§7.5 多元函数的极值

一、选择题

1. 点(x_0,y_0)使$f_x'(x,y)=0$且$f_y'(x,y)=0$成立，则（ D ）

A. (x_0,y_0)是$f(x,y)$的极值点　　B. (x_0,y_0)是$f(x,y)$的最小值点

C. (x_0,y_0)是$f(x,y)$的最大值点　　D. (x_0,y_0)可能是$f(x,y)$的极值点

2. 函数$z=xy(1-x-y)$的极值点是（ C ）

驻点$(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$　$A=-\frac{2}{3}$，$B=-\frac{1}{3}$，$C=-\frac{1}{3}$　$AC-B^2>0$，$A<0$

A. $(\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$　　B. $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$　　C. $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$　　D. $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$

3. 已知函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某个邻域内连续，且$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则（ A ）

$f(x,y)-xy=\rho^4+o(\rho^4)$

$f(x,y)=xy+\rho^4+o(\rho^4)$

~~令y=x~~，$f(x,x)=x^2+\cdots>0$

$f(x,-x)=-x^2\ldots$

（x充分小时）

另解：在$(0,0)$充分小邻域

$\frac{1}{2}<\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}<\frac{3}{2}$

$\Rightarrow xy+\frac{1}{2}\rho^4<f(x,y)<xy+\ldots$

(A)点$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点　　(B)点$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点

(C)点$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点　　(D)根据所给条件无法判断点$(0,0)$是否为$f(x,y)$的极值点

二.求下列函数的极值

1. $z=x^3+y^3-3x^2-3y^2$

$\begin{cases} z_x=3x^2-6x=0 \\ z_y=3y^2-6y=0 \end{cases}\Rightarrow \begin{matrix} x=0,2 \\ y=0,2 \end{matrix}$，$\Rightarrow$ 驻点 $(0,0)$，$(0,2)$，$(2,0)$，$(2,2)$

$A=6(x-1)$，$B=0$，$C=6(y-1)$

$AC-B^2=36(x-1)(y-1)$

$\because AC-B^2\big|_{(0,0)}=36>0$，$A\big|_{(0,0)}=-6<0$，有极大值$f(0,0)=0$

$AC-B^2\big|_{(0,2)}<0$　$AC-B^2\big|_{(2,0)}=-36<0$，$\therefore (0,2)$和$(2,0)$不是极值点

$AC-B^2\big|_{(2,2)}=36>0$，$A\big|_{(2,2)}=6>0$，$\therefore$有极小值$f(2,2)=-8$.

2. $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$

$\begin{cases} f_x=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0 \\ f_y=e^{2x}(2y+2)=0 \end{cases}\Rightarrow$ 驻点 $(\frac{1}{2},-1)$.

$A=f_{xx}\big|_{(\frac{1}{2},-1)}=e^{2x}(4x+4y^2+8y+4)=2e>0$.

$B=f_{xy}\big|_{(\frac{1}{2},-1)}=e^{2x}(4y+4)\big|_{(\frac{1}{2},-1)}=0$

$C=f_{yy}\big|_{(\frac{1}{2},-1)}=2e^{2x}\big|_{(\frac{1}{2},-1)}=2e$，　$\therefore AC-B^2=4e^2>0$.

$\therefore$ 极小值$f(\frac{1}{2},-1)=-\frac{e}{2}$

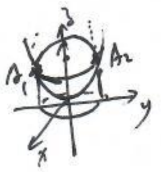
三. 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 在闭域 $x^2+y^2\le 1$ 内的最大值和最小值，并对上述计算结论作出几何解释.

$f(x,y)$ 的驻点为 $(0,0)$，~~边界~~ 闭域的边界为 $x^2+y^2=1$.

在边界上 $f(x,y)=2-x^2$ 或即 $1+y^2$，由于 $0\le x^2\le 1$，$0\le y^2\le 1$，

就有 $1\le f(x,y)\le 2$，与 $f(0,0)$ 作比较得最小值为 $f(0,0)=0$

最大值为 $f(0,\pm1)=2$



几何上，意指：椭圆抛物面被圆柱面 $x^2+y^2\le 1$ 所截得部分的最低点在坐标原点，最高点在边界上的 $A_1(0,1,2)$，$A_2(0,-1,2)$ 两点处.

