期中复习

苏州大学 计算机科学与技术学院
汪笑宇
Email: xywang21@suda.edu.cn

基本概念——算法

■非形式定义

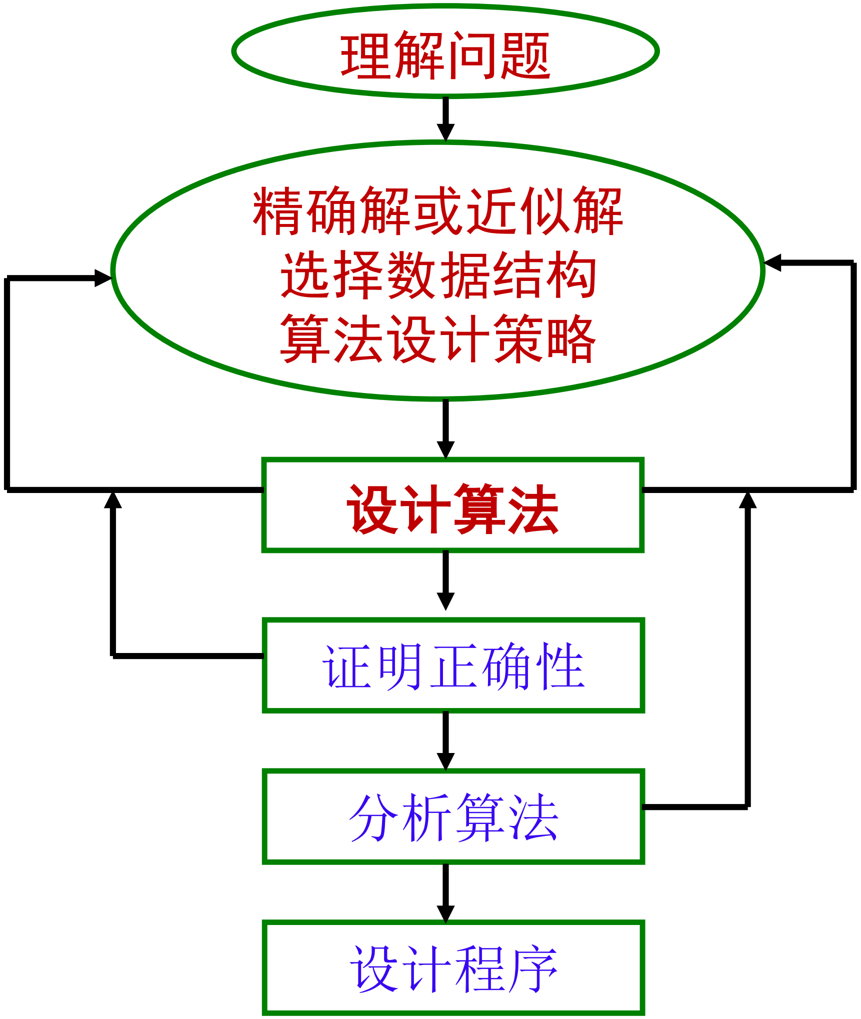
- ➢一个算法是任何一个良定义(well-defined)的计算过程，它接收某个值或值的集合作为输入，产生某个值或值的集合作为输出。因此，一个算法是一个计算步骤的序列，这些步骤将输入转化为输出。

输入 Input → 算法 Algorithm → 输出 Output

计算步骤

- ➢或者说，算法所描述的计算过程就是怎样达到所期望的I/O关系

算法 -> 问题求解



循环不变式

- 循环不变式：循环体每次执行前后均为真的谓词
  - 作用：主要用来帮助我们理解算法的正确性。
- 循环不变式性质：
  - 初始化：循环的第一次迭代之前，它为真
  - 保持：如果循环的某次迭代之前它为真，那么下次迭代之前它仍为真
  - 终止：在循环终止时，不变式为我们提供一个有用的性质，该性质有助于证明算法是正确的

渐近表示法

- $f(n)=\Theta(g(n))$ 渐近紧确界

  $\Theta(g(n)) = \{f(n)$: 存在正常量c_1,c_2,n_0, 使得对所有$n \ge n_0$有$0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)\}$

