

自测题四(曲线积分与曲面积分)

一、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 设有曲线 $L: f(x, y) = 1$, $f(x, y)$ 具有一阶连续偏导数, 过第二象限内点 M 和第四象限内点 N , Γ 为 L 上连接 M, N 的弧. 下列积分小于 0 的是().

- A. $\int_{\Gamma} f(x, y) ds$ B. $\int_{\Gamma} f(x, y) dx$
C. $\int_{\Gamma} f(x, y) dy$ D. $\int_{\Gamma} f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy$

2. 已知 $\frac{(x+ay)dx+ydy}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分, 则 $a = ()$.

- A. 3 B. -1 C. 不存在 D. 2

3. 设 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被 $z = 0$ 和 $z = 1$ 所截部分的外侧, 则曲面积分

$$\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + (z^2 - 2z) dx dy = ().$$

- A. $-\frac{3}{2}\pi$ B. 0 C. $\frac{3}{2}\pi$ D. $\frac{2}{3}\pi$

4. 曲面 Σ 是上半球面: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, Σ_1 是 Σ 在第一卦限的部分, 则().

- A. $\iint_{\Sigma} x dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x dS$ B. $\iint_{\Sigma} y dS = 4 \iint_{\Sigma_1} y dS$
C. $\iint_{\Sigma} z dS = 4 \iint_{\Sigma_1} z dS$ D. $\iint_{\Sigma} xyz dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$

5. 设 f 有连续导数, $I = \iint_{\Sigma} \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) dy dz + \frac{1}{x} f\left(\frac{x}{y}\right) dz dx + z dx dy$, 其中 Σ 是曲面 $y = x^2 + z^2$, $y = 8 - x^2 - z^2$ 所围立体的表面外侧, 则 $I = ()$.

- A. 4π B. 8π C. 16π D. 32π

二、填空题(每题 3 分,共 15 分)

1. 已知 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y + z = 0, \end{cases}$ 则 $\int_L (x^2 + y - z) ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 C 是面积为 S 的有界闭区域的边界曲线, \mathbf{n} 为其外法向量, 则 $\oint_C [x \cos(\mathbf{n}, x) + y \cos(\mathbf{n}, y)] ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. $\int_{|x|+|y|=1} x^2 y dx + xy^2 dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. $\iint_{x^2+y^2+z^2=2ax} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 已知曲面 Σ 为 $|x| + |y| + |z| = 1$, 则 $\oint_{\Sigma} (x + |y|) dS = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解下列各题(每小题 10 分,共 40 分)

1. 计算积分 $I = \int_C x^2 y dx$, 其中 C 为抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $A(1, -1)$ 到点 $B(1, 1)$ 的一段弧.

2. 计算积分 $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} ds$, 其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = ax$.

3. 计算 $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$, 其中 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

4. 计算曲面积分 $I = \oint_{\Sigma} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$ 的外侧.

2. 设 P 为椭球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 - yz = 1$ 上的动点, 若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 平面垂直, 求点 P 的轨迹 C , 并计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} \frac{(x + \sqrt{3}) |y - 2z|}{\sqrt{4 + y^2 + z^2 - 4yz}} dS$, 其中 Σ 是椭球面位于曲线 C 上方的部分.

四、解下列各题(每题 10 分, 共 30 分)

1. 已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}, \\ z = x, \end{cases}$ 起点为 $(0, \sqrt{2}, 0)$, 终点为 $(0, -\sqrt{2}, 0)$, 计算

积分 $I = \int_L (y + z) dx + (z^2 - x^2 + y) dy + (x^2 + y^2) dz$.

3. 设 Σ 为 $z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的上侧, 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xz dy dz + 2zy dz dx + 3xy dx dy$.