Lineare Algebra
Skript* zur Vorlesung LA10, LA20

Manuel Bodirsky
Institut für Algebra,
manuel.bodirsky@tu-dresden.de

20. Oktober 2023

*Wintersemester 15/16; aufbauend auf einem handschriftlichen Skript von Reinhard Pöschel, mit Änderungen von Andreas Thom im Wintersemester 16/17. Vollständige Überarbeitung fürs Wintersemester 23/24. Ich freue mich über Emails mit Kommentaren und Verbesserungswünschen.

Inhaltsverzeichnis

Organisatorisches

Für die Student:innen

- Übungen
- *aktive* Teilnahme.
- Zusammenarbeit zur Lösungsfindung: empfohlen!
- Aufschreiben: jeder selbst.
- Gegenseitige Kontrolle: gerne in kleinen Gruppen!
- In der Vorlesung: mitschreiben!

Zum Skript

- Blau markiert: Kommentare, Hervorhebungen, Literaturverweise.
- Rot markiert: nachträglich geändert, bzw. Hyperlink.
- *Kursiv gedruckt:* Begriff wird definiert, oder sonst herausgehoben.

Literatur

- *Linear Algebra*, von Peter Petersen, Springer Verlag, 2012. Auf Englisch.
- *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger*, von Gerd Fischer, Springer Verlag, 18te Auflage, 2013.
- *Lineare Algebra: Eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen*, von Albrecht Beutelspacher, Vieweg+Teubner Verlag, 6te Auflage, 2003.

Vorbemerkungen

- Großer Fortschritt in der Geometrie: Einführung von Koordinaten.
- Übersicht LA10:
  - Gruppen und Körper
  - Vektorräume und lineare Abbildungen
  - Matrizen, Determinanten, Gleichungssysteme
  - Eigenwerte und Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit
- Zunächst jedoch: grundlegendes zur Sprache der Mathematik.

Kapitel 1

Mengen, Relationen, Abbildungen

Die Mengenlehre ist die Basis der modernen Mathematik. Nahezu alle Teilgebiete der Mathematik lassen sich in der Sprache der Mengenlehre formalisieren. Um die Mengenlehre streng formal aufzubauen, benötigt man Begriffe aus der Prädikatenlogik (auch *Logik erster Stufe* genannt). Dies ist nicht Gegenstand dieser Vorlesung. Da aber die Grundbegriffe der Mengenlehre (wie *Mengen*, *Relationen*, und *Abbildungen*) für die lineare Algebra und für das Mathematikstudium allgemein praktisch sind, beginnen wir die Vorlesung mit einer kurzen informellen Einführung. Auf potentielle Probleme mit der naiven Mengenlehre und die Notwendigkeit eines streng formalen Aufbaus der Mengenlehre kommen wir ebenfalls kurz zu sprechen. Mehr dazu erfährt man aber erst in anderen Vorlesungen (wie z.B. [1]).

1.1 Mengen

Mengen bestehen aus *Elementen*. Schreibweise:

$$\begin{aligned} &e \in M && e \text{ ist Element der Menge } M \\ &e \notin M && e \text{ ist } \textit{nicht} \text{ Element der Menge } M \end{aligned}$$

Eine Menge kann beschrieben werden, indem man alle Elemente der Menge angibt. Zum Beispiel bedeutet die Schreibweise

$$M = \{5, 7, 11\}$$

dass M die Menge ist, die genau die Elemente 5, 7 und 11 hat. Mengen selbst können auch Element anderer Mengen sein: beispielsweise ist $\{1, \{2, 3\}\}$ die Menge mit genau den Elementen 1 und $\{2, 3\}$. Sonderfall: die Menge $\{\}$ ohne Elemente heißt *leere Menge* und wird mit $\varnothing$ bezeichnet. Mit der *Pünktchen-Methode* kann man auch unendliche Mengen angeben:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &:= \{0, 1, 2, 3, \dots\} && \text{Die Menge der natürlichen Zahlen} \\ \mathbb{N}_+ &:= \{1, 2, 3, \dots\} && \text{Die Menge der positiven natürlichen Zahlen} \\ \mathbb{Z} &:= \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\} && \text{Die Menge der ganzen Zahlen} \end{aligned}$$

Weitere besondere Mengen, die in dieser Vorlesung von Bedeutung sind:

$$\begin{aligned} \mathbb{Q} &:= \text{ Menge der rationalen Zahlen} \\ \mathbb{R} &:= \text{ Menge der reellen Zahlen} \\ \mathbb{C} &:= \text{ Menge der komplexen Zahlen} \end{aligned}$$

Gleichheit von Mengen: Zwei Mengen A, B sind gleich, wenn sie genau die gleichen Elemente enthalten. Wir schreiben dann $A = B$.

1.1.1 Beschreibung von Mengen durch Eigenschaften

Der Ausdruck

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \underbrace{\exists y \in \mathbb{N}:}_{\text{es existiert ein } y} \quad x = 3y + 1\}$$

bezeichnet die Menge aller natürlichen Zahlen, für die ein $y \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $x = 3y + 1$. Also alle natürlichen Zahlen, die bei Division durch 3 den Rest 1 lassen. Allgemein verwenden wir Ausdrücke der Gestalt

$$\{x \in M \mid x \text{ hat Eigenschaft } E\}$$

für eine Eigenschaft E.

1.1.2 Mengentheoretische Operationen und Bezeichnungen

Die *Enthaltenseinsbeziehung* (*Inklusion*)[1]:

$A \subseteq B$	A ist *Teilmenge* von B
	d.h., jedes Element von A ist auch Element von B
$A \subset B$	A ist *echte* Teilmenge von B:
	$A \subseteq B$ und $A \neq B$

Der Unterschied von $A \subseteq B$ und $A \subset B$ ist also, dass es in letzterem Fall ein Element $x \in B$ gibt mit $x \notin A$. Zum Beispiel:

$$\mathbb{N}_+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

Durchschnitt (*Schnitt*):

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

[1] In manchen Gebieten der Mathematik, z.B. in der Analysis, wird für $\subseteq$ meist $\subset$ verwendet; für $\subset$ wird dann z.B. $\subsetneq$ verwendet. Die Meinungen gehen hier unversöhnlich auseinander. Über kurz oder lang werden Ihnen noch andere terminologische Konflikte in der Literatur begegnen, es ist also gut, sich bereits früh daran zu gewöhnen. Innerhalb dieser Vorlesung aber werde ich mich um Konsistenz bemühen.

Man sagt dass A und B *disjunkt* sind falls $A \cap B = \varnothing$.

Vereinigung:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

Verallgemeinerung: sei I eine Menge und für jedes $i \in I$ sei M_i eine Menge. Dann definieren wir

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x \mid x \in M_i \text{ für alle } i \in I\}$$
$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x \mid x \in M_i \text{ für ein } i \in I\}$$

Beispiel 1.1.1. Für $i \in \mathbb{N}$ sei $M_i := \{1, 2, \ldots, n\}$; also $M_0 = \varnothing$, $M_1 = \{0\}$, $M_2 = \{0, 1\}$, $M_3 = \{0, 1, 2\}$, und so weiter. Dann ist

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i = \mathbb{N}$$
$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i = \varnothing. \qquad \triangle$$

Differenz:

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

Komplement: falls klar ist, dass wir Teilmengen einer Menge M betrachten, und $A \subseteq M$, dann steht $\overline{A}$ für $M \setminus A$, das *Komplement* von A (in M). Die Komplementmenge hängt also auch von M ab; da aber M oft aus dem Kontext klar ist, fließt diese Information nicht in die Notation ein.

Potenzmenge:

$$\mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$$

Kartesisches Produkt:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$$

Was ist ein Paar (a, b)? Es gelte $(a, b) = (a', b')$ genau dann wenn $a = a'$ und $b = b'$. Die Reihenfolge ist wichtig! Es gilt: $(1, 2) \neq (2, 1)$ aber $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

Als Mengen fassen wir das Paar (a, b) daher (zum Beispiel) als $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ auf. Verallgemeinerung: n-*Tupel* $(a_1, \ldots, a_n)$. Das Elemente a_i, für $i \in \{1, \ldots, n\}$, wird der i-*te Eintrag des Tupels* genannt.

$$A_1 \times \cdots \times A_n := \big\{(a_1, \ldots, a_n) \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} \text{ gilt } a_i \in A_i\big\}$$

Hier steht "$\forall i \in M$" für: "für alle $i \in M$".
Analog: "$\exists i \in M$" steht für "es gibt ein $i \in M$".

Weitere Abkürzung:

$$A^n := A \times \cdots \times A$$

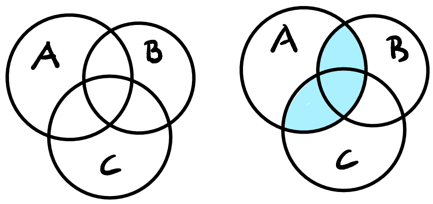
Beispiel: $\mathbb{R}^3$.

1.1.3 Rechenregeln

Es gibt folgende Rechenregeln für Mengenoperationen:

$A \cap A = A$	Schnitt ist *idempotent*
$A \cup A = A$	Vereinigung ist *idempotent*
$A \cap B = B \cap A$	Schnitt ist *kommutativ*
$A \cup B = B \cup A$	Vereinigung ist *kommutativ*
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	Schnitte sind *assoziativ*
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Vereinigungen sind *assoziativ*
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Schnitt ist *distributiv* über Vereinigung
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	Vereinigung ist distributiv über Schnitt

Diese Rechenregeln können besonders einfach mit sogenannten Venn-diagrammen verdeutlicht werden.



Für die Regel $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ beispielsweise sieht man, dass die Ausdrücke auf beiden Seiten die selbe farbige Fläche im Diagram rechts beschreiben.

1.1.4 Kardinalitäten

$|A|$ bezeichnet die Anzahl der Elemente (die *Mächtigkeit*) einer Menge A.

$$|\varnothing| = 0 \qquad |\{\varnothing\}| = 1 \qquad |\{2, 4, 4\}| = 2$$

Es gilt folgendes.

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$$
$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

1.1.5 Das Russellsche Paradoxon

$$M := \{x \mid x \notin x\}$$

Gilt $M \in M$? Gilt $M \notin M$?

Notwendigkeit einer streng formalen, *axiomatischen* Mengenlehre.

1.1.6 Zermelo-Fraenkel Mengenlehre

ZF: weitverbreitete axiomatische Mengenlehre.

1. *Leere Menge:* Es gibt eine leere Menge.
2. *Extensionalität:* Wenn zwei Mengen die gleichen Elemente haben, dann sind sie gleich.
3. *Paarmenge:* Für alle Mengen A und B gibt es eine Menge $\{A, B\}$ mit der Eigenschaft dass $C \in \{A, B\}$ genau dann wenn $C = A$ oder $C = B$.
4. *Vereinigung:* Für alle Mengen M existiert die Menge $\bigcup M$, die gleich der Vereinigung aller Mengen in M ist, soll heissen,
$$\bigcup M := \{x \mid x \in e \text{ und } e \in M\}.$$
5. *Unendliche Mengen:* Es gibt eine Menge M, die die leere Menge und die Menge $\{e\}$ für jedes $e \in M$ enthält.
6. *Potenzmengen:* Für jede Menge M gibt es eine Menge, die genau alle Teilmengen von M enthält.
7. *Ersetzungsschema:* Informell: Bilder von Mengen unter definierbaren Funktionen sind selbst wieder Mengen; eine Formalisierung des Funktionsbegriffs folgt in Kapitel 1.2.2. Für eine formale Definition des Begriffs *definierbar* verweisen wir auf die Vorlesung *Einführung in die mathematische Logik* [2].
8. *Fundierung:* Jede Menge $M \neq \emptyset$ enthält ein e, so dass $e \cap M = \emptyset$. Insbesondere: Mengen enthalten sich nicht selbst.

1.2 Relationen

Eine (zweistellige, oder binäre) *Relation* R zwischen A und B ist eine Teilmenge von $A \times B$. Schreibweise: statt $(a, b) \in R$ auch $R(a, b)$.

Bemerkung 1.2.1. Praktische Visualisierungen:

- Falls $A \cap B = \emptyset$: Darstellung durch *Graphen*, mit Pfeil von a nach b falls $(a, b) \in R$.
- Spezialfall $A = B$: man spricht von einer *Relation auf* A. Darstellung durch *gerichtete Graphen*: Pfeil von a nach b falls $(a, b) \in R$.

Eine Relation $R \subseteq A^2$ heißt

- *reflexiv* wenn $(a, a) \in R$ für alle $a \in A$.
- *symmetrisch* wenn für alle $(a_1, a_2) \in R$ auch $(a_2, a_1) \in R$.

- *antisymmetrisch* wenn für alle $a_1, a_2 \in A$ mit $(a_1, a_2) \in R$ und $(a_2, a_1) \in R$ gilt dass $a_1 = a_2$.
- *transitiv* wenn für alle $a, b, c \in A$ mit $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R$ auch gilt $(a, c) \in R$.

Beispiele: '<' ist eine binäre Relation auf $\mathbb{N}$, und ist transitiv, aber nicht reflexiv und nicht symmetrisch. Die binäre Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}$, definiert durch $n \leq m$ falls $n < m$ oder $n = m$, ist ebenfalls transitiv, zusätzlich reflexiv, und antisymmetrisch.

1.2.1 Äquivalenzrelationen

Eine Relation $R \subseteq A^2$ ist eine *Äquivalenzrelation (auf A)* falls R reflexiv, symmetrisch, und transitiv ist. Motivation: Verallgemeinerung von Gleichheit. Klassenbildung.

$$[x]_R := \{y \in A \mid R(y, x)\}$$

heißt die *Äquivalenzklasse* von x bezüglich R. Wir schreiben A/R für die Menge aller Äquivalenzklassen von A bezüglich R, die *Faktormenge* von A nach R.

Lemma 1.2.2. [2] *Sei R eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A. Dann sind zwei Elemente aus A genau dann äquivalent, wenn sie die gleiche Aquivalenzklasse haben:*

$$R(x, y) \text{ gilt genau dann wenn } [x]_R = [y]_R$$

Beweis. Seien $x, y \in A$ so dass $R(x, y)$. Zeigen zuerst $[x]_R \subseteq [y]_R$. Sei $z \in [x]_R$, d.h. $R(z, x)$. Wegen $R(x, y)$ und Transitivität folgt $R(z, y)$, also $z \in [y]_R$. Zur Inklusion $[y]_R \subseteq [x]_R$: wir haben $R(y, x)$ mit Symmetrie, und verwenden das soeben bewiesene.

Umgekehrt: nehme an, dass $[x]_R = [y]_R$. Da $y \in [y]_R$ wegen Reflexivität gilt also $y \in [x]_R$, und damit $R(x, y)$. □

Definition 1.2.3 (Partition)**.** Eine *Partition* einer Menge A ist eine Menge $\mathcal{P}$ nicht leerer Teilmengen von A die paarweise disjunkt sind und deren Vereinigung gleich A ist.

Man nennt die Elemente von $\mathcal{P}$ die *Klassen* der Partition $\mathcal{P}$.

Proposition 1.2.4 (Äquivalenz und Partition)**.** [3] *Die Faktormenge A/R einer Äquivalenzrelation R auf einer Menge A ist stets eine Partition. Umgekehrt gilt: ist $\mathcal{P}$ eine Partition von A, dann ist $R_\mathcal{P} := \bigcup_{A_i \in \mathcal{P}} A_i \times A_i$ eine Äquivalenzrelation. Es gilt $R = R_{A/R}$ und $A/R_\mathcal{P} = \mathcal{P}$.*

Übung 1. Beweisen Sie Proposition 1.2.4.

[2] Ein *Lemma* (altgriechisch für „das Angenommene"; Mehrzahl Lemmata) ist eine Hilfsaussage, die praktisch ist in Beweisen von anderen Aussagen. Das konkret vorliegende Lemma zum Beispiel ist beim Beweis von Proposition 1.2.4 weiter unten hilfreich.

[3] Eine *Proposition* bezeichnet in der Mathematik wie das Wort *Satz* eine wahre Aussage, allerdings eine, die vielleicht weniger bedeutend ist, und meist keinen Namen trägt. Die Unterteilung in Satz, Proposition, und Lemma ist bisweilen nicht eindeutig und hängt auch von den Vorlieben der Autor:innen ab.

1.2.2 Abbildungen (Funktionen)

Schreibweise für *Funktion* f von einer Menge A *(Definitionsbereich)* in eine Menge B *(Wertebereich)*:

$$f\colon A \to B$$

Jedem $x \in A$ wird genau ein Element aus B zugeordnet, das mit $f(x)$ bezeichnet wird. Formal ist eine Funktion ein Paar bestehend aus

1. einer Relation $G_f \subseteq A \times B$ — dem *Graph* der Funktion, und
2. dem Wertebereich B,

mit folgenden Eigenschaften:

1. f ist überall auf A definiert: d.h., für alle $a \in A$ gibt es ein $b \in B$ mit $(a,b) \in G_f$.
2. Eindeutigkeit: für alle $a \in A$ und für alle $b, b' \in B$ mit $(a,b) \in G_f$ und $(a,b') \in G_f$ gilt $b = b'$.

Schreibweise: $b = f(a)$ falls $(a,b) \in G_f$. Nennen $f(a)$ das *Bild von a unter f*. Weitere häufige Schreibweise: $x \mapsto f(x)$.

1.2.3 Spezielle Eigenschaften von Funktionen

- $f\colon A \to B$ heißt *surjektiv* falls für alle $b \in B$ ein $a \in A$ existiert mit $(a,b) \in G_f$. In anderen Worten, zu jedem $b \in B$ gibt es einen Pfeil.
- $f\colon A \to B$ heißt *injektiv* falls für alle $a, a' \in A$ und $b \in B$ gilt: falls $f(a) = f(a')$ dann auch $a = a'$. In anderen Worten, zu jedem $b \in B$ gibt es höchstens einen Pfeil.
- $f\colon A \to B$ heißt genau dann *bijektiv* wenn f injektiv und surjektiv ist. In anderen Worten, zu jedem $b \in B$ gibt es *genau* einen Pfeil.

Weitere Bezeichnungen. Sei $f\colon A \to B$ und $A' \subseteq A$. Dann definieren wir das *Bild* von A' unter f als

$$f[A'] := \{f(a) \mid a \in A'\}\,.$$

Die Abbildung $g\colon A' \to B$ definiert durch $f \mapsto f(a)$ heißt *Einschränkung* von f auf A', und wird mit $f|_{A'}$ bezeichnet.

Für $B' \subseteq B$ definieren wir die *Urbildmenge* von B' unter f als

$$f^{-1}[B'] := \{a \in A\colon f(a) \in B'\}$$

Der *Kern* von f ist die folgende Äquivalenzrelation auf A

$$\{(a,a') \in A^2 \mid f(a) = f(a')\}\,.$$

Beispiel 1.2.5. Wir untersuchen einige Beispiele von konkreten Funktionen auf die Eigenschaften *injektiv*, *surjektiv*, und *bijektiv*.

- $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N} : x \mapsto x^2$ ist weder injektiv noch surjektiv.
- Die Additionsfunktion $\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y$ ist nicht injektiv, aber surjektiv.
- $\mathrm{id}\colon A \to A : x \mapsto x$ heißt die *identische Funktion* oder *Identität* auf A (ist bijektiv). Bezeichnung häufig id_A.
- Für das direkte Produkt $A\times B$ heißen $\pi_1\colon A\times B \to A : (a, b) \mapsto a$ und $\pi_2\colon A\times B \to B : (a, b) \mapsto b$ *Projektionen* auf ersten beziehungsweise zweiten Faktor. △

1.2.4 Umkehrabbildung

Wenn $f\colon A \to B$ eine Funktion ist, dann definiert $(G_f)^{-1}$ genau dann eine Funktion von B nach A wenn f bijektiv ist. Falls f zumindest injektiv ist, dann definiert $(G_f)^{-1}$ eine Funktion von $f[A]$ nach A. Diese Funktion wird dann die *Umkehrfunktion* von f genannt, und mit f^{-1} bezeichnet.

1.2.5 Operationen

Eine *n-stellige Operation* auf einer Menge A ist eine Abbildung $f\colon A^n \to A$.

Beispiel 1.2.6. Die Addition und Multiplikation von natürlichen Zahlen sind 2-stellige Operationen auf $\mathbb{N}$. △

Beispiel 1.2.7. Für alle Mengen A sind Schnitt und Vereinigung zweistellige Operationen auf $\mathcal{P}(A)$. △

1.2.6 Komposition von Abbildungen

$$f\colon A \to B, \quad g\colon B \to C$$

Durch $f(x) := g(f(x))$ für alle $x \in A$ wird eine Abbildung

$$h\colon A \to C$$

definiert, die *Komposition* (Hintereinanderausführung) von f und g. Bezeichnung: $g \circ f$.

1.2.7 Gleichmächtige Mengen

Mengen A, B heissen *gleichmächtig* (Schreibweise $|A| = |B|$) falls es eine bijektive Abbildung $f\colon A \to B$ gibt.

Schreibweise:

- $|A| \leq |B|$ gdw es eine injektive Abbildung $f\colon A \to B$ gibt.
- $|A| < |B|$ falls $|A| \leq |B|$ und nicht gilt $|A| = |B|$.

Beispiel 1.2.8. Die Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ sind gleichmächtig (sie sind *abzählbar unendlich*). △

Satz 1.2.9 (Cantor)**.** [4] *Für jede Menge A gilt $|A| < |\mathcal{P}(A)|$.*

Beweis. Ein Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gäbe eine Bijektion $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$. Sei

$$U := \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$$

$U \subseteq A$, $U \in \mathcal{P}(A)$. Da f bijektiv ist, existiert $u \in A$ so dass $f(u) = U$. Entweder $u \in U$ oder $u \notin U$.

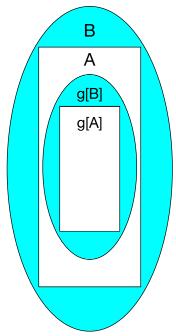
Wäre $u \in U$, so $u \in f(u)$, also $u \notin U$ nach Def. von U, Widerspruch.

Wäre $u \notin U$, so $u \notin f(u)$, also $u \in U$ nach Def. von U, Widerspruch. □

Lemma 1.2.10. *Injektive Abbildungen bilden Vereinigungen auf Vereinigungen ab.*

Satz 1.2.11 (Bernstein-Schröder)**.** *Für alle Mengen A, B gilt: wenn $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$, dann $|A| = |B|$.*

Beweis. Es genügt, den Fall zu betrachten, dass $A \subseteq B$ und dass f die identische Abbildung ist. Definiere $C := \{g^n(x) \mid n \in \mathbb{N}, x \in B \setminus A\}$. Es gilt $B \setminus C \subseteq A$ da $g^0(B \setminus A) = B \setminus A$. Siehe Abbildung.



Sei $h\colon B \to A$ gegeben durch

$$h(x) := \begin{cases} g(x) \in C \text{ falls } x \in C \\ h(x) := x \text{ falls } x \in B \setminus C. \end{cases}$$

Die Abbildung h ist injektiv: falls $h(x) = h(y) \in C$, dann gilt $x = y \in C$ wegen der Injektivität von g, und falls $h(x) = h(y) \in B \setminus C$ dann gilt $x = h(x) = h(y) = y$. Die Abbildung h ist auch surjektiv: für jedes $x \in A \cap C$ gibt es ein $y \in C$ mit $x = g(y)$ und für jedes $x \in A \setminus C$ gilt $x = h(x)$. □

1.2.8 Das Auswahlaxiom

Sei $g\colon A \to B$ eine Surjektion. Falls A und B endlich sind, so gibt es auch eine Injektion f von B nach A: denn für jedes $b \in B$ gibt es ein $a \in A$ so dass $g(a) = b$, und wir definieren $f(b) := a$. Wenn A und B unendlich sind, so stellt sich die Frage, ob eine solche Funktion f überhaupt existiert.

Das Auswahlaxiom (AC für englisch *Axiom of choice*) impliziert, dass solche Funktionen existieren (es entspricht aber der mathematischen Praxis, das Auswahlaxiom anzunehmen). Es gibt viele äquivalente Formulierungen des Auswahlaxioms; eine ist die folgende.

[4] Ein *Satz* in der Mathematik ist eine wahre Aussage, die von großer Bedeutung ist, und häufig nach ihrer Entdecker:in benannt wird. Das Wort ‚Theorem' bezeichnet besonders herausstehende Sätze, und wird im Deutschen sehr sparsam verwendet, deutlich seltener jedenfalls als das englische Wort *'theorem'*, was eher dem deutschen Wort 'Satz' entspricht.

(AC) Falls $g\colon A \to B$ eine Surjektion ist, so gibt es auch eine Injektion $f\colon B \to A$ so dass $g \circ f = \mathrm{id}_B$.

Tatsächlich ist bekannt, dass man in ZF die Existenz solcher Funktionen im allgemeinen nicht zeigen kann!

1.2.9 Die natürlichen Zahlen

Der Aufbau der natürlichen Zahlen als Mengen:

$$\begin{aligned} 0 &:= \varnothing \\ 1 &:= \{0\} = \{\varnothing\} \\ 2 &:= \{0,1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\ 3 &:= \{0,1,2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\ &\cdots \\ n+1 &:= \{0,1,\dots,n\} = \{n\} \cup n \end{aligned}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist also $n+1$ die Menge, die n und alle Elemente von n enthält.
Vorteil dieser Definition: für alle natürlichen Zahlen m und n gilt:

$$\begin{aligned} m < n &\iff m \subset n \\ &\iff m \in n \end{aligned}$$

Bemerkung 1.2.12. '$<$' und '$\leq$' sind (zweistellige) Relationen auf $\mathbb{N}$:

$$\{(n,m) \in \mathbb{N}^2 \mid n \leq m\}$$

Die Relation $\leq$ auf $\mathbb{N}$ is eine *Wohlordnung*: jede Teilmenge T von $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element. Das heißt, für jedes $T \subseteq \mathbb{N}$ gibt es ein $x \in T$ so dass für alle $y \in T$ gilt $x \leq y$.

Beispiel 1.2.13. Die folgenden Ordnungen sind keine Wohlordnungen:

- Die bekannte Ordnung $\leq$ der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$.
- Die bekannte Ordnung der nicht-negativen rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q}_0^+ := \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}. \qquad \triangle$$

Addition und Multiplikation

Die *Addition* ist induktiv definiert: für alle $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} n + 0 &:= n \\ n + (m+1) &:= (n+m) + 1 \end{aligned}$$

Die *Multiplikation* ist induktiv definiert mit Hilfe der Addition: $n, m \in \mathbb{N}$

$$n \cdot 0 := 0$$
$$n \cdot m^+ := n \cdot m + n$$

Wir definieren auf $\mathbb{N}$ die *Teilbarkeitsrelation*: für $a, b \in \mathbb{N}$ gelte $a|b$ (sprich: *a teilt b*) genau dann wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $a \cdot k = b$. Eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ heißt *Primzahl* (oder *prim*), wenn sie größer als 1 ist und nur durch 1 und sich selbst teilbar ist.

1.2.10 Restklassen modulo n

Sei $n \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ und $x, y \in \mathbb{Z}$. Dann ist x ein *Teiler* von y falls ein $z \in \mathbb{Z}$ existiert so dass $y = xz$. Schreiben $x \equiv y \mod n$ falls n ein Teiler von $y - x$. Dadurch wird eine Äquivalenzrelation definiert, nämlich $\{(x, y) \mid x \equiv y \mod n\}$. Menge der Äquivalenzklassen: $\mathbb{Z}/n$ (die *Restklassen modulo* n; auch mit $\mathbb{Z}/(\text{mod } n)$ oder $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bezeichnet). Jedes Element $y \in [x]$ wird *Repräsentant* von $[x]$ genannt. Rechnen mit Restklassen ist repräsentantenweise möglich:

- Addition: $[x] + [y] := [x + y]$
- Multiplikation: $[x] \cdot [y] := [x \cdot y]$

Achtung: man muss beweisen, dass dies "wohldefiniert" ist, d.h., nicht von der Auswahl der Repräsentanten abhängt.

1.3 Beweisprinzipien

Was ist ein Beweis? Es gibt ein Gebiet der Mathematik, das sich damit beschäftigt: die *Beweistheorie*. 1930er Jahre: Axiomensysteme und Beweiskalküle, mit denen sich alle wahren mathematischen Aussagen herleiten lassen. Doch das sprengt den Rahmen der Vorlesung.

1.3.1 Logische Konnektoren

Für systematische und formale Definition verweisen wir auf eine Logikvorlesung, wie z.B. [1].

A, B, C, etc. stehen im folgenden für mathematische Aussagen, die entweder *wahr* (1) oder *falsch* (0) sind; man spricht hier auch von *aussagenlogischen Variablen*.

- Schreiben $A \wedge B$ für die Aussage *A und B* ('*Konjunktion*'). Die Aussage $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.
- Schreiben $A \vee B$ für die Aussage *A oder B* ('*Disjunktion*'). Die Aussage $A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

- Schreiben $\neg A$ für die Aussage *nicht* A (‘*Negation*’). Die Aussage $\neg A$ ist genau dann wahr, wenn A nicht wahr ist.

Bemerkung 1.3.1. Die Aussage $\neg(A \wedge B)$ ist genau dann wahr, wenn $\neg A \vee \neg B$ wahr ist. Die Aussage $\neg(A \vee B)$ ist genau dann wahr, wenn $\neg A \wedge \neg B$ wahr ist.

1.3.2 Abkürzungen

Wir schreiben $A \Rightarrow B$ als Abkürzung für $\neg A \Rightarrow B$ (‘*Implikation*’).

Bemerkung 1.3.2. $A \Rightarrow B$ gilt genau dann, wenn $\neg B \Rightarrow \neg A$ gilt (‘*Kontraposition*’).

Bemerkung 1.3.3. $A \Rightarrow B$ gilt genau dann, wenn $A \wedge \neg B$ falsch ist (‘*Widerspruchsbeweis*’).

Bemerkung 1.3.4. Falls A gilt, und $B \Rightarrow A$ gilt, so gilt auch B.

Wir schreiben $A \Leftrightarrow B$ als Abkürzung für $A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$ (‘*Äquivalenz*’).

Um zu zeigen, dass die Aussagen $A_1, A_2, \dots, A_n$ äquivalent sind (d.h., $A_i \Leftrightarrow A_j$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$), genügt es, zu zeigen, dass

$$A_1 \Rightarrow A_2 \wedge A_2 \Rightarrow A_3 \wedge \cdots \wedge A_{n-1} \Rightarrow A_n \wedge A_n \Rightarrow A_1$$

Gute Wahl der Reihenfolge kann Arbeit sparen!

1.3.3 Aussagenlogik

Ein *aussagenlogischer Ausdruck* ist ein Ausdruck, der aus aussagenlogischen Variablen, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, und Klammern aufgebaut ist, wie zum Beispiel $A \wedge (B \vee \neg C)$. Eine *Tautologie* ist ein aussagenlogischer Ausdruck, der wahr ist für *alle* Belegungen der aussagenlogischen Variablen mit wahr oder falsch.

Beispiel 1.3.5. Die folgenden aussagenlogischen Aussagen sind Tautologien:

- $A \vee \neg A$.
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ (siehe Bemerkung 1.3.1)
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ (siehe Bemerkung 1.3.1)
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (siehe Bemerkung 1.3.2).
- $A \Rightarrow B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ (siehe Bemerkung 1.3.3).
- $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ (siehe Bemerkung 1.3.4). △

1.3.4 Mengengleichheit

Um zu zeigen, dass zwei Mengen X und Y gleich sind, genügt es zu zeigen, dass

$$A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A\,.$$

Bei endlichen Mengen reicht zu zeigen:

$$A \subseteq B \text{ und } |A| = |B|\,.$$

1.3.5 Vollständige Induktion

Es seien $A_0, A_1, A_2, \ldots$ Aussagen. Wir wollen zeigen, dass A_i für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Dazu genügt es zu zeigen:

1. *Induktionsanfang*: es gilt A_0.
2. *Induktionsschritt*: für jedes $n \geq 0$ gilt: wenn A_n gilt *(Induktionsvorraussetzung)*, dann auch A_{n+1} *(Induktionsbehauptung)*.

Dann gilt A_i für jedes $i \in \mathbb{N}$ (*Induktionsschluss*).

Beispiel 1.3.6. Aussage A_n:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang $n = 1$.

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Induktionsschritt: es gelte A_n, zu zeigen ist A_{n+1}.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2}{2}(n+1) && \text{(Induktionsvorraussetzung)} \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

△

Bemerkung 1.3.7. Es gibt einen Zusammenhang zwischen dem Prinzip der vollständigen Induktion mit der Aussage, dass $\mathbb{N}$ eine Wohlordnung ist. Dazu betrachten wir die Menge

$$S := \{i \in \mathbb{N} \mid A_i \text{ gilt } \textit{nicht}\}.$$

Angenommen, es stimmt *nicht*, dass $A_0, A_1, A_2, \ldots$ gelten. Dann ist $S \neq \emptyset$ und besitzt daher ein kleinstes Element. Das heisst, es gibt ein $i \in \mathbb{N}$, so dass $A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}$ allesamt gelten, aber A_i gilt nicht. Die ist eine Situation, die wir im Induktionsschluss ausschliessen.

Kapitel 2

Gruppen, Körper, Vektorräume

Bekannteste Beispiele: $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ mit Addition und Multiplikation. Axiomatisierung der Rechenregeln von Addition und Multiplikation.

2.1 Gruppen

Eine Menge G zusammen mit einer 2-stelligen Operation $m\colon G^2 \to G$ heißt *Gruppe*, wenn folgende Axiome erfüllt sind. Wir schreiben $m(x, y) = x \circ y$ der Einfachheit halber.

1. *Assoziativitätsgesetz*: für alle $x, y, z \in G$:
$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$$

2. Existenz eines *neutralen* Elements: es gibt ein $e \in G$, so dass für alle $x \in G$ gilt: $x \circ e = x$ und $e \circ x = x$.

3. Existenz *inverser Elemente*: zu jedem $x \in G$ gibt es ein $y \in G$, so dass $x \circ y = e$ und $y \circ x = e$. Schreiben x^{-1} für y.

Eine Gruppe heißt *abelsch*, wenn die Operation $\circ$ zusätzlich das *Kommutativitätsgesetz* erfüllt:

$$\text{für alle } x, y \text{ gilt } x \circ y = y \circ x.$$

Bemerkung 2.1.1. Die genaue Bezeichnung für die Gruppenoperation, das neutrale Element, und das Inverse von x ist nicht von Bedeutung. Weitere Varianten sind: $\cdot$, 1, und x^{-1}, oder $+$, 0, $-x$.

Beispiel 2.1.2. $(\mathbb{Z}; +)$, $(\mathbb{Q}; +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$. △

2.1.1 Erste Folgerungen

Lemma 2.1.3. *Das neutrale Element e einer Gruppe ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien e, e' zwei neutrale Elemente. Dann ist $e \circ e' = e$ (weil e neutrales Element) und $e \circ e' = e'$ (weil e' neutrales Element). Also $e = e'$. □

Lemma 2.1.4. *Das inverse Element x^{-1} von x ist in einer Gruppe eindeutig festgelegt.*

Beweis. Für Gruppenelemente y_1, y_2 mit

$$\begin{aligned} x \circ y_1 &= y_1 \circ x = e && \text{Voraussetzung 1} \\ x \circ y_2 &= y_2 \circ x = e && \text{Voraussetzung 2} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1 \circ e && (e \text{ neutrales Element}) \\ &= y_1 \circ (x \circ y_2) && (\text{Voraussetzung 1}) \\ &= (y_1 \circ x) \circ y_2 && (\text{Assoziativität}) \\ &= e \circ y_2 && (\text{Voraussetzung 2}) \\ &= y_2 && (e \text{ neutrales Element}) \end{aligned}$$

□

Folgerung: $(x^{-1})^{-1} = x$.

Übung 2. Ein *links-inverses* Element zu x bezüglich einer 2-stelligen Operation $\circ$ mit neutralem Element e ist ein Element y, so dass $y \circ x = e$. Zeigen Sie, dass man das dritte Gruppenaxiom zur Existenz inverser Element abschwächen kann zur Existenz von Linksinversen. In anderen Worten: falls $(G, \circ)$ das Assoziativitätsgesetz erfüllt, es ein neutrales Element gibt, und zu jedem $x \in G$ ein linksinverses Element in G gibt, dann ist $(G, \circ)$ bereits eine Gruppe.

2.1.2 Beispiel: die symmetrische Gruppe

Sei X eine Menge. Schreiben $\mathrm{Sym}(X)$ für die Menge aller *Permutationen* von X, d.h., Bijektionen zwischen X und X. Dann ist $(\mathrm{Sym}(X), \circ)$ eine Gruppe, wobei $\circ$ die Komposition von Abbildungen ist. Das neutrale Element ist die Identität id_X, und zu $x \in \mathrm{Sym}(X)$ ist die Umkehrabbildung x^{-1} das inverse Element.

2.1.3 Untergruppen

Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, $U \subset G$ eine Teilmenge s.d.

- $1 \in U$;
- für alle $u \in U$ gilt $u^{-1} \in U$;
- für alle $u, v \in U$ gilt $u \circ v \in U$;

Dann heißt $(U, \circ)$ (genauer: $(U, \circ|_{U \times U})$ eine *Untergruppe* von $(G, \circ)$.

Beispiel 2.1.5. Beispiele zu Untergruppen.

- $\{e\}$ ist stets Untergruppe.
- $(\mathbb{Z}, +)$ ist Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$.
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$. △

Anmerkung: Jede Gruppe G ist eine Untergruppe von $\mathrm{Sym}(G)$ (Beweis kommt später im Studium).

2.2 Körper

Ein *Körper* (englisch *field*; französisch *corps*) ist eine Menge K zusammen mit zwei binären Operationen

$$\begin{aligned} +\colon & K \times K \to K && \text{Addition} \\ \cdot\colon & K \times K \to K && \text{Multiplikation} \end{aligned}$$

die folgende Axiome erfüllen:

1. $(K, +)$ ist eine *abelsche Gruppe* mit neutralem Element 0 *(Nullelement)*, und inversem Element $-x$ zu jedem $x \in K$.
2. Für $(K, \cdot)$ gilt: Multiplikation ist assoziativ, kommutativ, es existiert ein neutrales Element 1 *(Eins-element)*, und für alle $x \in K \setminus \{0\}$ existiert ein inverses Element x^{-1}.
3. $0 \neq 1$.
4. *Distributivgesetz*: für alle $x, y, z \in K$ gilt

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Häufig verwenden wir das gleiche Symbol für Grundmenge und Körper.

Beispiel 2.2.1. $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot)$. △

Beispiel 2.2.2. $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$. △

Kein Beispiel: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Bemerkung 2.2.3. In einem Körper $\mathbb{K}$ gilt für alle $x, y \in K$:

- $x \cdot 0 = 0$
- $(-1) \cdot x = -x$
- $(-x) \cdot (-x) = x \cdot x$
- $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $y = 0$

2.2.1 Der Körper mit zwei Elementen

Die Menge $\{0, 1\}$ mit folgender Addition und Multiplikation ist ein Körper:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

'Rechnen modulo 2'

- Nullelement ist 0.
- Eins-element ist 1.
- Inverse Elemente bzgl $+$ sind $-0 = 0$ und $-1 = 1$.
- Inverses Element von 1 bezüglich $\cdot$ ist $1^{-1} = 1$.

Bezeichnung für diesen Körper: $\mathrm{GF}(2) = (\{0, 1\}; +, \cdot)$ oder $\mathbb{F}_2$.

2.2.2 Weitere endliche Körper

Sei p eine Primzahl. Dann ist $(\mathbb{Z}/p, +, \cdot)$ ein Körper (mit Addition und Multiplikation wie in Abschnitt 1.2.10).

Bemerkung 2.2.4. $(\mathbb{Z}/n, +, \cdot)$ ist im allgemeinen kein Körper (aber ein *Ring*; Definition 4.2.1).

Bemerkung 2.2.5. Für jede Primzahlpotenz p^m gibt es einen Körper $\mathrm{GF}(p^m)$ mit p^m Elementen.

2.2.3 Der Körper der komplexen Zahlen

Die Gleichung $x^2 = -1$ hat keine reelle Lösung. *Imaginäre Zahlen*: Zahlen, deren Quadrat eine nicht-positive reelle Zahl ist. Mit i bezeichnen wir die imaginäre Zahl mit $i \cdot i = -1$. *Komplexe Zahlen* können in der Form $a + b \cdot i$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dargestellt werden. Hierbei heißt a der *Realteil* und b der *Imaginärteil*.

Formale Definition. Formal definieren wir die komplexen Zahlen mit Hilfe von $\mathbb{R}^2$:

- Addition:
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix}$$
- Multiplikation:
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix}$$

Schreibweise: a statt $\binom{a}{0}$ für $a \in \mathbb{R}$. i statt $\binom{0}{1}$. Dann gilt

$$i \cdot i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

Die Menge

$$\mathbb{C} := \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

bildet zusammen mit der obigen Addition und Multiplikation den *Körper der komplexen Zahlen*.

Nullelement ist 0, denn $\binom{0}{0} + \binom{a}{b} = \binom{a}{b}$.

Eins-element ist 1, denn $\binom{1}{0} \cdot \binom{a}{b} = \binom{a}{b}$.

Geometrische Interpretation. (Komplexe) Gaußsche Zahlenebene: $z = a + bi$ entspricht dem Punkt $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$ der Ebene.

Geometrische Interpretation der Multiplikation:

- Multiplikation mit -1:
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$$
- Multiplikation mit i:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$
- Multiplikation mit $-i$:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$$

2.2.4 Weitere Begriffsbildungen

Die *Charakteristik* char($\mathbb{K}$) eines Körpers $\mathbb{K}$ ist die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}^+$, so dass

$$\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ mal}} = 0.$$

Falls eine solche Zahl nicht existiert, so ist char($\mathbb{K}$) := 0.

Bemerkung 2.2.6. Algebraische Strukturen, die alle Eigenschaften eines Körpers besitzen, außer dass die Multiplikation notwendigerweise kommutativ ist, heissen *Schiefkörper*. Der Begriff der Charakteristik ist auch für Schiefkörper definiert. Der Satz von Wedderburn besagt, dass jeder Schiefkörper mit endlich vielen Elementen bereits ein Körper ist. Ein Beispiel für einen Schiefkörper der Charakteristik 0, der kein Körper ist, sind die *Quaternionen*.

2.3 Vektorräume

Vektorräume sind das zentrale Thema der linearen Algebra. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit Einselement 1. Die Elemente von K werden *Skalare* genannt. Ein *Vektorraum* über dem Körper $\mathbb{K}$ (kurz, ein $\mathbb{K}$-Vektorraum) ist eine Menge V zusammen mit zwei Abbildungen

$$V^2 \to V\colon (u,v) \mapsto u+v$$

(der *Addition*) und

$$K \times V \to V\colon (\lambda, u) \mapsto \lambda u$$

(der *skalaren Multiplikation*) so dass folgende Axiome erfüllt sind:

1. $(V,+)$ ist abelsche Gruppe mit Nullelement $\mathbf{0}$;
2. Für alle $\lambda, \mu \in K$ und $v \in V$ gilt $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$;
3. Für alle $v \in V$ gilt $1v = v$.
4. Für alle $u, v \in V$ und für alle $\lambda \in K$ gilt
$$\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$$
5. Für alle $v \in V$ und für alle $\lambda, \mu \in K$ gilt
$$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$$

Die Elemente von V heißen *Vektoren*. Wir definieren also zuerst Vektorräume, und dann Vektoren, nicht anders herum.

2.3.1 Beispiele

Der Vektorraum $\mathbb{K}^n$

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Die Menge $\mathbb{K}^n$ aller n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ von Elementen $a_1, \ldots, a_n \in K$ bildet einen Vektorraum über K wenn Addition und skalare Multiplikation wie folgt definiert werden:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

und für $\lambda \in K$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}.$$

Der Nullvektor ist $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0)$.

Wichtige Spezialfälle: $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, …

Vektorräume durch Körpererweiterungn

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Eine Teilmenge $U \subseteq K$ heißt *Teilkörper* (*Unterkörper*) wenn gilt

1. $0, 1 \in U$;
2. Für alle $a, b \in U$ ist $a + b \in U$;
3. Für alle $a \in U$ ist $-a \in U$;
4. Für alle $a, b \in U$ ist $a \cdot b \in U$;
5. Für alle $a \in U \setminus \{0\}$ ist $a^{-1} \in U$.

Dann ist U zusammen mit der Einschränkung der Addition und Multiplikation auf U^2 und dem gleichen Null- und Eins-element selbst ein Körper.

Schreibweise:

$$U \leq K$$

Beispiele:

$$\mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$$

Sei $K \leq K'$. Dann ist K' ein Vektorraum über K:

- Addition in K' schon vorhanden;
- Multiplikation von $u \in \mathbb{K}$ mit Skalar $\lambda \in K \subseteq K'$:

$$\lambda u := \lambda \cdot u.$$

Beispiele:

- $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum
- $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
- $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Funktionenräume

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und X eine beliebige Menge. Dann bildet die Menge

$$\mathbb{K}^X := \{f \mid f\colon X \to K\}$$

aller Abbildungen von X in K einen $\mathbb{K}$-Vektorraum mit folgenden Operationen:

- Addition $f + g$:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

- Multiplikation mit Skalar $\lambda \in K$:

$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

Nullvektor ist die *Nullfunktion*

$$\mathbf{0}\colon X \to K : x \mapsto 0$$

Potenzmenge als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ einer beliebigen Menge A wird zu einem Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ (siehe Abschnitt 1.1.2), mit folgenden Operationen, für $X, Y \in \mathcal{P}(A)$:

- Addition $X + Y := (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$ (*Symmetrische Differenz*)
- Skalare Multiplikation $0 \cdot X := \varnothing$ und $1 \cdot X := X$.

Nullvektor ist $\mathbf{0} := \varnothing$. Additiv Inverses von $X \in \mathcal{P}(X)$ ist X selbst, denn

$$X + X = \varnothing = \mathbf{0}$$

2.3.2 Erste Folgerungen

Lemma 2.3.1. *In einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V gilt für alle $u \in V$:*

1. $0u = \mathbf{0}$
2. $(-1)\,u = -u$.

Beweis. Zu Teil 1.

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= 0 \cdot u + (-(0 \cdot u)) \\ &= (0 + 0) \cdot u + (-(0 \cdot u)) \\ &= (0 \cdot u + 0 \cdot u) + (-(0 \cdot u)) \\ &= 0 \cdot u\end{aligned}$$

Zu Teil 2.

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= 0 \cdot u \\ &= (1 - 1) \cdot u \\ &= 1 \cdot u + (-1) \cdot u \\ &= u + (-1)u\end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit des inversen Elements (Lemma 2.1.4) folgt $(-1)u = -u$. □

Lemma 2.3.2. *Für alle $\lambda \in K$ und $u \in V$ gilt genau dann $\lambda u = \mathbf{0}$ wenn $\lambda = 0$ oder $u = \mathbf{0}$.*

Übung 3. Beweisen Sie Lemma 2.3.2.

2.3.3 Untervektorräume

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum* von V, wenn gilt

- $\mathbf{0} \in U$.
- Für alle $u, v \in U$ ist $u + v \in U$.
- Für alle $u \in U$ und $\lambda \in K$ ist $\lambda u \in U$.

Schreibweise:

$$U \leq V$$

Lemma 2.3.3. *Sei $U \subseteq V$. Dann gilt $U \leq V$ genau dann, wenn*

- *U nichtleer ist, und*
- *U zusammen mit der Addition (wie in V) und der skalaren Multiplikation (wie in V) selbst ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.*

Beweis. Wenn $U \leq V$ dann gilt $\mathbf{0} \in U$ also $U \neq \varnothing$. Ausserdem ist für alle $u \in U$ auch $-u \in U$ da $-u = (-1) \cdot u \in U$ nach Lemma 2.3.1 und Voraussetzung. Die Einschränkung von $\circ$ auf U^2 und von $\cdot$ auf $K \times U$ liefert somit Funktionen von $U^2 \to U$ beziehungsweise $K \times U \to U$, und es gelten alle Vektorraumaxiome.

Umgekehrt sei $U \neq \varnothing$ so dass $(U, +|_{U^2}, \cdot|_{K\times U})$ ein Vektorraum ist. Sei $u \in U$. Dann gilt $\mathbf{0} = 0 \cdot u \in U$. Weiterhin sind mit $u, v \in U$ und $\lambda \in K$ auch $u + v \in U$ und $\lambda u \in U$. $\square$

Bemerkung: der Schnitt von Untervektorräumen eines Vektorraumes ist wieder ein Vektorraum:

$$U_1, U_2 \leq V \ \Rightarrow \ U_1 \cap U_2 \leq V$$

Dies gilt *nicht* für Vereinigung! Betrachte dazu $V = \mathbb{R}^2$, $u = (1,0)$, und $v = (0,1)$. Dann sind $\mathbb{R}u := \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $\mathbb{R}v$ Untervektorräume von V. Aber $(1,1) = u + v \notin \mathbb{R}u \cup \mathbb{R}v$.

2.4 Basen und Dimension

2.4.1 Linearkombinationen

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ Vektoren und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ Skalare. Dann heißt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i := \lambda_1 + \cdots + \lambda v_n$$

eine *Linearkombination* von $v_1, \ldots, v_n$. Die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus $S \subseteq V$ wird mit $\langle S \rangle$ bezeichnet, und die *lineare Hülle* von S genannt:

$$\langle S \rangle := \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \mid v_1, \ldots, v_n \in S, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K, n \in \mathbb{N}\}$$

S darf auch unendlich sein! Legen fest $\langle\varnothing\rangle = \mathbf{0}$.

Vereinbaren außerdem: $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ steht für $\langle\{v_1, \ldots, v_n\}\rangle$.

Bemerkung: Die Abbildung

$$\mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V) : W \mapsto \langle W\rangle$$

ist ein *Hüllenoperator*, d.h., es gelten für alle $X, Y \subseteq V$:

- $X \subseteq \langle X\rangle$.
- $X \subseteq Y \Rightarrow \langle X\rangle \subseteq \langle Y\rangle$.
- $\langle\langle X\rangle\rangle = \langle X\rangle$.

Proposition 2.4.1. *$\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ ist ein Untervektorraum von V, und zwar der kleinste Untervektorraum von V, der $v_1, \ldots, v_n$ enthählt.*

Beweis. Sei $U := \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$.

1. $\mathbf{0} = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n \in U$.
2. Seien $u, v \in U$, d.h., $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ und $v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$. Dann ist $u + v = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \cdots(\lambda_n + \mu_n)v_n \in U$.
3. Seien $u \in U$, $\lambda \in K$, $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Dann ist $\lambda u = (\lambda\lambda_1)v_1 + \cdots + (\lambda\lambda_n)v_n \in U$.

Also gilt $U \leq V$. Ist $v_1, \ldots, v_n \in W$ für Untervektorräum $W \leq V$, so gehören auch alle Linearkombinationen von $v_1, \ldots, v_n$ zu W, also $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle \leq W$. Daher ist $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ der *kleinste* Untervektorraum von V, der $v_1, \ldots, v_n$ enthält. $\square$

Man nennt $U = \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ auch den *von $v_1, \ldots, v_n$ erzeugten (aufgespannten) Vektorraum*. Die Menge $\{v_1, \ldots, v_n\}$ heißt dann *Erzeugendensystem* von U.

2.4.2 Lineare Unabhängigkeit

Ein n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ heißt *linear unabhängig* falls gilt

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda_1 = \cdots \lambda_n = 0\ .$$

Ansonsten: $(v_1, \ldots, v_n)$ *linear abhängig*. Eine Menge $U = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ heißt *linear unabhängig* wenn jedes n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ mit paarweise verschiedenen Elementen aus U linear unabhängig ist. Ansonsten: U heißt linear abhängig.

Bemerkungen:

- v ist genau dann linear abhängig wenn $v = \mathbf{0}$.

- $(v_1, \dots, v_n)$ ist genau dann linear abhängig, wenn mindestens ein Vektor v_i Linearkombination der anderen ist:

$$v_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j$$

- Jede Obermenge einer linear abhängigen Menge ist linear abhängig.
- Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge ist linear unabhängig.

Beispiel 2.4.2. In $V = \mathbb{R}^2$ (als $\mathbb{R}$-Vektorraum):

- $v_1 = \binom{1}{0}$ und $v_2 = \binom{0}{1}$ sind linear unabhängig: denn $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \binom{\lambda_1}{\lambda_2} = \mathbf{0}$ genau dann wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
- $v_1 = \binom{1}{2}$ und $v_2 = \binom{2}{4}$ linear abhängig, denn $v_2 = 2v_1$.
- $v_1 = \binom{1}{2}$, $v_2 = \binom{\pi}{2\pi}$ linear abhängig (aber in $\mathbb{R}^2$ aufgefasst als $\mathbb{Q}$-Vektorraum sind v_1 und v_2 linear unabhängig, da $\pi \notin \mathbb{Q}$)
- Je drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$ sind linear abhängig.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

  Anders geschrieben,

$$\begin{aligned} a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 &= 0 \\ \text{und } b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2 + b_3\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

  hat für alle $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ *nichttriviale* (d.h., von $(0,0,0)$ verschiedene) Lösung für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. △

2.4.3 Basen

Eine Teilmenge $B \subseteq V$ heißt *Basis* von V wenn

1. B linear unabhängig, und
2. $\langle B \rangle = V$.

Für Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$, v_i paarweise verschieden, nennen wir $B = (v_1, \dots, v_n)$ *geordnete Basis* (oder auch kurz *Basis*).

Satz 2.4.3 (Eindeutigkeit der Koordinaten). *Ist $B = (v_1, \dots, v_n)$ geordnete Basis von V, so gibt es für jeden Vektor $u \in V$* genau ein *n-Tupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, so dass*

$$u = \lambda v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

D.h., jedes Element u lässt sich *eindeutig* als Linearkombination von Basiselementen beschreiben. Das n-Tupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ heißt *Koordinatenvektor* von u bezüglich B. Die Abbildung

$$\Phi_B\colon \mathbb{K}^n \to V : (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

ist bijektiv und heißt *kanonischer Basisisomorphismus.*

Beweis von Satz 2.4.3. Da B eine Basis ist, gilt insbesondere $\langle B\rangle = V$ und jedes $u \in V$ lässt sich schreiben als $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Wenn nun gilt

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \lambda_1' v_1 + \dots + \lambda_n' v_n$$

so folgt

$$(\lambda_1 - \lambda_1')v_1 + \dots + (\lambda_n - \lambda_n')v_n = \mathbf{0}\,.$$

Da $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind, so folgt $\lambda_1 - \lambda_1' = 0, \dots, \lambda_n - \lambda_n' = 0$, also $\lambda_1 = \lambda_1'$, $\dots$, $\lambda_n = \lambda_n'$. □

Beispiel 2.4.4.
1. Betrachten $B := \{e_1, e_2\}$ mit $e_1 := \binom{1}{0}$ und $e_2 := \binom{0}{1}$ ist Basis für $\mathbb{R}^2$. Zum Beispiel $u = \binom{8}{3} \in \mathbb{R}^2$ kann geschrieben werden als $u = 8 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2$. Die Abbildung Φ_B ist die Identität auf $\mathbb{K}^2$.
2. Die beiden Vektoren $v_1 = \binom{1}{0}$, $v_2 = \binom{1}{1}$ bilden ebenfalls eine Basis für $\mathbb{R}^2$. Haben $\binom{8}{3} = 5 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2$. △

Bemerkung 2.4.5. Für beliebigen Körper $\mathbb{K}$ ist

$$e_1 := \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, e_1 := \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraums $\mathbb{K}^n$. Das n-Tupel $(e_1, \dots, e_n)$ heißt *Standardbasis von* $\mathbb{K}^n$.

Satz 2.4.6 (Charakterisierungssatz für Basen)**.** *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $B \subseteq V$.*

- *(Basisergänzungssatz) B ist genau dann Basis von V, wenn B eine* maximale *linear unabhängige Menge ist (d.h., jede echte Obermenge von B ist linear abhängig).*
- *(Basisauswahlsatz) B ist genau dann Basis von V, wenn B ein* minimales *Erzeugendensystem von V ist (d.h., keine echte Teilmenge von B erzeugt V).*

Beweis. Basisergänzungssatz: '$\Rightarrow$' Sei B Basis. Angenommen es gibt ein $v \in V \setminus B$ mit $B \cup \{v\}$ linear unabhängig. Da $\langle B\rangle = V$ gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ und $v_1, \dots, v_n \in B$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $B \cup \{v\}$.

'$\Leftarrow$' Sei B maximale linear unabhängige Menge. Wäre B keine Basis, so gäbe es ein $v \in V$ mit $v \notin \langle B\rangle$. Behauptung: Dann wäre $B' := B \cup \{v\}$ linear unabhängig (im Widerspruch zur Maximalität von B).

Wäre B' nicht linear unabhängig, so gäbe es $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ und $v_1, \dots, v_n \in B$ so dass $\lambda_0 v + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n b_n = \mathbf{0}$, aber $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$. Falls $\lambda_0 = 0$ so sind $b_1, \dots, b_n$ linear abhängig, Widerspruch. Falls $\lambda_0 \neq 0$ so ist $v = \lambda_0^{-1}(-\lambda_1 b_1 - \dots - \lambda_n b_n) \in \langle B \rangle$ im Widerspruch zu $v \notin \langle B \rangle$. □

Übung 4. Beweisen Sie den Basisauswahlsatz (Satz 2.4.6).

Satz 2.4.7 (Satz über die Existenz von Basen)**.** *Jeder Vektorraum hat eine Basis.*

Beweis für endlich erzeugte Vektorräume. Ausgehend von $M = \emptyset$ füge man so lange Elemente eines endlichen Erzeugendensystems von V zu M hinzu, wie M linear unabhängig bleibt. Erhalten so eine Basis von V nach dem Basisergänzungssatz.

Der Beweis für unendlich dimensionale Vektorräume erfordert das Auswahlaxiom, welches wir uns für's nächste Semester aufheben. □

2.4.4 Austauschsatz

Bemerkung: Sei K *endlicher* Körper, $|K| = q \in \mathbb{N}$. Hat ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V eine Basis mit n Elementen, so folgt aus Satz 2.4.3 (Eindeutigkeit der Koordinaten) dass $|V| = q^n$. Also hat *jede* Basis von V genau n Elemente.

Lemma 2.4.8 (Austauschlemma)**.** *Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis eines Vektorraums V und $w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ beliebig, und sei $\lambda_j \neq 0$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist $B' = (v_1, \dots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \dots, v_n)$ ebenfalls eine Basis.*

'Austausch' von v_j gegen w.

Beweis. 1ter Teil: B' ist Erzeugendensystem von V.

$$v_j = \lambda_j^{-1} w - \lambda_j^{-1} \sum_{i \neq j} \lambda_i v_i$$

also $B \subseteq \left\langle B' \right\rangle$ und

$$V = \langle B \rangle \subseteq \left\langle \left\langle B' \right\rangle \right\rangle = \left\langle B' \right\rangle \subseteq V$$

also $V = \left\langle B' \right\rangle$.

2ter Teil: B' ist linear unabhängig. Ansonsten gäbe es nichttriviale Linearkombination

$$\mu_1 v_1 + \dots + \mu_j w + \dots + \mu_n v_n = \mathbf{0}$$

Falls $\mu_j = 0$ dann sind $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig, Widerspruch zur Annahme dass B Basis. Also $\mu_j \neq 0$:

$$w = (-\mu_j^{-1}\mu_1)v_1 + \dots + (-\mu_j^{-1}\mu_{j-1})v_{j-1} + 0 \cdot v_j + (-\mu_j^{-1}\mu_{j+1})v_{j+1} + \dots + (-\mu_j^{-1}\mu_n)v_n$$

Andererseits

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_j v_j + \dots + \lambda_n v_n$$

Für die geordnete Basis $(v_1, \dots, v_n)$ ergibt sich mit Satz 2.4.3 (Eindeutigkeit der Koordinaten) dass $\lambda_j = 0$, Widerspruch. □

Beispiel 2.4.9. $V = \mathbb{R}^3$ hat die folgende Basis:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sei $w := v_2 - v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Nach Austauschlemma sind $(w, v_2, v_3), (v_1, w, v_3)$ Basen (nicht aber (v_1, v_2, w)). △

Übung 5. Zeigen Sie die Behauptungen in Beispiel 2.4.9.

Satz 2.4.10 (Austauschsatz von Steinitz)**.** *Es sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, und $C = \{w_1, \dots, w_m\}$ sei beliebige Menge linear unabhängiger Vektoren. Dann gilt*

(a) *$|C| \leq |B|$, d.h., $m \leq n$:*
'Jede linear unabhängige Menge besteht aus höchstens n Elementen'.

(b) *Durch Hinzunahme von $n - m$ geeignet gewählten Vektoren aus B kann man C zu einer Basis von V ergänzen.*

Beweis. Beweis von (a) und (b) durch Induktion über m.

Induktionsanfang $m = 1$: $w_1 \neq \mathbf{0}$, d.h., V hat mindestens ein Element ungleich $\mathbf{0}$. Also muss auch gelten $|B| \geq 1 = m$. Aussage (b) folgt direkt aus dem Austauschlemma, Lemma 2.4.8.

Induktionsschritt $m > 1$: Die Aussagen (a) und (b) seien richtig für $m-1$ (Induktionsvorraussetzung). Zu zeigen: (a) und (b) gelten auch für m. Sei $C' := \{w_1, \dots, w_{m-1}\} \subset C$ (ist linear unabhängig). Nach Induktionsvorraussetzung gelten

(a') $m - 1 \leq n$, und

(b') es gibt $v_m, \dots, v_n \in B$ so dass $B' := \{w_1, \dots, w_{m-1}, v_m, \dots, v_n\}$ Basis von V.

(a) gilt für m:
1. Fall: $n > m - 1$. Dann ist $n \geq m$, fertig.
2. Fall: $n \leq m - 1$ (also $n = m - 1$). Nach (b') ist $\{w_1, \dots, w_{m-1}\}$ Basis von V, also ist $\{w_1, \dots, w_{m-1}, w_m\}$ linear abhängig, Widerspruch zur Vorraussetzung.

(b) gilt für m: B' Basis. $w_m \in \left\langle B' \right\rangle$.

$$w_m = \lambda_1 w_1 + \cdots \lambda_{m-1} w_{m-1} + \lambda_m v_m + \cdots + \lambda_n v_n$$

Wäre $\lambda_i = 0$ für alle $i \geq m$, so wäre $w_m = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i w_i$ im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $C = \{w_1, \dots, w_m\}$. Also gibt es $j \in \{m, \dots, n\}$ mit $\lambda_j \neq 0$. Nach Austauschlemma (Lemma 2.4.8) ist

$$\{w_1, \dots, w_{m-1}, v_m, \dots, v_{j-1}, w_m, v_{j+1}, \dots, v_n\}$$

Basis von V, also ist (b) erfüllt. Nach Induktion gelten (a) und (b) für alle $m \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung 2.4.11. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$.

