§6.1 向量代数　§6.2 平面和空间直线的方程（平面方程）

一、填空题

1. 平行于向量 $\boldsymbol{a}=(6,7,-6)$ 的单位向量为 $\pm(\frac{6}{11},\frac{7}{11},-\frac{6}{11})$.

2. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为单位向量，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}$, 则以向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.　$\frac{1}{2}=\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times1\times\cos\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.（$\cos\theta=\sin\theta$）

4. 设 $|\boldsymbol{a}|=3,|\boldsymbol{b}|=5$, 若 $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}$ 垂直，则常数 $k=$ $\pm\frac{3}{5}$.（$|\vec{a}|^2-k^2|\vec{b}|^2=0$）

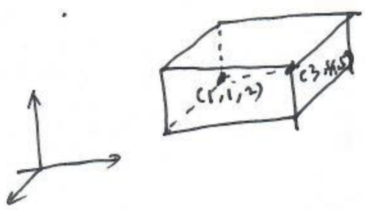
5. 设向量 $\boldsymbol{x}$ 与向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,2)$ 平行，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$, 则 $\boldsymbol{x}=$ $(-4,2,-4)$.　设 $\vec{x}=(2\lambda,-\lambda,2\lambda$

~~(-4,2,-4)~~

6. 设 $\boldsymbol{a}=(4,-2,4),\boldsymbol{b}=(6,3,-2)$, 则 $\mathrm{Pr}\,j_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=$ $\frac{10}{7}$.　$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$

7. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量，且满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$, 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=$ $-\frac{3}{2}$.　$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

二、设长方体的各棱与坐标轴平行，已知长方体的两个顶点坐标分别为 $(1,1,2),(3,4,5)$, 试写出余下六个顶点的坐标.



顶点：

$\{1,3\}\times\{1,4\}\times\{2,5\}$

$=(1,1,2),\ (3,4,5)$

$(3,1,2),\ (1,4,5)$

$(1,4,2),\ (1,1,5)$

$(3,4,2),\ (3,1,5)$

三、一向量的终点为 $B(2,-1,7)$, 在 x,y,z 轴上的投影依次为 $4,-4,7$, 求此向量的始点坐标，方向余弦和方向角.

设起点 A 坐标为 (x,y,z). 则 $\begin{cases}2-x=4\\-1-y=-4\\7-z=7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=-2\\y=3\\z=0\end{cases} \Rightarrow A(-2,3,$

$\therefore \overrightarrow{AB}=(4,-4,7)$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4^2+(-4)^2+7^2}=9$　$\therefore \cos\alpha=\frac{4}{9},\ \cos\beta=-\frac{4}{9},\ \cos\gamma=\frac{7}{9}$

$\therefore \alpha=\arccos\frac{4}{9},\ \beta=\arccos(-\frac{4}{9}),\ \gamma=\arccos\frac{7}{9}$

5

25

四、设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k},\boldsymbol{c}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{l}=4\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ 在 x 轴上的投影以及在 y 轴上的分向量.

$$\vec{l}=4(3\vec{i}+5\vec{j}+8\vec{k})+3(2\vec{i}-4\vec{j}-7\vec{k})-(5\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k})$$

$$=13\vec{i}+7\vec{j}+15\vec{k}$$

$\therefore \vec{l}$ 在 x 轴上投影为 13

在 y 轴上分向量为 $7\vec{j}$

五、设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，求：

（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;　（2）$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$;　（3）$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.

(1) $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=5\vec{i}+\vec{j}+7\vec{k}$

(2) $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

(3) $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{3\times1+(-1)\times2+(-2)\times(-1)}{\sqrt{3^2+(-1)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$

六、已知 $A(1,-1,2), B(5,-6,2), C(1,3,-1)$, 求与 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 都垂直的单位向量.

$\overrightarrow{AB} = (4, -5, 0)$,

$\overrightarrow{AC} = (0, 4, -3)$

$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (15, 12, 16)$

$|\vec{n}| = \sqrt{15^2+12^2+16^2} = 25$.

$\therefore \pm\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \pm\frac{1}{25}(15, 12, 16)$ 为所求单位向量

七、在 Oxy 面上，求垂直于 $\boldsymbol{a} = (5,-3,4)$，并与 $\boldsymbol{a}$ 等长的向量 $\boldsymbol{b}$.

设 $\vec{b} = (x, y, 0)$，则

$|\vec{b}| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{5^2+(-3)^2+4^2} = \sqrt{50}$

$\therefore x^2+y^2 = 50$ ①

又 $\because \vec{a} \perp \vec{b}$

$\therefore 5x-3y=0$ ②

联立 ① ② 得 $x = \pm\frac{15}{\sqrt{17}}$, $y = \pm\frac{25}{\sqrt{17}}$

$\therefore \vec{b} = \pm\left(\frac{15}{\sqrt{15}}, \frac{25}{\sqrt{17}}, 0\right)$

八、已知空间三点 $A(1,1,1), B(2,3,4), C(3,4,5)$, 求 ΔABC 的面积.

$\overrightarrow{AB} = (1, 2, 3)$

$\overrightarrow{AC} = (2, 3, 4)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1)$

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

九、已知平面 $Ax+By+Cz+D=0$，根据要求填写系数应满足的条件：

过原点	平行于 z 轴	包含 x 轴	平行于 xOy 平面
$D=0$	$C=0$	$A=D=0$	$A=B=0$

十、求满足下列条件的平面方程：

1. 过点 $(3,0,-1)$ 且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行. 答：$3x-7y+5z-4=0$

$3(x-3)-7(y-0)+5(z+1)$

2. 过点 $(1,1,1)$ 和点 $(0,1,-1)$ 且与平面 $x+y+z=0$ 相垂直. 答：$2x-y-z=0$

$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{AB}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=(-2,1,1)$

3. 过点 $(1,1,1),(-2,-2,2),(1,-1,2)$. 答：$x-3y-6z+8=0$

$\vec{n}=\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=(-1,3,6)$

4. 平行于 xOz 面且经过点 $(2,-5,3)$. 答：$y+5=0$

设 $By+D=0$ $\Rightarrow D=5B$

5. 平行于 x 轴且经过两点 $(4,0,-2),(5,1,7)$.

设平面 $By+Cz+D=0$

则 $\begin{cases} -2C+D=0 \\ B+7C+D=0 \end{cases}$

$\therefore\ C=\frac{D}{2}$

$B=-\frac{9}{2}D$

$\therefore\ -\frac{9}{2}Dy+\frac{D}{2}z+D=0$

即 $9y-z-2=0$

6. 平面 $x-2y+2z+21=0$ 与平面 $7x+24z-5=0$ 之间的二面角的平分面.

设 (x,y,z) 是所求平面上任意一点，则

$$\frac{|x-2y+2z+21|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{|7x+24z-5|}{\sqrt{7^2+0^2+24^2}}$$

$$\frac{x-2y+2z+21}{3}=\pm\frac{7x+24z-5}{25}$$

$\therefore\ 2x-25y-11z+270=0$

或 $46x-50y+122z+510=0$ 即23x-25y+61z+255=0