Tietorakenteet ja algoritmit

Antti Laaksonen

5. toukokuuta 2018

Alkusanat

TODO

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Kurssin *Tietorakenteet ja algoritmit* tarkoituksena on opettaa menetelmiä, joiden avulla voimme ratkaista *tehokkaasti* laskennallisia ongelmia. Ohjelmoinnin peruskursseilla olemme keskittyneet ohjelmointitaidon opetteluun. Nyt on aika siirtyä askel eteenpäin ja alkaa kiinnittää huomiota myös siihen, miten nopeasti algoritmit toimivat.

Algoritmien tehokkuudella on suuri merkitys käytännössä. Esimerkiksi netissä toimiva reittiopas on käyttökelpoinen sen vuoksi, että se antaa meille reitin kuvauksen heti sen jälkeen, kun olemme ilmoittaneet, mistä mihin haluamme matkustaa. Jos meidän pitäisi odottaa reitin kuvausta vaikkapa minuutti tai tunti, tämä rajoittaisi paljon palvelun käyttöä.

Jotta reittiopas toimisi tehokkaasti, sen taustalla on hyvin suunniteltu algoritmi. Tällä kurssilla opimme, kuinka voimme luoda itse vastaavia algoritmeja. Tutustumme kurssilla sekä algoritmien suunnittelun teoriaan että käytäntöön – haluamme ymmärtää syvällisesti, mistä algoritmeissa on kysymys, mutta myös osata toteuttaa niitä käytännössä.

1.1 Mitä algoritmit ovat?

Algoritmi on toimintaohje, jota seuraamalla voimme ratkaista jonkin laskennallisen ongelman. Esimerkiksi ”onko luku n alkuluku?” on laskennallinen ongelma, jossa algoritmille annetaan *syötteenä* luku n ja sen täytyy ilmoittaa *tulosteena* ”kyllä” tai ”ei” riippuen siitä, onko n alkuluku vai ei. Esimerkiksi jos algoritmille annetaan luku 7, sen täytyy ilmoittaa ”kyllä”, ja jos algoritmille annetaan luku 12, sen täytyy ilmoittaa ”ei”.

Voimme tarkastaa, onko annettu luku n alkuluku, seuraavalla algoritmilla: Käymme läpi kaikki luvut $2, 3, \ldots, n-1$ ja koetamme jakaa lukua n jokaisella niistä. Jos n on jaollinen jollain luvuista, se ei ole alkuluku, ja muuten se on alkuluku. Esimerkiksi luku 7 on alkuluku, koska se ei ole jaollinen millään luvuista $2, 3, \ldots, 6$, ja luku 12 puolestaan ei ole alkuluku, koska se on jaollinen luvuilla 3 ja 4. Voimme tutkia tämän algoritmin avulla mistä tahansa luvusta, onko se alkuluku vai ei.

Algoritmin toiminnan esittämiseen on useita mahdollisuuksia. Yksi tapa on selostaa sanallisesti, kuinka algoritmi toimii, kuten teimme äsken. Toinen tapa taas on antaa koodi, joka toteuttaa algoritmin. Tällöin meidän täytyy valita jokin ohjelmointikieli, jonka avulla esitämme algoritmin. Esimerkiksi voimme tarkastaa seuraavasti Java-kielellä, onko luku n alkuluku:

```
boolean alkuluku = true;
for (int i = 2; i < n; i++) {
    if (n%i == 0) {
        alkuluku = false;
        break;
    }
}
```

Voimme myös esittää algoritmin *pseudokoodina* todellisen ohjelmointikielen sijasta. Tämä tarkoittaa, että kirjoitamme koodia, joka on lähellä käytössä olevia ohjelmointikieliä, mutta voimme päättää koodin tarkan syntaksin itse ja ottaa joitakin vapauksia, joiden ansiosta voimme kuvata algoritmin mukavammin. Voisimme esimerkiksi esittää äskeisen algoritmin pseudokoodina seuraavasti:

```
alkuluku = true
for i = 2 to n-1
    if n%i == 0
        alkuluku = false
        break
```

Tässä kirjassa esitämme algoritmeja sekä Java-koodina että pseudokoodina tilanteesta riippuen. Käytämme Java-koodia silloin, kun haluamme erityisesti kiinnittää huomiota siihen, miten jokin asia toteutetaan käytännössä Javassa. Pseudokoodia käytämme taas silloin, kun haluamme kuvata algoritmin yleisen idean eikä käytetyllä kielellä ole merkitystä. Taulukko 1.1 esittää yhteenvedon käyttämämme pseudokoodin syntaksista.

Ensimmäinen vaihe ohjelmoinnin oppimisessa on oppia ohjelmoinnin perustaidot niin, että osaamme laatia *jonkin* toimivan algoritmin annetun ongelman ratkaisemiseen. On arvokas taito sinänsä, että osaamme ratkaista ongelman jollakin tavalla. Toinen vaihe, johon keskitymme tällä kurssilla, on oppia suunnittelemaan *tehokkaita* algoritmeja. Tämä tarkoittaa, että ha-

pseudokoodi	Java-koodi

`x = 5`
`s = "abc"`
`t = [1,2,3]`
	`int x = 5;`
	`String s = "abc";`
	`int[] t = {1,2,3};`

`if a == b`
`    // koodia`
	`if (a == b) {`
	`    // koodia`
	`}`

`while a == b`
`    // koodia`
	`while (a == b) {`
	`    // koodia`
	`}`

`for i = 1 to n`
`    // koodia`
	`for (int i = 1; i <= n; i++) {`
	`    // koodia`
	`}`

`for i = n to 1`
`    // koodia`
	`for (int i = n; i >= 1; i--) {`
	`    // koodia`
	`}`

`sort(x)`	`Arrays.sort(x);`
`print(x)`	`System.out.println(x);`

`swap(a,b)`	`t = a;`
	`a = b;`
	`b = t;`

`a = min(x,y)` `b = max(x,y)`	`a = Math.min(x,y);` `b = Math.max(x,y);`

`function summa(a,b)`
`    return a+b`
	`int summa(int a, int b) {`
	`    return a+b;`
	`}`

Taulukko 1.1: Kirjassa käytetty pseudokoodin syntaksi.

luamme saada aikaan mahdollisuuksien mukaan jotain parempaa kuin suoraviivaisia raakaan voimaan perustuvia algoritmeja.

Kiehtova seikka ohjelmoinnissa on, että monimutkaisetkin algoritmit syntyvät yksinkertaisista aineksista. Keskeiset käsitteet ovat

- muuttuja, jossa voimme säilyttää tietoa ohjelmassa,
- ehtolause (`if`), jonka avulla voimme haarautua ohjelmassa,
- silmukat (`for` ja `while`), joiden avulla voimme toistaa laskentaa, sekä
- taulukko, joka on ohjelmoinnin perustietorakenne.

Itse asiassa voimme toteuttaa *minkä tahansa* algoritmin vain näitä aineksia käyttäen. Tämä on huojentava tieto, koska meidän ei siis tarvitse opetella suurta määrää ohjelmointikielten ominaisuuksia, ennen kuin voimme alkaa suunnitella tehokkaita algoritmeja. Vaikeutena on kuitenkin *keksiä*, kuinka käyttää näitä tekniikoita eri tilanteessa.

Tärkeä osa algoritmien suunnittelua on taito valita käyttöön sopivia *tietorakenteita*. Tietorakenne on tapa säilyttää tietoa tietokoneen muistissa niin, että pääsemme tehokkaasti käsiksi siihen. Tutustumme kirjan alkuosassa moniin tietorakenteisiin, jotka auttavat meitä algoritmien suunnittelussa. Toisaalta voimme loppujen lopuksi toteuttaa minkä tahansa tietorakenteen taulukkona, koska tietokoneen muisti vastaa taulukkoa.

1.2 Rekursiiviset algoritmit

Rekursio on hyödyllinen ohjelmointitekniikka, joka jää kuitenkin usein sivurooliin ohjelmoinnin perusteiden opiskelussa. Nyt onkin hyvä hetki perehtyä kunnolla siihen, mitä hyötyä meille on rekursiosta. Tulemme tarvitsemaan rekursiota useassa vaiheessa kurssin aikana.

1.2.1 Johdatus rekursioon

Tarkastellaan ensimmäisenä esimerkkinä tehtävää, jossa haluamme muodostaa kaikki DNA-ketjut, joiden pituus on n. DNA-ketju on merkkijono, joka muodostuu merkeistä A, C, G ja T. Esimerkiksi kun $n = 3$, ketjut ovat AAA, AAC, AAG, $\ldots$, TTC, TTG, TTT.

Voimme ratkaista tehtävän helposti kiinteällä n:n arvolla luomalla n sisäkkäistä silmukkaa. Esimerkiksi seuraava koodi vastaa tapausta $n = 3$:

```
merkit = ["A","C","G","T"]
for i = 0 to 3
    for j = 0 to 3
        for k = 0 to 3
            print(merkit[i]+merkit[j]+merkit[k])
```

Tämä ratkaisu on toimiva, mutta siinä on yksi ongelma: kun n muuttuu, niin meidän täytyy muuttaa myös koodia. Esimerkiksi jos $n = 4$, koodista tulee seuraavanlainen:

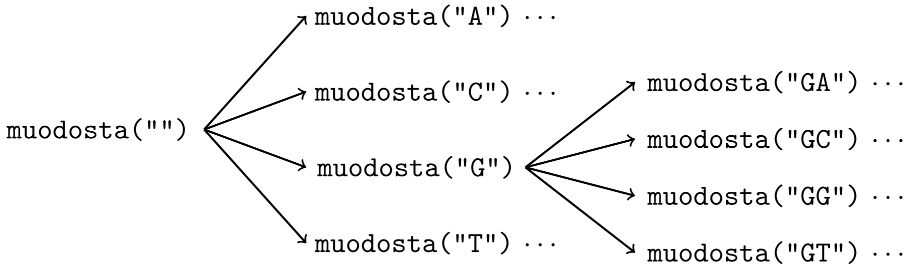
```
merkit = ["A","C","G","T"]
for i = 0 to 3
    for j = 0 to 3
        for k = 0 to 3
            for l = 0 to 3
                print(merkit[i]+merkit[j]+merkit[k]+merkit[l])
```

Tämä ei ole hyvä ilmiö, vaan haluaisimme saada aikaan *yleisen* koodin, joka toimisi suoraan millä tahansa n:n arvolla. Rekursio tarjoaa helpon ratkaisun juuri tähän: pystymme toteuttamaan kätevästi algoritmeja, joissa on ”vaihteleva määrä silmukoita”.

Seuraavassa on rekursiivinen funktio `muodosta`, joka muodostaa kaikki DNA-ketjut pituutta n. Rekursio lähtee käyntiin, kun parametriksi `ketju` annetaan tyhjä merkkijono. Funktio tarkastaa ensin, onko annettu ketju valmis eli onko siinä jo n merkkiä. Jos näin on, funktio tulostaa ketjun eikä tee muuta. Muussa tapauksessa funktio käy läpi kaikki tavat lisätä ketjun loppuun seuraava merkki (A, C, G tai T) ja kutsuu itseään rekursiivisesti jokaisen vaihtoehdon kohdalla.

```
function muodosta(ketju)
    if ketju.length() == n
        print(ketju)
    else
        merkit = ["A","C","G","T"]
        for i = 0 to 3
            muodosta(ketju+merkit[i])
```

Kuva 1.1 havainnollistaa, kuinka funktio lähtee muodostamaan ketjuja tyhjästä ketjusta alkaen. Ensin funktio haarautuu neljään osaan sen mukaan, onko ketjun ensimmäinen merkki A, C, G vai T. Tämän jälkeen haarautuminen jatkuu vastaavasti jokaisessa kutsussa: esimerkiksi jos ketju alkaa merkillä G, funktio haarautuu tapauksiin GA, GC, GG ja GT, jne.



Kuva 1.1: DNA-ketjujen muodostaminen rekursiivisesti.

1.2.2 Osajoukot ja permutaatiot

Yksi tavallinen rekursion käyttötarkoitus on, että haluamme käydä läpi kaikki annetun joukon *osajoukot* eli kaikki tavat valita jokin kokoelma joukon alkioita. Esimerkiksi joukon $\{1,2,3\}$ osajoukot ovat $\emptyset$ (tyhjä joukko), $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ ja $\{1,2,3\}$. Kun joukossa on n alkioita, osajoukkoja on yhteensä 2^n, koska jokaisen alkion kohdalla on kaksi vaihtoehtoa, valitaanko alkio mukaan osajoukkoon vai ei.

Seuraava rekursiivinen funktio muodostaa joukon $\{1,2,\ldots,n\}$ osajoukot. Haku lähtee käyntiin, kun kutsumme funktiota parametrilla 1.

```
function muodosta(x)
    if x == n+1
        // küsittele osajoukko
    else
        valittu[x] = true
        muodosta(x+1)
        valittu[x] = false
        muodosta(x+1)
```

Ideana on, että parametri x tarkoittaa, minkä alkion "kohtalon" ratkaisemme seuraavaksi: joko valitsemme alkion osajoukkoon tai jätämme sen osajoukon ulkopuolelle. Ensin päätämme, kuuluuko alkio 1 osajoukkoon vai ei, sitten toimimme vastaavasti alkion 2 kohdalla, jne., kunnes olemme käsitelleet kaikki n alkiota. Jokaisen alkion kohdalla merkitsemme päätöksemme taulukkoon `valittu` ja jatkamme osajoukon muodostamista rekursiivisesti. Rekursio päättyy, kun $x = n + 1$ eli olemme tehneet valinnan jokaiselle alkiolle ja olemme saaneet jonkin osajoukon muodostettua. Tällöin voimme käsitellä muodostetun osajoukon haluamallamme tavalla.

Tarkastellaan sitten toista tilannetta, jossa haluammekin muodostaa joukon *permutaatiot* eli kaikki mahdolliset joukon alkioiden järjestykset. Esimerkiksi joukon $\{1, 2, 3\}$ permutaatiot ovat $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ ja $(3, 2, 1)$. Kun joukossa on n alkiota, voimme muodostaa siitä yhteensä $n!$ permutaatiota.

Myös permutaatioiden läpikäynti onnistuu kätevästi rekursiolla. Seuraava rekursiivinen funktio muodostaa joukon $\{1, 2, \dots, n\}$ permutaatiot, kun kutsumme sitä parametrilla 1.

```
function muodosta(k)
    if k == n+1
        // käsittele permutaatio
    else
        for i = 1 to n
            if not valittu[i]
                valittu[i] = true
                permutaatio[k] = i
                muodosta(k+1)
                valittu[i] = false
```

Tässä parametri k tarkoittaa, mihin permutaation kohtaan valitsemme seuraavaksi alkion. Aluksi valitsemme alkion kohtaan 1, sitten valitsemme alkion kohtaan 2, jne., kohtaan n asti. Jokaisessa kohdassa käymme läpi silmukalla kaikki mahdolliset alkiot. Taulukko `valittu` kertoo, mitkä alkiot olemme jo valinneet permutaatioon. Jos alkio i ei ole vielä mukana permutaatiossa, haaraudumme tapaukseen, jossa valitsemme sen kohtaan k ja merkitsemme tämän tiedon taulukkoon `permutaatio`. Lopulta kun $k = n + 1$, olemme saaneet muodostettua jonkin permutaation ja rekursiivinen haarautuminen päättyy.

1.2.3 Peruuttava haku

Peruuttava haku on yleinen rekursiivinen menetelmä, jota käyttäen voimme muodostaa järjestelmällisesti kaikki ratkaisut annettuun ongelmaan. Ideana on aloittaa tyhjästä ratkaisusta ja käydä joka askeleella läpi rekursiivisesti kaikki mahdolliset tavat, kuinka voimme laajentaa ratkaisua.

Peruuttava haku on raa'an voiman algoritmi, ja voimme käyttää sitä vain silloin, kun ratkaisujen määrä on niin pieni, että ehdimme käydä läpi kaikki ratkaisut. Kuitenkin jos voimme käyttää peruuttavaa hakua, se on mainio tekniikka, koska voimme olla varmoja, että oikein toteutettu peruuttava haku löytää kaikki ratkaisut.