1. Alle Basen von V haben gleiche Mächtigkeit (nämlich n).
   Beweis: B_1, B_2 Basen. Dann gilt nach Satz 2.4.10 (1) $|B_1| \leq |B_2|$ und analog $|B_2| \leq |B_1|$.

2. Jede linear unabhängige Menge C mit n Elementen ist eine Basis.
   Beweis: Nach Satz 2.4.10 (2), denn für $m = n$ gibt es nichts zu ergänzen.

3. Ist $U \leq V$ Untervektorraum, so hat jede Basis von U höchstens n Elemente und kann stets zu einer Basis von V ergänzt werden.
   Beweis: Basis von U ist linear unabhängige Menge $C \subseteq V$, kann nach Satz 2.4.10 (2) ergänzt werden.

2.4.5 Dimension

Dimension: "Die Anzahl der Freiheitsgrade in einem mathematischen Raum"

Definition 2.4.12. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis. Dann nennt man n die *Dimension* von V.

$$\dim_K V := n$$

Für $V = \{\mathbf{0}\}$ ist $\dim V = 0$ ($B = \varnothing$). Falls keine endliche Basis existiert, schreiben wir $\dim V = \infty$. Definition hängt wegen Satz 2.4.10 nicht von der Auswahl der Basis ab.

Bemerkung 2.4.13. Seien $U_1 \leq U_2 \leq V$ Untervektorräume. Dann gilt

$$\dim U_1 \leq \dim U_2$$

sowie

$$\dim U_1 = \dim U_2 \Leftrightarrow U_1 = U_2$$

(siehe Bemerkung 2.4.11 (3)).

Definition 2.4.14. Sind $U_1, U_2 \leq V$ Untervektorräume von V, so heißt

$$U_1 + U_2 := \{u + v \mid u \in U_1, v \in U_2\}$$

die *Summe* von U_1 und U_2. Gilt zusätzlich $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$, so schreibt man

$$U_1 \oplus U_2$$

und spricht von der *direkten Summe*. Falls $U_1 \oplus U_2 = V$, so heißt U_2 *Komplement* von U_1 (in V). Wir sagen auch, U_1 und U_2 sind *komplementär*.

Satz 2.4.15. *Seien $U_1, U_2 \leq V$. Dann gilt: $U_1 + U_2 \leq V$. Mehr noch: $U_1 + U_2$ ist der kleinste Untervektorraum von V, der U_1 und U_2 enthält, d.h.,*

$$U_1 + U_2 = \langle U_1 \cup U_2 \rangle$$

Beweis. $U_1 + U_2 \subseteq \langle U_1 \cup U_2 \rangle$: klar.
$U_1 \subseteq U_1 + U_2$, $U_2 \subseteq U_1 + U_2$: klar.
Nach Proposition 2.4.1 ist $\langle U_1 \cup U_2 \rangle$ der kleinste Untervektorraum von V, der $U_1 \cup U_2$ enthält. Also reicht es zu zeigen, dass $U_1 + U_2$ ein Untervektorraum ist:

$$(u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \in U_1 + U_2$$
$$\lambda(u_1 + u_2) = (\lambda u_1) + (\lambda u_2) \in U_1 + U_2$$

Beispiele mit Zeichnung an der Tafel: Wie hängt die Dimension von Durchschnitt und Summe von den Dimensionen der einzelnen Teile ab? Betrachten Vereinigung und Schnitt von Gerade U_1 und Ebene U_2 im $\mathbb{R}^3$. Jeweils zwei Fälle:

- Gerade liegt in der Ebene, $U_1 \leq U_2$.
  $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$.
  $\dim(U_1 + U_2) = 2$.

- Gerade liegt nicht in der Ebene.
  $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$.
  $\dim(U_1 + U_2) = 3$. □

Satz 2.4.16 (Dimensionssatz)**.** *Sind $U_1, U_2 \leq V$ endlichdimensional, so gilt*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)\,.$$

Speziell gilt also
$$\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)\ .$$

Bemerkung:
$$\dim(U_1 \cap U_2) \leq \min\{\dim U_1, \dim U_2\}$$
da $U_1 \cap U_2 \leq U_1$ und $U_1 \cap U_2 \leq U_2$ (Abschnitt 2.3.3).

Beweis von Satz 2.4.16. Sei $U_0 := U_1 \cap U_2$ und $B = (v_1, \dots, v_m)$ Basis von U_0. Dann kann B zu einer Basis
$$B_1 = (v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_r)$$
von U_1 und zu Basis
$$B_2 = (v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_s)$$
von U_2 ergänzt werden (Folgerung von Satz 2.4.10 da $U_0 \leq U_1$ und $U_0 \leq U_2$).

Behauptung:
$$(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_s)$$
ist Basis von $U_1 + U_2$. Denn
$$\langle B_1 \cup B_2 \rangle = U_1 + U_2$$
und $v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_s$ sind linear unabhängig: sei

$$\lambda v_1 + \cdots + \lambda_m v_m + \mu_1 w_1 + \cdots \mu_r w_r + \gamma_1 u_1 + \cdots + \gamma_s u_s = \mathbf{0}$$

Es folgt

$$\gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_s u_s = -(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + \mu_1 w_1 + \dots + \mu_r w_r) \in U_1 \cap U_2 \tag{2.1}$$

Also gibt es Darstellung durch Basis B:

$$\gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_s u_s = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$$

Da $B_2 = (v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_s)$ linear unabhängig erhalten wir

$$\gamma_1 = \dots = \gamma_s = \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$$

Also folgt aus (2.1) dass

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m + \mu_1 w_1 + \dots + \mu_r w_r = \mathbf{0}$$

Da $B_1 = (v_1, \dots, v_m, \mu_1, \dots, \mu_r)$ linear unabhängig gilt

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_m = \mu_1 = \dots = \mu_r = 0\,.$$

Damit ist lineare Unabhängigkeit von $(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_s)$ bewiesen. □

Übung 6. Nach Satz 2.4.16 gilt $\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$. Was halten Sie von folgender Aussage:

$$\begin{aligned} \dim(U_1 + U_2 + U_3) \overset{?}{=} & \dim(U_1) + \dim(U_2) + \dim(U_3) \\ & - \dim(U_1 \cap U_2) - \dim(U_1 \cap U_3) - \dim(U_2 \cap U_3) \\ & + \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) \end{aligned}$$

Satz 2.4.17 (Charakterisierungssatz für direkte Summen)**.** *Seien $U_1, U_2 \le V$. Dan gilt $V = U_1 \oplus U_2$ genau dann wenn sich jeder Vektor $v \in V$* eindeutig *als Summe $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in U_1$ und $v_2 \in U_2$ darstellen lässt.*

Beweis. Zuerst die Rückrichtung: Haben $V = U_1 + U_2$. Ist $u \in U_1 \cap U_2$, so ist $u + (-u) = \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$. Also folgt aus Eindeutigkeit $u = \mathbf{0}$, d.h., $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$.

Hinrichtung: $V = U_1 \oplus U_2 \Rightarrow$ jedes $v \in V$ lässt sich als Summe $v_1 + v_2$ darstellen. Eindeutigkeit: ist $v = v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$ mit $v_1, v_1' \in U_1$ und $v_2, v_2' \in U_2$, so folgt

$$u_1 - v_1' = v_2' - v_2 =: u$$

also

$$u \in U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$$

Also $v_1 - v_1' = \mathbf{0}$ und daher $v_1 = v_1'$, und $v_2 - v_2' = \mathbf{0}$ und daher $v_2 = v_2'$. □

Direkte Summen mit mehreren Summanden:

$$U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 := (U_1 \oplus U_2) \oplus U_3$$

Man darf die Klammern weglassen:

$$(U_1 \oplus U_2) \oplus U_3 = U_1 \oplus (U_2 \oplus U_3)$$

Zunächst gilt $U_1 + (U_2 + U_3) = U_1 + (U_2 + U_3)$. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} (a) \quad & U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\} \\ \text{und } (b) \quad & (U_1 + U_2) \cap U_3 = \{\mathbf{0}\} \end{aligned}$$

genau dann wenn

$$\begin{aligned} (c) \quad & U_1 \cap (U_2 \oplus U_3) = \{\mathbf{0}\} \\ \text{und } (d) \quad & U_2 \cap U_3 = \{\mathbf{0}\}\,. \end{aligned}$$

Davon die Hinrichtung: $U_2 \cap U_3 \subseteq (U_1 + U_2) \cap U_3 = \{\mathbf{0}\}$ wegen (b), also gilt (d). Sei $v \in U_1 \cap (U_2 \oplus U_3)$. Dann gilt $v = u_2 + u_3$ für $u_2 \in U_2$ und $u_3 \in U_3$. Also $v - u_2 = u_3 \in (U_1 + U_2) \cap U_3 = \{\mathbf{0}\}$ wegen (b). Ausserdem $v = u_2 \in U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$, daher $v = \mathbf{0}$, also (c). Rückrichtung ähnlich.

Analoges gilt für beliebig viele Summanden.

Satz 2.4.18 (Zerlegungssatz)**.** *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $n = \dim V$, und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V. Dann ist*

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$$

für $U_i := \langle u_i \rangle = K v_i$.

Beispiel 2.4.19. $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_n$. △

Folgerung: Jeder Untervektorraum eines endlichdimensionalen Vektorraums V hat ein Komplement.

Beweis von Satz 2.4.18.

$$V = U_1 + \cdots + U_n = \langle u_1, \ldots u_n \rangle$$

Es bleibt zu zeigen: $(U_1 + \cdots + U_i) \cap U_{i+1} = \{\mathbf{0}\}$ für $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. □

Übung 7. Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 2.4.18.

Kapitel 3

Lineare Abbildungen, Gleichungssysteme, Matrizen

3.1 Lineare Abbildungen I

Lineare Abbildungen sind die wesentlichen strukturerhaltende Abbildung für Vektorräume.

Definition 3.1.1 (Lineare Abbildung)**.** Es seien V und W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine Funktion $f\colon V \to W$ heißt *lineare Abbildung* oder *(Vektorraum-) Homomorphismus* wenn gilt

- für alle $v, v' \in V$:
$$f(v + v') = f(v) + f(v') \qquad \text{(Verträglichkeit mit der Addition)}$$
- für alle $v \in V$ und $\lambda \in K$:
$$f(\lambda v) = \lambda f(v) \qquad \text{(Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation)}$$

Wir sprechen von einem *Isomorphismus* wenn f zusätzlich bijektiv ist. Weitere Bezeichnungen für den Spezialfall $V = W$:

- eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$ heißt *Endomorphismus* (von V);
- ein Isomorphismus $f\colon V \to V$ heißt *Automorphismus* (von V).

Bemerkung 3.1.2. Wenn f Isomorphismus ist, dann auch $f^{-1}\colon W \to V$, denn
$$\begin{aligned} f^{-1}(f(u) + f(v)) &= f^{-1}(f(u)) + f^{-1}(f(v)) = u + v, \\ f^{-1}(\lambda f(u)) &= f^{-1}(f(\lambda u)) = \lambda u \end{aligned}$$

Proposition 3.1.3. *Die Komposition linearer Abbildungen ist wieder linear: wenn $f\colon V_1 \to V_2$, $g\colon V_2 \to V_3$, dann ist auch $g \circ f\colon V_1 \to V_3$ linear.*

Beweis. Für alle $v, v' \in V_1$ und $\lambda \in K$ gilt
$$\begin{aligned} g(f(\lambda v)) &= g(\lambda f(v)) = \lambda g(f(v)) \\ g(f(v + v')) &= g(f(v) + f(v')) = g(f(v)) + g(f(v')). \end{aligned}$$ □

3.2 Matrizen

Beispiel einer 2×3-Matrix über $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 1 & 2.5 & \pi \end{pmatrix}$$

Formal: die Menge der $m \times n$-Matrizen mit Einträgen aus K, geschrieben $\mathbb{K}^{m\times n}$, ist Element des mn-dimensionalen Vektorraums $\mathbb{K}^{mn}$ über K. Insbesondere dürfen wir für $\lambda \in K$ und $m \times n$-Matrizen M, N schreiben: λM und $M + N$, und $\mathbf{0}$ steht für die Matrix in $\mathbb{K}^{m\times n}$, deren Einträge allesamt 0 sind.

Motivationen: Matrizen dienen der kompakten Beschreibung von z.B.

- linearen Gleichungssystemen;
- linearen Abbildungen.

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n &= z_1 \\ \cdots &= \cdots \\ b_{m1}x_1 + \cdots + b_{mn}x_n &= z_m \end{aligned}$$

Übersichtlichere Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_m \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der *Koeffizientenmatrix* B, auffassbar als Abbildung (*lineare Abbildung*)

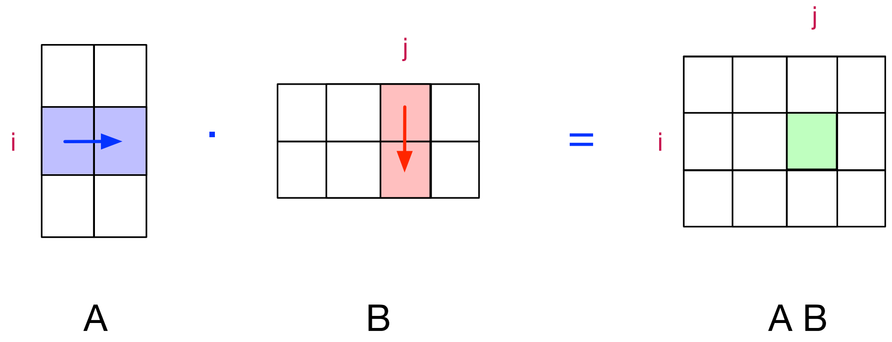
$$f_B : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : x \mapsto Bx$$

wobei

$$Bx = \sum_{i=1}^{n} x_i \begin{pmatrix} b_{1i} \\ \dots \\ b_{mi} \end{pmatrix}$$

3.2.1 Matrizenmultiplikation

Seien $f_B : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : z \mapsto Bz$ und $f_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^r : z \mapsto Az$.
Betrachten $f_{AB} := f_A \circ f_B$.
Beobachtung: es gibt ein $C \in \mathbb{K}^{n\times r}$ mit $f_C = f_{AB}$.
Schreiben: “$C = AB$”



Definition 3.2.1. Das Produkt AB zweier Matrizen $A \in \mathbb{K}^{r\times m}$ und $B \in \mathbb{K}^{m' \times n}$ ist genau dann definiert, wenn $m = m'$ und zwar durch

$$AB := \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\right)_{i=1,\dots,r,\, j=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^{rn}$$

für $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,r,j=1,\dots,m}$ und $B = (b_{ij})_{i=1,\dots,m',j=1,\dots,n}$.

Proposition 3.2.2. *Für die Matrizenmultiplikation gelten:*

1. *Assoziativitätsgesetz*
$$(AB)C = A(BC)$$

2. *Die* Einheitsmatrizen
$$E_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$
sind Eins-elemente *für die Multiplikation: Für $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ gilt*
$$E_mA = A \text{ und } AE_n = A$$

3. *Distributivgesetze*
$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(B + C)A = BA + CA$$

4. *Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation: für $\lambda \in K$ gilt*
$$(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$$

Übung 8. Beweisen Sie Proposition 3.2.2.

Definition 3.2.3. Die i-te Zeile der Einheitsmatrix hat die Gestalt

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$$

und wird *Einheitsvektor* genannt.

Beispiel 3.2.4. Matrizenmultiplikation in $\mathbb{K}^{n\times n}$ ist nicht kommutativ.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \triangle$$

Die Menge $\mathbb{K}^{n\times n}$ mit Addition und der eben definierten Multiplikation ist für $n \geq 2$ nicht einmal ein Schiefkörper, da es Matrizen ungleich $\mathbf{0}$ gibt, die kein multiplikatives Inverses haben, wie Beispiel 3.2.4 (3.1) ebenfalls zeigt.

Definition 3.2.5. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ heißt *invertierbar* (oder *regulär* oder *nichtsingulär*) wenn $m = n$ (*quadratische* Matrix) und eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ existiert, so dass

$$AB = BA = E_n \,.$$

Die Matrix B ist durch A eindeutig bestimmt (Lemma 2.1.4!) und wird mit A^{-1} bezeichnet.

Bezeichnung:

$$\mathrm{GL}(n, K) := \{A \in \mathbb{K}^{n\times n} \mid A \text{ invertierbar}\}$$

(englisch: *“general linear group”*)

Eigenschaften.

1. Für $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gilt

$$AB = E_n \Leftrightarrow BA = E_n \Leftrightarrow B = A^{-1} \Leftrightarrow A = B^{-1}$$

2. Ist A invertierbar, so auch A^{-1} und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$.

3. Sind $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbare Matrizen, so ist auch AB invertierbar und es gilt

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \tag{3.2}$$

4. $\mathrm{GL}(n, K)$ ist bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe.

5. Für $\lambda \in K \setminus \{0\}$ gilt $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$. Denn: $\lambda^{-1}A^{-1}(\lambda A) = \lambda^{-1}\lambda A A^{-1} = E_n$.

Beispiel 3.2.6. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \setminus \{0\}$,Z heißt *Diagonalmatrix.* Offensichtlich gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & & 0 \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} \qquad \triangle$$

Übung 9. Wie berechnet sich das Produkt von Diagonalmatrizen?

3.2.2 Rang

Definition 3.2.7 (Rang)**.** Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Die maximale Zahl linear unabhängiger Spalten von A (in $\mathbb{K}^m$) heißt *Spaltenrang* von A. Die maximale Zahl linear unabhängiger Zeilen von A (in $\mathbb{K}^n$) heißt *Zeilenrang* von A.

Bemerkung 3.2.8. Seien $v_1, \dots, v_n$ die Spalten von A. Dann

$$\text{Spaltenrang von } A = \dim_{\mathbb{K}^m} \langle v_1, \dots, v_n \rangle$$

Seien $z_1, \dots, z_m$ die Zeilen von A. Dann

$$\text{Zeilenrang von } A = \dim_{\mathbb{K}^n} \langle z_1, \dots, z_m \rangle$$

Satz 3.2.9. *Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Dann*

$$\text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A)$$

Definieren $\text{rg}(A) := \text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A)$.

Beweis. Eine Spalte heiße *linear überflüssig* wenn sie Linearkombination der andern Spalten ist. Analog für Zeilen. Weglassen einer linear überflüssigen Spalte ändert den Spaltenrang nicht.

Behauptung. Weglassen einer linear überflüssigen Spalte ändert auch den Zeilenrang nicht! Sei etwa letzte Spalte v_n linear überflüssig, d.h.,

$$v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$$

also $a_{in} = \lambda_1 a_{i1} + \dots + \lambda_{n-1} a_{i,n-1}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Durch Weglassen der n-ten Spalte entstehe aus A die Matrix A' mit Zeilen $z_1', \dots, z_m'$. Dann gilt

$$\alpha_1 z_1' + \dots + \alpha_m z_m' = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_m z_m = \mathbf{0}$$

Rückrichtung hierbei klar. Hinrichtung: für die letzte Komponente gilt

$$\begin{aligned}\alpha_1 a_{1n} + \dots + \alpha_m a_{mn} &= \alpha_1 \left(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k a_{1k} \right) + \dots + \alpha_m \left(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k a_{mk} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (\alpha_1 a_{1k} + \dots + \alpha_m a_{mk}) = 0\end{aligned}$$

Analog ändert das Weglassen einer linear überflüssigen Zeile nicht den Spaltenrang. Durch sukzessives Weglassen von linear überflüssigen Zeilen und Spalten gelangt man zu einer $m' \times n'$-Matrix $A' \in \mathbb{K}^{m' \times n'}$ ohne linear überflüssige Zeilen oder Spalten, mit m' Zeilen in $\mathbb{K}^{n'}$ und n' Spalten in $\mathbb{K}^{m'}$:

$$\text{Zeilenrang}(A) = \text{Zeilenrang}(A') = m' \leq \dim(\mathbb{K}^{n'}) = n'$$

$$\text{Spaltenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A') = n' \leq \dim(\mathbb{K}^{m'}) = m'$$

Also $m' = n'$. □

Beispiel 3.2.10. Der Rang der Nullmatrix $\mathbf{0}$ (alle Einträge 0) ist Null: $\operatorname{rg}(\mathbf{0}) = 0$. △

3.2.3 Zeilenumformungen

Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Die folgenden Umformungen von A heißen *elementare Zeilenumformungen* (manchmal auch *(elementare) Zeilentransformationen)*:

(1) Vertauschung zweier Zeilen;

(2) Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \in K \setminus \{0\}$;

(3) Addition des λ-fachen $(\lambda \in K)$ einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Analog: *elementare Spaltenumformungen.*

Bemerkung 3.2.11. Mit (1) lassen sich die Zeilen beliebig permutieren (Satz 4.1.1).

Bemerkung 3.2.12. Jede elementare Zeilenumformung lässt sich wieder mit einer elementaren Zeilenumformung rückgängig machen.

Beispiel 3.2.13.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)]{z_2 - 2z_1 \rightsquigarrow z_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)]{z_3 - 3z_1 \rightsquigarrow z_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vorteil der letzten Darstellung: Zeilenrang (=1) sofort ablesbar. △

Lemma 3.2.14. *Elementare Umformungen ändern den Rang einer Matrix nicht.*

Beweis. $\langle z_1, \dots, z_n \rangle$ bleibt bei elementaren Zeilenumformungen erhalten:

- $\langle z_1, z_2\rangle = \langle \lambda z_2, z_1\rangle$
- für $\lambda \in K \setminus \{0\}$ gilt: $\langle z\rangle = \langle \lambda z\rangle$
- $\langle z_1, z_2 + \lambda z_1\rangle = \langle z_1, z_2\rangle$ □

Verfahren zur Bestimmung des Ranges mit Hilfe von elementare Zeilenumformungen bis Matrix entsteht, deren Rang direkt sichtbar ist.

Definition 3.2.15. $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ist in *(oberer) Stufenform*, falls A von der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_3} & \cdots & a_{1j_r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a_{2j_2} & \dots & a_{2j_3} & \cdots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & a_{rj_r} & \cdots & a_{rn} \\ 0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

mit $a_{1j_1}, \dots, a_{rj_r}$ von 0 verschieden.

Bemerkung 3.2.16. Für $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ von der Form (3.3), so gilt $\operatorname{rg}(A) = r$ (gleich der Anzahl der *Stufen*). Grund: die ersten r Zeilen sind linear unabhängig, denn $\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_r z_r = \mathbf{0}$ impliziert

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{1j_1} + \lambda_2 \cdot 0 + \cdot \lambda_r \cdot 0 = 0 \quad & (\Rightarrow \lambda_1 = 0) \qquad && (j_1\text{-te Komponente}) \\ \lambda_1 a_{1j_2} + \lambda_2 a_{2j_2} + \lambda_2 \cdot 0 + \cdot \lambda_r \cdot 0 = 0 \quad & (\Rightarrow \lambda_2 = 0) \qquad && (j_2\text{-te Komponente}) \\ & \text{usw.} \end{aligned}$$

Also $j_i = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$, und $\operatorname{rg}(A) = r$.

Bemerkung 3.2.17. Jede Zeilenumformung einer Matrix A lässt sich beschreiben als Matrizenmultiplikation TA von A mit einer geeigneten Matrix T:

1. $\lambda z_i \rightsquigarrow z_i$ (Multiplikation der Zeile z_i mit λ): Wähle

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & & & & & \\ & & & \lambda & & & & \\ & & & & 1 & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $z_i \leftrightsquigarrow z_j$ (Vertauschung von Zeile z_i und z_j): Wähle

$$T := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & \vdots & & \vdots & & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

3. $z_i + \lambda z_j \rightsquigarrow z_i$ (Addition der Zeile z_i mit dem λ-fachen der Zeile z_j):

$$T := \begin{array}{c c} \begin{array}{cccc} & & j & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & \lambda & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Diese Matrizen T werden auch *Elementarmatrizen* genannt.

Bemerkung 3.2.18. Offensichtlich ist jede Elementarmatrix invertierbar, und die inverse Matrix ist ebenfalls eine Elementarmatrix:

- Falls T die Elementarmatrix ist von $\lambda z_i \rightsquigarrow z_i$, dann ist T^{-1} die Elementarmatrix von $\frac{1}{\lambda} z_i \rightsquigarrow z_i$;
- Falls T die Elementarmatrix ist von $z_i \leftrightsquigarrow z_j$, dann ist $T^{-1} = T$;
- Falls T die Elementarmatrix ist von $z_i + \lambda z_j \rightsquigarrow z_i$, dann ist T^{-1} die Elementarmatrix von $z_i - \lambda z_j \rightsquigarrow z_i$.

Bemerkung 3.2.19. Analog lassen sich elementare Spaltenumformungen durch Multiplikation mit Elementarmatrizen *von rechts* beschreiben.

3.2.4 Algorithmus zur Umwandlung einer Matrix in Stufenform

In diesem Abschnitt stellen wir eine Prozedur zur Rangbestimmung vor. Es handelt sich um das Kernstück des Gaußschen Algorithmus zur Lösung von linearen Gleichungssystemen.

Beispiel 3.2.20. Betrachten $A \in \mathbb{Q}^{3\times 4}$ wie folgt.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1)]{z_1 \leftrightsquigarrow z_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)]{z_3 - \frac{1}{2} z_1 \rightsquigarrow z_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Stufenform, $\mathrm{rg}(A) = 3$. △

Allgemein: induktiver Algorithmus. Hat die Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ die Gestalt[1]

$$\left(\begin{array}{cccccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \text{beliebig} & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{k-1j_{k-1}} & * & \cdots & * \\ \hline & & & & & & a_{k,j_k} & & \\ & & & \mathbf{0} & & & \vdots & B & \\ & & & & & & a_{m,j_k} & & \end{array}\right) \tag{3.4}$$

mit $a_{1j_1}, \ldots, a_{k-1,j_{k-1}} \neq 0$ und k größtmöglich. Falls Stufenform noch nicht erreicht ist, so lässt sich weiter wie folgt verfahren:

1ter Fall: $a_{k,j_k} = 0$. Vertauschen der k-ten Zeile mit einer Zeile, für die $a_{i,j_k} \neq 0$ $(i > k)$ (die gibt es, da Stufenform noch nicht erreicht und k größtmöglich gewählt). Damit o.B.d.A. 2ter Fall.

2ter Fall: $a_{k,j_k} \neq 0$. Von jeder Zeile z_l $(l > k)$ subtrahiere man $(a_{l,j_k} a_{k,j_k}^{-1}) z_k$.

Dies ergibt Matrix der Gestalt

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 0 & \cdots & 0 & a_{1j_1} & * & \ldots & * & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & \\ \vdots & & & & \ddots & a_{k-1j_{k-1}} & * & & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_{k,j_k} & & \\ \hline & & & & \mathbf{0} & & & & B' \end{array}\right)$$

Der Algorithmus endet, wenn $B' = \mathbf{0}$ oder wenn keine Zeilen mehr vorhanden sind.

3.2.5 Bestimmung von Dimension und Basen

Seien $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{K}^n$. Bestimmung von $d := \dim\langle u_1, \ldots, u_m\rangle$: Sei

$$A := \begin{pmatrix} -u_1- \\ \vdots \\ -u_m- \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

Dann gilt $d = \operatorname{rg}(A)$ und d ist durch Umformen von A in Zeilen-Stufenform bestimmbar. Siehe Lemma 3.2.14 (elementare Zeilenumformungen ändern den Rang nicht) und Beobachtung am Ende von Abschnitt 3.2.3 (Ablesen des Rangs in der Stufenform).

Bestimmung einer Basis von $V := \langle u_1, \ldots, u_m\rangle$: Umformen von

$$A = \begin{pmatrix} -u_1- \\ \vdots \\ -u_m- \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

[1] Sterne in Matrizen stehen für beliebige Einträge.

in Stufenform $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Die vom Nullvektor verschiedenen Zeilen von B bilden eine Basis von V. Denn: falls

$$\begin{pmatrix} -z_1- \\ \vdots \\ -z_m- \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -u_1- \\ \vdots \\ -u_m- \end{pmatrix}$$

durch elementare Zeilenumformung, so ist $\langle z_1, \dots, z_m \rangle = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$ (siehe Beweis von Satz 3.2.14, "Elementare Umformungen ändern den Rang einer Matrix nicht").

Sei nun V ein beliebiger n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Das Rechnen in V lässt sich auf das Rechnen mit Koordinatenvektoren bzgl. einer Basis zurückführen (Grundlage: Satz 2.4.3).

Wiederholung: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit geordneter Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$. Dann ist

$$\Phi_B \colon \mathbb{K}^n \to V : (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

ein *Isomorphismus*, d.h., eine bijektive Abbildung mit den Eigenschaften

- $\Phi(z_1 + z_2) = \Phi(z_1) + \Phi(z_2)$;
- $\Phi(\lambda z) = \lambda \Phi(z)$.

D.h., $\mathbb{K}^n$ und V sind "im Prinzip" der gleiche Vektorraum (Vergleiche: Satz 2.4.3).

Konsequenz. Für $i \in \{1, \dots, m\}$ seien $w_i \in V$ und $u_i = (\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{in}) \in \mathbb{K}^n$ so dass $w_i = \phi_B(u_i)$. Das bedeutet:

$$\begin{aligned} w_1 &= \lambda_{11} v_1 + \dots + \lambda_{1n} v_n \\ &\vdots \\ w_m &= \lambda_{m1} v_1 + \dots + \lambda_{mn} v_n \end{aligned}$$

Setzen

$$A := \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m1} & \cdots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}$$

Dann gelten

$$\dim_V \langle w_1, \dots, w_m \rangle = \dim_{\mathbb{K}^n} \langle u_1, \dots, u_m \rangle = \operatorname{rg}(A) \tag{3.5}$$

und

$$\langle w_1, \dots, w_m \rangle = \Phi_B(\langle u_1, \dots, u_m \rangle) \,. \tag{3.6}$$

Insbesondere: $(b_1, \dots, b_s)$ ist genau dann Basis von $\langle u_1, \dots, u_m \rangle$, wenn $(\Phi(b_1), \dots, \Phi(b_s))$ Basis von $\langle w_1, \dots, w_m \rangle$ ist.

3.2.6 Invertierbarkeitskriterium

Satz 3.2.21. *Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn* $\mathrm{rg}(A) = n$.

Beweis. "$\Rightarrow$": Sei A invertierbar. Dann sind die Spalten von $v_1, \dots, v_n$ von A linear unabhängig: falls $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \mathbf{0}$, also

$$A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = \mathbf{0},\ \text{dann ist } A^{-1}A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = \mathbf{0}\ .$$

Da $A^{-1}A = E_n$ erhalten wir $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = \mathbf{0}$ and daher $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
Also ist $\mathrm{rg}(A) = n$ der Spaltenrang von A.

"$\Leftarrow$": Sei $\mathrm{rg}(A) = n$. Dann sind Spalten $v_1, \dots, v_n$ von A linear unabhängig, also eine Basis von $\mathbb{K}^n$, und $\langle v_1, \dots, v_n\rangle = \mathbb{K}^n$. Also gibt es Linearkombinationen

$$\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = e_1 = b_{11}v_1 + \cdots + b_{n1}v_n$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = e_n = b_{1n}v_1 + \cdots + b_{nn}v_n$$

Also ist

$$A\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ b_{11}v_1 + \cdots + b_{n1}v_n & \cdots & b_{1n}v_1 + \cdots + b_{nn}v_n) \\ | & & | \end{pmatrix} = E_n$$

und haben damit das Inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}$$

zu A gefunden. □

3.2.7 Konstruktion der inversen Matrix

Es gelte $AB = C$ für drei Matrizen $A, B, C \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Überführt man A und C durch die *gleichen* elementaren Zeilenumformungen in Matrizen A' und C', dann gilt auch $A'B = C'$.

Denn: eine elementare Zeilenumformung entspricht Multiplikation von links mit einer Elementarmatrix T, und damit:

$$\begin{aligned} AB = C &\Rightarrow T(AB) = TC \\ &\Rightarrow (TA)B = TC \qquad \text{(nach Proposition 3.2.2).} \end{aligned}$$

Folgerung:

$$\begin{array}{ccc} AA^{-1} & = & E_n \\ \rightsquigarrow & & \rightsquigarrow \\ E_nA^{-1} & = & A^{-1} \end{array}$$

Das bedeutet: erhält man E_n durch elementare *Zeilen*umformungen aus einer Matrix A, so verwandeln die gleichen Zeilenumformungen die Matrix E_n in die Matrix A^{-1}.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

$$z_3 - z_1 \rightsquigarrow z_3 \qquad z_3 - z_1 \rightsquigarrow z_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2^{-1}z_3 \rightsquigarrow z_3 \qquad 2^{-1}z_3 \rightsquigarrow z_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2^{-1} & 0 & 2^{-1} \end{pmatrix}$$

$$z_1 - (-2)z_3 \rightsquigarrow z_1 \qquad z_1 - (-2)z_3 \rightsquigarrow z_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2^{-1} & 0 & 2^{-1} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Zur Konstruktion von A^{-1} benötigen wir also einen Algorithmus, der A durch Zeilenumformungen in E_n überführt.

1. Teil: Umformung von A mit Algorithmus in Zeilen-Stufenform (Abschnitt 3.2.4). Gibt es weniger als n Stufen, so ist $\operatorname{rg}(A) \leq n-1$, und A ist nicht invertierbar (siehe Abschnitt 3.2.5). Ansonsten hat A die Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

wobei alle $a_{ii} \in K \setminus \{0\}$.

2. Teil, 1. Schritt: Alle Diagonalelemente zu 1:
Multiplikation von z_i mit a_{ii}^{-1} für $i \in \{1,\dots,n\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Alle Elemente $*$ zu Null machen: Für $j = 2, 3, \dots, n$ (der Reihe nach) Bearbeitung der Spalte j: Von Zeile z_i mit $i \in \{1,\dots,j-1\}$ wird $a_{ij}z_j$ abgezogen (ersetze z_i durch $z_i - a_{ij}z_j$). Dies ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & * & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und führt schließlich zu E_n.

Satz 3.2.22. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n,m}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *A ist invertierbar (d.h., invertierbar: A^{-1} existiert)*
2. $\mathrm{rg}(A) = n$
3. *Die Spalten von A sind linear unabhängig*
4. *Die Zeilen von A sind linear unabhängig*
5. *A kann durch elementare Zeilenumformungen in E_n umgewandelt werden*
6. $\det A \neq 0$ *(kommt später in Abschnitt 4.1, Satz 4.1.6)*

Beweis. (1) $\Leftrightarrow$ (2): Satz 3.2.21.
(2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4): Satz 3.2.9.
(1) $\Leftrightarrow$ (5): Abschnitt 3.2.7. □

3.3 Lineare Gleichungssysteme

3.3.1 Definitionen

Ist $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$ so heißt

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

kurz

$$Ax = b \qquad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

lineares Gleichungssystem (LGS) (mit m Gleichungen und n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ und Koeffizienten aus K).

- $b \neq \mathbf{0}$: *inhomogenes* LGS
- $b = \mathbf{0}$: *homogenes* LGS

$Ax = \mathbf{0}$ ist das *zu* $Ax = b$ *gehörige homogene Gleichungssystem.*

$$\text{Lös}(A, b) := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = b\}$$

heißt *Lösungsmenge* des LGS $Ax = b$.

3.3.2 Lösbarkeitskriterium

Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Dann heißt $Ax - b$ *lösbar* falls $\text{Lös}(A, b) \neq \varnothing$.
Seien $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{K}^m$ die Spalten von A. Dann gilt

$$f_A(x) = Ax = x_1 s_1 + \dots + x_n s_n.$$

Folgerung: $Ax - b$ genau dann lösbar wenn $b \in \langle s_1, \dots, s_n\rangle$.

Es gibt drei Möglichkeiten:

1. $Ax = b$ ist nicht lösbar: $\text{Lös}(A, b) = \varnothing$.
   Zum Beispiel $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 + x_2 = 2$.
2. $Ax = b$ ist eindeutig lösbar: $|\text{Lös}(A, b)| = 1$.
   Zum Beispiel $x_1 + x_2 = 1$, $x_2 = 2$.
3. $Ax = b$ hat mehrere Lösungen: $|\text{Lös}(A, b)| > 1$.
   Zum Beispiel $x_1 + x_2 = 1$, $2x_1 + 2x_2 = 2$.

Proposition 3.3.1. *Ein LGS $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn*

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b).$$

Dabei bezeichne $A|b$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Beweis. Schreiben $s_1, \ldots, s_n$ für die Spalten von A.

$$\begin{aligned} & Ax = b \text{ lösbar} && \\ \Leftrightarrow\quad & b \in \langle s_1, \ldots, s_n \rangle && \text{(siehe Bemerkungen Abschnitt 3.3.2)} \\ \Leftrightarrow\quad & \langle s_1, \ldots, s_n \rangle = \langle s_1, \ldots, s_n, b \rangle && \\ \Leftrightarrow\quad & \dim \langle s_1, \ldots, s_n \rangle = \dim \langle s_1, \ldots, s_n, b \rangle && \text{(siehe Bemerkungen Abschnitt 2.4.5)} \\ \Leftrightarrow\quad & \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b) && \text{(siehe Abschnitt 3.2.2)} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.3.2. $\operatorname{rg}(A) = m$ ist hinreichende (aber nicht notwendige) Bedingung für Lösbarkeit (denn $\operatorname{rg}(A) \le \operatorname{rg}(A|b) \le m$).

Satz 3.3.3. *Sei v_0 eine Lösung des LGS $Ax = b$ (d.h., $Av_0 = b$). Dann gilt*

$$\text{Lös}(A, b) = v_0 + \text{Lös}(A, \mathbf{0}) = \{v_0 + v \mid v \in \text{Lös}(A, \mathbf{0})\}$$

"Allgemeine Lösung des inhomogenen LGS = spezielle Lösug des inhomogenen LGS + allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen LGS."

Beweis. Sei $v \in \text{Lös}(A, \mathbf{0})$. Nach Distributivitätsgesetz gilt

$$A(v_0 + v) = Av_0 + Av = b + \mathbf{0} = b$$

D.h., $v_0 + v \in \text{Lös}(A, b)$.
Umgekehrt: Sei $w \in \text{Lös}(A, b)$. Dann ist $v := w - v_0 \in \text{Lös}(A, \mathbf{0})$, denn

$$Av = A(w - v_0) = Aw - Av_0 = b - b = \mathbf{0}\,.$$

Also $w = v_0 + v \in v_0 + \text{Lös}(A, \mathbf{0})$. □

Beispiel 3.3.4. $K = \mathbb{R}$, $m = 1$, $n = 2$.

$$2x_1 + 4x_2 = 12$$

'$Ax = b$':

$$A = (2\ 4) \in \mathbb{R}^2, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad b = (1\ 2) \in \mathbb{R}^2$$

$v_0 = \binom{4}{1}$ ist spezielle Lösung.

$$\begin{aligned}\text{Lös}(A, \mathbf{0}) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid 2x_1 + 4x_2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} =: \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}\end{aligned}$$

ist Gerade $x_2 = -\frac{1}{2}x_1$. Zeichnung!

Menge aller Lösungen:

$$\text{Lös}(A, b) = v_0 + \text{Lös}(A, \mathbf{0}) = \left\{ \begin{pmatrix} 4 - 2\lambda \\ 1 + \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

ist Gerade $x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 3$. Zeichnung! △

3.3.3 Bild und Kern

Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Definieren *Kern* und *Bild* von A. Entspricht Kern und Bild der Abbildung

$$f_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : x \mapsto Ax$$

Bild von A (ist das Bild von f_A; vergleiche Abschnitt 1.2.3):

$$\text{Bild}\, A := \{Ax \mid x \in \mathbb{K}^n\} = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$$

wobei $s_1, \dots, s_n$ die Spalten von A. Also:

$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Bild}\, A)$$

Kern von A (ist der Kern von f_A, allerdings etwas anders definiert als in Abschnitt 1.2.3):

$$\text{Kern}\, A := \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \mathbf{0}\} = \text{Lös}(A, \mathbf{0})$$

Satz 3.3.5. Kern A *ist Untervektorraum von* $\mathbb{K}^n$. *Es gilt*

$$\dim(\text{Kern}\, A) + \dim(\text{Bild}\, A) = n$$

Dimensionsformel: $\text{rg}\, A = n - d$, *wobei* $d := \dim(\text{Kern}\, A)$ *der* Defekt *von* A.

Beweis: später für lineare Abbildungen, Satz 3.4.15.

Seien $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$. Ist v_0 spezielle Lösung von $Ax = b$ und ist $(v_1, \dots, v_d)$ Basis von $\text{Lös}(A, \mathbf{0})$, so ist

$$\text{Lös}(A, b) = \{v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_d v_d \mid \lambda_1, \dots, \lambda_d \in K\}$$

($d = n - \text{rg}(A)$ nach Satz 3.3.5). D.h., $d = n - \text{rg}(A)$ ist Anzahl der frei wählbaren Parameter $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ für allgemeine Lösung $x = v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_d v_d \in \mathbb{K}^n$.

Korollar 3.3.6. [2] *Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$ so dass das LGS $Ax = b$ lösbar. Dann ist $Ax = b$ genau dann* eindeutig *lösbar, wenn* $\operatorname{rg} A = n$.

Beweis.

$$\begin{aligned} Ax = b \text{ ist eindeutig lösbar} &\iff |\operatorname{Lös}(A,b)| = 1 \\ &\iff \operatorname{Lös}(A,\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\} && \text{(Satz 3.3.3)} \\ &\iff \dim(\operatorname{Kern} A) = 0 \\ &\iff \operatorname{rg}(A) = n - \dim(\operatorname{Kern} A) = n && \text{(Satz 3.3.5)} \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkungen.

- Eindeutigkeit der Lösung hängt nur von A ab (nicht von b)
- Für $n = m$ und $\operatorname{rg}(A) = n$ ist $A^{-1}b$ die (eindeutig bestimmte) Lösung von $Ax = b$.
- Für $n > m$ (mehr Unbekannte als Gleichungen) gilt: wenn lösbar, dann nie eindeutig (weil $\operatorname{rg}(A) \leq m < n$).
- Für $n < m$: alles möglich (3. Fall in Abschnitt 3.3.2). Wegen $\operatorname{rg}(A) \leq n$ (insbesondere: Zeilenrang$(A) \leq n$) sind einige der Zeilen Linearkombinationen der anderen (also 'überflüssig', falls LGS lösbar).

3.3.4 Der Gaußsche Algorithmus

Wie löst man ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$? Prinzip: $Ax = b$ wird durch Zeilenumformungen in ein gleichwertiges LGS $A'x = b'$ umgewandelt, d.h., $\operatorname{Lös}(A,b) = \operatorname{Lös}(A',b')$, so dass $\operatorname{Lös}(A',b')$ leicht berechenbar ist.

Wir verwenden den Algorithmus aus Abschnitt 3.2.4 mit der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$. Umformung von $(A|b)$ diesem Algorithmus ergibt Matrix $(A'|b')$ in Stufenform.

$$(A'|b') = \left(\begin{array}{ccccccccccccc|c} 0 & \cdots & 0 & a'_{1j_1} & \cdots & a'_{1j_2} & \cdots & a'_{1j_3} & \cdots & a'_{1j_r} & \cdots & a'_{1n} & & b'_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & a'_{2j_2} & \dots & a'_{2j_3} & \cdots & & & \vdots & & b'_2 \\ \vdots & & & & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & & \ddots & a'_{rj_r} & \cdots & a'_{rn} & & b'_r \\ 0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 & \cdots & 0 & & b'_{r+1} \\ \vdots & & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 & \cdots & 0 & & b'_m \end{array}\right)$$

mit $a'_{1j_1} \neq 0, \dots, a'_{rj_r} \neq 0$.
Merke: $r = \operatorname{rg}(A)$.

[2] Ein *Korollar* bezeichnet in der Mathematik eine wahre Aussage von Interesse, die sich unmittelbar, oder mit vergleichsweise geringem Aufwand, aus einer (meist direkt davor) bewiesenen Aussage ergibt.

1. Fall: $b'_{r+1}, \ldots, b'_n$ nicht alle 0. Dann ist $\operatorname{rg}(A|b) > r = \operatorname{rg}(A)$, und nach Proposition 3.3.1 ist $Ax = b$ nicht lösbar.

2. Fall: $b'_{r+1}, \ldots, b'_n = 0$. Dann ist $Ax = b$ lösbar nach Proposition 3.3.1 (und eindeutig lösbar falls $r = n$, Korollar 3.3.6).

Lemma 3.3.7. $\text{Lös}(A, b) = \text{Lös}(A', b')$.

Beweis. Elementare Zeilenumformungen ändern nichts (vergleiche Abschnitt 3.2.7):

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ \wr\; & \;\;\wr \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(elementare Zeilenumformung)} \\ A'x &= b' \end{aligned}$$

Lösung von $A'x = b'$ einfach berechenbar:

$$a'_{rj_r}x_{j_r} + a'_{rj_r+1}x_{j_r+1} + \cdots + a'_{rn}x_n = b'_r$$

Auflösen nach x_{j_r} (‘an Stufe’):

$$x_{j_r} = (a'_{rj_r})^{-1}(b'_r - a'_{rj_r+1}x_{j_r+1} - \cdots - a'_{rn}x_n)$$

Zeile Nr. i:

$$a'_{ij_i}x_{j_i} + a'_{ij_i+1}x_{j_i+1} + \cdots a'_{in}x_n = b'_i$$

auflösen nach x_{j_i}, bereits berechnete x_k für $k > j_i$ einsetzen. Schließlich: die restlichen $x_{j_i}, \ldots, x_{j_{i_1}-1}$ als freie Parameter wählen. $\square$

Beispiel 3.3.8. LGS $Ax = b$:

$$\begin{aligned} x_3 + 3x_4 + 3x_5 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 6x_5 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 5x_4 + 3x_5 &= 4 \end{aligned}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 7 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Umformung zu Stufenform: $z_1 \leftrightsquigarrow z_2$ (Stufenelement muss ungleich Null sein):
“Pivotelement” (für numerische Berechnungen in $\mathbb{Q}$ ist Wahl wichtig).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 7 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$z_3 - z_1 \rightsquigarrow z_3$ und $z_4 - 2z_1 \rightsquigarrow z_4$ (1. Spalte unterhalb von Stufe alles zu 0):

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

$z_3 - z_2 \rightsquigarrow z_3$ und $z_4 - (-z_2) \rightsquigarrow z_4$ (3. Spalte unterhalb von Stufe alles zu 0).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Stufenform $(A'|b')$ erreicht. Wegen $\mathrm{rg}(A) = 2 = \mathrm{rg}(A|b)$ ist LGS lösbar (Proposition 3.3.1).

Lösungen berechnen. Haben freie Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$.
$x_5 = \lambda_3$
$x_4 = \lambda_2$
$x_3 = 2 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3$ (aus dritter Zeile $x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 2$)
$x_2 = \lambda_1$
$x_1 = 3 - 2\lambda_1 - (2 - 3\lambda_2 - 3\lambda_3) - 4\lambda_2 - 3\lambda_3) = 1 - 2\lambda_1 - \lambda_2$.

Es gilt also:

$$\text{Lös}(A, b) = \{\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}^3\} \qquad \triangle$$

Bemerkung. Mit dem gaußschen Algorithmus[3] lassen sich folgende Probleme lösen:

1. Enscheiden, ob ein LGS (Abschnitt 3.3.4) eine Lösung besitzt;
2. Bestimmung von Kern A;
3. Bestimmung von Bild A;
4. Den Rang einer Matrix berechnen (Abschnitt 3.2.3);
5. $\dim \langle z_1, \ldots, z_m \rangle$ berechnen (Abschnitt 3.2.5);
6. Basis von $\langle z_1, \ldots, z_m \rangle$ ausrechnen (Abschnitt 3.2.5);
7. Bestimmung der Determinante von A (später in Abschnitt 4.1).

[3] Das Verfahren war schon vor Gauß in Europa und unabhängig in China bekannt.

3.3.5 Bestimmung von Kern und Bild

Bestimmung von Kern A**.**

$$\operatorname{Kern} A = \text{Lös}(A, \mathbf{0}) = \text{Lös}(A', \mathbf{0})$$

wobei A' in Zeilen-Stufenform. Im Beispiel (aus Abschnitt 3.3.4):

$$A' = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & \lambda_1 & x_3 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Lösungen des homogenen Systems $A'x = \mathbf{0}$ haben die Form

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ -3\lambda_2 - 3\lambda_3 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ für } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K.$$

Wegen $\dim \operatorname{Kern} A = n - \operatorname{rg}(A) = 5 - 2 = 3$ (Satz 3.3.5) müssen für Basis von $\operatorname{Kern} A$ drei linear unabhängige Lösungen gefunden werden. Diese erhält man, wenn man für $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ eine Basis von $\mathbb{K}^3$ einsetzt, zum Beispiel die Einheitsvektoren $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Also:

$$w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist Basis von $\operatorname{Kern} A$.

Bestimmung von Bild A**.**

Es seien $s_1, \dots, s_n$ Spalten von $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Dann: $\operatorname{Bild} A = \langle s_1, \dots, s_n \rangle$ (siehe Abschnitt 3.3.3). Ein Vektor $b \in \mathbb{K}^m$ ist also genau dann im Bild von A, wenn $Ax = b$ eine Lösung besitzt.

Ziel: Berechnung einer Basis von $\operatorname{Bild} A \subseteq \mathbb{K}^m$. Idee: Auch hierfür kann das Verfahren aus Abschnitt 3.2.5 (Umformung in Stufenform) verwendet werden.

Definition 3.3.9. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}.$$

Die Matrix

$$A^\top := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times m}$$

heißt *transponierte Matrix* von A (Zeilen und Spalten vertauscht).
Entspricht Spiegelung an der Diagonalen: ($\diagdown$).

Beispiel 3.3.10.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

(Zeilenvektor)$^\top$ = (Spaltenvektor):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

△

Bemerkung 3.3.11. Zu Rechnungen mit der Transposition.

- Offenbar: $(A^\top)^\top = A$.
- $(AB)^\top = B^\top A^\top$. Denn

$$(AB)^\top = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)_{ki} = \left(\sum_{j=1} b_{jk}a_{ij}\right)_{ki} = B^\top A^\top$$

- Ist $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar, so gilt $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$. Denn:

$$A^\top \cdot (A^{-1})^\top = (A^{-1}A)^\top = E^\top = E$$

Beispiel 3.3.12. Beispiel aus Abschnitt 3.3.4:

$$A := \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} s_1 & s_2 & s_3 & s_4 & s_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 7 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Spalten von A als Zeilen der Matrix

$$A^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{array}$$

Auf Zeilen-Stufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Basis von Bild A:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Wegen Bild $A = \operatorname{rg}(A) = 2$ (Abschnitt 3.3.4) braucht man nur zwei linear unabhängige Spalten von A zu finden, z.B.

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } s_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}. \qquad \triangle$$

Unlösbarkeitskriterium. Wenn $Ax = b$ für $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$ eine Lösung hat, kann man das einfach durch Angabe einer Lösung in $\mathbb{K}^n$ beweisen. Gibt es auch einfache Beweise dafür, dass $Ax = b$ *keine* Lösung hat? Etwas einfacheres, als den Gaußschen Algorithmus durchzuführen?

Satz 3.3.13 (Dualität)**.** *Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $c \in \mathbb{K}^m$. Dann ist das LGS $Ax = b$ genau dann unlösbar, wenn das System*

$$(A|b)^\top y = (\mathbf{0}|1)^\top \tag{3.7}$$

lösbar ist.

Beweis. Die Rückrichtung ist einfach. Dazu Vorüberlegung: Angenommen, man kann mit elementaren Zeilenumformungen in $A|b$ die Zeile $(\mathbf{0}|1) = (0 \cdots 0\ 1)$ herleiten. Entspricht der unerfüllbaren Gleichung $0x_1 + \cdots + 0x_n = 1$. Also ist dann auch $Ax = b$ unerfüllbar.

Seien nun $z_1, \ldots, z_m$ die Zeilen von $A|b$. Wenn $(\mathbf{0}|1) \in \langle z_1, \ldots, z_m\rangle$ dann ist $(\mathbf{0}|1)$ in $A|b$ mit elementaren Zeilenumformungen herleitbar. Nun gilt

$$\begin{aligned} (\mathbf{0}|1)^\top \in \langle z_1, \ldots, z_m\rangle &\iff \text{ es gibt } y_1, \ldots, y_m \in K \text{ so dass } y_1 z_1 + \cdots + y_m z_m = (\mathbf{0}|1)^\top \\ &\iff (A|b)^\top = (\mathbf{0}|1)^\top \text{ lösbar} \end{aligned}$$

Die andere Richtung in Satz 3.3.13 ist schwieriger zu zeigen, allerdings nicht viel, wenn man die Stufenform kennt. Wir überführen mit Hilfe von elementaren Zeilenumformungen die Matrix $(A|b)$ in eine Matrix $(C|d)$ in Stufenform. Wenn nun $(A|b)$ unerfüllbar ist, dann auch $(C|d)$, und $r := \mathrm{rg}(C) < \mathrm{rg}(C|d)$ nach Satz 3.2.9. Es gilt dann insbesondere $z_{r+1} = (\mathbf{0}|d_{r+1})$ mit $d_{r+1} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Ersetze z_{r+1} durch $d_{r+1}^{-1} z_{r+1} = (\mathbf{0}|1)$. Da diese Zeile durch elementare Zeilenumformungen aus $(A|b)$ hervorgegangen ist, ist also $(\mathbf{0}|1) \in \langle z_1, \ldots, z_m \rangle$. Daher ist das System $(A|b)^\top y = (\mathbf{0}|1)^\top$ lösbar. $\square$

3.4 Lineare Abbildungen II

3.4.1 Beispiele

1. Die identische Abbildung $\mathrm{id}_V \colon V \to V$ ist linear (ein Endomorphismus).
2. Die Nullabbildung $V \to V \colon v \mapsto \mathbf{0}$ stets linear.
3. Allgemeiner: für $\lambda \in K$ ist $x \mapsto \lambda x$ linear.
4. Die Abbildung $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto i \cdot z$ ist linear (betrachten $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum).

$$f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

   Geometrische Interpretation: Drehung um 90 Grad.

   Es gilt z.B. $f(v + v') = f(v) + f(v')$ und $f(2u) = 2f(u)$.

Wichtiges Beispiel:

Proposition 3.4.1. *Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Dann ist*

$$f_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : x \mapsto Ax$$

eine lineare Abbildung.

Beispiel 3.4.2. $n = m = 2$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$f_A \colon \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \qquad \triangle$$

Beispiel 3.4.3. $n = 3$, $m = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$f_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

$$f_A(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f_A(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f_A(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \triangle$$

3.4.2 Beschreibung linearer Abbildungen

Im gesamten Abschnitt stehen V und W für zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Weiterhin seien $v_1, \dots, v_n \in V$ und $f \colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:

$$f[\langle\{v_1, \dots, v_n\}\rangle] = \langle\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}\rangle \tag{3.8}$$

Denn:

$$f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n)$$

Insbesondere:

$$f[V] \leq W \qquad \text{(Proposition 2.4.1)} \tag{3.9}$$

Satz 3.4.4. *Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V. Dann gibt es zu jedem n-Tupel $(w_1, \dots, w_n) \in W^n$ genau eine lineare Abbildung $f \colon V \to W$ mit $v_i \mapsto w_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Damit ist jede lineare Abbildung f eindeutig festgelegt, wenn man die Bilder $f(v_i)$ einer Basis kennt. Die Bilder der Basiselemente sind beliebig wählbar.

Beweis von Satz 3.4.4. Jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig schreiben als $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \in V$ (Satz 2.4.3). Wir definieren dann (wohldefiniert!)

$$f(v) := \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n$$

Diese Abbildung ist linear, und $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Um die Eindeutigkeit dieser Abbildung nachzuweisen, sei f' eine beliebige lineare Abbildung mit $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f'(v) &= f'(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \\ &= \lambda(f(v_1) + \cdots + \lambda(f(v_n)) \\ &= \lambda(w_1) + \cdots + \lambda(w_n) = f(v) \end{aligned}$$

und damit $f' = f$. □

3.4.3 Kern, Bild, Rang, Defekt

Sei $f \colon V \to W$ lineare Abbildung. Dann definieren wir

- $\operatorname{Kern} f := \{v \in V \mid f(v) = \mathbf{0}\}$.
- $\operatorname{Bild} f = f[V] := \{f(v) \mid v \in V\}$ (siehe Abschnitt 1.2.2).
- $\operatorname{rg} f := \dim(\operatorname{Bild} f)$ (Definition sinnvoll wegen $\operatorname{Bild} f \leq W$, siehe (3.9))
- $\operatorname{dfkt} f := \dim(\operatorname{Kern} f)$ der *Defekt* von f.

Bemerkung 3.4.5. Begriffe für Matrizen A stimmen mit denen für die zugehörige lineare Abbildung $f_A \colon x \mapsto Ax$ überein (siehe Abschnitt 3.3.3):

- $\operatorname{Kern} A = \operatorname{Kern} f_A$;
- $\operatorname{Bild} A = \operatorname{Bild} f_A$;
- $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f_A$.

Satz 3.4.6. *Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann:*

1. *f injektiv $\iff$ $\operatorname{Kern} f = \{\mathbf{0}\}$;*
2. *f surjektiv $\iff$ $\operatorname{Bild} f = W$ $\iff$ $\dim \operatorname{Bild} f = \dim W$;*
3. *Falls $\dim V = \dim W = n < \infty$, so gilt f injektiv $\iff$ f surjektiv $\iff$ f bijektiv (also Isomorphismus)*

Beweis. Zu 1.

$$\begin{aligned} f(v) = f(v') &\iff f(v) - f(v') = \mathbf{0} \\ &\iff f(v - v') = \mathbf{0} \\ &\iff v - v' \in \operatorname{Kern} f \end{aligned}$$

Zu 2. Siehe Abschnitt 2.4.5.
Zu 3. (Gilt nur in endlich dimensionalen Vektorräumen.)

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv } &\iff \operatorname{Kern} f = \{\mathbf{0}\} \\ &\iff \dim \operatorname{Kern} f = 0 \\ &\iff \dim \operatorname{Bild} f = n - 0 = n && \text{(nach Dimensionsformel, Satz 3.3.5)} \\ &\iff \operatorname{Bild} f = W && \text{(siehe 2.)} \\ &\iff f \text{ surjektiv} && \text{(nach Definition).} \end{aligned}$$

□

Satz 3.4.7. *Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, und $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V. Dann:*

1. *f ist genau dann injektiv wenn $f(v_1), \dots, f(v_n)$ linear unabhängig;*
2. *f ist genau dann surjektiv wenn $\langle f(v_1), \dots, f(v_n)\rangle = W$;*
3. *f ist genau dann Isomorphismus wenn $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ eine Basis ist von W.*

Beweis. 1, '$\Rightarrow$': Sei f injektiv und $\lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) = \mathbf{0}$. (Z.z.: $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$). Dann:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) = \mathbf{0} \\ \Rightarrow\ & f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \mathbf{0} && \text{(Linearität von } f\text{)} \\ \Rightarrow\ & \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \in \operatorname{Kern} f \\ \Rightarrow\ & \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \mathbf{0} && \text{(Satz 3.4.6 (1.), da } f \text{ injektiv)} \\ \Rightarrow\ & \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0 && \text{(da } v_1, \dots, v_n \text{ linear unabhängig)} \end{aligned}$$

'$\Leftarrow$': Seien $f(v_1), \dots, f(v_n)$ linear unabhängig und $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in V$. Dann:

$$\begin{aligned}
&f(v) = \mathbf{0} \\
\Rightarrow\ &v \in \operatorname{Kern} f \\
\Rightarrow\ &f(v) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n) = \mathbf{0} \\
\Rightarrow\ &\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \qquad\qquad (\text{da } v_1, \dots, v_n \text{ linear unabhängig}).
\end{aligned}$$

Also ist $v = \mathbf{0}$ und f ist injektiv nach Satz 3.4.6 (1.).

2. f ist nach Definition genau dann surjektiv wenn $\operatorname{Bild} f = W$. Man rechnet leicht nach dass $\operatorname{Bild} f \le W$. Da $\langle f(v_1), \dots, f(v_n)\rangle$ der kleinste Untervektorraum von W der $f(v_1), \dots, f(v_n)$ enthält, ist f genau dann surjektiv wenn $W = \langle f(v_1), \dots, f(v_n)\rangle$.

3. Direkt aus 1. und 2. □

Satz 3.4.8 (Fundamentalsatz für endlich dimensionale Vektorräume)**.** *Je zwei n-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume sind isomorph. Insbesondere ist jeder n-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorraum V isomorph zu $\mathbb{K}^n$, geschrieben $V \simeq \mathbb{K}^n$.*

'Isomorph' bedeutet, dass ein Isomorphismus zwischen den beiden Vektorräumen existiert. Im Prinzip könnte man sich also auf $\mathbb{K}^n$ beschränken; wäre aber unpraktisch, da viele Vektorräume ganz anders angegeben sind. Trotzdem ist es eine wichtige Einsicht, dass Rechnen mit Koordinaten (nach Wahl einer Basis!) möglich ist.

Beweis. Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V, und $(w_1, \dots, w_n)$ eine Basis von W (Satz 2.4.7: Basen existieren). Nach Satz 3.4.4 gibt es eine lineare Abbildung f mit $f\colon v_i \mapsto w_i$, und f is Isomorphismus gemäß Satz 3.4.6. □

Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von $\mathbb{K}$-Vektorraum V, und $(e_1, \dots, e_n)$ die *kanonische* Basis von $\mathbb{K}^n$. Nach Satz 3.4.4 gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus

$$\Phi_B\colon \mathbb{K}^n \to V \text{ mit } \Phi_B(e_i) = v_i$$

Dieser heißt der *kanonische Basisisomorphismus*. Beschreibt den Zusammenhang zwischen Vektoren und ihren Koordinatenvektoren

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

Aussagen über V in gleichwertige Aussagen über Elemente von $\mathbb{K}^n$ umwandeln.

Beispiel: Bereits in Abschnitt 3.2.5.

$$(u_1, \dots, u_n) \text{ Basis von } \mathbb{K}^n \Leftrightarrow (\Phi_B(u_1), \dots, \Phi_B(u_n)) \text{ Basis von } V$$
$$(w_1, \dots, w_n) \text{ Basis von } V \Leftrightarrow (\Phi_B^{-1}(w_1), \dots, \Phi_B^{-1}(w_n)) \text{ Basis von } \mathbb{K}^n$$

3.4.4 Faktorräume

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und $U \leq V$ Untervektorraum. Für $v \in V$ heißt

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}$$

Nebenklasse von v bezüglich U Das Element v heißt *Repräsentant* von $v+U$. Die Menge der Nebenklassen

$$V/U := \{v + U \mid v \in V\}$$

heißt *Faktorraum* von V nach U. Wie wir sehen werden, ist der Faktorraum auch wieder ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Bemerkung 3.4.9. Es gilt

$$\begin{aligned} w \in v + U &\iff (w = v + u \text{ für ein } u \in U) \\ &\iff (v - w = u \text{ für ein } u \in U) \\ &\iff v - w \in U \\ &\iff v \in w + U \\ &\iff v + U = w + U \end{aligned} \tag{3.10}$$

Das heißt, jedes Element einer Nebenklasse ist Repräsentant dieser Nebenklasse. Durch

$$v \sim w :\iff u + U = w + U$$

ist eine Äquivalenzrelation definiert (siehe Abschnitt 1.2.1), die Äquivalenzklassen sind gerade die Nebenklassen:

$$[v]_\sim = v + U$$

Abschnitt 1.2.1 besagt, dass $V/U = V/\sim$ eine Zerlegung von V in disjunkte Nebenklassen ist. Bild malen!

