一类中值问题的行列式解法

苏化明， 禹春福
（合肥工业大学 数学学院，合肥 230009）

［摘　要］通过行列式的形式构造辅助函数，用来求解与微分中值定理有关的一类存在性问题.

［关键词］微分中值定理；辅助函数；行列式
［中图分类号］O172　［文献标识码］C　［文章编号］1672-1454(2013)02-0143-04

高等数学一元函数微分学中有一类存在性问题，即要求证明在某区间内存在一点，使得在该点处某等式成立. 这一类问题往往需要构造辅助函数然后借助微分中值定理进行求解. 大家知道，辅助函数的构造方法有很多种，本文要介绍的是构造辅助函数的方法之一——行列式法，即辅助函数是用行列式的形式表示的. 这种方法的优点是可以借助行列式的性质构造辅助函数并进行相关计算，解题过程较为直观和简洁.

下面我们以实例形式对这种方法做出说明.

例 1[1]　设 $f(x)$ 三阶可导，且 $f(1)=-1$ 是其极小值，而 $f(-1)=3$ 是其极大值. 证明：存在 $\xi\in(-1,1)$，使 $f'''(\xi)=6$.（陕西省第九次大学生高等数学竞赛复赛试题，2012 年）

证　由于函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 及 $x=1$ 处的导数均为 0，即 $f'(-1)=f'(1)=0$，又 $f(-1)=3$，$f(1)=-1$，故可构造辅助函数

$$\varphi(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & x^3 & f(x)\\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0\end{vmatrix}.$$

易知 $\varphi(x)$ 三阶可导且有 $\varphi(-1)=\varphi(1)=0$，$\varphi'(-1)=\varphi'(1)=0$.

由 Rolle 定理知，存在 $\eta\in(-1,1)$，使 $\varphi'(\eta)=0$. 再反复运用 Rolle 定理知，存在 $\xi\in(-1,1)$，使 $\varphi'''(\xi)=0$，即

$$\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 6 & f'''(\xi)\\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0\end{vmatrix}=0.$$

利用行列式的性质展开上式左端即得 $f'''(\xi)=6$.

注　本例的参考答案是通过构造满足条件 $P_3(1)=f(1)=-1$，$P_3(-1)=f(-1)=3$，$P_3'(1)=f'(1)=0$，$P_3'(-1)=f'(-1)=0$ 的三次多项式 $P_3(x)$，进而构造辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-P_3(x)$ 再利用 Rolle 定理求解的.

［收稿日期］2011-03-08
［基金项目］高等学校大学数学教学研究与发展中心教学改革项目

例2[2] 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在二阶导数且 $f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)=-1$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)\geqslant 8$.（前苏联大学生数学竞赛题，1977年）

证 设 $f(x_0)=,\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x)=1$，由于 $f(0)=f(1)=0$，故 $x_0\in(0,1)$. 构造辅助函数

$$\varphi(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & f(x)\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & x_0 & x_0^2 & -1\end{vmatrix},$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导且 $\varphi(0)=\varphi(1)=\varphi(x_0)=0$. 反复运用 Rolle 定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使 $\varphi''(\xi)=0$，即

$$\begin{vmatrix}0 & 0 & 2 & f''(\xi)\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & x_0 & x_0^2 & -1\end{vmatrix}=0,$$

由此可得 $f''(\xi)=\dfrac{2}{x_0(1-x_0)}$.

由于 $x_0>0,1-x_0>0$，所以

$$x_0(1-x_0)\leqslant\left[\frac{1}{2}(x_0+1-x_0)^2\right]=\frac{1}{4},$$

因此 $f''(\xi)\geqslant 8$.

例3[3] 假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，过点 $A(0,f(0))$ 与 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))$，其中 $0<c<1$. 证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.（全国硕士研究生入学考试题，1993年）

证 构造辅助函数

$$\varphi(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & f(x)\\ 1 & 0 & 0 & f(0)\\ 1 & 1 & 1 & f(1)\\ 1 & c & c^2 & f(c)\end{vmatrix},$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导且有 $\varphi(0)=\varphi(1)=\varphi(c)=0$. 反复运用 Rolle 定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使 $\varphi''(\xi)=0$，即

$$\begin{vmatrix}0 & 0 & 2 & f''(\xi)\\ 1 & 0 & 0 & f(0)\\ 1 & 1 & 1 & f(1)\\ 1 & c & c^2 & f(c)\end{vmatrix}=0,$$

或

$$\begin{vmatrix}0 & 0 & 2 & f''(\xi)\\ 1 & 0 & 0 & f(0)\\ 0 & 1 & 1 & f(1)-f(0)\\ 0 & c & c^2 & f(c)-f(0)\end{vmatrix}=0$$

即

$$\begin{vmatrix}0 & 2 & f''(\xi)\\ 1 & 1 & f(1)-f(0)\\ c & c^2 & f(c)-f(0)\end{vmatrix}=0.$$

因为 $A(0,f(0)),B(1,f(1)),C(c,f(c))$ 三点共线，所以 $f(c)-f(0)=c[f(1)-f(0)]$，代入上式并化简，得

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & f''(\xi) \\ 1 & 1 & f(1)-f(0) \\ 1 & c & f(1)-f(0) \end{vmatrix}=0.$$

将上式左端行列式展开后即可得到 $f''(0)=0$.