四. 设 $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^n$ 是不在同一直线上的 n 个点，

（1）求出函数 $f(x,y)=\sum_{i=1}^n[b_i-(xa_i+y)]^2$ 的驻点；

（2）用二阶导数的方法证明这个驻点是函数的极小值点；

（3）说明这个极小值点也是这个函数的最小值点.

(1) 从 $\begin{cases} f_x=-2\sum_{i=1}^n(b_i-xa_i-y)a_i=0 \\ f_y=-2\sum_{i=1}^n(b_i-xa_i-y)=0 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x\sum_{i=1}^n a_i^2+y\sum_{i=1}^n a_i=\sum_{i=1}^n a_ib_i \\ x\sum_{i=1}^n a_i+ny=\sum_{i=1}^n b_i \end{cases}$

$\therefore$ 驻点为 $x=\dfrac{n\sum_{i=1}^n a_ib_i-\sum_{i=1}^n a_i\sum_{i=1}^n b_i}{n\sum_{i=1}^n a_i^2-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2}$，$y=\dfrac{\sum_{i=1}^n a_i^2\sum_{i=1}^n b_i-\sum_{i=1}^n a_ib_i\sum_{i=1}^n b_i}{n\sum_{i=1}^n a_i^2-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2}$

(2) $f_{xx}=2\sum_{i=1}^n a_i^2$，$f_{xy}=2\sum_{i=1}^n a_i$，$f_{yy}=2n$

柯西不等式b_i=1 $f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2=4\left(n\sum_{i=1}^n a_i^2-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\right)>0$，且 $f_{xx}>0$，$\therefore$ 此驻点取极小

(3) 因为 $f(x,y)\ge 0$，$\therefore$ 最小值一定存在，而驻点唯一，(为椭圆抛物面)

故这个点作为最小值点.

五、设有曲线 $L:\begin{cases} z=x^2+3y^2, \\ z=4-3x^2-y^2, \end{cases}$ 求 L 在 xOy 平面上的投影，并求 L 上的 z 坐标的最大值和最小值.

L 方程消去 z 得 $x^2+3y^2=4-3x^2-y^2 \Rightarrow x^2+y^2=1$，∴投影为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

最值的求法一，消去 x 得

$$z=1+2y^2 \quad (-1\le y\le 1)\text{. } \therefore z_{max}=3,\ z_{min}=1.$$

求法二. 即求 $z=x^2+3y^2$（或 $z=4-3x^2-y^2$）在条件 $x^2+y^2=1$ 下极值.

令 $L=x^2+3y^2+\lambda(x^2+y^2-1)$

求法三. ~~[illegible]~~ 令 $L=z+\lambda(z-x^2-3y^2)+\mu(3x^2+y^2+z-4)$

六、在 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短.

解法一. 点 $M(x,y)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}}$

令 $F(x,y,\lambda)=(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4)$

由 $\begin{cases} F_x=4(2x+3y-6)+2\lambda x=0 & ① \\ F_y=6(2x+3y-6)+8\lambda y=0 & ② \\ x^2+4y^2-4=0 & ③ \end{cases}$

由①.②得 $x=\frac{8}{3}y$ 代入③得 $(\frac{8}{5},\frac{3}{5}),(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5})$.

由于 d_{max} 和 d_{min} 一定存在，因 $d(\frac{8}{5},\frac{3}{5})<d(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5})$. 故在点 $(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$ 处距离最短.

解法二. 所求问题为椭圆 $x^2+4y^2=4$ 到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最近问题，只需作椭圆的平行于已知直线的切线，设切点为 (x_0,y_0)，则切线方程为 $x_0x+4y_0y=4$. ∴ $\begin{cases} \dfrac{x_0}{2}=\dfrac{4y_0}{3} \\ x_0^2+4y_0^2=4 \end{cases} \Rightarrow (x_0,y_0)=\pm(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$

根据直线所在位置知，所求点为 $(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$.

七、在已给的椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$内一切内接的长方体（各棱分别平行坐标轴）中，求其体积最大者.

