Programación Lineal

Introducción a la Programación Lineal

¿Qué es la Programación Lineal?

- La programación lineal es una técnica matemática utilizada para optimizar una función lineal sujeta a restricciones lineales.
- La programación lineal es una técnica matemática utilizada para optimizar una función lineal sujeta a un conjunto de restricciones lineales. Se utiliza para resolver problemas de optimización donde el objetivo es maximizar o minimizar una función objetivo, sujeto a ciertas limitaciones o condiciones.

Función Objetivo

- La función objetivo es una expresión lineal que se desea maximizar o minimizar, por ejemplo: $Z = c1*x1 + c2*x2$.

- Donde $c1,c2,\ldots, cn$ son los coeficientes de la función objetivo, y $x1,x2,\ldots,xn$ son las variables de decisión.

Restricciones

- Son limitaciones o condiciones que deben cumplirse, también expresadas en forma lineal.
- as restricciones pueden ser de diferentes tipos, como:
- **Menor o igual que (≤):**
- **Mayor o igual que (≥):**
- **Igualdad (=):**

Dominio de Variables:

- Las variables deben cumplir con restricciones de no negatividad, es decir: $x_i \geq 0$ para $i=1,2,\ldots,n$

Ejemplo Práctico

Una fábrica de muebles produce dos tipos de muebles de comedor que están muy de moda: el América y el Europa.

Dicha fábrica obtiene una utilidad (= precio neto de venta - costos variables de fabricación) de 400 y 480 euros de la venta de un comedor América y un comedor Europa respectivamente.

Como se ha producido una alta demanda de ambos modelos, el gerente general cree que puede vender todos los comedores que se produzcan.

Los comedores requieren tiempo de proceso de construcción y de pintura.

Si los requerimientos y capacidades de producción diarios son los que se muestran a continuación, determinar cuántos comedores se deben fabricar para vender.

Recursos requeridos para producir 1 unidad	PRODUCTO América	Europa	Recursos disponibles (capacidad)
tiempo de construcción (en horas)	6	12	120
tiempo de pintura (en horas)	8	4	64
utilidad unitaria	400	480	

Solución:

Vamos a buscar un modelo matemático que describa esta situación. Los pasos a seguir son los siguientes:

1. En primer lugar hay que identificar las variables de decisión del problema. En este caso llamaremos:

   x_1= nº de comedores del modelo América
   x_2= nº de comedores del modelo Europa

2. Buscar la función objetivo. En este caso lo que queremos es maximizar la utilidad. Dicha utilidad depende del nº de comedores de cada tipo que se fabriquen, por lo tanto, el objetivo será:

   Maximizar $z = 400x_1 + 480x_2$

3. Encontrar las restricciones. Como los recursos de que disponemos (horas disponibles en cada una de las secciones) no son ilimitados, la producción estará también limitada por esta escasez de recursos. Tendremos que: El tiempo de proceso diario de ambos comedores en las secciones de construcción y pintura, no puede exceder el tiempo total disponible en cada una de ellas. Es decir:

   - En la sección de construcción: el nº total de horas requerido en esta sección, que es, el nº de horas requerido para la construcción de cada comedor América (6) por el nº de comedores América que se construyan, más el nº de horas requerido para la construcción de cada comedor Europa (12) por el nº de comedores Europa que se construyan, debe ser menor o igual que el nº de horas disponibles (capacidad) en esta sección.

   E. d: $6x_1 + 12x_2 \leq 120$

   Análogamente para la sección de pintura:

   $8x_1 + 4x_2 \leq 64$

4. Condición de no negatividad: Esta es otra restricción, ya que el nº de comedores de cada tipo que se fabriquen, será como mínimo cero. Por lo tanto: x_1, $x_2 \geq 0$.

   Entonces, el modelo será:

$$\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & z = 400x_1 + 480x_2 \\ \text{sujeto a} & 6x_1 + 12x_2 \leq 120 \\ & 8x_1 + 4x_2 \leq 64 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Una empresa de dietética desea crear unas raciones de frutas mediar fruta de dos tipos: tipo A y tipo B.

- Cada unidad de fruta de tipo A contiene 3 mg. de vitamina 1 y 6 mg 2.
- Cada unidad de fruta de tipo B contiene 2 mg. de vitamina 1 y 3 mg 2.

La unidad de fruta de tipo A tiene un costo de 5 euros y la de tipo B cue: la unidad.

La meta es diseñar una ración que tenga al menos 36mg. de vitamina vitamina 2, minimizando los costos de su fabricación. Construye un mode mación lineal para la empresa dietética.

Solución:

- Variables de decisión: x_1= nº unidades de fruta A que incluimos en cada ración
  x_2=nº unidades de fruta B que incluimos en cada ración

- Función objetivo: Minimizar los costos de la ración.

$$\text{Minimizar } z = 5x_1 + 20x_2$$

- Restricciones: Vienen dadas por la cantidad mínima de vitaminas que tiene que tener cada ración.
  mg. de vitamina 1: $3x_1 + 2x_2 \geq 36$
  mg. de vitamina 2: $6x_1 + 3x_2 \geq 60$

- Condición de no negatividad: El nº unidades de fruta de cada tipo que se incluyan en la ración debe ser mayor o igual que cero. Por lo tanto: $x_1, x_2 \geq 0$.

Entonces, el modelo es:

$$\text{Minimizar } z = 5x_1 + 20x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s. a:}\quad & 3x_1 + 2x_2 \geq 36 \\ & 6x_1 + 3x_2 \geq 60 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

ejercicio

- La empresa Whitt Windows tiene solo tres empleados que hacen dos tipos de ventanas: con marco de madera y con marco de aluminio, la ganancia es de Q60 por cada ventana con marco de madera y de Q30 por cada una con marco de aluminio. Doug hace marcos de madera, y puede terminar 6 al día, Linda hace 4 marcos de aluminio al día, Bob forma y corta el vidrio y puede hacer 48 pies cuadrados de vidrio por día, cada ventana con marco de madera usa 6 pies cuadrados de vidrio y cada de aluminio usa 8 pies cuadrados de vidrio. La compañía desea determinar cuántas ventanas de cada tipo producir al día para maximizar la ganancia total. a) Formule el modelo de programación lineal?

- la Ápex Televisión debe decidir el numero de televisores de 27” y 20”, producidos en una de sus fabricas, la investigación de mercado indica ventas a lo más 40 televisores de 27” y 10 de 20” cada mes. El número máximo de horas-hombre disponible es de 500 por mes, un televisor de 27” requiere 20 horas-hombre y uno 20” requiere 10 horas-hombre, cada televisor de 27” produce una ganancia de Q 120 y cada uno de 20” da una ganancia de Q 80. Un distribuidor está de acuerdo comprar todos los televisores producidos siempre en cuando no exceda el máximo indicado por el estudio de mercado. a) formule el modelo de programación lineal.