Übung 10. Beweisen Sie die Behauptungen in Bemerkung 3.4.9.

Beispiel 3.4.10. $V := \mathbb{R}^2$, $U \leq V$ sei die Gerade durch $\mathbf{0}$ mit Richtungsvektor v. Durch jeden Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ gibt es genau eine Gerade g' parallel zu g:

$$[p] := g' = p + \mathbb{R}v = p + U$$

Die Gerade g' hängt nicht von der Auswahl des Repräsentanten ab: $g' = [p] = [q]$ genau dann, wenn p und p' auf der gleichen Geraden g' parallel zu g liegen. Der Faktorraum V/U ist die Schar der zu g parallelen Gerade $p + U$. △

Auf der Menge der Geraden lässt sich folgende Vektorraumstruktur definieren:

$$\begin{aligned} [p] + [q] &:= [p + q] \\ \lambda[p] &:= [\lambda p] \end{aligned}$$

Das funktioniert, weil die Gerade $[p+q]$ nur von den Geraden $[p]$ und $[q]$ abhängt, aber nicht von der konkreten Wahl der Repräsentanten $p, q \in \mathbb{R}^2$.

Satz 3.4.11. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \leq V$. Dann ist V/U zusammen mit den folgenden Operationen ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (der* Faktorraum*):*

- *Addition:*
$$(v + U) + (w + U) := (v + w) + U$$
- *Multiplikation mit Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$:*
$$\lambda \cdot (v + U) := (\lambda v) + U$$

Dabei ist

- Nullvektor $\mathbf{0}_{V/U} = \mathbf{0}_V + U = U$
- additives inverses Element $-(v + U) = (-v) + U$.

Beweisskizze: $+, -, \cdot$ sind wohldefiniert: repräsentantenunabhängig.

Zu zeigen: wenn $v + U = v' + U$, $w + U = w' + U$, dann $(v' + w') + U = (v + w) + U$. Nach (3.10) gilt $v' \in v + U$ und $w' \in w + U$. Also

$$v' + w' \in (v + U) + (w + U) = v + w + U + U = (v + w) + U$$

Und mit (3.10) gilt $(v' + w') + U = (v + w) + U$.

Analog für skalare Multiplikation.

Die Vektorrauaxiome übertragen sich damit von den Axiomen für die Repräsentanten $v \in V$ auf die Nebenklassen $v + U \in V/U$. □

Proposition 3.4.12. *Die Abbildung* $\mathrm{nat}_U\colon V \to V/U$ *gegeben durch $v \mapsto v + U$ ist eine lineare Abbildung, mit* $\mathrm{Kern}(\mathrm{nat}_U) = U$, *und heißt* natürliche Homomorphismus.

Beweis. Linearität folgt aus Definition von V/U.

$$\begin{aligned}\mathrm{Kern}(\mathrm{nat}_U) &= \{v \in V \mid \mathrm{nat}_U(v) = \mathbf{0}_{V/U}\}\\ &= \{v \in V \mid v + U = U\}\\ &= \{v \in V \mid v \in U\}\\ &= U\end{aligned}$$ □

Satz 3.4.13 (Homomorphiesatz)**.** *Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung (Homomorphismus) und $U :=$* $\mathrm{Kern}\, f$*. Dann gilt*

$$\mathrm{Bild}\, f \simeq V/U$$

Ein Isomorphismus ist gegeben durch

$$h\colon V/U \to \mathrm{Bild}\, f : (v + U) \mapsto f(v)$$

Beweis. Achtung! Definition darf nicht vom Repräsentanten abhängen.

- h ist wohldefiniert: Seien $u, v' \in V$ beliebig so dass $v + U = v' + U$. Zu zeigen ist, dass $f(v) = f(v')$. Es gilt $v' \in v + U$ und daher gibt es ein $u \in U$ mit $v' = v + u$. Da $u \in U = \operatorname{Kern} f$ gilt dann
$$f(v') = f(v + u) = f(v) + f(u) = f(v) + \mathbf{0} = f(v)$$
- h ist linear:
$$\begin{aligned} h((v+U) + (w+U)) &= h((v+w)+U) \\ &=^{\text{Def.}} f(v+w) = f(v) + f(w) \\ &= h(v+U) + h(w+U) \end{aligned}$$
und analog für Skalarmultiplikation.
- h ist surjektiv. Nach Definition: für beliebiges $f(v) \in \operatorname{Bild} f$ gilt
$$h(v + U) = f(v) \in \operatorname{Bild} h\,.$$
- h ist injektiv: Nach Satz 3.4.6 genau dann, wenn $\operatorname{Kern} h = \{\mathbf{0}\}$.
$$\begin{aligned} h(v+U) = \mathbf{0} &\iff f(v) = \mathbf{0} \\ &\iff v \in \operatorname{Kern} f = U \\ &\iff v + U = U = \mathbf{0}_{V/U} \end{aligned}$$
□

Also: homomorphe Bilder entsprechen Faktorräumen V/U, gegeben durch Unterräume U von V.

Wie lässt sich Basis von Faktorräumen finden?

Lemma 3.4.14. *Sei $U \leq V$ mit Basis $(v_1, \dots, v_d)$ und $(v_1, \dots, v_d, v_{d+1}, \dots, v_{d+r})$ (ergänzte) Basis von V. Dann ist $(v_{d+1} + U, \dots, (v_{d+r} + U))$ Basis von V/U.*

(Siehe Abschnitt 2.4.4 zum Austauschsatz von Steinitz.)

Folgerungen:
$$\begin{aligned} V/U &\simeq \langle v_{d+1}, \dots, v_{d+r} \rangle && \text{(gleiche Dimension und Satz 3.4.8)} \\ V &= U \oplus \langle v_{d+1}, \dots, v_{d+r} \rangle \end{aligned}$$

Beweis. Basis: 1) Erzeugendensystem: Sei $v \in V$ beliebig. Da B Basis lässt sich v schreiben als $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Dann:
$$\begin{aligned} v + U = \operatorname{nat}_U(v) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \operatorname{nat}_U(v_i) \\ &= \mathbf{0}_{V/U} + \sum_{i=d+1}^{n} \lambda_i \operatorname{nat}_U(v_i) && \text{(weil } v_i \in U = \operatorname{Kern}(\operatorname{nat}_U) \text{ für } i \leq d) \\ &= \lambda_{d+1}(v_{d+1} + U) + \dots + \lambda_{d+r}(v_{d+r} + U) \end{aligned}$$

2) Lineare Unabhängigkeit: Sei $\sum_{i=d+1}^{n} \lambda_i(v_i + U) = \mathbf{0}_{V/U} = U$. Da

$$\sum_{i=d+1}^{n} \lambda_i(v_i + U) = \sum_{i=d+1}^{n} \lambda_i \operatorname{nat}_U(v_i) = \operatorname{nat}_U\left(\sum_{i=d+1}^{n} \lambda_i v_i\right)$$

gilt also:

$$\begin{aligned}
& \operatorname{nat}_U\Big(\sum_{i=d+1}^{n} \lambda_i v_i\Big) = \mathbf{0}_{V/U} \\
\Rightarrow & \sum_{i=d+1}^{n} \lambda_i v_i \in \operatorname{Kern}(\operatorname{nat}_U) = U \\
\Rightarrow & \sum_{i=d+1}^{n} \lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_d v_d && \text{für geeignete } \lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{K} \\
\Rightarrow & \left(\sum_{i=d+1}^{n} \lambda_i v_i\right) - \lambda_1 v_1 - \cdots - \lambda_d v_d = \mathbf{0} \\
\Rightarrow & \lambda_1 = \cdots = \lambda_d = \lambda_{d+1} = \cdots = \lambda_n = 0 && (v_1, \ldots, v_n \text{ linear unabhängig})
\end{aligned}$$

□

Satz 3.4.15 (Dimensionssatz)**.** *Sei $U \le V$. Dann gilt*

$$\dim V/U = \dim V - \dim U$$

(Dimension verhält sich wie Logarithmus $\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$.)
Sei $f\colon V \to W$ lineare Abbildung. Dann gilt

$$\dim(\operatorname{Bild} f) = \dim V - \dim(\operatorname{Kern} f) \tag{3.11}$$

Beweis. Der erste Teil folgt mit $r = \dim(V/U)$, $n = \dim V$, und $d = \dim U$ direkt aus Lemma 3.4.14. Der zweite Teil folgt aus dem ersten Teil und dem Homomorphiesatz: $\dim(\operatorname{Bild} f) = \dim(V/\operatorname{Kern} f)$. Setze $U := \operatorname{Kern} f$. □

3.4.5 Lineare Abbildungen und Matrizen

Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ beschreibt eine lineare Abbildung, nämlich

$$f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : x \mapsto Ax$$

Umgekehrt gilt: *jede* lineare Abbildung lässt sich durch eine Matrix beschreiben.
Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, wobei:

- V ein n-dimensionaler Vektorraum mit Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$, und
- W ein m-dimensionaler Vektorraum mit Basis $B = (w_1, \ldots, w_m)$.

Nach Satz 3.4.4 ist f eindeutig durch die Bilder der Basisvektoren festgelegt

$$f(v_j) = a_{1j}w_1 + \cdots + a_{mj}w_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i$$

also auch durch die Koordinatenvektoren

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Das heißt, f wird eindeutig festgelegt durch die Matrix

$$A := M_C^B(f) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

die sogenannte *Darstellungsmatrix*.

Merkregel: Die Spalten der zu f gehörigen Darstellungsmatrix $M_C^B(f)$ sind die Koordinatenvektoren (bezüglich der Basis C von W) der Bilder von B (der Basisvektoren von V) unter $f\colon V \to W$.

Dabei gilt: Hat $v \in V$ den Koordinatenvektor $u = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ (bezüglich B), so hat $f(v)$ den Koordinatenvektor Au (bezüglich C) für $A = M_C^B(f)$, d.h., die lineare Abbildung

$$f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : u \mapsto Au$$

beschreibt die lineare Abbildung f in ihren Koordinatenvektoren:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "\Phi_B"] \arrow[r, "A:=M_C^B(f)"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\Phi_C"'] \end{tikzcd}$$

Ein sogenanntes *kommutatives Diagram*. Konkret:

$$\begin{tikzcd} v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \arrow[r, "f"] & f(v) = \Phi_C(Au) \\ u = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \arrow[u, "\Phi_B"] \arrow[r, "f_A"] & Au \arrow[u, "\Phi_C"'] \end{tikzcd}$$

Denn:

$$\begin{aligned} f(\Phi_B(u)) = f(v) &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \lambda_j \right) w_i = \Phi_C(Au) \end{aligned}$$

Beispiel 3.4.16. $V := \mathbb{K}^n$, $W := \mathbb{K}^m$. Standardbasen $B_n := (e_1, \dots, e_n)$ von V und B_m von W. Der kanonische Basisisomorphismus $\Phi_{B_n} \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : v \mapsto v$ ist die identische Abbildung, also ist jede lineare Abbildung

$$f \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

darstellbar als

$$f_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m : u \mapsto Au$$

mit $A = M_{B_m}^{B_n}(f)$. Hier: Spalten von A sind die Bilder der Einheitsvektoren.

Beispiel zum Beispiel: $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(Projektion auf xy-Ebene) ist linear, zugehörige Matrix

$$A = M_{B_2}^{B_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Spalten von A sind Bilder der Koordinatenvektoren, $A = (f(e_1) f(e_2) f(e_3))$. △

Beispiel 3.4.17. Für die identitsche Abbildung $\mathrm{id}_V \colon V \to V$ gilt (nur eine Basis, $B = C$)

$$M_B^B(\mathrm{id}_V) = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aber für $B \neq C$ entsteht *nicht* E_n! △

Beispiel 3.4.18. Die Polynome

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$

in einer Unbekannten X vom Grad höchstens drei mit reellen Koeffizienten bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum. Was ist ein Polynom? Aus der Schule bekannt. Ein *Ausdruck* geformt mit Hilfe von Variable, Skalaren, Addition, und Multiplikation.

$$V := \mathbb{R}^{(\leq 4)}[X]$$

Addition und Multiplikation mit Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ wie üblich.
Basis ist z.B. $B = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ mit $v_0 = 1$, $v_1 = X$, $v_2 = X^2$, $v_3 = X^3$.
Kanonischer Basisisomorphismus:

$$\Phi_B\colon \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto a_0 v_0 + a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = a_0 + a_1 X + x_2 X^2 + a_3 X^3$$

Das heißt $\Phi_B(e_i) = v_{i-1}$ für $i \in \{1, \ldots, 4\}$. Das Differenzieren

$$\mathrm{diff}\colon \mathbb{R}^{(\leq 4)}[X] \to \mathbb{R}^{(\leq 4)}[X]$$

ist lineare Abbildung mit Matrix

$$A = M_B^B(\mathrm{diff}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \arrow[r, "\mathrm{diff}"] & a_1 + 2a_2 X + 3a_3 X^3 = \Phi_B(Au) \arrow[d, "\Phi_B^{-1}"] \\ u = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_3 \end{pmatrix} \arrow[u, "\Phi_B"] \arrow[r, "f_A"] & Au = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

△

Proposition 3.4.19. *Komposition von lin. Abbildungen entspricht Produkt der zugehörigen Matrizen: V_1, V_2, V_3 seien $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen B_1, B_2, B_3 und $f_1\colon V_1 \to V_2$, $f_2\colon V_2 \to V_3$ lineare Abbildungen.*

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f_1"] & V_2 \arrow[r, "f_2"] & V_3 \\ \mathbb{K}^n \arrow[u, "\Phi_{B_1}"] \arrow[r, "f_{A_1}"] & \mathbb{K}^m \arrow[u, "\Phi_{B_2}"] \arrow[r, "f_{A_2}"] & \mathbb{K}^r \arrow[u, "\Phi_{B_3}"] \end{tikzcd}$$

Dann gilt

$$M_{B_3}^{B_1}(f_2 \circ f_1) = M_{B_3}^{B_2}(f_2) M_{B_2}^{B_1}(f_1)$$

(Funktionenkomposition) *(Matrizenmultiplikation)*

Folgerung für Inverse:

$$M_B^C(f^{-1}) = (M_C^B(f))^{-1}$$

Bemerkung 3.4.20. Die linearen Abbildungen $f\colon V \to W$ bilden selbst einen Vektorraum, Bezeichnung:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$$

Operationen komponentenweise:

$$(f+g)(v) := f(v) + g(v)$$
$$(\lambda f)(v) := \lambda \cdot f(v)$$

Falls $\dim V = n$ und $\dim W = m$ so gilt:

$$\mathrm{Hom}(V, W) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \cong \mathbb{K}^{m \times n}$$

3.4.6 Basiswechsel und Koordinatentransformation

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, und $B' = (v_1', \ldots, v_n')$ eine andere Basis von V. Bei *Basiswechsel* $B \rightsquigarrow B'$ ändern sich die Koordinatenvektoren eines Vektors $v \in V$: die *Koordinatentransformation* bei einem Basiswechsel wird beschrieben durch die *Transformationsmatrix*

$$T := M_{B'}^B(\mathrm{id}_V)$$

oder

$$S := M_B^{B'}(\mathrm{id}_V) = T^{-1}.$$

Ist

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \Phi_B^{-1}(v)$$

der Koordinatenvektor von $v \in V$ bzgl. B, d.h., $v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$ und

$$x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

der Koordinatenvektor bzgl B', d.h., $v' = x_1 v_1' + \cdots + x_n v_n'$, dann gilt

$$x' = Tx \text{ und } x = Sx'$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[dr, "\Phi_B"] \arrow[dd, bend left, "T"] & \\
& V \\
\mathbb{K}^n \arrow[ur, "\Phi_{B'}"'] \arrow[uu, bend left, "S"] &
\end{tikzcd}$$

Beispiel 3.4.21. $V = \mathbb{R}^2$.

$$B := (e_1, e_2), B' := (w_1, w_2), w_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann: (siehe Merkregel, (3.12))

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_B^{B'}(\mathrm{id}_V)$$
$$T = S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = M_{B'}^{B}(\mathrm{id}_V)$$

Koordinatentransformation: Koordinatenvektor von $v \in V$

$$\text{bzgl. Basis } B = (e_1, e_2) \qquad \text{bzgl. Basis } B = (w_1, w_2)$$
$$x \mapsto Tx = S^{-1}x$$
$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

△

3.4.7 Transformationsformel für Matrizen einer linearen Abbildung

B_1, B_2: Basen eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V.
C_1, C_2: Basen eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes W.
$f : V \to W$ lineare Abbildung.

Wie hängen $A_1 := M_{C_1}^{B_1}(f)$ und $A_2 := M_{C_2}^{B_2}(f)$ zusammen?

Wegen Proposition 3.4.19 und da

$$f = \mathrm{id}_W \circ f \circ \mathrm{id}_V$$

gilt dass

$$M_{C_2}^{B_2}(f) = M_{C_2}^{C_1}(\mathrm{id}_w) \circ M_{C_1}^{B_1}(f) \circ M_{B_1}^{B_2}(\mathrm{id}_w) \tag{3.13}$$
$$A_2 = \tilde{S}^{-1} A_1 S \tag{3.14}$$

wobei $\tilde{S} := M_{C_1}^{C_2}(\mathrm{id}_W)$ und $S := M_{B_1}^{B_2}(\mathrm{id}_V)$ Transformationsmatrizen (siehe Abschnitt 3.4.6).

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[dr, "\Phi_{B_1}"] \arrow[dd, bend left, "T"] & & & \mathbb{K}^m \arrow[dl, "\Phi_{C_1}"'] \arrow[dd, bend left, "\tilde{T}"] \\
& V \arrow[r, "f"] & W & \\
\mathbb{K}^n \arrow[uu, bend left, "S"] \arrow[ur, "\Phi_{B_2}"'] & & & \mathbb{K}^m \arrow[uu, bend left, "\tilde{S}"] \arrow[ul, "\Phi_{C_2}"]
\end{tikzcd}$$

Spezialfall: $V = W$, $B_1 = C_1$, $B_2 = C_2$. Hier gilt $S = \tilde{S}$ und damit

$$A_2 = S^{-1} A_1 S.$$

3.4.8 Äquivalenz von Matrizen

Es gibt verschiedene wichtige Äquivalenzrelationen auf der Menge der Matrizen.

Definition 3.4.22 (Äquivalenz)**.** Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ heißt *äquivalent* zu einer Matrix $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ wenn es invertierbare Matrizen $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $T \in \mathbb{K}^{m\times m}$ gibt so dass

$$B = T^{-1} A S.$$

In Symbolen: $A \sim B$.

Als kommutatives Diagram:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{f_A} & \mathbb{K}^m \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f_S} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f_T} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{f_B} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

Definition 3.4.23 (Zeilenäquivalenz)**.** Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ heißt *zeilenäquivalent* (auch: *links-äquivalent*) zu einer Matrix $B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ wenn es *eine* invertierbare Matrix $S \in \mathbb{K}^{m\times m}$ gibt so dass

$$B = SA.$$

In Symbolen: $A \approx B$. Spaltenäquivalenz ist analog definiert, wird aber hier nicht weiter betrachtet.

A und B sind genau dann zeilenäquivalent, wenn man B aus A durch elementare Zeilenoperationen gewinnen kann (dies folgt aus Satz 3.2.22); also ist jede Matrix äquivalent zu einer in Stufenform (Abschnitt 3.2.4).

Definition 3.4.24 (Ähnlichkeit)**.** Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *ähnlich* zu einer Matrix $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ wenn es *eine* invertierbare Matrix $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ gibt so dass

$$B = S^{-1} A S.$$

In Symbolen: $A \approxeq B$.

Bemerkung 3.4.25. Sowohl $\sim$, $\approx$, als auch $\approxeq$ sind Äquivalenzrelationen (auf $\mathbb{K}^{m\times n}$ bzw. auf $\mathbb{K}^{n\times n}$). (Vergleiche Abschnitt 1.2.1.) Es gilt: falls $A \approxeq B$, dann $A \approx B$, und falls $A \approx B$, dann $A \sim B$.

Übung 11. Beweisen Sie die Behauptungen in Bemerkung 3.4.25.

Satz 3.4.26 (Charakterisierung von Äquivalenz)**.** *Für $A_1, A_2 \in \mathbb{K}^{m\times n}$ sind die folgenden Aussagen gleichbedeutend:*

1. *A_1 und A_2 sind äquivalent.*
2. *Es gibt eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, Basen B_1, B_2 von $\mathbb{K}^n$, und Basen C_1, C_2 von $\mathbb{K}^m$ so dass $A_1 = M^{B_1}_{C_1}(f)$ und $A_2 = M^{B_2}_{C_2}(f)$.*
3. $\mathrm{rg}(A_1) = \mathrm{rg}(A_2)$.
4. *Die Matrix A_1 lässt sich durch elementare Zeilen und(!) Spaltenumformungen in die Matrix A_2 umwandeln.*

Beweis. 2. $\Rightarrow$ 1.: Abschnitt 3.4.7.
1. $\Rightarrow$ 2.: Sei $A_2 = \tilde{S}^{-1} A_1 S$. Wähle $f := f_{A_1}$. Wähle $B_1 := (e_1, \ldots, e_n)$ und $C_1 := (e_1, \ldots, e_m)$ Standardbasen. Dann ist $A_1 = M^{B_1}_{C_1}(f_{A_1})$. Für $B_2 := B_1 S$ (neue Basis von $V = \mathbb{K}^n$) und $C_2 := C_1 \tilde{S}$ (neue Basis von $W = \mathbb{K}^m$) ist

$$M^{B_2}_{B_1}(\mathrm{id}_V) = S \text{ und } M^{C_2}_{C_1}(\mathrm{id}_W) = \tilde{S}$$

also

$$\begin{aligned} A_2 = \tilde{S}^{-1} A_1 S &= M^{C_1}_{C_2}(\mathrm{id}_V) M^{B_1}_{C_1}(f_{A_1}) M^{B_2}_{B_1}(\mathrm{id}_V) \\ &= M^{B_2}_{C_2}(f_{A_1}) \qquad \text{(siehe (3.13))} \end{aligned}$$

3. $\Rightarrow$ 4.: Aus Zeilenstufenform A lässt sich durch elementare Spalten(!)-umformungen die Matrix

$$\begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

konstruieren, mit $r = \mathrm{rg}(A)$. Gilt sowohl für A_1 als auch für A_2 da $\mathrm{rg}(A_1) = \mathrm{rg}(A_2)$.
4. $\Rightarrow$ 1.: Jede elementare Zeilenumformung einer Matrix A ist als Multiplikation $\tilde{T}A$ mit *invertierbarer* Matrix $\tilde{T}$ beschreibbar (Abschnitt 3.2.3). Analog ist jede Spaltenumformung als Multiplikation AS mit invertierbarer Matrix S beschreibbar. Also (Produkte invertierbarer Matrizen sind invertierbar)

$$A_2 = \tilde{T} A S$$

für geeignete invertierbare Matrizen $\tilde{T}$ und S.
2. $\Rightarrow$ 3.:

$$\mathrm{rg}(A_1) = \mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A_2) \qquad \text{(Abschnitt 3.4.3)}$$

□

Satz 3.4.27 (Charakterisierung von Ähnlichkeit)**.** *Die folgenden Aussagen sind äquivalent für $A_1, A_2 \in \mathbb{K}^{n\times n}$:*

1. *A_1 und A_2 sind ähnlich: es existiert invertierbare Matrix $S \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $A_2 = S^{-1} A_1 S$;*
2. *Es gibt Basis B von $\mathbb{K}^n$ so dass $A_2 = M^B_B(f_{A_1})$.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Wähle für $B \subset \mathbb{K}^n$ die Spalten von S.
(2) $\Rightarrow$ (1): Falls $B = (b_1, \ldots, b_n)$, so wähle $S := (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$. □

Kapitel 4

Determinanten, Polynome, Diagonalisierbarkeit

4.1 Determinanten

Determinanten spielen eine Rolle bei

- Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen,
- der Frage, wie lineare Abbildungen das *Volumen* von Körpern verändern,
- und vielem mehr.

4.1.1 Permutationen

Eine bijektive Abbildung $f\colon A \to A$ heißt auch *Permutation* von A.
Lateinisch 'permutere': vertauschen.
Oft ist $A = \{1, 2, \dots, n\}$. Definiere

$$S_n := \{\sigma \mid \sigma \text{ eine Permutation auf } \{1, 2, \dots, n\}\}$$

Es gilt

$$|S_n| := n! := n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$$

Schreibweise für Permutationen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

(Zwei-Zeilen-Schreibweise)

Alternativ: Zyklenschreibweise (als Produkt disjunkter Zyklen):

$$\sigma = (a_1 a_2 \dots a_r)(b_1 b_2 \dots b_s)(\dots)\cdots(\dots)$$

falls σ die Elemente wie folgt abbildet (Bild malen! Mit Fixpunkt). Das heißt,

$$\sigma(a_i) = a_{i+1(\mathrm{mod}\, r)}, \sigma(b_i) = b_{i+1(\mathrm{mod}\, s)}, \dots$$

Zyklen der Länge 1, das heißt, "Fixpunkte" c mit $\sigma(c) = c$, werden häufig nicht mitgeschrieben falls Grundmenge aus Kontext klar.

Beispiel.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 8 & 4 & 7 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Zyklenschreibweise:

$$(1238)(57)$$

Schreibweise nicht eindeutig:

$$(57) = (75)$$
$$(1238)(57) = (57)(1238)$$

Bemerkungen.

- S_n ist bezüglich der Hintereinanderausführung $\circ$ (Kompositionsoperation) von Abbildungen eine Gruppe, die *(volle) symmetrische Gruppe* auf $A = \{1, 2, \dots, n\}$.
- Eins-element: $\mathrm{id}_A = (1)(2)(3)\cdots(n)$.
- Inverses Element zu σ: die Umkehrabbildung von σ.
  Beispiel: $(a_1 \dots a_s)^{-1} = (a_s \dots a_1)$.
- Die Gruppe S_n ist *nicht* abelsch: Beispiel für $n = 4$:

$$(123) \circ (124) = (13)(24)$$
$$(124) \circ (123) = (14)(23)$$

Permutationen der Form $\tau = (ij)$ (zwei Elemente vertauschen) heißen *Transpositionen*.

Satz 4.1.1. *Jede Permutation lässt sich als Komposition von Transpositionen darstellen.*

Beweis. Jeder Zyklus $(a_1 a_2 \dots a_r)$ ist darstellbar als

$$(a_1 a_2) \circ (a_2 a_3) \circ \cdots \circ (a_{r-1} a_r)$$ □

Sei $\sigma \in S_n$ und sind

$$\sigma = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_k$$
$$\sigma = \tau_1' \tau_2' \cdots \tau_{k'}'$$

zwei Darstellungen als Produkt von Transpositionen, so gilt

$$k = k' \mod 2$$

Definieren das *Signum* von σ

$$\operatorname{sign}(\sigma) := (-1)^k$$

Also $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$ falls k gerade (σ ist *gerade Permutation*) und $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$ falls k ungerade (σ ist *ungerade Permutation*).

Bemerkungen.

- $\operatorname{sign}(\sigma_1\sigma_2) = \operatorname{sign}(\sigma_1)\operatorname{sign}(\sigma_2)$
- $\operatorname{sign}(\tau) = -1$ für alle Transpositionen τ.
- Die geraden Permutationen ($\operatorname{sign}(\sigma)$ positiv) bilden eine Untergruppe von S_n, die sogenannte *alternierende Gruppe*, geschrieben A_n.
- Ist τ eine ungerade Permutation ($\operatorname{sign}(\tau)$ negativ) so gilt

$$S_n = A_n \cup \tau A_n \qquad \text{wobei } \tau A_n := \{\tau \circ \sigma \mid \sigma \in A_n\}.$$

4.1.2 Determinantenfunktionen

Es gibt (mindestens) zwei grundverschiedene Möglichkeiten, Determinanten einzuführen: Mit einer expliziten Formel, oder über ihre Eigenschaften. Wir wählen letzteren Zugang.

Definition 4.1.2. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Eine Funktion

$$\det\colon \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K} : A \mapsto \det A$$

heißt *Determinantenfunktion* wenn sie folgende Eigenschaften hat:

(D1) *Linearität in jeder Zeile*, d.h., für alle Zeilenvektoren $z_1, \ldots, z_n, z_i' \in \mathbb{K}^n$ mit $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\det\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i + z_i' \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i' \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix};$$

(D2) det ist *alternierend*, d.h., hat A zwei gleiche Zeilen, so ist $\det A = 0$;

(D3) $\det E_n = 1$.

Gibt es solche Funktionen?

Beispiel 4.1.3. $n = 2$.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{4.1}$$

ist Determinantenfunktion (nachprüfen!). Geometrische Interpretation für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: Ausdruck in (4.1) misst den 'vorzeichenbehafteten' Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den folgenden beiden Vektoren aufgespannt wird.

$$u_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Bild! Mit den beiden Vektoren u_1, u_2, dem achsenparallelen Rechteck von Ursprung zu $u_1 + u_2$, den Fehlflächen, dem Winkel α von u_1 nach u_2.

Vorzeichen: ist negativ falls $180^\circ < \alpha = \measuredangle(u_1, u_2) < 360^\circ$. △

Bemerkung 4.1.4. Für $n = 3$ sind Determinanten als Volumina interpretierbar (siehe Abschnitt 5.4.2).

4.1.3 Eigeschaften von Determinantenfunktionen

Verhalten einer Determinantenfunktion $\det\colon \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ bei elementaren Zeilenumformungen.

Proposition 4.1.5. *Sei* $\det\colon \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ *eine Determinantenfunktion.*

- $z_i \leftrightsquigarrow z_j$ *für* $i \neq j$*: Entsteht* A' *aus* $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *durch Vertauschen von zwei Zeilen, so gilt*
$$\det A' = -\det A$$

- $\lambda z_i \rightsquigarrow z_i$*: Entsteht* A' *aus* A *durch Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar* $\lambda \in \mathbb{K}$*, so gilt:*
$$\det A' = \lambda \cdot \det A$$

- $\lambda z_i + z_j \rightsquigarrow z_j$ *für* $i \neq j$*: Entsteht* A' *aus* A *durch Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile, so gilt:*
$$\det A' = \det A$$

Das gleiche gilt auch für elementare Spaltenumformungen: folgt später.

Beweis. (2) folgt direkt aus der Linearität (D1).
(3):

$$\det A' = \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_j + \lambda z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=} \det A + 0$$

(1): Seien

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ und } A' = \begin{pmatrix} \vdots \\ z_j \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Betrachten

$$B := \begin{pmatrix} \vdots \\ z_i + z_j \\ \vdots \\ z_j \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad B' := \begin{pmatrix} \vdots \\ z_i + z_j \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ und } B'' := \begin{pmatrix} \vdots \\ z_i + z_j \\ \vdots \\ z_i + z_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$0 \overset{(D2)}{=} \det B'' \overset{(D1)}{=} \det B + \det B' \qquad (*)$$

Also

$$\det A \overset{(3)}{=} \det B \overset{(*)}{=} -\det B' \overset{(3)}{=} -\det A'.$$ □

(D1) lässt sich verschärfen:

Satz 4.1.6. *Für eine Determinantenfunktion* $\det\colon \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ *gilt:*

$$\text{(D2')} \qquad \operatorname{rg}(A) < n \iff \det A = 0$$

Beweis. "⇒": Wenn $\operatorname{rg}(A) < 0$ dann ist eine Zeile Linearkombination der anderen. O.B.d.A: $z_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i z_i$. Wegen der Linearitätsbedingung (D1) gilt:

$$\det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} \overset{(D1)}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_i \end{pmatrix} \overset{(D2)}{=} 0$$

"⇐": Wenn $\operatorname{rg}(A) = n$ dann kann A durch elementare Zeilenumformungen in E_n umgeformt werden. Wäre $\det A = 0$, so wäre auch $\det E_n = 0$ gemäß Proposition 4.1.5, im Widerspruch zu (D3). Also $\det A \neq 0$. □

Rückführung auf E_n stets möglich bei $\operatorname{rg}(A) = n$, also ist Determinante eindeutig berechenbar. Wenn es sie überhaupt gibt!

Lemma 4.1.7. *Es gibt höchstens eine Determinantenfunktion* $\det\colon \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$.

Beweis. Seien $\det, \det'$ Determinantenfunktionen. Wegen Satz 4.1.6 gilt $\det A = \det' A = 0$ falls $\operatorname{rg} A < n$. Sei also $\operatorname{rg} A = n$. Nach Satz 3.2.22 erhalten wir E_n aus A durch elementare Zeilenumformungen. Dabei ändert sich die Determinante gemäß Proposition 4.1.5 für det und für $\det'$ auf die gleiche Weise. Weil $\det E_n = \det' E_n \overset{(D3)}{=} 1$, folgt $\det A = \det' A$. □

4.1.4 Die Leibnizsche Formel

Satz 4.1.8 (Die Leibnizsche Formel)**.** *Es gibt genau eine Determinantenfunktion*

$$\det\colon \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$$

die wie folgt definiert werden kann. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times m}$.

$$\det A := \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \tag{4.2}$$

Beweis. Wegen Lemma 4.1.7 muss nur gezeigt werden, dass (4.2) die Eigenschaften (D1), (D2) und (D3) hat.

(D1) Seien

$$B := \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{i_0} + \lambda z'_{i_0} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}, \quad A := \det \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{i_0} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \text{ und } A' := \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z'_{i_0} \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Das heißt

$$\begin{aligned} b_{i_0 j} &= a_{i_0 j} + a'_{i_0 j} && \text{für } j \in \{1, \dots, n\} \\ b_{ij} &= a_{ij} = a'_{ij} && \text{sonst (für } i \neq i_0) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdots b_{i_0,\sigma(i_0)} \cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots (a_{i_0,\sigma(i_0)} + a'_{i_0,\sigma(i_0)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i_0,\sigma(i_0)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a'_{i_0,\sigma(i_0)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \det A + \det A' \end{aligned}$$

Analog:

$$\det\begin{pmatrix}\vdots\\ \lambda z_i\\ \vdots\end{pmatrix} = \lambda\det\begin{pmatrix}\vdots\\ z_i\\ \vdots\end{pmatrix}$$

(D2) Matrix $A = (a_{ij})$ habe zwei gleiche Zeilen, o.B.d.A. $z_1 = z_2$. Das heißt:

$$a_{1j} = a_{2j} \qquad \text{für } j \in \{1,\dots,n\}$$

Sei $\tau = (12) \in S_n$ (Transposition). Dann

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\
&= \sum_{\sigma\in A_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma'\in\tau A_n, \sigma'=\tau\sigma} \operatorname{sign}(\sigma') a_{1\sigma'(1)}\cdots a_{n\sigma'(n)}\\
&= \sum_{\sigma\in A_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in A_n} -\operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(2)} a_{2\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\
&= \sum_{\sigma\in A_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in A_n} -\operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung gilt da $S_n = A_n \cup \tau A_n$,
die dritte da $\sigma'(1) = \sigma(2)$, $\sigma'(2) = \sigma(1)$, und $\sigma'(n) = \sigma(n)$ für alle $n \neq 1, 2$,
und die vierte da $a_{1j} = a_{2j}$.

(D3)

$$\det E_n = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\delta_{1\sigma(1)}\cdots\delta_{n\sigma(n)} = 1\cdots 1 = 1$$

wobei $a_{ij} = \delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $a_{ij} = \delta_{ij} = 0$ sonst. □

Neue Schreibweise: $|A| := \det A$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix} := \det\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

Übung 12. Beweisen Sie, dass für quadratische Matrizen A und B gilt

$$\begin{vmatrix} A & 0\\ * & B\end{vmatrix} = \det(A)\cdot\det(B).$$

4.1.5 Die Regel von Sarrus

Wie berechnet man Determinanten? Die Leibnizsche Regel ist im allgemeinen zu aufwändig. Betrachten $n = 3$ und $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$. Es gibt $3! = 6$ Permutationen $\sigma \in S_n$. Die Leibnizformel ergibt:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Schräglinien einzeichnen! Vorzeichen!

Gerade Permutationen (Diagonalen):

$$\begin{array}{ccc} +a_{11}a_{22}a_{33} & +a_{12}a_{23}a_{31} & +a_{13}a_{21}a_{32} \\ \sigma = \mathrm{id} & \sigma = (123) & \sigma = (132) \end{array}$$

Ungerade Permutationen (Nebendiagonalen):

$$\begin{array}{ccc} -a_{31}a_{22}a_{13} & -a_{32}a_{23}a_{11} & -a_{33}a_{21}a_{12} \\ \sigma = (13) & \sigma = (23) & \sigma = (12) \end{array}$$

Regel von Sarrus (gesprochen Sarrüs; geboren 1798 in Saint-Affrique, gestorben 1858 in Saint-Affrique).
Für den Fall $n = 2$ siehe Beispiel in Abschnitt 4.1.2.

4.1.6 Berechnung der Determinante

Die Determinante einer *Dreiecksmatrix* ist das Produkt der Hauptdiagonalelemente.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{4.3}$$

Folgt sofort aus Leibnizformel. Für $\sigma \neq \mathrm{id}$ ist ein Faktor in $a_{1\sigma(1)} \cdot \cdots \cdot a_{n\sigma(n)}$ gleich Null (denn $a_{ij} = 0$ für $i > j$).

$\rightsquigarrow$ Berechnungsverfahren!

- Umwandlung der Matrix in Stufenform (Gaußscher Algorithmus).
  Dabei ändert sich Determinante gemäß Proposition 4.1.5 in Abschnitt 4.1.3.
- Determinante der Stufenform ist Produkt der Hauptdiagonalelemente
  (wie oben erklärt)

Beispiel 4.1.9.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} && (z_2 - 2z_1 \rightsquigarrow z_2) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} && (z_3 - z_2 \rightsquigarrow z_3) \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2 \end{aligned}$$

Alternative Rechnung:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} && (z_2 - 2z_1 \rightsquigarrow z_2) \\
&= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} && (s_2 \leftrightsquigarrow s_3) \\
&= -(1 \cdot -2 \cdot 1) = 2
\end{aligned}$$

△

Es gibt viele Möglichkeiten, das Berechnen von Determinanten zu erleichtern.

Proposition 4.1.10. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann gilt:*

$$\det A^\top = \det A$$

Beweis. $A = (a_{ij})$, $A^\top = (b_{ij})$, $b_{ij} = a_{ji}$.

$$\begin{aligned}
\det A^\top &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) b_{1\sigma(1)} \dots b_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{k_1\sigma^{-1}(k_1)} \dots a_{k_n\sigma^{-1}(k_n)} && \text{wobei } k_i := \sigma(i) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1\sigma^{-1}(1)} \dots a_{n\sigma^{-1}(n)} && \text{Umordnen: } \{1, \dots, n\} = \{k_1, \dots, k_n\} \\
&= \sum_{\sigma' \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma') a_{1\sigma'(1)} \dots a_{n\sigma'(n)} && \text{denn } \operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) \\
&= \det A
\end{aligned}$$

□

Folgerung: Das Verhalten der Determinante bei elementaren Spaltenumformungen ist das gleiche wie bei elementaren Zeilenumformungen (ersetze ‘Zeile’ durch ‘Spalte’ in Proposition 4.1.5).

Satz 4.1.11. *Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann gilt:*

1. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$
2. *Für $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ (invertierbare Matrizen, siehe Abschnitt 3.2.1) gilt*

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

Beweis. 1.: Es gilt $\operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg}(A)$ und $\operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg}(B)$. Daher folgt aus $\operatorname{rg}(A) < n$ oder $\operatorname{rg}(B) < n$, dass $\operatorname{rg}(AB) < n$, und mit Satz 4.1.6

$$\det(AB) = 0 = \det A \cdot \det B.$$

Also muss (1) nur für invertierbare Matrizen A, B bewiesen werden ($\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = n$).
Sei $B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ fest. Die Abbildung

$$f\colon \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K} : A \mapsto \det(AB)$$

hat folgende Eigenschaften:

(D1) f linear in Zeilen von A

(D2) Falls A zwei gleiche Zeilen hat, dann ist $f(A) = 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) < 0 &\Rightarrow \mathrm{rg}(AB) < n \\ &\Rightarrow \det AB = 0 \qquad\qquad \text{wie oben.} \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$f(E_n) = \det(E_n B) = \det B\,.$$

Damit erfüllt die Abbildung

$$\tilde{f}\colon \mathbb{K}^{n\times n} : A \mapsto (\det B)^{-1} f(A)$$

alle drei Bedingungen (D1), (D2) und (D3) einer Determinantenfunktion. Wegen Eindeutigkeit der Determinantenfunktion folgt $\tilde{f}(A) = \det A$, also

$$\begin{aligned} & (\det B)^{-1}\det(AB) = \det A \\ \Rightarrow\quad & \det(AB) = \det A \cdot \det B\,. \end{aligned}$$

2.:

$$\begin{aligned} 1 = \det E_n &= \det(AA^{-1}) \\ &= \det A \cdot \det(A^{-1}) \qquad\qquad \text{nach Teil 1.} \end{aligned}$$

Also $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$. □

Direktes Nachrechnen mit Leibnizformel ebenfalls möglich.

Weitere Rechenregeln. Wir definieren nun die *Entwicklung* einer Determinante nach einer Zeile oder Spalte.

Definition 4.1.12. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann steht $A_{ij} \in \mathbb{K}^{(n-1)\times(n-1)}$ für die Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

$$A = \begin{pmatrix} & & a_{1j} & & \\ & B_1 & \vdots & B_2 & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{i,n} \\ & B_3 & \vdots & B_4 & \\ & & a_{nj} & & \end{pmatrix}, \quad A_{ij} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix, die aus A durch wiederholtes Streichen von beliebig vielen Zeilen und Spalten entsteht, heißt *Untermatrix* (oder *Teilmatrix*) von A.

Satz 4.1.13 (Entwicklungssatz)**.** *Es gilt*

$(*)_i$ *Entwicklung nach der i-ten Zeile:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

$(**)_j$ *Entwicklung nach der j-ten Spalte:*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Zum Beweis. $(*)_i$:

$$\det \begin{pmatrix} & & & 0 & & & \\ & B_1 & & \vdots & & B_2 & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & B_3 & & \vdots & & B_4 & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

folgt aus der Leibnizformel. Linearität (D1) impliziert $(*)$.
$(**)_j$: folgt aus $(*)_j$ und Proposition 4.1.10: $\det A^\top = \det A$. □

Beispiel 4.1.14. $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \quad ?$$

Vorzeichen $(-1)^{i+j}: \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

Entwicklung nach 1. Zeile $(*)_1$:

$$+ 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot (1 \cdot 0 - 3 \cdot 4) = -12$$

Entwicklung nach 2. Spalte $(**)_2$:

$$\begin{aligned} & -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot |\cdots| \\ = & -2 \cdot 0 + 4 \cdot (1 \cdot 0 - 1 \cdot 3) - 0 = -12 \end{aligned}$$

Entwicklung nach 3. Zeile $(*)_3$:

$$\begin{aligned} & +3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot |\cdots| + 0 \cdot |\cdots| \\ & = 3 \cdot (2 \cdot 0 - 4 \cdot 1) = -12 \end{aligned}$$

△

4.1.7 Die Determinante von linearen Abbildungen

Sei $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, und $A := M_B^B(f)$ die zugehörige Matrix (bezüglich einer Basis B von V; siehe Abschnitt 3.4.5).

Definition 4.1.15. $\det f := \det A$.

Dies ist wohldefiniert, da für $A_1 = M_B^B(f)$, $A_2 = M_{B'}^{B'}(f)$ nach Satz 3.4.27 eine invertierbare Matrix $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ existiert mit $A_2 = S^{-1} A_1 S$. Also

$$\begin{aligned} \det A_2 &= \det(S^{-1} A_1 S) \\ &= (\det S)^{-1} \det A_1 (\det S) && \text{nach Satz 4.1.11} \\ &= \det A_1 && \text{da Multiplikation in } \mathbb{K} \text{ kommutativ.} \end{aligned}$$

Bemerkung 4.1.16. Wir halten fest: ähnliche Matrizen haben die gleiche Determinante.

Bemerkung 4.1.17. $\det f$ kann als Verzerrungsfaktor für Flächen (in $\mathbb{R}^2$) bzw. Volumina (in $\mathbb{R}^n$) der Abbildung f interpretiert werden (siehe auch späteren Abschnitt 5.4.2):

$$F' := (\det f) \cdot F$$

Bild! (Quadrat auf Parallelogram, Kugel auf Ellipse)

4.1.8 Lösung linearer Gleichungssysteme mittels Determinanten

Lineares Gleichungssystem

$$Ax = b$$

mit $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{K}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Spezialfall $n = m$:

$$\begin{aligned} & Ax = b \text{ eindeutig lösbar} \\ \iff & \operatorname{rg}(A) = n && \text{nach Korollar 3.3.6} \\ \iff & \det(A) \neq 0 && \text{nach Satz 4.1.6} \end{aligned}$$

'Eisensteinkriterium' (1844). Definieren

$$A_i(b) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

$A_i(b)$ entsteht also aus A durch Ersetzung der i-ten Spalte durch b.

Satz 4.1.18 (Cramersche Regel)**.** *Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $\det(A) \neq 0$. Dann berechnet sich die eindeutige Lösung x von $Ax = b$ wie folgt:*

$$x = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A_1(b)| \\ \vdots \\ |A_n(b)| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(A_1(b))/\det(A) \\ \vdots \\ \det(A_n(b))/\det(A) \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Beispiel 4.1.19.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ x_1 - 4x_2 &= 6 \end{aligned}$$

hat die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{-22}{-11} = 2$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{11}{-11} = -1 \qquad \triangle$$

Beweis von (4.4).

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} x_1 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} x_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

b nach links in die i-te Spalte bringen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} x_1 + \cdots + \begin{pmatrix} x_i a_{1i} - b_1 \\ \vdots \\ x_i a_{ni} - b_n \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} x_n = \mathbf{0}$$

Die Spalten sind also linear abhängig, und nach Satz 4.1.6 ist die Determinante gleich Null:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & x_i a_{1i} - b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & x_i a_{ni} - b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Wegen der Linearitätsbedingung (D1):

$$x_i \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Also $x_i = \frac{|A_i(b)|}{|A|}$. □

Folgerung. Wenn $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^n$, und $x \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Lösung ist von $Ax = b$, dann gilt $x \in \mathbb{Q}^n$.

Wie schnell sind die Algorithmen zum Lösen linearer Gleichungssysteme? Man sieht leicht, dass die Überführung einer Matrix aus $\mathbb{K}^{m\times n}$ in Stufenform aus Abschnitt 3.2.4 höchstens mn viele elementare Zeilenumformungen erfordert. Jede Zeilenumformung benötigt eine lineare Anzahl an arithmetischen Operationen. Damit scheint der gaußsche Algorithmus insgesamt besser zu sein als die Auswertung von (4.4). Wir müssen allerdings bei der exakten Analyse vorsichtig sein, denn eine einzelne arithmetische Operation kann sehr viel Zeit erfordern, wenn die Zahlen sehr groß werden. Bei ungeschickten Folgen von elementaren Zeilenumformungen zur Umwandlung in Stufenform können tatsächlich extrem große Zahlen auftreten; wir betrachten dazu das folgende Beispiel.

Beispiel 4.1.20. Betrachte die folgende Überführung einer Matrix in Stufenform. Sei $x \in \mathbb{Z}$ eine Zahl, z.B. $x = 2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -x & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x & x & x+1 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[i\in\{1,2,3\}]{z_i - xz_1 \rightsquigarrow z_i} \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & x^2+1 & 0 \\ 0 & x^2+x & x+1 \\ 0 & x^2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_3 - z_4 \rightsquigarrow z_3} \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & x^2+1 & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{z_2 - xz_3 \rightsquigarrow z_2} \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x^2 \\ 0 & x & x \\ 0 & x^2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[z_4 - x^2 z_2 \rightsquigarrow z_4]{z_3 - xz_2 \rightsquigarrow z_3} \begin{pmatrix} 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & -x^2 \\ 0 & 0 & x^3+x \\ 0 & 0 & (x^2)^2 \end{pmatrix}$$

Wir bemerken, dass jede der 4 Zeilenumformungen *natürlich* ist in dem Sinn, dass sie, angewandt auf eine Matrix der Gestalt

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

mit A in Stufenform, einen Eintrag der erste Spalte von C kleiner macht.

Dieses Beispiel läßt sich verallgemeinern. Und zwar sei

$$A(1,x) := \begin{pmatrix} 1 & -x \\ x & -1 \\ x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \text{ und } A(i+1,x) := \begin{pmatrix} & & & & 0 \\ & & A(i,x) & & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & x+1 \\ & & & & 1 \\ x & 0 & \cdots & 0 & x \\ x & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gibt es für jedes $n \geq 2$ eine natürliche (im obigen Sinn) Umformung der Matrix $A(n,x) \in \mathbb{Z}^{2n \times n}$ in Stufenform, bei der der Eintrag rechts unten in der Stufenform x^{2^n} ist (*'doppelt exponentiell'* [4]).

Es werden exponentiell viele Bits in n benötigt, um eine Zahl der Größenordnung x^{2^n} abzuspeichern. Damit benötigt ein Verfahren, bei dem solche Zahlen erzeugt werden, auch exponentiell viel Zeit. Man kann sich schnell davon überzeugen, dass es dann schon für relativ kleine n zu astronomisch großen Rechenzeiten kommt. △

Das Verfahren zur Berechnung der eindeutigen Lösung eines Gleichungssystems aus Abschnitt 4.1.8 mit Hilfe von Determinanten hat das Problem der zu großen Zahlen *nicht* (insbesondere können die auftretenden Determinanten nie doppelt exponentiell groß werden; siehe Lemma 4.1.22).

Die Umformung in Stufenform aus Beispiel 4.1.20 ist *nicht* die, die der gaußschen Algorithmus vorgenommen hätte: beim Verfahren aus Abschnitt 3.2.4 wird im k-ten Schritt von jeder Zeile z_l mit $l > k$ der Vektor $(a_{l,j_k} a_{k,j_k}^{-1}) z_k$ subtrahiert (wir verwenden die Bezeichnungen aus Abschnitt 3.2.4). Mit Hilfe von Determinanten läßt sich zeigen, dass die Laufzeit des gaußschen Algorithmus polynomiell in der Eingabegröße ist.

Definition 4.1.21. Sei $r = p/q \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ teilerfremd, $q > 0$. Wir definieren

$$\operatorname{Groe}(r) := 1 + \lceil \log_2(|p| + 1) \rceil + \lceil \log_2(q+1) \rceil \in \mathbb{N}.$$

Sei nun $b \in \mathbb{Q}^n$ und $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Groe}(b) &:= 1 + \operatorname{Groe}(b_1) + \cdots + \operatorname{Groe}(b_n) \\ \operatorname{Groe}(A) &:= mn + \sum_{i,j} \operatorname{Groe}(a_{ij}) \end{aligned}$$

Lemma 4.1.22. *Sei $A \in \mathbb{Q}^{m \times m}$. Dann ist* $\operatorname{Groe}(\det A) \leq 2 \operatorname{Groe}(A)$.

Beweis. Sei $A = (p_{ij}/q_{ij})_{i,j}$ wobei $p_{ij}, q_{ij} \in \mathbb{Z}$ für alle i,j teilerfremd und $q_{ij} > 0$. Seien ausserdem $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $p/q = \det A$ so dass p und q teilerfremd und $q > 0$. Dann gilt

$$q \leq \prod_{i,j=1}^{n} q_{ij} = 2^{\log_2(\prod_{i,j=1}^n q_{ij})} = 2^{\sum_{i,j=1}^n \log_2 q_{ij}} < 2^{\operatorname{Groe}(A)-1} \tag{4.5}$$

und mit der Leibnizschen Formel

$$|\det A| \leq \prod_{i,j=1}^{n} (|p_{ij}| + 1)\ .$$

Damit haben wir

$$|p| = |\det A| \cdot q \leq \prod_{i,j=1}^{n} (|p_{ij}| + 1) q_{ij} = 2^{\prod_{i,j=1}^{n} \log_2(|p_{ij}|+1) + \log_2 q_{ij}} < 2^{\mathrm{Groe}(A)-1}\ . \tag{4.6}$$

Aus (4.5) und (4.6) folgt

$$\mathrm{Groe}(\det A) = 1 + \lceil \log_2(|p| + 1) \rceil + \lceil \log_2(q + 1) \rceil < 2\,\mathrm{Groe}(A).$$ □

Proposition 4.1.23. *Wenn $Ax = b$, mit $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$, eine Lösung hat, dann auch eine der Größe höchstens* $2(\mathrm{Groe}(A) + \mathrm{Groe}(b))$.

Beweis. Wir können annehmen, dass die Zeilen von A linear unabhängig sind (denn da $Ax = b$ eine Lösung hat, können abhängige Zeilen entfernt werden ohne den Lösungsraum zu verändern). Ausserdem können wir durch umsortieren der Spalten von A annehmen, dass A von der Gestalt $[A_1\ A_2]$ ist für A_1 mit $\det(A_1) \neq 0$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} A_1^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Lösung von $Ax = b$, und die Größe dieser Lösung erfüllt nach Lemma 4.1.22 die gewünschte Schranke. □

Wir wollen nun nachweisen, dass der gaußsche Algorithmus polynomielle Laufzeit hat. Es genügt nicht zu zeigen, dass die berechneten Lösungen polynomielle Größe haben, sondern wir müssen dies auch von allen Zahlen nachweisen, die im Laufe der Berechnung auftreten!

Falls $M \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$, und $j_1, \ldots, j_l \in \{1, \ldots, n\}$, dann schreiben wir $M(i_1 \ldots i_k, j_1 \ldots j_k)$ für die Untermatrix von M, die aus M durch Löschen aller Zeilen ausser $i_1, \ldots, i_k$ und aller Spalten ausser $j_1, \ldots, j_l$ entsteht. Sei $A_k = \begin{pmatrix} B_k & C_k \\ \mathbf{0} & D_k \end{pmatrix}$ die Matrix im k-ten Schritt des Verfahrens aus Abschnitt 3.2.4. Dann gilt für jeden Eintrag d_{ij} von D_k offensichtlicherweise

$$d_{ij} = \frac{\det\big(A_k(1 \ldots k(k+i), 1 \ldots k(k+j))\big)}{\det\big(A_k(1 \ldots k, 1 \ldots k)\big)}. \tag{4.7}$$

Da A_k aus A durch Addition von Vielfachen der ersten k Zeilen zu anderen Zeilen entstanden ist, gilt (4.7) auch für A anstatt A_k (wir erinnern an Proposition 4.1.3), d.h.,

$$d_{ij} = \frac{\det\big(A(1 \ldots k(k+i), 1 \ldots k(k+j))\big)}{\det\big(A(1 \ldots k, 1 \ldots k)\big)}.$$

Also gilt $\mathrm{Groe}(d_ij) \leq 4\,\mathrm{Groe}(M)$ nach Lemma 4.1.22. Auf ähnliche Weise läßt sich auch für den zweiten Teil des gaußschen Algorithmus nachweisen, dass die auftretenden Zahlen nicht zu groß werden.

4.1.9 Invertieren einer Matrix mittels Determinanten

Falls eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar ist, so lässt sich die Inverse elegant mit Hilfe von Determinanten berechnen. Dazu verwenden wir wieder die Teilmatrizen A_{ij} (Definition 4.1.12) und die Schreibweise $A_i(b)$ aus Abschnitt 4.1.8. Zunächst eine Hilfsaussage, die direkt aus dem Entwicklungssatz (Satz 4.1.13) folgt.

Lemma 4.1.24. *Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $i,j \in \{1,\dots,n\}$ gilt* $\det(A_i(e_j)) = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$.

Definition 4.1.25. Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $i,j \in \{1,\dots,n\}$ heisst $a^{\#}_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ji}$ ein *Kofaktor* von A. Die Matrix $A^{\#} = (a^{\#}_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ der Kofaktoren heisst *Adjunkte* oder *Komplementärmatrix* von A.

Satz 4.1.26. *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ invertierbar. Dann gilt $A^{-1} = \frac{A^{\#}}{\det A}$.*

Anders geschrieben: es gilt

$$A^{-1} := \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \dots & (-1)^{n+1}\det A_{n1} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det A_{1n} & \cdots & \cdots & (-1)^{2n}\det A_{nn} \end{pmatrix}$$

Falls $A = (a_{i,j})_{i\in\{1,\dots,m\},j\in\{1,\dots,n\}}$, dann schreiben wir $a_{i,*}$ für die i-te Zeile von A, und $a_{*,j}$ für die j-te Spalte von A.

Beweis. Wir zeigen $A^{\#}A = \det A \cdot E_n$. Tatsächlich gilt für $i,j \in \{1,\dots,n\}$, dass

$$\begin{aligned}
(A^{\#}A)_{ij} &= \sum_{k\in\{1,\dots,n\}} (-1)^{i+k}\det(A_{ik})\cdot a_{kj} \\
&= \sum_{k\in\{1,\dots,n\}} a_{kj}\cdot\det(A_i(e_k)) && \text{(Lemma 4.1.24)} \\
&= \det(a_{1*},\dots,a_{(i-1)*},a_{j*},a_{(i+1)*},\dots,a_{n*}) && \text{(Multilinearität von det)} \\
&= \delta_{ij}\cdot\det(A) && \text{(det ist alternierend).}
\end{aligned}$$

□

Beispiel 4.1.27. Die inverse Matrix von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

△

Korollar 4.1.28. *Für eine Matrix $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$ (invertierbare Matrizen, siehe Abschnitt 3.2.1) mit Einträgen aus $\mathbb{Z}$ sind äquivalent:*

- A^{-1} *has ganzzahlige Einträge.*
- $\det A \in \{+1, -1\}$.

Weiterhin:

$$\{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Q}) : \det(A) \in \{+1, -1\}\}$$

ist eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$.

Beweis. Nach der Leibnizschen Formel (Satz 4.1.8) ist $\det(A)$ ganzzahlig. Wenn A^{-1} ebenfalls ganzzahlige Einträge hat, ist auch $\det(A^{-1})$ ganzzahlig. Nach Satz 4.1.11 ist $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ und damit gilt $\det(A) = \det(A^{-1}) \in \{+1, -1\}$.

Sei nun umgekehrt $\det(A) \in \{1, -1\}$. Nach Satz 4.1.26 gilt $A^{-1} = \frac{B}{\det A}$ wobei die Einträge von B Determinanten einer Matrix mit ganzzahligen Einträgen sind. Also ist auch $\det(A^{-1})$ ganzzahlig.

Die Menge enthält das neutrale Element E, da $\det(A) = 1$. Weiterhin ist mit A auch A^{-1} in der Menge. Es genügt also, Abgeschlossenheit der Menge unter Matrizenmultiplikation nachzuprüfen. Seien A, B mit $\det(A), \det(B) \in \{1, -1\}$. Und tatsächlich gilt $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \in \{1, -1\}$ nach Satz 4.1.11. □

4.2 Polynomringe

Ein Polynom Was ist das?

$$x^2 + 2x + 1$$

Ausführlicher: Vorlesung *Algebra*.
Trennung von Syntax und Semantik, Polynomen und Polynomfunktionen.

4.2.1 Ringe

Vieles (aber nicht alles) in dieser Vorlesung bleibt gültig, wenn man Körper durch *Ringe* ersetzt.

Definition 4.2.1. Eine Menge R mit zwei binären Operationen, $+$ ('Addition') und $\cdot$ ('Multiplikation'), heißt *Ring*, falls gilt

1. $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe: $+$ ist assoziativ, es gibt ein neutrales Element und inverse Elemente bezüglich $+$, und $+$ ist kommutativ (sieh Abschnitt 2.1)
2. $(R, \cdot)$ ist eine *Halbgruppe*, d.h., die Multiplikation ist assoziativ.
3. Es gelten die Distributivitätsgesetze (vergleiche mit Abschnitt 2.2!)

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$
$$(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$$

Ein Ring R heißt

- *Ring mit Eins* falls es ein neutrales Element für die Multiplikation gibt. Falls es so ein Element gibt, so ist es eindeutig (siehe Beweis von Lemma 2.1.3), und wird mit 1 bezeichnet.

- *kommutativer Ring* falls die Multiplikation kommutativ ist.

Ein Element $u \in R$ eines Rings R mit Eins heißt *Einheit* falls es ein *multiplikatives Inverses* hat, d.h., falls es Element $v \in R$ gibt, so dass $vu = uv = 1$.

Beispiel 4.2.2. $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$: der Ring der ganzen Zahlen (kommutativ, mit Eins; die einzigen Einheiten sind 1 und -1). △

Beispiel 4.2.3. $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$: der *Restklassenring* (siehe Abschnitt 1.2.10; kommutativ, mit Eins; Körper falls n prim). △

Beispiel 4.2.4. $(\mathbb{K}^{n\times n}, +, \cdot)$: der *Matrizenring* über $\mathbb{K}$ (nicht kommutativ, siehe Beispiel 3.2.4; aber mit Eins E_n). △

Beispiel 4.2.5. $\mathrm{End}(V) := \{f \colon V \to V \mid f \text{ lineare Abbildung}\}$: der *Endomorphismenring*, mit folgenden Operationen

$$(f_1 + f_2)(v) := f_1(v) + f_2(v)$$
$$(f_1 \cdot f_2)(v) := f_1(f_2(v))$$

Das neutrale Element für die Addition ist der Endomorphismus, der ganz V auf $\mathbf{0}$ abbildet, und für den wir $\underline{0}$ schreiben. △

Bemerkung 4.2.6. Die folgenden Definitionen dieser Vorlesung haben eine natürliche Verallgemeinerung von Körpern auf Ringe:

- Matrizen,

- Determinanten,

- Das Analogon zu Vektorräumen über einem Körper ist der Begriff des *Moduls* über einem Ring.

4.2.2 Polynome über $\mathbb{K}$

Eine Abbildung $\phi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ heißt auch *Folge*. Schreibweise: $\phi = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, \dots)$ mit $a_i := \phi(i) \in \mathbb{K}$. Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Folgen mit der Eigenschaft, dass $a_i = 0$ für *fast alle* $i \in \mathbb{N}$, d.h., mit Ausnahme von endlich vielen. Auf $\mathcal{F}$ werden folgende Operationen definiert:

- Addition:
$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} := (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

- Multiplikation mit Skalar $c \in \mathbb{K}$:
$$c \cdot (a_i)_{i\in\mathbb{N}} := (c \cdot a_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

Damit wird $\mathcal{F}$ zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine (unendliche!) Basis ist

$$\begin{aligned}&(1,0,0,\dots),\\&(0,1,0,\dots),\\&(0,0,1,\dots),\\&\dots\end{aligned}$$

Es gilt $\mathcal{F} \leq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, d.h., $\mathcal{F}$ ist ein Untervektorraum vom Funktionsraum $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (siehe Abschnit 2.3.1).

