# 课程回顾

- 回溯法
  - 基本思想：深度优先搜索
  - 剪枝函数：约束函数、限界函数
  - 子集树与排列树
- 分支限界法
  - 基本思想：广度优先/最小耗费优先搜索
- 回溯法 vs. 分支限界法
  - 求解目标：所有解 vs. 一个解/最优解
  - 搜索方式：深度优先 vs.广度优先/最小耗费优先
- 随机算法：特点、分类

# 本章目录

- 随机算法概述
- 概率分析相关知识
- 数值随机化算法
- Sherwood算法
- Las Vegas算法
- Monte Carlo算法

# 生活中的概率问题——生日悖论

- 一个屋子里人数必须达到多少人，可以期望其中有两个人生日相同？
- 假设：
  - 所有年份都是$n$天，不考虑闰年
  - 所有人生日都是均匀分布在一年的$n$天中的，即$\Pr\{b_i=r\} = 1/n$，其中$b_i$表示编号为$i$的人的生日，$r$表示一年$n$天中的一天
  - 每两个人生日都是独立的

# 生活中的概率问题——生日悖论 (续)

- 两个人$i$和$j$生日正好都在$r$这一天的概率为：

$$\Pr\{b_i=r \text{ and } b_j=r\} = \Pr\{b_i=r\}\Pr\{b_j=r\} = 1/n^2$$

- 他们的生日刚好在同一天的概率：

$$\Pr\{b_i = b_j\} = \sum_{r=1}^{n} \Pr\{b_i = r \text{ and } b_j = r\} = \sum_{r=1}^{n} (1/n^2) = 1/n$$

- 设置指示变量$X_{ij}$表示两个人$i$和$j$($i \neq j$)的生日情况：

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if person } i \text{ and person } j \text{ have the same birthday,} \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$E[X_{ij}] = 1 \cdot \Pr\{X_{ij} = 1\} + 0 \cdot \Pr\{X_{ij} = 0\} = \Pr\{b_i = b_j\} = 1/n$$

# 生活中的概率问题——生日悖论 (续)

■设$X$表示计数生日相同两人对数目的随机变量，且屋子里一共有$k$人，则有

$$X = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} X_{ij}$$

■等号两边取期望得

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} X_{ij}\right] = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} E[X_{ij}]$$

$$= C_k^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{k(k-1)}{2n} \geq 1$$

解得 $k \geq \sqrt{2n} + 1$

当$n = 365$时，$k \geq 28$

# 生活中的概率问题——抽奖

- 设抽奖箱中有不少于$a$ $(0 < a < 1)$比例的一等奖，有放回的抽奖多少次可以保证抽到一等奖的概率不小于$b$ $(0 < b < 1)$？

- 对立事件：
  至少抽到一次一等奖 vs. 抽到的全部不是一等奖

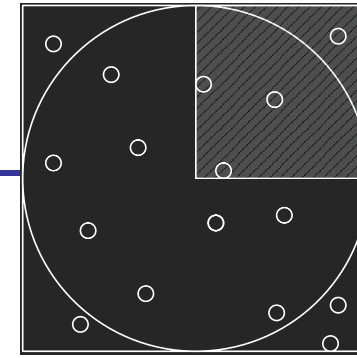
- 假设抽奖$k$次，至少抽到一次一等奖的概率
  $\geq 1 - (1 - a)^k \geq b$
  即$k \geq \log_{1-a}(1 - b)$


假设$a$=1%, $b$=0.9，则$k \approx 230$

# 本章目录

- ■随机算法概述
- ■概率分析相关知识
- ■数值随机化算法
- ■Sherwood算法
- ■Las Vegas算法
- ■Monte Carlo算法

# 数值随机化算法



- ■ $\pi$值计算
  - ➢ 实验：将$n$只飞镖随机投向一正方形的靶子，计算落入此正方形的内切圆中的飞镖数目$k$
  - ➢ 假定飞镖击中方形靶子任一点的概率相等（用计算机模拟比任一飞镖高手更能保证此假设成立）
- ■ 设圆的半径为$r$，圆面积$S_1 = \pi r^2$；方靶面积$S_2 = 4r^2$
- ■ 由等概率假设可知落入圆中的飞镖和正方形内的飞镖平均比为：

$$\frac{k}{n} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$$

- ■ 由此可知：$\pi \approx \dfrac{4k}{n}$

# 数值随机化算法 (续)

■求$\pi$近似值的算法（仅以右上1/4区域为样本）

```
DARTS(n)
    k ← 0
    for i ← 1 to n do
        x ← RANDOM(0, 1)
        y ← RANDOM(0, 1) // 随机产生点(x, y)
        if x^2 + y^2 ≤ 1
            k ← k + 1
    return 4k/n
```