Tarkastellaan esimerkkinä tehtävää, jossa haluamme käydä läpi kaikki kokoa $n \times n$ olevat *latinalaiset neliöt* eli ruudukot, joissa kullakin vaaka- ja pystyrivillä esiintyy tarkalleen kerran jokainen luku $1, 2, \dots, n$. Kyseessä on

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	3	2
2	1	3
3	2	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

2	1	3
1	3	2
3	2	1

2	1	3
3	2	1
1	3	2

2	3	1
1	2	3
3	1	2

2	3	1
3	1	2
1	2	3

3	1	2
1	2	3
2	3	1

3	1	2
2	3	1
1	2	3

3	2	1
1	3	2
2	1	3

3	2	1
2	1	3
1	3	2

Kuva 1.2: Kaikki 12 latinalaista neliötä kokoa 3×3.

siis yksinkertaistus tutusta sudoku-tehtävästä. Esimerkiksi kuva 1.2 näyttää kaikki 12 latinalaista neliötä kokoa 3×3.

Toteutamme peruuttavan haun niin, että valitsemme joka askeleella ruudukon kohtaan (y, x) tulevan luvun. Numeroimme ruudukon vaaka- ja pystyrivit kokonaisluvuin $1, 2, \ldots, n$. Aloitamme haun ruudukon vasemmasta yläkulmasta ja etenemme rivi kerrallaan alaspäin. Seuraava rekursiivinen algoritmi toteuttaa haun, kun sitä kutsutaan parametreilla $(1, 1)$:

```
function muodosta(y,x)
    if y == n+1
        // käsittele ratkaisu
    else if x == n+1
        muodosta(y+1,1)
    else
        for i = 1 to n
            if not vaaka[y][i] and not pysty[x][i]
                vaaka[y][i] = pysty[x][i] = true
                nelio[y][x] = i
                muodosta(y,x+1)
                vaaka[y][i] = pysty[x][i] = false
```

Algoritmin alussa on kaksi erikoistapausta: jos $y = n+1$, olemme saaneet muodostettua yhden latinalaisen neliön. Jos taas $x = n + 1$, olemme saaneet jonkin vaakarivin valmiiksi ja alamme muodostaa seuraavaa vaakariviä. Muuten kyseessä on perustapaus, jossa haluamme valita kohtaan (y, x) tulevan luvun. Käymme läpi kaikki mahdolliset tavat for-silmukalla, jossa i on valittava luku. Koska jokainen luku saa esiintyä vain kerran kullakin vaaka- ja pystyrivillä, käytämme kahta aputaulukkoa: `vaaka`$[y][i]$ kertoo, onko vaakarivillä y jo lukua i, ja vastaavasti `pysty`$[x][i]$ kertoo, onko pystyrivillä x jo lukua i. Jos voimme sijoittaa luvun i kohtaan (y, x), merkitsemme tämän taulukkoon `nelio`$[y][x]$ ja lisäksi päivitämme taulukoita `vaaka` ja `pysty`. Sitten jatkamme hakua rekursiivisesti seuraavaan oikealla olevaan ruutuun.

ruudukon koko n	neliöiden määrä
1	1
2	2
3	12
4	576
5	161280
6	812851200

Taulukko 1.2: Latinalaisten neliöiden määrät, kun $n = 1, 2, \ldots, 6$.

Kun olemme saaneet muodostettua latinalaisen neliön, voimme käsitellä sen haluamallamme tavalla, kuten tulostaa neliön sisältö taulukon `nelio` perusteella tai vain laskea, montako neliötä on olemassa. Taulukko 1.2 listaa latinalaisten neliöiden määrät arvoilla $n = 1, 2, \ldots, 6$, jotka pystymme laskemaan nopeasti tässä esitetyn algoritmin avulla. Suuremmilla n:n arvoilla haku alkaa kestää liian kauan ja meidän tulisi keksiä keino tehostaa hakua, jos haluaisimme laskea määriä suuremmissa tapauksissa.

1.3 Matemaattinen tausta

Tietorakenteiden ja algoritmien teoria perustuu matematiikkaan, ja käymme kirjassa pikkuhiljaa läpi tarvittavia tietoja. Seuraavassa on joitakin merkintöjä ja käsitteitä, joista on hyötyä useassa kirjan kohdassa.

1.3.1 Summakaavat

Voimme laskea lukujen $1, 2, \ldots, n$ summan kaavalla

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Esimerkiksi

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15.$$

Kaavan voi ymmärtää niin, että laskemme yhteen n lukua, joiden suuruus on *keskimäärin* $(n + 1)/2$.

Toinen hyödyllinen kaava on

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Esimerkiksi

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 32 - 1.$$

Tässä voimme ajatella, että aloitamme luvusta 2^n ja lisäämme siihen aina puolet pienemmän luvun lukuun 1 asti. Tämän seurauksena pääsemme yhtä vaille lukuun 2^{n+1} asti.

Esitämme joskus summia merkinnän $\sum$ avulla. Siinä on ideana antaa muuttujan ala- ja yläraja sekä joka askeleella summaan lisättävä arvo. Esimerkiksi voimme merkitä

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2.$$

Tämä merkintä on itse asiassa hyvin lähellä ohjelmoinnin for-silmukkaa, koska seuraava koodi ajaa saman asian:

```
summa = 0
for i = 1 to n
    summa += i*i
```

1.3.2 Logaritmit

Logaritmin määritelmän mukaan $\log_b n = x$ tarkalleen silloin kun $b^x = n$. Esimerkiksi $\log_2 32 = 5$, koska $2^5 = 32$.

Algoritmiikassa logaritmin kantaluku b on usein 2, ja voimme ajatella, että logaritmi kertoo, montako kertaa meidän täytyy *puolittaa* luku n, ennen kuin pääsemme lukuun 1. Esimerkiksi $\log_2 32 = 5$, koska tarvitsemme 5 puolitusta:

$$32 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

Tässä kirjassa oletamme, että logaritmin kantaluku on 2, jos ei ole toisin mainittu, eli voimme kirjoittaa lyhyesti $\log 32 = 5$.

Logaritmeille pätee kaavat

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

ja

$$\log_b(x/y) = \log_b(x) - \log_b(y).$$

Ylemmästä kaavasta seuraa myös

$$\log_b(x^k) = k \log_b(x).$$

Lisäksi voimme vaihtaa logaritmin kantalukua kaavalla

$$\log_u(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(u)}.$$

Luku 2

Tehokkuus

Algoritmien suunnittelussa tavoitteemme on saada aikaan algoritmeja, jotka toimivat *tehokkaasti*. Haluamme luoda algoritmeja, joiden avulla voimme käsitellä myös suuria aineistoja ilman, että joudumme odottamaan kauan aikaa. Ajattelemmekin, että algoritmi on *hyvä*, jos se kykenee antamaan meille nopean vastauksen myös silloin, kun annamme sille paljon tietoa.

Tässä luvussa tutustumme työkaluihin, joiden avulla voimme arvioida algoritmien tehokkuutta. Keskeinen käsite on *aikavaativuus*, joka antaa tiiviissä muodossa kuvan algoritmin ajankäytöstä. Aikavaativuuden avulla voimme muodostaa pika-arvion algoritmin tehokkuudesta sen rakenteen perusteella, eikä meidän tarvitse toteuttaa ja testata algoritmia vain saadaksemme tietää, miten nopea se on.

2.1 Aikavaativuus

Algoritmin tehokkuus riippuu siitä, montako askelta se suorittaa. Tavoitteemme on nyt arvioida askelten määrää suhteessa syötteen kokoon n. Esimerkiksi jos syötteenä on taulukko, n on taulukon koko, ja jos syötteenä on merkkijono, n on merkkijonon pituus.

Tarkastellaan esimerkkinä seuraavaa algoritmia, joka laskee, montako kertaa luku x esiintyy n lukua sisältävässä taulukossa.

```
1 laskuri = 0
2 for i = 0 to n-1
3     if luvut[i] == x
4         laskuri++
```

Tämän algoritmin oleelliset askeleet ovat riveillä 1, 3 ja 4. Rivi 1 suoritetaan vain kerran algoritmin alussa. Rivi 3 suoritetaan n kertaa jokaisella silmukan kierroksella. Rivi 4 taas suoritetaan $0 \ldots n$ kertaa riippuen siitä, kuinka usein luku x esiintyy taulukossa. Algoritmi suorittaa siis vähintään $n+1$ ja enintään $2n+1$ askelta.

Näin tarkka analyysi ei ole kuitenkaan yleensä tarpeen, vaan meille riittää määrittää karkea *yläraja* ajankäytölle. Sanomme, että algoritmi toimii ajassa $O(f(n))$ eli sen *aikavaativuus* on $O(f(n))$, jos se suorittaa enintään $cf(n)$ askelta aina silloin kun $n \geq n_0$, missä c ja n_0 ovat vakioita. Esimerkiksi yllä oleva algoritmi toimii ajassa $O(n)$, koska se suorittaa selkeästi enintään $3n$ askelta kaikilla n:n arvoilla.

Aikavaativuuden mukavana puolena on, että voimme yleensä päätellä aikavaativuuden helposti algoritmin rakenteesta. Tutustumme seuraavaksi laskusääntöihin, joiden avulla tämä on mahdollista.

2.1.1 Laskusääntöjä

Jos koodissa ei ole silmukoita vaan vain yksittäisiä komentoja, sen aikavaativuus on $O(1)$. Näin on esimerkiksi seuraavassa koodissa:

```
c = a+b
b = a
a = c
```

Merkitsemme `...` koodia, jonka aikavaativuus on $O(1)$. Jos koodissa on yksi silmukka, joka suorittaa n askelta, sen aikavaativuus on $O(n)$:

```
for i = 1 to n
    ...
```

Jos tällaisia silmukoita on kaksi sisäkkäin, aikavaativuus on $O(n^2)$:

```
for i = 1 to n
    for j = 1 to n
        ...
```

Yleisemmin jos koodissa on vastaavalla tavalla k sisäkkäistä silmukkaa, sen aikavaativuus on $O(n^k)$.

Huomaa, että vakiokertoimet ja matalammat termit eivät vaikuta aikavaativuuteen. Esimerkiksi seuraavissa koodeissa silmukoissa on $2n$ ja $n-1$ askelta, mutta kummankin koodin aikavaativuus on $O(n)$.

```
for i = 1 to 2*n
    ...
```

```
for i = 1 to n-1
    ...
```

Jos koodissa on peräkkäisiä osuuksia, sen aikavaativuus on suurin yksittäisen osuuden aikavaativuus. Esimerkiksi seuraavan koodin aikavaativuus on $O(n^2)$, koska sen osuudet ovat $O(n)$, $O(n^2)$ ja $O(n)$.

```
for i = 1 to n
    ...
for i = 1 to n
    for j = 1 to n
        ...
for i = 1 to n
    ...
```

Joskus aikavaativuus riippuu useammasta tekijästä, jolloin kaavassa on monta muuttujaa. Seuraavan koodin aikavaativuus on $O(nm)$:

```
for i = 1 to n
    for j = 1 to m
        ...
```

Rekursiivisessa algoritmissa laskemme, montako rekursiivista kutsua tehdään ja kauanko kutsut vievät aikaa. Tarkastellaan esimerkkinä seuraavia funktioita, joita kutsutaan parametrilla n:

```
function f1(n)
    if n == 1
        return
    f1(n-1)
```

```
function f2(n)
    if n == 1
        return
    f2(n-1)
    f2(n-1)
```

Ensimmäisessä tapauksessa rekursiivisia kutsuja on $O(n)$ ja jokainen kutsu vie aikaa $O(1)$, joten aikavaativuus on $O(n)$. Toisessa tapauksessa rekursiivisia kutsuja on $O(2^n)$, koska jokainen kutsu tuottaa kaksi uutta kutsua, ja algoritmin aikavaativuus on $O(2^n)$.

2.1.2 Yleisiä aikavaativuuksia

Tietyt aikavaativuudet esiintyvät usein algoritmien analyysissa. Seuraavaksi käymme läpi joukon tällaisia aikavaativuuksia.

$O(1)$ (vakioaikainen)

Vakioaikainen algoritmi suorittaa kiinteän määrän komentoja, eikä syötteen suuruus vaikuta algoritmin nopeuteen. Esimerkiksi seuraava algoritmi laskee summan $1+2+\cdots+n$ vakioajassa summakaavan $n(n+1)/2$ avulla:

```
summa = n*(n+1)/2
```

$O(\log n)$ (logaritminen)

Logaritminen algoritmi puolittaa usein syötteen koon joka askeleella. Esimerkiksi seuraavan algoritmin aikavaativuus on $O(\log n)$:

```
laskuri = 0
while n > 0
    laskuri++
    n /= 2
```

Tärkeä seikka logaritmeihin liittyen on, että $\log n$ on *pieni* luku, kun n on mikä tahansa tyypillinen algoritmeissa esiintyvä luku. Esimerkiksi $\log 10^6 \approx 20$ ja $\log 10^9 \approx 30$. Niinpä jos algoritmi tekee jotain logaritmisessa ajassa, siinä ei kulu kauan aikaa.

$O(n)$ (lineaarinen)

Lineaarinen algoritmi voi käydä läpi syötteen kiinteän määrän kertoja. Esimerkiksi seuraava $O(n)$-algoritmi laskee taulukon lukujen summan:

```
summa = 0
for i = 0 to n-1
    summa += taulu[i]
```

Kun algoritmin syötteenä on aineisto, jossa on n alkiota, lineaarinen aikavaativuus on yleensä paras mahdollinen, minkä voimme saavuttaa. Tämä johtuu siitä, että algoritmin täytyy käydä syöte ainakin kerran läpi, ennen kuin se voi ilmoittaa vastauksen.

$O(n \log n)$ (järjestäminen)

Aikavaativuus $O(n \log n)$ viittaa usein siihen, että algoritmin osana on *järjestämistä*, koska tehokkaat järjestämisalgoritmit toimivat ajassa $O(n \log n)$. Esimerkiksi seuraava $O(n \log n)$-aikainen algoritmi tarkastaa, onko taulukossa kahta samaa alkiota:

```
sort(taulu)
samat = false
for i = 1 to n-1
    if taulu[i] == taulu[i-1]
        samat = true
```

Algoritmi järjestää ensin taulukon, minkä jälkeen yhtä suuret alkiot ovat *vierekkäin* ja ne on helppoa löytää. Järjestäminen vie aikaa $O(n \log n)$ ja silmukka vie aikaa $O(n)$, joten algoritmi vie yhteensä aikaa $O(n \log n)$.

$O(n^2)$ (neliöllinen)

Neliöllinen algoritmi voi käydä läpi kaikki tavat valita kaksi alkiota syötteestä. Esimerkiksi seuraava $O(n^2)$-algoritmi tutkii, onko taulukossa kahta lukua, joiden summa on x.

```
kaksi = false
for i = 0 to n-1
    for j = i+1 to n-1
        if taulu[i]+taulu[j] == x
            kaksi = true
```

$O(n^3)$ (kuutiollinen)

Kuutiollinen algoritmi voi käydä läpi kaikki tavat valita kolme alkiota syötteestä. Esimerkiksi seuraava $O(n^3)$-algoritmi tutkii, onko taulukossa kolmea lukua, joiden summa on x.

```
kolme = false
for i = 0 to n-1
    for j = i+1 to n-1
        for k = j+1 to n-1
            if taulu[i]+taulu[j]+taulu[k] == x
                kolme = true
```

syötteen kokoluokka n	tarvittava aikavaativuus
10	$O(n!)$
20	$O(2^n)$
500	$O(n^3)$
5000	$O(n^2)$
10^6	$O(n)$ tai $O(n \log n)$
suuri	$O(1)$ tai $O(\log n)$

Taulukko 2.1: Kuinka suuren syötteen algoritmi voi käsitellä nopeasti?

$O(2^n)$ (osajoukot)

Aikavaativuus $O(2^n)$ viittaa usein siihen, että algoritmi käy läpi syötteen alkioiden osajoukot.

$O(n!)$ (permutaatiot)

Aikavaativuus $O(n!)$ viittaa usein siihen, että algoritmi käy läpi syötteen alkioiden permutaatiot.

2.1.3 Tehokkuuden arviointi

Mitä hyötyä on määrittää algoritmin aikavaativuus? Hyötynä on, että aikavaativuus antaa meille pika-arvion siitä, kuinka *hyvä* algoritmi on eli miten suuria syötteitä sillä voi käsitellä tehokkaasti. Kun meille kertyy kokemusta algoritmien suunnittelusta, meille alkaa muodostua selkeä kuva, mitä eri aikavaativuudet tarkoittavat käytännössä.