Neue Bezeichnungen (X ein beliebiges Symbol):

$$\begin{array}{lcr}\text{alt} & & \text{neu}\\ (1,0,0,\dots) & =: & X^0\\ (0,1,0,\dots) & =: & X^1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ (0,0,\dots,0,1,0,\dots) & =: & X^n\\ \mathcal{F} & =: & \mathbb{K}[X]\end{array}$$

Es folgt:

$$k\cdot(0,\dots,0,1,0,\dots) = k\cdot X^n = (0,\dots,0,k,0,\dots)$$

Speziell:

$$\begin{aligned}k(0,1,0,\dots) &= (0,k,0,\dots) = k\cdot X^1 =: k\cdot X\\ k(1,0,0,\dots) &= (k,0,0,\dots) = k\cdot X^0 =: k\cdot 1 \quad (= k\in\mathbb{K})\end{aligned}$$

Bemerkung 4.2.7. Man kann $\mathbb{K}$ als Teilmenge von $\mathbb{K}[X]$ auffassen (und das werden wir im Folgenden tun). Insbesondere steht dann $0 \in \mathbb{K}$ für das Element $(0,0,\dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Haben also

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$$

und insbesondere

$$(0,0,\dots) = 0 + 0\cdot X + 0\cdot X^2 + \dots = 0.$$

Die Elemente von $\mathbb{K}[X]$ heißen *Polynome (über $\mathbb{K}$) in der Unbestimmten X.*

4.2.3 Der Polynomring $\mathbb{K}[X]$

In $\mathbb{K}[X]$ lässt sich Multiplikation definieren:

- Für Basiselemente:
$$X^i \cdot X^j := X^{i+j}$$
$$(0^i, 0, \dots) \cdot (0^j, 1, 0, \dots) = (0^{i+j}, 1, 0, \dots)$$

- Für Linearkombinationen gemäß Distributivgesetz:
für $\phi = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ und $\psi = b_0 + b_1 X + \dots + b_m X^m$ gelte
$$\phi \cdot \psi = c_0 + c_1 X + \dots + c_{n+m} X^{n+m}$$
mit $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_k b_{k-i}$ für $k \in \mathbb{N}$.

Satz 4.2.8. $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ *ist ein kommutativer Ring mit Eins.*

Die Eins 1 ist neutrales Element für die Multiplikation.
Bezeichnung: *Polynomring* über $\mathbb{K}$ in der Unbekannten X.

4.2.4 Der Grad eines Polynoms

Sei
$$\phi = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots \in \mathbb{K}[X]$$
Definieren den *Grad* des Polynoms ϕ wie folgt:
$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\underline{0}) &:= -\infty \\ \operatorname{grad}(\phi) &:= \max(i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\} \end{aligned}$$
Es gilt:
$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\phi + \psi) &\leq \max(\operatorname{grad}(\phi), \operatorname{grad}(\psi)) \\ \operatorname{grad}(\phi \cdot \psi) &= \operatorname{grad}(\phi) + \operatorname{grad}(\psi) \end{aligned} \tag{4.8}$$
Falls $\mathbb{K}$ kein Körper, sondern blos ein Ring, gilt in (4.8) im allgemeinen blos $\leq$.

4.2.5 Polynomfunktionen

Nun der bereits angekündigte wichtige Übergang von der Syntax zur Semantik.

Sei $\phi \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom,
$$\phi = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n .$$
Sei R ein Ring mit $\mathbb{K} \subseteq R$ und $r \in R$. Dann ist
$$\phi^R(r) := a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n$$

ein Element von R!
Auswertung von ϕ in R an der Stelle r. "Einsetzen" von r in ϕ.

Die Abbildung

$$\phi^R : R \to R : r \mapsto \phi^R(r)$$

heißt die zu ϕ gehörige *Polynomfunktion.* In der Algebra allgemeiner: 'Termfunktion'.

Wichtig: Unterschied

Polynom	Polynomfunktion
(Syntax)	(Semantik)
ϕ	ϕ^R

Definition 4.2.9. Ein Element $r \in R$ heißt *Nullstelle von ϕ in R* falls $\phi^R(r) = 0$.

Hier steht 0 für das Nullelement des Ringes R = Nullelement von $\mathbb{K}$.

4.2.6 Der Auswertungshomomorphismus

Satz 4.2.10 (Auswertungssatz)**.** *Sei R ein Ring und $\mathbb{K} \subseteq R$ ein Körper. Sei $r \in R$ und $r \cdot k = k \cdot r$ für alle $k \in \mathbb{K}$. Dann gilt für alle $\phi, \psi \in \mathbb{K}[X]$:*

$$(\phi + \psi)^R(r) = \phi^R(r) + \psi^R(r)$$
$$(\phi \cdot \psi)^R(r) = \phi^R(r) \cdot \psi^R(r)$$

Die Vorraussetzungen sind z.B. gegeben, wenn R ein kommutativer Ring ist. Algebraischer Hintergrund: die Abbildung

$$h_r : \mathbb{K}[X] \to R : \phi \mapsto \phi^R(r)$$

ist ein (Ring-) Homomorphismus.

Beispiel 4.2.11. Sei $R := \mathbb{K}^{2\times 2}$. Ist $\mathbb{K} \subseteq R$? Eigentlich Nein.
Aber mit 'Trick' über Einbettung von $\mathbb{K}$ in R:
Körperelement $k \in \mathbb{K}$ wird als Matrix $k \cdot E_2 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ interpretiert.
($E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist Eins-element im Ring $R^{2\times 2}$.)
Dann gilt $\mathbb{K} \subseteq R$ und für $k \in \mathbb{K}$ und $A \in R^{2\times 2}$ gilt

$$\begin{aligned} k \cdot A &:= (k \cdot E_2) \cdot A && \text{Multiplikation im Ring!} \\ &= A \cdot (k \cdot E_2) && \text{Eigenschaft der Matrizenmultiplikation} \\ &= A \cdot k && \text{Multiplikation im Ring} \end{aligned}$$

und damit ist Satz 4.2.10 anwendbar. Seien $\phi_1 = (-2 + X)$ und $\phi_2 = (3 + X)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \phi := \phi_1\phi_2 &= (-2 + X)(3 + X) \\ &= -6 + X + X^2 \end{aligned}$$

Nullstellen von ϕ in $\mathbb{K}: 2, -3$.
Für z.B. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2\times 2} = R$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\phi_1^R(A) &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \\
\phi_2(A) &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\phi(A) &= \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^2 = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Satz 4.2.10 (Auswertungssatz) ergibt

$$\phi(A) = \phi_1(A) \cdot \phi_2(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Nullstellen von ϕ in $\mathbb{K}^{2\times 2}$: z.B. die Matrix A. △

Beispiel 4.2.12. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist $\mathrm{End}(V)$ ein (nicht kommutativer) Ring (Beispiel 4.2.5). Wir werden im Folgenden annehmen, dass $\mathbb{K} \subseteq \mathrm{End}(V)$ ist: das Element $\lambda \in \mathbb{K}$ fassen wir auf als $v \mapsto \lambda\,\mathrm{id}_V$. Also können wir Polynome $\phi \in \mathbb{K}[X]$ auswerten in $\mathrm{End}(V)$. △

4.2.7 Polynomdivision

Teilbarkeitslehre für Polynome ähnlich wie für Zahlen (Vorlesung Algebra).

Definition 4.2.13. Seien $\phi, \psi \in \mathbb{K}[X]$. Dann heißt ϕ *ein Vielfaches von* ψ, und ψ *ein Teiler* von ϕ (Schreibweise: $\psi|\phi$), falls es ein $\phi_1 \in \mathbb{K}[X]$ gibt mit $\phi = \phi_1\psi$.

Polynomdivision: $\psi_1 = \frac{\phi}{\psi}$ Division mit Rest.

Beispiel:

$$\begin{array}{llllllll}
(& X^5 & +3X^4 & +0\cdot X^3 & +X^2 & +6X & -6): & (X^2+X-1) = X^3+2X^2-X+4 \\
-(& X^5 & +X^4 & -X^3) & & & & \\
 & 0 & +2X^4 & -X^3 & & & & \\
 & -(& 2X^4 & +2X^3 & -2X^2) & & & \\
 & & 0 & -X^3 & 3X^2 & & & \\
 & & -(& -X^3 & -X^2 & X) & & \\
 & & & 0 & 4X^2 & +5X & -6 & \\
 & & & -(& 4X^2 & +4X & -4 & \\
 & & & & 0 & X & -2 & \text{‘Rest’ } \rho = X-2
\end{array}$$

Also: $\frac{\phi}{\psi} = \phi_1 + \frac{\rho}{\psi}$, d.h.,

$$\phi_1\psi + \rho$$

wobei $\mathrm{grad}(\rho) < \mathrm{grad}(\psi)$.

Lemma 4.2.14. *Sei $\phi \in \mathbb{K}[X]$ und $k \in \mathbb{K}$. Dann ist k Nullstelle von ϕ genau dann, wenn $(X-k)|\phi$.*

Beweis. Sei $\psi := (X-k)$.
'$\Leftarrow$': $\phi = \phi_1 \cdot \psi$ ergibt mit Satz 4.2.10

$$\phi(k) = \phi_1(k)\psi(k) = \phi_1(k) \cdot 0 = 0$$

'$\Rightarrow$': Divisionsverfahren liefert $\phi = \phi_1 \cdot (X-k) + \rho$ wobei $\text{grad}(\rho) < \text{grad}(\psi) = 1$. Wegen $\phi(k) = 0$ folgt $\rho(k) = 0$. Da $\text{grad}(\rho) = 0$ ist $\rho \in \mathbb{K}$. Also $\rho = 0$, und damit $\psi|\phi$. □

Definition 4.2.15. Die *algebraische Vielfachheit* einer Nullstelle k ist definiert als

$$\max\{m \in \mathbb{N} : (X-k)^m|\phi\}.$$

Wie zeigt man, dass ein Polynom mehrfache Nullstellen hat? Dafür ist das folgende Lemma oft praktisch. Die *Ableitung* eines Polynoms $\phi(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n$ ist definiert als das Polynom

$$\phi'(X) := a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}.$$

(Siehe auch Beispiel 3.4.18.)

Lemma 4.2.16. *Ein Polynom $\phi \in \mathbb{K}[X]$ hat genau dann $\lambda \in \mathbb{K}$ als mehrfache Nullstelle, wenn λ sowohl eine Nullstelle von ϕ als auch von ϕ' ist.*

Beweis. Wenn λ eine mehrfache Nullstelle von ϕ ist, dann gilt $\phi(X) = (1-X)^m\psi(X)$ mit $m \geq 2$ (Lemma 4.2.14). Also ist

$$\phi(X)' = m(X-\lambda)^{m-1}\psi(X) + (X-\lambda)^m\psi(X)'$$

was ebenfalls λ als Nullstelle hat.

Umgekehrt: nehmen wir an, dass λ Nullstelle von sowohl ϕ als auch von ϕ' ist. Dann können wir schreiben $\phi(X) = (X-\lambda)\psi(X)$, und $\phi(X)' = \psi(X) + (X-\lambda)\psi'(X)$. Also $0 = \phi(X)'(\lambda) = \psi(\lambda) + (\lambda-\lambda)\psi'(\lambda) = \psi(\lambda)$ und damit ist λ Nullstelle von ψ. Also ist λ mehrfache Nullstelle von ϕ. □

4.3 Eigenwerte, Eigenvektoren, Diagonalisierbarkeit

Viele Anwendungen in der Physik, Stochastik, diskreten Mathematik, ...

Definition 4.3.1. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. (D.h., f ist eine lineare Abbildung, siehe Abschnitt 3.4.) Ein Element $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt *Eigenwert (EW) von f*, falls es einen Vektor $v \neq \mathbf{0}$ gibt, so dass:

$$f(v) = \lambda v \tag{4.9}$$

Geometrisch: Streckung (oder Stauchung) vom Faktor λ (aber gleiche Richtung).

Jeder Vektor $v \neq \mathbf{0}$ mit dieser Eigenschaft heißt *Eigenvektor* von f zum Eigenwert λ.

Speziell: *Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{K}$ und *Eigenvektor* $u \in \mathbb{K}^{n\times n}$ einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$: definiert als EW und Eigenvektor von

$$f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : x \mapsto Ax\,,$$

d.h.,

$$Au = \lambda u \qquad\qquad \text{mit } u \neq \mathbf{0}\,.$$

Bemerkung 4.3.2. Der Nullvektor $v = \mathbf{0}$ erfüllt (4.9) trivialerweise, ist aber *kein* Eigenvektor. Der Eigenwert 0 tritt genau dann auf, wenn $\operatorname{Kern}(f) \neq \{\mathbf{0}\}$ (also genau dann, wenn f nicht injektiv ist, bzw. wenn $\det(f) = 0$; Satz 3.2.22).

Definition 4.3.3. Seien $\lambda \in \mathbb{K}$ und $f\colon V \to V$.

$$\operatorname{Eig}_\lambda(f) := \operatorname{Eig}_\lambda := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} \tag{4.10}$$

heißt *Eigenraum* von f zum Eigenwert λ.

$\operatorname{Eig}_\lambda(f)$ ist Untervektorraum von V, denn

$$\begin{aligned}\operatorname{Eig}_\lambda(f) &= \{v \in V \mid f(v) - \lambda v = \mathbf{0}\}\\ &= \{v \in V \mid (f - \lambda\,\mathrm{id})(v) = \mathbf{0}\}\\ &= \operatorname{Kern}(f - \lambda\,\mathrm{id}) \leq V.\end{aligned}$$

Die Dimension von $\operatorname{Eig}_\lambda$ heißt *geometrische Vielfachheit* von λ.
Spezialfall $f = f_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n : x \mapsto Ax$:

$$\operatorname{Eig}_\lambda(A) := \operatorname{Eig}_\lambda(f_A) = \operatorname{Kern}(A - \lambda E_n)$$

Also:

$$\begin{aligned}\dim(\operatorname{Eig}_\lambda(A)) &= \dim(\operatorname{Kern}(A - \lambda E))\\ &= n - \operatorname{rg}(A - \lambda E)\end{aligned}$$

ist die geometrische Vielfachheit von λ nach der Dimensionsformel (Satz 3.3.5).

Bemerkung 4.3.4. Seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$, $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus, und $A := M_B^B(f)$ Darstellungsmatrix von f (siehe Abschnitt 3.4.5). Dann haben A und f die gleichen Eigenwerte, und $\operatorname{Eig}_\lambda(f) \simeq \operatorname{Eig}_\lambda(A)$. Genauer: sei $\Phi_B\colon \mathbb{K}^n \to V$ der kanonische Basisisomorphismus (Abschnitt 2.4.3). Dann gilt

$$\begin{aligned}Ax = \lambda x &\Leftrightarrow \Phi_B(Ax) = \Phi_B(\lambda x)\\ &\Leftrightarrow f(\Phi_B(x)) = \lambda\Phi_B(x)\end{aligned}$$

Ist x der Koordinatenvektor von v bzgl. Basis B (das heißt, $\Phi_B(x) = v$) dann gilt:

$$\begin{aligned}&v \text{ ist Eigenvektor von } f \text{ zu EW } \lambda\\ \Leftrightarrow\ &x \text{ ist Eigenvektor von } A \text{ zu EW } \lambda\end{aligned} \tag{4.11}$$

Beispiel 4.3.5. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto Ax$ lineare Abbildung mit Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Was macht f?

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto Ae_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto Ae_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bild!

Experimentieren:

$$Av_1 = 2v_1 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Av_2 = 4v_2 \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 2$ Eigenwert, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor.
$\lambda_2 = 4$ Eigenwert, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Eigenvektor.
$B := (v_1, v_2)$ ist sogar Basis. Muss nicht immer sein!
Für beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^2$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$$

folgt

$$\begin{aligned} f(v) &= \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) \\ &= 2\alpha_1 v_1 + 4\alpha_2 v_2 \end{aligned}$$

Das heißt Streckung um Faktor 2 in Richtung v_1, und um Faktor 4 in Richtung v_2. Das kann man aus der Darstellungsmatrix $M_B^B(f)$ direkt ablesen:

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ist Diagonalmatrix (Beispiel 3.2.6) mit Eigenwerten auf der Diagonale. △

Diagonalmatrix erstrebenswert:

- nur n Werte (statt n^2);
- alle Rechnungen (Inverse, Determinante, etc.) einfacher;
- Verhalten der Abbildung ablesbar;
- EW ablesbar.

4.3.1 Anwendung: Pagerank

Webseiten $S := \{1, \dots, n\}$.
'Links' zwischen Seiten: Teilmenge L von S^2. Bild!
Wichtigkeit $0 \leq w(1), \dots, w(n) \in \mathbb{R}$ (für Ranking).
Wie könnte sinnvolles Ranking funktionieren?

Idee.

$$w(i) \sim \sum_{j:(i,j)\in L} w(j)$$

Formal:

$$s(i) = \tilde{\lambda} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w(j)$$

wobei $a_{ij} := 1$ falls $(i, j) \in L$ und $a_{ij} := 0$ sonst. Also

$$\begin{pmatrix} w(1) \\ \vdots \\ w(n) \end{pmatrix} =: x = \tilde{\lambda} A x \qquad \text{für } A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$$

D.h., für Ranking wird gebraucht: ein positiver Eigenwert $\lambda = 1/\tilde{\lambda}$ und ein *positiver* Eigenvektor x (alle Einträge positiv):

$$Ax = \lambda x$$

Beispiel 4.3.6. (Turnier) Teams $1, 2, 3, 4$.

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Interpretation der Matrix: $a_{ij} = 1$: Team i schlägt Team j, sonst $a_{ij} = 0$.

Eigenwert $\approx 1,39$ (weitere Eigenwerte: ≈ -0.47 und noch zwei gleiche komplexe), dazugehöriger Eigenvektor

$$x \approx \begin{pmatrix} 0.62 \\ 0.55 \\ 0.32 \\ 0.45 \end{pmatrix}$$

△

4.3.2 Berechnung von Eigenwerten und das Charakteristische Polynom

Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ bzw. $f: V \to V$ Endomorphismus mit $A = M_B^B(f)$ (bezüglich Basis B).

Definition 4.3.7. Das *charakteristische Polynom*[1] von A, beziehungsweise von f, ist das folgende Polynom aus $\mathbb{K}[X]$:

$$\chi_f(X) := \chi_A(X) := \det(XE - A) = \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & X - a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Bemerkung. Definition funktioniert auch, wenn statt Körper $\mathbb{K}$ nur ein Ring R verwendet wird (Definition 4.2.1; $A \in R^{n\times n}$, $\chi_f \in R[X]$).

Proposition 4.3.8. *Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom.*

Beweis. Für $B = S^{-1}AS$ gilt

$$\begin{aligned} \det(XE - B) &= \det(XS^{-1}S - S^{-1}AS) \\ &= \det(S^{-1}(XE - A)S) \\ &= \det S^{-1} \cdot \det(XE - A) \cdot \det S \\ &= \det(XE - A) . \end{aligned}$$

□

Also ist $\chi_f(X)$ unabhängig von der Wahl der Basis B. Ansonsten wäre Definition 4.3.7 so gar nicht möglich.

Satz 4.3.9. *Die Eigenwerte sind* genau *die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, d.h.,*

$$\lambda \in \mathbb{K} \textit{ ist EW von } A \quad \Leftrightarrow \quad \det(\lambda E - A) = 0$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ EW} &\Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{K}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : v \in \mathrm{Kern}(\lambda E - A) && \text{(Definition 4.3.1)} \\ &\Leftrightarrow \det(\lambda E - A) = 0 && \text{(Abschnitt 4.1.8)} \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung folgt aus den Beobachtungen aus Abschnitt 4.1.8: ein homogenes LGS $Bx = \mathbf{0}$ (stets lösbar!) hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn $\det B \neq 0$. □

Beispiel 4.3.10. Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

[1] Manche Autor:innen definieren das charakteristische Polynom von A als $\det(A - \lambda E)$. Unsere Definition hat den Vorteil, dass der führende Eintrag des Polynoms stets 1 ist. Allerdings macht das keinen großen Unterschied, da sich die eine Variante der Definition durch Multiplikation mit $(-1)^n$ aus der anderen ergibt.

$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda) = \det(XE - A) &= \begin{vmatrix} X & 1 & -1 \\ 3 & X+2 & -3 \\ 2 & 2 & X-3 \end{vmatrix} && \text{(Definition)} \\
&= X(X+2)(X-3) - 6 - 6 + 2(X+2) + 6X - (X-3)3 && \text{(Sarrus, Abschnitt 4.1.5)} \\
&= X^3 - 3X^2 + 2X^2 - 6X - 12 + 2X + 4 + 6X - 3X + 9 && \text{(Ausmultiplizieren)} \\
&= X^3 - X^2 - X + 1 && \text{(Vereinfachen)} \\
&= (X-1)^2(X+1) && \text{(Faktorisieren)}
\end{aligned}$$

Also: haben folgende Nullstellen

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1 && \text{(algebraische Vielfachheit 2)} \\
\lambda_2 &= -1 && \text{(algebraische Vielfachheit 1)}
\end{aligned}$$

Geometische Vielfachheiten werden später ausgerechnet. △

Beispiel 4.3.11. $V = \mathbb{R}^2$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned}
\chi_A(X) &= \cos^2\alpha - 2X\cos\alpha + \sin^2\alpha \\
&= X^2 - 2X\cos\alpha + 1
\end{aligned}$$

Eigenwerte: die Nullstellen von $\chi_A(X)$.
Fallunterscheidung:

- $\alpha = 0$.
$$\chi_A(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$$
Eigenwert 1, algebraische Vielfachheit 2.

- $\alpha = 180^\circ$.
$$\chi_A(X) = X^2 + 2X + 1 = (+1)^2$$
Eigenwert -1, algebraische Vielfachheit 2.

- $\alpha \neq 0$ und $\alpha \neq 180^\circ$.
$$\chi_A(X) = X^2 - (2\cos\alpha)X + 1$$
hat keine Nullstellen in $\mathbb{R}$.
p, q-Formel: $q = 1$, $p/2 = -\cos\alpha$. Haben die Lösungen
$$-\cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1}$$
mit $\cos^2\alpha - 1 < 0$ für $\alpha \neq \{0^\circ, 180^\circ\}$. △

Beispiel 4.3.12. Die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

sind die Elemente der Hauptdiagonalen (algebraische Vielfachheit ist dabei schon berücksichtigt), denn

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(XE - A) \\ &= (X - a_{11})(X - a_{22})\cdots(X - a_{nn}). \end{aligned}$$

△

Bemerkung 4.3.13. Für das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(XE - A) \\ &= a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \end{aligned}$$

einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt

1. $a_0 = \det -A$ Setze $X = 0$
2. $a_n = 1$
3. $a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + \cdots + a_{nn}) =: (-1)^{n-1} \operatorname{Spur}(A)$ Summe der Hauptdiagonalen

Beweis durch Auswerten der Leibnizschen Formel.

Übung 13. Beweisen Sie: für $A, B \in \mathbb{K}^n$ gilt $\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$.

Übung 14. Seien $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{K}^n$ und $\pi \in S_n$ eine Permutation. Gilt $\operatorname{Spur}(A_1, \dots, A_n) = \operatorname{Spur}(A_{\pi(1)} \cdots A_{\pi(n)})$?

Übung 15. Zeigen Sie: für quadratische Matrizen A und B und

$$M := \begin{pmatrix} A & * \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$$

gilt $\chi_M = \chi_A \cdot \chi_B$.

Kommentare:
(Erinnerung: Nullstellen $\leftrightsquigarrow$ Linearfaktoren, Lemma 4.2.14)
Sätze und Algorithmen zur Faktorisierung univariater Polynome aus $\mathbb{K}[X]$:

- über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: jedes Polynom zerfällt in Linearfaktoren. Wenn man bereits eine Nullstelle a kennt (numerische Verfahren), so führt man Polynomdivision durch $(X - a)$ durch und wendet das Verfahren rekursiv auf den Quotienten an.

- über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: faktorisieren in $\mathbb{C}$, und beobachten, dass mit jeder komplexe Nullstellen a auch die konjugiert komplexe $\bar{a}$ eine Nullstelle ist. Also treten neben den Linearfaktoren auch Faktoren auf der Gestalt

$$((X-a)(X-\bar{a})) = X^2 - (a+\bar{a})X + a\bar{a} = X^2 - \Re(a)X + |a|^2 .$$

- über endlichen Körpern $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$: Berlekamp-Algorithmus [8].
- über $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$: Lenstra-Lenstra-Lovász Algorithmus [6].

4.3.3 Diagonalmatrizen

Erinnern uns an Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

aus Abschnitt 4.3. Eigenvektoren bilden Basis $B = \{\binom{1}{1}, \binom{1}{-1}\}$,
und Darstellungsmatrix von f_A diagonal:

$$M_B^B(f_A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Wann ist das der Fall?

Lemma 4.3.14. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$, und $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Dann sind äquivalent:*

1. *Die Darstellungsmatrix von f bezüglich B ist Diagonalmatrix:*

$$A := M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

2. *B ist Basis aus Eigenvektoren von f, genauer $f(v_i) = \lambda_i v_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Beweis. (2) $\Rightarrow$ (1): klar (siehe Abschnitt 3.4.5: Merkregel!)
(1) $\Rightarrow$ (2): Offenbar $Ae_i = \lambda_i e_i$ (i-te Spalte von A)
Also ist e_i Eigenvektor von A zu EW λ_i.
Also ist $v_i = \Phi_B(e_i)$ Eigenvektor von f zu EW λ_i (siehe (4.11)).
Das bedeutet, $f(v_i) = \lambda_i v_i$. □

Ziel im Folgenden: möglichst viele linear unabhängige Eigenvektoren finden.
Verschiedene Eigenwerte sichern lineare Unabhängigkeit!

Lemma 4.3.15. *Seien $v_1, \dots, v_r$ Eigenvektoren von $f \in \mathrm{End}(V)$ zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, so sind $v_1, \dots, v_r$ linear unabhängig.*

Beweis. Induktion über r. Für $r = 1$ ist $v_1 \neq \mathbf{0}$ linear unabhängig. Sei nun die Aussage richtig für $r = k \geq 1$; zu zeigen ist die Aussage für $r = k + 1$. Seien $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ Eigenvektoren zu EW $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \lambda_{k+1}$ (paarweise verschieden). O.B.d.A $\lambda_{k+1} \neq 0$ (sonst andere Nummerierung). Sei

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{k+1} v_{k+1} = \mathbf{0} \tag{4.12}$$

Dann gilt:

$$\alpha_1 \lambda_{k+1} v_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_{k+1} v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = \mathbf{0} \quad (\lambda_{k+1} \cdot (4.12)) \tag{4.13}$$

$$\underbrace{\alpha_1 \underbrace{\lambda_1 v_1}_{=f(v_1)}}_{=f(\alpha_1 v_1)} + \cdots + \alpha_k \lambda_k v_k + \alpha_{k+1} \lambda_{k+1} v_{k+1} = \mathbf{0} \quad (\text{Anwenden von } f \text{ auf } (4.12)) \tag{4.14}$$

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) v_1 + \cdots + \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) v_k = \mathbf{0} \quad (\text{Subtraktion } (4.14) \text{ - } (4.13))$$

Nach Induktionsvorraussetzung sind $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig, also

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = \cdots = \alpha_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0 \,.$$

Wegen $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$ ist $\lambda_i - \lambda_{k+1} \neq 0$, für alle $i \in \{1, \dots, k\}$, und daher

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$$

Aus (4.14) folgt nun

$$\alpha_{k+1} \underbrace{\lambda_k}_{\neq 0} \underbrace{v_{k+1}}_{\neq \mathbf{0}} = \mathbf{0}$$

also auch $\alpha_{k+1} = 0$. □

Definition 4.3.16. Sei V in $\mathbb{K}$-Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$, und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

- f heißt *diagonalisierbar*, wenn es eine Basis von V gibt, die aus Eigenvektoren von f besteht (Motivation: Lemma 4.3.14);
- A heißt *diagonalisierbar*, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}, n)$ gibt, so dass $A' := S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist. In anderen Worten: A ist genau dann diagonalisierbar, wenn A ähnlich ist zu einer Diagonalmatrix A'.

Bemerkung 4.3.17. Definition sinnvoll, denn für jede Basis B von V ist f genau dann diagonalisierbar, wenn $M_B^B(f)$ diagonalisierbar.

Satz 4.3.18 (Diagonalisierbarkeitskriterium)**.** *Es seien:*

- *V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum,*
- $f \in \mathrm{End}(V)$,
- $A = M_B^B(f)$ *Darstellungsmatrix von f bezüglich einer Basis B von V,*

- $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ *alle paarweise verschiedenen Eigenwerte von* f *(bzw. von* A*),*
- $n_1, \dots, n_r$ *die zugehörigen geometrischen Vielfachheiten,* $n_i = \dim \operatorname{Kern}(A - \lambda_i E)$*,*
- $(v_1^{(i)}, \dots, v_{n_i}^{(i)})$ *sei Basis des Eigenraums* $\operatorname{Eig}_{\lambda_i}(f) = \operatorname{Kern}(f - \lambda_i \operatorname{id})$*,*
- $m_1, \dots, m_r$ *die algebraischen Vielfachheiten von* $\lambda_1, \dots, \lambda_r$*, das heißt,*

$$m_i = \max\{m \in \mathbb{N} \mid \exists \psi \in \mathbb{K}[\lambda]\colon \chi_f(X) = (X - \lambda_i)^m \psi\}\,.$$

Dann gilt

1. $(v_1^{(1)}, \dots, v_{n_1}^{(1)}, \dots, v_1^{(r)}, \dots, v_{n_r}^{(r)})$ *ist linear unabhängig.*
2. $n_i \leq m_i$ *und* $\sum_{i=1}^r n_i \leq \sum_{i=1}^r m_i \leq n$*.*
3. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*
   a) f *ist diagonalisierbar;*
   b) *Es gibt eine Basis von* $\mathbb{K}^n$*, die nur aus Eigenvektoren von* A *besteht.*
   c) A *ist diagonalisierbar; in diesem Fall ist für jede Matrix* S*, deren Spalten* $u_1, \dots, u_n$ *linear unabhängige Eigenvektoren von* A *sind,* $S^{-1}AS$ *eine Diagonalmatrix.*
   d) *Das charakteristische Polynom* χ_A *zerfällt in Linearfaktoren*
   $$\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$$
   und $n_i = m_i$ *für* $i \in \{1, \dots, r\}$*.*
   e) $\sum_{i=1}^r n_i = n = \dim V$*.*

Bemerkung 4.3.19. Unmittelbare Folgerung aus $(e) \Rightarrow (a)$: Falls $r = n$, also wenn es n verschiedene Eigenwerte gibt, dann ist f diagonalisierbar. Dies ist selbstverständlich nur ein hinreichendes, nicht aber ein notwendiges Kriterium: denke an die Diagonalmatrix E_2, die nur einen Eigenwert hat.

Beweis. Zu 1.:

$$\underbrace{\alpha_1^{(1)} v_1^{(1)} + \cdots + \alpha_{n_1}^{(1)} v_{n_1}^{(1)}}_{=: w_1 \in \operatorname{Eig}_{\lambda_1}} + \cdots + \underbrace{\alpha_1^{(r)} v_1^{(r)} + \cdots + \alpha_{n_r}^{(r)} v_{n_r}^{(r)}}_{=: w_r \in \operatorname{Eig}_{\lambda_r}} = \mathbf{0}$$

Nach Lemma 4.3.15 sind $w_1, \dots, w_r$ linear unabhängig, wenn sie Eigenvektoren, also $\neq \mathbf{0}$ sind, also:

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_1^{(1)} v_1^{(1)} + \cdots + \alpha_{n_1}^{(1)} v_{n_1}^{(1)} = \mathbf{0} \\ &\vdots \\ w_r &= \cdots = \mathbf{0} \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^{(1)} = \dots = \alpha_{n_1}^{(1)} = 0 && \text{da } v_1^{(1)}, \dots, v_{n_1}^{(1)} \text{ Basis bilden,}\\
&\vdots\\
&\alpha_1^{(r)} = \dots = \alpha_{n_r}^{(r)} = 0 && \text{da } v_1^{(r)}, \dots, v_{n_r}^{(r)} \text{ Basis bilden.}
\end{aligned}$$

Zu 2.: Die Basis $(v_1^{(i)}, \dots, v_{n_i}^{(i)})$ von Eig_{λ_i} lässt sich zu Basis $\tilde{B} := (v_1^{(i)}, \dots, v_{n_i}^{(i)}, \dots, v_n{}^{(i)})$ von V ergänzen (Steinitz'scher Austauschsatz: Satz 2.4.10). Die Darstellungsmatrix hat dann die Form

$$M := M_{\tilde{B}}^{\tilde{B}}(f) = \left(\begin{array}{ccc:c} \lambda_1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & * \\ 0 & \cdots & \lambda_i & \\ \hdashline & \mathbf{0} & & * \end{array}\right)$$

Die ersten i Spalten: Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren.
Also

$$\chi_f = \det(\lambda E - M) = (X - \lambda_i)^{n_i} \cdot \text{Restpolynom}$$

d.h., $n_i \leq m_i$ (algebraische Vielfachheit von λ_i). Wegen

$$\mathrm{grad}(\phi \cdot \psi) = \mathrm{grad}(\phi) + \mathrm{grad}(\psi)$$

folgt

$$\sum_{i=1}^{r} m_i \leq \mathrm{grad}(\chi_f) = n\,.$$

Bemerkung: wegen 3.(e) gilt hier sogar Gleichheit.

Zu 3.: Wir zeigen $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (a)$.

$(a) \Rightarrow (b)$: Da f diagonalisierbar, hat V eine Basis $C = (w_1, \dots, w_n)$ aus Eigenvektoren von f (Lemma 4.3.14). Die Koordinatenvektoren $u_1 = \Phi_B^{-1}(w_1), \dots, u_n = \Phi_B^{-1}(w_n)$ bilden Basis von $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A.

$(b) \Rightarrow (c)$: Sei $u_1, \dots, u_n$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A, und sei

$$S = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix}.$$

Dann gilt für eine Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, dass

$$SD = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \cdots & \lambda_n u_n \end{pmatrix} \qquad \text{(Matrizenmultiplikation)}.$$

Also gilt

$$SD = AS = \begin{pmatrix} Au_1 & \cdots & Au_n \end{pmatrix}$$

genau dann wenn $Au_i = \lambda u_i$ für $i = 1, \ldots, n$, d.h., genau dann, wenn die Spalten Eigenvektoren sind. Da $(u_1, \ldots, u_n)$ Basis von $\mathbb{K}^n$ ist, folgt dass

$$\operatorname{rg}(S) = n \Rightarrow S \in \operatorname{GL}(n, \mathbb{K})$$

und

$$SD = AS \Leftrightarrow D = S^{-1}AS.$$

Also $(b) \Rightarrow (c)$.

$(c) \Rightarrow (d)$: A und

$$D = S^{-1}AS =: \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

sind ähnlich, haben also das gleiche charakteristische Polynom (Proposition 4.3.8)

$$\begin{aligned} \chi_A(X) = \chi_D(X) &= (X - d_1)(d_2 - \lambda)\cdots(X - d_n) \\ &=: (X - \lambda_1)^{m_1}\cdots(X - \lambda_r)^{m_r} \qquad \text{(zusammenfassen)} \end{aligned}$$

d.h., zu λ_i gibt es genau m_i verschiedene Indizes mit $\lambda_i = d_{t_1} = \cdots = d_{t_{m_i}}$. Die zugehörigen Spalten $u_{t_1}, \ldots, u_{t_{m_i}}$ von A sind linear unabhängige (nach Voraussetzung) Eigenvektoren von λ_i, d.h., $m_i \leq n_i$. Daher $n_i = m_i$.

$(d) \Rightarrow (e)$: Mit (e) gilt $n = \operatorname{grad}(\chi_f) = \sum_i m_i = \sum_i n_i$ und daher (d).

$(e) \Rightarrow (a)$: Wenn $\sum_i n_i = n$, dann bilden die Eigenvektoren in 1. eine Basis (wegen $n = \dim V$). □

4.3.4 Wie diagonalisiert man eine Matrix?

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Bestimmung einer Basis aus Eigenvektoren.

- 1. Schritt: Bestimmung aller Eigenwerte von A (Verfahren aus Abschnitt 4.3.2).
- 2. Schritt: Zu jedem Eigenwert λ wird eine Basis des Eigenraums $\operatorname{Eig}_\lambda(A)$ bestimmt.

- 3. Schritt: Ergeben alle Basen aus Schritt 2 insgesamt n Vektoren, so bilden diese eine Basis von V aus Eigenvektoren und A ist diagonalisierbar, sonst nicht. Nimmt man diese Eigenvektoren von A als Spalten einer Matrix S, so liefert diese die Diagonalisierung $S^{-1}AS$.

Beispiel. $n = 3$.

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -y + z \\ -3x - 2y + 3z \\ -2x - 2y + 3z \end{pmatrix}$$

lineare Abbildung $f = f_A : u \mapsto Au$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$A = M_B^B(f)$ für $B = (e_1, e_2, e_3)$ Standardbasis von $\mathbb{K}^3$.

Diagonalisierbar? $D = S^{-1}AS$?

- 1. Schritt. Bestimmung der Eigenwerte.
  Beispiel 4.3.10: Eigenwerte
  - $\lambda_1 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit $m_1 = 2$, und
  - $\lambda_2 = -1$ mit algebraischer Vielfachheit $m_2 = 1$.

$$\chi_A(X) = (X-1)^2(X+1)$$

- 2. Schritt.
  - Bestimmung einer Basis von $\mathrm{Eig}_{\lambda_1}(A) = \mathrm{Kern}(A - \lambda_1 E) = \mathrm{Lös}(A - \lambda_1 E, \mathbf{0})$.

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \mathrm{rg}(A - \lambda_1 E) = 1 \\ &\Rightarrow \quad \dim(\mathrm{Kern}(A - \lambda_1 E)) = 3 - 1 = 2 \quad \text{ist geometrische Vielfachheit von } \lambda_1. \end{aligned}$$

Gesucht: Lösungen des Gleichungssystems

$$(A - \lambda_1 E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Im Allgemeinen mit dem Gaußschen Algorithmus (Abschnitt 3.3.4), hier auch direkt klar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rang 1, also $\dim \text{Lös} = 3 - 1 = 2$
Lösung:

$$\begin{aligned} x_3 &= \mu_2 && \text{freier Parameter } \mu_2 \in \mathbb{R} \\ x_2 &= \mu_1 && \text{freier Parameter } \mu_2 \in \mathbb{R} \\ x_1 &= -\mu_1 + \mu_2 \end{aligned}$$

Basis für Lösungsraum: Einsetzen einer Basis für die Parameter $\binom{\mu_1}{\mu_2}$, z.B. Einheitsvektoren.

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(u_1, u_2) ist Basis für Eigenraum $\text{Eig}_{\lambda_1}(A)$.

– Bestimmung einer Basis von $\text{Eig}_{\lambda_2}(A) = \text{Kern}(A - \lambda_2 E) = \text{Lös}(A - \lambda_2 E, \mathbf{0})$.

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Gaußscher Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2z_1 + z_3 \rightsquigarrow z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{3z_1 + z_2 \rightsquigarrow z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{z_3 - z_2 \rightsquigarrow z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Rang $= 2$, also $\dim \text{Lös} = 3 - 2 = 1$.
Lösung:

$$\begin{aligned} x_3 &= \mu && \text{freier Parameter } \mu \in \mathbb{R} \\ x_2 &= 3/2\mu \\ x_1 &= x_2 - x_3 = \mu/2 \end{aligned}$$

Basis für Eigenraum $\text{Eig}_{\lambda_2}(A)$: setze μ beliebig, z.B. $\mu = 2$, erhalten

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- 3. Schritt. Die Basen von Eig_{λ_1} und Eig_{λ_2} ergeben zusammen 3 Vektoren, also Basis von $V = \mathbb{R}^3$. Also ist A diagonalisierbar. Die Matrix S ist gegeben durch

$$S = \begin{pmatrix} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Übung 16. Ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

diagonalisierbar? Ist A in $\mathbb{C}^{2\times 2}$ diagonalisierbar?

Übung 17. Ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

diagonalisierbar? Ist A in $\mathbb{C}^{2\times 2}$ diagonalisierbar?

Übung 18. Stimmen Sie der folgenden Aussage zu: *'die meisten Matrizen in* $\mathbb{R}^{2\times 2}$ *sind diagonalisierbar'*? Falls ja, warum?

Bemerkung 4.3.20. Diagonalisierbarkeit $D = S^{-1}AS$ ist nützlich auch für Berechnung von Potenzen von A:

$$\begin{aligned} A &= SDS^{-1} \\ A^2 &= SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^2S^{-1} \\ &\vdots \\ A^m &= SD^mS^{-1} \end{aligned}$$

Weiterhin:

$$D = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D^m = \begin{pmatrix} (a_1)^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (a_n)^m \end{pmatrix}$$

leicht berechenbar.

4.3.5 Anwendung: Lineares Wachstum

Population: t_m Löwenzahnpflanzen im Jahr m.
Wachstum entsprechend der Gleichung

$$t_{m+1} = w_1 t_m + w_2 t_{m-1} + w_3 \tag{4.15}$$

Konkret: Für $t_0 = 0, t_1 = 1, w_1 = w_2 = 1, w_3 = 0$, d.h.,

$$t_{m+1} = t_m + t_{m-1}$$

erhält man die Fibonacci-Folge

$$01, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

Beschreibung von (4.15) als lineare Abbildung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} t_{m+1} \\ t_m \end{pmatrix}}_{x_m} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_m \\ t_{m-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.16}$$

Setze $x_0 = \binom{t_1}{t_0} = \binom{1}{0}$ und $x_{m+1} = Ax_m + b$, d.h., $x_{m+1} = \phi(x_m)$ für lineare Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : x \mapsto Ax + b$$

Damit lässt sich x_m aus Anfangszustand x_0 berechnen:

$$x_m = \phi(x_{m-1}) = \phi^2(x_{m-2}) = \cdots = \phi^m(x_0) = A^m x_0 + (A^{m-1} + \cdots + A + E)b\,.$$

Beachte: $(A^{m-1} + \cdots + A + E)(A - E) = A^m - E$
Falls $(A - E)$ invertierbar:

$$x_m = A^m x_0 + (A^m - E)(A - E)^{-1} b$$

Falls A diagonalisierbar: $\exists S$ invertierbar mit $S^{-1}AS = D$ Diagonalmatrix, und

$$x_m = SD^m S^{-1} x_0 + (SD^m S^{-1} - E)(A - E)^{-1} b \tag{4.17}$$

Für $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ und $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n| < 1$ konvergiert

$$D^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{pmatrix} \quad \text{gegen} \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

und die Folge $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen

$$-E(A - E)^{-1} b = (E - A)^{-1} b \qquad \text{(“stabile Folge”)}$$

Für Fibonacci-Folge:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Charakteristisches Polynom:

$$X(X-1)-1 = X^2 - X - 1$$

Eigenwerte:

$$\lambda_1 = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1{,}6180339887\dots \qquad \text{mit Eigenvektor } \begin{pmatrix}\lambda_1\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = (1-\sqrt{5})/2 \approx -0{,}618\dots \qquad \text{mit Eigenvektor } \begin{pmatrix}\lambda_2\\1\end{pmatrix}$$

$\lambda_1 > 1$ ("Goldener Schnitt"), unbegrenztes Wachstum: aus (4.17) folgt

$$x_m = \begin{pmatrix}t_{m+1}\\t_m\end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\1 & 1\end{pmatrix}}_{S}\underbrace{\begin{pmatrix}\lambda_1^m & 0\\0 & \lambda_2^m\end{pmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -\lambda_2\\-1 & \lambda_1\end{pmatrix}}_{S^{-1}}\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{x_0}$$

$$= \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\begin{pmatrix}\lambda_1^{m+1} & \lambda_2^{m+1}\\\lambda_1^m & \lambda_2^m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\lambda_2\\-1 & \lambda_1\end{pmatrix}$$

Also

$$\underbrace{t_m}_{\text{ganze Zahl}} = \underbrace{(\lambda_1^m - \lambda_2^m)}_{\text{irrationale Zahlen!}} /(\lambda_1-\lambda_2)$$

4.3.6 Trigonalisierbarkeit

Und wenn A nicht diagonalisierbar?

Definition 4.3.21. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ heißt *trigonalisierbar*, wenn sie zu einer (oberen) Dreiecksmatrix D ähnlich ist, d.h., $\exists S \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$:

$$S^{-1}AS = D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & *\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Für Trigonalisierbarkeit reicht ein Teil des Kriteriums für Diagonalisierbarkeit.

Satz 4.3.22. *Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist genau dann trigonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom χ_A in Linearfaktoren zerfällt, d.h., $\exists \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{K}$ (müssen nicht verschieden sein) so dass*

$$\chi_A(X) = (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_n).$$

Bemerkung 4.3.23. Jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist trigonalisierbar, da jedes Polynom über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen in Linearfaktoren zerfällt (*Fundamentalsatz der Algebra*, kommt später im Studium).

Beweis von Satz 4.3.22. "$\Rightarrow$": Sei

$$S^{-1}AS = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dann (Abschnitt 4.3.2)

$$\chi_A = \chi_D = (X - \lambda_1)\cdots(X - \lambda_n)$$

"$\Leftarrow$": per Induktion über n.
Zeigen Aussage für untere Dreiecksmatrix; ist äquivalent da $\chi_A = \chi_{A^\top}$.
Aussage sicher wahr für $n = 1$.
Sei u_{n+1} Eigenvektor von A zu Eigenwert λ_{n+1}. Existiert, da χ_A in Linearfaktoren zerfällt. Ergänzen u_{n+1} zu einer Basis $B = (u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$ von $\mathbb{K}^{n+1}$.
Sei R die Matrix mit den Spalten $u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$.
Dann ist $M = R^{-1}AR$ von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} \tilde{M} & \mathbf{0} \\ * & \lambda_{n+1} \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\chi_A = \chi_M = (X - \lambda_1)\chi_{\tilde{M}}\,,$$

also zerfällt auch $\chi_{\tilde{M}}$ in Linearfaktoren.
Dann ist $\tilde{M}$ nach Induktionsannahme trigonalisierbar, d.h., es existiert eine invertierbare Matrix $\tilde{S}$ so dass $(\tilde{S})^{-1}\tilde{M}\tilde{S}$ eine untere Dreiecksmatrix. Definiere

$$S := \begin{pmatrix} \tilde{S} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1 \times n+1}$$

Da $\det(S) = \det(\tilde{S}) \neq 0$ ist S invertierbar, und es gilt

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} (\tilde{S})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} S^{-1}R^{-1}ARS &= S^{-1}\begin{pmatrix} \tilde{M} & \mathbf{0} \\ * & \lambda_{n+1} \end{pmatrix} S \\ &= \begin{pmatrix} (\tilde{S})^{-1}\tilde{M}\tilde{S} & \mathbf{0} \\ * & \lambda_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

untere Dreiecksmatrix. Mit $Q := RS$ ist also $Q^{-1}AQ$ untere Dreiecksmatrix, d.h., A ist trigonalisierbar. $\square$

Beispiel 4.3.24. Eine Matrix, die trigonalisierbar, aber nicht diagonalisierbar ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwert $\lambda_1 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 2, geometrische Vielfachheit ist

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Kern}(A - \lambda_1 E)) &= \dim(\mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \\ &= \dim(\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y = 0\}) = 1. \end{aligned}$$

△

4.3.7 Anwendung: Stochastische Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $s \in \mathbb{R}^n$. Wann existiert

$$\lim_{m\mapsto\infty} A^m s\,?$$

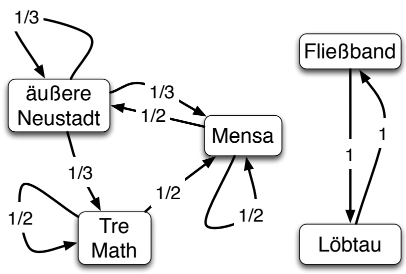
Spezialfall: sei s Eigenvektor von A zum Eigenwert 1, d.h.:

$$As = s \qquad \text{“stationäre Verteilung”} \quad s$$

Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt

- *zeilenstochastisch* falls $0 \le a_{ij} \le 1$ und Zeilensummen Eins betragen.
- *spaltenstochastisch*: analog.
- *doppelt stochastisch*: sowohl als auch.
- *stochastisch*: zeilen- oder spaltenstochastisch.

Beispiel 4.3.25. Betrachten das folgende Beispiel.



Beschreibung durch Matrix (‘Übergangsmatrix’):

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \text{äußere Neustadt} \\ \text{Mensa} \\ \text{Tre Math} \\ \text{Fließband} \\ \text{Löbtau} \end{array} \end{array}$$

△

Satz 4.3.26. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ stochastisch, aperiodisch und irreduzibel, und $s \in \mathbb{R}^n$. Dann existiert $\lim_{m\mapsto\infty} A^m s$, ist unabhängig von s, und gleich dem Eigenvektor zum Eigenwert 1 von A.*

Können den Grenzwert also berechnen, in dem wir ein lineares Gleichungssystem lösen!

Reverse Engineering: was heißt könnte hier 'aperiodisch' heissen? Und was 'irreduzibel'?

Definition 4.3.27. Eine Matrix heißt *irreduzibel* wenn sie nicht geschrieben werden kann in der Form

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ P & N \end{pmatrix}$$

für quadratische Matrizen M und N.

$\rightsquigarrow$ Dämpfungsfaktor bei Google PageRank.

$\rightsquigarrow$ Weiterführende Frage: Wie schnell ist die Konvergenz?

Allgemeinerer Fall: A nicht mehr notwendigerweise stochastisch.

A heißt *positiv* falls für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $a_{ij} > 0$. Positive Vektoren: analog.

Satz 4.3.28 (Perron(-Frobenius), positiver Fall)**.** *Falls $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv und irreduzibel, so so gibt es einen positiven (also insbesonderen reellen) Eigenwert λ der algebraischen Vielfachheit 1 so dass alle anderen Eigenwerte betragsmäßig strikt kleiner sind, und und einen positiven Eigenvektor zu λ.*

Anmerkungen.

- Wenn wir statt der Positivität von A nur fordern, dass A nicht-negativ ist, so kann es andere Eigenvektoren geben, die betragsmässig größtmöglich sind: zum Beispiel hat die Matrix
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
die Eigenwerte 1 und -1.
- Ausserdem muss der maximale Eigenwert nicht die algebraische Vielfachheit 1 haben, kann auch 0 sein, und der entsprechende Eigenwert muss nicht positiv sein: zum Beispiel hat
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
den einzigen Eigenwert 0 der Vielfachheit 2 mit zugehörigem Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Was aber für den nicht-negativen Fall bleibt:

Satz 4.3.29 ((Perron-) Frobenius, nicht-negativer Fall)**.** *Falls $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nicht-negativ und irreduzibel, so gibt es einen positiven (reellen) betragsmäßig größten Eigenwert λ mit nicht-negativen Eigenvektor. Die Anzahl der betragsmäßig größten Eigenwerte ist genau die Periodizität von A.*

Zu diesem Satz sind verschiedene Beweise bekannt, die allerdings über den Stoff der Vorlesung hinausgehen. Einer der Beweise verwendet den Fixpunktsatz von Brouwer.

Kapitel 5

Analytische Geometrie

Bisher: abstrakte $\mathbb{K}$-Vektorräume V; allerdings: $V \simeq \mathbb{K}^n$.
Dieses Kapitel: Spezialisierung $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und oft $n = 2, 3$ ($\rightsquigarrow$ zusätzliche Eigenschaften).

5.1 Das Skalarprodukt

5.1.1 Wiederholung und Bezeichnungen

Verschiedene Interpretationen der Paare $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

- Zeilenvektoren $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$
- Spaltenvektoren $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^{2\times 1}$
- Punkte $P(x_1, x_2)$ der *euklidischen Ebene* mit Koordinaten x_1, x_2 (bezüglich festgelegtem Koordinatensystem)
- *Translation* der Ebene: $(y_1, y_2) \mapsto (y_1 + x_1, y_2 + x_2)$.

Entsprechende Verallgemeinerungen auf $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, ...

Interpretation als komplexe Zahle $x_1 + x_2 i$: Spezialität von $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$.

- Darstellung von Punkten durch 'Ortsvektoren': Pfeil von Punkt $P(0,0)$ zu Punkt $P(x_1, x_2)$.
- Darstellung von Translationen durch 'freie Vektoren': Pfeil $\overrightarrow{PQ}$ von Punkt P nach Q der gleichen Länge und Richtung wie (x_1, x_2).
  Addition: Aneinandersetzen der Pfeile: $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ}$.

5.1.2 Das Skalarprodukt

Nicht zu verwechseln mit "Produkt mit einem Skalar" (skalare Multiplikation).

5.1.3 Länge (Norm) eines Vektors

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$

Länge (oder *Norm*) von $\vec{x}$:

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

$n = 2$: Pythagoras!

Abstand zweier Punkte: Seien $P : \vec{x} = (x_1, x_2)$ und $Q : \vec{y} = (y_1, y_2)$ zwei Punkte in $\mathbb{R}^2$, dann gilt

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \|\vec{y} - \vec{x}\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

5.1.4 Definition Skalarprodukt

Seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Betrachten $\vec{x}, \vec{y}$ als Elemente von $\mathbb{R}^{n\times 1}$.

$$\vec{x} * \vec{y} := (\vec{x})^\top \vec{y} = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

heißt *inneres* oder *Skalarprodukt* (andere Schreibweise: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$).

5.1.5 Eigenschaften des Skalarprodukts

Was für eine Abbildung ist $*$?

$$*: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} * \vec{y}$$

1. $*$ ist *bilinear*, d.h., für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ sind die Abbildungen $f_{\vec{v}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \vec{x} \mapsto \vec{x} * \vec{v}$ und die Abbildung $f_{\vec{v}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \vec{x} \mapsto \vec{w} * \vec{x}$ lineare Abbildungen (siehe Abschnitt 3.4). Sind eh die gleiche Abbildung.

2. $*$ is symmetrisch (d.h., kommutativ):
$$\vec{x} * \vec{y} = \vec{y} * \vec{x}$$

3. $*$ ist *positiv definit*, d.h.,
$$\begin{aligned} &\vec{x} \neq \mathbf{0} \Rightarrow \vec{x} * \vec{x} > 0 \\ &\vec{x} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{0} * \mathbf{0} = 0 \qquad \text{(folgt bereits aus Bilinearität)} \end{aligned}$$

Allgemein ist *ein Skalarprodukt* eines Vektorraumes V eine bilineare, symmetrische, und positiv definite Abbildung von V^2 nach $\mathbb{R}$. Deswegen spricht man im Fall vom oben eingeführten Skalarprodukt $*$ des $\mathbb{R}^n$ auch vom *üblichen* oder *Standard*-Skalarprodukt. Dies ist nur das ächstliegende Skalarprodukt; z.B. ist für jede invertierbare $n \times n$-Matrix A auch $(x, y) \mapsto Ax * Ay$ ein Skalarprodukt.

Definition 5.1.1. Ein *euklidischer Vektorraum* ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V zusammen mit einem Skalarprodukt auf V.

Ist V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $*$, und $x \in V$, so versteht man unter der *Norm* von x die reelle Zahl $||x|| := \sqrt{x * x} \geq 0$.

5.1.6 Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz

Satz 5.1.2. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $*$. Dann gilt*

$$x * y \leq ||x|| \cdot ||y||$$

Äquivalent dazu ist:

$$(x * y)(y * x) \leq (x * x)(y * y)$$

(Rückrichtung durch Wurzelziehen, da $||x||, ||y|| \geq 0$)

Beweis. Falls $y = \mathbf{0}$ ist die Aussage trivial. Sei nun $y \neq \mathbf{0}$. Setzen $\alpha := \frac{x*y}{||y||^2}$. Nun gilt

$$\begin{aligned} 0 \leq (x - \alpha y) * (x - \alpha y) &= x * x - 2\alpha(x * y) + \alpha^2(y * y) \\ &= ||x||^2 - 2\frac{(x * y)^2}{||y||^2} + \frac{(x * y)^2}{||y||^2} \\ &= ||x||^2 - \frac{(x * y)^2}{||y||^2} \end{aligned}$$

Damit ist $(x * y)^2 \leq ||x||^2 ||y||^2$. □

Bemerkung. Das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $x - \alpha y = 0$, d.h, wenn x und y linear abhängig sind.

5.1.7 Die Dreiecksungleichung

Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Dann gilt

$$||\vec{x} + \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$$

Bild!

Beweis.

$$\begin{aligned} ||\vec{x} + \vec{y}||^2 &= (\vec{x} + \vec{y}) * (\vec{x} + \vec{y}) \\ &= \vec{x} * \vec{x} + 2\vec{x} * \vec{y} + \vec{y} * \vec{y} && \text{Bilinearität} \\ &\leq ||\vec{x}||^2 + 2||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| + ||\vec{y}||^2 && \text{Cauchy-Schwarz (Satz 5.1.2)} \\ &= (||\vec{x}|| + ||\vec{y}||)^2 \end{aligned}$$

Da Norm nicht-negativ kann man Wurzel ziehen und erhält das gewünschte. □

5.1.8 Geometrische Interpretation des Skalarproduktes im $\mathbb{R}^2$

Es gilt für $n = 2$:

$$\vec{x} * \vec{y} = ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}|| \cdot \cos\phi \tag{5.1}$$

wobei $\phi = \measuredangle(\vec{x}, \vec{y})$ Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ (im Bogenmaß).
Bild für Winkel im Bogenmaß
Produkt wird negativ, falls $\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{3\pi}{2}$. (stumpfe Winkel)
Produkt wird Null, falls $\phi = \frac{\pi}{2}$ oder $\phi = \frac{3\pi}{2}$.
Produkt wird positiv, falls $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$. (spitze Winkel)

Projektion von Vektor $\vec{x}$ auf Gerade g mit Richtung $\vec{y}$ hat Länge

$$||\vec{x}|| \cdot \cos\phi = \frac{\vec{x} * \vec{y}}{||\vec{y}||}$$

Bild! Projektion von Vektor $\vec{x}$ auf g ist also:

$$\frac{\vec{x} * \vec{y}}{||\vec{y}||}\vec{y}$$

(genaueres zu Projektionen: siehe Abschnitt 5.2.4)

Randnotiz. Die Gleichung (5.1) kann für $n > 2$ als *Definition* für den Winkel ϕ zwischen $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ benutzt werden.

Folgerungen:

- $\vec{x} = \vec{y} \iff \measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{x} * \vec{x} = ||\vec{x}||^2$
- $\vec{x} \perp \vec{y} \iff: \measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) = \{\pi/2, -\pi/2\} \iff \vec{x} * \vec{y} = 0$ (Orthogonalität)
  Bild mit Zeichen für rechten Winkel

5.2 Geradendarstellungen

Geraden im $\mathbb{R}^n$ können auf verschiedene Arten dargestellt werden.

5.2.1 Parameterdarstellung

Die *Parameterdarstellung* einer Geraden g im $\mathbb{R}^n$ (durch Punkt $\vec{u}$ und Richtungsvektor $\vec{v}$):

$$g = \vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} = \{\vec{u} + \lambda\vec{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Bild!
In Koordinatendarstellung:

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + \lambda v_1 \\ &\vdots \\ x_n &= u_n + \lambda v_n \end{aligned}$$

Alternativ: Statt mit Richtungsvektor $\vec{v}$ kann die Gerade g auch mit einem weiteren Punkt $\vec{w}$ auf g dargestellt werden ($\vec{v} = \vec{w} - \vec{u}$).

5.2.2 Hessesche Normalform

Sei g Gerade in $\mathbb{R}^2$. Sei $\vec{u} \in g$, und $\vec{n}$ *Normalenvektor* von g: $\vec{n} \perp g$ (soll heissen $\vec{n} \perp \vec{v}$ für Richtungsvektor $\vec{v}$ von g). Wir fordern zusätzlich $||\vec{n}|| = 1$ ($\vec{n}$ ist *Normaleneinheitsvektor*).

Dann gilt

$$\begin{aligned} \vec{x} \in g &\Leftrightarrow (\vec{x} - \vec{u}) \perp \vec{n} && (\Leftarrow \text{ nur für } n = 2!) \\ &\Leftrightarrow \vec{n} * (\vec{x} - \vec{u}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{n} * \vec{x} = \vec{n} * \vec{u} \end{aligned}$$

Die *Hessesche Normalform* einer Geraden $g \in \mathbb{R}^2$:

$$\vec{n} * \vec{x} = d$$

für $d := \vec{n} * \vec{u}$ (hängt nicht von der Wahl von $\vec{u} \in g$ ab!).

Für $\vec{n} = \binom{n_1}{n_2}$ ergibt sich:

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 = d$$

mit $n_1^2 + n_2^2 = 1$ (wegen $||\vec{n}||= 1$; 'Normierung').
Dabei ist d der *vorzeichenbehaftete Abstand* der Geraden g zum Nullpunkt:

$$d = \vec{n} * \vec{u} = ||\vec{n}|| \cdot ||\vec{u}|| \cdot \cos\phi = ||\vec{u}|| \cdot \cos\phi$$

Positiv falls $-90^\circ < \phi < 90^\circ$, negativ falls $90^\circ < \phi < 270^\circ$.
3 Bilder malen: $\vec{n}$ und $\vec{u}$ zeigen beide nach oben rechts, einer nach oben rechts und einer nach unten links, beide nach unten links.

Rechtfertigung des Begriffes *Abstand*:

- für alle $\vec{x} \in g$ gilt
  $$d \leq ||\vec{x}||$$
  denn $d = \vec{n} * \vec{x} \leq ||\vec{n}|| \cdot ||\vec{x}||= ||\vec{x}||$ nach Cauchy-Schwarz (Satz 5.1.2).
- Es gibt ein $\vec{x}_0 \in g$ mit $|d| = ||\vec{x}_0||$: siehe Abschnitt 5.2.5.

5.2.3 Koordinatendarstellung

Gerade g im $\mathbb{R}^2$: für $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$

$$g = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 = a_0\} = \text{Lös}((a_1, a_2), a_0)$$

Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems der Form $a_1x_1 + a_2x_2 = a_0$.

Zugehörige Hessesche Normalform:

$$\underbrace{\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}}_{=:n_1} x_1 + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}}_{=:n_2} x_2 = \underbrace{\frac{a_0}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}}_{=:d}$$

es gilt $n_1^2 + n_2^2 = 1$.

Parameterdarstellung im Fall $a_2 \neq 0$ ist z.B.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a_0}{a_2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{a_1}{a_2} \end{pmatrix}$$

Setze $x_1 = \lambda$, dann $x_2 = (a_0 - a_1\lambda)/a_2$. Analog für $a_1 \neq 0$.

5.2.4 (Orthogonale) Projektionen

Sei g eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Richtungsvektor $\vec{v}$. Die *(orthogonale) Projektion* eines Punktes $\vec{q} \in \mathbb{R}^2$ auf g ist $\vec{p} \in g$ mit $(\vec{q} - \vec{p}) \perp \vec{v}$, das heißt $(\vec{q} - \vec{p}) * \vec{v} = 0$.
Existiert stets, und ist eindeutig. Bild!