■实验结果展示

- $n$ = 1000万：3.140740, 3.142568 (2位精确)
- $n$ = 1亿：3.141691, 3.141363 (3位精确)
- $n$ = 10亿：3.141527, 3.141507 (4位精确)

# 本章目录

- ■随机算法概述
- ■概率分析相关知识
- ■数值随机化算法
- ■Sherwood算法
- ■Las Vegas算法
- ■Monte Carlo算法

# 雇用问题

- 假如你要雇用一名新的办公助理，雇用代理每天给你推荐一个应聘者，你面试这个人，然后决定是否雇用他
- 支出：支付给雇用代理费用$c_i$以面试应聘者、支付给雇用者雇用费用$c_h$

```
HIRE_ASSISTANT(n)
best ← 0
for i ← 1 to n do
    interview candidate i
    if candidate i is better than candidate best
        best ← i
        hire candiate i
```

总费用：$O(c_i n+c_h m)$

$m$：雇用人数

面试者之间相互商量？

# 雇用问题 (续)

■改为随机算法：

```
RANDOMIZED_HIRE_ASSISTANT(n)
randomly permute the list of candidates
best ← 0
for i ← 1 to n do
    interview candidate i
    if candidate i is better than candidate best
        best ← i
        hire candiate i
```

雇用费用期望：$O(c_h \ln n)$

**Sherwood算法**

# Sherwood算法

- 分析确定性算法在平均情况下的时间复杂度时，通常假定算法的输入实例满足某一特定的概率分布
- 很多算法对于不同输入实例运行时间差别很大，可采用Sherwood算法消除时间复杂度与输入实例间的依赖关系
- 通常有两种方式：
  - 在确定性算法的某些步骤引入随机因素
  - 仅对输入实例随机处理，再执行确定性算法

# Sherwood算法 (续)

■例：快速排序

➢平均时间复杂度$O(n\lg n)$

➢有序数列排序：时间复杂度$O(n^2)$

初始序列：30 25 19 12 6 ➡ 一次划分：[6 25 19 12] 30 []

划分不均衡

➢如何提升最坏情况性能？

- 想法一：每次随机选择划分元 (pivot)

初始序列：30 25 19 12 6 ➡ 位置调整：19 25 30 12 6 ➡ 一次划分：[6 12] 19 [25 30]

随机选择

划分较均衡

- 想法二：把初始序列打乱

初始序列：30 25 19 12 6 ➡ 打乱顺序：12 30 6 19 25 ➡ 一次划分：[6] 12 [30 19 25]

划分较均衡

# Sherwood算法的执行时间

■Sherwood算法能够平滑不同输入实例的执行时间

$A$：一个确定性算法

$t_A(x)$：用算法$A$解实例$x$的执行时间

$X_n$：大小为$n$的输入实例集合

$X_n$中每一个实例是等可能出现的

平均执行时间：

$$\bar{t}_A(n) = \sum_{x \in X_n} t_A(x)/|X_n|$$

?