- $f(n)=O(g(n))$ 渐近上界

  $O(g(n)) = \{f(n)$: 存在正常量c,n_0, 使得对所有$n \ge n_0$有$0 \le f(n) \le cg(n)\}$

- $f(n)=\Omega(g(n))$ 渐近下界

  $\Omega(g(n)) = \{f(n)$: 存在正常量c,n_0, 使得对所有$n \ge n_0$有$0 \le cg(n) \le f(n)\}$

渐近表示法 (续)

- $f(n)=o(g(n))$ 渐近非紧上界

$o(g(n)) = \{f(n)$: 对任意常数$c>0$, 存在常数$n_0 > 0$, 使得对所有$n \geq n_0$有$0 \leq f(n) < cg(n)\}$

- $f(n)=\omega(g(n))$ 渐近非紧下界

$\omega(g(n)) = \{f(n)$: 对任意常数$c>0$, 存在常数$n_0 > 0$, 使得对所有$n \geq n_0$有$0 \leq cg(n) < f(n)\}$

- $$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = \begin{cases} 0 & f(n) = o(g(n)), f(n) = O(g(n)) \\ a, a > 0 & f(n) = \Theta(g(n)), f(n) = O(g(n)), f(n) = \Omega(g(n)) \\ \infty & f(n) = \omega(g(n)), f(n) = \Omega(g(n)) \end{cases}$$

标准记号与常用函数

■阶乘

- ➢斯特林(Stirling)近似公式

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

- ➢ $n! = o(n^n) \quad n! = \omega(2^n) \quad \lg(n!) = \Theta(n\lg n)$

P类问题 (P问题)

- P类问题 (Polynomial Problem)：在多项式时间内可以解决的问题
  - 例如：排序问题可在$O(n^2)$时间复杂度内解决

NP类问题 (NP问题)

- NP类问题 (Non-deterministic Polynomial Problem)：在多项式时间内可以被验证的问题
  - 非确定性算法：猜测 + 验证，猜测阶段是非确定性的，给出问题解的一个猜测；验证阶段是确定性的，验证阶段给出解的正确性
  - 设算法A是解一个判定问题Q的非确定性算法，如果算法A的验证阶段可以在多项式时间内完成，则称算法A是一个多项式时间非确定性算法，也称问题Q是非确定性多项式时间可解的（NP问题）

NPC类问题（NPC问题）

■若对于问题Q，满足：

1. Q∈NP
2. 每个NP问题都可以多项式时间归约到Q

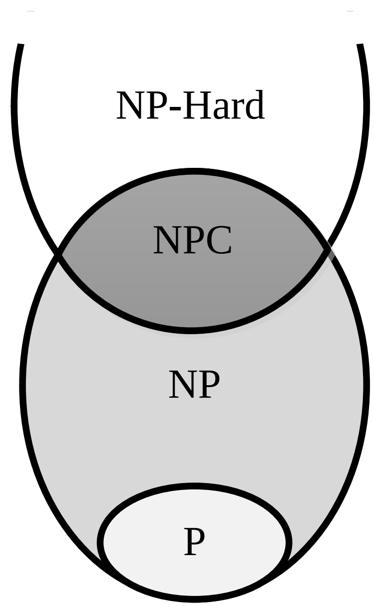
   或：任意一个NPC问题都可以多项式时间归约到Q

那么问题Q是一个NP完全问题

■若问题Q满足了第二条，则称为NP-Hard问题

NP完全性理论

- 定理34.4 (p628) 如果任何NP完全问题是多项式时间可求解的，则P=NP。等价地，如果存在某一NP中的问题不是多项式时间可求解的，则所有NP完全问题都不是多项式时间可求解的。
- 目前认为P≠NP



递归式求解——代入法

- （教材p47-49）代入法求解递归式分为两步：
  - 猜测解的形式
  - 用数学归纳法求出解中的常数，并证明解是正确的
- 关键：用猜测的解代入到递归式中
- 例：确定$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$的上界
  - 猜测解$T(n)=O(n\lg n)$，需要证明恰当选择常数$c>0$，有$T(n)\leq cn\lg n$

递归式求解——代入法 (续)

