的是______________.

①$\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n-3}}$ ；　②$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ ；　③$\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n-3}}$ ；　④$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ ；　⑤$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$；

⑥$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$；⑦$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$；　⑧$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^2}$；　⑨$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$　⑩ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n$

二、判断下列级数的敛散性

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ ；

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}\sin^2\frac{2}{n}$；

3. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$；

4. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$；

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{6^n}$；

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n+1}\tan\frac{\pi}{4n^2}$；

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3-n+2}}{(2n+1)\sqrt[3]{n^2+2n-1}}$；

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{4}{3}}}$;

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$;

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$;

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n-1}$;

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2}{n^2+1}\right)^{n}$;

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{a^n}(a>2)$;

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}$;

15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+\sin n}{n^2-n+1}$;

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{n!}$.

二、设正项数列$\{a_n\}$单调减，且$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，判断$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$的敛散性

能力提升

一、若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，则（　　）

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0,$ 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda \neq 0,$ 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

C. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$

D. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda \neq 0$

二、判断下列级数的敛散性

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mathrm{e}^n n!}{n^n}$；

2. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n!}$；

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\ln(1+n)}$　；

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \ln\dfrac{n+1}{n}\right).$

三、设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \mathrm{d}x (n \in \mathbf{N}^*).$

（1）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n + a_{n+2}}{n}$ 的和；　（2）设 $\lambda > 0,$ 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

四、设 $a_n > 0, S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, 试判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\ 2}}$ 的敛散性.

延伸探究

一、设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}), n = 1, 2, \cdots$ 证明;

（1）$\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在;　　　　（2）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$ 收敛.