存在$x \in X_n$,使得：

$t_A(x) >> \bar{t}_A(n)$

$B$：一个随机算法（Sherwood算法）

$s(n)$：算法$B$为取得均匀性所付出的成本

对于任意$x \in X_n$执行时间期望值：$t_B(x) \approx \bar{t}_A(n) + s(n)$

# Sherwood算法的执行时间 (续)

对于任意 $x \in X_n$ 执行时间期望值： $t_B(x) \approx \bar{t}_A(n) + s(n)$

平均期望时间：

$$\bar{t}_B(n) = \sum_{x \in X_n} t_B(x)/|X_n| \approx \bar{t}_A(n) + s(n)$$

- Sherwood算法的平均执行时间略为增加
- 不再有最坏情况的实例，但有最坏的执行时间

# Sherwood算法实例——快速排序

```
RAND_QUICKSORT(A, low, high)
//A: 待排序数组，low/high: 排序起始/终止下标
if low < high
    i ← RANDOM(low, high); //low..high随机抽取一个下标
    swap(A[low], A[i])
    k ← PARTITION(A, low, high)
    RAND_QUICKSORT(A, low, k-1)
    RAND_QUICKSORT(A, k+1, high)
```

引入随机因素

原算法较复杂，很难对其进行修改时可适用

```
SHUFFLE(A)
n ← A.length
for i ← 1 to n-1 do
    //在A[i..n]中随机选一个元素放在A[i]上
    j ← RANDOM(i, n)
    swap(A[i], A[j])
执行原确定性算法
```

输入实例随机处理

# Sherwood算法应用——随机的预处理

$f: X \to Y$：解某问题用到的函数，且相应算法平均性能较优

$X_n$：大小为$n$的输入实例集合

$A_n$：和$X_n$大小相同的集合，$A_n$中能够有效地均匀随机抽样

$A = \cup A_n, \quad X = \cup X_n$

$u: X \times A \to X, \quad v: A \times Y \to Y$

原实例*x*可通过随机抽样变换成另一个实例*z*

对*z*的解可变换为对原实例*x*的解

函数*u*和*v*在最坏情况下能够有效计算

# Sherwood算法应用——随机的预处理 (续)

■ $f(x)$对应的确定性算法可改造为Sherwood算法

```
RH(x)                      //用Sherwood算法计算f(x)
    n ← x.length           //x的大小为n
    r ← RANDOM(A_n)        //随机取一元素
    z ← u(x, r)            //将原实例x转化为随机实例z
    s ← f(z)               //用确定性算法求z的解s
    return v(r, s)         //将解s变换为x的解
```

# Sherwood算法应用——随机的预处理 (续)

■随机的预处理提供了一种加密计算的可能性

- 想针对某个实例$x$计算$f(x)$
- 缺乏计算能力或有效算法
- 别人可提供服务计算
- 不想泄露输入实例$x$

1. 使用函数$u$将$x$加密为某一随机实例$z$
2. 将$z$提交给$f$计算出$f(z)$的值
3. 使用函数$v$转换为$f(x)$

# 本章目录

- ■随机算法概述
- ■概率分析相关知识
- ■数值随机化算法
- ■Sherwood算法
- ■Las Vegas算法
- ■Monte Carlo算法

# Las Vegas算法与Monte Carlo算法

- 给定$n$个元素（$n$非常大）的无序序列$A$，已知至少有一半元素大于$k$，我们想找到任一个元素值大于$k$的序列下标

```
repeat
    j ← RANDOM(1, n)
until A[j] > k
return j
```

```
for i ← 1 to m do   // m远小于n
    j ← RANDOM(1, n)
    if A[j] > k
        return j
return 0  // 0表示未找到
```

赌时间而不赌正确性

要么一定返回正确解，要么无解

**Las Vegas算法**

赌正确性而不赌时间

一定返回解，但可能不正确

**Monte Carlo算法**

# Las Vegas算法

■特点

- 要么返回正确的解，要么随机决策导致一个僵局
- 若陷入僵局，使用同一实例运行同一算法，有独立的机会求出解
- 成功的概率随着执行时间的增加而增加

■算法的一般形式

```
OBSTINATE(x)
1    repeat
2        LV(x, y, success)
3    until success
4    return y
```

*x*：输入实例，*y*：返回值

*success*：布尔值指示执行成功/失败

# Las Vegas算法 (

正确的算法：$\forall x,\ p(x) > 0$

更好的情况：$\forall x, \exists \delta > 0,\ p(x) > \delta$

■设$t(x)$是算法OBSTINATE找到一个正确解的期望时间，则

```
OBSTINATE(x)
    repeat
        LV(x, y, success)
    until success
    return y
```

