自测题三(重积分)

一、选择题(每题3分,共15分)

1. 设有空间闭区域 $\Omega_1=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, z\geqslant 0\}$, $\Omega_2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\}$,则有(　　).

A. $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}v$　　B. $\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} y\mathrm{d}v$

C. $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}v$　　D. $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}v=4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}v$

2. 设有平面闭区域 $D=\{(x,y)\mid -a\leqslant x\leqslant a, x\leqslant y\leqslant a\}$, $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant a, x\leqslant y\leqslant a\}$,则 $\iint\limits_{D}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$(　　).

A. $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　B. $2\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

C. $4\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　D. 0

3. $I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\mathrm{d}x$,则交换积分次序后(　　).

A. $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x}} f(x,y)\mathrm{d}y$　　B. $I=\int_0^{1-y}\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$

C. $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$　　D. $I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1+x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$

4. 已知 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$, $D=\{(x,y)\mid x+y<1, x>0, y>0\}$,则 $\iint\limits_D f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 1　　D. 0

5. 设 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,则必有(　　).

A. $I>0$　　B. $I<0$

C. $I=0$　　D. $I\neq 0$,但无法确定符号

二、填空题(每题3分,共15分)

1. 设 $f(x,y)$ 连续, $f(0,0)=1$, $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}$,则 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{\pi t^2}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=$ ________.

2. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} x\mathrm{d}x=$ ________.

3. $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=$ ________.

4. $f(x,y)$ 在矩形区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上连续,且 $x\left(\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^2=f(x,y)-\dfrac{1}{2}$,则 $f(x,y)=$ ________.

5. 将二重积分 $\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$ 化为极坐标下的二次积分为________.

三、解下列各题(每小题10分,共40分)

1. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v$,其中 Ω 由锥面 $z=\dfrac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h(R>0, h>0)$ 围成.

2. Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域,计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

3. 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}\rho^2\sin\theta\sqrt{1-\rho^2\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$，其中 $D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant\sec\theta, 0\leqslant x\leqslant 1\}$.

4. 设 Ω 是由半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与旋转抛物面 $3z=x^2+y^2$ 所围成的空间闭区域，求它的体积.

四、解下列各题(每题 10 分，共 30 分)

1. 设 $f(x)=g(x)=\begin{cases}a, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 区域 D 是全平面. 求二重积分

$$I=\iint\limits_{D}f(x)g(y-x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\sqrt{2}, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$，$[x]$表示不超过 x 的最大整数，计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}xy[1+x^2+y^2]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3. 设 $f(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，常数 $a>0$，区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|\leqslant\dfrac{a}{2}, |y|\leqslant\dfrac{a}{2}\right\}$. 证明：

$$\iint\limits_{D}f(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-a}^{a}f(t)(a-|t|)\,\mathrm{d}t.$$