自测题三（重积分）

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1、设有空间闭区域 $\Omega_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le R^2,z\ge 0\}$，

$\Omega_2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le R^2,x\ge 0,y\ge 0,z\ge 0\}$ 则有(C)

A、$\iiint_{\Omega_1}xdv=4\iiint_{\Omega_2}xdv$，　　B、$\iiint_{\Omega_1}ydv=4\iiint_{\Omega_2}ydv$，

C、$\iiint_{\Omega_1}zdv=4\iiint_{\Omega_2}zdv$，　　D、$\iiint_{\Omega_1}xyzdv=4\iiint_{\Omega_2}xyzdv$

2、设有平面闭区域 $D=\{(x,y)\mid -a\le x\le a,x\le y\le a\}$

$D_1=\{(x,y)\mid 0\le x\le a,x\le y\le a\}$，则 $\iint\limits_D(xy+\cos x\sin y)dxdy=$(A)

A、$2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxdy$，　B、$2\iint\limits_{D_1}xydxdy$　C、$4\iint\limits_{D_1}xydxdy$，　D、0

3 $I=\int_0^1dy\int_0^{\sqrt{1-y}}f(x,y)dx$，则交换积分次序后 $I=$(C)

B、$I=\int_0^1dx\int_0^{\sqrt{1-x}}f(x,y)dy$，　B、$I=\int_0^{\sqrt{1-y}}dx\int_0^1f(x,y)dy$　C、$I=\int_0^1dx\int_0^{1-x^2}f(x,y)dy$

E、$I=\int_0^1dx\int_0^{1+x^2}f(x,y)dy$

4、已知 $\int_0^1f(x)dx=\int_0^1xf(x)dx$，$D=\{(x,y)\mid x+y<1,x>0,y>0\}$ 则 $\iint_Df(x)dxdy=$(D)　D

B、2 B、3，　C、1D、0

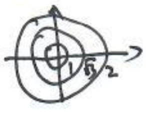
$= \int_0^1dx\int_0^{1-x}f(x)dy$

$=\int_0^1(1-x)f(x)dx=0$

5、$I=\iint_{x^2+y^2\le 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}dxdy$，则必有：(B)

B、$I>0$　B、$I<0$　C、$I=0$　D、$I\ne 0$ 但无法确定符号

$\cancel{I=2\pi\int_0^2\sqrt[3]{1-r^2}dr=-\frac{3}{4}\pi[(-3)^{\frac{4}{3}}-1]<0}$


1　$\sqrt[3]{2}$　2

→ 分成三部分估计.

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1、设 $f(x,y)$ 连续，$f(0,0)=1$，$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le t^2\}$，则 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{1}{\pi t^2}\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=$ 1

$= f(\xi,\eta)\pi t^2$

2、$\int_0^1dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arg\sin y}xdx=$ π　$\int_0^\pi xdx\int_0^{\sin x}dy=\int_0^\pi x\sin xdx=\pi$

1

3、$\int_0^{2}dx\int_x^{2}e^{-y^2}dy=$ $\frac{1}{2}(1-e^{-1})$　$\int_0^1e^{-y^2}dy\int_0^ydx=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$

4 、 $f(x,y)$ 在 矩 形 区 域 $D:\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$ 上 连 续 ， 且

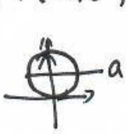
$x\left(\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right)^2=f(x,y)-\frac{1}{2}$ 则 $f(x,y)=$ $x+\frac{1}{2}$

$xA^2=f(x,y)-\frac{1}{2}$

$A^2\iint\limits_D xdxdy=A-\frac{1}{2}$

$A^2\cdot\frac{1}{2}=A-\frac{1}{2}\Rightarrow A=1$

5、将二重积分$\int_{-a}^{a}dx\int_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}}f(x,y)dy$化为极坐标后的二次积分为 $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d$



三、解下列各题（每题 10 分，共 40 分）

1、计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}zdV$ 其中Ω由锥面$z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=h(R>0,h>0)$围成.

$$=\int_0^h z\,dz\iint\limits_{x^2+y^2\le(\frac{R}{h}z)^2}dx\,dy=\int_0^h z\cdot\pi(\frac{R}{h}z)^2=\frac{\pi R^2}{h^2}\int_0^h z^3\,dz=\frac{\pi}{4}R^2h^2$$