- $p(x)$：对于实例$x$，单次LV算法成功的概率
- $s(x)$：对于实例$x$，单次LV算法成功时的期望时间
- $e(x)$：对于实例$x$，单次LV算法失败时的期望时间

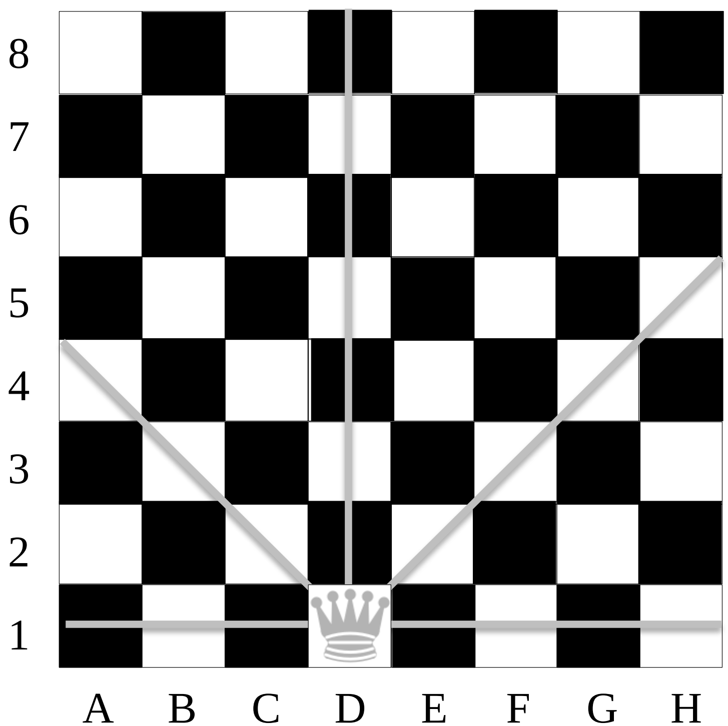
$$t(x) = \underbrace{p(x)s(x)}_{\text{LV算法成功}} + \underbrace{(1-p(x))(e(x)+t(x))}_{\text{LV算法失败}}$$

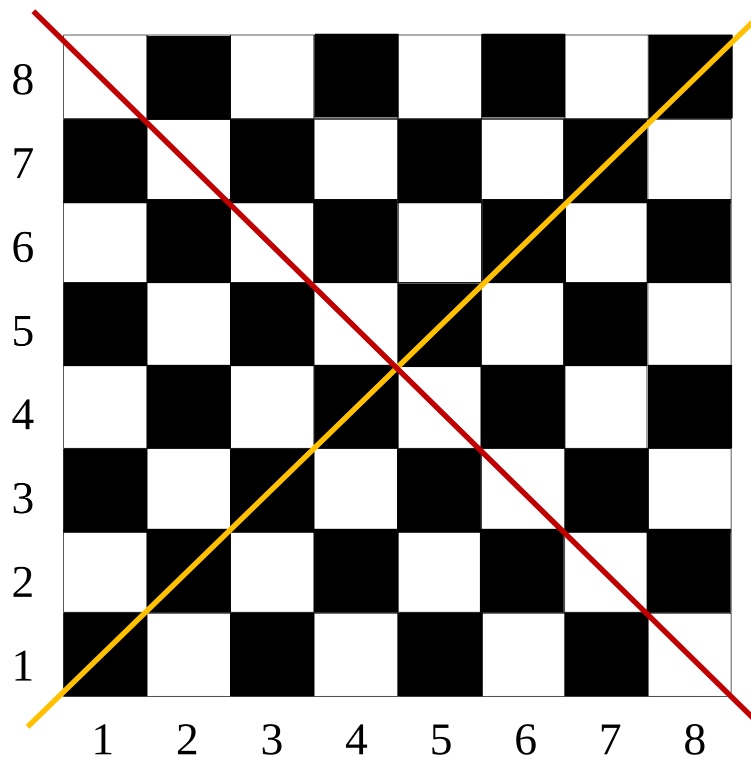
$$\Rightarrow \quad t(x) = s(x) + \frac{1-p(x)}{p(x)} e(x)$$