Aikavaativuutta voi ajatella samalla tavalla kuin vaikkapa hotellin tähtiluokitusta: se kertoo tiiviissä muodossa, mistä asiassa on kysymys, eikä meidän tarvitse ottaa selvää yksityiskohdista. Jos meille tarjotaan majoitusta neljän tähden hotellissa, saamme heti jonkin käsityksen huoneen tasosta tähtiluokituksen ansiosta, vaikka emme saisi tarkkaa listausta huoneen varustelusta. Vastaavasti jos kuulemme, että jonkin algoritmin aikavaativuus on $O(n \log n)$, voimme heti arvioida karkeasti, miten suuria syötteitä voimme käsitellä, vaikka emme tuntisi tarkemmin algoritmin toimintaa

Yksi kiinnostava näkökulma algoritmin tehokkuuteen on, miten suuren syötteen algoritmi voi käsitellä nopeasti. Tässä ”nopeasti” tarkoittaa, että algoritmi käsittelee sille annetun syötteen *silmänräpäyksessä*. Tämä on hyvä vaatimus, kun haluamme käyttää algoritmia jossakin käytännön sovelluksessa. Taulukossa 2.1 on joitakin hyödyllisiä arvioita, kun Java-kielellä toteutettu algoritmi suoritetaan nykyaikaisella tietokoneella. Esimerkiksi jos meillä on $O(n^2)$-algoritmi, voimme käsitellä sillä nopeasti syötteen, jossa on luokkaa 5000 alkiota. Jos haluamme käsitellä tehokkaasti suurempia syötteitä, meidän tulisi löytää $O(n)$- tai $O(n \log n)$-aikainen algoritmi.

Kannattaa silti pitää mielessä, että nämä luvut ovat vain arvioita ja algoritmin todelliseen ajankäyttöön vaikuttavat monet asiat. Saman algoritmin hyvä toteutus saattaa olla kymmeniä kertoja nopeampi kuin huono toteutus, ja suuri merkitys on myös ohjelmointikielellä, jolla algoritmi on toteutettu. Tässä kirjassa analysoimme algoritmeja sekä aikavaativuuksien avulla että mittaamalla todellisia suoritusaikoja.

2.1.4 Esimerkki: Bittijonot

Seuraavassa esimerkissä vertailemme kahta erilaista algoritmia samaan tehtävään. Ensimmäinen algoritmi on suoraviivainen raa'an voiman algoritmi, joka toimii ajassa $O(n^2)$. Toinen algoritmi taas on tehokas algoritmi, joka toimii ajassa $O(n)$.

Tehtävämme on seuraava: Annettuna on bittijono, jossa on n bittiä, ja haluamme laskea, monellako tavalla voimme valita kaksi kohtaa niin, että vasen bitti on 0 ja oikea bitti on 1. Esimerkiksi bittijonossa 01001 tapoja on neljä: $\underline{01}001$, $\underline{0}100\underline{1}$, $01\underline{0}0\underline{1}$ ja $010\underline{01}$.

$O(n^2)$-ratkaisu

Voimme ratkaista tehtävän raa'alla voimalla käymällä läpi kaikki mahdolliset tavat valita vasen ja oikea kohta. Tällöin voimme laskea yksi kerrallaan, monessako tavassa vasen bitti on 0 ja oikea bitti on 1. Seuraava koodi toteuttaa algoritmin:

```
laskuri = 0
for i = 0 to n-1
    for j = i+1 to n-1
        if bitit[i] == 0 and bitit[j] == 1
            laskuri++
print(laskuri)
```

Algoritmin aikavaativuus on $O(n^2)$, koska siinä on kaksi sisäkkäistä silmukkaa, jotka käyvät läpi syötteen.

$O(n)$-ratkaisu

Kuinka voisimme ratkaista tehtävän tehokkaammin? Meidän tulisi käytännössä keksiä tapa, jolla saisimme pois toisen silmukan koodista.

Tässä auttaa lähestyä ongelmaa hieman toisesta näkökulmasta: kun olemme tietyssä kohdassa bittijonoa, monellako tavalla voimme muodostaa parin, jonka oikea bitti on nykyisessä kohdassamme? Jos olemme bitin 0 kohdalla, pareja ei ole yhtään, mutta jos bittinä on 1, voimme valita *minkä tahansa* vasemmalla puolella olevan bitin 0 pariin.

Tämän havainnon ansiosta meidän riittää käydä läpi bittijono kerran vasemmalta oikealle ja pitää kirjaa, montako bittiä 0 olemme nähneet. Sitten jokaisen bitin 1 kohdalla kasvatamme vastausta tällä bittien 0 määrällä. Seuraava koodi toteuttaa algoritmin:

```
laskuri = 0
nollat = 0
for i = 0 to n-1
    if bitit[i] == 0
        nollat++
    else
        laskuri += nollat
print(laskuri)
```

Algoritmissa on vain yksi silmukka, joka käy syötteen läpi, joten sen aikavaativuus on $O(n)$.

Algoritmien vertailua

Meillä on nyt siis kaksi algoritmia, joiden aikavaativuudet ovat $O(n^2)$ ja $O(n)$, mutta mitä tämä tarkoittaa käytännössä? Tämän selvittämiseksi teimme testin, jossa toteutimme algoritmit Javalla ja mittasimme niiden suoritusaikoja satunnaisilla syötteillä eri n:n arvoilla.

Taulukko 2.2 näyttää testin tulokset. Pienillä n:n arvoilla molemmat algoritmit toimivat hyvin tehokkaasti, mutta suuremmilla syötteillä on nähtävissä huomattavia eroja. Raakaan voimaan perustuva $O(n^2)$-algoritmi alkaa hidastua selvästi testistä $n = 10000$ alkaen, ja testissä $n = 1000000$ sillä kuluu jo lähes kolme minuuttia aikaa. Tehokas $O(n)$-algoritmi taas selvittää suuretkin testit salamannopeasti.

Tämän kurssin jatkuvana teemana on luoda algoritmeja, jotka toimivat tehokkaasti myös silloin, kun niille annetaan suuria syötteitä. Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että algoritmin aikavaativuuden tulisi olla $O(n)$ tai $O(n \log n)$. Jos algoritmin aikavaativuus on esimerkiksi $O(n^2)$, se on auttamatta liian hidas suurien syötteiden käsittelyyn.

syötteen koko n	$O(n^2)$-algoritmi	$O(n)$-algoritmi
10	0.00 s	0.00 s
100	0.00 s	0.00 s
1000	0.00 s	0.00 s
10000	0.14 s	0.00 s
100000	1.66 s	0.00 s
1000000	172.52 s	0.01 s

Taulukko 2.2: Algoritmien suoritusaikojen vertailu.

2.2 Lisää algoritmien analysoinnista

Aikavaativuuksissa esiintyvä O-merkintä on yksi monista merkinnöistä, joiden avulla voimme arvioida funktioiden kasvunopeutta. Tutustumme seuraavaksi tarkemmin näihin merkintöihin.

2.2.1 Merkinnät O, Ω ja Θ

Algoritmien analysoinnissa usein esiintyviä merkintöjä ovat:

- *Yläraja*: Funktio $g(n)$ on luokkaa $O(f(n))$, jos on olemassa vakiot c ja n_0 niin, että $g(n) \leq cf(n)$ aina kun $n \geq n_0$.
- *Alaraja*: Funktio $g(n)$ on luokkaa $\Omega(f(n))$, jos on olemassa vakiot c ja n_0 niin, että $g(n) \geq cf(n)$ aina kun $n \geq n_0$.
- *Tarkka arvio*: Funktio $g(n)$ on luokkaa $\Theta(f(n))$, jos se on sekä luokkaa $O(f(n))$ että luokkaa $\Omega(f(n))$.

Vakion c tarkoituksena on, että saamme arvion kasvunopeuden suuruusluokalle välittämättä vakiokertoimista. Vakion n_0 tarkoituksena on, että keskitymme tarkastelemaan kasvunopeutta suurilla n:n arvoilla. Voimme myös kirjoittaa $g(n) = O(f(n))$, kun haluamme ilmaista, että funktio $g(n)$ on luokkaa $O(f(n))$, ja vastaavasti Ω- ja Θ-merkinnöissä.

Kun sanomme, että algoritmi toimii ajassa $O(f(n))$, tarkoitamme, että se suorittaa *pahimmassa tapauksessa* $O(f(n))$ askelta. Tämä on yleensä hyvä tapa ilmoittaa algoritmin tehokkuus, koska silloin annamme takuun siitä, että algoritmin ajankäytöllä on tietty yläraja, vaikka syöte olisi valittu mahdollisimman ikävästi algoritmin kannalta.

Tarkastellaan esimerkkinä seuraavaa algoritmia, joka laskee taulukon lukujen summan:

```
summa = 0
for i = 0 to n-1
    summa += taulu[i]
```

Tämä algoritmi toimii samalla tavalla riippumatta taulukon sisällöstä, koska se käy aina läpi koko taulukon. Niinpä yläraja ajankäytölle on $O(n)$ ja alaraja ajankäytölle on samoin $\Omega(n)$, joten voimme sanoa, että algoritmi vie aikaa $\Theta(n)$ kaikissa tapauksissa.

Tarkastellaan sitten seuraavaa algoritmia, joka selvittää, onko taulukossa lukua x:

```
ok = false
for i = 0 to n-1
    if taulu[i] == x
        ok = true
        break
```

Tässä algoritmin pahin ja paraus tapaus eroavat. Ajankäytön yläraja on $O(n)$, koska algoritmi joutuu käymään läpi kaikki taulukon alkiot silloin, kun luku x ei esiinny taulukossa. Toisaalta ajankäytön alaraja on $\Omega(1)$, koska jos luku x on taulukon ensimmäinen alkio, algoritmi pysähtyy heti taulukon alussa. Voimme myös sanoa, että algoritmi suorittaa pahimmassa tapauksessa $\Theta(n)$ askelta ja parhaassa tapauksessa $\Theta(1)$ askelta.

Huomaa, että O-merkinnän antama yläraja voi olla *mikä tahansa* yläraja, ei välttämättä tarkka yläraja. On siis oikein sanoa esimerkiksi, että äskeinen algoritmi vie aikaa $O(n^2)$, vaikka on olemassa parempi yläraja $O(n)$. Miksi sitten käytämme O-merkintää, vaikka voisimme usein myös ilmaista tarkan ajankäytön Θ-merkinnällä? Tämä on vakiintunut ja käytännössä toimiva tapa. Olisi hyvin harhaanjohtavaa antaa algoritmille yläraja $O(n^2)$, jos näemme suoraan, että aikaa kuluu vain $O(n)$.

Asiaa voi ajatella niin, että O-merkintää käytetään algoritmin *markkinoinnissa*. Jos annamme liian suuren ylärajan, algoritmista tulee väärä käsitys yleisölle. Vertauksena jos myymme urheiluautoa, jonka huippunopeus on 250 km/h, on sinänsä paikkansa pitävä väite, että autolla pystyy ajamaan 100 km/h. Meidän ei kuitenkaan kannata antaa tällaista vähättelevää tietoa, vaan kertoa, että autolla pystyy ajamaan 250 km/h.

2.2.2 Tilavaativuus

Merkintöjä O, Ω ja Θ voi käyttää kaikenlaisissa yhteyksissä, ei vain algoritmin ajankäytön arvoinnissa. Esimerkiksi voimme sanoa, että algoritmi suorittaa silmukkaa $O(\log n)$ kierrosta tai että taulukossa on $O(n^2)$ lukua.

Aikavaativuuden lisäksi kiinnostava tieto algoritmista voi olla sen *tilavaativuus*. Tämä kuvaa sitä, miten paljon algoritmi käyttää muistia syötteen *lisäksi*. Jos tilavaativuus on $O(1)$, algoritmi tarvitsee muistia vain yksittäisille muuttujille syötteen lisäksi. Jos tilavaativuus on $O(n)$, algoritmi voi varata esimerkiksi aputaulukon, jonka koko vastaa syötteen kokoa.

Tarkastellaan esimerkkinä tehtävää, jossa taulukossa on luvut $1, 2, \ldots, n$ yhtä lukuun ottamatta, ja tehtävämme on selvittää puuttuva luku. Yksi tapa ratkaista tehtävä $O(n)$-ajassa on luoda aputaulukko, joka pitää kirjaa mukana olevista luvuista. Tällaisen ratkaisun tilavaativuus on $O(n)$, koska aputaulukko vie $O(n)$ muistia.

```
for i = 0 to n-2
    mukana[taulu[i]] = true
for i = 1 to n
    if not mukana[i]
        puuttuva = i
```

Tehtävään on kuitenkin olemassa myös toinen algoritmi, jossa aikavaativuus on edelleen $O(n)$ mutta tilavaativuus on vain $O(1)$. Tällainen algoritmi laskee ensin lukujen $1, 2, \ldots, n$ summan ja vähentää sitten taulukossa esiintyvät luvut siitä. Jäljelle jäävä luku on puuttuva luku.

```
summa = 0
for i = 1 to n
    summa += i
for i = 0 to n-2
    summa -= taulu[i]
puuttuva = summa
```

Käytännössä tilavaativuus on yleensä sivuroolissa algoritmeissa, koska jos algoritmi vie vain vähän aikaa, se ei *ehdi* käyttää kovin paljon muistia. Erityisesti tilavaativuus ei voi olla suurempi kuin aikavaativuus. Niinpä meidän riittää tavallisesti keskittyä suunnittelemaan algoritmeja, jotka toimivat nopeasti, ja vertailla algoritmien aikavaativuuksia.

2.2.3 Rajojen todistaminen

Jos haluamme todistaa täsmällisesti, että jokin raja pätee, meidän täytyy löytää vakiot c ja n_0, jotka osoittavat asian. Jos taas haluamme todistaa, että raja ei päde, meidän täytyy näyttää, että mikään vakioiden c ja n_0 valinta ei ole kelvollinen.

Jos haluamme todistaa rajan pätemisen, tämä onnistuu yleensä helposti valitsemalla vakio c tarpeeksi suureksi ja arvioimalla summan osia ylöspäin tarvittaessa. Esimerkiksi jos haluamme todistaa, että $3n+5 = O(n)$, meidän tulee löytää vakiot c ja n_0, joille pätee, että $3n + 5 \leq cn$ aina kun $n \geq n_0$. Tässä tapauksessa voimme valita esimerkiksi $c = 8$ ja $n_0 = 1$, jolloin voimme arvioida $3n + 5 \leq 3n + 5n = 8n$, kun $n \geq 1$.

Jos haluamme todistaa, että raja ei päde, tilanne on hankalampi, koska meidän täytyy näyttää, että ei ole olemassa *mitään* kelvollista tapaa valita vakioita c ja n_0. Tässä auttaa tyypillisesti vastaoletuksen tekeminen: oletamme, että raja pätee ja voimme valita vakiot, ja näytämme sitten, että tämä oletus johtaa ristiriitaan.

Todistetaan esimerkkinä, että $n^2 \neq O(n)$. Jos pätisi $n^2 = O(n)$, niin olisi olemassa vakiot c ja n_0, joille $n^2 \leq cn$ aina kun $n \geq n_0$. Voimme kuitenkin osoittaa, että tämä aiheuttaa ristiriidan. Jos $n^2 \leq cn$, niin voimme jakaa epäyhtälön molemmat puolet n:llä ja saamme $n \leq c$. Tämä tarkoittaa, että n on aina enintään yhtä suuri kuin vakio c. Tämä ei ole kuitenkaan mahdollista, koska n voi olla miten suuri tahansa, joten ei voi päteä $n^2 = O(n)$.

Määritelmistä lähtevä todistaminen on sinänsä mukavaa ajanvietettä, mutta sille on äärimmäisen harvoin tarvetta käytännössä, kun haluamme tutkia algoritmien tehokkuutta. Voimme koko kurssin ajan huoletta päätellä algoritmin aikavaativuuden katsomalla, mikä sen rakenne on, kuten olemme tehneet tämän luvun alkuosassa.

