8.2 二重积分的计算(续)

基础过关

一、填空题

1．化下列二次积分为极坐标形式的二次积分 $\int_0^4 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4x-x^2}} f\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}y=$________；

$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{3}x} f\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right)\mathrm{d}y=$________； $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f\left(x,y\right)\mathrm{d}y=$________.

2． $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

3． $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

二、利用极坐标计算下列各题

1． $I=\displaystyle\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$,其中 $D=\left\{\left(x,y\right)\mid \pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\right\}$.

2． $I=\displaystyle\iint\limits_D \ln\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 与坐标轴所围成在第一象限内的闭区域.

三、计算二次积分 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y$.

四、求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体的体积.

五．求平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 被三坐标面所割出的有限部分的面积.

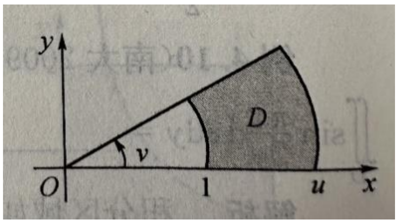
六．求 $z=xy$ 被 $x^2+y^2=a^2(a>0)$ 割下的部分曲面的面积.

七、求圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=x$ 所割下部分的曲面面积.

能力拓展

一、设函数 f 连续，若 $F(u,v)=\iint\limits_{D}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ 其中区域 D 为图中阴影部分，则 $\frac{\partial F}{\partial u}=$（　　）

A. $vf(u^2)$　　B. $\frac{v}{u}f(u^2)$　　C. $vf(u)$　　D. $\frac{v}{u}f(u)$



二、计算二重积分 $\iint\limits_{D}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,(x-1)^2+(y-1)^2\le 2, y\ge x\}$.

延伸探究

一、设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & (|x|+|y|\le 1), \\ \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (1\le |x|+|y|\le 2), \end{cases}$ 求 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ 其中 $D:\{|x|+|y|\le 2\}.$