设 x,y,z 为长方体在第一卦限中的顶点坐标，则

$V=8xyz$，满足条件 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

作 $L=8xyz+\lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)$

$$\begin{cases} L_x=8yz+\dfrac{2x}{a^2}\lambda=0 \\ L_y=8zx+\dfrac{2y}{b^2}\lambda=0 \\ L_z=8xy+\dfrac{2z}{c^2}\lambda=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}\lambda=-4xyz \\ \dfrac{y^2}{b^2}\lambda=-4xyz \\ \dfrac{z^2}{c^2}\lambda=-4xyz \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2}=\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow x=\dfrac{a}{\sqrt3},\ y=\dfrac{b}{\sqrt3},\ z=\dfrac{c}{\sqrt3}$$

这是唯一解，而最大值一定存在，故 $V_{max}=8\cdot\dfrac{a}{\sqrt3}\cdot\dfrac{b}{\sqrt3}\cdot\dfrac{c}{\sqrt3}=\dfrac{8}{3\sqrt3}abc$

八、欲造一无盖的长方体容器，已知底部造价为每平方米 3 元，侧面造价均为每平方米 1 元，现想用 36 元造一个容积最大的容器，求它的尺寸.

设容器的长、宽、高分别为 x,y,z（米），$(x>0,\ y>0,\ z>0)$

问题归结为求 $V=xyz$ 在条件 $3xy+2yz+2xz=36$ 时的最大值.

令 $L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(3xy+2yz+2xz-36)$

则
$$\begin{cases} L_x=yz+3\lambda y+2\lambda z=0 \\ L_y=xz+3\lambda x+2\lambda z=0 \\ L_z=xy+2\lambda y+2\lambda x=0 \\ 3xy+2yz+2xz-36=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xyz+\lambda(3xy+2xz)=0 \\ xyz+\lambda(3xy+2yz)=0 \\ xyz+\lambda(2yz+2xz)=0 \end{cases}$$

前两式 $\Rightarrow x=y$；后两式 $\Rightarrow 3xy=2xz \Rightarrow z=\dfrac{3}{2}x$

将 $y=x,\ z=\dfrac{3}{2}x$ 代入 $3xy+2yz+2xz=36$ 得 $x=y=2,\ z=3$，$(2,2,3)$是唯一驻点，

根据实际问题，最大值一定存在，故所求最大容器长2米，宽2米，高3米.

自测题二（多元函数的微分学）

一、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1、$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3xy}{\sqrt{xy+1}-1}=$(B)

A、3，　　B、6　　C、不存在但不是无穷大，　　D、∞

2、若 $\dfrac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)}=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}|_{(x_0,y_0)}=0$，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0)(D)

A、连续且可微，　B、连续但不一定可微 C、可微但不一定连续

D、不一定可微也不一定连续。（）

3、$z=$ ~~$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微且 $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$~~，则 $z=f(x,y)$ 在 ~~(x_0,y_0)~~

~~处(　　)~~　设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2y)}{xy}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$，则 $f_x(0,1)=$ (B)

A、~~无极值 B、可能有极值，也可能没有 C、有极大值 D、有极小值~~（　　）A. 0，B. 1，C. 2，D. 不存在

4、二元函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微的一个必要条件是(A)　　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,1)-f(0,1)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)-0}{x^2}=1$.

A、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(f(x,y)-f(0,0))=0$　B、$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$

C、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$　D、$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 偏导数存在且连续

5.曲线 $\begin{cases}y=1-2x,\\ z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}x^2\end{cases}$ $(1,-2,-5)$ 在点 $(1,-1,-2)$ 处 切线与直线 $\begin{cases}5x-3y+3z-9=0,\\ 3x-2y+z-1=0\end{cases}$ $(3,4,-1)$ 的夹角 $\varphi=$（ D ）

A.0　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}=$ __0__

2、设 f 有一阶连续偏导数，$z=f(x^2-y^2,\mathrm{e}^{xy})$，则 $\mathrm{d}z=$ $(2xf_1'+ye^{xy}f_2')dx+(-2f_1'+xe^{xy}f_2')dy$

3、设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{f(x,y)-2x-3y}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$ 则 $\mathrm{d}z|_{(0,1)}=$ _2_ $dx+3dy$

可知 $f(0,1)=3$，

$0=\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{[f(x,y)-3]-2x-3(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$

4、$F(x,y)=\int_0^{xy}\dfrac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$，则 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}|_{(0,2)}=$ __4__

$F_x=y\dfrac{\sin xy}{1+(xy)^2}$

5、$u=(\dfrac{x}{y})^{\frac{1}{z}}$ 在 $(1,1,1)$ 的梯度为 $(1,-1,0)$

$F_{xx}=y\cdot\dfrac{y\cos(xy)(1+x^2y^2)-\sin(xy)\cdot 2xy^2}{(1+x^2y^2)^2}$，

二、解下列各题（每题 10 分，共 40 分）

1、设 $z=x^{x^y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$

$$\ln z = x^y \ln x$$

$$\therefore \frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial x^y}{\partial x}\cdot \ln x + \frac{1}{x}\cdot x^y = (1+y\ln x)x^{y-1},$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = (1+y\ln x)\, x^{x^y+y-1}$$

