8.1　直角坐标系下的二重积分

基础过关

一、填空题

1．根据二重积分的几何意义，计算 $\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \mathrm{d}\sigma =$ ________;

$\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma =$ ________.

2. 已知 $I_1=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_2=\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_3=\iint\limits_{\substack{|x|\le 1\\|y|\le 1}}|xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则 I_1,I_2,I_3 的大小为

________.

3. 设 D 是三角形闭区域，三顶点分别为 $(1,0),(1,1),(2,0)$,比较 $I_1=\iint\limits_D \ln(x+y)\mathrm{d}\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D (\ln(x+y))^2\,\mathrm{d}\sigma$ 的大小关系为 ________.

4．改换二次积分 $\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\ln x} f(x,y)\mathrm{d}y$ 的积分次序为 ________.

5．改换二次积分 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$ 的积分次序为 ________.

6．设 $D=\{(x,y)\,|-3\le x\le 2, 0\le y\le 1\}$，计算二重积分 $I=\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}\sigma=$ ________.

7．设 D 由圆周 $x^2+y^2=R^2$ 所围成的闭区域，则 $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma=$ ________；

$\iint\limits_D x^2\mathrm{d}\sigma=$ ________；$\iint\limits_D (y^2+2x-6y+9)\mathrm{d}\sigma=$ ________；

$\iint\limits_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}\sigma=$ ________.

二、试估计二重积分 $I=\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$ 的值，其中 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 2\}$.

三、计算下列二重积分

1． $I=\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y=x, x=1$ 及 x 轴所围成 ．

2． $I=\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由 $y=x, y=x+1, y=1, y=2$ 围成.

3． $I=\iint\limits_{D}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是直线 $y=x$ 及曲线 $y=x^2$ 所围成.

4． $I=\iint\limits_{D} x^2\sin y^2 \mathrm{d}\sigma$,其中 D 是抛物线 $y=x^3$ 和直线 $y=1, x=0$ 所围的位于第一象限的闭区域.

四、计算下列二次积分

1． $I=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$.

2． $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 x\sin y^3 \mathrm{d}y$.

能力拓展

一、已知正方形$|x|\le 1, |y|\le 1$被其两条对角线分成 4 个区域$D_k(k=1,2,3,4)$. 如果

$I_k=\iint\limits_{D_k} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 求$\max\limits_{1\le k\le 4}\{I_k\}$.

二、设区域D由曲线$y=\sin x, x=\pm\dfrac{\pi}{2}, y=1$围成，求$\iint\limits_{D}(x^5y-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

三、设$f(x,y)$连续，且$f(x,y)=x+\iint\limits_{D} yf(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, 其中$D$由$v=\dfrac{1}{u}, u=1, v=2$所围成的区域，求$f(x,y)$.

四、计算二重积分：$\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 为 $y=0, x=0, x+y=1$ 所围区域.

五、设 $f(x)=\int_1^x \mathrm{e}^{-y^2}\ \mathrm{d}y$, 求定积分 $\int_0^1 x\, f(x^2)\ \mathrm{d}x$.

六、求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^4}\int_0^t \mathrm{d}x\int_x^t \sin(xy)\ \mathrm{d}y$.

延伸探究

一、设函数 $f(x)$ 连续且满足 $f(x)=x^2+x\int_0^{x^2} f(x^2-t)\mathrm{d}t+\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是以 $(1,-1),(-1,1)$ 和 $(1,1)$ 为顶点的三角形区域，且 $f(1)=0$.

（1）证明：$1+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\iint\limits_D f(xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$;

（2）求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.