Luku 3

Järjestäminen

Järjestäminen on keskeinen algoritmiikan ongelma, jossa meillä on n alkiota sisältävä aineisto ja haluamme järjestää sen suuruusjärjestykseen. Esimerkiksi jos meillä on taulukko $[5, 2, 4, 2, 6, 1]$ ja järjestämme alkiot pienimmästä suurimpaan, tuloksena on taulukko $[1, 2, 2, 4, 5, 6]$.

Tavoitteemme on toteuttaa järjestäminen *tehokkaasti*. On helppoa toteuttaa järjestäminen ajassa $O(n^2)$, mutta tämä on liian hidasta suurella aineistolla. Tässä luvussa opimme kaksi tehokasta järjestämisalgoritmia, jotka vievät aikaa vain $O(n \log n)$. Toisaalta osoittautuu, että ei ole olemassa yleistä järjestämisalgoritmia, joka toimisi nopeammin kuin $O(n \log n)$.

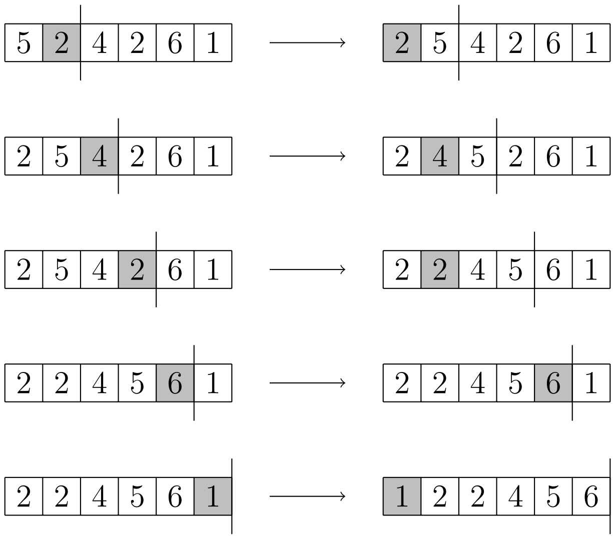
Voimme käyttää järjestämistä monella tavalla algoritmien suunnittelussa. Usein voimme helpottaa ongelman ratkaisemista järjestämällä ensin aineiston. Esimerkiksi jos haluamme tutkia, mikä alkio esiintyy useimmiten taulukossa, voimme järjestää ensin taulukon sisällön, jolloin yhtä suuret alkiot päätyvät vierekkäin. Tämän jälkeen meidän riittää käydä taulukko läpi ja etsiä siitä pisin samaa alkiota toistava osuus.

3.1 Järjestäminen ajassa $O(n^2)$

Tutustumme aluksi yksinkertaiseen järjestämisalgoritmiin nimeltä *lisäysjärjestäminen*, joka järjestää n-alkioisen aineiston ajassa $O(n^2)$. Vaikka algoritmi ei ole nopea, se on tutustumisen arvoinen ja antaa hyvän lähtökohdan tehokkaampien algoritmien suunnittelemiselle.

3.1.1 Lisäysjärjestäminen

Lisäysjärjestäminen käy läpi taulukon vasemmalta oikealle. Kun algoritmi tulee tiettyyn taulukon kohtaan, se siirtää kyseisessä kohdassa olevan alkion



Kuva 3.1: Lisäysjärjestäminen taulukolle $[5, 2, 4, 2, 6, 1]$.

oikeaan paikkaan taulukon alkuosassa niin, että taulukon alkuosa on tämän jälkeen järjestyksessä. Niinpä kun algoritmi pääsee taulukon loppuun, koko taulukko on järjestyksessä.

Kuva 3.1 näyttää esimerkin lisäysjärjestämisen toiminnasta, kun järjestämme taulukon $[5, 2, 4, 2, 6, 1]$. Jokaisella rivillä siirrämme harmaataustaisen alkion sen oikealle paikalle taulukon alkuosassa. Pystyviiva ilmaisee kohdan, johon asti taulukko on järjestyksessä siirron jälkeen. Lopulta saamme aikaan järjestetyn taulukon $[1, 2, 2, 4, 5, 6]$.

Seuraava koodi toteuttaa lisäysjärjestämisen:

```
for i = 1 to n-1
    j = i-1
    while j >= 0 and taulu[j] > taulu[j+1]:
        swap(taulu[j],taulu[j+1])
        j--
```

Koodissa komento `swap` vaihtaa keskenään sille annetut alkiot. Jokaisen indeksin i kohdalla siirrämme taulukon kohdassa i olevan alkion sen oikealle paikalle taulukon alkuosassa. Teemme tämän vaihtamalla joka askeleella keskenään alkion ja sen vasemmalla puolella olevan alkion niin kauan, kunnes alkio on oikealla paikalla.

Lisäysjärjestämisen tehokkuus riippuu siitä, mikä on järjestettävän taulukon sisältö. Algoritmi toimii sitä paremmin, mitä lähempänä järjestystä taulukko on valmiiksi. Jos taulukko on järjestyksessä, aikaa kuluu vain $\Theta(n)$, koska meidän ei tarvitse siirtää mitään alkioita. Pahin tapaus algoritmille on kuitenkin, että taulukko on *käänteisessä* järjestyksessä, jolloin joudumme siirtämään jokaisen alkion taulukon alkuun ja aikaa kuluu $\Theta(n^2)$.

3.1.2 Inversiot

Hyödyllinen käsite järjestämisalgoritmien analysoinnissa on *inversio*: kaksi taulukossa olevaa alkiota, jotka ovat väärässä järjestyksessä. Esimerkiksi taulukossa $[3, 1, 4, 2]$ on kolme inversiota: $(3, 1)$, $(3, 2)$ ja $(4, 2)$. Inversioiden määrä kertoo meille taulukon järjestyksestä: mitä vähemmän inversioita taulukossa on, sitä lähempänä se on järjestystä. Erityisesti taulukko on järjestyksessä tarkalleen silloin, kun siinä ei ole yhtään inversiota.

Kun järjestämisalgoritmi järjestää taulukon, se *poistaa* siitä inversioita. Lisäysjärjestämisen tapauksessa aina kun algoritmi vaihtaa kaksi alkiota keskenään, se poistaa taulukosta yhden inversion. Niinpä lisäysjärjestämisen työmäärä on yhtä suuri kuin järjestettävän taulukon inversioiden määrä.

Olemme jo todenneet, että pahin mahdollinen syöte lisäysjärjestämiselle on käänteisessä järjestyksessä oleva taulukko. Tällaisessa taulukossa jokainen alkiopari muodostaa inversion, joten inversioiden määrä on

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2).$$

Entä kuinka hyvin algoritmi toimii *keskimäärin*? Jos oletamme, että taulukossa on n eri alkiota satunnaisessa järjestyksessä, alkiopari muodostaa inversion todennäköisyydellä $1/2$. Niinpä inversioiden määrän *odotusarvo* on

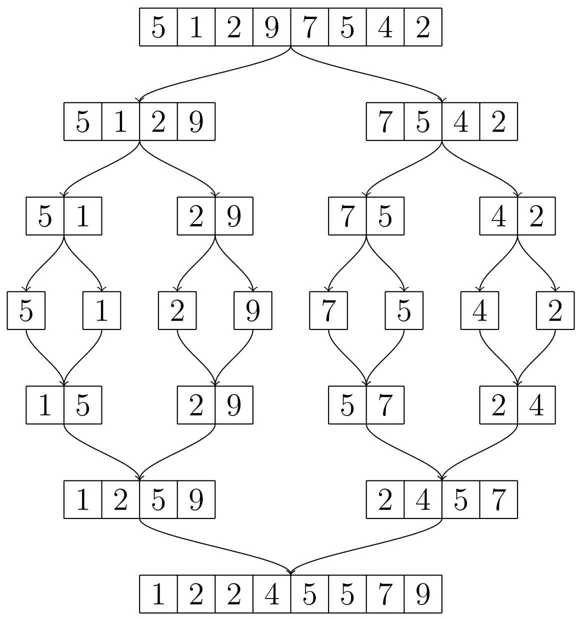
$$\frac{n(n-1)}{4} = \Theta(n^2),$$

eli aikaa kuluu neliöllinen määrä myös keskimääräisessä tapauksessa.

Syy lisäysjärjestämisen hitauteen on siis, että se ei poista taulukosta inversioita riittävän tehokkaasti. Jos haluamme kehittää paremman järjestämisalgoritmin, meidän täytyy suunnitella se niin, että se voi poistaa useita inversioita *yhtä aikaa*. Käytännössä algoritmin täytyy pystyä siirtämään väärässä paikassa oleva alkio tehokkaasti taulukon toiselle puolelle.

3.2 Järjestäminen ajassa $O(n \log n)$

Seuraavaksi tutustumme kahteen tehokkaaseen järjestämisalgoritmiin, jotka perustuvat *hajota ja hallitse* -tekniikkaan. Ideana on, että kun saamme järjestettäväksi taulukon, jaamme ongelman rekursiivisesti pienemmiksi osaongelmiksi, joissa meidän riittää järjestää pienempiä taulukoita.



Kuva 3.2: Lomitusjärjestäminen taulukolle $[5, 1, 2, 9, 7, 5, 4, 2]$.

3.2.1 Lomitusjärjestäminen

Lomitusjärjestäminen on rekursiivinen järjestämisalgoritmi, joka perustuu taulukon puolituksiin. Kun saamme järjestettäväksi n-kokoisen taulukon, jaamme sen keskeltä kahdeksi osataulukoksi, joissa molemmissa on noin $n/2$ alkiota. Tämän jälkeen järjestämme molemmat osataulukot erikseen rekursiivisesti. Lopuksi *lomitamme* järjestetyt osataulukot niin, että niistä muodostuu kokonainen järjestetty taulukko. Rekursio päättyy tapaukseen $n = 1$, jolloin taulukko on valmiiksi järjestyksessä eikä tarvitse tehdä mitään.

Seuraava koodi esittää tarkemmin lomitusjärjestämisen toiminnan:

```
function jarjesta(a,b)
    if a == b
        return
    k = (a+b)/2
    jarjesta(a,k-1)
    jarjesta(k,b)
    lomita(a,k-1,k,b)
```

Funktio järjestää taulukon osataulukon kohdasta a kohtaan b, eli kun haluamme järjestää koko taulukon, kutsumme funktiota parametreilla $a = 0$ ja $b = n-1$. Tarkastamme ensin, onko osataulukossa vain yksi alkio, ja jos on, poistumme funktiosta. Sitten laskemme muuttujaan k järjestettävän välin keskikohdan ja järjestämme vasemman ja oikean puoliskon rekursiivisesti. Lopuksi kutsumme funktiota `lomita`, joka muodostaa kokonaisen järjestetyn taulukon osataulukoista.

Kuva 3.2 näyttää, miten lomitusjärjestäminen toimii, kun sille annetaan taulukko $[5, 1, 2, 9, 7, 5, 4, 2]$. Algoritmi puolittaa ensin taulukon kahdeksi osataulukoksi $[5, 1, 2, 9]$ ja $[7, 5, 4, 2]$ ja järjestää molemmat osataulukot kutsumalla itseään. Kun algoritmi saa sitten järjestettäväksi taulukon $[5, 1, 2, 9]$, se jakaantuu jälleen osataulukoiksi $[5, 1]$ ja $[2, 9]$, jne. Lopulta jäljellä on vain yhden alkion kokoisia osataulukoita, jotka ovat valmiiksi järjestyksessä. Tällöin rekursiivinen jakautuminen päättyy ja algoritmi alkaa koota järjestettyjä osataulukkoja pienimmästä suurimpaan.

Oleellinen seikka algoritmin tehokkuuden kannalta on, miten nopeasti pystymme lomittamaan järjestetyt osataulukot. Tämä on mahdollista lineaarisessa ajassa käyttäen hyväksi tietoa, että osataulukot ovat järjestyksessä. Tämän ansiosta voimme käydä osataulukoita rinnakkain läpi vasemmalta oikealle ja valita aina seuraavaksi pienimmän alkion kahdesta vaihtoehdosta lopulliseen järjestettyyn taulukkoon.

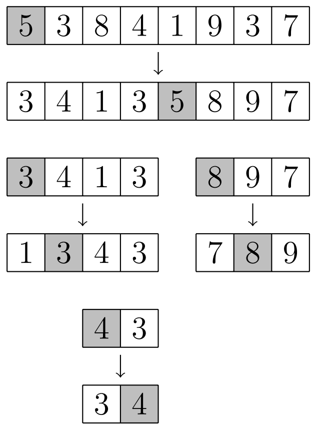
Nyt voimme määrittää, kuinka tehokas lomitusjärjestäminen on. Rekursion ylimmällä tasolla taulukon koko on n, seuraavalla tasolla $n/2$, tämän jälkeen $n/4$, jne., joten tasoja on yhteensä $O(\log n)$, ennen kuin pääsemme osataulukoihin, joissa on vain yksi alkio. Jokaisen tason käsitteleminen vie yhteensä aikaa $O(n)$, koska lomittaminen on lineaarista. Niinpä algoritmin kokonaisaikavaativuus on $O(n \log n)$.

3.2.2 Pikajärjestäminen

Pikajärjestäminen tarjoaa toisenlaisen rekursiivisen lähestymistavan taulukon järjestämiseen. Kun saamme järjestettäväksi taulukon, valitsemme ensin jonkin sen alkioista *jakoalkioksi*. Tämän jälkeen siirrämme alkioita niin, että jakoalkion vasemmalle puolelle tulevat kaikki sitä pienemmät alkiot ja oikealle puolelle tulevat kaikki muut alkiot. Lopuksi järjestämme rekursiivisesti vasemman ja oikean puolen alkiot.

Seuraava koodi esittää pikajärjestämisen toiminnan:

```
function jarjesta(int a, int b)
    if (a >= b)
        return
    k = jako(a,b)
    jarjesta(a,k-1)
    jarjesta(k+1,b)
```



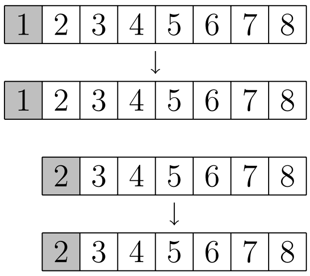
Kuva 3.3: Pikajärjestäminen taulukolle $[5, 3, 8, 4, 1, 9, 3, 7]$.

Funktiolle annetaan parametrina järjestettävä taulukon osataulukko. Jos osataulukko on tyhjä tai siinä on vain yksi alkio, poistumme funktiosta. Muuten kutsumme funktiota `jako`, joka valitsee jakoalkion, siirtää muut alkiot sen vasemmalle ja oikealle puolelle ja palauttaa sitten taulukon kohdan, jossa jakoalkio on siirtojen jälkeen. Sitten kutsumme funktiota rekursiivisesti taulukon vasempaan ja oikeaan osaan.

Kuva 3.3 näyttää, miten pikajärjestäminen toimii, kun sille annetaan taulukko $[5, 3, 8, 4, 1, 9, 3, 7]$. Meidän täytyy ensin päättää jokin tapa, miten valitsemme jakoalkion algoritmin aikana. Toimimme tässä esimerkissä niin, että jakoalkio on aina taulukon *ensimmäinen* alkio. Kun aloitamme järjestämisen, koko taulukon jakoalkio on 5 ja siirrämme sen vasemmalle puolelle alkiot $[3, 4, 1, 3]$ ja oikealle puolelle alkiot $[8, 9, 7]$. Tämän jälkeen järjestämme vasemman ja oikean puolen rekursiivisesti vastaavasti.

Pikajärjestämisen tehokkuuteen vaikuttaa, miten valitsemme jakoalkion. Haluaisimme valita jakoalkion niin, että sen vasemmalle ja oikealle puolelle siirretään suunnilleen yhtä monta alkiota. Jos onnistumme tässä, taulukon koko puolittuu jokaisen jaon jälkeen ja pikajärjestäminen toimii tehokkaasti. Koska pystymme siirtämään alkiot jakoalkion ympärille lineaarisessa ajassa, pikajärjestäminen vie tässä tapauksessa aikaa $O(n \log n)$ samaan tapaan kuin lomitusjärjestäminen.

Uhkana on kuitenkin, että valitsemme jakoalkion huonosti ja se jakaa taulukon osiin epätasaisesti. Kuva 3.4 näyttää tilanteen, jossa jokaisessa jaossa kaikki alkiot jäävät jakoalkion oikealle puolelle. Tällöin pikajärjestäminen viekin aikaa $O(n^2)$, koska rekursiivisia tasoja on $O(n)$. Selvästikään *ei* ole hyvä tapa valita taulukon ensimmäinen alkio jakoalkioksi, koska silloin valmiiksi järjestyksessä olevan taulukon järjestäminen vie aikaa $O(n^2)$.



