8.3.1 直角坐标系下的三重积分

基础过关

一、

1． $4\pi R^3.$

2． $\frac{1}{24}(b^2-a^2)(d^3-c^3)(m^4-l^4).$

3． $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{2x^2+3y^2}^{3-x^2}f(x,y,z)\mathrm{d}z.$

二、（1） $\frac{1}{24}$；（2） $\frac{1}{4}.$

三、 $256,\frac{4^5}{3}.$

能力提升

一、
$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-1}^{1}f(z)\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-1}^{1}f(z)\pi(1-z^2)\mathrm{d}z$$
$$=\pi\int_{-1}^{1}f(u)(1-u^2)\mathrm{d}u.$$

延伸拓展

一、令 $F(u)=\int_0^u f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F(0)=0, F(1)=m, F'(u)=f(u)$, 由于
$$\int_x^y f(z)\mathrm{d}z=F(u)|_x^y=F(y)-F(x),$$
$$\int_x^1 f(y)[F(y)-F(x)]\mathrm{d}y=\int_x^1[F(y)-F(x)]\mathrm{d}F(y)$$
$$=\int_x^1F(y)\mathrm{d}F(y)-\int_x^1F(x)\mathrm{d}F(y)=\frac{1}{2}F^2(y)|_x^1-F(x)F(y)|_x^1$$
$$=\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}F^2(x)-mF(x),$$ 于是

原式 $=\int_0^1 f(x)[\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}F^2(x)-mF(x)]\mathrm{d}x=\int_0^1[\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}F^2(x)-mF(x)]\,\mathrm{d}F(x)$

$$=[\frac{1}{2}m^2F(x)+\frac{1}{6}F^3(x)-\frac{1}{2}mF^2(x)]|_0^1=\frac{1}{2}m^3+\frac{1}{6}m^3-\frac{1}{2}m^3=\frac{1}{6}m^3.$$