自测题四（曲线积分与曲面积分）

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1、设有曲线 $L: f(x,y)=1$，$f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，过二象限内点 M 和四象限内点 N，Γ 为 L 上连接 MN 的弧。下列积分小于0的是：（B）

B、$\int_\Gamma f(x,y)ds$，　B、$\int_\Gamma f(x,y)dx$，C、$\int_\Gamma f(x,y)dy$，D、$\int_\Gamma f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$

2、已知 $\dfrac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某函数全微分，则 $a=$（D）

A、3,　B、-1　C、不存在，　D、2　　(D)

3、设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z=0$ 和 $z=1$ 所截部分的外侧，则曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + (z^2-2z)dxdy =$（C）　加盖 $\Sigma_1: z=1$　$\iint\limits_{\Sigma_1} = -\pi$，$\iiint\limits_{\Omega}(1+1+2z-2)dV = 2\iiint\limits_{\Omega} z\,dV$

$= 2\int_0^1 z\,dz \cdot \pi z^2 = \frac{\pi}{2}$

C、$-\frac{3}{2}\pi$　B、0　C、$\frac{3}{2}\pi$　D、$\frac{2}{3}\pi$　　$\therefore I = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

4、曲面 Σ 是上半球面：$x^2+y^2+z^2=1$，Σ_1 是 Σ 在第一卦限部分，则（C）

C、$\iint\limits_{\Sigma} xds = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xds$　B、$\iint\limits_{\Sigma} yds = 4\iint\limits_{\Sigma_1} yds$

C、$\iint\limits_{\Sigma} zds = 4\iint\limits_{\Sigma_1} zds$　D、$\iint\limits_{\Sigma} xyzds = 4\iint\limits_{\Sigma_1} xyzds$

5、设 f 有连续导数，$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{y}f(\frac{x}{y})dydz+\frac{1}{x}f(\frac{x}{y})dzdx+zdxdy$ 其中 Σ 是曲面 $y=x^2+z^2, y=8-x^2-z^2$ 所围立体表面外侧，则 $I=$（C）　高斯公式 $I=\iiint\limits_{\Omega} dxdydz$

A、4π　B、8π　C、16π　D、32π

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1、$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，则 $\int_L (x^2+y-z)ds =$ ______　$= \frac{1}{3}\int_L (x^2+y^2+z^2)ds + 0 - 0 = \frac{2\pi}{3}a^3$

2、设 C 面积为 S 的有界闭区域的边界曲线，n 为其外法线向量，则：

$\oint_C [x\cos(n,x)+y\cos(n,y)]ds =$ <u>2S</u>　$= \oint_C [x\cos(\tau,y) - y\cos(\tau,x)]ds = \oint_C xdy - ydx$

$= \iint\limits_D 2dxdy = \underline{2S}$

3、$\int\limits_{|x|+|y|=1} x^2ydx + xy^2dx =$ <u>0</u>

4、$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=2ax} (x^2+y^2+z^2)dS =$ $\iint\limits_{\Sigma} 2ax\,dS = 2a\bar{x}\cdot S$

$= 2a\cdot a\cdot 4\pi a^2 = \underline{8\pi a^4}$

5、已知曲面 Σ 为 $|x|+|y|+|z|=1$，则 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)dS =$ $0 + 8\iint\limits_{\Sigma_1} y\,dS = 8\iint\limits_{D_1} y\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dxdy$

↑ 第一卦限

$= 8\sqrt{3}\iint\limits_{D_1} y\,dxdy = 8\sqrt{3}\times\bar{y}\cdot A$

$= 8\sqrt{3}\cdot\frac{1}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

$\bar{y} = \frac{0+0+1}{3}$.

三、解下列各题（每题 10 分，共 40 分）

1、计算积分 $I=\int_C x^2 y\,dx$，其中 C 为抛物线 $y^2=x$ 上从点 $A(1,-1)$ 到点 $B(1,1)$ 的一段弧.

$I = \int_{-1}^{1} y^4\cdot 2y^2\,dy = \frac{4}{7}$

2、计算积分 $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=ax$.