Kuva 3.4: Pikajärjestämisen pahin tapaus: jokaisessa jaossa kaikki alkiot jäävät jakoalkion toiselle puolelle.

Miten meidän tulisi sitten valita jakoalkio? Jakoalkion tulisi jakaa taulukkoa tasaisesti mutta toisaalta meidän täytyy pystyä valitsemaan jakoalkio nopeasti. Yksi hyvä tapa valita jakoalkio on ottaa tarkasteluun taulukon ensimmäinen, keskimmäinen ja viimeinen alkio ja valita jakoalkioksi järjestyksessä keskimmäinen näistä kolmesta alkiosta. Tällainen valinta toimii käytännössä hyvin: on vaikeaa keksiä taulukkoa, jossa järjestäminen veisi aikaa $O(n^2)$, saati sitten, että tällainen tilanne esiintyisi käytännössä.

Meillä on nyt siis kaksi rekursiivista järjestämisalgoritmia: lomitusjärjestäminen toimii *aina* ajassa $O(n \log n)$, kun taas pikajärjestäminen toimii *ehkä* ajassa $O(n \log n)$, mutta saattaa viedä aikaa $O(n^2)$. Miksi haluaisimme koskaan käyttää epävarmaa pikajärjestämistä, kun voimme käyttää myös varmasti tehokasta lomitusjärjestämistä?

Syynä on, että pikajärjestämisen *vakiokertoimet* ovat pienet. Kokemus on osoittanut, että kun toteutamme lomitusjärjestämisen ja pikajärjestämisen ja mittaamme algoritmien todellisia suoritusaikoja, pikajärjestäminen toimii nopeammin. Näin tapahtuu siitä huolimatta, että pikajärjestämisen pahimman tapauksen aikavaativuus on $O(n^2)$. Käytännössä pahin tapaus onkin hyvin harvinainen, jos jakoalkion valinta on toteutettu huolellisesti.

3.3 Järjestämisen alaraja

Olisiko mahdollista luoda järjestämisalgoritmi, joka toimisi nopeammin kuin $O(n \log n)$? Osoittautuu, että tämä *ei* ole mahdollista, jos oletamme, että algoritmin tulee perustua taulukon alkioiden vertailuihin. Vertailuihin perustuva järjestämisalgoritmi järjestää taulukon tekemällä joukon vertailuja muotoa ”onko alkio x suurempi kuin alkio y?”.

Vertailuihin perustuva järjestämisalgoritmi on *yleiskäyttöinen*: se pystyy järjestämään mitä tahansa alkioita, kunhan meillä on keino saada selville kahden alkion suuruusjärjestys. Tämä on ominaisuus, jota yleensä ottaen toivomme järjestämisalgoritmilta, joten vertailuihin perustuminen on luonteva rajoitus. Kaikki tähän mennessä käsittelemämme järjestämisalgoritmit ovat olleet vertailuihin perustuvia

3.3.1 Alarajatodistus

Voimme ajatella vertailuihin perustuvaa järjestämistä *prosessina*, jossa jokainen vertailu antaa meille tietoa taulukosta ja auttaa meitä viemään taulukkoa lähemmäs järjestystä. Oletamme seuraavaksi, että taulukko muodostuu alkioista $1, 2, \ldots, n$, jolloin meillä on $n!$ vaihtoehtoa, mikä on taulukon alkuperäinen järjestys. Jotta järjestämisalgoritmi voisi toimia oikein, sen täytyy käsitellä jokainen järjestys eri tavalla.

Esimerkiksi jos $n = 3$, taulukon mahdolliset järjestykset alussa ovat $[1, 2, 3]$, $[1, 3, 2]$, $[2, 1, 3]$, $[2, 3, 1]$, $[3, 1, 2]$ ja $[3, 2, 1]$. Algoritmi voi vertailla ensin vaikkapa ensimmäistä ja toista alkiota. Jos ensimmäinen alkio on pienempi, voimme päätellä, että mahdolliset taulukot ovat $[1, 2, 3]$, $[1, 3, 2]$ ja $[2, 3, 1]$. Jos taas ensimmäinen alkio on suurempi, mahdolliset taulukot ovat $[2, 1, 3]$, $[3, 1, 2]$ ja $[3, 2, 1]$. Tämän jälkeen voimme jatkaa vertailuja samaan tapaan ja saada lisää tietoa taulukosta. Algoritmi voi päättyä vasta silloin, kun jäljellä on vain yksi mahdollinen taulukko, jotta voimme olla varmoja, että olemme järjestäneet taulukon oikein.

Tärkeä seikka on, että jokaisessa vertailussa ainakin toisessa tapauksessa meille jää jäljelle puolet mahdollisista taulukoista. Niinpä jos algoritmilla käy huono tuuri, se voi enintään puolittaa taulukoiden määrän joka askeleella. Tämä tarkoittaa, että algoritmi joutuu tekemään pahimmassa tapauksessa ainakin $\log(n!)$ vertailua. Logaritmien laskusääntöjen perusteella

$$\log(n!) = \log(1) + \log(2) + \cdots + \log(n).$$

Saamme tälle summalle alarajan ottamalla huomioon vain $n/2$ viimeistä termiä ja arvioimalla niitä alaspäin niin, että jokaisen termin suuruus on vain $\log(n/2)$. Tuloksena on alaraja

$$\log(n!) \geq (n/2)\log(n/2),$$

mikä tarkoittaa, että algoritmi joutuu tekemään pahimmassa tapauksessa $\Omega(n \log n)$ vertailua pahimmassa tapauksessa.

3.3.2 Laskemisjärjestäminen

Millainen olisi sitten järjestämisalgoritmi, joka ei perustu vertailuihin ja toimii tehokkaammin kuin $O(n \log n)$? Laskemisjärjestäminen on $O(n)$-aikainen järjestämisalgoritmi, jonka toiminta perustuu oletukseen, että taulukon alkiot ovat sopivan pieniä kokonaislukuja. Tarkemmin ottaen algoritmi olettaa, että jokainen luku on kokonaisluku välillä $0 \dots k$, missä $k = O(n)$.

Algoritmi luo *kirjanpidon*, joka kertoo, montako kertaa mikäkin mahdollinen luku välillä $0 \dots k$ esiintyy taulukossa. Seuraavassa koodissa kirjanpito tallennetaan taulukkoon `laskuri` niin, että `laskuri`$[x]$ ilmaisee, montako kertaa luku x esiintyy taulukossa. Tämän kirjanpidon avulla voimme luoda suoraan lopullisen järjestetyn taulukon.

```
for i = 0 to n-1
    laskuri[taulu[i]]++
i = 0
for x = 0 to k
    for j = 1 to laskuri[x]
        taulu[i] = x
        i++
```

Algoritmin molemmat vaiheet vievät aikaa $O(n)$, joten se toimii ajassa $O(n)$ ja on käytännössä hyvin tehokas. Algoritmi ei ole kuitenkaan yleinen järjestämisalgoritmi, koska sitä voi käyttää vain silloin, kun taulukon kaikki alkiot ovat sopivan pieniä kokonaislukuja.

3.4 Järjestäminen Javassa

Vaikka on hyödyllistä tuntea järjestämisen teoriaa, käytännössä ei ole hyvä idea toteuttaa itse järjestämisalgoritmia, koska nykypäivän ohjelmointikielissä on valmiit työkalut järjestämiseen. Valmiin algoritmin käyttämisessä on etuna, että se on varmasti hyvin toteutettu ja tehokas. Lisäksi meiltä säästyy aikaa, kun emme joudu toteuttamaan algoritmia itse.

Javan standardikirjasto sisältää metodin `Arrays.sort`, joka järjestää sille annetun taulukon. Esimerkiksi seuraava koodi järjestää kokonaislukuja sisältävän taulukon:

```
int[] taulu = {4,2,5,8,2,1,5,6};
Arrays.sort(taulu);
```

Kiinnostava kysymys on, mitä algoritmia Java käyttää taulukon järjestämiseen. Asian voi tarkastaa Javan standardikirjaston dokumentaatiosta. Yllättävää kyllä, Javan käyttämä algoritmi riippuu siitä, minkä *tyyppistä* tietoa taulukossa on. Jos taulukon alkiot ovat alkeistyyppisiä (esimerkiksi `int`), Java käyttää pikajärjestämisen muunnelmaa, jossa on kaksi jakoalkio-ta. Jos taas alkiot ovat oliotyyppisiä (esimerkiksi `String`), algoritmina on optimoitu lomitusjärjestäminen.

Jos haluamme, että Java pystyy järjestämään omia olioitamme, meidän täytyy toteuttaa luokkaan metodi `compareTo` ja merkitä, että luokka toteuttaa rajapinnan `Comparable`. Kun `Arrays.sort` järjestää taulukon, se kutsuu metodia `compareTo` aina, kun se haluaa selvittää kahden alkion suuruusjärjestyksen. Metodin tulee palauttaa negatiivinen arvo, nolla tai positiivinen arvo sen mukaan, onko olio itse pienempi, yhtä suuri vai suurempi kuin parametrina annettu olio.

Esimerkiksi seuraava koodi toteuttaa luokan `Piste`, johon voidaan tallentaa pisteen x- ja y-koordinaatit. Luokassa on metodi `compareTo`, joka määrittelee, että pisteet järjestetään ensisijaisesti x-koordinaatin ja toissijaisesti y-koordinaatin mukaan.

```
public class Piste implements Comparable<Piste> {
    public int x, y;

    public int compareTo(Piste p) {
        if (this.x != p.x) {
            return this.x-p.x;
        } else {
            return this.y-p.y;
        }
    }
}
```

Metodin `compareTo` avulla voimme myös konkreettisesti tarkastella, mitä Java tekee järjestäessään taulukon. Seuraava luokka sisältää vain yhden luvun, mutta ilmoittaa meille aina, kun Java kutsuu `compareTo`-funktiota:

```
public class Luku implements Comparable<Luku> {
    public int luku;

    public int compareTo(Luku x) {
        System.out.println("vertailu: " + luku + " " + x.luku);
        return this.luku-x.luku;
    }
}
```

Esimerkiksi kun järjestettävänä taulukkona on $[4, 1, 3, 2]$, saamme tietää, että Java tekee seuraavat vertailut:

```
vertailu: 1 4
vertailu: 3 1
vertailu: 3 4
vertailu: 3 1
vertailu: 2 3
vertailu: 2 1
```

3.5 Järjestämisen sovelluksia

Järjestämisen merkitys algoritmiikassa on siinä, että voimme ratkaista monia ongelmia tehokkaasti, kunhan aineisto on järjestyksessä. Niinpä yleinen tapa luoda tehokas algoritmi on järjestää ensin syöte ajassa $O(n \log n)$ ja hyödyntää sitten tavalla tai toisella järjestystä algoritmin loppuosassa.

3.5.1 Taulukon käsittely

Järjestämisen avulla voimme ratkaista ajassa $O(n \log n)$ monia taulukkoihin liittyviä tehtäviä. Käymme seuraavaksi läpi kaksi tällaista tehtävää.

Ensimmäinen tehtävämme on laskea, montako *eri* alkiota annetussa taulukossa on. Esimerkiksi taulukko $[2, 1, 4, 2, 4, 2]$ sisältää kolme eri alkiota: 1, 2 ja 4. Voimme ratkaista tehtävän järjestämällä ensin taulukon, minkä jälkeen yhtä suuret alkiot ovat vierekkäin. Tämän jälkeen tehtävän ratkaisu käy helposti, koska riittää tutkia, monessako taulukon kohdassa on *vierekkäin* kaksi eri alkiota. Voimme toteuttaa algoritmin näin:

```
sort(taulu)
laskuri = 1
for i = 1 to n-1
    if taulu[i-1] != taulu[i]
        laskuri++
print(laskuri)
```

Algoritmi järjestää ensin taulukon ajassa $O(n \log n)$, minkä jälkeen se käy läpi taulukon sisällön for-silmukalla ajassa $O(n)$. Tämän ansiosta algoritmi vie aikaa yhteensä $O(n \log n)$.

Entä jos haluammekin selvittää, mikä on taulukon *yleisin* alkio? Esimerkiksi taulukon $[2, 1, 4, 2, 4, 2]$ yleisin alkio on 2, joka esiintyy kolme kertaa taulukossa. Tämäkin tehtävä ratkeaa järjestämisen avulla, koska järjestämisen jälkeen yhtä suuret alkiot ovat peräkkäin ja meidän riittää etsiä pisin samaa alkiota toistava osuus. Voimme toteuttaa algoritmin seuraavasti:

```
sort(taulu)
maara = 1
suurin = 1
yleisin = taulu[0]
for i = 1 to n-1
    if taulu[i-1] != taulu[i]
        maara = 0
    maara++
    if maara > suurin
        suurin = maara
        yleisin = taulu[i]
print(yleisin)
```

Tässäkin algoritmissa järjestäminen vie aikaa $O(n \log n)$ ja for-silmukka vie aikaa $O(n)$, joten algoritmin kokonaisaikavaativuus on $O(n \log n)$.

3.5.2 Binäärihaku

Binäärihaku on menetelmä, jonka avulla voimme löytää alkion järjestetystä taulukosta ajassa $O(\log n)$. Ideana on pitää yllä väliä, jossa etsittävä alkio voi olla, ja puolittaa väli joka askeleella tutkimalla välin keskimmäisenä olevaa alkiota. Koska taulukko on järjestyksessä, voimme aina päätellä, kumpaan suuntaan hakua tulee jatkaa.

Seuraava koodi etsii binäärihaulla taulukosta alkiota x:

```
a = 0
b = n-1
while a <= b
    k = (a+b)/2
    if taulu[k] == x
        // alkio löytyi
    if taulu[k] < x
        a = k+1
    if taulu[k] > x
        b = k-1
```

Algoritmi pitää yllä hakuväliä $[a, b]$, joka on aluksi $[0, n-1]$, koska alkio x saattaa olla missä tahansa kohdassa taulukossa. Joka askeleella algoritmi tarkastaa välin keskellä kohdassa $k = \lfloor (a+b)/2 \rfloor$ olevan alkion. Jos kyseinen alkio on x, haku päättyy. Jos taas alkio on pienempi kuin x, haku jatkuu välin oikeaan puoliskoon, ja jos alkio on suurempi kuin x, haku jatkuu välin vasempaan puoliskoon. Koska välin koko puolittuu joka askeleella, binäärihaun aikavaativuus on $O(\log n)$.

Voimme ratkaista binäärihaun avulla esimerkiksi tehtävän, jossa annettuna on taulukko ja luku x ja haluamme selvittää, voimmeko valita taulukosta kaksi lukua a ja b niin, että $a + b = x$. Järjestämme ensin taulukon, minkä jälkeen käymme läpi taulukon luvut yksi kerrallaan. Jokaisen luvun kohdalla tutkimme, voisiko kyseinen luku olla a. Tällöin taulukossa pitäisi olla toinen luku b niin, että $a + b = x$, eli taulukossa pitäisi olla luku $x - a$. Pystymme tarkastamaan tämän binäärihaulla ajassa $O(\log n)$. Tuloksena on algoritmi, joka vie aikaa $O(n \log n)$, koska sekä järjestäminen että binäärihakua käyttävä läpikäynti vievät aikaa $O(n \log n)$.

Luku 4

Lista

Tämän luvun tavoitteemme on toteuttaa tietorakenne, jota kutsumme nimellä *lista*. Tällainen rakenne muodostuu alkioista, jotka ovat peräkkäin tietyssä järjestyksessä. Esimerkiksi $[3, 7, 2, 5]$ on lista, joka sisältää neljä alkiota. Haluamme toteuttaa listan niin, että pääsemme käsiksi tietyssä kohdassa olevaan alkioon sekä pystymme lisäämään ja poistamaan alkioita.

Tutustumme kahteen lähestymistapaan listan luomiseen. Ensin toteutamme taulukkolistan, jossa listan alkiot tallennetaan taulukkoon. Tämän jälkeen toteutamme linkitetyn listan, joka muodostuu toisiinsa viittaavista solmuista. Kuten tulemme huomaamaan, molemmissa listan toteutuksissa on omat hyvät ja huonot puolensa.