Berechnung aus Hessescher Normalform.
Gegeben: $g = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{n} * \vec{x} = d\}$ und $\vec{q} \in \mathbb{R}^2$.
Gesucht: Projektion $\vec{p}$ von $\vec{q}$ auf Gerade g.
Antwort: $\vec{p} = \vec{q} + \lambda_0 \cdot \vec{n}$ für $\lambda_0 = d - \vec{n} * \vec{q}$.
Beweis:

$$\begin{aligned} (\vec{q} - \vec{p}) * \vec{v} &= (\vec{q} - \vec{q} - \lambda_0\vec{n}) * \vec{v} = 0 \\ \vec{n} * \vec{p} &= \vec{n} * (\vec{q} + \lambda_0\vec{n}) \\ &= \vec{n} * \vec{q} + \lambda_0\|\vec{n}\|^2 = \vec{n} * \vec{q} + d - \vec{n} * \vec{q} = d \end{aligned}$$

(Existenz gezeigt.)

Berechnung aus Parameterform.
Gegeben: $g = \vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$ und $\vec{q} \in \mathbb{R}^n$.
Gesucht: Projektion $\vec{p}$ von $\vec{q}$ auf Gerade g.
Antwort:

$$\vec{p} = \vec{u} + \lambda_1\vec{v} \text{ mit } \lambda_1 = \frac{(\vec{q} - \vec{u}) * \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \tag{5.2}$$

Beweis: $(\vec{q}-\vec{p}) \perp \vec{v}$ und $\vec{p} \in g$. Das heißt, $(\vec{q}-\vec{p}) * \vec{v} = 0$ und $\exists \lambda_1 : \vec{p} = \vec{u} + \lambda_0 \vec{v}$. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} &(\vec{q}-\vec{u}-\lambda_1\vec{v}) * \vec{v} = 0 \\ \Rightarrow\ &(\vec{q}-\vec{u}) * \vec{v} - \lambda_1(\vec{v} * \vec{v}) = 0 \\ \Rightarrow\ &\lambda_1 = \frac{(\vec{q}-\vec{u}) * \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\,. \end{aligned}$$

(Eindeutigkeit gezeigt.)

5.2.5 Zusammenhang Projektionen mit Hessescher Normalform

Es sei g eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ und $\vec{p}_0$ die Projektion von $\mathbf{0}$ auf g. Dann ist $\vec{p}_0 \perp \vec{v}$, also ist $\vec{n} := \frac{\vec{p}_0}{\|\vec{p}\|}$ Normaleneinheitsvektor von g. Das bedeutet, dass

$$\vec{n} * \vec{x} = d$$

mit $d := \vec{n} * \vec{p}_0$ die Hessesche Normalform von g ist.

Es gilt $|d| = |\vec{n} * \vec{p}_0| = |\frac{\vec{p}_0}{\|\vec{p}\|} * \vec{p}_0| = \|p_0\|$ und damit ist p_0 wirklich der Punkt auf g, der nächstmöglich an $\mathbf{0}$ liegt – daher also die Bezeichnung von $|d|$ als der *Abstand* von g zum Ursprung (siehe Abschnitt 5.2.2).

Wenn g in Parameterdarstellung gegeben ist durch $g = \vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$, so können wir mit (5.2) die Hessesche Normalform von g bestimmen, indem wir $\vec{p}_0$ ausrechnen wie folgt:

$$\vec{p}_0 = \vec{u} + \frac{-\vec{u} * \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$$

5.2.6 Abstand Punkt-Gerade

Es sei $g \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Gerade, gegeben über die Hessesche Normalform $\vec{n} * \vec{x} = d$. Der (vorzeichenbehaftete) *Abstand* $d_{\vec{q}} \in \mathbb{R}$ zwischen $\vec{q} \in \mathbb{R}^2$ und der Geraden g ist

$$d_{\vec{q}} := d - \vec{n} * \vec{q}$$

und es gilt

- $\|\vec{q}-\vec{p}\| = |d_{\vec{q}}|$ für $\vec{p} := \vec{q} - d_{\vec{q}} \cdot \vec{n}$ (der Projektion von $\vec{q}$ auf g)

  $$\|\vec{q}-\vec{p}\| = \|\vec{q}-\vec{q}+d_{\vec{q}} \cdot \vec{n}\| = |d_{\vec{q}}|$$

- für alle $\vec{x} \in g$ gilt $d_{\vec{q}} \leq \|\vec{q}-\vec{x}\|$, denn wegen Cauchy-Schwarz gilt

  $$d_{\vec{q}} = d - \vec{n} * \vec{q} = \vec{n} * \vec{x} - \vec{n} * \vec{q} = \vec{n} * (\vec{x}-\vec{q}) \leq \|\vec{n}\| \cdot \|\vec{x}-\vec{q}\| = \|\vec{x}-\vec{q}\|\,.$$

- $d_{\vec{p}} = 0$ falls $\vec{q} \in g$.
  $d_{\vec{p}} > 0$ falls $\vec{n}$ und $(\vec{q}-\vec{u})$ spitzen Winkel bilden, für ein (äquivalent: für alle) $\vec{u} \in g$
  $d_{\vec{p}} < 0$ falls $\vec{n}$ und $(\vec{q}-\vec{u})$ stumpfen Winkel bilden. Bild!

5.3 Ebenendarstellungen

5.3.1 Parameterdarstellung

Darstellung durch Punkt $\vec{u}$ und zwei linear unabhängige Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{w}$:

$$\begin{aligned} E &:= \vec{u} + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle && \text{(Abschnitt 2.4.1)} \\ &= \vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} + \mathbb{R}\vec{w} \end{aligned}$$

Bild!

$\vec{x} \in E$ falls es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gibt mit $\vec{u} + \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$.

Koordinatenweise:

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + \lambda v_1 + \mu w_1 \\ &\vdots \\ x_n &= u_n + \lambda v_n + \mu w_n \end{aligned}$$

5.3.2 Hessesche Normalform einer Ebene im $\mathbb{R}^3$

Analog zu Abschnitt 5.2.2 (Geraden im $\mathbb{R}^2$).

$$E = \vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} + \mathbb{R}\vec{w}$$

Sei $\vec{n}$ *normierter Normalenvektor von* E, d.h., $\|\vec{n}\| = 1$, $\vec{n} \perp \vec{v}$, $\vec{n} \perp \vec{w}$.

$$\begin{aligned} \vec{x} \in E &\iff (\vec{x} - \vec{u}) \perp \vec{n} \\ &\iff \vec{n} * (\vec{x} - \vec{u}) = 0 && (\textit{Hessesche Normalform}\text{ von } E) \end{aligned}$$

Anders geschrieben:

$$E = \{\vec{x} \mid \vec{n} * \vec{x} = d\}$$

mit $d := \vec{n} * \vec{u}$ (der vorzeichenbehaftete Abstand zwischen Nullpunkt und E).

Allgemein (analog zu Abschnitt 5.2.6): Für Punkt Q, mit $\vec{q} = \overrightarrow{\mathbf{0}Q}$, ist

$$\vec{n} * (\vec{q} - \vec{u})$$

der vorzeichenbehaftete Abstand von Q zur Ebene E.
Also: wenn dieser Ausdruck Null wird, liegt $\vec{q}$ auf der Ebene.

5.3.3 Koordinatendarstellung

Koordinatendarstellung einer Ebene E im $\mathbb{R}^3$:

$$E = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = d\} = \text{Lös}((a_1, a_2, a_3), d)$$

Von Koordinatendarstellung in Hessesche Normalform: definiere

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n} := \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}.$$

Es gilt

$$E = \{\vec{x} \mid \vec{n} * \vec{x} = d\}.$$

5.3.4 Orthogonalprojektion von Punkt auf Ebene

Gegeben: Punkt $\vec{q} \in \mathbb{R}^3$, Ebene

$$E = \vec{u} + \mathbb{R}\vec{v} + \mathbb{R}\vec{w}.$$

Gesucht: Orthogonalprojektion $\vec{p}$ von $\vec{q}$ auf E, d.h.,

1. $\vec{p} \in E$, d.h., es gibt λ_0 und μ_0 mit $\vec{p} = \vec{u} + \lambda_0\vec{v} + \mu_0\vec{w}$
2. $\vec{v} * (\vec{q} - \vec{p}) = 0$ und $\vec{w} * (\vec{q} - \vec{p}) = 0$.

Einsetzen von 1. in 2. ergibt Gleichungssystem für λ_0 und μ_0:

$$\begin{aligned} \lambda_0(\vec{v} * \vec{v}) + \mu_0(\vec{v} * \vec{w}) &= \vec{v} * (\vec{q} - \vec{u}) \\ \lambda_0(\vec{w} * \vec{v}) + \mu_0(\vec{w} * \vec{w}) &= \vec{w} * (\vec{q} - \vec{u}) \end{aligned}$$

Lösung mit Cramerscher Regel (Abschnitt 4.1.8):

$$\lambda_0 = \frac{\begin{pmatrix} \vec{v} * (\vec{q} - \vec{u}) & \vec{v} * \vec{w} \\ \vec{w} * (\vec{q} - \vec{u}) & \vec{w} * \vec{w} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \vec{v} * \vec{v} & \vec{v} * \vec{w} \\ \vec{w} * \vec{v} & \vec{w} * \vec{w} \end{pmatrix}}$$

$$\mu_0 = \frac{\begin{pmatrix} \vec{v} * \vec{v} & \vec{v} * (\vec{q} - \vec{u}) \\ \vec{w} * \vec{v} & \vec{w} * (\vec{q} - \vec{u}) \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \vec{v} * \vec{v} & \vec{v} * \vec{w} \\ \vec{w} * \vec{v} & \vec{w} * \vec{w} \end{pmatrix}}$$

Dann ist der gesuchte Vektor $\vec{p}$:

$$\vec{p} = \vec{u} + \lambda_0 \vec{v} + \mu_0 \vec{w}$$

Ist E in Hessescher Normalform gegeben,

$$E = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{n} * (\vec{x} - \vec{u}) = 0\}$$

so lässt sich die Projektion $\vec{p}$ von $\vec{q}$ auf E wie folgt berechnen:
Bild! $\vec{q} - \vec{p}$ hat gleiche Richtung wie $\vec{n}$.

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{q} + (\vec{p} - \vec{q}) \\ &= \vec{q} + \underbrace{(d - \vec{n} * \vec{q})}_{\text{vorzeichenbehaftete Länge von } \vec{p}-\vec{q}} \cdot \vec{n}\end{aligned}$$

5.4 Das äußere Produkt (Vektorprodukt)

Anwendungen in Mathematik, Physik und Informatik, z.B.:

- Berechnung des Drehmoments, oder der Lorenzkraft
  (bewegte Ladung im magnetischen Feld)
- Abstandsformel windschiefer Geraden
- Algorithmische Geometrie

Ausgangsidee: Wollen von zwei Richtungsvektoren, die eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ definieren, möglichst bequem an einen Normelenvektor der Ebene kommen.

Das *äußere Produkt* (auch *Vektorprodukt*)

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (\vec{a}, \vec{b}) \mapsto \vec{a} \times \vec{b}$$

wird durch folgende Eigenschaften (eindeutig!) definiert:

1. Bild! Finger rechte Hand!

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= \vec{e}_1 \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= \vec{e}_2\end{aligned}$$

2. $\times$ ist bilinear (siehe Abschnitt 5.1.5)

3. $\times$ ist *schiefsymmetrisch*, d.h.,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Bemerkung: $\vec{e}_i \times \vec{e}_i = \mathbf{0}$ folgt aus Schiefsymmetrie für $\vec{a} = \vec{b}$.

Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$,

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$

dann gilt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -a_1b_3 + a_3b_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Nachrechnen: Ausdruck in (5.3) ist bilinear, schiefsymmetrisch, und erfüllt die erste Bedindung der Definition des Vektorproduktes $\Rightarrow$ Existenz des Vektorprodukts!

Beweis von (5.3). Aus der Bilinearität von $\times$ erhählt man

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times \vec{b} \\
&= a_1(\vec{e}_1 \times \vec{b}) + a_2(\vec{e}_2 \times \vec{b}) + a_3(\vec{e}_3 \times \vec{b}) && \text{(Bilinearität)} \\
&= \quad a_1(b_1(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) + b_2(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + b_3(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)) \\
&\quad + a_2(b_1(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) + b_2(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) + b_3(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)) \\
&\quad + a_3(b_1(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) + b_2(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) + b_3(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3)) && \text{(Bilinearität)} \\
&= a_1(b_2\vec{e}_3 - b_3\vec{e}_2) + a_2(-b_1\vec{e}_3 + b_3\vec{e}_1) + a_3(b_1\vec{e}_2 - b_2\vec{e}_1) && \text{(2. und 3.)} \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{e}_2 + (-a_1b_2 + a_2b_1)\vec{e}_3 && \text{(Zusammenfassen)}
\end{aligned}$$

Konsequenz: $\vec{a} \times \vec{a} = \mathbf{0}$.

5.4.1 Beziehungen zwischen Vektorprodukt und Skalarprodukt

Vektorprodukt weder kommutativ noch assoziativ.

1. Der *Grassmannsche Entwicklungssatz*:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} * \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} * \vec{c}) \cdot \vec{a}$$

2. Das *Spatprodukt* $(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c}$ erfüllt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Aus unserem Wissen über Determinanten lassen sich nun viele Eigenschaften für das Spatprodukt herleiten, z.B. $(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) * \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) * \vec{b}$

3. Die *Lagrangesche Identität*:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) * (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} * \vec{c}) \cdot (\vec{b} * \vec{d}) - (\vec{a} * \vec{d}) \cdot (\vec{b} * \vec{c})$$

Beweis: ausrechnen mit Hilfe von (5.3).

Beweis. Für Grassmann:

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -a_1b_3 + a_3b_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \times \vec{c} \\
&= \begin{pmatrix} (-a_1b_3 + a_3b_1)c_3 - (a_1b_2 - a_2b_1)c_2 \\ -(a_2b_3 - a_3b_2)c_3 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_1 \\ (a_2b_3 - a_3b_2)c_2 - (-a_1b_3 + a_3b_1)c_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -a_1b_3c_3 + a_3b_1c_3 - a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2 \\ -a_2b_3c_3 + a_3b_2c_3 + a_1b_2c_1 - a_2b_1c_1 \\ (a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2 + a_1b_3c_1 - a_3b_1c_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 + a_2b_2c_1 + a_3b_3c_1 \\ a_1b_1c_2 + a_2b_2c_2 + a_3b_3c_2 \\ a_1b_1c_3 + a_2b_2c_3 + a_3b_3c_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2 + a_1b_3c_3 \\ a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2 + a_2b_3c_3 \\ a_3b_1c_1 + a_3b_2c_2 + a_3b_3c_3 \end{pmatrix} \\
&= (\vec{a} * \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b} * \vec{c}) \cdot \vec{a}
\end{aligned}$$

Für das Spatprodukt:

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} &= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -a_1b_3 + a_3b_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} * \vec{c} \\
&= a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 + a_3b_1c_2 + a_1b_2c_3 - a_2b_1c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Für Lagrange:

$$\begin{aligned}
(\vec{a} \times \vec{b}) * (\vec{c} \times \vec{d}) &= ((\vec{c} \times \vec{d}) \times a) * \vec{b} && \text{(Gleichheit fürs Spatprodukt)} \\
&= ((\vec{c} * \vec{a})\vec{d} - (\vec{d} * \vec{a})\vec{c}) * \vec{b} && \text{(Grassmann)} \\
&= (\vec{a} * \vec{c}) \cdot (\vec{b} * \vec{d}) - (\vec{a} * \vec{d}) \cdot (\vec{b} * \vec{c}) && \text{(Rechnen mit Skalarprodukt)} \quad \square
\end{aligned}$$

5.4.2 Geometrische Interpretation des Vektorproduktes

Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt

- $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ und $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$
- $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot |\sin\phi|$ ist der Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Beweis. Rechnen zunächst nach, dass $(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{a} = 0$.
Setze $\vec{c} := \vec{a}$ im Spatprodukt aus Punkt 3 in Abschnitt 5.4.1: erhalten

$$(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{a} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelograms mit Höhe h ist $\|\vec{a}\| h$, wobei $h = \|\vec{b}\| |\sin\phi|$ mit $\phi := \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$. Nach der Lagrangeschen Identität gilt

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) * (\vec{a} \times \vec{b}) &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} * \vec{b})^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 (\cos\phi)^2 \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \, (1 - \cos^2\phi) \\ &= \|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 \, \sin^2\phi \end{aligned}$$

□

Das Spatprodukt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ist das *vorzeichenbehaftete Volumen* des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten *Spats* (Form der Kristalle im Kalkspat; auch *Parallelepiped*).

- Vorzeichen positiv, falls $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ “Rechtssystem”
(sonst “Linkssystem”, linke Hand Regel).
- $(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cdot \cos\phi$; hier ist $\|\vec{c}\| \cdot |\cos\phi|$ die *Höhe* des Spats und $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ der Flächeninhalt der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten *Grundfläche* des Spats.

5.4.3 Anwendung: Abstand zweier Geraden

Seien g_1, g_2 Geraden in $\mathbb{R}^3$, gegeben als

$$\begin{aligned} g_1 &= \vec{p}_1 + \mathbb{R}\vec{v}_1 \\ g_2 &= \vec{p}_2 + \mathbb{R}\vec{v}_2 \end{aligned}$$

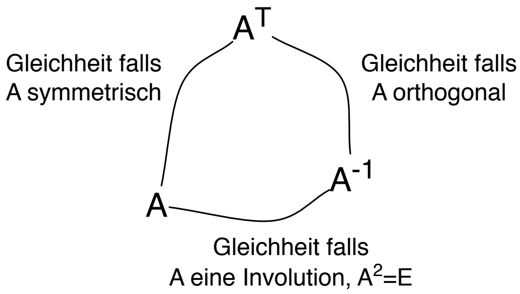
Das Vektorprodukt $\vec{v}_3 := \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ ist genau dann $\mathbf{0}$, wenn $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ Vielfache voneinander sind, d.h., wenn g_1 und g_2 parallel sind. Ansonsten steht $\vec{v}_3$ senkrecht auf $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$.

Bild mit zwei windschiefen Gerade auf zwei Stockwerken.

Sei E_1 die Ebene durch $\vec{p}_1$ mit Normalenvektor $\vec{v}_3$. Alle Punkte von g_2 haben den gleichen Abstand zu E_1. Es genügt also, den Abstand von $\vec{p}_1$ zu E_1 zu berechnen – und das geht wie in Abschnitt 5.3.4.

5.5 Orthogonale lineare Abbildungen

- Eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *orthogonal* falls für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\vec{x} * \vec{y} = f(\vec{x}) * f(\vec{y})$. Die Abbildung f *erhält* das Skalarprodukt.
- Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *orthogonal* wenn $A^\top = A^{-1}$ (insbesondere ist A invertierbar).



Proposition 5.5.1. *Eine lineare Abbildung f ist genau dann orthogonal, wenn $A = M_B^B(f)$ orthogonale Matrix ist, wobei $B = (e_1, \dots, e_n)$ die Stadardbasis ist von $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Wenn f orthogonal ist, dann gilt für alle $\vec{x}, \vec{y}$

$$\vec{x}^\top \vec{y} = \vec{x} * \vec{y} = f(\vec{x}) * f(\vec{y}) = (A\vec{x})^\top (A\vec{y}) = \vec{x}^\top (A^\top A)\vec{y}$$

also $A^\top A = E_n$. Umgekehrt impliziert $A^\top A = E_n$, dass

$$\vec{x} * \vec{y} = \vec{x}^\top \vec{y} = \vec{x}^\top (A^\top A)\vec{y} = (A\vec{x})^\top (A\vec{y}) = f(\vec{x}) * f(\vec{y})$$

für alle $\vec{x}, \vec{y}$. □

Eigenschaften von orthogonalen Abbildungen:

Proposition 5.5.2. *Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ orthogonal. Dann gilt für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$:*

1. $\|\vec{x}\| = \|f(\vec{x})\|$.
2. $\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow f(\vec{x}) \perp f(\vec{y})$.
3. $|\det f| = 1$.

Beweis. 1 und 2 folgen direkt aus der Definition von Orthogonalität (f erhält das Skalarprodukt, also auch Rechtwinkligkeit und Norm). Zu 3:

$$\begin{aligned} \det f &= \det A = \det A^\top && \text{(Proposition 4.1.10)} \\ &= \det A^{-1} && \text{(Proposition 5.5.1)} \\ &= (\det A)^{-1} = (\det f)^{-1} && \text{(Satz 4.1.11)} \end{aligned}$$

Also muss gelten $|\det A| = 1$. □

5.5.1 Die Gruppen $O(n)$, $SO(n)$

- Das Produkt orthogonaler Matrizen ist orthogonal.
- Die inverse Matrix einer orthogonalen Matrix ist wieder orthogonal.

Also bildet $O(n) := \{M \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid M \text{ orthogonal}\}$ bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe (eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, Abschnitt 3.2.1).

$$SO(n) := \{M \in O(n) \mid \det M = 1\}$$

ist eine Untergruppe von $O(n)$, die *spezielle orthogonale Gruppe*.
Verwenden $\det(MM') = \det M \cdot \det M'$

5.5.2 Die orthogonale Gruppe $O(2)$

$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ durch Bilder $f(e_1), f(e_2)$ (Spalten von A) eindeutig festgelegt.

$$f \text{orthogonal} \Leftrightarrow \|f(e_1)\| = 1 = \|f(e_2)\| \text{ und } f(e_1) \perp f(e_2)$$

Bild Einheitskreis!

Wählt man $f(e_1)$ beliebig mit $\|f(e_1)\| = 1$, so gibt es nur 2 Möglichkeiten für $f(e_2)$:

- Drehung um Winkel $\alpha = \measuredangle(\vec{e}_1, f(\vec{e}_1)) = \measuredangle(\vec{e}_2, f(\vec{e}_2))$. Bild.

  $$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} =: D(\alpha)$$

  Bild mit Winkel, Cosinus, und Sinus.

- Spiegelung an Gerade g. Bild.

  $$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} =: S(\alpha)$$

  Bild mit g und den Winkeln.
  Spalten sind Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren, Länge 1.

Also:

$$O(2) = \{D(\alpha) \mid 0 \le \alpha \le 2\pi\} \cup \{D(\alpha) \mid 0 \le \alpha \le 2\pi\}$$

Menge aller Drehungen und Spiegelungen. Wegen $\det D(\alpha) = 1$ und $\det S(\alpha)) = -1$ folgt

$$S(2) = \{D(\alpha) \mid 0 \le \alpha \le 2\pi\}$$

Menge aller Drehungen.

Berechnung des Drehwinkels α. Sei $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SO(2)$. Dann ist

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$\cos\alpha = a_{11} = a$$

Berechnung der Spiegelungsachse g. Für $b = 0$ ist $\alpha \in \{0, \pi\}$ da $\sin\alpha = b$ und es gibt keine Spiegelachse. Also im folgenden $b \neq 0$.

Ansatz ohne Winkel

$$\vec{x} \in g \Leftrightarrow M\vec{x} = \vec{x}$$

Sprich: $\vec{x}$ ist Eigenvektor von M zum Eigenwert 1.
Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= x_1 \\ bx_1 - ax_2 &= x_2 \end{aligned}$$

gesucht ist nichttriviale Lösung. Probieren zunächst $x_1 = 1$: Am Bild erklären.
Wir erhalten $a + bx_2 = 1$ und damit $x_2 = (1-a)/b$ (wie bereits erwähnt ist $b \neq 0$). Also:

$$g = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ (1-a)/b \end{pmatrix}$$

Falls g keinen Punkt der Form $\binom{1}{x_2}$ enthält, so gilt $g = \mathbb{R} \cdot \vec{e}_2$.

5.5.3 Die orthogonale Gruppe $O(3)$

$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : \vec{x} \mapsto A\vec{x}$ durch Bilder $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ (Spalten von A) eindeutig festgelegt. Zwei Möglichkeiten: sind im Rechtssystem ($\det A = 1$) oder im Linkssystem ($\det A = -1$). (Zwei Bilder!)

Bemerkung: Jede Drehung $A \in SO(3)$ lässt sich als Hintereinanderausführungen von Drehungen um die Koordinatenachsen eindeutig beschreiben.

$$A = D_1(\alpha) \circ D_2(\beta) \circ D_3(\gamma)$$

(α, β, γ: *Eulersche Winkel.*)

Anwendung: Satelliten-justierung

Kapitel 6

Dualität und unitäre Räume

Linearformen: spezielle lineare Abbildungen
Duale Räume: Beispiel für wichtiges Prinzip in der Mathematik, das Dualitätsprinzip
Bilinearformen: Vorstufe für Skalarprodukte

6.1 Der duale Raum

6.1.1 Definitionen

Wiederholung: Seien V, W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Dann ist

$$\mathrm{Hom}(V, W) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \cong \mathbb{K}^{m \times n}$$

selbst ein $\mathbb{K}$-Vektorraum (siehe Abschnitt 3.4.5). Spezialfall $n = 1$:

Definition 6.1.1. Eine lineare Abbildung $f: V \to \mathbb{K}$ heißt auch *Linearform von* V, und

$$V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$$

heißt *Dualraum* von V.

Vektorraumoperationen in V^*:

- Addition: für $f, g \in V^*$

$$(f+)(v) := f(v) + g(v) \quad \text{für } v \in V$$

- Multiplikation mit Skalar: für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $f \in V^*$

$$(\alpha f)(v) := \alpha f(v) \quad \text{für } v \in V$$

Nullvektor von V^* ist Nullabbildung:

$$\mathbf{0}: V \to \mathbb{K} : v \mapsto 0$$

Ab jetzt: V ist endlichdimensional. (Ist für viele Aussagen in diesem Abschnitt notwendig; für sinnvolle Verallgemeinerungen auf unendlichdimensionale Vektorräume spielen topologische Aspekte eine Rolle; $\rightsquigarrow$ Funktionalanalysis.)

Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$ Basis von V.
Schreiben $B_1 := (e_1) = (1)$; ist Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraums $\mathbb{K}^1$.
Darstellungsmatrix von $f \in V^*$:

$$M_{B_1}^B(f) = (f(v_1), \dots, f(v_n)) =: w$$

Ist $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$, so ist

$$f(v) = \sum_{i=1}^n a_i f(v_i) = (f(v_1), \dots, f(v_n)) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = w \Phi_B^{-1}(v)$$

Speziell $V = \mathbb{K}^n$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ (d.h., $v = \phi_B(v) = \phi_B^{-1}(v)$):

$$f(v) = wv$$

$\rightsquigarrow$ Linearformen liefern weitere Interpretationsmöglichkeit für Vektoren aus $\mathbb{K}^n$:

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

ist Linearform mit *Darstellung* $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ mit $f\colon x \mapsto ax$.

Sei $f \in V^* \setminus \{\mathbf{0}\}$. Dann gilt

$$\dim(f) = n - 1$$

wegen der Dimensionsformel (3.3.5), da $\dim \operatorname{Bild}(f) = \dim K = 1$.

6.1.2 Duale Basis

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Satz 6.1.2. *Es gilt* $\dim V = \dim V^*$ *und* $V \cong V^*$. *Ist* $B = (v_1, \dots, v_n)$ *Basis von* V, *so ist* $B^* := (v_1^*, \dots, v_n^*)$ *Basis von* V^*, *wobei* $v_i^*\colon V \to \mathbb{K}$ *definiert ist mit Hilfe des* Kroneckersymbols δ_{ij}, *wie folgt*

$$v_i^*(v_j) := \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \in \mathbb{K} & \textit{falls } i = j \\ 0 \in \mathbb{K} & \textit{sonst} \end{cases} \tag{6.1}$$

B^* heißt *duale Basis* (zu B).

Bemerkung 6.1.3. v_i^* ist durch (6.1) eindeutig festgelegt. Darstellungsmatrix:

$$M^B_{B_1}(v_i^*) = e_i \in \mathbb{K}^{1\times n}.$$

Bemerkung 6.1.4. Ein konkreter Isomorphismus zwischen V und V^* ist gegeben durch

$$\iota_B\colon V \to V^* : \sum_i^n \alpha_i v_i \mapsto \sum_i^n \alpha_i v_i^*$$

Beweis von Satz 6.1.2. Sei $n := \dim V$.

$$V \cong \mathbb{K}^n \overset{\text{Satz 2.4.3}}{=} \mathbb{K}^{1\times n} \overset{\text{Abschnitt 3.4.5}}{\cong} \operatorname{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \overset{\text{Satz 2.4.3}}{\cong} \operatorname{Hom}(V, \mathbb{K})$$

Alternativ: genügt zu zeigen, dass $v_1^*, \dots, v_n^*$ linear unabhängig und dass $\langle v_1^*, \dots, v_n^*\rangle = V^*$.

- Sei $\lambda_1 v_1^* + \dots + \lambda_n v_n^* = \mathbf{0} = (v \mapsto 0)$. Dann gilt für alle $i \in \{1, \dots, n\}$:

  $$0 = \lambda_1 v_1^*(v_i) + \dots + \lambda_n v_n^*(v_i) = \lambda_i$$

  Also ist $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
- Sei $f \in V^*$ beliebige Linearform mit Darstellung $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Dann ist $f = a_1 v_1^* + \dots + a_n v_n^* \in \langle v_1^*, \dots, v_n^*\rangle$, denn für alle i ist

  $$a_1 v_1^*(v_i) + \dots + a_n v_n^*(v_i) = a_i v_i = f(v_i)$$

  (zwei lineare Funktionen sind gleich, wenn sie die gleichen Funktionswerte auf B haben.)

$V \cong V^*$ folgt mit Fundamentalsatz der endlichdimensionalen Vektorräume (Satz 3.4.8).

□

6.1.3 Die natürliche Isomorphie $V \cong V^{**}$

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Es gilt $V \cong V^* \cong V^{**}$ aber V und V^{**} sind auf besondere Weise ("natürlich") isomorph. Für $v \in V$ sei

$$v^{**}\colon V^* \to \mathbb{K}$$

definiert durch $v^{**}(f) := f(v)$.

Satz 6.1.5. *Es gilt $v^{**} \in V^{**}$, und*

$$\phi\colon V \to V^{**} : v \mapsto v^{**}$$

ist ein Isomorphismus – der natürliche Isomorphismus *zwischen V und V^{**}.*

Bemerkung 6.1.6. Die Definition von v^{**} funktioniert für beliebige (nicht notwendigerweise endlich-dimensionale) Vektorräume. Aber wenn V beispielsweise abzählbar unendlich ist, kann ϕ nicht surjektiv sein, da $|V^*| = |2^{\mathbb{N}}| > |V|$.

Beweis von Satz 6.1.5. Zeigen zuerst, dass v^{**} linear für jedes $v \in V$; d.h., $v^{**} \in V^{**}$. Seien dazu $f, f' \in V^*$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} v^{**}(f_1 + \lambda f_2) &= (f_1 + \lambda f_2)(v) && \text{(Definition von } v^{**}\text{)} \\ &= f_1(v) + \lambda f_2(v) && \text{(Rechnen in } V^*\text{)} \\ &= v^{**}(f_1) + \lambda v^{**}(f_2) && \text{(Definition von } v^{**}\text{)} \end{aligned}$$

Zeigen als nächstes, dass ϕ linear. Seien $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Sei $f \in V^*$ beliebig.

$$\begin{aligned} \phi(v_1 + \lambda v_2)(f) &= f(v_1 + \lambda v_2) && \text{(Definition von } \phi\text{)} \\ &= f(v_1) + \lambda f(v_2) && \text{(Linearität von } f\text{)} \\ &= \phi(v_1)(f) + \lambda\phi(v_2)(f) && \text{(Definition von } \phi\text{)} \\ &= (\phi(v_1) + \lambda\phi(v_2))(f) \end{aligned}$$

Bijektivität: Wegen der Äquivalenz von Injektivität und Surjektivität einer linearen Abbildung (Satz 3.4.6), genügt es, zu zeigen: Ist $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, so ist $\phi(v) = v^{**} \neq \mathbf{0}$. Dazu ergänzen wir v zu einer Basis B von V und definieren $f \in V^*$ durch $f(u) := 1$ für alle $u \in B$. Dann gilt $v^{**}(f) = f(v) = 1$. □

6.1.4 Dualisieren von Abbildungen

Seien V, W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, und $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann ist

$$f^*\colon W^* \to V^* : g \mapsto g \circ f$$

eine lineare Abbildung, die *zu f duale Abbildung*.

6.1.5 Annulatoren

Sei V endlichdimensional, $S \subseteq V$.

Definition 6.1.7. Der *Annulator von S in V^** ist die Menge

$$S^0 := \{f \in V^* \mid f(s) = 0 \text{ für alle } s \in S\}$$

Bemerkung. $S^0 \leq V^*$ (direktes Nachrechnen der Definition).

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $U \leq V$ ein Untervektorraum.

Proposition 6.1.8. *Es gilt* $\dim U + \dim U^0 = \dim V$*. Wenn* $(u_1, \ldots, u_k)$ *Basis von* U *und* $(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n)$ *Basis von* V*, dann ist* $(u_{k+1}^*, \ldots, u_n^*)$ *Basis von* U^0*.*

Beweis. $(u_{k+1}^*, \dots, u_n^*)$ Basis von U^0: zunächst gilt für $v \in U$ und $j \in \{k+1, \dots, n\}$ dass $u_j^*(v) = 0$ und damit dass $u_j^* \in U^0$. Denn $v = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i$ und damit ist $u_j^*(v) = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_j^*(u_i) = 0$. Lineare Unabhängigkeit und $\langle u_{k+1}^*, \dots, u_n^* \rangle = U^0$: nachrechnen wie im Beweis von Satz 6.1.2. Also: $\dim U + \dim U^0 = k + (n-k) = n = \dim V$. □

Bemerkung 6.1.9. Nach Satz (Satz 3.4.15) gilt $\dim V/U + \dim U = \dim V$ und damit

$$(V/U)^* \cong V/U \cong U^0 \qquad \text{(siehe Abschnitt 3.4.4).}$$

Betrachten nun $S \subseteq V$ beliebig und $S^{00} := (S^0)^0 \subseteq V^{**} \cong V$.

Proposition 6.1.10. *Sei ϕ der natürliche Isomorphismus zwischen V und V^{**}. Dann gilt $S^{00} = \phi(S)$ genau dann wenn $S \leq V$.*

Beweis. Es gelte zunächst $S^{00} = \phi(S)$. Mit der Bemerkung haben wir $S^{00} \leq V^{**}$. Also ist $S = \phi^{-1}(S^{00}) \leq \phi^{-1}(V^{**}) = V$.

Umgekehrt sei $S \leq V$. Sei $(u_1, \dots, u_k)$ Basis von S, und $(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$ Basis von V. Zeigen zuerst $S^{00} \subseteq \phi(S)$. Sei $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi(u_i) \in S^{00}$ und sei $j \geq k+1$. Nach Proposition 6.1.8 ist $u_j^* \in S^0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
0 &= w(u_j^*) && (w \in S^{00} \text{ und } u_j^* \in S^0) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi(u_i)(u_j^*) && \text{(Definition von } w) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i u_j^*(u_i) && \text{(Definition von } \phi) \\
&= \alpha_j && \text{(Definition des Kroneckersymbols).}
\end{aligned}$$

Also folgt

$$w = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \phi(u_i) \in \phi(S).$$

$\phi(S) \subseteq S^{00}$: Sei $v \in S$. Zu zeigen: $\phi(v) \in S^{00}$. Sei $f \in S^0$. Dann

$$\begin{aligned}
\phi(v)(f) &= f(v) && \text{(Definition von } \phi) \\
&= 0 && (\text{da } v \in S \text{ und } f \in S^0)
\end{aligned}$$

□

6.1.6 Dualitätssatz der linearen Algebra

Zwei Bilder:

- eines mit V, V^*, V^{**}, ϕ, $\mathbf{0}$, $U \leq V$, und $\phi(U) = U^{00}$.
- ein anderes mit V, $\mathbf{0}$, $\{\mathbf{0}\}^0 = V^*$, $U_1, U_2 \leq V$, $U_1 + U_2$, $(U_1)^0$, $(U_2)^0$, $(U_1 \cap U_2)^0 = (U_1)^0 + (U_2)^0$, und $(U_1 \cup U_2)^0 = (U_1 + U_2)^0 = (U_1)^0 \cap (U_2)^0$.

Satz 6.1.11. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Dann ist $U \mapsto U^0$ eine bijektive Abbildung von der Menge der Untervektorräume von V auf die Menge der Untervektorräume von V^*. Dabei gelten:*

1. $\{\mathbf{0}\}^0 = V^*$
2. $U_1 \subseteq U_2 \implies U_1^0 \supseteq U_2^0$
3. $(U_1 \cap U_2)^0 = U_1^0 + U_2^0$ *(siehe Definition 2.4.14)*
4. $(U_1 \cup U_2)^0 = (U_1 + U_2)^0 = U_1^0 \cap U_2^0$

Für lineare Abbildung $f: V \to W$ gilt

5. $\operatorname{Kern}(f^*) = (\operatorname{Bild} f)^0$
   f^* genau dann injektiv wenn f surjektiv.
6. $\operatorname{Bild}(f^*) = (\operatorname{Kern} f)^0$
   f^* genau dann surjektiv wenn f injektiv.
7. $\operatorname{rg}(f^*) = \operatorname{rg}(f)$
   f^* genau dann bijektiv, wenn f bijektiv.

Korollar 6.1.12. *Sei V endlichdimensionaler Vektorraum und $S \subseteq V$. Dann gilt*

$$\langle S \rangle = \phi^{-1}(S^{00})$$

Beweis. Aus $S \subseteq \langle S \rangle$ folgt durch zweimaliges Anwenden von Satz 6.1.11 (2.) dass $S^{00} \subseteq \langle S \rangle^{00}$. Da $S^{00} \leq V$ haben wir also

$$S^{00} = \langle S \rangle^{00} = \phi(\langle S \rangle)$$

nach Proposition 6.1.10, und damit die Aussage des Korollars. □

6.2 Bilinearformen

6.2.1 Definitionen

Wichtiger Spezialfall: Skalarprodukt
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Definition 6.2.1. Eine Abbildung

$$B: V \times V \to \mathbb{K}$$

heißt *Bilinearform (auf V)* wenn gilt: für alle $u, v, u_1, u_2, v_1, v_2 \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$:

- $B(u_1 + u_2, v) = B(u_1, v) + B(u_2, v)$ und $B(\alpha u_1, v) = \alpha B(u_1, v)$
  (Linearität in der ersten Stelle)

- $B(u, v_1 + v_2) = B(u, v_1) + \gamma(u, v_2)$ und $B(u, \alpha v) = \alpha B(u, v)$ (Linearität in der zweiten Stelle)

Folgerung:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{0}, v) &= 0 = B(u, \mathbf{0}) \\ B(-u, v) &= -B(u, v) = B(u, -v) \end{aligned}$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: eine Abbildung $B\colon V \times V \to \mathbb{C}$ heißt *Semibilinearform* (oder *Sesquilinearform* (lateinisch für eineinhalb) falls gilt

- Linearität in der ersten Stelle (wie oben)
- *Semilinearität* in der zweiten Stelle:

$$\begin{aligned} B(u, v_1 + v_2) &= B(u, v_1) + B(u, v_2) \\ B(u, \beta v) &= \bar{\beta} B(u, v) \end{aligned}$$

  wobei $\bar{\beta} := a - bi$ für $\beta = a + bi$ die *konjugiert komplexe Zahl* zu $\beta \in \mathbb{C}$.

In der Physik andere Konvention: das *erste* Argument erfüllt Semilinearität.

Konjugation definiert ein *Automorphismus* des Körpers $(\mathbb{C}; +, *)$, d.h., eine bijektive Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die verträglich ist mit Addition und Multiplikation:

$$\begin{aligned} \overline{(a+bi) + (c+di)} &= \overline{(a+c) - (b+d)i} = \overline{(a+bi)} + \overline{(c+di)} \\ \overline{(a+bi) * (c+di)} &= \overline{ac + (bc+ad)i - bd} = ac - adi - bci - bd \\ &= (a-bi) * (c-di) = \overline{(a+bi)} * \overline{(c+di)} \end{aligned}$$

Eine (Semi-) Bilinearform $\gamma\colon V \times V \to \mathbb{K}$ heißt

- *nicht ausgeartet* falls

$$\begin{aligned} \forall u \neq \mathbf{0}\ \exists v \in V\colon B(u, v) \neq 0 \\ \forall v \neq \mathbf{0}\ \exists u \in V\colon B(u, v) \neq 0 \end{aligned}$$

- *symmetrisch* falls

$$\forall u, v \in V:\ B(u, v) = B(v, u)$$

- *hermitisch* falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und

$$\forall u, v \in V : B(u, v) = \overline{B(v, u)}$$

- *positiv definit* falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und

$$\forall u \in V \setminus \{\mathbf{0}\} : B(u, u) \in \mathbb{R} \text{ und } B(u, u) > 0.$$

- *Skalarprodukt* falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) und B positiv definit und symmetrisch (bzw. hermitisch).

Beispiele für (Semi-) Bilinearformen.

1. Das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ (siehe Abschnitt 5.1.5):

$$B(x, y) := x * y = x^\top y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

2. das *Lorentz-Produkt* (Relativitätstheorie) auf $V = \mathbb{R}^4$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ t \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ s \end{pmatrix} \qquad \text{(Raum- und Zeitkoordinaten)}$$

$$B(x, y) := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - c^2 ts = x^\top A y^\top$$

wobei (c: Lichtgeschwindigkeit)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix}$$

Kein Skalarprodukt, da nicht positiv definit.

3. Sei V der Vektorraum aller auf dem Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ integrierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$B(f, g) := \int_a^b f(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

ist Skalarprodukt.

Allgemeine Sätze für Skalarprodukte (so wie z.B. Cauchy-Schwartz) gelten für alle diese Beispiele und brauchen nicht immer neu bewiesen zu werden.

6.2.2 Bilinearformen und Matrizen

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit der Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$, und $B\colon V \times V \to \mathbb{K}$ eine (Semi-) Bilinearform auf V. Die Matrix

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

mit $a_{ij} = B(v_i, v_j)$ heißt *Gramsche Matrix* der Bilinearform. (Hängt von B ab.) (Jórger Perdersen Gram (1850-1916), dänischer Versicherungsmathematiker.)

Durch die Gramsche Matrix ist die Bilinearform eindeutig festgelegt: sei $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, $v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$. Dann

$$\begin{aligned} B(u,v) &= B\left(\sum \alpha_i v_i, \sum \beta_i v_i\right) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j B(v_i, v_j) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_{ij} \alpha_i \beta_j \\ &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.2}$$

Spezialfall $V = \mathbb{K}^n$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ Standardbasis:

$$B(u,v) = u^\top A v \tag{6.3}$$

Standardbilinearform auf $\mathbb{K}^n$: $A = E$, d.h., $B(u,v) = u^\top v$ (vgl. Standardskalarprodukt).

Umgekehrt gilt: für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist durch (6.2) bzw. (6.3) eine Bilinearform auf V bzw. $\mathbb{K}^n$ gegeben.

Zusammenhang Eigenschaften von Bilinearformen und Matrizeneigenschaften: sei $B\colon V\times V \to \mathbb{K}$ Bilinearform und A die Gramsche Matrix (bzgl. irgendeiner Basis). Dann gilt

$$\begin{aligned} B \text{ nicht ausgeartet} &\iff \operatorname{rg}(A) = n \\ B \text{ symmetrisch} &\iff A \textit{ symmetrisch, d.h., } A = A^\top \\ B \text{ hermitisch} &\iff A \textit{ hermitisch, d.h., } A = \bar{A}^\top \\ B \text{ positiv definit} &\iff A \textit{ positiv definit, d.h., } \forall x \neq \mathbf{0} : 0 < x^\top A x \end{aligned}$$

Nun ein Vorgriff auf Abschnitt 7.3.5 (Hauptachsentransformation):

Proposition 6.2.2. *Sei B eine symmetrische Bilinearform B eines n-dimensionalen Vektorraumes V. Dann ist B genau dann ein Skalarprodukt, wenn für die Gramsche Matrix A gilt: für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ hat die Matrix, die aus den ersten k Elementen der ersten k Zeilen von A besteht, eine Determinante strikt größer als* 0.

Beweis. Kommt in Abschnitt 7.3.5. □

Beispiel. Die Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

ist genau dann Gramsche Matrix eines Skalarprodukts, wenn alle Eigenwerte λ_i positiv sind. Das zugehörige Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist dann

$$B(u,v) = u^\top Av = \lambda_1 u_1 v_1 + \dots + \lambda_n u_n v_n \tag{6.4}$$

("gewichtetes Standardskalarprodukt").

Beweis: offenbar mit Proposition 6.2.2.

Direkter Beweis:

- Der Ausdruck in (6.4) ist sicher symmetrisch, und positiv definit falls alle $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positiv sind.
- Falls aber $\lambda_i \leq 0$ für ein $i \leq n$, dann ist $B(e_i, e_i) = \lambda_i \leq 0$, und damit ist B nicht positiv definit.

6.2.3 Zusammenhang zwischen Bilinearformen

"Kennt man eine, kennt man alle."
Bilinearformen unterscheiden sich nur durch einen Endomorphismus, genauer:

Satz 6.2.3. *Sei $B\colon V \times V \to \mathbb{K}$ eine nicht ausgeartete Bilinearform auf V und $f\colon V \to V$ lineare Abbildung (Endomorphismus). Dann ist*

$$B'(u,v) := B(f(u), v) \tag{6.5}$$

ebenfalls eine Bilinearform, und jede Bilinearform ensteht aus B auf diese Weise (für geeignetes f).

Für $V = \mathbb{K}^n$ lässt sich (6.5) schreiben als

$$B'(u,v) = B(Au, v)$$

für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

Beweis. o.B.d.A. sei $V = \mathbb{K}^n$.
Es gilt: $B'(u,v) = u^\top A_2 v$ und $B(u,v) = u^\top A_1 v$ für A_1 invertierbar.
(Da B nicht ausgeartet, siehe Abschnitt 6.2.2). Also

$$B'(u,v) = u^\top A_2 v = u^\top A_2 A_1^{-1} A_1 v = ((A_1^{-1})^\top A_2^\top u)^\top A_1 v = B(Au, v)$$

für $A := (A_1^{-1})^\top A_2^\top$. □

6.2.4 Beschreibung von Bilinearformen durch quadratische Formen

Sei $B\colon V \times V \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform auf V. Die zugehörige *quadratische Form*

$$q\colon V \to \mathbb{K}$$

ist definiert durch

$$q(v) := B(v, v)$$

Achtung: keine lineare Abbildung!
q hat die Eigenschaften:

1. $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$
2. $q(u + v) = q(u) + B(u, v) + B(v, u) + q(v)$

Eine symmetrische Bilinearform ist sogar durch q eindeutig bestimmt (falls $\operatorname{char}(\mathbb{K}) \neq 2$), denn aus der zweiten Eigenschaft folgt ('Polarisierung'):

$$B(u, v) = 2^{-1}(q(u + v) - q(u) - q(v))$$

Bemerkung: 2^{-1} existiert nicht in $\mathbb{F}_2$ oder allgemeiner falls $\operatorname{char}(\mathbb{K}) = 2$.

Die *Kennlinie* K einer Bilinearform ist definiert durch

$$K := \{u \in V \mid \|u\| = 1\} = \{u \in V \mid q(u) = 1\}$$

Beispiel. $V = \mathbb{R}^2$. Anderes Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} x * y &:= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 \\ &= (x_1\ x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Gramsche Matrix}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Kriterium aus Proposition 6.2.2 zeigt, dass Skalarprodukt vorliegt:

$$\det(2) > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} > 0$$

Die zugehörige quadratische Form:

$$q(x) = x * x = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$$

Kennlinie:

$$K := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 1\}$$

eine Ellipse. Bild: eine Ellipse durch Punkte $(0, 1), (0, -1), (1, -1), (-1, 1)$.
Bestimmung der Achsen: Hauptachsentransformation.

Bemerkung. Die Kennlinie einer Bilinearform ist stets ein Kegelschnitt
(Ellipse für Skalarprodukte)

Klassifikation von Bilinearformen durch Kennlinie: Kapitel 7.3.5, verwendet Hauptachsentransformation

6.2.5 Beschreibung von Bilinearformen durch Linearformen

V^*: dualer Raum aller Linearformen.
Zusammenhang zwischen Bilinearformen $B: V \times V \to \mathbb{K}$
und linearen Abbildungen $L: V \to V^*$:

- Sei $\phi: V \to V^*$ lineare Abbildung. Dann ist durch

$$B_\phi(u, v) := \underbrace{\phi(u)}_{\in V^*}(v)$$

  eine Bilinearform definiert (die genau dann nicht ausgeartet ist, wenn ϕ injektiv ist).

- Jede Bilinearform entsteht auf diese Weise. Für die Bilinearform $B: V \times V \to \mathbb{K}$ ist durch

$$\phi_B: V \to V^* : u \mapsto f_u$$

  mit $f_u(v) := B(u, v)$ eine lineare Abbildung definiert (die genau dann injektiv ist, wenn B nicht ausgeartet ist).

Durch diesen Zusammenhang ist eine Bijektion gegeben, denn es gilt

$$B_{\phi_B} = B \text{ und } \phi_{B_\phi} = \phi.$$

6.3 Euklidische und unitäre Vektorräume

6.3.1 Definitionen

Wiederholung: ein *euklidischer* bzw. *unitärer* Vektorraum ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit einem Skalarprodukt

$$*: V \times V \to \mathbb{R} \qquad\qquad V \times V \to \mathbb{C}$$

Wiederholung:

$$||u|| := \sqrt{u * u} = \sqrt{q(u)}$$

heißt *Norm* von $u \in V$.
u ist *normierter* Vektor falls $||u|| = 1$.

Satz 6.3.1. *In einem euklidischen bzw. unitären Vektorraum gilt:*

- *Die Norm ist ein* vernünftiges Längenmaß:
  1. $||x|| \geq 0$ *für alle* $x \in V$; $||x|| = 0 \iff x = \mathbf{0}$.
  2. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$ *für alle* $x \in V$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *bzw.* $\alpha \in \mathbb{C}$.
  3. *Die Dreiecksungleichung (siehe Abschnitt 5.1.7):*

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

- *Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:*

$$|x * y| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

äquivalent dazu:

$$(x * y)(x * y) \leq (x * x)(y * y)$$

bzw.

$$|x * y|^2 = (x * y)\overline{(x * y)} = (x * y)(y * x) \leq (x * x)(y * y)$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $x - \alpha y = \mathbf{0}$, d.h., wenn x, y linear abhängig sind.

Beweis. Wir konzentrieren uns auf den komplexen Fall der Cauchy-Schwarzen Ungleichung; den reellen Fall haben wir bereits in Abschnitt 5.1.6 betrachtet. Falls $y = \mathbf{0}$ ist die Aussage trivial. Sei nun $y \neq \mathbf{0}$. Setzen $\alpha := \frac{x * y}{\|y\|^2}$. Nun gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leq (x - \alpha y) * (x - \alpha y) && (* \text{ ist positiv definit})\\
&= x * (x - \alpha y) - \alpha y * (x - \alpha y) && (\text{Linearität in 1. Stelle})\\
&= (x * x) - \bar{\alpha}(x * y) - \alpha(y * x) + \alpha\bar{\alpha}(y * y) && (\text{Semilinearität in 2. Stelle})\\
&= \|x\|^2 - \frac{\overline{(x * y)}(x * y)}{\|y\|^2} - \frac{(x * y)(y * x)}{\|y\|^2} + \frac{(x * y)\overline{(x * y)}(y * y)}{\|y\|^2\,\|y\|^2} && (\text{Einsetzen von } \alpha)\\
&= \|x\|^2 - \frac{(x * y)(y * x)}{\|y\|^2} && (\text{Vereinfachen})
\end{aligned}$$

Damit ist $(x * y)^2 \leq \|x\|^2\,\|y\|^2$. □

Jede Norm auf einem Vektorraum induziert durch $d := \|x - y\|$ eine *Metrik* (Abstandsbegriff ⇝ Analysis). Ist ein unitärer Raum *vollständig* bzgl. der Norm (jede Cauchyfolge konvergiert), so heißt er *Hilbert-Raum*. Ein Vektorraum, in dem ein Skalarprodukt definiert ist, heißt dagegen *Prähilbertraum*.

Beispiel. Betrachten die Menge der Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ konvergiert. Hierauf definieren wir das Skalarprodukt

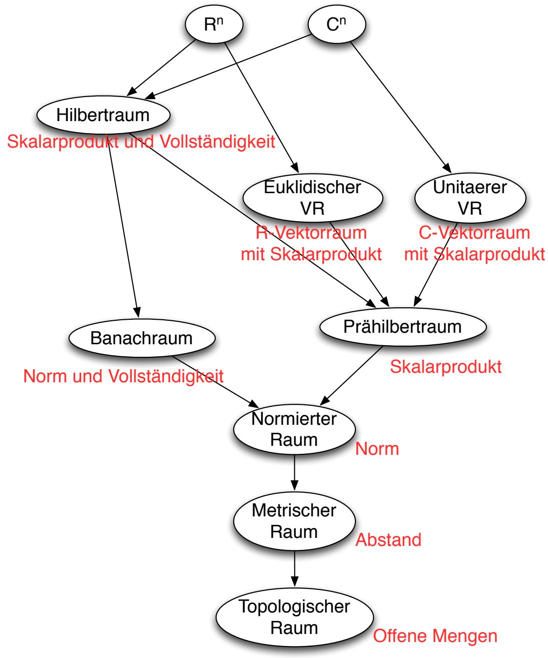
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} * (y_n)_{n\in\mathbb{N}} := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \bar{y}_n$$

Dieser Ausdruck konvergiert: zunächst ist

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i \bar{y}_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2}$$

wegen der Ungleichung von Cauchy-Schwarz für das Standardskalarprodukt im $\mathbb{C}^n$; die rechte Seite aber ist uniform beschränkt.

Der Raum ist vollständig und damit ein Hilbertraum, und wird (wie die entsprechende Norm) mit ℓ_2 bezeichnet und auch "*der* Hilbertraum" genannt. Bis auf Isometrie der einzige unendlich-dimensionale separable (d.h., mit abzählbarer dichter Teilmenge, nämlich der Teilmenge von Folgen rationaler Zahlen) Hilbertraum, Satz von Fischer-Riesz.



6.3.2 Orthogonalität

Zwei Vektoren u, v eines euklidischen Vektorraums V heißen *orthogonal*, $u \perp v$, wenn $u * v = 0$. Für Teilmenge $U \subseteq V$ heißt

$$U^{\perp} := \{w \in V \mid \forall u \in U \colon w \perp u\}$$

das *orthogonale Komplement* von U.

Bemerkungen.

- $U^{\perp}$ ist stets Untervektorraum von V und es gilt

$$U^{\perp} = \langle U^{\perp} \rangle = \langle U \rangle^{\perp}$$

- Für $U \leq V$ ist $U^{\perp}$ ein Komplement im Sinne von Definition 2.4.14, d.h., es gilt

$$V = U \oplus U^{\perp}$$

  (jedes $v \in V$ lässt sich *eindeutig* schreiben als $u + w$ für $u \in U$ und $w \in U^{\perp}$)
  Insbesondere:

$$\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V$$

6.3.3 Orthogonalsysteme

Definition 6.3.2. Sei V euklidischer oder unitärer Vektorraum, und $v_1, \dots, v_r \in V$. Dann heißt $(v_1, \dots, v_r)$

- *Orthogonalsystem* falls $v_i \neq \mathbf{0}$ und $v_i * v_j = 0$ für verschiedene $i, j \in \{1, \dots, r\}$;
- *Orthonormalsystem* falls $(v_1, \dots, v_n)$ ein *normiertes* Orthogonalsystem, d.h., falls zusätzlich $\|v_i\| = 1$ für alle $i \in \{1, \dots, r\}$.
  Anders geschrieben: $v_i * v_j = \delta_{ij}$ (Kroneckersymbol);
- *Orthogonalbasis* falls Basis und Orthogonalsystem;
- *Orthonormalbasis* (oder kurz *ON-Basis*) falls Basis und Orthonormalsystem.

Satz 6.3.3. *Jedes Orthogonalsystem ist linear unabhängig.*

Folgerung: ein Orthogonalsystem $(v_1, \dots, v_r)$ ist genau dann ON-Basis wenn $r = \dim V$.

Beweis. Sei $(v_1, \dots, v_r)$ Orthogonalsystem, und

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \mathbf{0}$$

Z.z.: $\alpha_i = 0$
Skalarprodukt mit v_i auf beiden Seiten ergibt

$$\alpha_1(v_1 * v_i) + \cdots + \alpha_r(v_r * v_i) = \mathbf{0}$$

also $\alpha_i(v_i * v_i) = \mathbf{0}$. Da $v_i \neq \mathbf{0}$ ist $v_i * v_i \neq 0$, also $\alpha_i = 0$. □

Bemerkung. Die Gramsche Matrix des Skalarprodukts ist bezüglich einer ON-Basis stets die Einheitsmatrix.

Beispiele.

- Sei $V = \mathbb{R}^n$ und
  $$x * y := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$
  das Standardskalarprodukt. Wegen $e_i * e_j = \delta_{ij}$ ist $(e_1, \dots, e_n)$ eine ON-Basis.
- V der Vektorraum aller stetigen reellen Funktionen auf dem Interval $X = [-\pi, +\pi]$. Euklidischer VR mit Skalarprodukt
  $$g * h := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(t)h(t)dt$$
  Eine (unendliche) ON-Basis ist gegeben durch:
  $t \mapsto 1/\sqrt{2}$, $t \mapsto \cos(nt)$, $t \mapsto \sin(nt)$, für $n = 1, 2, 3, \dots$.

6.3.4 Das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren

V: euklidischer bzw. unitärer VR, $(v_1, \ldots, v_r)$ linear unabhängig. Durch folgende rekursive Definitionen erhält man ein Orthonormalsystem $(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_r)$ mit $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \langle \tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_k \rangle$ für $k \in \{1, \ldots, r\}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_1 &:= \frac{1}{\|v_1\|} v_1 \\
v_k^{\prime} &:= v_k - \sum_{i=1}^{k-1} (v_k * \tilde{v}_i) \tilde{v}_i \qquad (6.6) \\
\tilde{v}_k &:= \frac{1}{\|v_k^{\prime}\|} v_k^{\prime} \qquad \text{(Normierung)}
\end{aligned}$$

Motivation für (6.6) für $k = 3$: Bild!
p_U: Projektion von v_3 auf den von $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2$ aufgespannten Untervektorraum, $U = \langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \rangle$.

$$v_3^{\prime} = v_3 - p_u = v_3 - \sum_{i=1}^{2} (v_3 * \tilde{v}_i) \tilde{v}_i$$

Beweis. Von Herrn Claußnitzer nach Bosch, Lineare Algebra, Kapitel 7. □

Folgerung 1. Jeder n-dimensionale euklidische (unitäre) VR hat eine ON-Basis (man starte Verfahren mit Basis $v_1, \ldots, v_n$).

Folgerung 2. Jede Orthonormalbasis eines Untervektorraums $U \leq V$ läßt sich zu einer ON-Basis von V ergänzen.

Wozu ist ON-Basis gut?

Mit ON-Basis wird das Rechnen mit Koordintenvektoren, Skalarprodukt, und orthogonalem Komplement besonders einfach.

Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ ON-Basis von euklidischen/unitären VR V. Dann gilt:

1. Entwicklungssatz für $v \in V$:
$$v = \sum_{i=1}^{n} (v * v_i) v_i$$
(Gilt auch für unendliche ON-Basen.)
$v * v_i$: *"Fourierkoeffizienten"*.

   Denn: falls $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$, dann gilt
$$v * v_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{(v_j, v_i)}_{=\delta_{ij}} = \alpha_i$$

2. Skalarprodukt ist Standardskalarprodukt der Koordinatenvektoren bzgl. ON-Basis: für $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ und $v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$:
$$u * v = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n$$
bzw., in unitären VR,
$$u * v = \alpha_1\bar{\beta}_1 + \cdots + \alpha_n\bar{\beta}_n$$
(Gramsche Matrix = Einheitsmatrix)

Denn:
$$\sum \alpha_i v_i * \sum \beta_j v_j = \sum_{i,j} \alpha_i \bar{\beta}_j \underbrace{(v_i * v_j)}_{\delta_{ij}}$$

3. *Parsevalsche Gleichung*:
$$v * v = \|v\|^2 = \sum_{i=1}^n |v * v_i|^2$$
(rechte Seite: Summe der Quadrate der Fourrierkoeffizienten)

Denn: für $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ ist
$$v * v \overset{(2.)}{=} \alpha_1\bar{\alpha}_1 + \cdots + \alpha_n\bar{\alpha}_n = |\alpha_1|^2 + \cdots + |\alpha_n|^2 \overset{(1.)}{=} \sum_{i=1}^n |v * v_i|^2$$
In Hilberträumen gilt für orthonormales System $(e_1, e_2, \dots)$:
$$v * v = \|v\|^2 \geq \sum_{i\in\mathbb{N}} |v * e_i|^2 \qquad \textit{(Besselsche Ungleichung)}$$

4. Sei $U \leq V$ und $(u_1, \dots, u_m)$ ON-Basis von U.
Sei $(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n)$ Ergänzung zu ON-Basis von V (Verfahren von Gram-Schmidt, Folgerung 2). Dann ist
$$U^\perp = \langle u_{m+1}, \dots, u_n\rangle$$
und $(u_{m+1}, \dots, u_n)$ ist ON-Basis von $U^\perp$.
Also: $V = U \oplus U^\perp$ (siehe Abschnitt 2.4.14).

Denn: $v_i * v_j = 0$ fur $i \leq m$ und $m + 1 \leq j$, also $v_{m+1}, \dots, v_n \in U^\perp$ also
$$\langle u_{m+1}, \dots, u_n\rangle \subseteq U^\perp$$
Umgekehrt sei $v \in \sum \alpha_i v_i \in U^\perp$. Dann ist $\alpha_i \overset{(1)}{=} v * v_i = 0$ für $i \leq m$ (da $v_i \in U$).
Also $v = \sum_{i=m+1}^n \alpha_i v_i \in \langle v_{m+1}, \dots, v_n\rangle$.

6.3.5 Orthogonalprojektion

(Bereits mit Gram-Schmidt eingeführt von Herrn Claußnitzer nach Bosch, Lineare Algebra, Kapitel 7.)

Sei V euklidischer (oder unitärer) VR, und $U \leq V$ Untervektorraum.

$$\begin{aligned} & V = U \oplus U^\perp \\ \exists u, w: \quad & v = u + w \qquad \text{(eindeutig!)} \end{aligned}$$

Bezeichnung: $p_U(v) := u$.

Definition 6.3.4. Die *Orthogonalprojektion* eines Vektors $v \in V$ auf einen Unterraum U ist der (eindeutig bestimmte) Vektor $p_U(v) \in U$, so dass eine Zerlegung $v = p_U(v) + w$ mit $w \in U^\perp$ existiert (insbesondere $p_U(v) \perp w$).

