9.2.2 对坐标的曲面积分

基础过关

一、填空题

1.设Σ为平面$z=3$上$x^2+y^2\le 1$的区域，方向朝下，则

$\iint\limits_{\Sigma}(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________，$\iint\limits_{\Sigma}(z+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$____________，

$\iint\limits_{\Sigma}(z+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=$______.

2. 设Σ为柱面$x^2+y^2=1$（$x\ge 0$）被平面$z=0$，$z=1$所截得的第一卦限部分的前侧，则

$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_____，$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$______，$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}z\mathrm{d}x=$______.

3．设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2\,(a>0)$的外侧，则$\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$___；

$\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S=$________.

二、计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}(x+2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

1． Σ是由$A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1)$为顶点的三角形平面的上侧；

2．Σ为半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的上侧.

三、设曲面 Σ ：$x^2+y^2+4z^2=4,(z\geq 0)$ 的上侧，求 $I=\iint\limits_{\Sigma}\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

四、流速 $\vec{v}=(x,2xy,-2z)$ 的流体，求其单位时间经过锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\leq z<h)$ 的上侧流向下侧的流量.

能力提升

一、设 $f(u)$ 是连续函数，Σ 是平面 $2x-2y+z=4$ 上第四卦限部分的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x+(y-z)\,f(xyz)\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y+(x-z)\,f(xyz)\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(z+2(x-y)\,f(xyz)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

二、计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中

1．Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧；

2．Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧.

延伸探究

一、设 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1(z\geq 0), P\in\Sigma, \Pi$ 为 Σ 在点 P 处的切平面，$\rho(x,y.z)$ 为原点到平面 Π 的距离，求 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\,\mathrm{d}S.$