若要最小化 $t(x)$，则需在$p(x)$, $s(x)$和$e(x)$之间进行某种折衷

# Las Vegas算法应用——八皇后问题

■问题：在8×8棋盘上摆放8个皇后，使其不能互相攻击，即任意两个皇后都不能处于同一行、同一列或同一斜线上




45°斜线：行列号之差相等（$i$-$j$或$j$-$i$相等）

135°斜线：行列号之和相等（$i$+$j$相等）

# Las Vegas算法应用——八皇后问题 (续)

```
QUEENS_BACKTRACK()
i ← 1,  j ← 1
while i ≤ 8 do                    //当前行号i≤ 8
    从当前列 j 起向后逐列试探，寻找安全列号
    if 找到安全列号
        将列号 j 入栈            //(i, j)位置放置皇后
        i ← i + 1                 //将下一行置为当前行
        j ← 1                     //当前列置为1
    else
        i ← i – 1                 //回溯到上一行
        j 赋值为栈顶值，并退栈    //移除当前皇后
        j ← j + 1                 //下一列作为当前列
```

| 行号 | 列号栈 (栈底→栈顶) | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | |
| 2 | 1 3 | |
| 3 | 1 3 5 | |
| 4 | 1 3 5 2 | → 1 3 5 7 |
| 5 | 1 3 5 2 4 | → 1 3 5 2 8 |
| 6 | ? | |

# Las Vegas算法应用——八皇后问题 (续)

■向量$try[1..8]$中存放结果

- ➢$try[i]$——表示第$i$个皇后放在$(i, try[i])$位置上
- ➢$try[1..k]$为$k$-promising：

对于八皇后问题，解是8-promising的

- ➢对任意 $i, j \in \{1, 2, ..., k\}$，若$i \neq j$，则
  - 无行冲突：第$i$个皇后放在第$i$行
  - 无列冲突：对任意不同的两行$i, j$，其列号之差不为0
  - 斜线无冲突：
    135° 斜线：不会产生 $i + try[i] = j + try[j]$ 即 $try[i] - try[j] = j - i$
    45° 斜线：不会产生 $i - try[i] = j - try[j]$ 即 $try[i] - try[j] = i - j$

# Las Vegas算法应用——八皇后问题 (续)

```
QUEENS_LV(success) //若success=true，则try[1..8]包含8后问题的一个解
col, diag45, diag135 ← ∅      //冲突列及两斜线集合初始为空
k ← 0    //行号
repeat   //try[1..k]是k-promising，考虑放第k+1个皇后
    count ← 0   //计数器，count值为第k+1个皇后的安全位置总数
    for i ← 1 to 8 do   //i是列号，试探(k+1, i)是否安全
        if i ∉ col and i – k – 1 ∉ diag45 and i + k + 1 ∉ diag135
            count ← count + 1
            if RANDOM(1, count) = 1   //以1/count概率在count个安全位置上
                j ← i                 //随机选择1个位置j放置皇后
    if count > 0        //count=0时无安全位置，第k个皇后尚未放好
        k ← k + 1       //try[1..k+1]是(k+1)-promising
        try[k] ← j
        col ← col ∪ {j}
        diag45 ← diag45 ∪ {j – k}
        diag135 ← diag135 ∪ {j + k}
until count = 0 or k = 8   //当前皇后位置搜索失败或8-promising时结束
success ← (count > 0)
```

# Las Vegas算法应用——八皇后问题 (续)

## ■算法分析

- $p$： QUEENS_LV算法一次成功的概率
- $s$：成功时搜索的结点的平均数 $s$=9 (空向量try算在内)
- $e$：失败时搜索的结点的平均数
- $p$和$e$理论上难计算，用计算机实验可计算出：
  - $p = 0.1293\ldots$
  - $e = 6.971\ldots$
- 重复上述算法，直至成功时所搜索的平均结点数：

$$t = s + \frac{1-p}{p}e = 55.927\ldots$$

大大优于回溯法，回溯法约为114个结点才能求出一个解

# Las Vegas算法应用——八皇后问题 (续)

■算法存在的问题及改进

- 消极：LV算法过于消极，一旦失败，从头再来
- 乐观：回溯法过于乐观，一旦放置某个皇后失败，就进行系统回退一步的策略，而这一步往往不一定有效
- 折中：
  - 先用LV方法随机地放置前$k$个皇后
  - 然后使用回溯法放置后$(8-k)$个皇后，但不考虑重放前$k$个结点
    - 若前面的随机选择位置不好，可能使得后面的位置不成功
    - 随机放置的皇后越多，后续回溯阶段的平均时间就越少，失败的概率也越大