Satz 6.3.5. *Sei V euklidischer VR und $U \leq V$.*

1. *Für alle $u \in U$ und $v \in V$ gilt*
$$\|v - p_U(v)\|^2 \leq \|v - u\|^2$$
2. *Das Gleichheitszeichen gilt* nur *für $u = p_U(v)$.*
3. *Einfache Berechnung von $p_U(v)$ mit ON-Basis $(u_1, \ldots, u_m)$ von U:*
$$p_U(v) = \sum_{i=1}^{m} (v * u_i) u_i$$
(erster Teil der Fourierentwicklung, siehe Abschnitt 6.3.4)

Beweis. Zu (1). Sei $v \in V$. Dann gibt es $w \in U^\perp$ mit $v = p_U(v) + w$ (Abschnitt 6.3.2). Sei $u \in U$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |v - u\|^2 &= \|w + p_U(v) - u\|^2 \\ &= \|w\|^2 + \|p_U(v) - u\|^2 \qquad \text{(da } w \perp (p_U(v) - u)\text{)} \\ &\geq \|w\|^2 = \|v - p_U(v)\|^2 \end{aligned}$$

Zu (2). Nach dem Entwicklungssatz aus Abschnitt 6.3.4:

$$\begin{aligned} v &= \underbrace{\sum_{i=1}^{m} (v * v_i) v_i}_{\in U} + \underbrace{\sum_{i=m+1}^{n} (v * v_i) v_i}_{\in U^\perp} \\ &= p_U(v) \qquad \text{(nach Definition 6.3.4).} \end{aligned}$$

□

6.3.6 Anwendung: Methode der kleinsten Fehlerquadrate

von Gauß zur Berechnung von Planetenbahnen

Gegeben:

- Annahme: theoretisch bekannter (oder vermuteter) Zusammenhang f zwischen zwei (Mess-) Größen
$$y = f(x) = a_0 + a_1 g_1(x) + \cdots + a_m g_m(x)$$
wobei $g_1, \ldots, g_m$ bekannte Funktionen, z.B. $g_i(x) := x^i$, also
$$y = f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$$
- Messreihe $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ (i.A. fehlerbehaftet)

Gesucht: Möglichst genaue Approximation für f, d.h., für $a_0, a_1, \ldots, a_m$.
Was ist gute Approximation?

Ansatz:
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \underset{\text{exakt}}{\overset{\text{falls Messwerte}}{=}} \begin{pmatrix} 1 & g_1(x_1) & \cdots & g_m(x_1) \\ 1 & g_2(x_2) & \cdots & g_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & g_2(x_n) & \cdots & g_m(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$
Maß für Abweichung der Kurve f von den Messpunkten ist
$$\underset{\text{Norm in } \mathbb{R}^{m+1}}{\|y - Aa\|} \quad \underset{\text{z.B. für Standardskalarprodukt.}}{= \sqrt{(y_1 - c_1)^2 + \cdots + (y_n - c_n)^2}}$$

→ *Methode der kleinsten Fehlerquadrate.*
Große Abweichungen der Modellfunktion von den Daten werden stärker gewichtet.

Gegeben: A, y.
Gesucht: $a \in \mathbb{R}^{m+1}$, so dass $\|y - Aa\| \leq \|y - Ab\|$ für alle $b \in \mathbb{R}^{m+1}$.

Sei
$$U := \{Ab \mid b \in \mathbb{R}^{m+1}\} = \operatorname{Bild} A \leq \mathbb{R}^n$$
Lösung $Aa = p_U(y)$ liefert beste Approximation gemäß Definition 6.3.4,
da $\|y - p_U(y)\|$ minimal.

Lösungsmethode:

1. Bestimmung einer Basis $(v_1, \ldots, v_r)$ von $U := \operatorname{Bild} A$.
2. Bestimmung einer ON-Basis $(\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_r)$ von U (siehe Abschnitt 6.3.4).
3. Berechne $p_U(y) = \sum_{i=1}^{r} (y * \tilde{v}_i)\tilde{v}_i$ (siehe Satz 6.3.5).

4. Berechnung der Lösung $a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ des Gleichungssystems

$$Aa = p_U(y)$$

liefert beste Approximation

$$f(x) = a_0 + a_1 g_1(x) + \dots + a_m g_m(x).$$

Lösbarkeit garantiert, da $p_U(y) \in U = \operatorname{Bild} A$, Abschnitt 3.3.2.
System eindeutig lösbar falls rg $A = r = n$, Korollar 3.3.6.

Beispiel. Messreihe:

Versuch Nr.	x_i	y_i
1	-1	-3/2
2	0	1
3	1	0
4	2	3

Bild!

Theoretisch gegebener Zusammenhang sei lineare Funktion (Gerade)

$$y = f(x) = a_0 + a_1 \underbrace{x}_{g_1(x)}$$

"Ausgleichsrechnung": Fehler $\sqrt{\sum_{i\le 4}(f(x_i) - y_i)^2}$ minimieren.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Gesucht: Lösung $a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$ für $Aa = p_U(y)$, $U := \operatorname{Bild} A$.

1. Basis von U: haben $\operatorname{rg}(A) = 2$ und wählen

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. ON-Basis von U:

$$\tilde{v}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$v_2' := v_2 - (v_2 * \tilde{v}_1)\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{4}(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix})\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix}$$

$$||v_2'|| = \sqrt{(9+1+1+9)/4} = \sqrt{5}$$

$$\tilde{v}_2 := \frac{1}{||v_2'||}v_2' = \frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix}$$

3. Berechnung von $p_U(y)$:

$$\begin{aligned} p_U(y) &= (y * \tilde{v}_1)\tilde{v}_1 + (y * \tilde{v}_2)\tilde{v}_2 \\ &\overset{\text{Ü}}{=} \frac{5}{4}\tilde{v}_1 + \frac{5\sqrt{5}}{4}\tilde{v}_2 \overset{\text{Ü}}{=} \frac{5}{4}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Lösung des Gleichungssystems $A\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix} = p_U(y)$ nach a_0 und a_1:

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 0\\1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5/4\\0\\5/4\\5/2\end{pmatrix}$$

Hat Lösung $a_0 = 0, a_1 = 5/4$.

Ergebnis: die beste Approximation für die Messreihe ist die Gerade

$$y = f(x) = \frac{5}{4}x$$

Jede andere Gerade liefert größeren Fehler!

Kapitel 7

Normalformen von Matrizen

7.1 Klassifikation und Normalformen

7.1.1 Was heißt 'klassifizieren'?

Nicht exakt definierbar – es hängt davon ab, was man erreichen will.

Ausgangssituation:

- Menge M.
  Z.B. $\mathbb{K}^{n\times n}$, $\mathrm{Hom}(V, W)$, ...
- Äquivalenzrelation $E \subseteq M \times M$ (Abschnitt 1.2.1).
  Z.B. Ähnlichkeit von Matrizen, Äquivalenz von Matrizen (im engeren Sinne), ...

Bild.

Klassifikation heißt

- Festlegen einer Äquivalenzrelation
- Gutes Verständnis der Faktormenge M/E und der Zuordnung $M \mapsto M/E$.
  Insbesondere: wann sind zwei Element äquivalent.

A: Klassifikation durch charakteristische Daten

Beispiel. M: Menge aller Geraden in $\mathbb{R}^2$.

$$(g_1, g_2) \in E :\iff g_1 \| g_2 \qquad \text{(Parallelität)}$$

Charakteristisches Datum: Anstiegswinkel α. Bild.

$$\begin{aligned} f\colon M &\to \overbrace{D}^{\text{“Daten”}} \\ g &\mapsto \alpha \qquad\qquad \alpha \text{ Anstiegswinkel von } g \end{aligned}$$

Es gilt $E(g_1, g_2) \Leftrightarrow f(g_1) = f(g_2) \Leftrightarrow [g_1]_E = [g_2]_E$ d.h.,

$$E = \operatorname{Kern} f := \{(x, y) \in M \mid f(x) = f(y)\}$$

Kern einer Abbildung, formal verschieden vom Kern einer linearen Abbildung, aber es gibt natürlich einen Zusammenhang ...

B: Klassifikation durch Repräsentanten

Auswahl eines Repräsentanten aus jeder Äquivalenzklasse aus M/E:
Gesucht: $N \subseteq M$ so dass jede Äquivalenzklasse hat genau einen Repräsentanten in N.

D.h.,

$$N \to M/E : m \mapsto [m]_E$$

ist bijektiv.
Elemente aus N heißen auch *Normalformen*.

Beispiel. M ist Menge aller Geraden in $\mathbb{R}^2$ und E ist Parallelität.
N: Menge der Geraden durch $\mathbf{0}$.

Typische Anforderungen:

- Für gegebene $m_1, m_2 \in M$, entscheide ob $(m_1, m_2) \in E$.
- Zu jedem $m \in M$ finde Normalform, d.h., finde $n \in N$ mit $(m, n) \in E$.

Erstes Problem lässt sich auf zweites zurückführen!

7.1.2 Äquivalenz

Wiederholung: Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times m}$.

$$A \sim B :\Leftrightarrow A \text{ und } B \text{ sind } \textit{äquivalent (im engeren Sinne)}$$

d.h., es gibt invertierbare Matrizen $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $T \in \mathbb{K}^{m \times m}$ so dass

$$B = TAS\,.$$

Eine Äquivalenzrelation.

Klassifikation durch charakteristische Daten: $A \sim B \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B)$ (Satz 3.4.26, Charakterisierung von Äquivalenz, Abschnitt 3.4.8).

Klassifikation durch Repräsentanten: als Normalform für die Äquivalenzklasse aller Matrizen in $\mathbb{K}^{m \times n}$ vom Rang r kann man folgende Matrix wählen (siehe Beweis von Satz 3.4.26):

$$\begin{pmatrix} E_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

7.1.3 Zeilenäquivalenz

Wiederholung Definition 3.4.23: $A, B \in \mathbb{K}^{n\times m}$ heissen *zeilenäquivalent* (oder *linksäquivalent*) falls es eine invertierbare Matrix S gibt so dass $B = SA$.

- Zeilenäquivalenz definiert eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{K}^{n\times m}$.
- Falls A und B zeilenäquivalent sind, dann auch äquivalent. (Zeilenäquivalenz liefert *feinere* Unterscheidung als Äquivalenz.)

Motivation: Wenn die erweiterten Koeffizientenmatrizen von zwei Gleichungssysteme zeilenäquivalent sind, dann haben sie den gleichen Lösungsraum (Lemma 3.3.7).

Jede Matrix ist zeilenäquivalent zu einer Matrix in Stufenform (Definition 3.2.15); aber offensichtlich gibt es zeilenäquivalente Matrizen mit derselben Stufenform: beispielsweise

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)]{2z_1 \rightsquigarrow z_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)]{\frac{1}{2}z_1 \rightsquigarrow z_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definition 7.1.1. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ist in *reduzierter Stufenform*, falls

- A in Stufenform ist,
- der führende (linkeste) Eintrag jeder Zeile, der nicht 0 ist, ist 1, und
- jede Spalte, die eine 1 enthält, in allen anderen Einträgen 0 ist.

Satz 7.1.2. *Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ lässt sich durch elementare Zeilenumformungen in eine* eindeutige *Matrix N in reduzierter Stufenform überführen; N ist zeilenäquivalent zu A.*

Beweis. Wissen bereits, dass sich A durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix in Stufenform (Abschnitt 3.2.4) überführen lässt. Es ist leicht zu sehen, dass sich jede Matrix in Stufenform durch elementare Zeilenumformungen weiter in eine Matrix N in reduzierter Stufenform umformen lässt: zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)]{z_2 - z_1 \rightsquigarrow z_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)]{z_1 - 2z_2 \rightsquigarrow z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Elementare Zeilenumformungen lässen sich durch Multiplikation von links mit invertierbaren Elementarmatrizen beschreiben. Da das Produkt von invertierbaren Matrizen ebenfalls invertierbar ist (3.2), gibt es also eine invertierbare Matrix S mit $SA = N$.

Zur Eindeutigkeit: seien A und B zeilenäquivalente Matrizen in reduzierter Stufenform. Angenommen $A \neq B$; wir wollen dies zum Widerspruch führen. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ minimal so dass sich A und B in der i-ten Spalte unterscheiden. Sei R' (bzw. S') die Matrix, die aus der i-ten Spalte von R (bzw. S) und allen Spalten mit kleinerem Index, deren Einträge nur einmal 1 und sonst nur 0 sind. Dann sind R' und S' notwendigerweise von der Gestalt

$$R' = \begin{pmatrix} E_k & r \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ oder } R' = \begin{pmatrix} E_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$S' = \begin{pmatrix} E_k & s \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ oder } S' = \begin{pmatrix} E_k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ und $r, s \in K^k$. Die Matrizen R' und S' sind zeilenäquivalent, da R' aus R und S' aus S durch Wegstreichen von Spalten entsteht und sich Zeilenäquivalenz dadurch nicht ändert.

Beide Matrizen können nun aufgefasst werden als erweiterte Matrizen eines linearen Gleichungssystems (wie in Abschnitt 3.3.4). Das Gleichungssystem für R' hat die *eindeutige* Lösung r oder ist unerfüllbar, und das System für S' hat die eindeutige Lösung s oder ist unerfüllbar. Da beide Systeme äquivalent sind, gilt $r = s$ oder beide Systeme sind unerfüllbar. In beiden Fällen gilt $R' = S'$, ein Widerspruch. □

Korollar 7.1.3. *$A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn sich A schreiben lässt als Produkt von Elementarmatrizen.*

Beweis. Offensichtlich ist jede Elementarmatrix invertierbar (Bemerkung 3.2.18), und das Produkt von invertierbaren Matrizen ist ebenfalls invertierbar (3.2).

Sei umgekehrt A invertierbar. Dann lässt sich A nach Satz 7.1.2 durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix N in reduzierter Stufenform überführen. Diese hat den gleichen Rang wie A (Lemma 3.2.14), nämlich n; also ist N von der Gestalt E_n. Die Zeilenumformungen lassen sich beschreiben durch ein Produkt $S = S_1 S_2 \cdots S_k$ von Elementarmatrizen. Die Matrix S ist invertierbar und es gilt $SA = N = E_n$, also ist $A = S^{-1} = S_k^{-1} \cdots S_2^{-1} S_1^{-1}$ ein Produkt von Elementarmatrizen. □

7.1.4 Ähnlichkeit

Wiederholung: $A \approx A' :\Leftrightarrow A$ und A' sind *ähnlich*, d.h., es gibt invertierbare Matrix S mit

$$A' = S^{-1} A S.$$

Eine Äquivalenzrelation. Ist feiner als Zeilenäquivalenz (und Äquivalenz).

Motivation: Ähnliche Matrizen beschreiben die gleiche lineare Abbildung! (Satz 3.4.27)

Fragen:

- wie entscheiden wir, ob zwei Matrizen ähnlich sind?
- was ist möglichst einfache/schöne/praktische Normalform?

Äquivalenzbegriff	Normalform
Äquivalenz	Abschnitt 7.1.2
Zeilenäquivalenz	Reduzierte Stufenform, Abschnitt 7.1.3
Ähnlichkeit	Frobenius Normalform (Satz 7.1.35), Abschnitt 7.1.4

Abbildung 7.1: Übersicht zu Normalformen von Matrizen.

Bemerkung 7.1.4. Falls A diagonalisierbar: die Diagonalmatrix als NF (Satz 4.3.18; eindeutig bis auf Reihenfolge der Eigenwerte). Aber nicht jede Matrix ist diagonalisierbar.

Bemerkung 7.1.5. Falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: jede Matrix trigonalisierbar (Abschnitt 4.3.6). Allerdings: wenig Kontrolle über die Einträge der Dreiecksmatrix oberhalb der Diagonalen.

Müssen ein wenig ausholen …

7.1.5 Das Charakteristische Polynom II

$\mathbb{K}[X]$: der Polynomring, siehe Abschnitt 4.2.

Wiederholung: das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$ von $A = (a_{ij})_{i,j\leq n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$:

$$\chi_A(X) := \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & X - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & X - a_{nn} \end{vmatrix}$$

aus Abschnitt 4.3.2 (Kapitel zur Berechnung von Eigenwerten). Das folgende Beispiel zeigt, dass jedes Polynom das charakteristische Polynom einer Matrix ist.

Beispiel 7.1.6. Sei $\phi(X)$ das Polynom $X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0 \in \mathbb{K}[X]$, und sei

$$Z_\phi := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\phi(X)$ das charakteristische Polynom von Z_ϕ. Beweis durch Entwicklung nach der letzten Spalte (unter Verwendung von (4.3) und Übung 12; siehe Übung 19).

$$\begin{aligned} \chi_{Z_\phi}(X) &= \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & X & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & X + \alpha_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 - \cdots + \alpha_{n-1}X^{n-1} + X^n \end{aligned} \tag{7.1}$$

△

Übung 19. Füllen Sie die Details beim Beweis der Gleichheit in (7.1).

Die Matrix Z_ϕ aus Beispiel 7.1.6 wird in diesem Abschnitt eine besondere Rolle spielen (siehe Beweis von Satz 7.1.15, Lemma 7.1.32, Theorem 7.1.33, Theorem 7.1.35), und hat einen Namen verdient.

Definition 7.1.7 (Begleitmatrix)**.** Für $\phi \in \mathbb{K}[X]$ heißt die Matrix Z_ϕ aus Beispiel 7.1.6 auch *Begleitmatrix* von ϕ.

Beispiel 7.1.8. Die Begleitmatrix von $\phi = (\alpha + X)$ ist $(-\alpha)$. △

Beispiel 7.1.9. Die Begleitmatrix von $X^3 - 1$ ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ △

Das folgende Beispiel zeigt, dass das charakteristische Polynom χ_A im allgemeinen *nicht* verrät, ob A diagonalisierbar ist.

Beispiel 7.1.10.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

haben das gleiche charakteristische Polynom

$$\chi_A(X) = \chi_B(X) = (X-1)^2 ,$$

aber nur die erste Matrix ist diagonalisierbar (Übung 17). △

7.1.6 Das Minimalpolynom

Ziel: Polynom für A, welches verrät, ob A diagonalisierbar.

Definition 7.1.11. Eine Teilmenge $\mathcal{I}$ eines kommutatives Ringes R heißt *Ideal*, wenn gilt

$$\phi, \psi \in \mathcal{I} \Rightarrow \phi + \psi \in \mathcal{I}$$
$$\phi \in \mathcal{I}, \psi \in R \Rightarrow \phi \cdot \psi \in \mathcal{I}$$

Beispiel 7.1.12. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wir können Polynome $\phi \in \mathbb{K}[X]$ auswerten in $\mathrm{End}(V)$ (siehe Beispiel 4.2.12). Sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Betrachten

$$\mathcal{I}_f := \{\phi \in \mathbb{K}[X] \mid \underbrace{\phi(f)}_{\text{Auswerten von } f} = \underbrace{0}_{\in \mathrm{End}(V)} \}$$

Dann ist $\mathcal{I}_f$ ein Ideal. △

Bemerkung 7.1.13. $\mathcal{I}_f \neq \{0\}$. Ist $\dim(V) = n$, so ist $\dim \operatorname{End}(V) = n^2$. Daher sind $1, f, f^2, f^3, \ldots, f^{n^2}$ linear abhängig; es gibt also eine nicht-triviale Linearkombination von $\underline{0}$, d.h., es gibt $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n^2} \in K$ so dass $\alpha_0 + \alpha_1 f + \alpha_2 f^2 + \cdots + \alpha_{n^2} f^{n^2} = \underline{0}$ und $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n^2}$ sind nicht alle 0. Dann ist $\alpha_{n^2} X^{n^2} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$ ein Polynom in $\mathcal{I}_f \setminus \{0\}$. Das mit ist der Grad des Minimalpolynoms höchstens n^2. Wir werden später sehen, dass $\mathcal{I}_f \setminus \{0\}$ sogar ein Polynom vom Grad höchstens n enthält (dies folgt aus dem Satz von Cayley-Hamilton, Satz 7.1.15).

Der folgende Satz ist eine besondere Eigenschaft des Polynomrings $\mathbb{K}[X]$.

Satz 7.1.14. *Jedes Ideal $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{K}[X]$ mit $\mathcal{I} \neq \{0\}$ enthält ein eindeutiges Polynom ϕ mit folgenden Eigenschaften:*

- *ϕ ist* normiert*, d.h., $\phi = X^d + \cdots$ wobei $d = \operatorname{grad}(\phi)$;*
- *Für jedes $\psi \in \mathcal{I}$ existiert $\psi_q \in \mathbb{K}[X]$ so dass $\psi = \phi \cdot \psi_q$.*

ϕ heißt Minimalpolynom von $\mathcal{I}$*, im Falle von $\mathcal{I}_f$ auch* Minimalpolynom μ_f von f*.*

Beweis. Existenz: Sei d minimaler Grad eines Polynoms aus $\mathcal{I}$, und $\phi \in \mathcal{I}$ vom Grad d und normiert. Für beliebiges $\psi \in \mathcal{I}$ dividieren wir durch ϕ mit Rest (Abschnitt 4.2.7):

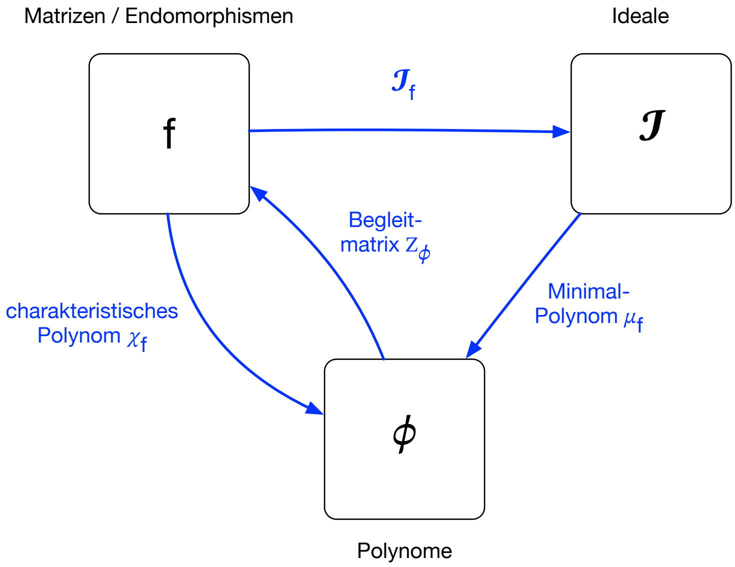
$$\psi = \phi \cdot \psi_q + \psi_r$$

wobei $\psi_r = 0$ oder $\operatorname{grad}(\psi_r) < d$. Falls $\psi_r \neq 0$, dann wäre

$$\psi_r = \underbrace{\psi}_{\in \mathcal{I}} - \underbrace{\underbrace{\phi}_{\in \mathcal{I}} \cdot \underbrace{\psi_q}_{\in \mathbb{K}[X]}}_{\in \mathcal{I}} \in \mathcal{I}$$

ein Widerspruch zur Minimalität von d.

Eindeutigkeit: Falls ϕ' ein anderes Polynom ist mit diesen Eigenschaften, so teilen sich ϕ und ϕ' gegenseitig, was impliziert dass $\operatorname{grad}(\phi) = \operatorname{grad}(\phi') = 0$. Da ϕ und ϕ' normiert sind gilt $\phi = 1 = \phi'$. $\square$



Was ist der Zusammenhang zwischen Minimalpolynom von f und dem charakteristischen Polynom χ_f von f? Zunächst beweisen wir den folgenden wichtigen Satz. Wir erinnern uns: Polynome aus $\mathbb{K}[X]$ können ausgewertet werden im Matrizenring $\mathbb{K}^{n\times n}$ (Beispiel 4.2.11).

Satz 7.1.15 (Cayley-Hamilton)**.** *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Dann gilt*

$$\chi_A^{\mathbb{K}^{n\times n}}(A) = \mathbf{0} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

Also gilt für $f := f_A$

$$\chi_f \in \mathcal{I}_f \text{ und } \mu_f | \chi_f.$$

'Jede Matrix erfüllt ihr eigenes charakteristisches Polynom.'

Bemerkung 7.1.16. Es folgt insbesondere, dass der Grad des Minimalpolynoms höchstens n ist, da der Grad des charakteristischen Polynoms offensichtlich höchstens n ist. Das verbessert die quadratische Schranke aus Bemerkung 7.1.13.

Bemerkung 7.1.17. Satz 7.1.15 hat die folgende Variante für lineare Abbildungen: sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, und $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann gilt

$$\chi_f^{\mathrm{End}\,V}(f) = \underline{0}$$

wobei $\underline{0}\colon V \to V : v \mapsto \mathbf{0}$ die Nullabbildung.

Was ist faul an folgender Rechnung?

$$?? \qquad \chi_A^{\mathbb{K}^{n\times n}}(A) = \det(AE_n - A) = \det(\mathbf{0}) = 0 \qquad ¿¿$$

Beweis von Satz 7.1.15. Zu zeigen: für alle $v \in V$ gilt $\chi_f(f)(v) = \mathbf{0}$.
Zwischenschritt: zeigen, dass es ein $U \leq V$ gibt mit

(a) $v \in U$

(b) U ist *(f-) invariant*, d.h., $\forall u \in U \colon f(u) \in U$.

(c) Für die Einschränkung $g := f|_U \colon U \to U$ (ergibt Sinn wegen (b)) gilt

$$\left(\chi_g^{\operatorname{End} V}(f)\right)(v) = \mathbf{0}.$$

Seien dazu

$$\begin{aligned} u_1 &:= v \\ u_2 &:= f(u_1) \\ u_3 &:= f(u_2) = f^2(v) \\ u_{i+1} &:= f(u_i) = f^i(v) \\ &\dots \end{aligned}$$

Es gibt maximal $n = \dim V$ viele linear unabhängige Vektoren, also:

$$\exists m \leq n : \quad \begin{array}{l} u_1, \dots, u_m \text{ linear unabhängig} \\ u_1, \dots, u_m, u_{m+1} \text{ linear abhängig} \end{array}$$

d.h., es gibt $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ mit

$$u_{m+1} = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m \tag{7.2}$$

Sei $U := \langle u_1, \dots, u_m \rangle$.
Randbemerkung: falls $m = n$ dann ist $U = V$ und $g = f$ und (c) impliziert die Aussage.

- U erfüllt (a). $v = u_1 \in U$.
- U erfüllt (b). Sei $u \in U$, $u = \sum_{i=1}^m \beta_i u_i$. Dann

$$f(u) \overset{f \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^m \beta_i f(u_i) = \sum_{i=1}^m \beta_i u_{i+1} \in U$$

  weil $u_{m+1} \in U$ wegen (7.2).
- Bestimmung von χ_g. Definieren $B' := (u_1, \dots, u_m)$ (Basis von U).

$$M' := M_{B'}^{B'}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_m \end{pmatrix} \qquad \text{Merkregel! (3.12)}$$

denn: $g = f|_U$, d.h., $g(u_i) = f(u_i) = u_{i+1}$ für $i \leq m$, und $g(u_m) = u_{m+1} = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m$. Also (siehe Beispiel 7.1.6)

$$\begin{aligned} \chi_g(\lambda) = \chi_{M'}(\lambda) &= \det(M' - \lambda E) \\ &= (-1)^m(\lambda^m - \alpha_m \lambda^{m-1} - \dots - \alpha_2\lambda - \alpha_1). \end{aligned} \tag{7.3}$$

- g erfüllt (c):

$$\begin{aligned} (\chi_g(f))(v) &= (-1)^m(f^m(v) - \alpha_m f^{m-1}(v) - \dots - \alpha_2 f(v) - \alpha_1 v) && (7.3) \\ &= (-1)^m \underbrace{(u_{m+1} - \alpha_m u_m - \dots - \alpha_2 u_2 - \alpha_1 u_1)}_{=\mathbf{0}} && (\text{Def. von } u_1, \dots, u_{m+1}) \\ &= \mathbf{0} && (7.2) \end{aligned}$$

Wir zeigen nun $\chi_f(f)(v) = \mathbf{0}$.
Sei $B = (u_1, \dots, u_m, w_{m+1}, \dots, w_n)$ Ergänzung von B' zu Basis von V (existiert nach Austauschsatz von Steinitz, Satz 2.4.10). Dann hat $M_B^B(f)$ die Form

$$M := B_B^B(f) = \begin{pmatrix} M' & * \\ \mathbf{0} & M'' \end{pmatrix}$$

wobei $M' \in \mathbb{K}^{n\times n} = M_{B'}^{B'}(g)$ wie eben. Denn für $i \leq m$ ist $f(u_i) \in U$ und daher

$$f(u_i) = \sum_{j=1}^{m} a_j u_j + 0 \cdot w_{m+1} + \dots + 0 \cdot w_n\,.$$

Also

$$\begin{aligned} \chi_f = \chi_M &= \chi_{M'} \cdot \chi_{M''} && (\text{Übung 15}) \\ &= \chi_g \cdot \chi_{M''} = \chi_{M''} \cdot \chi_g && (\text{Polynommultiplikation ist kommutativ}) \end{aligned}$$

Einsetzen von f (Auswerten in $\operatorname{End} V$):

$$\begin{aligned} \chi_f^{\operatorname{End} V}(f)(v) &= \big((\chi_{M''}\chi_g)(f)\big)(v) && (\text{siehe oben}) \\ &= \big(\chi_{M''}(f) \circ \chi_g(f)\big)(v) && (\text{Satz 4.2.10}) \\ &= \chi_{M''}(f)\big(\underbrace{\chi_g(f)(v)}_{=\mathbf{0}}\big) && (\text{Def. Multiplikation in } \operatorname{End} V) \\ &= \chi_{M''}(f)(\mathbf{0}) && (\text{wegen (c)}) \\ &= \mathbf{0} && (\text{denn } \chi_{M''}(f) \text{ ist lineare Abbildung}). \qquad \square \end{aligned}$$

Beispiel 7.1.18. Das Minimalpolynom von $f = \mathrm{id}_V$ ist $\mu_f(X) = (X - 1)$, also verschieden vom charakteristischen Polynom $\chi_f = (X-1)^n$ für $n = \dim V$. △

Beispiel 7.1.19. Eine Abbildung $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt *Involution* falls $f^2 = \mathrm{id}_V$. Das Minimalpolynom von f ist also

$$\mu_f(X) = X^2 - 1 \,.$$

Für Eigenwerte λ einer Involution gilt $\lambda^2 = 1$: Nullstellen von $\mu_f(X)$!
Behauptung: f ist diagonalisierbar, d.h., es gibt eine Basis von V aus Eigenvektoren von f (Lemma 4.3.14 und Definition 4.3.16). Es gilt sogar

$$V = \mathrm{Kern}(f - \mathrm{id}_V) \oplus \mathrm{Kern}(f + \mathrm{id}_V)$$

Denn:

- $\mathrm{Kern}(f - \mathrm{id}_V)$ und $\mathrm{Kern}(f - \mathrm{id}_V)$ sind Eigenräume der Eigenwerte 1 und -1.
- $\mathrm{Kern}(f - \mathrm{id}_V) \cap \mathrm{Kern}(f + \mathrm{id}_V) = \{\mathbf{0}\}$: falls $v \in \mathrm{Kern}(f - \mathrm{id}_V) \cap \mathrm{Kern}(f + \mathrm{id}_V)$, dann gilt $-v = f(v) = v$, also $v = \mathbf{0}$.
- $\mathrm{Kern}(f - \mathrm{id}_V) + \mathrm{Kern}(f + \mathrm{id}_V) = V$: jedes $v \in V$ kann geschrieben werden als

  $$v = \underbrace{\frac{v - f(v)}{2}}_{\in \mathrm{Kern}(f + \mathrm{id}_V)} + \underbrace{\frac{v + f(v)}{2}}_{\in \mathrm{Kern}(f - \mathrm{id}_V)}$$

  Denn: $(f - \mathrm{id}_V)(v + f(v)) = f(v + f(v)) - v - f(v) = f(v) + v - f(v) = 0$, also $v + f(v) \in \mathrm{Kern}(f - \mathrm{id}_V)$.
  Analog: $v - f(v) \in \mathrm{Kern}(f + \mathrm{id}_V)$. △

Das Minimalpolynom gibt uns das meiste von dem, was wir typischerweise vom charakteristischen Polynom bekommen.

Proposition 7.1.20. *Sei V endlichdimensional, $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann gelten:*

- *$\lambda \in \mathbb{K}$ ist Eigenvektor von f genau dann wenn $\mu_f(\lambda) = 0$.*
- *f ist genau dann invertierbar wenn $\mu_f(0) \neq 0$.*

Beweis. Es sei

$$\mu_f = X^d + \alpha_{d-1}X^{d-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$$

Teil 1: Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein EW von f, und $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ ein zugehöriger Eigenvektor, $f(v) = \lambda v$. Dann gilt wegen $f^i(v) = \lambda^i v$

$$\begin{aligned} 0 = \mu_f(f)(v) &= (f^d + \alpha_{d-1}f^{d-1} + \cdots + \alpha_1 f + \alpha_0 \,\mathrm{id}_V)(v) \\ &= \lambda^d v + \alpha_{d-1}\lambda^{d-1} v + \cdots + \alpha_1 \lambda v + \alpha_0 v = \mu_f(\lambda) v \end{aligned}$$

also $\mu_f(\lambda) = 0$ da $v \neq \mathbf{0}$.

Teil 2: Wenn $\mu_f(0) = \alpha_0 \neq 0$, dann können wir $\mu_f(f) = \underline{0}$ umschreiben zu

$$1 = f(f^{d-1} + \alpha_{d-1}f^{d-2} + \cdots + \alpha_1)/-\alpha_0$$

also gilt

$$f^{-1} = \frac{-1}{\alpha_0}(f^{d-1} + \alpha_{d-1}f^{d-2} + \cdots + \alpha_1 \operatorname{id}_V) \,.$$

Umgekehrt, wenn $\mu_f(0) = 0$, dann ist 0 ein Eigenwert nach Teil 1. Also gibt es ein $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ mit $f(v) = 0$, und f ist nicht injektiv, damit nicht invertierbar. □

Definition 7.1.21. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und $f := f_A$ die lineare Abbildung $x \mapsto Ax$. Schreiben

- $\mathcal{I}_A$ für $\mathcal{I}_f$.
- μ_A für μ_f.

Teil 1 von Proposition 7.1.20 in Kombination mit Satz 4.3.9 ergibt direkt die folgende Aussage.

Korollar 7.1.22. *Für $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ haben χ_A und μ_A dieselben Nullstellen.*

Im Gegensatz zum charakteristischen Polynom kann die Berechnung des Minimalpolynoms von A kann aufwendig sein. Allerdings hilft der Satz von Cayley-Hamilton (Satz 7.1.15), da man nicht mehr alle Polynome testen muss, sondern nur noch die Teiler von χ_A. Wir demonstrieren das in den Beweisen der folgenden Propositionen.

Proposition 7.1.23. *Die Begleitmatrix eines normierten Polynoms $\phi \in \mathbb{K}[X]$ hat das Minimalpolynom ϕ, d.h., $\mu_{Z_\phi} = \phi$.*

Beweis. Sei $\phi = X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$. Wir kennen bereits das charakteristische Polynom von Z_ϕ, es gilt nämlich $\chi_{Z_\phi} = (-1)^n\phi$ (Beispiel 7.1.6). Da μ_{Z_ϕ} normiert ist und χ_{Z_ϕ} teilt (Satz 7.1.15), genügt es zu zeigen, dass der Grad von μ_{Z_ϕ} gleich n ist. Offenbar gilt für

$$Z_\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

dass

$$\begin{aligned} Z_\phi e_1 &= e_2 \\ Z_\phi e_2 &= e_3 = Z_\phi^3 e_1 \\ &\vdots \quad \vdots \\ Z_\phi e_{n-1} &= e_n = Z_\phi^{n-1} e_1 . \end{aligned}$$

Angenommen, es gäbe in $\mathcal{I}_{Z_\phi}$ ein normiertes Polynom

$$\psi = X^m + \beta_{m-1}X^{m-1} + \cdots + \beta_1 X + \beta_0$$

vom Grad $m < n$, dann wäre also

$$\begin{aligned}\mathbf{0} = \underbrace{q(Z_\phi)}_{\in \mathbb{K}^{n\times n}} e_1 &= Z_\phi^m e_1 + \beta_{m-1} Z_\phi^{m-1} e_1 + \dots + \beta_1 Z_\phi e_1 + \beta_0 e_1 \\ &= e_{m+1} + \beta_{m-1} e_m + \dots + \beta_1 e_2 + \beta_0 e_1 .\end{aligned}$$

und damit wären die Basisvektoren $e_1, \dots, e_{m+1}$ linear abhängig, ein Widerspruch. □

Proposition 7.1.24. *Das Minimalpolynom von*

$$A := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

ist

$$\mu_A(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) = (-1)^n \chi_A(X) .$$

Beweis. Es ist klar (siehe (4.3)), dass

$$\chi_A(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n).$$

Da μ_A ein Teiler ist von χ_A, genügt es zu zeigen, dass für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ das Polynom $\phi_i(X) := \chi_A(X)/(X - \lambda_i)$ nicht in $\mathcal{I}_f$ liegt. Für $i = n$ berechnen wir

$$\begin{aligned}&(A - \lambda_1 E_n)(A - \lambda_2 E_n) \cdots (A - \lambda_{n-1} E_n) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & 1 & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & \lambda_{n-2} & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & * & \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & \lambda_{n-2} & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}\end{aligned}$$

Die Aussage folgt für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ durch Umsortierung der Faktoren von $\phi_i(X)$. □

Übung 20. Sei $A = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $\mu_A = \operatorname{kgV}(\mu_B, \mu_C)$.

Übung 21. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass $\mu_A = \mu_{A^\top}$.

7.1.7 Minimalpolynom und Diagonalisierbarkeit

Wiederholung (Abschnitt 4.3.4): Wie entscheiden wir, ob eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diagonalisierbar ist?

1. Berechne die Eigenwerte von A.
2. Berechne die zugehörigen Eigenräume.
3. Entscheide, ob man eine Basis aus Eigenvektoren finden kann.

Insbesondere: wenn $\chi_A = (X - \lambda_1)\cdots(X - \lambda_n)$ für paarweise verschiedene $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, dann ist A diagonalisierbar (Bemerkung 4.3.19). Wenn wir hier das charakteristische Polynom durch das Minimalpolynom ersetzen, erhalten wir sogar ein hinreichendes *und* notwendiges Kriterium für Diagonalisierbarkeit!

Satz 7.1.25 (Minimalpolynom and Diagonalisierbarkeit)**.** *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die paarwise verschiedenen Eigenwerte von A. Dann sind äquivalent:*

(1) *A ist diagonalisierbar;*

(2) $(A - \lambda_1 E_n)\cdots(A - \lambda_k E_n) = \mathbf{0}$*;*

(3) $\mu_A(X) = (X - \lambda_1)\cdots(X - \lambda_k)$*.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Definiere $\phi(X) := (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_k) \in \mathbb{K}[X]$ und $\phi_i = \phi/(X-\lambda_i)$. Es ist zu zeigen, dass $\phi(A) = \mathbf{0}$. Sei $v \in \mathbb{K}^n$ beliebig. Wir zeigen, dass $\phi(A)v = \mathbf{0}$. Da A per Annahme diagonalisierbar ist, gibt es nach Satz 4.3.18 (3c) eine Basis von $\mathbb{K}^n$ aus Eigenvektoren von A. Also kann man v schreiben als Summe $u_1 + \cdots + u_k$ wobei für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ entweder $u_i = \mathbf{0}$ oder u_i ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ist.

$$\begin{aligned}
\phi(A)v &= \phi(A)(u_1 + \cdots + u_k) \\
&= \phi(A)u_1 + \cdots + \phi(A)u_k \\
&= \phi_1(X - \lambda_1)(A)u_1 + \cdots + \phi_k(X - \lambda_k)(A)u_k \\
&= \phi_1(A - \lambda_1 E_n)u_1 + \cdots + \phi_k(A - \lambda_k E_n)u_k \\
&= \phi_1(A)(Au_1 - \lambda_k u_1) + \cdots + \phi_k(A)(Au_k - \lambda_k u_k) = \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (3): Nach (2) ist $\phi \in \mathcal{I}_A$ und damit $\mu_A | \phi$. Umgekehrt gilt $\phi | \mu_A$: zeigen dazu, dass jeder Faktor $(X-\lambda_i)$ von ϕ ein Teiler von μ_A ist. Dafür genügt es zu zeigen, dass λ_i eine Nullstelle ist von μ_A (Lemma 4.2.14). Satz 4.3.9 impliziert, dass λ_i eine Nullstelle ist von χ_A, also auch eine von μ_A nach Korollar 7.1.22. Da sowohl μ_A also auch ϕ normiert sind, muss also gelten $\mu_A = \phi$.

(3) $\Rightarrow$ (1): Beweis per Induktion nach n. Für $n = 1 = k$ ist A sicher diagonalisierbar. Sei nun $n > 1$, und sei die Aussage richtig für alle $m < n$.

Behauptung: für $f := f_A$ und $V := \mathbb{K}^n$ sind $\mathrm{Kern}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_V)$ und $\mathrm{Bild}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_V)$ komplementär, d.h. (Definition 2.4.14)

$$\mathrm{Kern}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_V) \oplus \mathrm{Bild}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_V) = V.$$

Wegen der Dimensionsformel $\dim \mathrm{Bild} + \dim \mathrm{Kern} = n$ (3.3.5) genügt es zu zeigen, dass

$$\mathrm{Kern}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_V) + \mathrm{Bild}(f - \lambda_1 \mathrm{id}_V) = V\,.$$

Dividieren $(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_k)$ mit Rest durch $(X-\lambda_1)$, und erhalten $\phi,\psi \in \mathbb{K}[X]$, $\operatorname{grad}(\psi) < 1$, so dass

$$(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_k) = \phi(X-\lambda_1) + \psi = (X-\lambda_1)\phi + \psi\,.$$

Also ist $\psi \in K \setminus \{0\}$, da $(X-\lambda_1)$ kein Teiler von $(X-\lambda_i)$ für $i \in \{2,\dots,k\}$ ist. Setzen f ein, stellen um, und erhalten

$$(f-\lambda_2\operatorname{id}_V)\cdots(f-\lambda_m\operatorname{id}_V) - (f-\lambda_1\operatorname{id}_V)\phi(f) = \psi\operatorname{id}_V\,. \tag{7.4}$$

Sei nun $v \in V$ beliebig. Dann folgt aus (7.4), dass

$$\psi v = \underbrace{(f-\lambda_2\operatorname{id}_V)\cdots(f-\lambda_m\operatorname{id}_V)(v)}_{=:v_1} - \underbrace{(f-\lambda_1\operatorname{id}_V)\phi(f)(v)}_{=:v_2}.$$

Wir haben $(f-\lambda_1\operatorname{id}_V)(v_1) = \mathbf{0}$, da $\mu_f(f) = \underline{0}$. Also $v_1 \in \operatorname{Kern}(f-\lambda_1\operatorname{id}_V)$. Ausserdem haben wir

$$v_2 = (f-\lambda_1\operatorname{id}_V)\phi(f)(v) \in \operatorname{Bild}(f-\lambda_1\operatorname{id}_V).$$

Weil $\frac{1}{\psi}v_1 + \frac{1}{\psi}v_2 = v$, folgt die Behauptung.

Da $\dim(\operatorname{Kern}(f-\lambda_1\operatorname{id}_V)) > 0$, gilt $\dim(\operatorname{Bild}(f-\lambda_1\operatorname{id})) < n$. Wenden Induktionsvoraussetzung an auf $U := \operatorname{Bild}(f-\lambda_1\operatorname{id}) \leq V$. Da $f(U) \subseteq U$, ist die Einschränkung f_U von f auf U aus $\operatorname{End}(U)$. Ferner ist χ_{f_U} ein Teiler von μ_f. Also zerfällt χ_{f_U} in paarweise verschiedene Linearfaktoren, und f_U ist diagonalisierbar nach Induktionsvoraussetzung.

Sei $v_1,\dots,v_m$ eine Basis von U aus Eigenwerten von f_U, und sei $v_{m+1},\dots,v_n$ eine Basis von $\operatorname{Kern}(f-\lambda_1\operatorname{id}) = \operatorname{Eig}_{\lambda_1}(f)$. Da $U \cap \operatorname{Kern}(f-\lambda_1\operatorname{id}) = \{\mathbf{0}\}$, ist $v_1,\dots,v_m,v_{m+1},\dots,v_n$ eine Basis von V aus Eigenvektoren von f. Aussage folgt aus dem ersten Diagonalisierbarkeitskriterium (Satz 4.3.18). □

Und was, wenn f nicht diagonalisierbar ist?

7.1.8 Zyklische Unterräume

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die folgende Definition extrahiert wichtige Ideen aus dem Beweis des Satzes von Cayley-Hamilton (Satz 7.1.15).

Definition 7.1.26. Sei $f \in \operatorname{End}(V)$. Dann heißt $S \leq V$ *invariant unter* f (oder f-invariant) falls

$$f(S) \subseteq S\,.$$

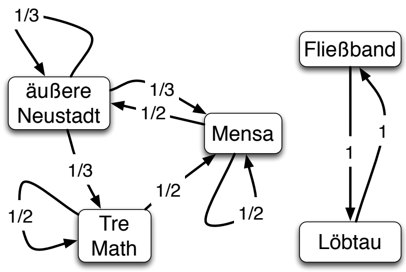
Bemerkung 7.1.27. $f|_S \in \operatorname{End}(S)$.

Bemerkung 7.1.28. Für alle $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned}\langle v\rangle \text{ ist } f\text{-invariant} \quad &\Leftrightarrow \quad (v \text{ ist Eigenvektor von } f \text{ oder } v = \mathbf{0}) \\ &\Leftrightarrow \quad f(v) \in \langle v\rangle.\end{aligned}$$

Bemerkung 7.1.29. Die Eigenräume von f (Definition 4.3.3) sind invariant.

Beispiel 7.1.30. Wir betrachten wieder das folgende System (Beispiel 4.3.25).



Beschreibung durch Matrix:

$$\begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \text{äußere Neustadt} \\ \text{Mensa} \\ \text{Tre Math} \\ \text{Fließband} \\ \text{Löbtau} \end{array} \end{array}$$

Dann ist $\langle(0.3, 0.4, 0.3, 0, 0)\rangle$ invariant. Weiterhin ist $\langle(0, 0, 0, 0.5, 0.5)\rangle$ invariant. $\triangle$

Ziel dieses Abschnittes: Dekomposition

$$V = S_1 \oplus \cdots \oplus S_k$$

für invariante $S_i \leq V$, so dass die Matrixdarstellung von $f_i := f|_{S_i}$ durch $\mu_{f_i}(X)$ eindeutig bestimmt.

Definition 7.1.31. Für $v \in S \setminus \{\mathbf{0}\}$, definiere

$$Z_v := \langle v, f(v), f^2(v), \dots \rangle$$

der *(von v erzeugte) zyklische Unterraum* von V.

Da $\dim(V) = n$ existiert $k \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$f^k(v) \in \langle v, f(v), f^2, \dots, f^{k-1}(v)\rangle\ .$$

Lemma 7.1.32. *Sei $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, und sei $k \in \mathbb{N}$ kleinstmöglich, so dass $f^k(v) \in \langle v, f(v), f^2, \dots, f^{k-1}(v)\rangle = V_v$ Dann ist Z_v ist invariant unter f, und $B = (v, f(v), \dots, f^{k-1}(v))$ ist Basis für Z_v. Ausserdem gilt (siehe Bild 7.2)*

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_{k-1} \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

wobei $f^k(v) = \alpha_0 v + \alpha_1 f(v) + \cdots + \alpha_{k+1} f^{k-1}(v)$.

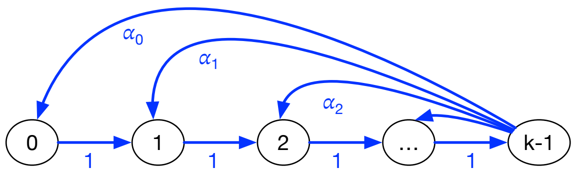


Abbildung 7.2: Illustration of the matrix in (7.5).

Beweis. Die Vektoren $v, f(v), \dots, f^{k-1}(v)$ sind linear unabhängig, da k kleinstmöglich gewählt. Z.z.:

$$\langle B\rangle = Z_v = \langle v, f(v), f^2(v), \dots\rangle$$

Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeigen per Induktion nach m, dass $f^m(v) \in \langle B\rangle$.
Falls $m < k$, dann $v^m(v) \in B$.
Angenommen $f^{m-1}(v) = \beta_0 v + \beta_1 f(v) + \dots + \beta_{k-1} f^{k-1}(v)$. Dann ist

$$f^m(v) = \beta_0 f(v) + \beta_1 f^2(v) + \dots + \beta_{k-1} \underbrace{f^k(v)}_{\in\langle B\rangle} \in \langle B\rangle\ .$$

Sei nun $u \in Z_v$ beliebig. Dann gilt

$$u = \gamma_0 \underbrace{v}_{\in\langle B\rangle} + \gamma_1 \underbrace{f(v)}_{\in\langle B\rangle} + \dots + \gamma_{k-1} \underbrace{f^{k-1}(v)}_{\in\langle B\rangle} \in \langle B\rangle$$

Die Matrixdarstellung von $f|_{Z_v}$ bezüglich B:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} f(v) & f(f(v)) & \cdots & f(f^{k-2}(v)) & f(f^{k-1}(v)) \end{pmatrix} \\ = &\begin{pmatrix} v & f(v) & \cdots & f^{k-2}(v) & f^{k-1}(v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_{k-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(Merkregel, (3.12)! Spalten sind Koordinaten der Bilder der Einheitsvektoren.) □

Satz 7.1.33 (Zerlegung in zyklische Unterräume)**.** *Sei V n-dimensional und $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann gibt es $v_1, \dots, v_k \in V$ so dass*

$$V = Z_{v_1} \oplus \dots \oplus Z_{v_k}$$

und V hat eine Basis B so dass

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} Z_{\phi_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_{\phi_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & Z_{\phi_k} \end{pmatrix}.$$

für normierte $\phi_1, \dots, \phi_k \in \mathbb{K}[X]$.

Beweis. Per Induktion nach n. Sei $v \in V$ so dass $m = \dim Z_v$ größtmöglich. Falls $m = n$ ist nichts zu zeigen. Betrachte $g\colon V \to \mathbb{K}^m$ definiert durch

$$g(u) := \begin{pmatrix} h(u) \\ h(f(u)) \\ \vdots \\ h(f^{m-1}(u)) \end{pmatrix}$$

wobei $h\colon V \to \mathbb{K}$ Linearform mit $h(v) = \cdots = h(f^{m-2}(v)) = 0$ und $h(f^{m-1}(v)) = 1$. $(v, \dots, f^{m-1}(v)$ sind linear unabhängig.)

Behauptung 1: $g|_{Z_v}\colon Z_{v_1} \to \mathbb{K}^m$ ist Isomorphismus. Die Darstellungsmatrix dieser Abbildung bezüglich der Basis $B = (v_1, f(v), \dots, f^{m-1}(v))$ von Z_v und der Standardbasis von $\mathbb{K}^m$ ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & 1 & * \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

also offensichtlich invertierbar.

Behauptung 2: $\operatorname{Kern}(g)$ ist f-invariant. Sei $u \in \operatorname{Kern}(g)$, also

$$g(u) = \begin{pmatrix} h(u) \\ h(f(u)) \\ \vdots \\ h(f^{m-1}(u)) \end{pmatrix} = \mathbf{0}\,.$$

Dann ist

$$g(f(u)) = \begin{pmatrix} h(f(u)) \\ h(f^2(u)) \\ \vdots \\ h(f^{m-1}(u)) \\ h(f^m(u)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ h(f^m(u)) \end{pmatrix}$$

Da $f^m(u) \in \langle u, f(u), \dots, f^{m-1}(u) \rangle$ für alle u ist $h(f^m(u)) = 0$. Also $f(u) \in \operatorname{Kern}(g)$ wie behauptet.

Behauptung 3: $V = Z_v \oplus \operatorname{Kern}(g)$. Es gilt $Z_v \cap \operatorname{Kern}(f) = \{\mathbf{0}\}$ da $g|_{Z_v}$ injektiv. Ausserdem

$$\dim Z_v + \dim \operatorname{Kern}(g) = \dim \operatorname{Bild}(g) + \dim \operatorname{Kern}(g) = \dim(V)$$

also $V = Z_v + \operatorname{Kern}(g)$.

Wenden nun die Induktionsvorraussetzung an auf die Einschränkung von f auf $\operatorname{Kern}(g)$, und der Satz folgt. $\square$

Beispiel 7.1.34. Die Darstellung von f aus Satz 7.1.33 ist nicht eindeutig: die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = Z_{X^3-1}$$

ist bereits von der Form in Satz 7.1.33. Auf der anderen Seite gibt es eine Basis B, so dass

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{X-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Z_{X^2-1} \end{pmatrix}. \qquad \triangle$$

7.1.9 Die Frobenius Normalform

Die Frobenius Normalform (bisweilen auch *rationale Normalform*) liefert eine Klassifikation von quadratischen Matrizen bis auf Ähnlichkeit.

Satz 7.1.35 (Frobenius Normalform)**.** *Sei V n-dimensional und $f \in \mathrm{End}(V)$. Dann hat V eine Basis B so dass*

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} Z_{\phi_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_{\phi_2} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & Z_{\phi_k} \end{pmatrix}.$$

mit der Eigenschaft dass $\phi_i | \phi_{i-1}$ für alle $i \in \{2, \ldots, k\}$; die Polynome $\phi_1, \ldots, \phi_k$ sind hierbei eindeutig.

Die Polynome $\phi_1, \ldots, \phi_k$ heißen auch *Ähnlichkeitsinvarianten* (denn ähnliche Matrizen haben die gleichen Ähnlichkeitsinvarianten), und die Untermatrizen $Z_{\phi_1}, \ldots, Z_{\phi_k}$ die *Kästchen* der Frobenius Normalform.

Beweis. Wie im Beweis der Zyklendekomposition (Satz 7.1.33) wählen wir $v_1 \in V$ so, dass $m = \dim Z_{v_1}$ größtmöglich. Mit dieser Wahl gilt

$$f^m(v_1) = \alpha_0 v_1 + \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_{m-1} f^{m-1}(v_1) \tag{7.6}$$

für $\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{K}$. Sei

$$\phi_1(X) := X^m - \alpha_{m-1} X^{m-1} - \cdots - \alpha_0 X$$

Behauptung 1: $\phi_1(f) = \underline{0}$, d.h., $\phi_1(f)(u) = 0$ für alle $u \in V$. Für $u = v_1$ stimmt das wegen (7.6). Für $u = f(v_1)$ haben wir

$$\begin{aligned} & f^m(f(v_1)) - \alpha_{m-1} f^{m-1}(f(v_1)) - \cdots - \alpha_1 f(f(v)) - \alpha_0 f(v_1) \\ = {} & f(f^m(v_1) - \alpha_{m-1} f^{m-1}(v_1) - \cdots - \alpha_1 f(v_1) - \alpha_0 v_1) \\ = {} & f(0) = 0 \end{aligned}$$

Analog für $u = f^2(v_1), \dots, u = f^{m-1}(v_1)$, und die Aussage folgt für $u \in Z_{v_1}$.
Aus der Zyklendekomposition (Satz 7.1.33) folgt, dass $V = Z_{v_1} \oplus W$. Sei nun $u \in W$.
Da m größtmöglich, gilt

$$\begin{aligned} f^m(v_1 + u) &= \gamma_{m-1} f^{m-1}(v_1 + u) + \dots + \gamma_0(v_1 + u) \\ &= \underbrace{\underbrace{\gamma_{m-1} f^{m-1}(v_1) + \dots + \gamma_0(v_1)}_{\in Z_{v_1}}}_{= f^m(v_1)} + \underbrace{\underbrace{\gamma_{m-1} f^{m-1}(w) + \dots + \gamma_0(u)}_{\in W}}_{= f^m(u)} \end{aligned}$$

Also gilt insbesondere

$$\gamma_{m-1} f^{m-1}(v_1) + \dots + \gamma_0(v_1) = f^m(v_1) = \alpha_{m-1} f^{m-1}(v_1) + \dots + \alpha_0(v_1)$$

und da $v_1, f(v_1), \dots, f^{m-1}(v_1)$ linear unabhängig, gilt $\alpha_i = \gamma_i$ für $i \in \{0, \dots, m-1\}$.
Also

$$\begin{aligned} \phi_1(f)(u) &= \phi_1(f)(v_1) + \phi_1(f)(u) \\ &= \phi_1(f)(v_1 + u) && \text{(Linearität von } \phi_1(f)) \\ &= f^m(v_1 + u) - \alpha_{m-1} f^{m-1}(v_1 + u) - \alpha_0(v_1 + u) && \text{(Definition von } \phi_1) \\ &= \gamma_{m-1} f^{m-1}(v_1 + u) + \dots + \gamma_0(v_1 + u) && \text{(Definition von } \gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}) \\ &\quad - \alpha_{m-1} f^{m-1}(v_1 + u) - \alpha_0(v_1 + u) \\ &= 0 && \text{(da } \alpha_i = \gamma_i) \end{aligned}$$

Behauptung 2: $\phi_1 = \mu_f$ (und ist damit eindeutig). Wissen bereits, dass $\phi_1(f) = 0$, also $\mu_f | \phi_1$. Auf der anderen Seite sind $v_1, f(v_1), \dots, f^{m-1}(v_1)$ linear unabhängig, also $\operatorname{grad}(\mu_f) \geq m$. Da ϕ_1 und μ_f normiert gilt $\phi_1 = \mu_f$.

Wählen nun $v_2 \in W$ und $\phi_2(X)$ auf die gleiche Art wie v_1 und $\phi_1(X)$.

Behauptung 3: ϕ_2 teilt ϕ_1. Da $\operatorname{grad} \phi_2 \leq \operatorname{grad} \phi_1$ können wir schreiben

$$\phi_1 = \psi_q \phi_2 + \psi_r$$

für $\psi_q, \psi_r \in \mathbb{K}[X]$ mit $\operatorname{grad} \psi_r < l := \operatorname{grad} \phi_2$ (Polynomdivision).

$$\begin{aligned} 0 &= \phi_1(f)(v_2) && \text{(Nach Behauptung 1.)} \\ &= \psi_q(f)(\underbrace{\phi_2(f)(v_2)}_{=0}) + \psi_r(f)(v_2) \\ &= \psi_r(f)(v_2) \\ &= \beta_0 v_2 + \beta_1 f(v_2) + \dots + \beta_{l-1} f^{l-1}(v_2) && \text{für } \beta_0, \dots, \beta_{l-1} \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Da $v_2, f(v_2), \dots, f^{l-1}(v_2)$ linear unabhängig, gilt $\beta_0 = \beta_1 = \dots = \beta_{l-1} = 0$.
Also $\psi_r = 0$ und ψ_2 teilt ψ_1.

Behauptung 4: ϕ_2 ist eindeutig. Obwohl Z_{v_1} das nicht ist!
Es sei v_1' so, dass

$$Z_{v_1'} \oplus W' = V = Z_{v_1} \oplus W .$$

Wir wissen bereits, dass es Basen B, B' von V gibt, so dass

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} Z_{\phi_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A \end{pmatrix} \text{ und } M_{B'}^{B'}(f) = \begin{pmatrix} Z_{\phi_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A' \end{pmatrix}$$

Es genügt daher zu zeigen, dass $\mu_A = \mu_{A'}$.
Sei $\psi \in \mathbb{K}[X]$. Z.z.: $\psi(A) = 0 \Leftrightarrow \psi(A') = 0$.
Es gibt invertierbare Matrix $T \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit

$$T^{-1}\begin{pmatrix} Z_{\phi_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} Z_{\phi_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A' \end{pmatrix} .$$

Also

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi(Z_\phi) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \psi(A') \end{pmatrix} &= \psi \begin{pmatrix} Z_\phi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A' \end{pmatrix} \\ &= \psi(T^{-1}\begin{pmatrix} Z_{\phi_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A \end{pmatrix} T) \\ &= T^{-1}\begin{pmatrix} \psi(Z_{\phi_1}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \psi(A) \end{pmatrix} T \end{aligned}$$

Insbesondere haben also die Matrizen

$$\begin{pmatrix} \psi(Z_\phi) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \psi(A') \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \psi(Z_{\phi_1}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \psi(A) \end{pmatrix}$$

den gleichen Rang, was das Gewünschte zeigt. □

Bemerkung 7.1.36. Falls $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}'$ und $A \in \mathbb{K}^{n\times n} \subseteq (\mathbb{K}')^{n\times n}$, so spielt es für die Frobenius Normalform keine Rolle, ob wir bezüglich $\mathbb{K}$ oder bezüglich $\mathbb{K}'$ rechnen. Wenn wir beispielsweise starten mit einer Matrix mit rationalen Einträgen, dann sind die Koeffizienten von $\phi_1(X), \ldots, \phi_k(X)$ und damit der Frobenius Normalform (die wie bereits erwähnt auch *rationale Normalform* genannt wird) ebenfalls rational.

Beispiel 7.1.37. Seien $\phi, \psi \in \mathbb{K}[X]$ teilerfremd, und

$$A := \begin{pmatrix} Z_\phi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Z_\psi \end{pmatrix} .$$

Dann hat A die Frobenius Normalform $Z_{\phi\psi}$. Es gilt $\mu_A = \phi\psi = \chi_A$: denn wenn $\theta \in \mathbb{K}[X]$ so ist, dass

$$\mathbf{0} = \theta(A) = \begin{pmatrix} \theta(Z_\phi) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \theta(Z_\psi) \end{pmatrix}$$

dann gilt $\theta(Z_\phi) = \theta(Z_\psi) = \mathbf{0}$ und θ wird von sowohl ϕ und als ψ geteilt. △

Beispiel 7.1.38. Das Minimalpolynom beschreibt eine lineare Abbildung nicht eindeutig. Betrachten dazu die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist $\chi_A(X) = X^4 = \chi_B(X)$ und $\mu_A(X) = X = \mu_B(X)$ aber A und B haben nicht die gleiche Frobenius Normalform: B hat die Ähnlichkeitsinvarianten $\phi_1 = \phi_2 = X^2$, während $p_1 = X^2$, $p_2 = X$, $p_3 = X$ die für A sind. △

Übung 22. Bestimmen Sie alle $\mathbb{K}^{n\times n}$-Matrizen, bei denen die Frobenius-Normalform aus n Kästchen besteht.

Übung 23. Zeigen Sie, dass die Frobenius Normalform einer Diagonalmatrix D mit paarwise verschiedenen Diagonaleinträgen gleich der Begleitmatrix von χ_A ist.

Korollar 7.1.39. *Für $M \in \mathbb{K}^{n\times n}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Die Frobenius Normalform von M hat nur ein Kästchen, d.h., ist von der Gestalt Z_ϕ.*
2. *Die Frobenius Normalform von M ist von der Gestalt Z_{μ_M};*
3. *$\mu_M = \chi_M$.*

Beweis. 1 ⇒ 2: wenn die Frobenius Normalform von M von der Gestalt Z_ϕ ist, dann gilt $\phi = \mu_M$ nach dem Beweis der Eindeutigkeit der Frobenius Normalform (Satz 7.1.35).

