6.1.1　向量及其线性运算　6.1.2 数量积 向量积

基础过关

一、填空

1. 平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量为________________.

2. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为单位向量，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}$, 则以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积为________________.

3. 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 b 的夹角为______________.

4. 设 $|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=5,$ 若 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ 垂直，则常数 $k=$______________.

5. 设向量 $\boldsymbol{x}$ 与向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,2)$ 平行，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18,$ 则 $\boldsymbol{x}=$______________.

6. 设 $\boldsymbol{a}=(4,-2,4),\boldsymbol{b}=(6,3,-2),$ 则 $\mathrm{Pr}\,j_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=$______________.

二、设长方体的各棱与坐标轴平行，已知长方体的两个顶点坐标分别为 $(1,1,2),(3,4,5),$ 试写出余下六个顶点的坐标.

三、一向量的终点为 $B(2,-1,7)$, 在 x,y,z 轴上的投影依次为 $4,-4,7,$ 求此向量的始点坐标，方向余弦和方向角.

四、设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k},\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k},$ 求向量 $\boldsymbol{l}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 在 x 轴上的投影以及在 y 轴上的分向量.

五、设$\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,求：

（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b};$　　（2）$\mathrm{Pr}\,j_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a};$　　（3）$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$

六、设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为单位向量，且满足$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0,$求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

七、已知$A(1,-1,2),B(5,-6,2),C(1,3,-1),$求同时与$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$垂直的单位向量.

八、在Oxy面上，求垂直于$\boldsymbol{a}=(5,-3,4)$，并与$\boldsymbol{a}$等长的向量$\boldsymbol{b}.$

九、已知 $A(2,5,-3), B(3,-2,5)$, 求定比分点 M, 使得 $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$.

十、已知空间三点 $A(1,1,1), B(2,3,4), C(3,4,5)$, 求 ΔABC 的面积.

十一、用向量法证明：

（1）直径所对的圆周角是直角；（2）三角形的三条高交于一点.

能力拓展

一、已知$\boldsymbol{a}=(1,2,3),\boldsymbol{b}=(2,3,3),\boldsymbol{c}=(1,3,6)$, 求$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}],\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

二、已知$\boldsymbol{a}$为单位向量，$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$垂直于$7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$垂直于$7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$，求向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角.

三、设$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b},\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b},|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=1,\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(1) 若$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$, 求$k$的值；

(2) 若以$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$为邻边的平行四边形的面积为 6，求$k$的值.

四、求以 $A(1,1,-2), B(2,0,1), C(1,1,3), D(0,1,0)$ 为顶点的四面体的体积.

五、试用向量证明不等式：$\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2} \geq |a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|$,

其中 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ 为任意实数，并指出等号成立的条件.

延伸探究

一、设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},|\boldsymbol{b}|=2,\ (\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{3}$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\boldsymbol{a}+x\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{a}|}{x}$.

二、设 A,B,C,D 为空间四个定点，AB 的中点为 E, CD 的中点为 $F,|EF|=a,P$ 为空间中任意一点，求 $\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$ 的最小值.