4.1 Taulukkolista

Taulukkolista on lista, joka on tallennettu taulukkona. Koska taulukon alkiot sijaitsevat aina peräkkäin muistissa, pääsemme käsiksi mihin tahansa listan alkioon ajassa $O(1)$. Haasteena toteutuksessa on kuitenkin, että taulukon koko on *kiinteä* ja jos haluamme muuttaa kokoa, meidän täytyy varata uusi taulukko ja kopioida sinne vanhan taulukon sisältö.

4.1.1 Muutokset lopussa

Toteutamme ensin taulukkolistan, jossa alkioiden lisäykset ja poistot tapahtuvat listan lopussa. Tallennamme listan taulukkona niin, että tietty määrä alkioita taulukon alussa on listan käytössä ja loput tyhjät kohdat on varattu tuleville alkioille. Tämän ansiosta pystymme lisäämään uuden alkion listalle ajassa $O(1)$, jos taulukossa on tilaa, koska meidän riittää vain ottaa käyttöön seuraava vapaana oleva kohta taulukosta.

(a)	3	7	2	5	–	–	–	–

(b)	3	7	2	5	6	–	–	–

Kuva 4.1: (a) Lista $[3, 7, 2, 5]$ tallennettuna taulukkoon. (b) Listan loppuun lisätään alkio 6.

3	7	2	5	6	1	2	8				
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓				
3	7	2	5	6	1	2	8	4	–	–	–

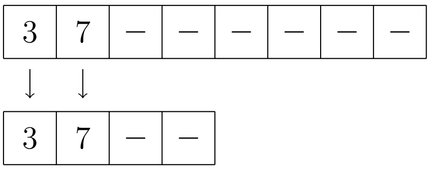
Kuva 4.2: Taulukkoon ei mahdu enää uutta alkiota. Meidän täytyy varata uusi suurempi taulukko ja kopioida vanhan taulukon sisältö sinne.

Kuva 4.1 näyttää esimerkin, jossa taulukossa on tilaa yhteensä kahdeksalle alkiolle ja siihen on tallennettu lista $[3, 7, 2, 5]$. Taulukon neljä ensimmäistä alkiota ovat siis listan käytössä ja muut ovat varalla tulevia alkioita varten. Kun lisäämme listan loppuun uuden alkion 6, otamme käyttöön taulukosta uuden kohdan, johon alkio sijoitetaan.

Mitä tapahtuu sitten, kun jossain vaiheessa koko taulukko on täynnä eikä uusi listalle lisättävä alkio mahdu enää taulukkoon? Tällöin meidän täytyy ensin varata uusi suurempi taulukko ja kopioida kaikki vanhan taulukon alkiot siihen. Vasta tämän jälkeen voimme lisätä uuden alkion listalle. Tämä vie aikaa $O(n)$, koska kopioimme kaikki listan alkiot uuteen paikkaan muistissa. Esimerkiksi kuvassa 4.2 uusi alkio 4 ei mahdu taulukkoon, joten joudumme varaamaan uuden taulukon ja kopioimaan alkiot.

Olemme saaneet siis aikaan listan, jossa lisääminen vie aikaa *joko* $O(1)$ tai $O(n)$ riippuen siitä, mahtuuko alkio nykyiseen taulukkoon vai täytyykö meidän varata uusi taulukko. Jotta lista olisi käyttökelpoinen, hidas $O(n)$-operaatio ei saisi esiintyä liian usein. Osoittautuu, että saavutamme tämän tavoitteen, kunhan varaamme uuden taulukon aina reilusti aiempaa suuremmaksi. Tavanomainen ratkaisu on *kaksinkertaistaa* taulukon koko aina, kun varaamme uuden taulukon. Kun toimimme näin, jokaisen alkion lisääminen listalle vie *keskimäärin* vain $O(1)$ aikaa.

Voimme ajatella asian näin: Jokainen listalle lisättävä alkio maksaa *pääsymaksuna* kolme euroa. Tästä yksi euro menee listalle liittymiseen ja kaksi euroa jäävät säästöön. Sitten kun aikanaan listalle täytyy varata suurempi taulukko, jokainen viime erässä lisätty alkio maksaa yhden euron omasta siir-



Kuva 4.3: Poistojen jälkeen taulukon koko on käynyt tarpeettoman suureksi, ja puolitamme taulukon koon.

rostaan ja yhden euron aiemmin lisätyn alkion siirrosta. Koska taulukon koko kaksinkertaistuu joka vaiheessa, kolmen euron kiinteä pääsymaksu riittää siihen, että kaikki tulevat siirrot saadaan kustannettua.

Voimme poistaa alkion listan lopusta aina $O(1)$-ajassa, koska taulukon kokoa ei tarvitse koskaan suurentaa. Tässä voisi kuitenkin tulla ongelmaksi, että monien poistojen jälkeen taulukossa on turhan paljon tyhjää tilaa lopussa. Voimme soveltaa tässä käänteisesti samaa ideaa kuin lisäämisessä: jos poistamisen jälkeen vain *neljännes* taulukosta on käytössä, puolitamme taulukon koon. Kuva 4.3 näyttää esimerkin tällaisesta tilanteesta. Tällä tavalla myös poistamiset vievät keskimäärin aikaa $O(1)$.

Miksi emme voisi varata heti aluksi niin suurta taulukkoa, että lopullinen lista mahtuisi siihen varmasti? Tässä olisi huonona puolena, että listamme tuhlaisi paljon muistia. Algoritmissa saattaa olla samaan aikaan käytössä monia listoja, ja haluamme, että listalle varattu taulukko on samaa kokoluokkaa kuin listan todellinen sisältö.

4.1.2 Muutokset alussa ja lopussa

Melko samaan tapaan voimme myös luoda taulukkolistan, joka sallii tehokkaat alkioiden lisäykset ja poistot sekä listan alussa että lopussa. Jotta tämä onnistuisi, muutamme listan tallennustapaa niin, että lista voi alkaa ja päättyä missä tahansa taulukon kohdassa ja listan sisältö voi tarvittaessa jatkua taulukon lopusta alkuun.

Kuva 4.4 näyttää esimerkin listan $[3, 7, 2, 5]$ uudesta tallennustavasta. Merkki $\rightarrow$ osoittaa kohdan, josta lista alkaa, ja merkki $\leftarrow$ osoittaa kohdan, johon lista päättyy. Kun haluamme lisätä alkion listan alkuun, siirrymme vasemmalle kohdasta $\rightarrow$, ja kun haluamme lisätä alkion listan loppuun, siirrymme oikealle kohdasta $\leftarrow$. Kun haluamme poistaa alkioita listasta, menettelemme käänteisesti.

Jos kohdat $\rightarrow$ ja $\leftarrow$ ovat vierekkäin, taulukko on täynnä, emmekä voi enää lisätä uutta alkiota listan alkuun tai loppuun. Kuva 4.5 näyttää esimerkin tällaisesta tilanteesta. Tällöin meidän täytyy varata uusi suurempi tau-

(a)	2	5	−	−	−	−	3	7
		←					→	

(b)	2	5	−	−	−	6	3	7
		←				→		

(c)	2	−	−	−	−	6	3	7
	←					→		

Kuva 4.4: (a) Lista $[3, 7, 2, 5]$ tallennettuna taulukkoon. (b) Listan alkuun lisätään alkio 6. (c) Listan lopusta poistetaan alkio 5.

2	5	4	1	2	5	3	7
			←	→			

Kuva 4.5: Lista $[2, 5, 3, 7, 2, 5, 4, 1]$ täyttää koko taulukon, emmekä voi lisätä uutta alkiota. Ratkaisuna on varata suurempi taulukko.

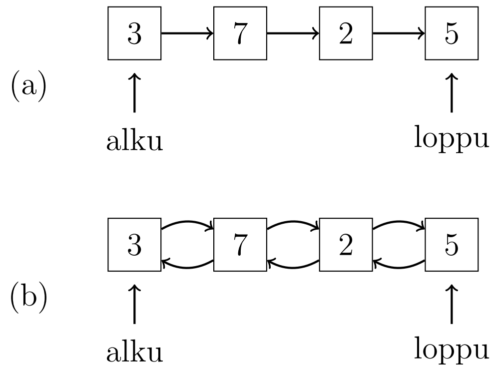
lukko, johon listan sisältö siirretään. Voimme menetellä samalla tavalla kuin aiemmin ja kaksinkertaistaa taulukon koon joka vaiheessa, jolloin operaatiot vievät keskimäärin aikaa $O(1)$.

4.2 Linkitetty lista

Linkitetty lista muodostuu solmuista, joista jokainen sisältää yhden listan alkion. Linkitetty lista voi olla yhteen tai kahteen suuntaan linkitetty. Yhteen suuntaan linkitetyssä listassa jokaisesta solmusta on viittaus seuraavaan solmuun, ja kahteen suuntaan linkitetyssä listassa jokaisesta solmusta on viittaus sekä seuraavaan että edelliseen solmuun.

Kuva 4.6 näyttää esimerkkinä listan $[3, 7, 2, 5]$ yhteen ja kahteen suuntaan linkitettynä. Molemmissa listoissa tiedossamme on viittaukset listan alkuun ja loppuun. Yhteen suuntaan linkitetyssä listassa voimme käydä läpi listan alkiot alusta loppuun, kun taas kahteen suuntaan linkitetyssä listassa voimme kulkea sekä alusta loppuun että lopusta alkuun.

Kaksisuuntainen linkitys on käytännössä järkevä tapa toteuttaa linkitetty lista, ja oletamme jatkossa, että listamme on kahteen suuntaan linkitetty ja meillä on tiedossa viittaukset listan alkuun ja loppuun.



Kuva 4.6: Lista $[3, 7, 2, 5]$ linkitettynä listana. (a) Yhteen suuntaan linkitetty lista. (b) Kahteen suuntaan linkitetty lista.

4.2.1 Linkitetyt rakenteet

Jokaisessa ohjelmointikielessä on omat keinonsa linkitetyn rakenteen toteuttamiseen. Javassa voimme toteuttaa linkitetyn rakenteen niin, että jokainen solmu on oma olionsa. Esimerkiksi voimme toteuttaa seuraavan luokan `Solmu`, jonka oliot toimivat linkitetyn listan solmuina:

```
public class Solmu {
    public int arvo;
    public Solmu seuraava;
    public Solmu edellinen;

    public Solmu(int arvo, Solmu seuraava, Solmu edellinen) {
        this.arvo = arvo;
        this.seuraava = seuraava;
        this.edellinen = edellinen;
    }
}
```

Kenttä `arvo` kertoo solmun arvon, kenttä `seuraava` osoittaa seuraavaan solmuun ja kenttä `edellinen` osoittaa edelliseen solmuun. Jos seuraavaa tai edellistä solmua ei ole, viittauksen tilalla on arvo `null`. Tämän luokan avulla voisimme luoda linkitetyn listan $[3, 7, 2, 5]$ seuraavasti:

```
Solmu s1, s2, s3, s4;
s1 = new Solmu(3, s2, null);
s2 = new Solmu(7, s3, s1);
s3 = new Solmu(2, s4, s2);
s4 = new Solmu(5, null, s3);
```

Tämän jälkeen voisimme käydä listan läpi näin alusta loppuun:

```
Solmu s = s1;
while (s != null) {
    System.out.println(s.arvo);
    s = s.seuraava;
}
```

Koodin tulostus on seuraava:

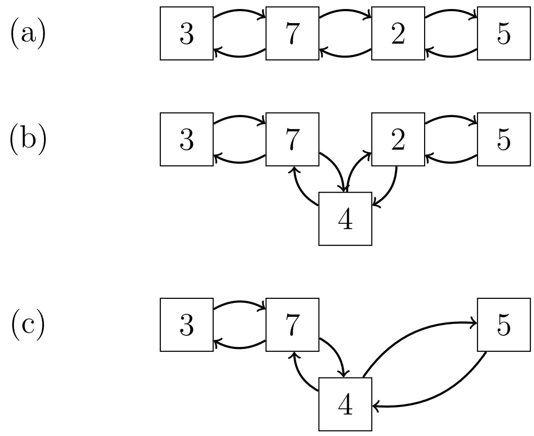
```
3
7
2
5
```

4.2.2 Listan operaatiot

Linkitetyn listan etuna on, että voimme lisätä ja poistaa alkioita $O(1)$-ajassa kaikissa listan kohdissa. Kun haluamme lisätä listalle alkion, luomme ensin uuden solmun ja muutamme sitten sen vieressä olevien solmujen viittauksia niin, että ne viittaavat uuteen solmuun. Vastaavasti kun haluamme poistaa alkion, muutamme viittauksia niin, että solmu ohitetaan.

Kuva 4.7 näyttää esimerkin linkitetyn listan käsittelystä. Listan sisältönä on aluksi $[3, 7, 2, 5]$. Sitten lisämme listan keskelle alkion 4, jolloin luomme ensin uuden solmun alkiolle ja muutamme sitten viittauksia alkioiden 7 ja 2 välillä niin, että alkio 4 tulee niiden väliin. Lopuksi poistamme listasta alkion 2, jolloin yhdistämme alkiot 4 ja 5 suoraan toisiinsa.

Pääsemme listan ensimmäiseen ja viimeiseen solmuun tehokkaasti, koska meillä on muistissa viittaukset niihin. Sen sijaan jos haluamme päästä johonkin muuhun listan kohtaan, meidän täytyy aloittaa listan alusta tai lopusta ja kulkea askel kerrallaan viittauksia seuraten. Niinpä listan keskellä olevaan kohtaan pääseminen vie aikaa $O(n)$. Joudumme liikkumaan solmuihin linkkejä pitkin, koska solmut voivat olla eri puolilla muistia eikä meillä ole keinoa tietää suoraan, mihin mikäkin solmu on tallennettu.



Kuva 4.7: (a) Alkuperäinen lista $[3, 7, 2, 5]$. (b) Listan keskelle lisätään alkio 4. (c) Listasta poistetaan alkio 2.

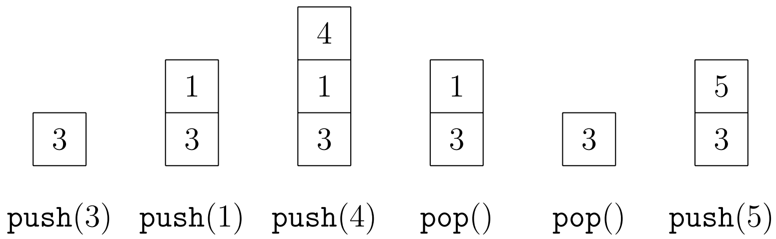
operaatio	taulukkolista	linkitetty lista
pääsy listan alkuun	$O(1)$	$O(1)$
pääsy listan loppuun	$O(1)$	$O(1)$
pääsy listan keskelle	$O(1)$	$O(n)$
lisäys/poisto listan alussa	$O(1)^*$	$O(1)$
lisäys/poisto listan lopussa	$O(1)^*$	$O(1)$
lisäys/poisto listan keskellä	$O(n)$	$O(1)$

Taulukko 4.1: Taulukkolistan ja linkitetyn listan operaatioiden aikavaativuuksia. Merkintä * tarkoittaa keskimääräistä aikavaativuutta.

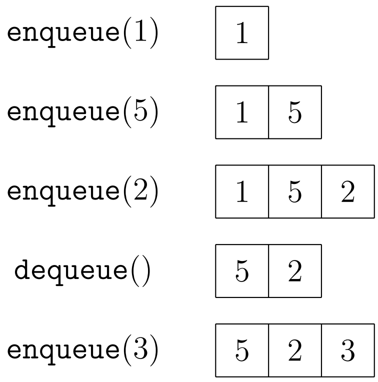
4.2.3 Listojen vertailua

Taulukko 4.1 esittää yhteenvedon taulukkolistan ja linkitetyn listan ominaisuuksista. Kummassakin toteutuksessa on yksi operaatio, joka ei ole tehokas. Taulukkolistassa pääsemme tehokkaasti mihin tahansa listan kohtaan, mutta on hidasta muokata listaa keskeltä. Linkitetyssä listassa voimme muokata listaa mistä tahansa, mutta keskelle pääseminen on hidasta.

