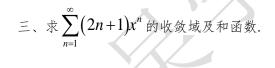
10.2.2幂级数(和函数,函数展开成幂级数)

基础过关

一、填空题

- 1. 幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n$  在  $(-\infty, +\infty)$  的和函数是 \_\_\_\_\_\_.
- 2. 函数  $\sin \frac{x}{2}$  的麦克劳林展开式中  $x^3$  的系数为\_\_\_\_\_\_.
- 二、求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n}$ 的和函数,并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n n}$ 的和.



四、求
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}-2^n}{n} x^n$$
的和函数.

五、求数项级数 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n-2}}{3^n}$$
 的和.

六、将函数 
$$f(x) = \frac{x+5}{2x^2 - x - 6}$$
 展开成  $x$  的幂级数, 并求  $f^{(n)}(0)$ .

七、将函数  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  展开成(x-2)的幂级数.

八、将函数 
$$f(x) = \frac{2x-3}{(x-1)^2}$$
 展开成  $x$  的幂级数.

九、将
$$\int_{1}^{x} (t-1)^{2} e^{t^{2}-2t} dt$$
 在 $x=1$ 处展开成幂级数.

十、将 
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left( \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} \right)$$
 在  $x = 0$  处展开成幂级数, 并证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$ .

十一、已知 $f(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}$ ,

- 1. 将f(x)展开为x的幂级数;
- 2. 指出该幂级数的收敛域;
- 3. 求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot (2n-1) \cdot 3^n}$  的和.

能力提升

一、 幂级数 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$$
 在  $(0,+\infty)$  内的和函数为 ( )

- (A)  $\sqrt{\cos x}$

- (B)  $\sqrt{\sin x}$  (C)  $\cos \sqrt{x}$ , (D)  $\sin \sqrt{x}$

二、设级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$$
的和为 $S$ ,则 $S =$ \_\_\_\_\_\_\_.

三、设 $u_n(x) = e^{-nx} + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}, (n=1,2,...)$ ,求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

## 延伸探究

一、设  $a_n$  是曲线  $y=x^n$  与  $y=x^{n+1}$   $(n=1,2,\cdots)$  所围区域的面积,记  $S_1=\sum_{n=1}^\infty a_n, S_2=\sum_{n=1}^\infty a_{2n-1}$ ,求  $S_1$  与  $S_2$  的值.