$L: \begin{cases} x-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}\cos t \\ y=\frac{a}{2}\sin t. \end{cases} \quad 0<t\le 2\pi$.

$x^2+y^2 = ax = \frac{a^2}{2}(1+\cos t)$

$\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds = \frac{a^2}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos t+1}\,dt$

$= \frac{a^2}{2\sqrt{2}}\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a^2$

3、计算 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

$= 0+0+\iint\limits_{\Sigma} z\,dS = \iint\limits_{D}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a\,dxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} = \pi a^3$

4、计 算 曲 面 积 分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{1.5}}$ ， 其 中 Σ 是 曲 面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

取 Σ_1：$x^2+y^2+z^2=1$ 的内侧．Ω 为 Σ 与 Σ_1 之间的立体.

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}0\,dxdydz-\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=0+3\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le1}dxdydz=4\pi$$

四、解下列各题（每题 10 分，共 30 分）

1、已知曲线的方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ z=x \end{cases}$，起点为 $(0,\sqrt{2},0)$，终点为 $(0,-\sqrt{2},0)$，

计算积分：$I=\int_L(y+z)dx+(z^2-x^2+y)dy+(x^2+y^2)dz$.

利用曲线方程化简得

$$I=\int_L(y+x)dx+ydy+(2-z^2)dz.\qquad L:\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sqrt{2}\sin t \\ z=\cos t \end{cases},\quad t:\frac{\pi}{2}\to-\frac{\pi}{2}.$$

$$=\int_L xdx+ydy+(2-z^2)dz+\int_L ydx$$

$$=\cancel{\tfrac{1}{2}(x^2}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+2z-\frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_{(0,\sqrt{2},0)}^{(0,-\sqrt{2},0)}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin^2t\,dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

实际全微分是
$xdx+ydy+(2-z^2)dz$.

2、设 P 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 出的切平面与 xOy 面垂直，求点 P 的轨迹 C 并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}ds$，其中 Σ 是椭球面位于曲线 C 上方的部分.

椭球面 S 在点 $P(x,y,z)$ 处的法向量为 $\vec{n}=(2x, 2y-z, 2z-x)$.

记 $\vec{k}=(0,0,1)$，则 $\vec{n}\cdot\vec{k}=0$，所以 $2z-y=0$，于是 P 的轨迹 C 的方程为

$\begin{cases} 2z-y=0 \\ x^2+y^2+z^2-yz=1 \end{cases}$，即 $\begin{cases} 2z-y=0 \\ 4x^2+3y^2=4 \end{cases}$. 取 $D=\{(x,y)|4x^2+3y^2\le 4\}$.

则 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\left(\frac{2x}{y-2z}\right)^2+\left(\frac{2y-z}{y-2z}\right)^2}=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}$，

因此，$I=\iint\limits_{D}(x+\sqrt{3})dxdy=0+\sqrt{3}\iint\limits_{D}dxdy=\sqrt{3}\cdot\pi\cdot 1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi$.

3、设 Σ 为 $z=1-x^2-\frac{y^2}{4}(0\le z\le 1)$ 的上侧，计算曲面积分：

$\iint\limits_{\Sigma}xzdydz+2zydzdx+3xydxdy$。

设 Σ_1: $z=0$，$x^2+\frac{y^2}{4}\le 1$ 下侧. Σ 与 Σ_1 围成 Ω.

$I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}$

$=\iiint\limits_{\Omega}3z\,dxdydz-\left(-\iint\limits_{D}3xy\,dxdy\right)$

$=3\int_0^1 z\,dz\iint\limits_{D_z}dxdy+0$ $\qquad D_z: x^2+\frac{y^2}{4}\le 1-z$,

$=3\int_0^1 z\cdot 2\pi(1-z)dz$ $\qquad \frac{x^2}{1-z}+\frac{y^2}{4(1-z)}\le 1$

$=3\pi\left(z^2-\frac{2}{3}z^3\right)\Big|_0^1=\pi$ $\qquad$ 面积为 $\pi\sqrt{1-z}\cdot 2\sqrt{1-z}$

$=2\pi(1-z)$