

10.2.1 幂级数（收敛半径收敛域）

基础过关

一、填空题

1. 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{x-3}{2} \right)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，则在 $x=5$ 处_____。（收敛，发散）

2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 2$ ，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径为_____。

3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$ 的收敛域是_____。

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为3，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间是_____。

5. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (x-5)^n$ 的收敛域为_____。

二、试确定下列各幂级数的收敛域

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ ；

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{3^n n}$ ；

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n^2}$ ；

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{4^n n}$.

能力提升

一、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则 $x = \sqrt{3}$ 与 $x = 3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^n$ 的 ()

A. 收敛点, 收敛点 B. 收敛点, 发散点 C. 发散点, 收敛点 D. 发散点, 发散点

二、已知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^{-nx}$ 的收敛域为 $(a, +\infty)$, 则 $a =$ _____.

三、设有级数 $(a) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{4^{n-4}} x^n$, 已知 (a) 的收敛域为 $[1, 5)$, 求:

(1) x_0 ; (2) (b) 的收敛半径.

延伸探究

一、(1) 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 x^n$ 的收敛域为 $[-1, 1]$, 求证: 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} x^n$ 的收敛域也为 $[-1, 1]$.

(2) 试问命题 (1) 的逆命题是否正确? 若正确, 给出证明; 若不正确, 举一反例说明.