9.1.1 对弧长的曲线积分 9.1.2 对坐标的曲线积分

基础过关

一、填空题

1．设 $L: y=-\sqrt{1-x^2}$，则 $\int_L\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}s=$ ________ .

2．设 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2\left(a>0\right)$，则 $\oint_L\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}s=$ ________；

$\oint_L y^2\mathrm{d}s=$ ________；$\oint_L\left(2x^2+3y^2\right)\mathrm{d}s=$ ________ .

3．设 L 为 $x^2+y^2=1\left(y\geq 0\right)$，则 $\int_L \mathrm{e}^{x^2+y^2}\arctan\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=$ ________.

4．设 Γ 为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8\\ z=2\end{cases}$，则 $\oint_\Gamma\dfrac{\mathrm{d}s}{x^2+y^2+z^2}=$ ________ .

5．设 L 为 $x^2+y^2=4$ 的正向，则 $\oint_\Gamma\dfrac{x\mathrm{d}y+2y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=$ ________.

6.设 Γ 是从点 $\left(1,1,1\right)$ 到点 $\left(2,3,4\right)$ 的一段直线,则 $\int_\Gamma x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+\left(x+y-1\right)\mathrm{d}z=$ ________ .

二、计算曲线积分 $I=\oint_L x\mathrm{d}s$，其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界.

三、计算曲线积分 $I=\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$，其中

1．L 为圆周 $x^2+y^2=4x$；　　　2．L 为区域 $D: 0\leq y\leq x\leq\sqrt{2-y^2}$ 的边界.

四、计算曲线积分 $I=\int_{\Gamma}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$，其中 Γ 为曲线 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\cos t\\ y=\mathrm{e}^t\sin t\\ z=\mathrm{e}^t\end{cases}$ 上相应于 t 从0变到2的一段弧.

五、计算曲线积分 $I=\int_L\left(x^2-2xy\right)\mathrm{d}x+\left(y^2-2xy\right)\mathrm{d}y$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

六、计算曲线积分 $I=\int_L\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y$，$L$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$

1．L 的方程为 $y=x^5$；

2．L 的方程为 $y=\sqrt{2x-x^2}$；

3．L 是从 O 沿 $y=-x$ 经 $B(-1,1)$ 再沿 $y=\sqrt{2-x^2}$ 到点 A.

七、计算曲线积分 $I=\int_L\left(x^2+y^2\right)dx+2xydy$，其中$L$分别为：

1． $y=1-|1-x|$ 从 $O(0,0)$ 经 $A(1,1)$ 到点 $B(2,0)$ 的折线；

2．沿圆周 $(x-1)^2+y^2=1$ 的上半部分从 $O(0,0)$ 到 $B(2,0)$ 的一段弧.

八、设 $\boldsymbol{\Gamma}$ 为曲线 $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases}$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧，把对坐标的曲线积分

$\int_\Gamma xyz\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z.$ 化为对弧长的曲线积分.

能力提升

一、设 C 是椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,$ 其周长为 l，计算 $\oint_C (bx+ay+1)^2 \mathrm{d}s.$

二、计算 $\int_\Gamma x^2 yz\mathrm{d}s,$ 其中 Γ 为折线 $ABCD,$ 其中点 A,B,C,D 的坐标依次为 $(0,0,0),(0,0,2),(1,0,2),(1,3,2).$

三、曲线 C 是由 $x^2+y^2+z^2=1$及$x+y+z=0$ 相交而成，求 $\int_{\mathrm{C}} xy\mathrm{d}s.$

四、已知曲线 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正方向往 z 轴负方向

看去为逆时针方向，计算曲线积分 $\int_L xz\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + \frac{y^2}{2}\mathrm{d}z.$

五、设 $u(x,y) = x^2 - xy + y^2$, L 为抛物线 $y = x^2$ 自原点至点 $A(1,1)$ 的有向弧段，$\boldsymbol{n}$ 为 L 的切向量顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 所得的法向量， $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$ 为函数 u 沿法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数，计算 $I = \int_L \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s.$

延伸探究

一、设空间曲面 S 是以曲线 $C:\begin{cases}(x-2)^2 + 2y^2 = 1,\\ z = 2\end{cases}$ 为准线，母线平行于向量 $\boldsymbol{l} = (1,0,1)$ 的柱面.（1）求空间曲面 S 的方程（直角坐标表示）;

（2）设空间曲面 S 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的交在半空间 $z > 0$ 的部分记为空间曲线 Γ，计算对弧长的曲线积分 $I = \int_\Gamma x\mathrm{d}s.$