- 例：确定$T(n)=2T(\lfloor n/2\rfloor)+n$的上界
  - 猜测解$T(n)=O(n\lg n)$，需要证明恰当选择常数$c>0$，有$T(n)\le cn\lg n$
  - 先看此猜测是否正确：假定该上界对所有正数$m<n$都成立，特别是对于$m=\lfloor n/2\rfloor$有

$$T(\lfloor n/2\rfloor)\le c\lfloor n/2\rfloor\lg(\lfloor n/2\rfloor)$$

代入递归式得到：

$$\begin{aligned}T(n)&\le 2c\lfloor n/2\rfloor\lg(\lfloor n/2\rfloor)+n\le cn\lg(n/2)+n\\&=cn\lg n-cn\lg 2+n\\&=cn\lg n+(1-c)n\le cn\lg n\end{aligned}$$

只要$c\ge 1$即可

递归式求解——代入法 (续)

■例：确定$T(n)=2T(\lfloor n/2\rfloor)+n$的上界

- 猜测解$T(n)=O(n\lg n)$，需要证明恰当选择常数$c>0$，有$T(n)\le cn\lg n$
- 数学归纳法要求证明边界条件成立：假设$T(1)=1$是递归式唯一边界条件，但$T(1)\le c\cdot 1\cdot \lg 1=0$并不成立
- 渐近符号仅要求对$n\ge n_0$证明$T(n)\le cn\lg n$
  - 扩展边界条件
  - 令$n_0=2$，之前的证明成立需要对$n_0\le m=\lfloor n/2\rfloor<n$都成立，因此数学归纳法中需满足$n\ge 4$，此时只要找到足够大的$c$使得$T(2)$和$T(3)$满足$T(n)\le cn\lg n$即可
  - $T(2)=4$，$T(3)=5$，即任何$c\ge 2$即可满足

递归式求解——代入法 (续)