一半略少的皇后随机放置较好

# Las Vegas算法应用——八皇后问题 (续)

■改进算法

**until** *count* = 0 or *k* = 8   //当前皇后位置搜索失败或8-promising时结束
*success* ← (*count* > 0)

**until** *count* = 0 or *k* = *stepVegas*
**if** *count* > 0          //已随机放好*stepVegas*个皇后
    QUEENS_BACKTRACK(*k*, *col*, *diag*45, *diag*135, *success*)
**else** *success* ← false

# Monte Carlo算法

■特点

➢偶尔会出错，但对任何实例均能以高概率找到正确解

➢算法运行次数越多，得到正确解的概率越高

■基本概念

➢设$p$是一个实数，且$1/2 < p < 1$，若一个Monte Carlo算法以不小于$p$的概率返回一个正确的解，则该MC算法称为$p$ 正确，算法的优势 (advantage) 是 $p - 1/2$

➢若一个Monte Carlo算法对同一实例决不给出两个不同的正确解，则该算法称是相容的 (consistent) 或一致的

为了增加一个一致的、$p$ 正确算法成功的概率，只需多次调用同一算法，然后选择出现次数最多的解

# Monte Carlo算法 (续)

■偏真算法

求解判定问题的MC($x$)

返回true：总是正确

返回false：可能出错

- 没有必要返回频数最高的解，一次true超过任何次数的false
- 重复调用$k$次一致、$p$正确、偏真的MC算法，可得到一个$(1-(1-p)^k)$正确的算法
  - 对于55%正确的偏真算法：重复调用4次可得到95%正确的算法，重复调用6次重复就可得到99%正确的算法，且$p > 1/2$的要求可放宽到$p > 0$

# 回顾抽奖问题

- 设抽奖箱中有不少于$a$ $(0 < a < 1)$比例的一等奖，有放回的抽奖多少次可以保证抽到一等奖的概率不小于$b$ $(0 < b < 1)$？

- 对立事件：
  至少抽到一次一等奖 vs. 抽到的全部不是一等奖

- 假设抽奖$k$次，至少抽到一次一等奖的概率
  $\geq 1-(1-a)^k \geq b$
  即$k \geq \log_{1-a}(1-b)$


假设$a$=1%, $b$=0.9，则$k$≈230

# Monte Carlo算法应用——主元素问题

- 问题：设$A[1..n]$是含有$n$个元素的数组，若$A$中等于$x$的元素个数大于$n/2$，则称$x$是数组$A$的主元素
  - 注：若存在，则只可能有1个主元素

- 例：数组$A=\{3, 2, 3, 2, 3, 3, 5\}$，共7个元素，其中元素3出现4次，占一半以上，因此$A$存在主元素3

# Monte Carlo算法应用——主元素问题(续)

```
MAJ(A)
i ← RANDOM(1, n)
x ← A[i]
k ← 0
for j ← 1 to n do
    if A[j] = x
        k ← k + 1
return (k > n/2)
```

- 返回true：$A$含有主元素$x$，算法一定正确
- 返回false：元素$x$不是$A$的主元素，算法可能错误（仅包含主元素时出错）
- $A$确实包含一个主元素时，$x$为主元素的概率大于1/2

**MAJ是偏真1/2正确的算法**

# Monte Carlo算法应用——主元素问题(续)

■算法改进：通过重复调用技术降低错误概率

```
MAJ2(A)
    if MAJ(A)
        return true
    else
        return MAJ(A)
```

- MAJ2也是一个偏真算法
- $A$存在主元素时，MAJ2返回true的概率：
  - MAJ第一次返回true的概率 $p > 1/2$
  - MAJ第一次返回false且第二次返回true的概率 $p(1-p)$

