9.2.1 对面积的曲面积分

基础过关

一、填空题

1．设 Σ 为 $z=xy$ 由圆柱面 $x^2+y^2=a^2\left(a>0\right)$ 所截下的有限曲面，

则 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\mathrm{d}S}{\sqrt{1+x^2+y^2}}=$ ________ .

2．设 Σ 是椭球面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{4}=1$，其面积为 A，

则曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}\left(2xy+6x^2+4y^2+3z^2\right)\mathrm{d}S=$ ________ .

3.设 Σ 是平面 $x+y+z=6$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$所截下的部分,则 $\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S=$ ________ .

4．设Σ为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\left(a>0\right)$，则 $\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S=$ ________；

$\oiint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=$ ________；$\oiint\limits_{\Sigma}\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{2}\right)\mathrm{d}S=$ ________ .

二、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(2x+2y+z\right)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是平面 $2x+2y+z-2=0$ 在第一卦限的部分.

三、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(2x+3y+4z\right)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

四、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是

1．锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域的整个边界；

2．锥面 $z^2=3\left(x^2+y^2\right)$ 被平面 $z=0$ 和 $z=3$ 所截得的部分.

能力提升

一、设曲面 Σ：$|x|+|y|+|z|=1$, 求 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\left(x+|y|\right)\mathrm{dS}$.

二、求 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S,\Sigma:$ 球面 $x^2+y^2+z^2=2(x+y+z).$

延伸探究

一、求曲面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+2a^2=0$ 距平面 $x+y+z=0$ 的最近点与最远点，其中 $a>0,$ 并证明 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+y+z+\sqrt{3}a)^2\mathrm{d}S\geq 36\pi a^4.$