7.4.1 微分法在几何上的应用

基础过关

一、填空

1. 曲线$\begin{cases} z=\dfrac{1}{4}(x^2+y^2), \\ y=4 \end{cases}$在点$(2,4,5)$处的切线与$x$轴的夹角为____________.

2. 若曲面$\Sigma: F(x,y,z)=0$上Q点的法线经过曲面外一点$p(a,b,c)$, 则$Q(x,y,z)$点必须满足____________.

二、求曲线Γ: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{4}, \\ 3x^2+(y-1)^2+z^2=\dfrac{17}{4} \end{cases}$在点$M(1,\dfrac{1}{2},1)$处的切线与法平面.

三、证明: 曲线Γ: $\begin{cases} x^2-z=0, \\ 3x+2y+1=0 \end{cases}$上点$(1,-2,1)$处的法平面与直线$\begin{cases} 9x-7y-21z=0, \\ x-y-z=0 \end{cases}$平行.

四、求曲面 $\mathrm{z}-\mathrm{e}^{z}+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面和法线方程.

五、求空间曲面 $x^2-y^2=3z$ 的切平面，使之通过点 $(0,0,-1)$, 且与直线 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{2}$ 平行.

能力拓展

一、求由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12,\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转曲面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量.

二、设直线 $l:\begin{cases} x+y+b=0, \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$, 求 a,b 的值.

延伸探究

一、设函数 $f(x,y)$ 可微，且对任意 x,y,t 满足 $f(tx,ty)=t^2 f(x,y)$, $P_0(1,-2,2)$ 是曲面 $\Sigma: z=f(x,y)$ 上的一点，求当 $f_x(1,-2)=4$ 时，Σ 在点 P_0 处的法线方程.