§9.1 曲线积分(续：格林公式、曲线积分与路径无关的条件)

一、填空

1．设L是$|x|+|y|=1$逆时针方向一周，则$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{\underbrace{|x|+|y|}_{=1}}=$ $\oint_L x\,dy-y\,dx=2\iint_D dxdy=4$

2．设L是圆$x^2+y^2=a^2$逆时针方向一周，则$\oint_L \frac{xy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}}=$ $\int_L \frac{xy^2dy-x^2y\,dx}{a}=\frac{1}{a}\iint_D (x^2+y^2)dxdy=\frac{\pi a^3}{2}$

3．设L是圆$x^2+y^2=9$逆时针方向一周，则$\oint_L x\mathrm{d}y=$ $\iint_D dxdy=9\pi$；$\oint_L x\mathrm{d}s=$ $\int_0^{2\pi}3\cos t\cdot 3dt=0$

4．设L是椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$顺时针方向一周，

则$\oint_L\left(\sqrt{x+1}+2y\right)\mathrm{d}x+\left(y\cos y+5x\right)\mathrm{d}y=$ $-\iint_D 3\,dxdy=-3\times2\pi=-6\pi$．

5．$\int_{(1,0)}^{(2,1)}\left(2xy-y^4+3\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-4xy^3\right)\mathrm{d}y=$ $(x^2y-xy^4+3x)\Big|_{(1,0)}^{(2,1)}=5$

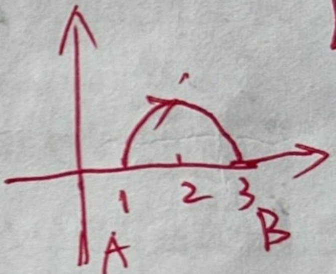
6．若 L 是光滑曲线，曲线积分$\int_L(x^4+4xy^a)\mathrm{d}x+(6x^{a-1}y^2-5y^4)\mathrm{d}y$与路径无关，则$a$的值是 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\Rightarrow 4axy^{a-1}=6(a-1)x^{a-2}y^2\Rightarrow a=3$

7. $(x+2y)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}($ $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+2xy+C$ $)$

二、计算曲线积分$I=\oint_L(2x-y+4)\mathrm{d}x+(5y+3x-6)\mathrm{d}y$，其中$L$是以点$(0,0),(3,0)$ 和$(3,2)$为顶点的三角形正向边界.

$I=\iint_D(3+1)dxdy=4\times3=12$

$-\frac{4}{4}$ $\frac{\pi}{2}$



L: 沿上半圆周 $(x-2)^2+y^2=1$ (y≥

从A(1,0)到B(3,

$$I=\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\,dy$$

$P=\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad Q=y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$

添成|去闭“G”

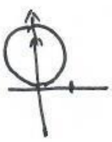
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\int_L=\int_{L+\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}}=0+\int_{\overline{AB}}$$

$$=\int_1^3\sqrt{x^2}\,dx=4$$

四、计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}$，其中 L 分别为

(1) $x^2+y^2-2y=0$ 的正向；



记 $P=\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$， $Q=\frac{-(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(x-1)^2-y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. 在圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 内 P. Q 的偏导

故 $I=0$.

(2) $4x^2+y^2-8x=0$ 的正向.

$4(x-1)^2+y^2=4$， 即 $(x-1)^2+\frac{y^2}{4}=1$ 在此椭圆内 . P. Q 不

引入小圆 L_ε： $x-1=\varepsilon\cos\theta$， $y=\varepsilon\sin\theta$，取逆时针向，

记 L 与 L_ε 所围区域为 $\hat{D}$，则

$$\oint_{L+L_\varepsilon^-} P\,dx+Q\,dy=0$$

$$\therefore \int_L P\,dx+Q\,dy=\int_{L_\varepsilon} P\,dx+Q\,dy=\int_0^{2\pi}\frac{-\varepsilon^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\varepsilon^2}$$

$$=-2\pi$$

五、验证：$\left(\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\ln x-\frac{x^2}{y^2}\right)\mathrm{d}y,(x>0,y>0)$ 是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，

并求 $u(x,y)$ 及 $\int_{(1,1)}^{(2,3)}\left(\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\ln x-\frac{x^2}{y^2}\right)\mathrm{d}y$.

设 $P=\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}$ ，$Q=\ln x-\frac{x^2}{y^2}$ ，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x}-\frac{2x}{y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ $(x>0,y>0)$

$\therefore Pdx+Qdy$ 是一个全微分 du，且 $u(x,y)=y\ln x+\frac{x^2}{y}+C$

$$\int_{(1,1)}^{(2,3)} Pdx+Qdy=\left(y\ln x+\frac{x^2}{y}\right)\Big|_{(1,1)}^{(2,3)}=\left(3\ln 2+\frac{4}{3}\right)-(0+1)$$

$$=3\ln 2+\frac{1}{3}$$

六.利用曲线积分求摆线 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t),0\le t\le 2\pi$ 与 x 轴所围图形的面积.

$$S=\oint_L x\,dy\ \cancel{}=\int_{\overline{OA}} x\,dy+\int_{\overset{\frown}{AO}} x\,dy$$

$$=0-\int_0^{2\pi}a(t-\sin t)\cdot a\sin t\,dt$$

$$=-a^2\left[\int_0^{2\pi}t\sin t\,dt-\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt\right]$$

$$=-a^2\left[(-t\cos t+\sin t)\Big|_0^{2\pi}-\pi\right]$$

$$=-a^2(-2\pi-\pi)=3\pi a^2$$

七.确定光滑闭曲线 C，使曲线积分 $\oint_C \left(x+\frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x+\left(y+x-\frac{2}{3}x^3\right)\mathrm{d}y$ 达到最大值.