例 4[4,5]　设 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上三次可微，证明：存在实数 $\xi\in(-1,1)$，使得

$$\frac{f'''(\xi)}{6}=\frac{f(1)-f(-1)}{6}-f'(0).$$

（第十二届国际大学生数学竞赛题，2005 年；第十八届北京市大学生数学竞赛题，2007 年）

证　构造辅助函数

$$\varphi(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & f(x) \\ 1 & -1 & 1 & -1 & f(-1) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & f(1) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & f(0) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & f'(0) \end{vmatrix},$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[-1,1]$ 上三次可微，且 $\varphi(-1)=\varphi(0)=\varphi(1)=0$，$\varphi'(0)=0$.

由 Rolle 定理知，存在 $\xi_1\in(-1,0)$，$\xi_2\in(0,1)$，使 $\varphi'(\xi_1)=0$，$\varphi'(\xi_2)=0$. 再反复运用 Rolle 定理知，存在 $\xi\in(-1,1)$，使 $\varphi'''(\xi)=0$，即

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & f'''(\xi) \\ 1 & -1 & 1 & -1 & f(-1) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & f(1) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & f(0) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & f'(0) \end{vmatrix}=0.$$

上面行列式按第 4 行展开，得

$$-\begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 & f'''(\xi) \\ -1 & 1 & -1 & f(-1) \\ 1 & 1 & 1 & f(1) \\ 1 & 0 & 0 & f'(0) \end{vmatrix}-f(0)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

但 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$，故

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 & f'''(\xi) \\ -1 & 1 & -1 & f(-1) \\ 1 & 1 & 1 & f(1) \\ 1 & 0 & 0 & f'(0) \end{vmatrix}=0.$$

行列式按第 1 行展开得

$$6[f(1)-f(-1)-2f'(0)]-2f'''(\xi)=0,$$

故

$$\frac{f'''(\xi)}{6}=\frac{f(1)-f(-1)}{2}-f'(0).\tag{1}$$

注　(i) 特别在(1)中取 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，则 $f'''(\xi)=3$，即得全国硕士研究生 1999 年入学考试试题的结论.

(ii) 类似问题还有：

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-\delta,\delta]$ $(\delta>0)$ 上具有三阶连续导数，且 $f(-\delta)=-\delta$，$f(\delta)=\delta$，$f'(0)=0$. 证明：在开区间 $(-\delta,\delta)$ 内至少存在一点 ξ，使 $\delta^2 f'''(\xi)=6$. （陕西省第四次大学生高等数学竞赛题，2001

年）

例 5[4,6]　设 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在，$a<c<b$，证明在 (a,b) 内存在一点 ξ，使

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

（四川大学研究生入学考试题，2005 年；中央财经大学高等数学竞赛题，2010 年）

证　作辅助函数

$$\varphi(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & f(x)\\ 1 & a & a^2 & f(a)\\ 1 & c & c^2 & f(c)\\ 1 & b & b^2 & f(b)\end{vmatrix},$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导且 $\varphi(a)=\varphi(c)=\varphi(b)=0$，反复运用 Rolle 定理知，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $\varphi''(\xi)=0$，即

$$\begin{vmatrix}0 & 0 & 2 & f''(\xi)\\ 1 & a & a^2 & f(a)\\ 1 & c & c^2 & f(c)\\ 1 & b & b^2 & f(b)\end{vmatrix}=0.$$

行列式按第 1 行展开，得

$$2\begin{vmatrix}1 & a & f(a)\\ 1 & c & f(c)\\ 1 & b & f(b)\end{vmatrix}-f''(\xi)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & c & c^2\\ 1 & b & b^2\end{vmatrix}=0,$$

即

$$2[(b-c)f(a)+(a-b)f(c)+(c-a)f(b)]-f''(\xi)(b-a)(b-c)(c-a)=0,$$

因此

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}=\frac{1}{2}f''(\xi). \tag{2}$$

注　**特别在**(2)**中令** $c=\dfrac{a+b}{2}$，**则有**

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi),$$

此即 2005 年天津市大学生数学竞赛题，也是 2005 年大连理工大学研究生入学考试题.

[参　考　文　献]

[1]　陕西省第九次大学生高等数学竞赛复赛试题[J]. 高等数学研究，2012，15(6)：封 3.

[2]　许康，陈强，陈挚，等编译. 前苏联大学生奥林匹克竞赛题解(上篇)[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012：145.

[3]　《大学数学》编辑部. 硕士研究生入学考试数学试题精解[M]. 合肥：合肥工业大学出版社，2012：80－81.

[4]　李心灿，季文铎，孙洪祥，等. 大学生数学竞赛试题解析选编[M]. 北京：机械工业出版社，2011：255，488.

[4]　王丽萍，编译. 国际大学生数学竞赛试题集[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012：118－119.

[4]　叶国菊，赵大方. 数学分析学习与考研指导[M]. 北京：清华大学出版社，2009：84，80.