

自测题五(无穷级数)

一、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 设 a 为常数,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a+n}{n^2}$ ().
 A. 发散
 B. 条件收敛
 C. 绝对收敛
 D. 敛散性与 a 的取值有关
2. 部分和数列有界是正项级数收敛的 ().
 A. 充分不必要条件
 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件
 D. 无关条件
3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{n \cdot 2^n}$ 的收敛域为 ().
 A. $[-1, 3]$
 B. $(-1, 3]$
 C. $[-1, 3)$
 D. $(-1, 3)$
4. 设 $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1} + (-1)^n}, v_n = \frac{n^n}{n!}$, 则 ().
 A. $\sum u_n$ 收敛, $\sum v_n$ 发散
 B. $\sum u_n$ 发散, $\sum v_n$ 收敛
 C. $\sum u_n$ 发散, $\sum v_n$ 发散
 D. $\sum u_n$ 收敛, $\sum v_n$ 收敛
5. 设 u_n 是数列,则下列描述正确的是 ().
 A. $\sum u_n$ 收敛蕴含 $\sum (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛
 B. $\sum (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛蕴含 $\sum u_n$ 收敛
 C. $\sum u_n$ 收敛蕴含 $\sum (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛
 D. $\sum (u_{2n-1} - u_{2n})$ 收敛蕴含 $\sum u_n$ 收敛

二、填空题(每小题 3 分,共 15 分)

1. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{n^\lambda}$ 收敛,则 λ 取值的最大范围是 _____.
2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ = _____.
3. 已知数列 $\{a_n\}$ 单调递减趋于零, $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ 无界,则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 的收敛域为 _____.
4. 设常数 $a > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a^n}$ = _____.

5. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2^n + 3^n)} x^{2n}$ 的收敛域为 _____.

三、解下列各题(每题 10 分,共 40 分)

1. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n+1}$ 的和函数.
2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} (x-1)^n$ 的和函数.
3. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$ 展开成 $(x-1)$ 的幂级数,并求 $f^{(n)}(1)$.

4. 求 $f(x) = \frac{x^2+2}{(x-1)^2(1+2x)}$ 的幂级数展开式, 并指出其收敛域.

2. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n$ ($a > 0, b > 0$) 的收敛域.

四、解下列各题(每题 10 分, 共 30 分)

1. 设有两条抛物线 $y = nx^2 + \frac{1}{n}$ 和 $y = (n+1)x^2 + \frac{1}{n+1}$, 记它们的交点的横坐标的绝对值为 a_n , 它们所围成的平面图形的面积为 A_n , 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{a_n}$ 的和.

3. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n - u_{n+1})$ 收敛, 且正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收敛.