Huomaa, että keskelle pääsemisen hitaus rajoittaa melko paljon linkitetyn listan käyttämistä. Vaikka pystymme sinänsä muokkaamaan listaa mistä tahansa kohdasta tehokkaasti, meidän tulee ensin *päästä* kyseiseen kohtaan. Jos meillä on jostain syystä etukäteen tiedossa viittaus listan keskelle, voimme muokata kyseistä kohtaa tehokkaasti, mutta muuten meidän tulee ensin kulkea haluttuun kohtaan, missä kuluu aikaa $O(n)$.



Kuva 4.8: Esimerkki pinon käsittelystä: lisäämme tyhjään pinoon alkiot 3, 1 ja 4, poistamme kaksi ylintä alkiota ja lisäämme lopuksi alkion 5.



Kuva 4.9: Esimerkki jonon käsittelystä: lisäämme tyhjään jonon alkiot 1, 5 ja 2, poistamme yhden alkion ja lisäämme vielä alkion 3.

4.3 Pino ja jono

Listan avulla voimme toteuttaa myös kaksi erikoistunutta tietorakennetta, pinon ja jonon, jotka sisältävät vain osan listan ominaisuuksista eli niiden operaatiot ovat listaa rajoittuneempia.

Pino on tietorakenne, jossa on kolme operaatiota: alkion lisääminen pinon päälle (`push`), ylimmän alkion poistaminen (`pop`) sekä ylimmän alkion hakeminen. Esimerkiksi kuvassa 4.8 lisäämme ensin tyhjään pinoon kolme alkiota, poistamme sitten kaksi alkiota ja lisäämme vielä yhden alkion. *Jono* on puolestaan tietorakenne, jossa voimme lisätä alkioita jonon loppuun (`enqueue`), poistaa alkioita jonon alusta (`dequeue`) ja hakea alkioita molemmista päistä. Esimerkiksi kuvassa 4.9 lisäämme ensin tyhjään jonoon kolme alkiota, poistamme sitten yhden alkion ja lisämme vielä yhden alkion.

Pystymme toteuttamaan sekä pinon että jonon helposti listana niin, että niiden operaatiot toimivat ajassa $O(1)$. Mutta mitä järkeä on luoda uusia tietorakenteita, jotka ovat *huonompia* kuin lista? Listassa voimme käsitellä mitä tahansa alkioita, mutta pinossa ja jonossa emme pääse käsiksi keskellä oleviin alkioihin. Selitys on siinä, että pino ja jono ovat hyödyllisiä *käsitteitä* algoritmien suunnittelussa. Voimme usein ajatella algoritmissa tarvittavaa tietorakennetta pinona tai jonona ja toteuttaa sen sitten listana.

Tarkastellaan esimerkkinä tehtävää, jossa meille on annettu *sulkulauseke*, joka muodostuu kaarisulkeista `()` sekä hakasulkeista `[]`. Haluamme selvittää, onko lauseke *oikein muodostettu* eli onko jokaiselle aloittavalle sululle vastaava lopettava pari. Esimerkiksi lauseke `[()]()` on oikein muodostettu, kun taas lauseke `[()(])` ei ole. Voimme ratkaista tehtävän pinon avulla käymällä läpi lausekkeen merkit vasemmalta oikealle. Kun vastaan tulee aloittava sulku `(` tai `[`, lisäämme sen pinoon. Kun taas vastaan tulee lopettava sulku `)` tai `]`, varmistamme että pinossa ylimpänä on sitä vastaava aloittava sulku, jonka poistamme pinosta. Jos lausekkeen läpikäynnissä ei esiinny virheitä ja pino on lopuksi tyhjä, lauseke on oikein muodostettu.

4.4 Javan toteutukset

Javan standardikirjastossa on monia listojen toteutuksia, jotka pohjautuvat taulukkolistaan tai linkitettyyn listaan. Seuraavaksi tutustumme rakenteisiin, joista on usein hyötyä algoritmien toteutuksessa.

4.4.1 `ArrayList`-rakenne

`ArrayList`-rakenne on taulukkolista, joka sallii tehokkaat lisäykset ja poistot listan lopussa. Esimerkiksi seuraava koodi luo listan, lisää siihen alkiot 1, 2 ja 3 ja tulostaa listan sisällön.

```
ArrayList<Integer> lista = new ArrayList<>();
lista.add(1);
lista.add(2);
lista.add(3);
System.out.println(lista); // [1, 2, 3]
```

Metodi `add` toimii keskimäärin ajassa $O(1)$, joten voimme lisätä tehokkaasti alkioita listan loppuun.

Koska lista on tallennettu taulukkona, pääsemme myös tehokkaasti käsiksi sen alkioihin kohdan perusteella. Metodi `get` hakee tietyssä kohdassa olevan arvon, ja metodi `set` muuttaa arvoa. Esimerkiksi seuraava koodi tulostaa ensin listan kohdassa 1 olevan alkion ja muuttaa sitten sen arvoksi 5.

```
System.out.println(lista.get(1)); // 2
lista.set(1,5);
System.out.println(lista.get(1)); // 5
```

Luokassa `Collections` on hyödyllisiä metodeita `ArrayList`-rakenteen käsittelyyn. Esimerkiksi seuraava koodi järjestää ensin listan, muuttaa sitten sen järjestyksen käänteiseksi ja sekoittaa lopuksi järjestyksen.

```
Collections.sort(lista);
Collections.reverse(lista);
Collections.shuffle(lista);
```

4.4.2 `ArrayDeque`-rakenne

`ArrayDeque`-rakenne on taulukkolista, joka sallii tehokkaat lisäykset ja poistot sekä listan alussa että lopussa. Alkioita voi lisätä metodeilla `addFirst` ja `addLast` ja poistaa metodeilla `removeFirst` ja `removeLast`:

```
ArrayDeque<Integer> lista = new ArrayDeque<>();
lista.addLast(1);
lista.addFirst(2);
lista.addLast(3);
System.out.println(lista); // [2, 1, 3]
lista.removeFirst();
System.out.println(lista); // [1, 3]
```

Lisäksi voimme hakea listan ensimmäisen ja viimeisen alkion metodeilla `getFirst` ja `getLast`:

```
ArrayDeque<Integer> lista = new ArrayDeque<>();
lista.addLast(1);
lista.addLast(2);
lista.addLast(3);
System.out.println(lista.getFirst()); // 1
System.out.println(lista.getLast()); // 3
```

Kaikki nämä metodit toimivat keskimäärin ajassa $O(1)$. Rajoituksena on kuitenkin, että emme pääse käsiksi listan keskellä oleviin alkioihin, vaan voimme käsitellä vain listan alkua ja loppua.

4.4.3 `LinkedList`-rakenne

`LinkedList`-rakenne toteuttaa kaksisuuntaisen linkitetyn listan, jossa voimme helposti lisätä ja poistaa alkioita listan alussa ja lopussa. Seuraava koodi esittelee asiaa:

```
LinkedList<Integer> lista = new LinkedList<>();
lista.addLast(1);
lista.addFirst(2);
lista.addLast(3);
System.out.println(lista); // [2, 1, 3]
lista.removeFirst();
System.out.println(lista); // [1, 3]
```

Jos haluamme tehdä lisäyksiä ja poistoja muualla listassa, meidän täytyy ottaa käyttöön *iteraattori*, joka osoittaa haluttuun kohtaan. Seuraava koodi luo iteraattorin, joka osoittaa ensin listan alkuun. Sitten siirrämme iteraattoria kaksi askelta eteenpäin ja lisäämme alkion 5 iteraattorin kohdalle eli listan toisen ja kolmannen alkion väliin.

```
ListIterator<Integer> x = lista.listIterator(0);
x.next();
x.next();
x.add(5);
```

`LinkedList` tarjoaa myös metodit `get` ja `set`, joiden avulla pääsemme käsiksi tietyssä kohdassa listalla olevaan alkioon. Nämä metodit vievät kuitenkin aikaa $O(n)$, koska joudumme kulkemaan ensin oikeaan kohtaan listan alusta tai lopusta. Tämän vuoksi `LinkedList` ei ole hyvä valinta, jos haluamme käsitellä alkioita kohdan perusteella.

4.5 Tehokkuusvertailu

Tärkeä kysymys on, miten tehokkaita taulukkolista ja linkitetty lista ovat *käytännössä* ja kumpaa meidän kannattaa käyttää, jos voimme valita. Seuraavaksi vertailemme Javan taulukkolistan (`ArrayList`) ja linkitetyn listan (`LinkedList`) käytännön tehokkuutta.

Testissä luomme ensin taulukon, joka sisältää luvut $1, 2, \ldots, n$ satunnaisessa järjestyksessä, sekä tyhjän listan. Tämän jälkeen käymme taulukon läpi vasemmalta oikealle ja lisäämme kunkin luvun listalle sen oikealle paikalle niin, että lista säilyy järjestettynä. Esimerkiksi jos listalla on ennestään alkiot $[2, 3, 6]$ ja seuraava taulukon alkio on 4, listasta tulee $[2, 3, 4, 6]$. Teemme

parametri n	`ArrayList`	`LinkedList`
10000	0.13 s	0.38 s
20000	0.48 s	1.20 s
30000	0.99 s	2.70 s
40000	1.72 s	5.15 s
50000	3.14 s	8.99 s

Taulukko 4.2: Listarakenteiden tehokkuusvertailu.

saman testin taulukkolistalle ja linkitetylle listalle.

Taulukkolistan tapauksessa käymme listaa läpi alusta muuttujalla k, kunnes tulemme kohtaan, johon uusi alkio kuuluu. Tämän jälkeen lisäämme alkion kutsumalla metodia `add`.

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    int k = 0;
    while (k < lista.size() && lista.get(k) < taulu[i]) {
        k++;
    }
    lista.add(k,taulu[i]);
}
```

Linkitetyn listan tapauksessa luomme iteraattorin, jonka avulla etsimme uuden alkion kohdan listan alusta lähtien. Tämän jälkeen lisäämme alkion listalle metodilla `add`.

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    ListIterator<Integer> x = lista.listIterator(0);
    while (x.hasNext()) {
        if (x.next() > taulu[i]) {
            x.previous();
            break;
        }
    }
    x.add(taulu[i]);
}
```

Taulukkolistassa sekä oikean kohdan etsiminen että alkion lisääminen vievät aikaa $O(n)$, kun taas linkitetyssä listassa oikean kohdan etsiminen vie aikaa $O(n)$, mutta alkion lisääminen vie aikaa vain $O(1)$. Mutta kuinka nopeasti koodit toimivat käytännössä?

Taulukko 4.2 näyttää testin tulokset. Osoittautuu, että taulukkolista on selvästi *nopeampi* kuin linkitetty lista. Näin käy siitä huolimatta, että tau-

	3	7	2	5			

	3					2	
				7			
		5					

Kuva 4.10: Taulukkolista ja linkitetty lista tietokoneen muistissa.

lukkolistassa alkion lisääminen vie aikaa $O(n)$, mutta linkitetyssä listassa aikaa kuluu $O(1)$. Kysymys kuuluukin:

Milloin kannattaa käyttää linkitettyä listaa?

Tietorakenteiden maailmassa jokaiselle tietorakenteelle on yleensä omat tietyt käyttötarkoituksensa, joissa se erottuu edukseen muista tietorakenteista. Linkitetty lista muodostaa kuitenkin poikkeuksen tähän sääntöön: *sitä ei kannata käyttää yleensä koskaan.*

Syynä tähän on, että nykyaikaiset tietokoneet *suosivat* taulukkolistan käyttämistä linkitetyn listan sijaan. Kuvassa 4.10 näkyy, miten taulukkolista ja linkitetty lista asettuvat tietokoneen muistissa. Taulukkolistan alkiot ovat peräkkäin, kun taas linkitetyn listan alkiot voivat olla eri puolilla muistia sekalaisessa järjestyksessä. Nykyaikaisen prosessorin välimuistit ja komentojen ennustus on toteutettu niin, että ne ovat parhaimmillaan silloin, kun tieto on tallennettu muistissa peräkkäin – eli juuri kuten taulukkolistassa. Tämä näkyy käytännössä siinä, että taulukkolistan käsittely on selvästi tehokkaampaa kuin linkitetyn listan käsittely.

Luku 5

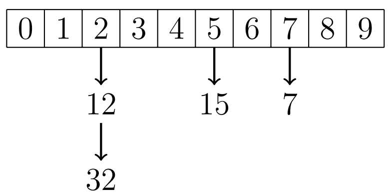
Hajautustaulu

Hajautustaulu on tietorakenne, joka pitää yllä alkioiden joukkoa. Voimme tarkastaa, kuuluuko tietty alkio joukkoon, sekä lisätä ja poistaa alkioita. Kuten matematiikassa, jokainen alkio voi esiintyä enintään kerran joukossa. Hajautustaulu toteuttaa kaikki yllä mainitut operaatiot tehokkaasti, mikä tekee siitä kätevän työkalun algoritmien suunnittelussa.

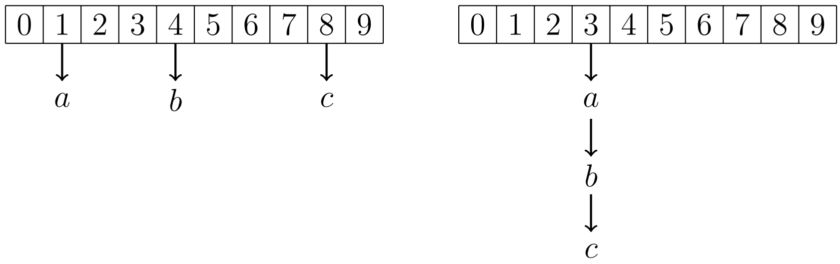
Tutustumme tässä luvussa ensin hajautustaulun toimintaan ja sen tehokkuuteen vaikuttaviin seikkoihin. Tämän jälkeen käsittelemme Javan tietorakenteet `HashSet` ja `HashMap`, jotka perustuvat hajautustauluun. Lopuksi käymme läpi esimerkkejä tilanteista, joissa voimme käyttää hajautustaulua algoritmien suunnittelussa.

5.1 Hajautustaulun toiminta

Toteutamme hajautustaulun taulukkona, jonka jokaisessa kohdassa on lista joukkoon kuuluvia alkioita. Jotta voimme käyttää hajautustaulua, tarvitsemme *hajautusfunktion* f, joka antaa *hajautusarvon* $f(x)$ mille tahansa joukon alkiolle x. Hajautusarvo on kokonaisluku väliltä $0, 1, \ldots, N-1$, missä N on hajautustaulun koko. Tallennamme hajautustaulun kohdassa k olevaan



Kuva 5.1: Hajautustaulu, joka vastaa joukkoa $\{7, 12, 15, 32\}$. Hajautusfunktiona on $f(x) = x \bmod 10$.



Kuva 5.2: Kaksi hajautustaulua joukolle $\{a, b, c\}$. Vasen tilanne on paras mahdollinen, oikea tilanne taas huonoin mahdollinen.

listaan kaikki ne joukon alkiot, joiden hajautusarvo on k.

Kuvassa 5.1 on esimerkkinä hajautustaulu, jonka kokona on $N = 10$. Olemme tallentaneet hajautustauluun joukon $\{7, 12, 15, 32\}$ käyttäen hajautusfunktiota $f(x) = x \bmod 10$. Tämä tarkoittaa, että alkion x hajautusarvo on sen jakojäännös 10:llä eli luvun viimeinen numero. Esimerkiksi alkiot 12 ja 32 ovat kohdassa 2, koska niissä viimeinen numero on 2, ja alkiot 15 ja 7 ovat vastaavasti kohdissa 5 ja 7. Kaikki muut hajautustaulun listat ovat tällä hetkellä tyhjiä.

Kun haluamme tarkastaa, onko joukossa alkiota x, laskemme ensin sen hajautusarvon $f(x)$. Tämän jälkeen käymme läpi kaikki kohdan $f(x)$ listassa olevat alkiot ja tarkastamme, onko jokin niistä alkio x. Vastaavasti kun haluamme lisätä alkion x joukkoon tai poistaa alkion x joukosta, teemme muutoksen kohdassa $f(x)$ olevaan listaan. Jokaisen operaation aikavaativuus on $O(m)$, missä m on listan alkioiden määrä. Hajautustaulu toimii siis tehokkaasti, jos jokainen siinä oleva lista on lyhyt.