设 D 是 C 所围区域，则

$I \triangleq \oint_C (x+\frac{y^3}{3})dx + (y+x-\frac{2}{3}x^3)dy = \iint_D (1-2x^2-y^2)dxdy$

D 应包含使 $1-2x^2-y^2$ 大于零的所有区域.

因此，C 为曲线 $2x^2+y^2=1$.

八. 设 $\overset{\frown}{AO}$ 由点 $A(a,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$，计算：

（1）$I_1=\int_{\overset{\frown}{AO}}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$；

（2）$I_2=\int_{\overset{\frown}{AO}}(\mathrm{e}^x\sin y-m)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-mx)\mathrm{d}y$；

（3）$I_3=\int_{\overset{\frown}{AO}}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-mx)\mathrm{d}y$.

(1) 设 $\overline{OA}$：$y=0$，$x: 0\to a$. 则 设 $\overline{OA}$ 与 $\overset{\frown}{AO}$ 围成区域为 D.

$\int_{\overline{OA}} (e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy = 0+0=0$

$\int_{\overset{\frown}{AO}}+\int_{\overline{OA}} (e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy = \iint_D m\,dxdy = m\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi(\frac{a}{2})^2$

$= \frac{\pi}{8}ma^2$

$\therefore I_1 = \frac{\pi m a^2}{8}$

(2) $\int_{\overline{OA}} (e^x\sin y-m)dx+(e^x\cos y-mx)dy = \int_0^a -m\,dx = -ma$

$\int_{\overset{\frown}{AO}+\overline{OA}} (e^x\sin y-m)dx+(e^x\cos y-mx)dy = -\iint_D m\,dxdy = -\frac{\pi m}{8}a^2$

$\therefore I_2 - ma = -\frac{\pi m a^2}{8}$，$I_2 = ma-\frac{\pi m a^2}{8}$

(3) $\frac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y-my) = \frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y-mx) = e^x\cos y-m$.

$\therefore$ 曲线积分与路径无关.

$I_3 = \int_{\overline{AO}} (e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-mx)dy = 0+0=0$.

§9.2 曲面积分

一.填空题（一）

1．设Σ为 $z=xy$ 由圆柱面 $x^2+y^2=a^2\,(a>0)$ 所截下的有限曲面，

则 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{1+x^2+y^2}}=$ $\iint\limits_{D} dx\,dy=\pi a^2$.　$dS=\sqrt{1+y^2+x^2}\,dxdy$

2．设Σ是椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}=1$，其面积为 A，

则曲面积分 $\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}(2xy+6x^2+4y^2+3z^2)\mathrm{d}S=$ $0+\iint\limits_{\Sigma}12\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right)dS=12\iint\limits_{\Sigma}dS=12A$.

3．设Σ是平面 $x+y+z=6$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 所截下的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S=$ $\iint\limits_{D}(6-x-y)\sqrt{3}\,dxdy=6\sqrt{3}\iint\limits_{D}dxdy$ $=6\sqrt{3}\pi$.

4．设Σ为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\,(a>0)$，则 $\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}(\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{=a^2})\mathrm{d}S=$ $4\pi a^4$ ；

$\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=$ $\frac{4}{3}\pi a^4$ ；$\oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{2}\right)\mathrm{d}S=$ $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\times\frac{4}{3}\pi a^4=\frac{13}{12}\pi a^4$.

二、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(2x+2y+z)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是平面 $2x+2y+z-2=0$ 在第一卦限的部分.

$\Downarrow$

$x+y+\frac{z}{2}=1$

$$I=\iint\limits_{D}2\cdot\sqrt{1+2^2+2^2}\,dxdy=6\iint\limits_{D}dxdy$$

$$=6\times\frac{1}{2}=3$$

三、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(2x+3y+4z)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

$$I = 0+0+4\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dxdy$$

$$= 4R\iint\limits_{D_{xy}}dxdy = 4R * \pi R^2 = \underline{4\pi R^3}$$

四、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是

1．锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域的整个边界;

2．锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$ 被平面 $z=0$ 和 $z=3$ 所截得的部分.

1. $$I = \iint\limits_{\Sigma_{锥}}(x^2+y^2)\,dS + \iint\limits_{\Sigma_{顶}}(x^2+y^2)\,dS$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy + \iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\,dxdy$$

$$= (1+\sqrt{2})\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\,dxdy$$

$$= (1+\sqrt{2})\cdot\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\cdot\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$$

2. $z=3$ 时 $x^2+y^2=3$，$z=\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$，

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy = 2\,dxdy$$

$$\therefore I = \iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot 2\,dxdy = \cancel{2\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho^2\cdot\rho\,d\rho = \underline{9\pi}$$