

10.2.2 幂级数（和函数，函数展开成幂级数）

基础过关

一、填空题

1. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 的和函数是 _____.

2. 函数 $\sin \frac{x}{2}$ 的麦克劳林展开式中 x^3 的系数为 _____.

二、求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n}$ 的和函数，并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n n}$ 的和.

三、求 $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)x^n$ 的收敛域及和函数.

四、求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} - 2^n}{n} x^n$ 的和函数.

五、求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^{n-2}}{3^n}$ 的和.

六、将函数 $f(x) = \frac{x+5}{2x^2-x-6}$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $f^{(n)}(0)$.

七、将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数.

八、将函数 $f(x) = \frac{2x-3}{(x-1)^2}$ 展开成 x 的幂级数.

九、将 $\int_1^x (t-1)^2 e^{t^2-2t} dt$ 在 $x=1$ 处展开成幂级数.

十、将 $\frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)$ 在 $x=0$ 处展开成幂级数, 并证明: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$.

十一、已知 $f(x) = x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}$,

1. 将 $f(x)$ 展开为 x 的幂级数;
2. 指出该幂级数的收敛域;
3. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot (2n-1) \cdot 3^n}$ 的和.

能力提升

一、幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^n$ 在 $(0, +\infty)$ 内的和函数为 ()

- (A) $\sqrt{\cos x}$ (B) $\sqrt{\sin x}$ (C) $\cos \sqrt{x}$, (D) $\sin \sqrt{x}$

二、设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ 的和为 S , 则 $S =$ _____.

三、设 $u_n(x) = e^{-nx} + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}, (n=1, 2, \dots)$, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的收敛域及和函数.

延伸探究

一、设 a_n 是曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1} (n=1, 2, \dots)$ 所围区域的面积, 记 $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$, 求 S_1 与 S_2 的值.