  总概率：$p + p(1-p) = 1-(1-p)^2 > 3/4$

MAJ2是偏真3/4正确的算法

# Monte Carlo算法应用——主元素问题(续)

■算法改进：通过重复调用技术降低错误概率 (续)

- 重复调用MAJ的结果是相互独立的
- 当$A$含有主元素时，$k$次重复调用MAJ均返回false的概率为$(1-p)^k = 2^{-k}$
- 在$k$次调用中，只要有一次MAJ返回true，即可判定$A$有主元素
- 当需要控制算法出错概率小于$\varepsilon > 0$时，相应算法调用MAJ的次数为：

$$\varepsilon = 2^{-k} \Rightarrow k = \left\lceil \lg \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$$

```
MAJMC(A, ε)
k ← ⌈lg(1/ε)⌉
for i ← 1 to k do
    if MAJ(A)
        return true
return false
```

时间复杂度为$O(n\lg(1/\varepsilon))$

注意，这里只是用此问题来说明MC算法，实际上对于判定主元素问题存在$O(n)$的确定性算法

# Monte Carlo算法应用——矩阵乘法验证

- 问题：设**A**, **B**, **C**为$n \times n$矩阵，如何判定**AB**=**C**是否正确？
  - 通过**A**·**B**的结果与**C**比较
    - 传统方法：$O(n^3)$
    - 当$n$非常大时，确定性算法：$\Omega(n^{2.37})$
- Monte Carlo算法
  - 可在$O(n^2)$内解此问题，但存在一个很小的误差$\varepsilon$
  - 设**X**是一个长度为$n$的0/1二值行向量，将判断**AB**=**C**改为判断**XAB**=**XC**

# Monte Carlo算法应用——矩阵乘法验证(续)

■例:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 11 & 29 & 37 \\ 29 & 65 & 91 \\ 47 & 99 & 45 \end{bmatrix}$$

- 设**X** = (1, 1, 0)
  - **XA** = (5, 7, 9)  **A**矩阵1、2行求和
  - (**XA**)**B** = (40, 94, 128)  **AB**矩阵1、2行求和
  - **XC** = (40, 94, 128)  **C**矩阵1、2行求和
  - 返回true?

错误!

- **X** = (0, 1, 1)
  - **XA** = (11, 13, 15)
  - (**XA**)**B** = (76, 166, 236)
  - **XC** = (76, 164, 136)
  - 返回false

正确!

# Monte Carlo算法应用——矩阵乘法验证(续)

■Monte Carlo算法：设X是一个长度为$n$的0/1二值行向量，将判断**AB**=**C**改为判断**XAB**=**XC**

1. 计算$\mathbf{X}_{1\times n}\ \mathbf{A}_{n\times n}$ → $n^2$次数乘
2. 计算$(\mathbf{XA})_{1\times n}\ \mathbf{B}_{n\times n}$ → $n^2$次数乘
3. 计算$\mathbf{X}_{1\times n}\ \mathbf{C}_{n\times n}$ → $n^2$次数乘

```
GOODPRODUCT(A, B, C, n)
1   for i ← 1 to n do
2         X[i] ← RANDOM(0, 1)
3   if (XA)B = XC
4         return true
5   else return false
```

时间复杂度为$O(n^2)$

- ➢返回false：算法一定正确
- ➢返回true：仅对$\mathbf{X}_i$=1的对应行进行了求和验证，算法可能错误
- ➢若**A**·**B**与**C**的第$i$行不同且$\mathbf{X}_i$=0则出错，误判**AB**=**C**，出错概率不超过1/2

# Monte Carlo算法应用——矩阵乘法验证(续)

## ■算法改进

```
REPEAT_GOODPRODUCT(A, B, C, n, ε)   //出错概率ε
k ← ⌈lg(1/ε)⌉
for i ← 1 to k do  //重复k次
    if GOODPRODUCT(A, B, C, n) = false
        return false
return true
```

**时间复杂度为$O(n^2 \lg(1/\varepsilon))$**

- 出错概率 $\varepsilon \le 2^{-k}$
- REPEAT_GOODPRODUCT是偏假$(1 - \varepsilon)$正确的算法