2 ⇒ 3: Sei $\phi := \mu_M$.

$$\begin{aligned} \mu_M &= \mu_{Z_\phi} && \text{(Voraussetzung)} \\ &= \phi = \chi_M && \text{(Proposition 7.1.23).} \end{aligned}$$

3 ⇒ 1: Wenn die Frobenius Normalform eine weitere Ähnlichkeitsinvariante ϕ_2 neben ϕ_1 besitzt, denn wäre $\phi_1\phi_2$ ein Teiler von χ_M. Da $\operatorname{grad}(\phi_2) > 0$ folgt daraus, dass $\phi_1 = \mu_M \neq \chi_M$. □

Wir haben bereits die Existenz und Eindeutigkeit der Frobenius Normalform bewiesen (Satz 7.1.35), aber bisher noch keinen Algorithmus kennengelernt, um diese Normalform zu berechnen. Tatsächlich gibt es sogar einen Algorithmus, der dies in polynomieller Zeit leistet, wie wir in Abschnitt 7.2.5 sehen werden.

7.1.10 Die Jordansche Normalform

Genau wie die Frobenius Normalform klassizifiziert die Jordan Normalform Matrizen bis auf Ähnlichkeit. Allerdings existiert die jordansche Normalform nur für trigonalisierbare Matrizen.

Definition 7.1.40. Man nennt $f \in \mathrm{End}(V)$ *nilpotent* falls $f^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Analog dazu heißt $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *nilpotent* falls $A^k = \mathbf{0}$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Vielleicht wichtigste Konsequenz der Jordanschen Normalform vorweg:

Satz 7.1.41 (Jordan-Chevalley-Zerlegung)**.** *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann ist $A = D + N$, wobei*

- *D diagonalisierbar,*
- *N nilpotent ("besonders schlimm nicht diagonalisierbar"), und*
- *$DN = ND$;*

hierbei sind D und N eindeutig.

Beweisskizze. Es sei $f \in \mathrm{End}(V)$ gegeben durch $x \mapsto Ax$. Nach dem Hauptsatz der Algebra zerfällt das Minimalpolynom in Linearfaktoren

$$\mu_f(X) = (X - \lambda_1)^{l_1} \cdots (X - \lambda_k)^{l_k}$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarweise verschieden. Sei

$$M_i := \mathrm{Kern}((f - \lambda_i E_n)^{l_i}) =: \mathrm{Hau}_{\lambda_i}(f)$$

der sogenannte *Hauptraum zum Eigenwert* λ_i (ist f-invariant). (Für Eigenwerte von A der algebraischen Vielfachheit 1 ist der Hauptraum gleich dem Eigenraum.) Dann gilt

$$V = M_1 \oplus \cdots \oplus M_k$$

(Peter Petersen, *Linear Algebra*, Abschnitt 2.8.). Expand
Wir definieren $f_D, f_N \in \mathrm{End}(V)$ durch

$$\begin{aligned}(f_D)|_{M_i} &:= \lambda_i \,\mathrm{id}_{M_i}\\ (f_N)|_{M_i} &:= (f - \lambda_i \,\mathrm{id})|_{M_i}\end{aligned}$$

Sei B eine Basis von V zusammengesetzt aus den Basen für $M_1, \dots, M_k$; definieren $D := M_B^B(f_D)$ und $N := M_B^B(f_N)$. Offensichtlich ist $f = f_D + f_N$ und $A = D + N$. Ausserdem ist D in Diagonalform, und $DN = ND$.

Achtung: für $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \lambda_1 b\\ 0 & 0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0 & \lambda_2 b\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

Aber Beispiel für Situation bei $A = D + N$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & 0 & 0 \\ * & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & * & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Es gilt $\mathbf{0} = \mu_f(f) = (f - \lambda_1 \operatorname{id}_V)^{l_1} \cdots (f - \lambda_k \operatorname{id}_V)^{l_k}$, und es folgt, dass $N^n = \mathbf{0}$.

Expand

Eindeutigkeit: Peter Petersen, *Linear Algebra*, Übung 14 in Abschnitt 2.8. □

Beispiel 7.1.42. Betrachte

$$J := \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix}}_{=D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}}_{=N} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

Dann ist $\mu_J(X) = (X - \lambda_1)^n = \pm\chi_J(X)$ (Proposition 7.1.24). △

Lemma 7.1.43. *Sei ϕ das Polynom $(X - \lambda)^m$. Dann ist Z_ϕ ähnlich zu einer Matrix der Gestalt*

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{m \times m}. \tag{7.7}$$

Expand

Beweis. TODO □

$J_m(\lambda)$ aus (7.7) heißt *Jordankästchen* der Größe m zum (Eigen-)wert $\lambda \in \mathbb{K}$. Bausteine für die Jordan Normalform! Spezialfall $m = 1$:

$$J_m(\lambda) = (\lambda) \in \mathbb{K}^{1 \times 1}$$

Satz 7.1.44 (Jordan Normalform)**.** *Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und das charakteristische Polynom zerfalle in Linearfaktoren:*

$$\chi_A(X) = (\lambda_1 - X)^{m_1} \cdots (\lambda_r - X)^{m_r}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$*: Eigenwerte von A*
$m_1, \dots, m_r$*: algebraische Vielfachheiten.*

$n_1, \ldots, n_r$: geometrische Vielfachheiten.
Dann existiert eine zu A ähnliche Matrix J der Gestalt

$$\begin{pmatrix} J_{s(1,1)}(\lambda_1) & & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & & \\ & & J_{s(1,n_1)}(\lambda_1) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & J_{s(r,1)}(\lambda_r) & & \\ & & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & & J_{s(r,n_r)}(\lambda_r) \end{pmatrix}.$$

Zu jedem Eigenwert λ_i gibt es n_i Jordankästchen $J_{s(i,1)}(\lambda_i), \ldots, J_{s(i,n_i)}(\lambda_i)$, deren Länge sich zu m_i aufsummiert, d.h., $\sum_{j=1} s(i,j) = m_i$.
Die Gesamtanzahl der Jordankästchen ist demnach $t := \sum_{i=1}^{r} n_i$.

Die Matrix J heißt *Jordansche Normalform* und ist bis auf die Reihenfolge der Jordankästchen eindeutig. Kann eindeutig gemacht werden durch Festlegung $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r$ und $s_{i,1} \geq s_{i,j} \geq \cdots \geq s_{i,n_i}$.

Bemerkung. Aus der Jordanschen NF lassen sich sofort ablesen:

- die Eigenwerte: die Hauptdiagonalelemente
- die algebraischen Vielfachheiten von EW λ:
  die Anzahl der λ in Hauptdiagonale.
- die geometrischen Vielfachheiten von EW λ:
  die Anzahl der Jordankästchen zu Eigenwert λ.
- das charakteristische Polynom in faktorisierter Form.

($\rightsquigarrow$ Klassifikation durch charakteristische Daten: brauchen aber alle Werte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, $n_1, \ldots, n_r$, $s(1,1), \ldots, s(r, n_r)$.)

Beweisskizze. Sei $f := f_A \in \mathrm{End}(V)$. Wie im Beweis von Satz 7.1.41 schreiben wir $f = f_D + f_N$ für f_D diagonalisierbar und f_N nilpotent. Dann zerlegen wir V in Eigenräume für f_D:

$$V = \mathrm{Kern}(f_D - \lambda_1 \,\mathrm{id}) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Kern}(f_D - \lambda_k \,\mathrm{id})$$

Die Eigenräume sind f_N-invariant: sei v so, dass $(f_D - \lambda_1 \,\mathrm{id})(v) = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} (f_D - \lambda_1 \,\mathrm{id})(f_N v) &= (f_D f_N - \lambda_1 \,\mathrm{id}\, f_N)(v) \\ &= f_N \underbrace{(f_D - \lambda_1 \,\mathrm{id})(v)}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Zeigen die Aussage für f_N mit $f_N^n = 0$. Frobenius NF: Ähnlichkeitsinvarianten alle von der Gestalt X^k, also sehen die Blöcke der Frobenius NF so aus:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Expand

Aussage folgt durch Wahl geeigneter Basis. □

7.1.11 Beispiele

Beispiele zur Berechnung der Frobenius Normalform, und, falls möglich, der Jordanschen Normalform (letzteres kann abhängen vom Körper, in dem wir rechnen).

Beispiel 7.1.45.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Was sind die f_A-invarianten Unterräume von $V = \mathbb{K}^3$?

Bild malen! Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Für Frobenius Normalform: suchen $v_1 \in V$ so dass $\dim Z_{v_1}$ größtmöglich.

Wähle $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, erhalten $f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $f^2(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2f(v_1)$.

Dann ist $\dim Z_{v_1} = 2$.

Geht noch besser: Wähle $v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, erhalten

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } f^2(v_1) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

allesamt linear unabhängig, und damit ist $Z_{v_1} = V$ von größtmöglicher Dimension. Haben

$$f^3(v_1) = (8, 1, 8) = (12, 3, 12) - (4, 2, 4) = 3f^2(v_1) - 2 \cdot f(v_1) + 0 \cdot v_1 \,.$$

Mit Basis $B = (v_1, f(v_1), f^2(v_1))$ ist

$$M_B^B(f_A) = Z_{\phi_1}$$

für $\phi_1(X) = X^3 - 3X^2 + 2X = \mu_A(X)$. Die Frobenius Normalform von A ist also

$$M_B^B(f_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Und Diagonalisierbarkeit?
Nur dass man die Matrix durch elementare Zeilenumformungen in Diagonalform bringen kann, bedeutet noch nicht, dass die Matrix diagonalisierbar ist! (Sonst hätten wir den ganzen Aufwand im Kapitel 7.1.4 ja nicht betreiben müssen.)

- Charakteristisches Polynom bestimmen

$$\begin{aligned}\chi_A(X) = \det(A - XE_3) &= (1-X)^3 - (1-X) = -X^3 + 3X^2 - 2X \\ &= -X(X^2 - 3X + 2) = -X(X-1)(X+2)\end{aligned}$$

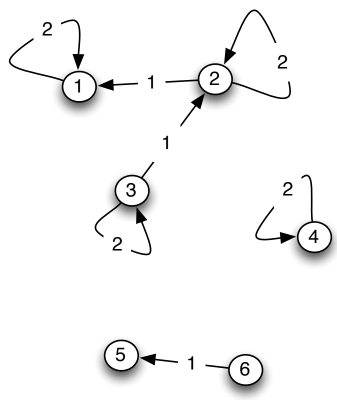
  Drei verschiedene Eigenwerte bei $\dim V = 3$: haben Basis aus Eigenvektoren, ist diagonalisierbar (erstes Diagonalisierungskriterium, Satz 4.3.18).

- Minimalpolynom zerfällt in paarweise verschiedene Linearfaktoren (zweites Diagonalisierungskriterium, Satz 7.1.25). △

Beispiel 7.1.46. Die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist nicht diagonalisierbar, aber bereits in Jordan Normalform.



Zwei Eigenwerte:

- $\lambda_1 = 2$, algebraische Vielfachheit 4, geometrische Vielfachheit 2.
- $\lambda_2 = 0$, algebraische Vielfachheit 2, geometrische Vielfachheit 1.

Charakteristisches Polynom:

$$\chi_B(X) = (2-X)^4 X^2$$

△

Beispiel 7.1.47.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}$$

1. Eigenwerte bestimmen.

$$\chi_B(X) = \det(A - XE_6) = (2-X)^5(3-X)$$

   Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \qquad && \text{algebraische Vielfachheit } m_1 = 5 \\ \lambda_2 &= 3 && \text{algebraische Vielfachheit } m_2 = 1 \end{aligned}$$

   Jordansche Normalform existiert also.

2. Basen der Eigenräume bestimmen.
   - Für $\lambda_1 = 2$: $\mathrm{Eig}_{\lambda_1}(A) = \mathrm{Kern}(A - \lambda_1 E)$:

$$A_1 := A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

     $\mathrm{rg}(A_1) = 3$ (Zwei Nullzeilen und $z_6 = z_2 - z_5$ zeigt $\mathrm{rg}(A_2) \leq 3$, und z_1, z_2, z_3 sind linear unabhängig) Also:

$$\dim \mathrm{Eig}_{\lambda_1} = \dim \mathrm{Kern}\, A_1 = n - \mathrm{rg}(A_1) = 6 - 3 = 3$$

     Drei lin. unabh. Eigenvektoren (aus $\mathrm{Lös}(A_1, \mathbf{0})$, z.B. Gaußscher Algorithmus):

$$u_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$B = (u_1, u_2, u_3)$ ist Basis für $\mathrm{Eig}_{\lambda_1}(A)$.

- Für $\lambda_2 = 3$: $\dim \mathrm{Eig}_{\lambda_2} \le m_2 = 1$ ($m_2 = 1$ ist algebraische Vielfachheit),

  $$A_2 = A - \lambda_2 E$$

  Lösung von $A_2 u = \mathbf{0}$:

  $$u_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Also $B_{\lambda_2} = \{u_4\}$.

3. Bestimmung der *Jordanketten*.
Allgemeine Idee: Wenn es eine Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ gibt mit $J = M_B^B(f_C)$ in Jordanscher NF, dann müssen $v_1, \dots, v_n$ folgende Bedingungen erfüllen: Bild!
für die zu einem Jordanblock von J zu Eigenwert λ gehörigen Spalten $v^{(1)}, \dots, v^{(s)}$

$$\begin{aligned} Av^{(1)} &= \lambda v^{(1)} \\ Av^{(2)} &= v^{(1)} + \lambda v^{(2)} \\ &\vdots \\ Av^{(s)} &= v^{(s-1)} + \lambda v^{(s)} \end{aligned}$$

- K_{u_1}: $u_1^{(1)} := u_1$.

  $u_1^{(2)}$: Lösung von $A_1 u_1^{(2)} = u_1^{(1)}$. Finden

  $$u_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  keine Lösung für $u_1^{(3)}$ in $A_1 u_1^{(3)} = u_1^{(2)}$.
  (Erste Zeile von A_1 Null, erste Komponente von $u_1^{(2)}$ nicht Null)
  Jordankästchen $K_{U_1} = (u_1^{(1)}, u_1^{(2)})$.

- K_{u_2}: Nebenrechnungen: Übung!

  - $u_2^{(1)} := u_2$.

– $u_2^{(2)}$ Lösung von $A_1 u_2^{(2)} = u_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

– $u_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

– $u_2^{(3)}$ Lösung von $A_1 u_2^{(3)} = u_2^{(2)}$: gibt keine Lösung.
(erste Komponente von $u_2^{(2)} \neq 0$, erste Zeile von A_1 Null)

Jordankästchen $K_{u_2} = (u_2^{(1)}, u_2^{(2)})$.

- K_{u_3}: (...) Finden $u_3^{(1)} := u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

  und keine Lösung für $u_3^{(2)}$ mit $A_1 u_3^{(2)} = u_3^{(1)}$. $K_{u_3} = (u_3^{(1)})$
- K_{u_4}: (...) $K_{u_4} = (u_4^{(1)})$.

Ergebnis: $B = (u_1^{(1)}, u_1^{(2)}, u_2^{(1)}, u_2^{(2)}, u_3^{(1)}, u_4^{(1)})$ ist Basis von $\mathbb{R}^6$ und liefert die Spalten für

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Jordansche Normalform von C ist

$$J = S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 0 & 2 & & & & \\ & & 2 & 1 & & \\ & & 0 & 2 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix} \qquad \triangle$$

Algorithmus zur Berechnung der Jordanschen Normalform:

Gegeben: $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

1. Bestimme alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ von A und deren algebraische Vielfachheiten $n_1, \dots, n_r$ (faktorisiere das charakteristische Polynom)

2. Sei $A_i := A - \lambda_i E_n$. Berechne Basis $u_1, \dots, u_{m_i}$ des Eigenraums $\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(A) = \mathrm{Kern}(A_i)$. Größe m_i der Basis bestimmt die Anzahl der Jordankästchen zum Eigenwert λ_i.

   Extremfälle:

   - $m_i = n_i$: alle Jordankästchen für λ_i haben Größe eins.
     Wählen Basiselemente $u_1, u_2, \dots$ für Spalten der Transformationsmatrix S.
     Falls das für alle i passiert, ist Matrix diagonalisierbar.

   - $m_i = 1$: es gibt nur ein Jordankästchen der Größe n_i.
     Aber wie bekommen wir jetzt die Spalten für S?
     Suchen nach Vektor v so dass $A_i^{n_i} v = 0$ und $A_i^{n_i - 1} v \neq 0$. Wissen: den gibt es!
     In der Praxis kann es hilfreich sein, einen zufälligen Vektor v zu probieren!
     Gewinnen so die Spalten $v, A_i v, \dots, A_i^{n_i - 1} v$ von S.

3. Bestimmung der Jordankästchen: Angenommen $1 < m_i < n_i$.
   Suchen nach Vektor v und $k \in \{2, \dots, n_i - 1\}$ maximal so dass $A_i^{k-1} v \neq 0$.
   In dem Fall werden $v, A_i v, \dots, A_i^{k-1} v$ Spalten von S.
   Und so weiter, wird jetzt ein wenig technisch.

Wichtig: Probe machen.

$$J = S^{-1} A S$$

Müssen wir dazu die Inverse von S berechnen? Nein!
Machen die Probe mit

$$SA = JS$$

(Diese Bemerkung gilt für alle Klassifikationen bis auf Ähnlichkeit.)

7.1.12 Anwendung: Die Vandermonde Determinante

Seien $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{K}$. Die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_r \\ w_1^2 & w_2^2 & \cdots & w_r^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ w_1^{n-1} & w_2^{n-1} & \cdots & w_r^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

heißt auch die *Vandermonde Matrix*.

Proposition 7.1.48.

$$\det M = \prod_{0 \le i < j \le n} (w_i - w_j)$$

Bemerkung 7.1.49. Die Vandermonde Determinante ist genau dann Null, wenn $w_i = w_j$ für $i \neq j$. Also: M ist genau dann invertierbar, falls $w_1, \dots, w_n$ paarweise verschieden sind.

Beweis. Der Satz ist offensichtlich richtig für $n = 1$, und für $n = 2$ gilt

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = w_2 - w_1 \,.$$

Für $n = 3$ haben wir

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ w_1^2 & w_2^2 & w_3^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ w_1^2 - w_1^2 & w_2^2 - w_1 w_2 & w_3^2 - w_1 w_3 \end{vmatrix} && ((3) - w_1(2)) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ w_1 - w_1 & w_2 - w_1 & w_3 - w_1 \\ 0 & w_2(w_2 - w_1) & w_3(w_3 - w_1) \end{vmatrix} && ((2) - w_1(1)) \\
&= \begin{vmatrix} w_2 - w_1 & w_3 - w_1 \\ w_2(w_2 - w_1) & w_3(w_3 - w_1) \end{vmatrix} \\
&= (w_2 - w_1)(w_3 - w_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix} \\
&= (w_2 - w_1)(w_3 - w_1)(w_3 - w_2)
\end{aligned}$$

Der allgemeine Fall geht mit Induktion ähnlich. □

Alternative, die Invertierbarkeit von M zu zeigen: die Spalten von M sind Eigenvektoren einer diagonalisierbaren linearen Abbildung. Falls $w_i = w_j$ für $i \neq j$, dann ist die Vandermonde Determinante sicher Null. Im folgenden seien $w_1, \dots, w_n$ paarweise verschieden. Sei

$$\phi(X) := (X - w_1) \cdots (X - w_n) =: X^n + \alpha_{n-1} X^{n-1} + \cdots + \alpha_0$$

Dann sind $w_1, \dots, w_n$ die Eigenwerte von Z_ϕ, und die entsprechenden Eigenvektoren sind alle linear unabhängig (Lemma 4.3.15). Eine Matrix und ihre Transponierte haben das gleiche charakteristische Polynom. Wir bestimmen die Eigenvektoren von $Z_\phi^\top$:

$$
\begin{aligned}
Z_\phi^\top \begin{pmatrix} 1 \\ w_k \\ \vdots \\ w_k^{n-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ w_k \\ \vdots \\ w_k^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} w_k \\ w_k^2 \\ \vdots \\ \alpha_0 - \alpha_1 w_k = \cdots - \alpha_{n-1} w_k^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_k \\ w_k^2 \\ \vdots \\ w_k^n \end{pmatrix} \qquad (\text{da } \phi(w_k) = 0) \\
&= w_k \begin{pmatrix} 1 \\ w_k \\ \vdots \\ w_k^{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Also sind die Zeilen der Vandermonde Matrix genau die Eigenvektoren einer diagonalisierbaren linearen Abbildung; somit ist M invertierbar.

Anwendung. Seien $G = (V(G), E(G))$ und $H = (V(H), E(H))$ endliche Graphen.

Definition 7.1.50. Eine Abbildung $f\colon V(G) \to V(H)$ heißt *Homomorphismus* falls $\{u, v\} \in E(G) \Rightarrow \{f(u), f(v)\} \in E(H)$. Die Menge aller Homomorphismen von G nach H wird mit $\mathrm{Hom}_H(G)$ bezeichnet.

In theoretischer Informatik und statistischer Physik (‘Partition function of the Gibbs distribution’) interessiert man sich für die Anzahl der Homomorphismen von G nach H.

Beispiel $K_4 - e$ nach K_3: 6 Homomorphismen. Bilder malen!

Definition 7.1.51. Die *Adjazenzmatrix von* G, mit $V(G) = V = \{1, \dots, n\}$, ist die Matrix $A \in \{0,1\}^{n\times n}$ mit $A_{i,j} = 1$ falls $\{i, j\} \in E(G)$ und $A_{i,j} = 0$ sonst.

Bemerkung: Adjazenzmatrizen A von (ungerichteten) Graphen sind *symmetrisch*: $A = A^\top$.

Sei nun A die Adjazenzmatrix von G, und B die Adjazenzmatrix von H.
Alternative Formulierung des Zählproblems:

$$| \mathrm{Hom}_H(G)| = \sum_{f: V \to V} \prod_{u,v \in V : A_{u,v} \neq 0} B_{f(u), f(v)}$$

Hier handelt es sich um eine ganz schwer zu berechnende Funktion (im Gegensatz zu den anderen Funktionen, die in dieser Vorlesung behandelt wurden).

Verallgemeinerung 1: Ersetze B durch Matrix aus $\mathbb{Q}^{n\times n}$ (kodieren ‘gewichteten’ Graphen H; wieder mit Anwendungen in der statistischen Physik).

$$Z_B(A) := \sum_{f:V\to V} \prod_{u,v\in V:A_{u,v}\neq 0} B_{f(u),f(v)}^{A_{u,v}}$$

Verallgemeinerung 2: Ersetzen A durch Matrix aus $\mathbb{N}^{n\times n}$ (kodieren 'Multigraphen' G).

Beispiel. Seien

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bilder malen!

Für $w \in \mathbb{Q}$ und $B \in \mathbb{Q}^{n\times n}$, betrachten das folgende Zählproblem:

$$\mathrm{Eval}_{B,w}(A) := |\{f : V \to V \mid \prod_{u,v\in V:A_{u,v}\neq 0} (B_{f(u),f(v)})^{A_{u,v}} = w\}|$$

Wie hängen $Z_B(A)$ und $\mathrm{Eval}_{B,w}(A)$ zusammen? Sei $A \in \mathbb{N}^{m\times m}$ gegeben.
Sei s die Anzahl der Einträge von A, die nicht Null sind, und $W = \{w_1, w_2, \dots, w_t\}$ die Menge aller Produkte von s Einträgen aus B.
Es gilt:

$$Z_B(A) = \sum_{w\in W} w \,\mathrm{Eval}_{B,w}(A)$$

Im Beispiel oben ist $W = \{1, 2, 4, 8\}$, und wir haben

$$\mathrm{Eval}_{B,1} = 2$$ Bild malen!
$$\mathrm{Eval}_{B,2} = 2$$ Bild malen!
$$\mathrm{Eval}_{B,4} = 2$$ Bild malen!
$$\mathrm{Eval}_{B,8} = 2$$ Bild malen!

und damit ist $Z_B(A) = \sum_{i=1}^{4} 2^i = 2 + 4 + 8 + 16 = 30$.

Viel überraschender: es geht auch in die andere Richtung.

Satz 7.1.52. *Für jedes $B \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ lässt sich die Berechnung von $\mathrm{Eval}_{B,w}(A)$ auf die Berechnung von $Z_B(A)$ reduzieren*[1].

Beweis. Falls $w \notin W$ dann ist $\mathrm{Eval}_{B,w}(A) = 0$. Berechnen

$$Z_B(A), Z_B(2\cdot A), \dots, Z_B(t\cdot A)\,.$$

[1] Wir verzichten hier auf eine formale Definition des Begriffes einer (polynomialzeit-) Reduktion. Wichtig ist die Idee, dass man $\mathrm{Eval}_{B,w}(A)$ effizient berechnen kann, wenn man $Z_B(A)$ effizient berechnen kann.

Es gilt

$$\begin{aligned}
Z_B(k \cdot A) &= \sum_{f: V \to V} \prod_{u,v \in V : A_{u,v} \neq 0} (B_{f(u),f(v)})^{k A_{u,v}} \\
&= \sum_{w \in W} w \cdot \left| \left\{ f: V \to V \mid w = \left(\prod_{u,v \in V : A_{u,v} \neq 0} B_{f(u),f(v)}^{A_{u,v}} \right)^k \right\} \right| \\
&= \sum_{w \in W} w^k \operatorname{Eval}_{B,w}(A)
\end{aligned}$$

Das gibt uns t Gleichungen, und die schreiben wir in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ w_1 & w_2 & \cdots & w_t \\ w_1^2 & w_2^2 & \cdots & w_t^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_1^{t-1} & w_2^{t-1} & & w_t^{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Eval}_{B,w_1}(A) \\ \operatorname{Eval}_{B,w_2}(A) \\ \vdots \\ \operatorname{Eval}_{B,w_t}(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_B(A) \\ Z_B(2 \cdot A) \\ \vdots \\ Z_B(t \cdot A) \end{pmatrix}$$

Links steht die Vandermonde Matrix, die invertierbar ist. Wenn wir also die Werte

$$Z_B(A), Z_B(2 \cdot A), \ldots, Z_B(t \cdot A)$$

kennen, so können wir auch die Werte

$$\operatorname{Eval}_{B,w_1}(A), \operatorname{Eval}_{B,w_2}(A), \ldots, \operatorname{Eval}_{B,w_t}(A)$$

(effizient!) berechnen. □

7.2 Lineare Diophantische Gleichungssysteme

Für $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ kennen wir bereits einen effizienten Algorithmus, um zu entscheiden, ob das Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung in $\mathbb{Q}^n$ besitzt (Abschnitt 4.1.9). In diesem Abschnitt wollen wir einen effizienten Algorithmus für Lösbarkeit in $\mathbb{Z}^n$ vorstellen. Wenn man alle Zeilen mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nenner aller Koeffizienten multipliziert, erhält man ein System mit der gleichen Lösungsmenge, aber ganzzahligen Koeffizienten. Wir werden daher annehmen, dass $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Solche Systeme $Ax = b$ werden auch *lineare diophantische Gleichungssysteme* genannt.

Zwei lineare Gleichungssysteme haben genau dann den gleichen Lösungsraum, wenn sie zeilenäquivalent sind. Um ganzzahlige Lösungen zu finden, behandeln wir eine neue Normalform, die *Hermitsche Normalform*. Ganzzahlige Lösungen sind in sehr vielen Anwendungen relevant, z.B. in der diskreten Optimierung.

In diesem Abschnitt folgen wir Kapitel 4 und 5 des Lehrbuchs von Schrijver [7]. Viele Aussagen in diesem Abschnitt lassen sich für alle, oder doch zumindest für gewisse Ringe verallgemeinern (z.B. für den Polynomring $\mathbb{Q}[X]$, und allgemeiner für *Hauptidealringe*; Gegenstand der Vorlesung AL10); wir beschränken uns hier auf den Ring $\mathbb{Z}$.

7.2.1 Unimodulare Spaltenäquivalenz

In diesem Abschnitt betrachten wir eine neue Äquivalenzrelation auf Matrizen. Wir benötigen dafür den folgenden Begriff.

Definition 7.2.1. Es sei R ein Ring mit Eins. Dann heißt $A \in R^{n \times n}$ *unimodular* falls $\det(A)$ eine Einheit in R.

Bemerkung 7.2.2. Eine Matrix $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ ist unimodular, falls $\det A \in \{-1, 1\}$.

Beispiel 7.2.3. Eine *Permutationsmatrix* (auch *Vertauschungsmatrix*) ist eine quadratische Matrix, in der in jeder Zeile und in jeder Spalte genau ein Eintrag eins ist und alle anderen Einträge null sind. Jede Permutationsmatrix $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ entspricht genau einer Permutation $\pi \in \mathrm{Sym}(\{1, 2, \dots, n\})$: die zu π gehörige Permutationsmatrix hat die Einträge $p_{ij} = 1$ falls $\pi(i) = j$ und $p_{ij} = 0$ sonst. Alle Permutationsmatrizen sind unimodular (Proposition 4.1.3). Das gilt insbesondere für die Elementarmatrix für das Vertauschen zweier Spalten (Abschnitt 3.2.3). △

Beispiel 7.2.4. Die Elementarmatrix für die Multiplikation einer Spalte mit einem Skalar $r \in R$ (Abschnitt 3.2.3) ist genau dann unimodular, wenn r eine Einheit ist (Proposition 4.1.3). △

Beispiel 7.2.5. Die Elementarmatrix für die Addition einer Spalte mit einem Vielfachen einer anderen Spalte (Abschnitt 3.2.3) ist unimodular (Proposition 4.1.3). △

Definition 7.2.6. Die Umformungen (Elementarmatrizen) aus den Beispielen 7.2.3, 7.2.4, und 7.2.5 nennen wir *unimodulare Spaltenoperationen* (beziehungsweise *unimodulare Elementarmatrizen)*.

Proposition 7.2.7. *Für $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

1. *A is unimodular.*
2. *A hat eine inverse Matrix in $\mathbb{Z}^{n \times n}$.*

Beweis. Korollar 4.1.28. □

Definition 7.2.8. $A, B \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ heissen *unimodular spaltenäquivalent* falls $A = BU$ für eine unimodulare Matrix $U \in R^{n \times n}$.

Unimodulare Spaltenäquivalenz ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation. Wir werden eine Normalform für Matrizen bis auf Spaltenäquivalenz in Abschnitt 7.2.2 kennenlernen, die Hermit Normalform.

7.2.2 Die Hermit Normalform

Die Hermit Normalform ist eine Normalform für Matrizen bis auf unimodulare Spaltenäquivalenz (Abschnitt 7.1.3). Analog erhält man auch eine Normalform für unimodulare Zeilenäquivalenz. Die Formulierung der Normalform für Spaltenäquivalenz (anstatt Zeilenäquivalenz) wird praktisch sein bei unserer Anwendung für Lösbarkeit linearer diophantischer Gleichungssysteme (Abschnitt 7.2.4).

Definition 7.2.9. Eine Matrix $M \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ vom Rang m ist in *Hermit Normalform* falls sie von der Gestalt $[B\ \mathbf{0}]$ ist, wobei $B \in \mathbb{N}^{m \times m}$ eine invertierbare Matrix in unterer Dreiecksform ist, in der jeder Diagonaleintrag strikt größer ist als alle anderen Einträge in der gleichen Zeile.

Satz 7.2.10. *Jede Matrix $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ vom Rang m kann durch unimodulare Spaltenoperationen in eine Matrix in Hermit Normalform überführt werden.*

Beweis. Zunächst multiplizieren wir jede Zeile von A mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen aller Koeffizienten der Zeile und können daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$.

Algorithmus, erster Teil. Angenommen, A ist von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \tag{7.8}$$

wobei B in unterer Dreiecksform und positiven Einträgen auf der Diagonalen. (Anfänglich ist $B \in \mathbb{K}^{0 \times 0}$.) Es sei $(d_{11}, \ldots, d_{1k})$ die erste Zeile von D.

1. Multipliziere manche Spalten mit -1 so dass $d_{11}, \ldots, d_{1k} \in \mathbb{N}$.
2. Wende Spaltenoperationen an, so dass $d_{11} + \cdots + d_{1k} \in \mathbb{N}$ so klein wie möglich ist.
3. Vertausche Spalten, so dass $d_{11} \geq \cdots \geq d_{1k}$.

Beobachtung 1. $d_{11} > 0$ da sonst $d_{11} = \cdots = d_{1k} = 0$, und damit $\operatorname{rg}(A) < m$, im Widerspruch zu unseren Annahmen.
Beobachtung 2. $d_{12} = \cdots = d_{1k} = 0$. Ansonsten, falls $d_{12} > 0$: subtrahiere 2-te Spalte in D von der 1-ten, im Widerspruch zur Minimalität von $d_{11} + \cdots + d_{1k} \in \mathbb{N}$.
Beobachtung 3. Die resultierende Matrix hat die Gestalt in (7.8) für eine Matrix B in Dreiecksform, die um eine Zeile und eine Spalte größer ist als zuvor.

Wenn wir dieses Verfahren endlich oft wiederholen, erhalten wir schliesslich eine Matrix der Gestalt $(B|0)$ wobei B Dreiecksmatrix mit positiver Diagonale.

Algorithmus, zweiter Teil. Wir schreiben die Matrix $B = (b_{i,j})_{i \in \{1,\ldots,m\}, j \in \{1,\ldots,m\}}$ weiter um, damit alle Einträge nicht-negativ und jeder Diagonaleintrag $b_{i,i}$ strikt größer ist als alle anderen Einträge $b_{i,j}$ in der gleichen Zeile. Wir gehen Zeile für Zeile in aufsteigender Ordnung vor. Für Zeile i addieren wir zur Spalte $j < i$ ein ganzzahliges Vielfaches der Spalte i, so dass $0 \leq b_{i,j} < b_{i,i}$. Dabei ändern sich für $i' < i$ die Eintrage $b_{i',j}$ nicht, da $b_{i',i} = 0$. Die resultierende Matrix ist in Hermit Normalform. $\square$

Es folgt also, dass jede rationale Matrix $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ vom Rang m unimodular ähnlich ist zu einer Matrix H in Hermit Normalform. Wir nennen H dann *die Hermit Normalform von A*. Ähnlich wie im Beweis von Satz 7.1.2 kann man zeigen, dass die Hermit Normalform von A eindeutig ist.

Beispiel 7.2.11. Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Durch unimodulare Spaltenumformungen erhalten wir im ersten Teil des Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Im zweiten Teil des Algorithmus wird dies weiter vereinfacht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Die Hermit Normalform von A ist also $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und für die Matrix $U = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ gilt $\det(U) = -1$ und $AU = H$. △

Beispiel 7.2.12. Wir betrachten die (invertierbare) Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch unimodulare Spaltenumformungen erhalten wir:

$$A \xrightarrow[(1)]{s_1 \leftrightsquigarrow s_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)]{s_2 - 4s_1 \rightsquigarrow s_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & -19 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)]{s_3 - 3s_1 \rightsquigarrow s_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -19 & -13 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Wir wiederholen das Verfahren nun mit der kleineren Matrix D.

$$D = \begin{pmatrix} -19 & -13 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[(2)]{-s_1 \rightsquigarrow s_1, -s_2 \rightsquigarrow s_2} \begin{pmatrix} 19 & 13 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[(1)]{s_1 - s_2 \rightsquigarrow s_1} \begin{pmatrix} 6 & 13 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)]{s_2 - s_1 \rightsquigarrow s_2} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & -9 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(1)]{s_1 \leftrightsquigarrow s_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)]{s_2 - 6s_1 \rightsquigarrow s_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -9 & -46 \end{pmatrix}$$

Also lässt sich A mit unimodularen Spaltenumformungen in folgende Gestalt bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 46 \end{pmatrix}$$

Im zweiten Teil des Algorithmus wird die Matrix weiter wie folgt reduziert.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 46 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)]{s_1 - 5s_2 \rightsquigarrow s_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -45 & -9 & 46 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[(3)]{s_1 + s_3 \rightsquigarrow s_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -45 & 35 & 46 \end{pmatrix} \xrightarrow[(3)]{s_1 + s_3 \rightsquigarrow s_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 35 & 46 \end{pmatrix}. \qquad \triangle$$

7.2.3 Ein polynomieller Algorithmus

Es lässt sich relativ einfach zeigen, dass das Verfahren im Beweis von Satz 7.2.10 nach polynomiell vielen Rechenschritten terminiert.[2] Es kann aber das Problem auftreten, dass die Einträge der Matrizen während der Berechnung sehr groß werden; so groß, dass man sie nicht mehr mit polynomiell vielen Bits abspeichern kann (Beispiel 4.1.20 läßt sich entsprechend anpassen). Um das Problem zu beheben, verwenden wir einen Trick (der laut Schrijver [7] von Domich 1983 in seiner Masterarbeit gefunden wurde), und zeigen damit den folgenden Satz, der 1979 von Kannan und Bachem gezeigt wurde [5] (für Verbesserungen, siehe [3]).

Satz 7.2.13. *Zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ vom Rang m lässt sich in polynomieller Rechenzeit eine unimodulare Matrix U und eine Matrix $H \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ in Hermit Normalform berechnen, so dass $AU = H$.*

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass wir wie im Beweis von Satz 7.2.10 ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, dass A ganzzahlig ist, da die Multiplikation jeder Zeile mit dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen aller Koeffizienten der Zeile die Anzahl der Bits der Zahlen nur linear vergößert, und den Lösungsraum nicht verändert.

Es sei B eine beliebige quadratische Untermatrix von A vom Rang m; es ist klar, dass sich so ein B und $s := |\det(B)|$ in polynomieller Zeit berechnen lässt (z.B. mit dem gaußschen Algorithmus). Wir betrachten nun die Matrix

$$A' := [A \mid sE_m].$$

Behauptung. Die zusätzlichen Spalten sind ganzahlige Linearkombinationen der Spalten von B.

Die Inverse von B berechnet sich nach Satz 4.1.26 durch $B^{-1} = \frac{B^{\#}}{\det B}$; da B ganzzahlig, ist auch $B^{\#}$ ganzzahlig. Also ist $\det(B)B^{-1}$ ganzzahlig. Es gilt

$$B(\det(B)B^{-1}) = \det(B)E_m \in \{sE_m, -sE_m\},$$

[2] Der interessanteste Teil der Laufzeitanalyse ist Schritt 2 im ersten Teil. Die Analyse hier ist ähnlich zur Analyse des euklidischen Algorithmus, der in der Fortsetzungsvorlesung AL10 ausführlich behandelt wird.

und die Behauptung ist bewiesen.

Die Behauptung impliziert, dass sich die Hermit Normalform von A aus der für A' ergibt durch Entfernen von überschüssigen Spalten, die nur 0 enthalten. Wir folgen nun dem Algorithmus aus dem Beweis von Satz 7.2.10 mit der folgenden Modifikation. falls beim Algorithmus eine Spalte erzeugt wird, deren i-ter Eintrag den Wert s überschreitet, dann ziehen wir die i-te Spalte der Matrix sE_m ab (wir rechnen bei den Koeffizienten also *'modulo s'*).

Es ist klar, dass das Produkt der Elementarmatrizen fuer die unimodularen Zeilenumformungen die gesuchte unimodulare Matrix U liefert, und dass auch die Einträge dieser Matrix nicht zu groß werden. □

7.2.4 Ganzzahlige Lösungen für lineare Gleichungssysteme

Der folgende Satz hat viele Anwendungen in der theoretischen Informatik.

Satz 7.2.14. *Es gibt einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit, der für gegebenes $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$ entscheidet, ob $Ax = b$ eine ganzzahlige Lösung besitzt.*

Beweis. Zunächst entscheiden wir mit dem Gaußschen Algorithmus aus Abschnitt 3.3.4 ob $Ax = b$ eine *rationale* Lösung besitzt. Falls nein, dann sicherlich auch keine ganzzahlige. Falls ja, wählen wir eine maximale Menge linear unabhängiger Zeilen von A aus (das geht ebenfalls mit Hilfe des gaußschen Algorithmus). Das resultierende Untersystem hat die gleiche Lösungsmenge, und wir arbeiten daher im folgenden mit diesem Untersystem anstatt mit A. Wir nehmen also an, dass A vom Rang m ist.

Als nächstes berechnen wir mit dem Verfahren von Satz 7.2.13 in polynomieller Zeit eine unimodulare Matrix $U \in \mathbb{Z}^{m \times m}$, so dass $AU = [B\ \mathbf{0}]$, für $B \in \mathbb{N}^{m \times m}$ vom Rang m, die Hermit Normalform von A ist. Falls $B^{-1}b$ ganzzahlig ist, dann ist $s := U(B^{-1}b, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{Z}^n$ eine ganzzahlige Lösung von $Ax = b$, denn

$$As = AU(B^{-1}b, 0, \dots, 0)^\top = [B\ \mathbf{0}](B^{-1}b, 0, \dots, 0)^\top = b.$$

Da aber jede Lösung von $[B\ \mathbf{0}]x = b$ von der Gestalt $(B^{-1}b, d_{m+1}, \dots, d_n)$ ist für $d_{m+1}, \dots, d_n \in \mathbb{Q}$, so gibt es keine ganzzahlige Lösung von $[B\ \mathbf{0}]x = b$ falls $B^{-1}b$ nicht ganzzahlig ist, und damit auch keine ganzzahlige Lösung für $Ax = b$. □

Beispiel 7.2.15. Wir betrachten das lineare diophantische Gleichungssystem $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Wir wir in Beispiel 7.2.11 gesehen haben, gilt $AU = H$ für

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da

$$H^{-1}b = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\text{Beispiel 4.1.27}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

nicht ganzzahlig ist, hat das System

$$\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ 3x + 4y &= 2 \end{aligned}$$

keine ganzzahlige Lösung (aber die fraktionale Lösung $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$).

Für $b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ dagegen ist

$$H^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ganzzahlig, und tatsächlich ist

$$UH^{-1}b = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine ganzzahlige Lösung für

$$\begin{aligned} x + 2y &= -1 \\ 3x + 4y &= -1. \end{aligned}$$

△

Übung 24. Zeigen Sie, dass sich lineare Gleichungssysteme über dem Ring $\mathbb{Z}_n$ (siehe Abschnitt 4.2.1) für beliebiges $n \in \{2, 3, \dots\}$ in polynomieller Zeit lösen lassen.

Hinweis. Ein möglicher Lösungsansatz besteht darin, die Aufgabe auf Lösbarkeit in $\mathbb{Z}$ zu reduzieren. Für $a \in \mathbb{Z}$ schreiben wir $[a]$ für die Restklasse von a modulo n. Es seien $a_0, a_1, \dots, a_n \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Zeigen Sie zunächst, dass es genau dann Elemente $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}_n$ gibt mit $[a_1]x_1 + \dots + [a_n]x_n = [a_0]$, wenn es Elemente $y, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$a_1 z_1 + \dots + a_n z_n = a_0 + \underbrace{y + \dots + y}_{n \text{ mal}}.$$

7.2.5 Die Smith Normalform

In diesem Kapitel betrachten wir eine Normalform von Matrizen bis auf unimodulare Äquivalenz (Definition 7.2.1). Viele der Ideen zur Berechnung der Hermit Normalform sind auch für die Berechnung der Smith Normalform nützlich. Die Smith Normalform kann dazu verwendet werden, um die Frobenius Normalform zu berechnen, und hat weitere Anwendungen in der Algebra. Unsere Anwendungen der Smith Normalform verwenden Matrizen über dem Polynomring $\mathbb{K}[X]$, und wir beschränken uns ab jetzt auf diesen Fall. Hier sind die Einheiten gerade die Elemente von $\mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Bemerkung 7.2.16. Die Smith Normalform existiert auch für den Ring $\mathbb{Z}$, und allgemein für *Dedekind Ringe*, also insbesondere also für *Hauptidealringe* und damit auch für *euklidische Ringe*; diese Begriffe werden allerdings erst in der Vorlesung Algebra – grundlegende Konzepte (AL10) behandelt.

Lemma 7.2.17. *Sei $A \in \mathbb{K}[X]^{n\times n}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

1. *A ist unimodular.*
2. *A kann geschrieben werden als Produkt von unimodularen Elementarmatrizen (Definition 7.2.6).*
3. *A hat ein Inverses in $\mathbb{K}[X]^{n\times n}$, d.h., es gibt ein $B \in \mathbb{K}[X]^{n\times n}$, so dass*
$$AB = BA = E_n.$$

Beweis. 2. $\Rightarrow$ 3. Jede unimodulare Elementarmatrix hat ein Inverses. Das Inverse von A ergibt sich aus den Inversen der unimodularen Elementarmatrizen (3.2).

3. $\Rightarrow$ 1. Wenn A ein Inverses B in $\mathbb{K}[X]^{n\times n}$ hat, dann ist $\det(A)$ eine Einheit in $\mathbb{K}[X]$, denn (mit Satz 4.1.11)
$$1 = \det(E_n) = \det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Um die Implikation 1. $\Rightarrow$ 2. zu zeigen, transformieren wir A mit unimodularen Zeilenumformungen in Stufenform (analog zum Algorithmus bei der Berechnung der Hermit Normalform in Satz 7.2.10). Die Stufenform muss sogar schon in Dreiecksform sein, denn sonst wäre $\det(A) = 0$ und damit A nicht unimodular. Alle Diagonaleinträge der Dreiecksmatrix müssen aus $\mathbb{K}\setminus\{0\}$ sein, denn sonst wäre $\det(A)$ keine Einheit in $\mathbb{K}[X]$ (siehe (4.3)). Wir können also durch weitere unimodulare Zeilenumformungen alle Diagonaleinträge zu 1 machen. Durch unimodulare Spaltentransformationen lassen sich dann alle Einträge ausserhalb der Diagonalen eliminieren, wir erhalten also die Matrix E_n; also läßt sich A schreiben als Produkt von unimodularen Elementarmatrizen. □

Definition 7.2.18. Zwei Matrizen $A, B \in R^{n\times m}$ heißen *unimodular äquivalent* falls es unimodulare Matrizen $P \in R^{n\times n}$ und $Q \in R^{m\times m}$ gibt, so dass $PAQ = B$.

Satz 7.2.19. *Jede Matrix $A \in \mathbb{K}[X]^{n\times n}$ ist unimodular äquivalent zu einer der Gestalt*
$$\begin{pmatrix} \phi_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \phi_m & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$
wobei $\phi_1, \ldots, \phi_m \in \mathbb{K}[X]$ normiert, so dass $\phi_i | \phi_j$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ mit $i < j$.

Beweis. Falls $A = \mathbf{0}$ dann ist die Aussage trivial; wir nehmen also im Folgenden an, dass $A = (a_{ij}) \neq \mathbf{0}$. Wir geben nun ein Verfahren an, welches nach einer endlichen Anzahl von Schritten terminiert, und die Existenz von unimodularen Matrizen $P \in \mathbb{K}[X]^{n \times n}$ und $Q \in \mathbb{K}[X]^{m \times m}$ und die Existenz eines normierten Polynoms $\phi_1 \in \mathbb{K}[X]$ liefert, so dass

$$PAQ = \begin{pmatrix} \phi_1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

wobei $B \in \mathbb{K}[X]^{(n-1)\times(m-1)}$ und ϕ_1 teilt alle Einträge von B.

1. Wende Zeilen- und Spaltenvertauschungen an, so dass $a_{1,1} \neq 0$, und so dass $a_{1,1} \in \mathbb{K}[X]$ unter allen Einträgen von A, die nicht 0 sind, den *kleinsten* Grad besitzt.

2. Schreibe jeden Eintrag a_{1j} in der ersten Zeile als $a_{1j} = q_{1j} a_{11} r_{1j}$ für $q_{1j}, r_{1j} \in \mathbb{K}[X]$ mit $\mathrm{grad}(r_{1j}) < \mathrm{grad}(a_{11})$ (Polynomdivision), und führe folgende unimodulare Spaltenumformung durch: ziehe $q_{1j} a_{*1}$ von der j-ten Spalte a_{*j} von A ab, so dass danach $a_{1j} = r_{1j}$.

3. Analog dazu: schreibe jeden Eintrag a_{j1} in der ersten Spalte als $a_{j1} = q_{j1} a_{11} r_{j1}$ für $q_{j1}, r_{j1} \in \mathbb{K}[X]$ mit $\mathrm{grad}(r_{j1}) < \mathrm{grad}(a_{11})$ (Polynomdivision), und führe folgende unimodulare Zeilenumformung durch: ziehe $q_{j1} a_{1*}$ von der j-ten Zeile a_{j*} von A ab, so dass danach $a_{j1} = r_{j1}$.

4. Falls ein Eintrag von A strikt kleineren Grad hat als a_{11}, gehe zurück zu Schritt 1.

5. Ansonsten: $a_{11} \neq 0$; alle anderen Einträge der ersten Zeile und ersten Spalte sind 0; und alle anderen Einträge von A, die nicht 0 sind, haben größeren Grad als a_{11}. Falls a_{11} alle anderen Einträge von A teilt, so können wir durch Multiplikation der ersten Zeile mit einer Einheit in $\mathbb{K}[X]$ erreichen, dass a_{11} normiert ist. Also ist A von der gewünschten Gestalt und das Verfahren bricht ab.

6. Ansonsten, falls a_{11} den Eintrag a_{ij} nicht teilt, schreibe a_{ij} als $a_{ij} = q a_{11} r$ für $q, r \in \mathbb{K}[X]$ mit $0 \neq \mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(a_{11})$. Addiere dann die erste Zeile von A zur i-ten Zeilen, und dann das q-fache der ersten Spalte zur j-ten Spalte. Wir erhalten eine Matrix mit Eintrag r an der Stelle i, j. Wir fahren dann fort mit Schritt 1.

Wir wenden dieses Verfahren nun induktiv auf B anstatt auf A an. Die resultierende Matrix ist dann in Smith Normalform. Da alle auftretenden Umformungen im Verfahren durch Multiplikation mit unimodularen Elementarmatrizen von links oder von rechts beschrieben werden können, folgt, dass die resultierende Matrix S unimodular äquivalent ist zu A. □

Die Smith Normalform kann dazu verwendet werden, um die Frobenius Normalform von $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ zu berechnen! Wir berechnen dazu die Smith Normalform S der Matrix

$XE_n - A$ mit Einträgen aus $\mathbb{K}[X]$. Diese ist von der Gestalt

$$S = \begin{pmatrix} \phi_1 & & & 0 \\ & \phi_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \phi_n \end{pmatrix}$$

wobei $\phi_1, \dots, \phi_n$ normierte Polynome sind mit $\phi_i | \phi_j$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i < j$.

Bemerkung 7.2.20. Es gilt $\phi_n = \mu_A$.

Bemerkung 7.2.21. Es gilt $\prod_{i \in \{1,\dots,n\}} \phi_i = \chi_A$. Das folgt direkt aus der Definition von $\chi_A = \det(XE_n - A)$ und der Beobachtung, dass unimodulare Zeilen- und Spaltenumformungen die Determinante nicht ändern (siehe Proposition 4.1.3 für Zeilenumformungen, und kombiniere mit Proposition 4.1.10 für Spaltenumformungen).

Satz 7.2.22. *Falls $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\phi_1 = \cdots = \phi_k = 1$ und $\phi_k \neq 1$ wie oben, dann berechnet sich die Frobenius Normalform F von A durch*

$$F = \begin{pmatrix} Z_{\phi_{k+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Z_{\phi_{k+2}} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & Z_{\phi_n} \end{pmatrix}.$$

Beweis. todo □

Bemerkung 7.2.23. Wie bei der Berechnung der Hermit Normalform besteht bei der algorithmischen Berechnung der Smith Normalform die Gefahr, dass Einträge der Matrizen zu groß werden. Mit ähnlichen Methoden wie in Abschnitt 7.2.3 lässt sich das vermeiden, so dass auch die Smith Normalform für $A \in (\mathbb{Q}[X])^{n \times n}$ in polynomieller Zeit berechnet werden kann [3, 5].

7.3 Klassifikation bis auf orthogonale und unitäre Ähnlichkeit

Was sind strukturverträgliche Abbildungen für euklidische Vektorräume?

- Struktur: Skalarprodukt, Längen, Orthogonalität, Winkel, ...
- Antwort: orthogonale Abbildungen

7.3.1 Orthogonale und unitäre Abbildungen

Ist zunächst Wiederholung (Abschnitt 5.5).

V, W: euklidische (unitäre) Vektorräume.
$*_V$ und $*_W$: Skalarprodukte.
$||.||_V$, $||.||_W$: zugehörige Normen.

Wiederholung Abschnitt 5.5:

Definition 7.3.1. Eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ heißt *orthogonal* (bzw. unitär) falls für alle $u, v \in V$:

$$u *_V v = f(u) *_W f(v)$$

Satz 7.3.2 (Charakterisierung Orthogonalität)**.** *Es sei $f\colon V \to W$ lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:*

1. *f ist orthogonal;*
2. *$\forall x \in V : \|x\|_V = 1 \Rightarrow \|f(x)\|_W = 1$*
3. *$\forall x \in V : \|x\|_V = \|f(x)\|_W$ (f ist* längentreu*)*
4. *wenn $(u_1, \ldots, u_r)$ ON-System in V dann ist $(f(u_1), \ldots, f(u_r))$ ein ON-System in W.*

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2.: Aus $\|x\| = 1$ folgt

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_W^2 &= f(x) * f(x) \\ &= x * x && \text{(wegen (1))} \\ &= \|x\|_V^2 = 1 \end{aligned}$$

also auch $\|f(x)\|_W = 1$.

2. $\Rightarrow$ 3.: Ist $x = \mathbf{0}$, so gilt $f(x) = \mathbf{0}$, also $\|f(x)\| = 0 = \|x\|$.
Sei nun $x \neq \mathbf{0}$. Für $\tilde{x} = \frac{x}{\|x\|}$ gilt $\|\tilde{x}\| = 1$. Also $\|f(\tilde{x})\| = 1$ wegen (2) und es folgt

$$\|f(x)\|_W = \|f(\|x\|_V \tilde{x})\| = \|x\|_V \cdot \|f(\tilde{x})\|_W = \|x\|_V$$

(Linearität von f und Eigenschaft von Normen).

3. $\Rightarrow$ 4.: Sei $(u_1, \ldots, u_r)$ ein ON-System. Dann

$$\|u_j\| = 1 \overset{(3)}{\Rightarrow} \|f(u_j)\| = 1$$

Sei $j \neq k$, zu zeigen bleibt: $f(u_j) * f(u_k) = 0$.

$$\begin{aligned} \|u_j + u_k\|^2 &= \|u_j\|^2 + \|u_k\|^2 + \overbrace{2(u_j * u_k)}^{=0} \\ \|f(u_j + u_k)\|^2 = \|f(u_j) + f(u_k)\|^2 &= \|f(u_j)\|^2 + \|f(u_k)\|^2 + 2(f(u_j) * f(u_k)) \end{aligned}$$

Also $f(u_j) * f(u_k) = 0$.

4. $\Rightarrow$ 1.: Es gelte (4), z.z. ist $u * v = f(u) * f(v)$.

1. Fall: u, v sind linear abhängig, o.B.d.A: $v = \alpha u$ für $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist $\tilde{u} := \frac{u}{\|u\|}$ ein ON-System (bestehend aus nur einem Vektor) also auch $f(\tilde{u})$ nach (4). Es folgt

$$\begin{aligned} u * v &= \|u\|\tilde{u} * \alpha\|u\|\tilde{u} = \underbrace{\tilde{u} * \tilde{u}}_{=1}\|u\|^2\alpha \\ f(u) * f(v) &= f(\|u\|\tilde{u}) * f(\alpha\|u\|\tilde{u}) \\ &= \|u\|^2\alpha \underbrace{(f(\tilde{u}) * f(\tilde{u}))}_{=1} = \|u\|^2\alpha \end{aligned}$$

2. Fall: u, v sind linear unabhängig. Verfahren aus Abschnitt 6.3.4 liefert ON-System $(\tilde{u}, \tilde{v})$ mit $\langle u, v\rangle = \langle \tilde{u}, \tilde{v}\rangle$, d.h. es gibt $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ so dass $u = \alpha_1\tilde{u} + \alpha_2\tilde{v}$ und $v = \beta_1\tilde{u} + \beta_2\tilde{v}$. Nach (4) ist $(f(\tilde{u}), f(\tilde{v}))$ ein ON-System, also

$$\begin{aligned} f(u) * f(v) &= (\alpha_1 f(\tilde{u}) + \alpha_2 f(\tilde{v})) * (\beta_1 f(\tilde{u}) + \beta_2 f(\tilde{v})) \\ &= \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \\ &= (\alpha_1\tilde{u} + \alpha_2\tilde{v}) * (\beta_1\tilde{u} + \beta_2\tilde{v}) = u * v. \end{aligned}$$

□

Folgerungen:

1. Sind $B = (v_1, \dots, v_n)$ und $B' = (w_1, \dots, w_n)$ ON-Basen von V bzw. von W, so ist die durch $f\colon V \to W : v_i \mapsto w_i$ definierte lineare Abbildung orthogonal.

2. Wenn $f\colon V \to W$ orthogonal, dann ist f injektiv, denn

$$\begin{aligned} f(x) = \mathbf{0} &\Rightarrow \|f(x)\| = 0 \\ &\Rightarrow \|x\| = 0 \\ &\Rightarrow x = \mathbf{0} \end{aligned}$$

7.3.2 Darstellungsmatrizen orthogonaler Abbildungen

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (bzw. $\mathbb{C}^{n\times n}$) heißt *orthogonal* (bzw. *unitär*) wenn A invertierbar ist und

$$A^{-1} = A^\top \qquad \text{bzw. } A^{-1} = \bar{A}^\top$$

Rechtfertigung: Proposition 5.5.1. Seien V, W euklidische (unitäre) Vektorräume mit ON-Basen $B = (v_1, \dots, v_n)$ und $C = (w_1, \dots, w_n)$.

Satz 7.3.3. *Sei $f\colon V \to W$ lineare Abbildung und $A := M_C^B(f)$ Darstellungsmatrix von f. Dann sind äquivalent:*

1. *f ist orthogonal (unitär);*

2. *die Matrix A ist orthogonal: $A^{-1} = A^\top$ (bzw. unitär: $A^{-1} = \bar{A}^\top$);*

3. *die Spalten von A bilden eine ON-Basis von $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).*

Beweis. (1) $\Leftrightarrow$ (2): Proposition 5.5.1. Erinnerung:

$$\begin{aligned} & \vec{x}^\top \vec{y} = \vec{x} * \vec{y} = f(\vec{x}) * f(\vec{y}) = (A\vec{x})^\top (A\vec{y}) = \vec{x}^\top (A^\top A)\vec{y} \qquad \text{für alle } \vec{x}, \vec{y} \\ \Leftrightarrow \quad & A^\top A = E_n \end{aligned}$$

(2) $\Leftrightarrow$ (3): Seien $s_1, \dots, s_n$ die Spalten von A. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & (s_1, \dots, s_n) \text{ ist eine ON-Basis} \\ \Leftrightarrow\ & \forall i, j\colon s_i * s_j = \delta_{ij} \\ \Leftrightarrow\ & \forall i, j\colon s_i^\top s_j = \delta_{ij} \\ \Leftrightarrow\ & \forall A^\top A = E \\ \Leftrightarrow\ & A^\top = A^{-1} \end{aligned}$$

□

$O(n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$: Menge aller orthogonalen Matrizen.
$U(n) \subset \mathbb{C}^{n\times n}$: Menge aller unitären Matrizen.

Bemerkung 7.3.4. Für orthogonale (bzw. unitäre) Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (bzw. $\mathbb{C}^{n\times n}$) gilt

- $|\det A| = 1$.
- $|\lambda| = 1$ für jeden Eigenwert λ von A.

Beispiel 7.3.5. *Permutationsmatrizen* (Beispiel 7.2.3) sind orthogonal: Bezeichnet P_π die zu einer Permutation π zugehörige Permutationsmatrix, dann gilt

$$P_\pi^\top P_\pi = P_{\pi^{-1}} P_\pi = P_{\pi^{-1}\circ\pi} = P_{\mathrm{id}} = E$$

denn

- die transponierte Permutationsmatrix ist gleich der Permutationsmatrix der inversen Permutation, und
- das Produkt von Permutationsmatrizen entspricht der Hintereinanderausführung der Permutationen. △

Übung 25. Wie würden Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ berechnen, wenn $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ orthogonal ist?

Übung 26. Zeigen Sie: die vorzeichenbehafteten Permutationsmatrizen, bei denen in jeder Zeile und Spalte genau ein Eintrag plus oder minus eins ist und alle übrigen Einträge null sind, sind genau die ganzzahligen orthogonalen Matrizen.

7.3.3 Orthogonale und unitäre Ähnlichkeit

Zwei Matrizen $A, A' \in \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^{n\times n})$ heißen *orthogonal ähnlich* (bzw. unitär ähnlich; in der Literatur bisweilen auch: *unitär äquivalent*, das ist aber im Hinblick auf die Definition von (gewöhnlicher) Ähnlichkeit und Äquivalenz irreführend) falls es eine orthogonale (unitäre) Matrix S gibt so dass $A = S^{-1}A'S$. Eine Äquivalenzrelation.

Eine Klassifikation aller Matrizen bis auf orthogonale (unitäre) Ähnlichkeit ist für diese Vorlesung zu ehrgeizig. Dazu ein Beispiel. Sei $n > 2$, und betrachten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 2 & 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 3 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & * \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$$

Alle diese Matrizen sind ähnlich, denn die Jordan Normalform ist immer die gleiche:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & n \end{pmatrix}.$$

Auf der anderen Seite sind zwei solche Matrizen nur dann unitär ähnlich, wenn sie die gleichen Einträge haben (ohne Beweis; Originalliteratur dazu: Heydar Radjavi, *On Unitary Equivalence of Arbitrary Matrices*, Transactions of the AMS, 1962).

7.3.4 Selbstadjungierte Abbildungen

Für die wichtige Klasse der symmetrischen (hermitischen) Matrizen wird uns eine Klassifikation gelingen (in Abschnitt 7.3.5). Im folgenden sei V ein euklidischer (bzw. unitärer) Vektorraum.

Definition 7.3.6. Ein Endomorphismus $\phi\colon V \to V$ heißt *selbstadjungiert* wenn für alle $u, v \in V$

$$f(u) * v = u * f(v)$$

Satz 7.3.7. *Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ und $A := M_B^B(f)$ Darstellungsmatrix von f bzgl. einer ON-Basis B. Dann ist f genau dann selbstadjungiert wenn A symmetrisch (bzw. hermitisch, $A = \bar{A}^\top$) ist.*

Zum Namen: $\bar{A}^\top =: A^*$ heißt *Adjungierte* zu A.

Beweis. v_B bezeichne Koordinatenvektor von $v \in V$ bzgl. B. Dann ist $(f(v))_B = Av_B$ und $u * v = u_B^\top v_B$ (Gramsche Matrix ist E weil B eine ON-Basis, siehe Abschnitt 6.3.4). (Bzw.: $u * v = u_B^\top \bar{v}_B$) Also

$$\begin{aligned} & f(u) * v = u * f(v) && \forall u, v \in V \\ \Longleftrightarrow\ & (Au_B)^\top v_B = u_B^\top A v_B && \forall u, v \in V \\ \Longleftrightarrow\ & u_B^\top A^\top v_B = u_B^\top A v_B && \forall u, v \in V \\ \Longleftrightarrow\ & A^\top = A \end{aligned}$$

(Komplexe Variante: Striche über v_B und die A's auf der rechten Seite.) □

Bemerkungen.

