

自测题二(多元函数的微分学)

一、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{3xy}{\sqrt{xy+1}-1} = (\quad)$.

- A. 3
B. 6
C. 不存在但不是无穷大
D. ∞

2. 若 $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = 0, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = 0$, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处().

- A. 连续且可微
B. 连续但不一定可微
C. 可微但不一定连续
D. 不一定可微也不一定连续

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{\ln(1+x^2y)}{xy}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0, \end{cases}$ 则 $f_x(0,1)=(\quad)$.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 不存在

4. 二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的一个必要条件是().

A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} [f(x,y) - f(0,0)] = 0$

$$\text{B. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0$$

$$\text{C. } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

D. $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处偏导数存在且连续

5. 曲线 $\begin{cases} y=1-2x, \\ z=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}x^2 \end{cases}$ 在点 $(1, -1, -2)$ 处的切线与直线 $\begin{cases} 5x-3y+3z-9=0, \\ 3x-2y+z-1=0 \end{cases}$ 的夹角

φ 为().

- A. 0 B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

二、填空题(每题 3 分,共 15 分)

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 设 $f(x, y)$ 有一阶连续偏导数, $z = f(x^2 - y^2, e^{xy})$, 则 $dz =$ _____.

3. 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{f(x,y)-2x-3y}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$, 则 $dz|_{(0,1)} =$ _____.

4. 若 $F(x, y) = \int_0^{xy} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$, 则 $\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{(0,2)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. $u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$ 在 $(1, 1, 1)$ 处的梯度为_____.

二、解下列各题(每题 10 分,共 40 分)

1. 设 $z = x^{x^y}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设 $x^2 + z^2 = y\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$, 其中 φ 为可微函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 求由方程组 $\begin{cases} u+v=x, \\ u^2+v^2=y \end{cases}$ 所确定的函数 $u=u(x,y)$ 的二阶偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

2. 已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$, 曲线 $C: x^2+y^2+xy=3$, 求 $f(x,y)$ 在 C 上的最大方向导数.

4. 求由方程 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

3. 当 $x>0, y>0, z>0$ 时, 求函数 $\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 上的极大值. 并证明对任意实数 a,b,c , 不等式 $ab^2c^3 \leq 108 \left(\frac{a+b+c}{6} \right)^6$ 成立.

三、解下列各题 (每题 10 分, 共 30 分)

1. 试证光滑曲面 $F(z-x, y-z)=0$ 的所有切平面都与一固定的非零向量平行.