10.1.1 常数项级数的概念和性质

基础过关

一、填空题

1．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}\left(u_n{}^2 - 2u_n - 3\right) =$ ________ .

2．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$，则 $\lim_{n\to\infty}\left(S_{n+1} + S_{n-1} - 2S_n\right) =$ ________.

3．级数 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$ 的和是 ________ .

4．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和是3，则级数 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{u_n + u_{n+1}}{2}$ 的和是 ________.

5．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ 的和是 2，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2}$ 的和是 ________.

6．当 $|x| < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的和是 ________.

7．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ 的和等于 ________.

8．已知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = 2, \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5,$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n =$ ________.

9．以下命题：（1）若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

（2）若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+100}$ 收敛.

（3）若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1,$ 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

（4）若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛.

正确的是__________.

二、用定义判断下列级数的敛散性：

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$.

3. $\sum_{n=2}^{\infty}\ln(1-\frac{1}{n^2})$.

三、判断下列级数的敛散性

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.01}$.

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n+e^n}{6^n}$.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-1)^n}{2^n}$.

能力提升

一、设 $a_n>0, n=1,2,\cdots,$ 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则下列结论正确的是（　）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散　　B. $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 发散

C. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛　　D. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