- Adjazenzmatrizen von (ungerichteten) Graphen sind symmetrisch (Definition 7.1.51).
- Symmetrische Matrizen treten auch bei der Beschreibung quadratischer Formen auf (siehe Abschnitt 7.3.7).

Satz 7.3.8. *Sei $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Dann gilt:*

1. *f hat nur reelle Eigenwerte, die Nullstellen von χ_f (interessant wenn V unitärer Vektorraum);*
2. *Das charakteristische Polynom χ_f zerfällt in Linearfaktoren (interessant wenn V euklidischer Vektorraum);*
3. *Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.*

Beweis. Zu 1. Sei v ein Eigenvektor zum EW λ:

$$f(v) = \lambda v, \quad v \neq \mathbf{0}$$

Dann gilt

$$\lambda(v * v) = \lambda v * v = f(v) * v = v * f(v) = v * \lambda v = \bar{\lambda}(v * v)$$

also $\lambda = \bar{\lambda}$, und daher $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zu 2. Falls V unitär: Fundamentalsatz der Algebra. Falls V euklidisch: Sei $A := M_B^B(f)$ (symmetrische!) Darstellungsmatrix bzgl ON-Basis B. Fassen A als hermitische Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ auf. Dann ist

$$\chi_f(X) = \chi_A(X) = \det(A - XE) = (\lambda_1 - X)\cdots(\lambda_n - X)\,.$$

Wegen Teil 1 sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, also zerfällt $\chi_f(X)$ auch über $\mathbb{R}$.

Zu 3. Sei $f(u) = \lambda u$, $f(v) = \mu v$, $\lambda \neq \mu$. Dann

$$\begin{aligned}
\lambda(u * v) &= \lambda u * v = f(u) * v \\
&= u * f(v) && \text{(da } f \text{ selbstadjungiert)} \\
&= u * \mu v = \bar{\mu}(u * v) \\
&= \mu(u * v) && \text{(da } \mu \in \mathbb{R} \text{ nach Teil 1)}
\end{aligned}$$

Also $(\lambda - \mu)(u * v) = 0$. Da $\lambda \neq \mu$, ist $u * v = 0$, also $u \perp v$. □

7.3.5 Spektralzerlegung

Titel wird erst später klar. In diesem Abschnitt Lösung des Klassifikationsproblems von symmetrischen/hermitischen Matrizen bis auf orthogonale/unitäre Ähnlichkeit.

Satz 7.3.9. *Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer (unitärer) VR, und $f \in \mathrm{End}(V)$ selbstadjungiert. Dann existiert eine ON-Basis B von V aus Eigenvektoren von f (ein* Hauptachsensystem*); es gilt*

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ reelle Eigenwerte von f.

Beweis. Beweis per Induktion über $n := \dim V$.
Induktionsanfang: $n = 1$. Jeder Vektor $\neq \mathbf{0}$ ist Eigenvektor. Normieren liefert ON-Basis aus (einem) Eigenvektor.
Induktionsschluss: Sei $\dim V = n+1$ und Satz sei für Dimension n schon bewiesen. Nach Satz 7.3.8 (2) zerfällt χ_f in Linearfaktoren. Sei v_{n+1} Eigenvektor zu Eigenwert λ_{n+1}; o.B.d.A. $\|v_{n+1}\| = 1$ (sonst normieren).

$$U := \langle v_{n+1} \rangle$$

Behauptung: $U^\perp$ ist f-invariant, d.h., $x \in U^\perp \Rightarrow f(x) \in U^\perp$. Denn:

$$\begin{aligned}
f(x) * v_{n+1} &= x * f(v_{n+1}) && (f \text{ selbstadjungiert}) \\
&= x * \lambda_{n+1} v_{n+1} && (v_{n+1} \text{ ist EW zu EW } \lambda) \\
&= \lambda_{n+1}(x * v_{n+1})
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
x \in U^\perp &\Rightarrow x * v_{n+1} = 0 \\
&\Rightarrow f(x) * v_{n+1} = 0 && \text{(siehe oben)} \\
&\Rightarrow f(x) \in U^\perp
\end{aligned}$$

Wegen der Behauptung ist
$$f_0 := f|_{U^\perp} \in \mathrm{End}(U^\perp)$$
f_0 ist wie f selbstadjungiert.
Da $\dim U^\perp = n$ hat $U^\perp$ nach Ind.Vor. Basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ aus EW von f_0, und von f:
$$f(v_i) = f_0(v_i) = \lambda_i v_i$$
für $i \in \{1, \dots, n\}$. Da $v_i \perp v_{n+1}$ ist $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ eine ON-Basis von V aus Eigenvektoren von f. Eigenwerte sind reell nach Satz 7.3.8 (1). □

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(A \in \mathbb{C}^{n\times n})$ und $B = (u_1, \dots, u_n)$ ein Hauptachsensystem für f_A.
Sei D die Matrix mit den Spalten $u_1, \dots, u_n$.
Dann ist $S^\top AS$ $(S^\top A\bar{S})$ Diagonalmatrix nach Satz 7.3.9, und es gilt
$$A = S\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} S^\top = \lambda_1 u u_1^T + \cdots + \lambda_n u_n u_n^\top$$
$$A = S\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \bar{S}^\top = \lambda_1 u \bar{u}_1^T + \cdots + \lambda_n u_n \bar{u}_n^\top$$
Spektralzerlegung von A. (Spektrum: Eigenwerte)

Die $n \times n$-Matrizen $P_i := u_i u_i^\top$ heißen *Projektionsmatrizen*: für $v \in \mathbb{R}^n$ ist
$$P_i v = p_{U_i}(v)$$
die Projektion von v auf die Gerade $U_i = \langle u_i \rangle$. Denn:
$$\begin{aligned} p_{U_i} &= (v * u_i)u_i \\ &= u_i(u_i * v) \\ &= u_i(u_i^\top v) = (u_i u_i^\top)v = P_i v \end{aligned}$$
Spektralzerlegung:
$$Av = \lambda_1 p_{U_1}(v) + \cdots + \lambda_n p_{U_n}(v)$$
Jeder Summand liefert Anteil bezüglich $U_i = \mathbb{R}u_i$, den *Hauptachsen* des Systems.

7.3.6 Hauptachsentransformation

Gegeben: symmetrische (hermitische) Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $(\mathbb{C}^{n\times n})$
Gesucht: Hauptachsensystem = ON-Basis von $V = \mathbb{R}^n$ $(\mathbb{C}^n)$ aus Eigenvektoren von A.

Die Matrix S mit diesen Vektoren als Spalten ist dann orthogonal (unitär) und liefert Diagonalmatrix $D = S^\top AS$ $(D = \bar{S}^\top AS)$.

Lösung: Wie bei Diagonalisierung (Abschnitt 4.3.4) blos mit Orthonormalisierung.

1. Berechnung der Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ von A.
2. a) Zu jedem λ_i Berechnung einer Basis des Eigenraums
$$\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(A) = \mathrm{Kern}(A - \lambda_i E) = \mathrm{Lös}(A - \lambda_i E, \mathbf{0})$$
   b) Gram-Schmidtsches ON-Verfahren liefert ON-Basis für $\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(A)$
3. Aneinanderreihung aller ON-Basen aus Schritt 2 (b) liefert ON-Basis $(u_1, \ldots, u_n)$ von V, die nur aus Eigenvektoren besteht:
$$Au_i = \mu_i u_i \qquad \text{mit } \{\mu_1, \ldots, \mu_n\} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$$
$(u_1, \ldots, u_n)$: Hauptachsensystem.

Bemerkung. Verfahren führt stets zur Lösung, denn

- A ist diagonalisierbar (da A symmetrisch / hermitisch);
- die zusammengesetzten Basen aus 2 (b) ergeben ON-Basis nach Abschnitt 6.3.4 (Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal, Satz 7.3.8).

Beispiel: Sei
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$
(aus Abschnitt 4.3).

1. Eigenwerte. Nullstellen von $\det(A - XE_2) = (3 - X)^2 - 1$: $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$.
2. a) Eigenräume. Algebraische Vielfachheit = geometrische Vielfachheit = 1.
$$\mathrm{Eig}_{\lambda_1}(A) = \langle v_1 \rangle \text{ für } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{Eig}_{\lambda_2}(A) = \langle v_2 \rangle \text{ für } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
   b) ON-Basen.
$$u_1 := \frac{v_1}{\|v_1\|} = \sqrt{2}/2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$u_2 := \frac{v_2}{\|v_2\|} = \sqrt{2}/2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
3. Hauptachsensystem ist $B = (u_1, u_2)$.

7.3.7 Kurven 2ter Ordnung und Kegelschnitte

Eine *Kurve 2ter Ordnung* (in der Ebene $\mathbb{R}^2$) ist eine Menge der Gestalt

$$\Phi := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = (x_1, x_2) \text{ erfüllt } (7.9)\}$$

für

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0 \tag{7.9}$$

wobei $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, und a, b, c nicht alle Null.
Treten z.B. auf als Kennlinien von Bilinearformen, Abschnitt 6.2.4.

Beispiele:

1. Leere Menge:
$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 = -1\}$$
für $b = c = d = e = 0, f = -1$.

2. Ellipse: zum Beispiel
$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid ax_1^2 + cx_2^2 = 1\}$$
Spezialfall $a = c$: Kreis

3. Parabel: Zum Beispiel
$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2 = 0\}$$
(Scheitel im Punkt $(0, 0)$ und Achse auf der x_2-Achse)

4. Hyperbel: Zum Beispiel
$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 - x_2^2 = 1\}$$
(Mittelpunkt $(0, 0)$ und Hauptachse x_2)

5. Punkt: z.B. $\{(0, 0)\}$ beschrieben durch $x_1^2 + x_2^2 = 0$

6. Gerade: z.B. beschrieben durch $x_1^2 = 0$

7. Sich schneidendes Geradenpaar: z.B. beschrieben durch $x_1^2 - x_2^2 = 0$

8. Paralleles Geradenpaar: z.B. beschrieben durch $x_1^2 = 1$

Dies sind im wesentlichen alle Möglichkeiten.
Präzisierung mit Hilfe der Hauptachsentransformation.

Geometrisch Kegelschnitte: Schnitt einer Ebene mit Doppelkegel.
Experiment: Taschenlampe auf Wand, welche Fläche sieht man?

Fall 1 (leere Menge) und 8 (Parallele Geraden): Schnitt von Ebene mit *Kreiszylinder* (Grenzfall eines Kegels mit Kegelspitze im Unendlichen).

Matrixdarstellung:

$$x^\top Ax + (d\ e)x + f = 0$$

für symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

Alternative (Trick aus Abschnitt 8.1.6):

$$x^\top Bx = 0$$

für

$$B = \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix}$$

Beobachtung: $\det A$ ändert sich nicht, wenn wir drehen und verschieben.

Hauptachsentransformation: es gibt orthogonale Matrix S mit

$$D = S^\top AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

wobei λ_1, λ_2 Eigenwerte von A. Koordinatentransformation

$$x = Sx',\ x' = S^\top x$$

liefert (7.9) in neuen Koordinaten ($x^\top Ax = x'^\top Dx'$)

$$\lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 + (d'x_1' + e'x_2') + f' = 0$$

Falls $\lambda_i \neq 0$ kann durch Koordinatenwechsel auch noch das lineare Glied $b'x_i'$ zum Verschwinden gebracht werden:

$$\lambda_i(x_i')^2 + b_i x_i' = \lambda_i(\underbrace{x_i' + \frac{b_i}{2\lambda_i}}_{=:x_i''})^2 - \frac{b_i^2}{4\lambda_i^2}$$

Fallunterscheidung:

1. $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Ellipse oder degenerierte Fälle: die leere Menge oder ein Punkt.
2. $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Hyperbel oder degenerierte Fälle: eine Gerade oder zwei sich schneidende Geraden.
3. $\lambda_1\lambda_2 = 0$: Parabel oder degenerierte Fälle: die leere Menge, eine Gerade, oder zwei parallele Geraden.

7.3.8 Klassifikation von quadratischen Formen

Klassifizieren quadratische Formen $q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, und daher auch symmetrische Bilinearformen $B\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$. Beides keine linearen Abbildungen! Aber:
Nach Abschnitt 6.2.3 (Bilinearformen: kennt man eine, kennt man alle)
und 6.2.4 (Zusammenhang quadratische Formen und Bilinearformen)
können wir q schreiben als

$$q(x) = Ax * x$$

wobei $*$ das Standardskalarprodukt und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch.
Also können wir eine ON-Basis von $\mathbb{R}^n$ finden, die A diagonalisiert, d.h.

$$A = SDS^{-1} = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} S^\top$$

für eine orthogonale Matrix $S^{n\times n}$.
Schreiben y für $S^{-1}(x)$ (Koordinatenwechsel), und erhalten

$$q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

Klassifikation:

- Alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positiv oder alle negativ: q ist *elliptisch*.
- Mindestens ein λ_i ist Null: q heißt *parabolisch*.
- Sonst: q heißt *hyperbolisch*.

Wie kann man den Typ von q entscheiden, ohne die Nullstellen des charakteristischen Polynoms zu berechnen?

Lemma 7.3.10 (Vorzeichenregel von Descartes)**.** *Sei $\phi \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom,*

$$\phi(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 = (X - \lambda_1)\cdots(X - \lambda_n) \tag{7.10}$$

mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

1. *0 ist genau dann Nullstelle von ϕ, wenn $a_0 = 0$.*
2. *Alle Nullstellen von ϕ sind negativ $\Leftrightarrow a_{n-1}, \ldots, a_0 > 0$.*
3. *Falls n gerade ist:*
   alle Nullstellen von ϕ positiv $\Leftrightarrow a_{n-1} < 0, a_{n-2} > 0, \ldots, a_1 < 0,\ a_0 > 0$. (alternierend)
4. *Falls n ungerade ist:*
   alle Nullstellen von ϕ positiv $\Leftrightarrow a_{n-1} < 0, a_{n-2} > 0, \ldots, a_1 > 0,\ a_0 < 0$.

Beweis.
- Die erste Aussage ist klar (X ausklammern).
- Die zweite Aussage:
  $\Rightarrow$: folgt aus (7.10): ausmultiplizierte positive Ausdrücke haben positive Koeffizienten.
  $\Leftarrow$: wenn $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ positiv sind, dann ist $\phi(t) > 0$ für alle nicht-negativen $t \in \mathbb{R}$, also sind alle Nullstellen von ϕ negativ.
- Die dritte Aussage:

$$\begin{aligned} & \text{Alle Nullstellen von } \phi(X) \text{ positiv} \\ \Leftrightarrow\ & \text{Alle Nullstellen von } \phi(-X) \text{ negativ} \\ \Leftrightarrow\ & \text{Koeffizienten von } \phi(-X) \text{ positiv} && \text{(nach Teil 2)} \\ \Leftrightarrow\ & a_{n-1} < 0, a_{n-2} > 0, \ldots, a_1 < 0, a_0 > 0 \end{aligned}$$

  Hier ist Teil 2 anwendbar, da $\phi(-X)$ weiterhin normiert, wenn n gerade ist.
- Die vierte Aussage: analog zur dritten.

□

7.3.9 Anwendung: Hauptkomponentenanalyse

Experiment: Probanden beantworten Persönlichkeitsfragen zu Ihnen bekannten Personen, z.B.: “Nimmt sich die Person Zeit für Andere?”, “Wird die Person schnell zornig”, etc., auf einer Skala von $\{1, \ldots, 10\}$ (“trifft überhaupt nicht zu”, ..., bis “trifft voll und ganz zu”)

Ω: Grundmenge aller möglichen Versuchsergebnisse (Annahme: endlich).
$P\colon \mathcal{P}^\Omega \to [0,1] \subset \mathbb{R}$: Wahrscheinlichkeitsmaß.

Seien $X_1, \ldots, X_n \colon \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen. Schreiben X für $(X_1, \ldots, X_n)$.
Im Beispiel: $X_i(\omega) = a$ falls im Versuchsergebnis $\omega \in \Omega$ die Frage i mit a beantwortet wird.

Wichtige Definitionen:

- *Erwartungswert* von X_i:

$$E(X) := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$

- *Kovarianz* von X_i und X_j:

$$\operatorname{Cov}(X_i, X_j) := E[(X_i - E(X_i)) \cdot (X_j - E(X_j))]$$

  Information über ‘Korrelation’ zwischen X_i und X_j).
  Im Beispiel: die Frage “Wird die Person schnell zornig” und
  “Hupt die Person häufig im Straßenverkehr” sind vermutlich positiv korreliert.
  Verallgemeinerung der *Varianz* $V(X_i) := E((X_i - E(X_i))^2) = \operatorname{Cov}(X_i, X_i)$

- Die *Kovarianzmatrix*: Matrix aller paarweisen Kovarianzen von $X_1, \dots, X_n$

$$\operatorname{Cov}(X) := \begin{pmatrix} \operatorname{Cov}(X_1, X_1) & \cdots & \operatorname{Cov}(X_1, X_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{Cov}(X_n, X_1) & \cdots & \operatorname{Cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

  $\operatorname{Cov}(X)$ ist symmetrisch!

Satz 7.3.9 liefert: $\operatorname{Cov}(X)$ ist orthogonal diagonalisierbar! Bedeutung der Eigenwerte?
Bild malen vom typischen Spektrum.

Betrachten in unserem Beispiel die fünf größten Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren. Haben psychologische Interpretation:

1. Neurotizismus (selbstsicher und ruhig vs. emotional und verletzlich),
2. Extraversion (zurückhaltend und reserviert vs. gesellig),
3. Offenheit für Erfahrungen (konservativ und vorsichtig vs. erfinderisch und neugierig),
4. Gewissenhaftigkeit (unbekümmert und nachlässig vs. effektiv und organisiert), und
5. Verträglichkeit (wettbewerbsorientiert und antagonistisch vs. kooperativ, freundlich, mitfühlend).

"The big five". Klassiker in der Psychologie.
Ergebnis sehr stabil, z.B. bzgl. Veränderungen bei den Details des Experiments:

- andere Fragen,
- andere Skalen für die Antworten,
- andere Probanden,
- Fragen nicht über andere Personen, sondern über sich selbst, etc.

Zudem ist Ergebnis weitgehend kulturstabil.

Verfahren hat ebenfalls Anwendungen in Bilderkennung, Spracherkennung, maschinellem Lernen, etc. ("Clustering")

Die Hauptkomponentenanalyse heißt manchmal auch *"explorative Faktorenanalyse"*, ist aber nicht zu verwechseln mit der *"(konfirmatorischen) Faktorenanalyse"* (angewendet z.B. in der Psychologie): liefert aber oft ähnliche Ergebnisse (z.B. in obigem Experiment).

7.3.10 Der Silverstersche Trägheitssatz

V n-dimensionaler euklidischer VR.
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch
(bzw. $f\colon V \to V$ selbstadjungierte Abbildung).

Alle Eigenwerte reell: $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und

$$\chi_f(X) = (\lambda_1 - X) \cdot \dots \cdot (\lambda_n - \lambda)$$

$$\begin{aligned} n_+ &:= \text{Anzahl der } \lambda_i > 0 \\ n_- &:= \text{Anzahl der } \lambda_i < 0 \\ n_0 &:= \text{Anzahl der } \lambda_i = 0 \end{aligned}$$

(n_+, n_-, n_0) bzw. (n_+, n_-) heißt *Signatur* (oder *Typ*) von A (bzw f), bzw. Signatur der Bilinearform $B(x,y) = x^T Ay$, bzw. Signatur der quadratischen Form $q(x) := x^T Ax$.

$$\begin{aligned} n_+ + n_- &= \operatorname{rg}(A) \\ n_+ + n_- + n_0 &= n = \dim V \end{aligned}$$

Satz 7.3.11 (Sylvesterscher Trägheitssatz). *Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann gibt es eine invertierbare Matrix P so dass $P^\top AP$ von folgender Gestalt ist*

$$D := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Die Spalten von P bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$; diese heißt *Sylvesterbasis* der (semi-) Bilinearform $x * y := x^\top Ay$ ($x * y := \bar{x}^\top Ay$).

Beweis. Nach Satz 7.3.9 gibt es orthogonale Matrix S mit

$$D := S^\top AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

OBdA sind $\lambda_1, \dots, \lambda_{n_+}$ positiv, $\lambda_{n_++1}, \dots, \lambda_{n_++n_-}$ negativ, und $\lambda_{n_++n_-+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Seien

$$\begin{aligned}
\lambda_i &:= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} && \text{für } i \in \{1, \dots, n_+\} \\
\lambda_i &:= \frac{1}{\sqrt{-\lambda_i}} && \text{für } i \in \{n_+ + 1, \dots, n_+ + n_-\} \\
\lambda_i &:= 1 && \text{für } i \in \{n_+ + n_- + 1, \dots, n = n_+ + n_- + n_0\}
\end{aligned}$$

Setze

$$Q := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_{n_+} & & & & & & \\ & & & \lambda_{n_++1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_{n_++n_-} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Q ist invertierbar (alle Werte auf der Diagonalen ungleich 0)
und $Q^\top = Q$ (aber $Q^\top \neq Q^{-1}$!)
Dann gilt

$$Q^\top D Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

weil $\alpha_i \lambda_i \alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$ also folgt für $P := SQ \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
P^\top A P &= (SQ)^\top A (SQ) = Q^\top S^\top A S Q \\
&= Q^\top D Q
\end{aligned}$$

die angegebene Normalform. □

Bedeutung der Äquivalenzrelation $\sim_\top$, definiert auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ durch

$$A \sim_\top A' \Leftrightarrow \exists P \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : A' = P^\top A P$$

aus der Sicht der Bilinearformen $B \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:
Es gilt $A \sim_\top A'$ genau dann, wenn A und A' die Gramschen Matrizen von ein und derselben symmetrischen Bilinearform sind.

Beweis. Sei $U = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$,
und $V = (v_1, \dots, v_n)$ eine andere Basis, d.h., $P := \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ ist invertierbar.
Sei $A = (a_{ij})$ Gramsche Matrix von B bzgl. U, also $a_{ij} = B(e_i, e_j)$.
Dann gilt

$$\begin{aligned} B(w_i, w_j) &= v_i^\top A v_j \\ &= (Pe_i)^\top A (Pe_j) \\ &= e_i^\top P^\top A P e_j \\ &= e_i^\top A' e_j = a'_{ij} \end{aligned}$$

also ist A' Gramsche Matrix von B bzgl. V.

7.3.11 Spektralsatz

Klären nun: orthogonale Diagonalisierbarkeit.
Symmetrische Matrizen sind orthogonal diagonalisierbar, aber welche noch?
$f\colon V \to V$ diagonalisierbar gdw. V eine Basis hat aus Eigenvektoren von V.
Wann hat V eine ON-Basis aus Eigenvektoren von f?

Definition 7.3.12. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *normal* falls

$$A^\top \cdot A = A \cdot A^\top.$$

Analog heißt $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *normal* falls

$$\bar{A}^\top \cdot A = A \cdot \bar{A}^\top.$$

Bemerkungen.

- Symmetrische Matrizen mit $A^\top = A$ sind offensichtlich normal
  ($A^\top \cdot A = A \cdot A = A \cdot A^\top$)
- Orthogonale (und hermitische) Matrizen $A^{-1} = A^\top$ sind offensichtlich normal
  ($A^\top A = A^{-1} A = E_n = AA^{-1} = AA^\top$)

Die Matrix $\bar{A}^\top$ heißt *Adjungierte* von A. Falls $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Adjungierte gleich $A^\top$.

Lemma 7.3.13. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $*$ das Standardskalarprodukt von $\mathbb{C}$. Dann gilt*

$$Ax * y = x * (\bar{A}^\top y)$$

(Übrigens: diese Eigenschaft charakterisiert die Adjungierte bereits eindeutig).

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
Ax * y &= (Ax)^\top \bar{y} && \text{(Definition Standardskalarprodukt)}\\
&= x^\top A^\top \bar{y} && \text{(Rechenregel für Transposition)}\\
&= x^\top \overline{(\bar{A})^\top y)} && \text{(Rechenregel für Konjugation)}\\
&= x^\top * (\bar{A}^\top y) && \text{(Definition Standardskalarprodukt)}
\end{aligned}$$

□

Folgendes geht natürlich auch wieder unitär ...

Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:

$$A = \mathbf{0} \Leftrightarrow (Ax * y = 0 \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n)$$

$\Rightarrow$ ist trivial, $\Leftarrow$: mit $y := Ax$ haben wir $Ax * Ax = 0$, und damit $Ax = \mathbf{0}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, und damit $A = \mathbf{0}$. Falls A symmetrisch ist, lässt sich mehr sagen:

Lemma 7.3.14. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch. Dann gilt:*

$$A = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : Ax * x = 0$$

Beweis. $\Rightarrow$ ist trivial, $\Leftarrow$:

$$\begin{aligned}
0 &= A(x+y) * (x+y)\\
&= \underbrace{Ax * x}_{=0} + Ax * y + Ay * x + \underbrace{Ay * y}_{=0}\\
&= Ax * y + y * Ax && \text{da } A^\top = A\\
&= 2Ax * y
\end{aligned}$$

Setze $y = Ax$, dann erhalten wir $0 = Ax * Ax = ||Ax||^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, also $A = \mathbf{0}$. □

Falls A nicht symmetrisch ist, gilt Lemma 7.3.14 i.A. nicht: für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{‘\textit{schiefsymmetrische}’ Matrix}$$

gilt für alle $x \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
Ax * x &= -x * Ax\\
&= -Ax * x
\end{aligned}$$

also $Ax * x = 0$.

Proposition 7.3.15. *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ($A \in \mathbb{C}^{n\times n}$) ist genau dann normal, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ($x \in \mathbb{C}^n$)*

$$||Ax|| = ||A^\top x|| \qquad\qquad ||Ax|| = ||\bar{A}^\top x||$$

Beweis. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\begin{aligned} & \|Ax\| = \|A^\top x\| \\ \Leftrightarrow\ & \|Ax\|^2 = \|A^\top x\|^2 \\ \Leftrightarrow\ & Ax * Ax = A^\top x * A^\top x \\ \Leftrightarrow\ & x * A^\top Ax = x * AA^\top x & \text{(Lemma 7.3.13)} \\ \Leftrightarrow\ & x * (A^\top A - AA^\top)x = 0 \end{aligned}$$

was genau dann der Fall ist, wenn $A^\top A = AA^\top$:
$\Leftarrow$: trivial. $\Rightarrow$: folgt dann mit Lemma 7.3.14, da $A^\top A - AA^\top = (A^\top A)^\top - (AA^\top)^\top$ selbstadjungiert. □

Lemma 7.3.16. *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann normal, wenn $BC = CB$ wobei $B = (A + A^\top)/2$ und $C = (A - A^\top)/2$.*

Beweis.

$$\begin{aligned} BC &= (A + A^\top)/2 * (A - A^\top)/2 \\ &= (A^2 - (A^\top)^2 + A^\top A - AA^\top)/4 \\ CB &= (A^2 - (A^\top)^2 - A^\top A + AA^\top)/4 \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} BC = CB \ &\Leftrightarrow\ A^\top A - AA^\top = -A^\top A + AA^\top \\ &\Leftrightarrow\ AA^\top = A^\top A \end{aligned}$$

□

Lemma 7.3.17. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sowohl invariant unter sowohl $f := f_A$ als auch $f^\top := f_{A^\top}$. Dann ist auch $M^\top$ ebenfalls f und $f^\top$-invariant.*

Beweis. Sei $x \in M$ und $y \in M^\top$. Z.z.:

$$\begin{aligned} x * f(y) &= 0 & \Rightarrow M^\top \text{ ist } f\text{-invariant} \\ x * f^\top y &= 0 & \Rightarrow M^\top \text{ ist } f^\top\text{-invariant} \end{aligned}$$

Einfach:

$$\begin{aligned} x * f(y) &= f^\top(x) * y = 0 & \text{(da } M\ f^\top\text{-invariant)} \\ x * f^\top y &= f(x) * y = 0 & \text{(da } M\ f\text{-invariant)} \end{aligned}$$

□

Satz 7.3.18. *Sei V euklidischer VR,* $\dim V = n$*, und $f \in$* End(V)*, und $A := M_B^B(f)$ bezüglich einer Basis B von V. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Es existiert eine ON-Basis von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von f;*

2. *Das charakteristische Polynom χ_f zerfällt in Linearfaktoren und A ist normal;*

3. *A ist orthogonal ähnlich zu einer Diagonalmatrix.*
   (Man sagt A ist orthogonal diagonalisierbar.*)*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (3): wissen bereits (Satz 4.3.18): f ist diagonalisierbar.
Φ_B für $B = (b_1, \dots, b_n)$ ist der kanonische Basisisomorphismus

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$$

Für ON-Basis $(w_1, \dots, w_n)$ aus Eigenvektoren von f seien

$$u_1 := \Phi_B^{-1}(w_1), \dots, u_n := \Phi_B^{-1}(w_n)$$

die Koordinatenvektoren und $S := \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_n \end{pmatrix}$ ist die gesuchte Transformationsmatrix mit $D = S^{-1}AS$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= w_i * w_j && \text{(da } (w_1, \dots, w_n) \text{ ON-Basis)} \\ &= u_i^\top u_j && \text{(da } * \text{ Standardskalarprodukt)}\,. \end{aligned}$$

Also $S^\top S = E$, d.h., $S^\top = S^{-1}$.

(3) $\Rightarrow$ (1): wenn $u_1, \dots, u_n$ Spalten von S, dann ist $w_1 := \Phi_B(u_1), \dots, w_n := \Phi_B(u_n)$ ON-Basis aus Eigenvektoren wegen $u_i^\top u_j = w_i * w_j$.

(3) $\Rightarrow$ (2): Falls $D = S^{-1}AS = S^\top AS$ diagonal, dann ist auch $D^\top$ diagonal. Für solche Matrizen gilt $D^\top D = D^\top D$. Da $D^\top = S^\top A^\top S$ und damit $A^\top = SD^\top S^\top$ haben wir

$$\begin{aligned} AA^\top &= SDS^\top SD^\top S^\top \\ &= SDD^\top S^{-1} = SD^\top DS^\top = A^\top A \end{aligned}$$

Also ist A normal. Und: χ_D zerfällt in Linearfaktoren (Satz 4.3.18).

(2) $\Rightarrow$ (1): Ähnlich zum Beweis von Satz 7.3.9.
(Idee war: zeige f_A-Invarianz vom orthogonalen Komplement zu einem Eigenvektor.)
Setze $f^\top := f_{A^\top}$.
Ziel jetzt: Finde Eigenvektor x so dass $M := \langle x \rangle$ sowohl f_A als auch $f^\top$-invariant.

- Setze $B := (A + A^\top)/2$ und $C := (A - A^\top)/2$. Lemma 7.3.16: $BC = CB$.

- Wenden Satz 7.3.9 (Spektralzerlegung) auf die *symmetrische* Matrix B an: finden $\alpha \in \mathbb{R}$ und $y \in K := \mathrm{Kern}(B - \alpha E_n)$.

$$\begin{aligned} (B - \alpha E_n)(Cx) &= BCx - \alpha Cx \\ &= CBx - C\alpha x \\ &= C(B - \alpha E_n)x = 0\,. \end{aligned}$$

  Also ist $f_C(K) \subseteq K$.

- Wenden Satz 7.3.9 auf symmetrische Matrix $(f_C)|_K$ an: finden $x \in K$ mit $C(x) = \beta x$. Dann gilt
$$Ax = Bx + Cx = \alpha x + \beta x = (\alpha + \beta)x$$
- Nach Lemma 7.3.17 ist $M^\top$ sowohl f_A- als auch $f^\top$-invariant.
- $f|_M : M \to M$ wieder normal.

Induktion wie im Beweis von Satz 7.3.9. □

Satz 7.3.19. *Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. *Es existiert eine ON-Basis von $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A;*
2. *A ist normal;*
3. *A ist unitär ähnlich zu einer Diagonalmatrix.*
   (Man sagt A ist unitär diagonalisierbar.*)*

Korollar 7.3.20 (Klassifikation bis auf unitäre Ähnlichkeit)**.** *Zwei normale Matrizen sind genau dann unitär ähnlich, wenn sie die gleichen Eigenwerte (mit den gleichen Vielfachheiten) haben.*

Korollar 7.3.21 (Normalform unitärer Matrizen)**.** *Eine komplexe Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist genau dann unitär ($A^{-1} = \bar{A}^\top$), wenn sie zu einer Diagonalmatrix unitär ähnlich ist, deren Diagonalelemente alle den Betrag 1 haben, d.h., $\exists S \in U(n)$ mit*
$$\bar{S}^\top AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
mit $|\lambda_i| = 1$.

Beweis. $\Rightarrow$: Falls A unitär ist, dann auch normal, und unitäre Diagonalisierbarkeit folgt direkt aus Satz 7.3.19. Aussage folgt, da alle Eigenwerte von unitären Matrizen Betrag 1 haben (Satz 7.3.2).

$\Leftarrow$: Für Diagonalmatrizen D ist $\bar{D}^\top = \bar{D}$, und falls alle Diagonalelemente Betrag 1 haben gilt $D\bar{D} = E$, also ist D unitär. Und damit auch $A = \bar{S}^\top AS$ als Produkt unitärer Matrizen. □

Wir erwähnen ohne Beweis:

Satz 7.3.22 (Normalform orthogonaler Matrizen)**.** *Eine reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann orthogonal ($A^{-1} = A^\top$), wenn sie zu einer Matrix der folgenden Gestalt* *orthogonal ähnlich ist*

$$\begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & K_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & K_m \end{pmatrix}$$

wobei $K_1, \dots, K_m$ *die Form*

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$ *haben. (Drehmatrizen!)*

7.4 Singulärwertzerlegung

Zur Einordnung:

	Klassisch, S (und T) invertierbar	S (und T) orthogonal/unitär
$S^{-1}AS$	Ähnlichkeit Abschnitt 7.1.4	Orthogonale/unitäre Ähnlichkeit Abschnitt 7.3
SAT	Äquivalenz Abschnitt 7.1.2	Orthogonale/unitäre Äquivalenz

Vorteile:

- Auch anwendbar für lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen V, W (mit Skalarprodukt) verschiedener (endlicher) Dimension;
- effiziente numerische Verfahren, große Bedeutung in der numerischen Mathematik;
- mathematischer Kern der Hauptkomponentenanalyse in der multivariaten Statistik, mit Anwendungen in der Datenkompression.

Satz 7.4.1. *Sei* $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *(*$A \in \mathbb{C}^{n\times m}$*). Dann gibt es eine ON-Basen* $B = (e_1, \dots, e_m)$ *von* $\mathbb{R}^m$ *und* $C = (f_1, \dots, f_n)$ *von* $\mathbb{R}^n$ *so dass für ein* $k \le m$ *gilt:*

$$f(e_1) = \lambda_1 f_1, \dots, f(e_k) = \lambda_k f_k$$
$$f(e_{k+1}) = \dots = f(e_m) = 0$$
$$M_C^B(f_A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & & \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & & \lambda_n & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$: sind natürlich keine Eigenwerte! Aber ein guter Ersatz dafür.

Beweis. Wenden den Spektralsatz (Satz 7.3.9) auf die symmetrische Matrix $A^\top A$ an. Erhalten ON-Basis $e_1, \dots, e_m$ für $\mathbb{R}^m$ so dass $A^\top A e_i = \sigma_i e_i$. Dann gilt:

$$Ae_i * Ae_j = A^\top Ae_i * e_j = \sigma_i e_i * e_j = \sigma_i \delta_{ij} \,.$$

Sortieren um, so dass $\sigma_1, \dots, \sigma_k \neq 0$.
Definieren $f_i := \frac{Ae_i}{\|Ae_i\|}$ für $i \in \{1, \dots, k\}$.
Ergänzen $f_1, f_2, \dots, f_k$ zu einer ON-Basis $f_1, \dots, f_n$ von $\mathbb{R}^n$. $\square$

Kapitel 8

Affine und Projektive Geometrie

Verschiedene Zugänge zur Geometrie:

- *analytische Geometrie.* Mit Hilfe der linearen Algebra.
- *synthetische Geometrie.* Axiomatisch: es gibt Punkte, Geraden, und Axiome, die diese erfüllen; → Euklid!

Geometrien: euklidische, nicht-euklidische, affine, projektive, hyperbolische, elliptische, ...

8.1 Affine Geometrien

8.1.1 Definitionen

Eine *Geometrie* ist gegeben durch ein Tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ bestehend aus

- einer Menge $\mathcal{P}$ (den *Punkten*);
- einer Menge $\mathcal{G}$ (den *Geraden*);
- einer *Inzidenzrelation* $I \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{G}$ (eine binäre Relation). Sprechweise für $(P, g) \in I$:
  - P *inzidiert* mit g, oder P *liegt auf* g.
  - g *inzidiert* mit P, oder g *geht durch* P.

so dass folgende Eigenschaften erfüllt werden:

1. Je zwei verschiedene Punkte $P, Q \in \mathcal{P}$ inzidieren mit genau! einer Geraden $g \in \mathcal{G}$; Bezeichung $PQ := g$;
2. Jede Gerade inzidiert mit mindestens zwei Punkten;
3. Es gibt drei nicht kollineare Punkte (d.h., Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen).

Definition 8.1.1. Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ eine Geometrie und $\| \subseteq \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{G}$ (siehe Abschnitt 1.2.1). Sprechweise für $g_1 \parallel g_2$: die Geraden g_1 und g_2 sind *parallel* (die Äquivalenzklassen von $\|$ heissen auch *Parallelenscharen*). Dann heißt $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I, \|)$ *affine Geometrie* falls folgende Axiome gelten:

4. *Parallelenaxiom*: zu jeder Geraden $g \in \mathcal{G}$ und jedem Punkt $P \in \mathcal{P}$ gibt es genau! eine zu g parallele Gerade durch P.

5. *Dreiecksaxiom*: Für nicht kollineare Punkte $A, B, C \in \mathcal{P}$ (es folgt: $A \neq B$!) und Punkte $A', B' \in P$ mit $A'B' \parallel AB$ gibt es einen Punkt $C' \in \mathcal{P}$, der sowohl auf der Parallelen zu AC durch A' als auch auf der Parallelen zu BC durch B' liegt. $\rightsquigarrow$ Übergang auf ähnliche ("affine") Gebilde.

Beispiele. Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$ bzw. des Raumes $\mathbb{R}^k$ mit üblichen Geraden $g = \vec{u} + \mathbb{R}\vec{v}$ und Parallelität bilden affine Geometrie. Inzidenz: $(P, g) \in I :\Leftrightarrow P \in g$.

Algebraischer Zugang zur Geometrie. Felix Klein "Erlanger Programm" (1872): Beschreibe Geometrien mit Hilfe von Permutationsgruppen. Betrachten die Gruppe der Permutationen, die bestimmte Aspekte der Geoemtrie (wie etwa Längen, oder Winkel, etc) *erhalten*.

8.1.2 Wiederholung: Untervektorräume

Proposition 8.1.2. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und $U \subseteq V$. Dann sind äquivalent.*

1. *U ist ein Untervektorraum von V;*

2. *U ist die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystem.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $U = \text{Lös}(A, \mathbf{0})$ für $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Seien $u, v \in U$. Dann gilt $Au = Av = \mathbf{0}$, und damit gilt $A(u + v) = Au + Av = \mathbf{0}$. Analog: nachrechnen, dass $\alpha u \in U$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ und $u \in U$.

Umgekehrt sei $U \leq V$ und $(u_1, \ldots, u_m)$ eine Basis von U. Nach dem Satz von Steinitz findet sich eine Basis B von V der Gestalt $(u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n)$. Definiere $T := M^B_{E_n}(\text{id})$, eine invertierbare Matrix, und seien $X \in \mathbb{K}^{(m,n)}$ und $R \in \mathbb{K}^{(n-m,n)}$ so dass $T = \begin{pmatrix} X \\ R \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} v \in U &\Leftrightarrow v \in \langle u_1, \ldots, u_m \rangle \\ &\Leftrightarrow Tv \in \langle Tu_1, \ldots, Tu_m \rangle = \langle e_1, \ldots, e_m \rangle \\ &\Leftrightarrow (Tv)_{m+1} = \cdots = (Tv)_n = 0 \\ &\Leftrightarrow Rv = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow v \in \text{Lös}(R, \mathbf{0}) \end{aligned}$$

□

Beispiel 8.1.3. Es sei $V = \mathbb{R}^4$. Betrachten

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Dann kann U beschrieben werden als

$$\begin{aligned} U &= \{\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}\} \\ &= \{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \mid v_1 = v_2, v_4 = 0\} \\ &= \text{Lös}(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{0}) \,. \end{aligned}$$

△

8.1.3 Affine Unterräume

Idee: Lösungsmengen von allgemeinen linearen Gleichungssystemen: "affiner Unterraum". Offiziell definieren wir affine Unterräume mit Hilfe von Untervektorräumen.

Definition 8.1.4. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist $W \subseteq V$ ein *affiner Unterraum* von V falls es einen Untervektorraum $U \leq V$ und ein $w \in W$ gibt, so dass $W = \{w + u \mid u \in U\}$.

Bild malen im $\mathbb{R}^2$. In anderen Worten: die affinen Unterräume von V sind genau die *Nebenklassen* von Untervektorräumen von V. Die *Dimension* eines affinen Raumes $W = \{w + u \mid u \in U\}$ ist definiert als die Dimension des Untervektorraumes U.

Proposition 8.1.5. *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und $W \subseteq V$. Dann sind äquivalent:*

1. *W ist affiner Unterraum von V;*
2. *W ist die Lösungsmenge von einem linearen Gleichungssystem über V;*
3. *für alle $w_1, \ldots, w_l \in W$ and $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{K}$ mit $\alpha_1 + \cdots + \alpha_l = 1$ ist*

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_l w_l \in W \,.$$

Beweis. (2) ⇒ (1): Sei $Ax = b$ ein LGS. Nach Abschnitt 3.3.2 gilt

$$\text{Lös}(A, b) = v_0 + \text{Lös}(A, \mathbf{0})$$

und da $\text{Lös}(A, \mathbf{0}) \leq V$ ist die Lösungsmenge eines LGS ein affiner Unterraum von V.

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei $W = \{w + u \mid u \in U\}$ für $U \leq V$. Nach Proposition 8.1.2 gibt es $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit $U = \text{Lös}(A, \mathbf{0})$. Dann ist

$$\begin{aligned} W &= \{w + u \mid u \in \text{Lös}(A, \mathbf{0})\} \\ &= \{w + u \mid Au = \mathbf{0}\} \\ &= \{w' \mid A(w' - w) = \mathbf{0}\} = \text{Lös}(A, Aw) \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (3): Sei $W = \{w + u \mid u \in U\}$ für $U \leq V$. Es seien $w_1, \ldots, w_l \in W$ und $\alpha, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{K}$ so dass $\alpha_1 + \cdots + \alpha_l = 1$. Wir schreiben u_i für $w_i - w_1$. Dann gilt

$$\sum_i \alpha_i w_i = \sum_i \alpha_i (w_1 + u_i) = \underbrace{\sum_i \alpha_i}_{=1} w_1 + \sum_i \alpha_i u_i \in W$$

(3) $\Rightarrow$ (2): Es genügt zu zeigen, dass $U := \{v - v' \mid v, v' \in W\} \leq V$, denn für ein beliebiges $w \in W$ ist $\{w + u \mid u \in U\} = W$: zunächst ist für $v, v' \in W$ nach Annahme auch $w + v - v' \in W$ da $1 + 1 - 1 = 1$. Umgekehrt lässt sich jedes $w' \in W$ schreiben als $w' = w + w' - w$ und ist damit in $\{w + u \mid u \in U\}$. Sei $u \in U$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gibt es $v, v' \in W$ mit $v - v' = u$. Es gilt

$$\alpha u = \alpha v - \alpha v' = \underbrace{\alpha v - \alpha v' + v'}_{\in W} - v' \in U$$

Seien nun $u_1, u_2 \in U$. Dann ist $u_1 = v_1 - v_1'$ und $u_2 = v_2 - v_2'$ für $v_1, v_1', v_2, v_2' \in W$. Also ist nach Annahme $w := v_1 - v_1' + v_2 \in W$, und damit gilt $u_1 + u_2 = w - v_2' \in U$. $\square$

Definition 8.1.6. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $M \subseteq V$. Die *affine Hülle* $\langle M \rangle_{\text{Aff}}$ einer Teilmenge $M \subseteq V$ ist der kleinste affine Unterraum von V, der M enthält.

Ist ein Hüllenoperator (vgl. Abschnitt 2.4.1).

Proposition 8.1.7. *Es gilt*

$$\langle M \rangle_{\text{Aff}} = \{\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n \mid w_1, \ldots, w_n \in M, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}, \sum_i \alpha_i = 1\}$$

Beweis. Sicherlich ist $M \subseteq M' := \{\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n \mid w_1, \ldots, w_n \in M, \sum_i \alpha_i = 1\}$. Seien nun $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{K}$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_l = 1$ und $w_1, \ldots, w_l \in W'$ mit $w_i = \sum_j \alpha_j^i w_j^i$ für $w_j^i \in M$ und $\sum_j \alpha_j^i = 1$ für alle $i \leq l$. Dann gilt

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_l w_l = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j^i w_j^i \in W'$$

da $\sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j^i = \sum_i \alpha_i \sum_j \alpha_j^i = \sum_i \alpha_i = 1$. Also ist M' nach Proposition 8.1.5 ((3) $\Rightarrow$ (1)) ein affiner Unterraum von V. Da $\langle M \rangle_{\text{Aff}}$ der kleinste affine Unterraum von V ist, der M enthält, folgt, dass $\langle M \rangle_{\text{Aff}} \subseteq M'$.

Umgekehrt sei $w \in M'$. Dann gibt es $w_1, \ldots, w_n \in M$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $\sum_i \alpha_i = 1$ so dass $w = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n$. Wegen Proposition 8.1.5 ((1) $\Rightarrow$ (3)) angewandt auf $\langle M \rangle_{\text{Aff}}$ ist $w \in \langle M \rangle_{\text{Aff}}$. $\square$

8.1.4 Affine Räume und affine Geometrie

> L'algèbre n'est qu'une géométrie écrite; la géométrie n'est qu'une algèbre figurée.
> Sophie Germain

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $\dim V \geq 2$.

Definition 8.1.8. Definiere $\mathrm{Geom}(V) := (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I, \|)$ wobei

- $\mathcal{P} := V$ (Punkte)
- $\mathcal{G} := \{v + U \mid U \leq V, \dim(U) = 1\} = \{v + \mathbb{K}u \mid u, v \in V, u \neq v\}$ (Geraden: die 1-dimensionalen affinen Unterräume von V).
- $(v, g) \in I :\Leftrightarrow v \in g$ (Inzidenz).
- Für $g_1 = v_1 + \mathbb{K}u_1$ und $g_1 = v_1 + \mathbb{K}u_1$ gilt $g_1 \parallel g_2 :\Leftrightarrow (\mathbb{K}v_1 = \mathbb{K}v_2)$ (Parallelität)

Satz 8.1.9. *Für jeden* $\mathbb{K}$*-Vektorraum* V *mit* $\dim V \geq 2$ *ist* $\mathrm{Geom}(V)$ *eine affine Geometrie.*

Beweis. Es müssen die Axiome (1)-(5) für affine Geometrien nachgewiesen werden.

- Die durch zwei Punkte $v, w \in V$ eindeutig bestimmte Gerade ist gegeben durch $v + \mathbb{K}(w - v)$;
- Jede Gerade $g = v + \mathbb{K}u$ inzidiert mindestens mit v und mit $v + u$ (und $v \neq u + v$);
- Es gibt drei nicht kollineare Punkte, z.B. $\mathbf{0}$, v_1, v_2 für beliebige linear unabhängige Vektoren v_1, v_2 (existieren wegen $\dim V \geq 2$).
- Parallelenaxiom: die zu der Geraden $v + U$ parallele Gerade durch Punkt $w \in U$ ist $w + U$.
- Dreiecksaxiom: Seien $u, v, w \in \mathbb{K}^n$ nicht kollinear und $u', v' \in \mathcal{P}$ mit $u' - v' = \lambda(u - v)$ für $\lambda \in \mathbb{K}$ (der 'Verzerrungsfaktor'). Gesucht ist ein Punkt w' der sowohl auf der Geraden $g' := v' + \mathbb{R}(w - v)$ als auch auf der Geraden $h' := u' + \mathbb{R}(w - u)$ liegt. Der Punkt w' berechnet sich wie folgt:

  $$w' = u' + \lambda(w - u)$$

  Dieser Punkt liegt offensichtlich auf h', aber auch auf g', denn

  $$\begin{aligned} u' + \lambda(w - u) &= u' + \lambda((w - v) - (u - v)) \\ &= u' + \lambda(w - v) - u' + v' \\ &= v' + \lambda(w - v) \end{aligned}$$

□

Satz 8.1.10 (Pappos)**.** *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum,* $\dim V \geq 2$ *und* $\mathrm{Geom}(V) = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I, \|)$ *die zugehörige affine Geometrie. Es seien $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 \in \mathcal{P}$, $g, h \in \mathcal{G}$ so dass $P_1, P_3, P_5 \in g$ und $P_2, P_4, P_6 \in h$. Falls $P_1P_2 \parallel P_4P_5$ und $P_2P_3 \parallel P_5P_6$, dann auch $P_3P_4 \parallel P_6P_1$.*

Beweis. Fall $g \parallel h$ (auch *der kleine Pappos* genannt): Wähle Koordinaten so, dass $P_6 = (0,0), P_2 = (1,0), P_1 = (0,1), P_5 = (c,1), c \neq 0$ ist. Aus $P_1P_2 \parallel P_5P_4$ und $P_6P_5 \parallel P_2P_3$ folgt $P_3 = (c+1, 1)$ und $P_4 = (c+1, 0)$ und damit $P_1P_6 \parallel P_3P_4$.

Sonst: g und h schneiden sich in $Z \in \mathcal{P}$. Wähle Koordinaten so, dass $Z = (0,0)$, $P_1 = (0,1)$, $P_6 = (1,0)$ ist. Dann gilt $P_5 = (0,c)$ und $P_3 = (0,d)$ für $c, d \notin \{0,1\}$. Da $P_5P_6 \parallel P_3P_2$, gilt $P_2 = (\frac{d}{c}, 0)$. Wegen $P_1P_2 \parallel P_5P_4$ folgt dann, dass $P_4 = (d, 0)$ sein muss. Also hat die Gerade P_3P_4 die Steigung -1 und ist damit parallel zu P_1P_6. □

Unter gewissen Vorraussetzungen gilt sogar die Umkehrung von Satz 8.1.12. Um das formal ausdrücken zu können, benötigen wir zunächst folgende Definition.

Definition 8.1.11. Zwei Geometrien $(\mathcal{P}_1, \mathcal{G}_1, I_1, \|_1)$ und $(\mathcal{P}_2, \mathcal{G}_2, I_2, \|_2)$ heißen *isomorph* falls es Bijektionen $\phi\colon \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ und $\psi\colon \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ gibt so dass für alle $P \in \mathcal{P}_1$ und $g, g' \in \mathcal{G}_1$ gilt:

$$(P, g) \in I_1 \Leftrightarrow (\phi(P), \phi(g)) \in I_2$$
$$(g, g') \in \|_1 \Leftrightarrow (\psi(g), \psi(g')) \in \|_2$$

Satz 8.1.12. *Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I, \|)$ eine affine Geometrie. Wenn $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I, \|)$ den Satz von Pappos erfüllt, dann gibt es einen Körper $\mathbb{K}$ und einen Vektorraum V über $\mathbb{K}$ so dass $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I, \|)$ isomorph ist zu* $\mathrm{Geom}(V)$*.*

Ohne vollen Beweis. Aber wo kommt $\mathbb{K}$ her?

Idee: wähle $O \in \mathcal{P}$ beliebig und setze $0 := O$. Wähle $\ell \in \mathcal{G}$ mit $I(0, \ell)$.
Setze $\mathbb{K} := \{P \in \mathcal{P} \mid I(P, \ell)\}$.

Addition in $\mathbb{K}$. Seien $A, C \in \mathbb{K}$.

1. Wähle $B \in \mathcal{P} \setminus \mathbb{K}$ (es gibt drei nicht kollineare Punkte: Axiom 3).
2. Sei n die zu $0B$ parallele Gerade durch k (Parallelenaxiom: Axiom 4).
3. Sei m die zu ℓ parallele Gerade durch B (Parallelenaxiom: Axiom 4).
4. Sei D der Schnittpunkt von m und k (Dreiecksaxiom: Axiom 5).
5. Sei n die zu BC parallele Gerade durch D (Parallelenaxiom: Axiom 4).
6. Definieren $A + C$ als den Schnittpunkt von n mit ℓ (Dreiecksaxiom: Axiom 5).

Nachrechnen, dass die so definierte Addition eine Gruppe bildet!

Multiplikation in $\mathbb{K}$. Seien $A, C \in \mathbb{K}$. Idee: Strahlensatz.

- Wähle $1 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ beliebig.
- Wähle $B \notin \mathbb{K}$ beliebig.
- Es sei h die zu $1B$ parallele Gerade durch A (Parallelenaxiom: Axiom 4).
- Es sei D der Schnittpunkt von h mit $\mathbf{0}B$ (Dreiecksaxiom: Axiom 5).
- Es sei k die zu BC parallele Gerade durch D (Parallelenaxiom: Axiom 4).
- Definieren AC als den Schnittpunkt von k mit ℓ (Dreiecksaxiom: Axiom 5).

(Idee: Strahlensatz, $\|AC\|/\|C\| = \|A\|/1$.)

Müssen nachweisen, dass $AC = CA$. Ansatz: führe die Konstruktion von AC und von CA im gleichen Bild durch (mit h', D' und k' die bei der Konstruktion von CA auftretenden Pendants zu h, D und k).

Es gilt $h \parallel h'$ und $BC \parallel D(A{\cdot}C)$. Dann ist nach dem Satz von Pappos $(A{\cdot}C)D' \parallel BA$, und damit ist $(A \cdot C)D' = k'$ und $A \cdot C = C \cdot A$.

Noch nicht fertig:

- Viel Arbeit: Nachrechnen, dass alle anderen Körperaxiome gelten!
- Brauchen auch noch V, nicht nur $\mathbb{K}$.
  Idee: $\dim V$ = minimale Anzahl n von Punkten $P_1, \dots, P_n$, so dass $\langle P_1, \dots, P_n \rangle = \mathcal{P}$. Die lineare Hülle ist mit Hilfe von $\mathbb{K}$ leicht definierbar.
- Müssen nachrechnen, dass $\mathrm{Geom}(V)$ isomorph ist zu $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I, \parallel)$.

8.1.5 Affine Abbildungen

Seien V, W Vektorräume über Körper $\mathbb{K}$.

Definition 8.1.13. Eine Abbildung $\phi\colon V \to W$ heißt *affine Abbildung* von V nach W falls eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ und ein Vektor $w \in W$ existieren, so dass für alle $v \in V$:

$$\phi(v) = f(v) + w$$

Übung 27. Zeigen Sie: die bijektiven affinen Abbildungen $f\colon V \to V$ bilden bezüglich Hintereinanderausführung eine Gruppe

$$\mathrm{Aff}(V) := \{\phi\colon V \to V \mid \phi \text{ affin und bijektiv}\},$$

die Gruppe der *affinen Transformationen* von V.

Beispiel 8.1.14. Translationen $x \mapsto x + w$ für $w \in W$ sind spezielle affine Abbildungen und bilden eine Untergruppe $T(V)$ von $\mathrm{Aff}(V)$. △

8.1.6 Matrizendarstellung affiner Abbildungen

Affine Abbildungen $\phi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ haben die Form

$$\phi(x) = Ax + b$$

für $x \in \mathbb{K}^{n\times 1}$, $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{K}^{m\times 1}$ wobei $A = M^{B_n}_{B_n}(f)$ die zu f gehörige Matrix bzgl. der Standardbasen $B_n = (e_1, \dots, e_n)$ und $B_m = (e_1, \dots, e_m)$.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Alternative Matrixendarstellung für $\phi(x) = Ax + b$ durch $(m+1)\times(n+1)$-Matrizen:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} & b_m \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Folgerung für Speziallfall $n = m$:

Satz 8.1.15. *Die Gruppe* $\mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n)$ *(der bijektiven affinen Abbildungen) ist isomorph zur Gruppe der invertierbaren Matrizen der Form*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} & & & b_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{K}^n)$ *(invertierbare Matrizen) und* $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Bemerkung: $\det(\tilde{A}) = \pm\det(A)$ (Entwicklung nach letzter Zeile).

8.2 Projektive Geometrie

8.2.1 Einführung

Warum?

- Glanzstück der Mathematik, gehört zur mathematischen Allgemeinbildung
- Eine der Grundlagen der *algebraischen Geometrie*

- Geometrie mit schöner Dualitätstheorie
- Spannende Forschungsfragen im Bereich der *endlichen Geometrien.*

Definition 8.2.1. Eine Geometrie $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ heißt *projektive Geometrie* wenn gilt

2' (1. Reichhaltigkeitsaxiom) Jede Gerade inzidiert mit mindestens drei Punkten.

3' (2. Reichhaltigkeitsaxiom) Es gibt mindestens zwei verschiedene Geraden.

4' Axiom von Veblen-Young: Sind A, B, C, D vier Punkte, so dass AB und CD mit einem gemeinsamen Punkt inzidieren, so inzidieren auch AC und BD mit einem gemeinsamen Punkt.

Wenn man [4'] durch das strengere Axiom

4" Sind g und h zwei verschiedene Geraden, so gibt es genau einen Punkt, der mit g und h inzidiert

ersetzt, so spricht man auch von einer *projektiven Ebene.*
(4' bzw 4" ersetzt das Parallelenaxiom in affinen Geometrien.)

Beispiel. Die Fano Ebene.

8.2.2 Affin nach projektiv und zurück

Starten von einer affinen Geometrie $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I, ||)$, und

- ergänzen $\mathcal{P}$ um je einen Punkt pro Äquivalenzklasse von $||$;
- ergängen $\mathcal{G}$ um eine Gerade durch alle neuen Punkte.

Auf diese Weise erhalten wir eine projektive Geometrie, die der *projektive Abschluss* von $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I, ||)$ genannt wird.

Insbesondere: für jeden $\mathbb{K}$-Vektorraum V erhalten wir über die affine Geometrie $\mathrm{Geom}(V)$ auf diese Weise auch eine projektive Geometrie, $\mathrm{PGeom}(V)$.

Umgekehrt, sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ eine projektive Geometrie, so erhalten wir eine affine Geometrie wie folgt: TODO

8.2.3 Homogene Koordinaten

Alternative Konstruktion von $\mathrm{PGeom}(\mathbb{K}^2)$ mit Hilfe der Untervektorräume von $\mathbb{K}^3$: definieren

- $\mathcal{P}$: die eindimensionalen Unterräume von $\mathbb{K}^3$,
- $\mathcal{G}$ die zweidimensionalen Unterräume von $\mathbb{K}^3$;
- $I(P, g)$ falls $P \subseteq g$.

8.2.4 Pappos projektiv

Projektive Variante des Satzes von Pappos.

Satz 8.2.2 (Pappos in projektiver Variante)**.** *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und* PGeom *die zugehörige projektive Geometrie. Liegen sechs Punkte $P_1, \dots, P_6 \in \mathcal{P}$ einer projektiven Ebene abwechselnd auf zwei Geraden g und h, so sind die folgenden Punkte kollinear:*

$$P_7 := \overline{P_1 P_2} \cap \overline{P_4 P_5}$$
$$P_8 := \overline{P_6 P_1} \cap \overline{P_3 P_4}$$
$$P_9 := \overline{P_2 P_3} \cap \overline{P_5 P_6}$$

Pappos ist wichtig für *Koordinatisierbarkeit* ...

8.2.5 Dualität

8.2.6 Projekt: $(\mathbb{F}_7)^3$

Wir wollen ein Kartenspiel entwerfen mit den folgenden Eigenschaften:

A Jede Karte trägt acht Symbole;

B Zwei verschiedene Karten haben genau ein gemeinsames Symbol;

C Kein Symbol taucht auf allen Karten auf.

Idee. Betrachten $(\mathbb{F}_7)^3$. Die Symbole sind die eindimensionalen Untervektorräume, die Karten die zweidimensionalen. Ein Symbol S ist genau dann auf einer Karte K abgebildet, falls S ein Untervektorraum ist von K. Eine projektive Ebene!

1. Beweisen Sie, dass unser Kartenspiel A, B, und C erfüllt.
2. Wie viele Symbole gibt es?
   a) Der Schnitt zweier verschiedener Symbole ist $\{\mathbf{0}\}$.
   b) Wie viele von $\mathbf{0}$ verschiedene Punkte gibt es in $(\mathbb{F}_7)^3$?
   c) Wie viele von $\mathbf{0}$ verschiedene Punkte gibt es in jedem Symbol?
3. Wie viele Karten gibt es?
   a) Wie viele Karten enthalten ein Paar verschiedener Symbole?
   b) Wie viele Paare von verschiedenen Symbolen gibt es?
   c) Wie viele Paare von verschiedenen Symbolen gibt es auf jeder Karte?
4. Bonus: Zeigen Sie, dass unser Kartenspiel maximal viele Karten hat.
   a) Wie viele Karten maximal können sich ein Symbol teilen, wenn man die Regeln A, B, C einhalten will?
   b) Betrachte eine feste Karte, und bestimme, wie viele anderen Karten maximal dazugenommen werden können.

Literaturverzeichnis

[1] M. Bodirsky. Introduction to mathematical logic, 2023. Course notes, TU Dresden, `https://wwwpub.zih.tu-dresden.de/~bodirsky/Logic.pdf`.

[2] M. Bodirsky. Introduction to mathematical logic. Lecture Notes, https://wwwpub.zih.tu-dresden.de/˜bodirsky/Logic.pdf, 2023.

[3] T.-W. J. Chou and G. E. Collins. Algorithms for the solution of systems of linear Diophantine equations. *SIAM Journal on Computing*, 11:687–708, 1982.

[4] G. Havas and C. Wagner. Matrix reduction algorithms for euclidean rings. In *Proc. 1998 Asian Symposium on Computer Mathematics*, pages 65–70. Lanzhou University Press, 1998.

[5] R. Kannan and A. Bachem. Polynomial algorithms for computing the Smith and Hermite normal forms of an integer matrix. *SIAM Journal on Computing*, 8(4):499–507, 1979.

[6] A. K. Lenstra, H. W. Lenstra, Jr., and L. Lovász. Factoring polynomials with rational coefficients. *Math. Ann.*, 261:515–534, 1982.

[7] A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming.* Wiley - Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1998.

[8] J. von zur Gathen and D. Panario. Factoring polynomials over finite fields: A survey. *Journal of Symbolic Computation*, 31(1):3–17, 2001.