

2. 求微分方程的通解: $(x^2 - 1)dy + (2xy - \cos x)dx = 0$.

自测题六(常微分方程)

一、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. $y = C - x$ (C 为任意常数)是微分方程 $xy'' + y' = -1$ 的().
A. 通解 B. 特解
C. 不是解 D. 解,既非通解也非特解
2. 微分方程 $ydx + (y^2x - e^y)dy = 0$ 是().
A. 全微分方程 B. 一阶线性方程
C. 可分离变量方程 D. 齐次方程
3. 若一曲线上任一点的切线的斜率为 $-\frac{2x}{y}$, 则此曲线是().
A. 直线 B. 抛物线 C. 椭圆 D. 圆
4. 由 $x^2 - xy + y^2 = C$ (C 为任意常数)确定的隐函数的微分方程是().
A. $(x - 2y)y' = 2x - y$ B. $(x - 2y)y' = 2x$
C. $xy' = 2x - y$ D. $-2yy' = 2x - y$
5. 满足方程 $\int_0^1 f(tx)dt = nf(x)$ (n 为大于 1 的自然数)的可导函数 $f(x)$ 为().
A. $Cx^{\frac{1-n}{n}}$ B. Cx C. $C\sin nx$ D. $C\cos nx$

二、填空题(每题 3 分,共 15 分)

3. 求微分方程的特解: $x^2y' + xy = y^2, y(1) = 1$.

1. $xy''' + 2y'' + x^2y = 0$ 是 _____ 阶微分方程.
2. 微分方程 $F(x, y^4, y', (y'')^2) = 0$ 的通解中所含任意常数的个数是 _____.
3. 以 $y = Ce^{x^2}$ (C 为任意常数)为通解的微分方程是 _____.
4. 已知函数 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2} + \alpha$, 且当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, α 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0) = \pi$, 则 $y(1) =$ _____.
5. 函数 $y = 3\sin x - 4\cos x$ _____ (填“是”或“否”)方程 $y'' + y = 0$ 的解.

三、解下列各题(每题 10 分,共 40 分)

1. 求微分方程的通解: $(e^{x+y} - e^x)dx + (e^{x+y} + e^y)dy = 0$.

4. 求微分方程的特解： $xy' + y - e^x = 0, y|_{x=1} = e$.

2. 求微分方程 $xdy + (x - 2y)dx = 0$ 的一个解 $y = y(x)$, 使得由曲线 $y = y(x)$ 与直线 $x = 1, x = 2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最小.

四、解下列各题(每题 10 分, 共 30 分)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续, 若由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = 1, x = t (t > 1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积为 $V(t) = \frac{\pi}{3} [t^2 f(t) - f(1)]$. 试求 $y = f(x)$ 所满足的微分方程, 并求该微分方程满足条件 $y|_{x=2} = \frac{2}{9}$ 的解.

3. 设函数 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且满足 $f(t) = e^{t^2} + \iint_D f(\sqrt{x^2 + y^2}) d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq t^2\}$, 求 $f(t)$.