类似可得 $\frac{\partial z}{\partial y} = x^{x^y+y} + \ln^2 x$

2、设 $x^2+z^2=y\varphi(\frac{z}{y})$，其中 φ 为可微函数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$

令 $F(x,y,z) = x^2+z^2-y\varphi(\frac{z}{y})$

$$F_y = -\varphi + \frac{z}{y}\varphi', \quad F_z = 2z-\varphi'$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{\varphi - \frac{z}{y}\varphi'}{2z-\varphi'}$$

3、求由方程组$\begin{cases} u+v=x \\ u^2+v^2=y \end{cases}$所确定的函数$u=u(x,y)$的二阶偏导数$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

$u_x = -\dfrac{v}{u-v}$ $u_y = \dfrac{+1}{2(u-v)}$, $v_x = \dfrac{u}{u-v}$, $v_y = \dfrac{-1}{2(u-v)}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{v-u}\right) = \frac{v_y(v-u)-v(v_y-u_y)}{(u-v)^2} = \frac{u+v}{2(u-v)^3}$$

4、求由方程$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$所确定的函数$z=z(x,y)$的极值.

令 $F = x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$

则 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z} = -\dfrac{x-1}{z-2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z} = -\dfrac{y+1}{z-2}$

令 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$ 得 $x=1$, $y=-1$, 又当 $x=1$, $y=-1$ 时, 原方程为 $z^2-4z-12=$

故得两点 $(1,-1,-2)$ 及 $(1,-1,6)$, 计算得

$A=8$, $B=0$, $C=-\dfrac{1}{z-2}$, 故 $AC-B^2=\dfrac{1}{(z-2)^2}>0$.

故 $(1,-1)$为极小值点. 极值-2, $(1,-1)$为极大值

极大值6.

三、解下列各题（每题 10 分，共 30 分）

1、试证光滑曲面$F(z-x,y-z)=0$所有切平面都与一固定的非零向量平行.

令 $G(x,y,z) = F(z-x, y-z)$.

法向量 为 $\vec{n} = (G_x, G_y, G_z) = (-F_1', F_2', F_1'-F_2')$

因此 $\vec{n} \cdot (1,1,1) = 0$.

这说明该光滑曲面所有法向量都与向量$(1,1,1)$垂直,

（即所有切平面都与$(1,1,1)$平行）. 柱面?

2、设 $u=x+2y+2, v=x-y-1$， $z=z(x,y)$ 有二阶连续偏导数，变换方程

$2z_{xx}+z_{xy}-z_{yy}+z_x+z_y=0$.

$z_x = z_u \cdot u_x + z_v \cdot v_x = z_u + z_v$. $z_y = z_u \cdot u_y + z_v \cdot v_y = 2z_u - z_v$

$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} z_u + \frac{\partial}{\partial x} z_v = (z_{uu} \cdot u_x + z_{uv} \cdot v_x) + (z_{vu} \cdot u_x + z_{vv} \cdot v_x) = z_{uu} + 2z_{uv} + z$

$z_{xy} = (z_{uu} \cdot u_y + z_{uv} \cdot v_y) + (z_{vu} \cdot u_y + z_{vv} \cdot v_y) = 2z_{uu} + z_{uv} - z_{vv}$

$z_{yy} = 2(z_{uu} \cdot u_y + z_{uv} \cdot v_y) - (z_{vu} \cdot u_y + z_{vv} \cdot v_y) = 4z_{uu} - 4z_{uv} + z$

$2z_{xx} + z_{xy} - z_{yy} + z_x + z_y = 9z_{uv} + 3z_u = 0$

$\therefore \underline{3z_{uv} + z_u = 0}$

3、设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，且 $x=r\sin\theta\cos\varphi$， $y=r\sin\theta\sin\varphi$， $z=r\cos\theta$，证明：若 $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$，则 u 与 r 无关

$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cancel{\sin\theta\cos\varphi} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r}$

$= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \sin\theta\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \sin\theta\sin\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\theta$

$= \frac{1}{r}\left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{1}{r} \cdot 0 = 0$

$\therefore$ u与r无关. #