

### 10.1.3 任意项级数的绝对收敛和条件收敛

#### 基础过关

一、下列级数中绝对收敛的是\_\_\_\_\_，条件收敛的是\_\_\_\_\_，发散的是\_\_\_\_\_

①  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ ; ②  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n^2}$ ; ③  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{n\sqrt{n}}$ ; ④  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$  ⑤  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2n-1}$

⑥  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ ; ⑦  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ ; ⑧  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$ ; ⑨  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n}{2^n}$ ; ⑩  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^4}{n!}$

二、判断下列级数是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)$ ;

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ ;

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n^2}$ ;

4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{n\sqrt{n}}$ ;

5.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ ;

6.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{n^2}}{n!}$ ;

---

7.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n});$

8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\alpha) (\alpha \neq k\pi, k \in \mathbf{N}).$

三、已知级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$  都收敛，试证明  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  绝对收敛

四、设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛，判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2 + \pi}}$  是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

## 能力提升

### 一、选择题

1. 已知  $u_n < v_n (n=1, 2, \dots)$ , 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  均收敛, 则 “ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛” 是 “

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  绝对收敛” 的 ( )

A. 充分必要条件 B. 充分不必要条件 C. 必要不充分条件 D. 既不充分也不必要条件

2. 设  $u_n$  是单调增加的有界数列, 则下列级数中收敛的是 ( )

A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n}$  B.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{u_n}$  C.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$  D.  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$

3. 设  $u_n > 0, n=1, 2, \dots$ , 若  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  收敛, 则下列结论正确的是 ( )

A.  $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$  发散 B.  $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}$  收敛

C.  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$  收敛 D.  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$  收敛

4. 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则下列级数中, 必收敛的是 ( )

A.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a_n}{n}$  B.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  C.  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$  D.  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$

二、设  $a_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a_n} = 1$ , 判别  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}}\right)$  的敛散性.

---

延伸探究

一、设  $x_{2n-1} = \frac{1}{n}, x_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx (n=1, 2, 3, \dots)$

(1) 证明：级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$  收敛；

(2) 设  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n = A, y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ , 证明：  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$ .