9.2.3 高斯公式和斯托克斯公式

基础过关

一、填空题

1．设区域Ω由坐标面与$x+y+z=1$围成，Σ为Ω边界曲面的外侧，

则$\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________ .

2．设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2\left(a>0\right)$的外侧，则$\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$________；

$\oiint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$________；$\oiint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$________.

3．设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧，则$\oiint\limits_{\Sigma} \dfrac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$________.

4．设Σ是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}\left(0\le z\le 1\right)$的下侧，

则$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3\left(z-1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$________.

二、计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(2x+z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是$z=x^2+y^2\left(0\le z\le 1\right)$的上侧.

三、计算曲面积分$I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$，其中为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧.

四、计算曲面积分$I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{1.5}}$，其中$\Sigma$是曲面$2x^2+2y^2+z^2=4$的外侧.

五、设Σ是$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的上侧，计算曲面积分

1． $I=\iint\limits_{\Sigma}y\mathrm{z}\mathrm{d}\mathrm{z}\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

2． $I=\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}\mathrm{z}+y^2\mathrm{d}\mathrm{z}\mathrm{d}x+\mathrm{z}^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

六、设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 外侧，利用高斯公式计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^4+y^4+z^4\right)\mathrm{d}S$.

七、设 Σ 为空间闭区域 $\left\{(x,y,z)\middle|x^2+4y^2\le 4,0\le z\le 2\right\}$ 表面的外侧，求曲面积分

$I=\oiint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

八、设 Ω 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0$ 和 $x+z=1$ 围成， Σ 为 Ω 的边界曲面外侧，求

$I=\oiint\limits_{\Sigma}2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xz\cos y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3yz\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

九、已知流体$\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},\Sigma: y=z^2+x^2, 0\le y\le h$，方向取左侧，求单位时间流过$\Sigma$的流量.

十、计算$I=\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(z^2+x^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$, 其中$L$

是上半球面$x^2+y^2+z^2=2Rx(z>0)$与柱面$x^2+y^2=2rx(0<r<R)$的交线, 沿 z 轴正向看逆时针方向.

能力提升

一、计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$, 其中$\Sigma$是由曲面$x^2+y^2=R^2$及两平面$z=R$和

$z=-R$ $(R>0)$所围立体表面的外侧.

二、设 Σ 是曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧，计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

延伸探究

一、计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{2}{x\cos^2 x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{\cos^2 y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\frac{1}{z\cos^2 z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 其中 Σ 是球面：

$x^2+y^2+z^2=1$的外侧.