2、Ω是由平面$x+y+z=1$与三个坐标平面所围成的空间区域，计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dxdydz$.

$$\iiint\limits_{\Omega}x\,dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}y\,dxdydz=\iiint\limits_{\Omega}z\,dxdydz$$

$$\therefore\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\,dxdydz=3\iiint\limits_{\Omega}z\,dxdydz$$

$$=3\int_0^1 z\,dz\cdot\iint\limits_{\substack{x+y\le1-z\\x\ge0\\y\ge0}}dx\,dy$$

$$=3\int_0^1 z\cdot\frac{(1-z)^2}{2}dz=\frac{1}{8}$$

3、计算二重积分 $I=\iint\limits_{D} r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,dr\,d\theta$，其中 ρ

$D=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le \sec\theta,$ 0≤θ≤π/4

$$I=\iint\limits_{D} y\sqrt{1-x^2+y^2}\,dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^x \sqrt{1-x^2+y^2}\,d\sqrt{1-x^2+y^2}=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2}{3}(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x dx$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left[1-(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^1\sqrt{1-x^2}^{\,3}dx$$

$$\overset{x=\sin t}{=\!=}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{3\times 1}{4\times 2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}.$$

4、设 Ω 是由半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与旋转抛物面 $3z=x^2+y^2$ 所围空间闭区域，求它的体积.

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 3\}$$

$$\therefore V=\iint\limits_{D}\left(\sqrt{4-x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{3}\right)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-\rho^2}-\frac{\rho^2}{3}\right)\rho\,d\rho$$

$$=2\pi\cdot\left[-\frac{1}{3}(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{\rho^4}{12}\right]_0^{\sqrt{3}}=2\pi\cdot\left(\frac{7}{3}-\frac{3}{4}\right)=\frac{19\pi}{6}$$

四、解下列各题（每题 10 分，共 30 分）

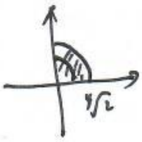
1、设 $f(x)=g(x)=\begin{cases}a, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，$D$ 是全平面。求二重积分 $I=\iint\limits_{D} f(x)g(y-x)dxdy$.

$g(y-x)$ 不为 0 的区域为 $0\le y-x\le 1$，即 $x\le y\le x+1$，所以

$$I=\int_0^1 dx\int_x^{x+1}a^2\,dy=a^2$$

2、设平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le\sqrt{2},x\ge 0,y\ge 0\}$，$[x]$表示不超过$x$的最大整数，计算：

$I=\iint\limits_D xy\left[1+x^2+y^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.



当 $x^2+y^2<1$ 时，$[1+x^2+y^2]=1$

$$\therefore \iint\limits_{x^2+y^2<1} xy[1+x^2+y^2]dxdy = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} xy\,dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1(\rho\cos\theta)(\rho\sin\theta)\rho\,d\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^1\rho^3\,d\rho = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

当 $1\le x^2+y^2<\sqrt{2}$ 时，$[1+x^2+y^2]=2$

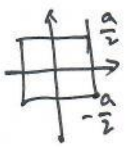
$$\therefore \iint\limits_{1\le x^2+y^2<\sqrt{2}} xy[1+x^2+y^2]dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_1^{\sqrt[4]{2}}\rho^3\,d\rho = 1\times\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}$$

综上，$I=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

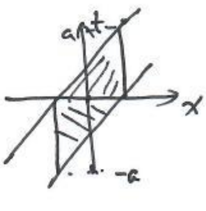
3、设 $f(t)$ 在 R 上连续，常数 $a>0$，区域 $D=\{(x,y)\mid |x|\le a/2,|y|\le a/2\}$

证明：$\iint\limits_D f(x-y)dxdy=\int_{-a}^{a}f(t)(a-|t|)dt$.

$$\iint\limits_D f(x-y)dxdy=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dx\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}f(x-y)dy \xlongequal{x-y=t}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dx\int_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}}f(t)dt$$



交换次序 $\int_{-a}^{0}f(t)dt\int_{-\frac{a}{2}}^{t+\frac{a}{2}}dx+\int_0^a f(t)dt\int_{t-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}dx$



$$=\int_{-a}^{0}f(t)dt\cdot(t+a)+\int_0^a f(t)dt\cdot(a-t)$$

$$=\int_{-a}^{a}f(t)(a-|t|)dt.$$