■注意事项3：避免陷阱

- ➢证明时渐近记号的使用易产生错误

  例：$T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$

  猜测$T(n)=O(n)$，此时“证明”$T(n)\leq cn$

  $T(n) \leq 2(c\lfloor n/2 \rfloor) + n \leq cn + n = O(n)$ 错误！

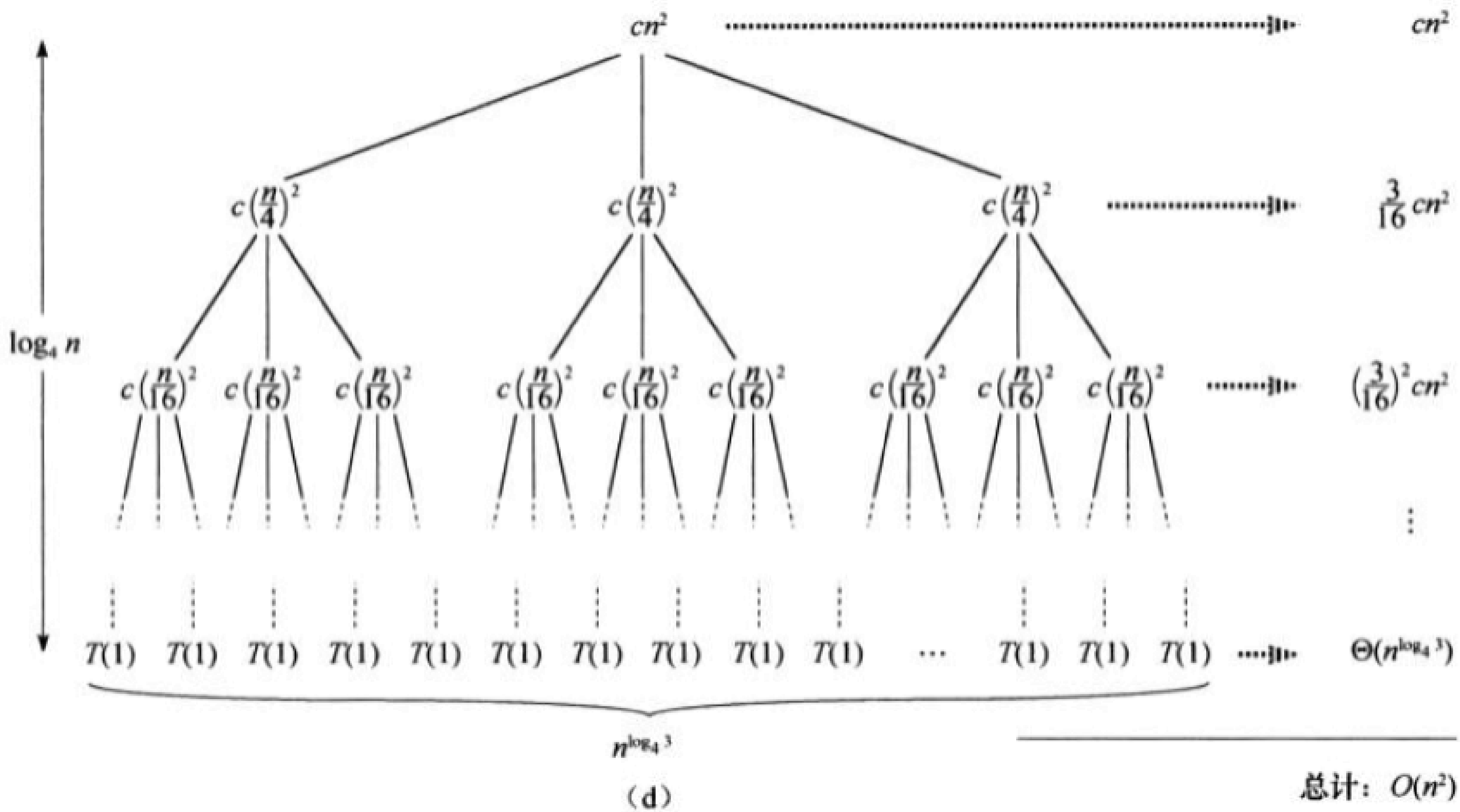
  必须证明$T(n)\leq cn$的精确形式！

递归式求解——递归树法

- 递归树中每个结点表示一个单一子问题的代价，子问题对应某次递归函数调用
- 树中每层的代价求和得到每层代价，将所有层的代价求和，得到所有层次递归调用总代价
- 递归树是展开过程的形象化，从$T(n)$逐步展开直到$T(1)$

递归式求解——递归树法 (续)

■例2：（教材p51）$T(n)=3T(\lfloor n/4\rfloor)+cn^2$ （设$n=4^k$）



项数

3^1

3^2

⋮

$3^{\log_4 n}=n^{\log_4 3}$

递归式求解——递归树法 (续)

■例2：（教材p51）$T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2$ （设n=4^k）

$$
\begin{aligned}
T(n) &= cn^2 + \frac{3}{16}cn^2 + \left(\frac{3}{16}\right)^2 cn^2 + \ldots + \left(\frac{3}{16}\right)^{\log_4 n - 1} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{3}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&= \frac{1 - (3/16)^{\log_4 n}}{13/16} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \\
&< \frac{16}{13} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 3}) \qquad // 0 < (3/16)^{\log_4 n} \le 1 \\
&= O(n^2)
\end{aligned}
$$

递归式求解——主方法

■定理4.1（教材p53-54，主定理） 令$a \geq 1$和$b>1$是常数，$f(n)$是一个函数，$T(n)$是定义在非负整数上的递归式：

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

其中我们将n/b解释为$\lceil n/b \rceil$或$\lfloor n/b \rfloor$，有如下渐近界：

1. 若对某个常数$\varepsilon>0$有 $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$，则$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. 若$f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$，则$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$
3. 若对某个常数$\varepsilon>0$有$f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$，且对某个常数$c<1$和所有足够大的$n$有$af(n/b) \leq cf(n)$，则$T(n) = \Theta(f(n))$

递归式求解——主方法 (续)

■定理意义：比较$f(n)$和$n^{\log_b a}$，直观上两函数较大者决定$T(n)$

1. $n^{\log_b a}$比$f(n)$大一个多项式因子n^{ε}：$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. 两者相同，乘以对数因子lg$n$：
   $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg n) = \Theta(\lg n f(n))$
3. $f(n)$比$n^{\log_b a}$大一个多项式因子n^{ε}，以及满足“正则”条件：$T(n) = \Theta(f(n))$

■注：三种情况并未覆盖所有可能的$f(n)$，存在间隙

分治法求解——二分搜索

```
BINARY_SEARCH(A, x, low, high)
if low ≤ high
    mid ← ⌊(low + high)/2⌋
    if x = A[mid]
        return mid
    if x < A[mid]
        return BINARY_SEARCH(A, x, low, mid-1)
    else return BINARY_SEARCH(A, x, mid+1, high)
return 0
```

■最坏情况运行时间：$T(n)=T(n/2)+\Theta(1)$，由主方法易得$T(n)=\Theta(\lg n)$