5.1.1 Hajautusfunktio

Hajautusfunktio $f(x)$ määrittää, mihin kohtaan hajautustaulua alkio x sijoitetaan. Sen täytyy antaa jokaiselle mahdolliselle alkiolle hajautusarvo eli kokonaisluku väliltä $0, 1, \ldots, N-1$, missä N on hajautustaulun koko. Muilta osin meillä on periaatteessa vapaat kädet hajautusfunktion suunnitteluun. Mutta millainen olisi hyvä hajautusfunktio?

Haluamme, että hajautusfunktio jakaa alkioita *tasaisesti* hajautustaulun eri puolille. Jos onnistumme tässä, kaikki listat ovat lyhyitä ja hajautustaulun operaatiot ovat tehokkaita. Kuva 5.2 näyttää kaksi hajautustaulua, jotka vastaavat joukkoa $\{a, b, c\}$ kahdella eri hajautusfunktiolla. Vasemmassa taulussa hajautus on onnistunut täydellisesti ja jokainen alkio on omassa listassaan. Oikeassa taulussa taas kaikki alkiot ovat joutuneet samaan listaan eikä hajautuksesta ole mitään hyötyä. Tavoitteemme on saada aikaan hajautusfunktio, jonka toiminta on lähempänä vasenta tilannetta.

Jos hajautettavat alkiot ovat kokonaislukuja, suoraviivainen hajautusfunktio on $f(x) = x \bmod N$, mikä tarkoittaa, että otamme jakojäännöksen hajautustaulun koolla N. Tämä on hyvin toimiva hajautusfunktio, kunhan aineistossa esiintyy tasaisesti eri jakojäännöksiä. Entä jos alkiot ovat jotain muuta tyyppiä kuin kokonaislukuja? Tällöin meidän riittää päättää ensin jokin järkevä tapa, kuinka muutamme alkion kokonaisluvuksi, minkä jälkeen otamme jakojäännöksen N:llä.

Tarkastellaan esimerkkinä tilannetta, jossa haluamme hajauttaa merkkijonoja eli meidän täytyy löytää keino muuttaa merkkijono kokonaisluvuksi. Oletamme, että merkkijonossa on k merkkiä, joiden merkkikoodit ovat $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$. Esimerkiksi jos merkkijono on `apina`, merkkikoodit[1] ovat $c_0 = 97$, $c_1 = 112$, $c_2 = 105$, $c_3 = 110$ ja $c_4 = 97$. Yksi tapa muuttaa merkkijono kokonaisluvuksi on laskea merkkikoodien summa

$$c_0 + c_1 + \cdots + c_{k-1},$$

jolloin merkkijonon `apina` hajautusarvo on

$$97 + 112 + 105 + 110 + 97 = 521.$$

Tämä on sinänsä järkevä tapa, mutta siinä on yksi ongelma: kaksi merkkijonoa saavat aina saman hajautusarvon, jos niissä on samat merkit eri järjestyksessä. Pystymme parantamaan hajautusarvon laskentaa lisäämällä summaan *kertoimet* käyttäen kaavaa

$$A^{k-1}c_0 + A^{k-2}c_1 + \cdots + A^0 c_{k-1},$$

missä A on vakio. Esimerkiksi jos $A = 7$, saamme merkkijonon `apina` hajautusarvoksi

$$7^4 \cdot 97 + 7^3 \cdot 112 + 7^2 \cdot 105 + 7^1 \cdot 110 + 7^0 \cdot 97 = 61235.$$

Tämä menetelmä, jota kutsutaan nimellä *polynominen hajautus*, on käytännössä hyvä merkkijonon hajautustapa, joka on käytössä esimerkiksi Javan standardikirjastossa.

5.1.2 Hajautuksen tehokkuus

Hajautustaulun operaatiot vievät aikaa $O(m)$, jossa m on hajautustaulussa olevan listan pituus. Mutta kuinka suuri m on? Tämä riippuu siitä, mikä on alkioiden määrä n, hajautustaulun koko N sekä hajautusfunktio f.

[1] Käytämme tässä merkkien ASCII-koodeja. Esimerkiksi Javassa char-merkin `c` koodin saa selville kirjoittamalla `(int)c`, eli esimerkiksi `(int)'a'` on 97.

Jos kaikki sujuu hyvin ja hajautusfunktio jakaa alkioita tasaisesti hajautustaulun eri puolille, jokaisessa listassa on noin n/N alkiota. Niinpä jos valitsemme hajautustaulun koon niin, että N on samaa luokkaa kuin n, operaatiot toimivat tehokkaasti ajassa $O(1)$. Kuitenkin on mahdollista että hajautus epäonnistuu ja alkiot jakautuvat hajautustauluun epätasaisesti. Pahimmassa tapauksessa kaikki alkiot saavat saman hajautusarvon ja ne kaikki tallennetaan samaan listaan, jolloin operaatiot vievät aikaa $O(n)$.

Voimme helposti vaikuttaa hajautustaulun kokoon N, mutta hajautusfunktion suunnittelu on epämääräisempi ala. Miten voimme tietää, että valitsemamme hajautusfunktio toimii hyvin? Itse asiassa emme voi olla koskaan varmoja tästä. Vaikka meillä olisi erittäin hyvä hajautusfunktio, *ilkeä vastustaja* voi kuitenkin antaa meille joukon alkioita, jotka kaikki saavat saman hajautusarvon. Tämä riski on aina hajautuksessa, koska mahdollisten hajautusarvojen määrä on paljon pienempi kuin mahdollisten alkioiden määrä. Tämän vuoksi emme voi mitenkään suunnitella hajautusfunktiota niin, että se jakaisi alkiot *varmasti* tasaisesti hajautustauluun.

Kaikeksi onneksi hajautus toimii yleensä aina *käytännössä* hyvin ja voimme ajatella, että hajautustaulun operaatiot ovat $O(1)$-aikaisia, kunhan hajautustaulun koko on riittävän suuri ja hajautusfunktio on toteutettu järkevästi. Vaikka on mahdollista, että hajautus epäonnistuu, tämän riski on niin pieni, että meidän ei tarvitse murehtia siitä käytännössä.

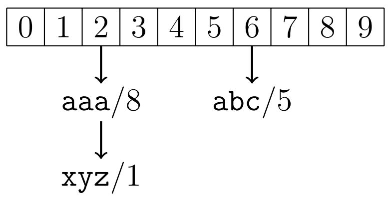
5.1.3 Joukosta hakemistoksi

Voimme luoda hajautustaulun avulla myös *hakemiston*, joka sisältää joukon avain-arvo-pareja. Voimme ajatella hakemistoa taulukon yleistyksenä: taulukossa avaimet ovat kokonaisluvut $0, 1, \ldots, n-1$, mutta hakemistossa ne voivat olla mitä tahansa alkioita. Avaimen hajautusarvo määrittää, mihin hajautustaulun listaan pari sijoitetaan, joten voimme etsiä avaimen perusteella sitä vastaavaa arvoa.

Kuvassa 5.3 on esimerkkinä hajautustauluun tallennettu hakemisto, joka vastaa seuraavaa "taulukkoa":

```
taulu["abc"] = 5
taulu["xyz"] = 1
taulu["aaa"] = 8
```

Tässä tapauksessa hakemiston avaimet ovat merkkijonoja ja avaimet ovat kokonaislukuja. Hajautustaulun ansiosta voimme käsitellä hakemistoa taulukon tavoin niin, että operaatiot vievät aikaa $O(1)$.



Kuva 5.3: Hakemiston tallentaminen hajautustauluun.

5.2 Javan toteutukset

Javassa on kaksi hajautustaulua käyttävää tietorakennetta: `HashSet` pitää yllä alkioiden joukkoa ja `HashMap` toteuttaa hakemiston, jossa on avain-arvopareja. Seuraavaksi tutustumme tarkemmin näihin rakenteisiin.

5.2.1 `HashSet`-rakenne

`HashSet` on alkioiden joukko, johon voi lisätä alkion metodilla `add` ja josta voi poistaa alkion metodilla `remove`. Esimerkiksi seuraava koodi luo joukon, jossa voi olla kokonaislukuja, ja lisää siihen luvut 3, 5 ja 8. Tämän jälkeen koodi poistaa luvun 5 joukosta.

```
HashSet<Integer> joukko = new HashSet<>();
joukko.add(3);
joukko.add(5);
joukko.add(8);
System.out.println(joukko); // [3, 5, 8]
joukko.remove(5);
System.out.println(joukko); // [3, 8]
```

Metodi `contains` kertoo, esiintyykö tietty alkio x joukossa:

```
if (joukko.contains(x)) {
    System.out.println("alkio on joukossa");
} else {
    System.out.println("alkiota ei ole joukossa");
}
```

Huomaa, että jokainen alkio voi esiintyä vain kerran joukossa. Esimerkiksi vaikka seuraava koodi lisää luvun 5 kolmesti joukkoon, se menee sinne vain ensimmäisellä kerralla ja muut lisäykset jätetään huomiotta.

```
HashSet<Integer> joukko = new HashSet<>();
joukko.add(5);
joukko.add(5);
joukko.add(5);
System.out.println(joukko); // [5]
```

Koska `HashSet` on toteutettu hajautustaulun avulla, sen operaatiot toimivat ajassa $O(1)$.

5.2.2 `HashMap`-rakenne

`HashMap` luo hakemiston, jossa on avain-arvo-pareja. Hakemiston määrittelyssä tulee antaa avaimen ja arvon tyyppi. Metodi `put` lisää uuden avain-arvo-parin, ja metodi `get` hakee arvon avaimen perusteella.

Esimerkiksi seuraava koodi luo sanakirjan, jossa sekä avaimet että arvot ovat merkkijonoja. Syötämme sanakirjaan merkkijonopareja, jotka kertovat sanan käännöksen suomesta englanniksi.

```
HashMap<String,String> sanakirja = new HashMap<>();

sanakirja.put("apina","monkey");
sanakirja.put("banaani","banana");
sanakirja.put("cembalo","harpsichord");

System.out.println(sanakirja.get("banaani")); // banana
```

Hyödyllinen on myös metodi `containsKey`, jonka avulla voi tarkastaa, onko tietylle avaimelle tallennettu arvoa:

```
if (sanakirja.containsKey(sana)) {
    System.out.println("Küünnüs: " + sanakirja.get(sana));
} else {
    System.out.println("Sana puuttuu sanakirjasta!");
}
```

Koska `HashMap` on toteutettu hajautustaulun avulla, sen operaatiot toimivat ajassa $O(1)$.

5.2.3 Omat luokat

Javan luokissa on metodi `hashCode`, jonka avulla olio kertoo pyydettäessä hajautusarvonsa. Voimme esimerkiksi selvittää merkkijonon `apina` hajautusarvon seuraavasti:

```
System.out.println("apina".hashCode());
```

Tämä koodi tulostaa luvun 93022541, joka on siis merkkijonon `apina` hajautusarvo Javassa. On tunnettua, että Java käyttää merkkijonon hajautusarvon laskemiseen polynomista hajautusta vakiolla $A = 31$, joten voimme laskea Javan hajautusarvon myös itse kaavalla

$$31^4 \cdot 97 + 31^3 \cdot 112 + 31^2 \cdot 105 + 31^1 \cdot 110 + 31^0 \cdot 97 = 93022541.$$

Jos haluamme käyttää omia olioitamme hajautustauluissa, meidän täytyy toteuttaa luokkaan kaksi metodia: `hashCode`, joka antaa olion hajautusarvon, sekä `equals`, joka ilmaisee, ovatko kaksi oliota samat. Metodi `hashCode` riittää toteuttaa niin, että se palauttaa jonkin kokonaisluvun. Metodi `equals` on tarpeen, jotta Java pystyy varmistamaan, ovatko saman hajautusarvon antavat oliot todella samat.

5.3 Hajautustaulu algoritmiikassa

Hajautustaulun ansiosta voimme käyttää algoritmeissamme joukkoja ja hakemistoja, joiden operaatiot toimivat tehokkaasti. Voimme alkajaisiksi ratkoa mukavammin ajassa $O(n)$ sellaisia ongelmia, jotka olemme ratkoneet aiemmin järjestämisen avulla ajassa $O(n \log n)$.

Ensimmäinen ongelmamme on selvittää, montako eri alkiota taulukko sisältää. Aiemmin olemme ratkaisseet ongelman järjestämällä taulukon ja tutkimalla sen jälkeen taulukossa vierekkäin olevia alkioita. Nyt kun käytössämme on hajautustaulu, voimme vain lisätä kaikki alkiot joukkoon ja hakea lopuksi joukon koon. Näin saamme aikaan seuraavan algoritmin:

```
alkiot = []
for i = 0 to n-1
    alkiot.add(taulu[i])
print(alkiot.size())
```

Koska jokainen alkion lisääminen joukkoon vie aikaa $O(1)$, tuloksena on algoritmi, joka toimii ajassa $O(n)$.

Tarkastellaan sitten ongelmaa, jossa haluamme selvittää taulukon yleisimmän alkion. Olemme ratkaisseet tämänkin ongelman aiemmin järjestämällä taulukon, mutta hajautustaulun avulla voimme lähestyä ongelmaa toisella tavalla luomalla hakemiston, jonka avaimet ovat taulukon alkioita ja arvot niiden esiintymiskertoja. Nyt voimme vain käydä läpi taulukon sisällön ja pitää kirjaa, montako kertaa mikäkin alkio esiintyy taulukossa:

```
laskuri = []
suurin = 1
yleisin = taulu[0]
for i = 0 to n-1
    laskuri[taulu[i]]++
    if laskuri[taulu[i]] > suurin
        suurin = laskuri[taulu[i]]
        yleisin = taulu[i]
print(yleisin)
```

Yllä olevassa koodissa hakemisto `laskuri` on toteutettu hajautustaulun avulla, jolloin avaimet voivat olla mitä tahansa lukuja ja operaatiot toimivat ajassa $O(1)$. Tuloksena on algoritmi, jonka aikavaativuus on $O(n)$.

Kuten nämä esimerkit osoittavat, hajautustaulu *helpottaa* algoritmien luomista, koska meidän ei tarvitse pukea ongelmia järjestämisen muotoon vaan voimme käsitellä niitä suoremmin. Mutta toisaalta olemme ratkoneet vain uudestaan tehtäviä, jotka ovat hoituneet mainiosti myös järjestämisen avulla. Antaisiko hajautustaulu meille jotain todellisia uusia mahdollisuuksia algoritmien suunnittelussa?

Hajautustaulu osoittaa todelliset kyntensä silloin, kun haluamme pitää yllä aidosti *dynaamista* joukkoa algoritmin aikana eli haluamme pystyä lisäämään, poistamaan ja hakemaan alkioita sekalaisessa järjestyksessä. Tällaisessa tilanteessa emme voi enää korvata hajautustaulua järjestämisellä, koska joukon sisältö muuttuu jatkuvasti emmekä voi järjestää alkioita yhtenä kokonaisuutena missään vaiheessa algoritmia.

Luku 6

Binäärihakupuu

Binäärihakupuu on tietorakenne, joka pitää yllä alkioiden joukkoa, samaan tapaan kuin hajautustaulu. Binäärihakupuu eroaa hajautustaulusta kuitenkin siinä, että se säilyttää alkioita *järjestyksessä*. Tämän ansiosta voimme esimerkiksi etsiä tehokkaasti joukon pienimmän tai suurimman alkion, mikä ei ole mahdollista hajautustaulussa.

Aloitamme luvun tutustumalla binääripuiden teoriaan, minkä jälkeen perehdymme binäärihakupuun toimintaan. Käsittelemme binäärihakupuun tehokkaasta toteutuksesta esimerkkinä AVL-puun. Sitten käymme läpi Javan tietorakenteet `TreeSet` ja `TreeMap`, jotka perustuvat binäärihakupuuhun, ja lopuksi vertailemme joukkorakenteita ja järjestämistä.

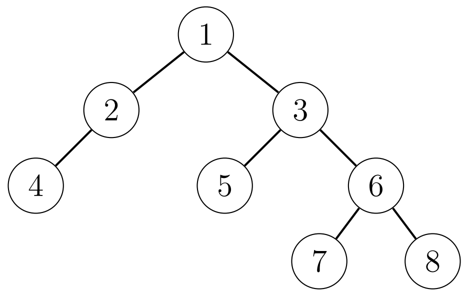
6.1 Taustaa binääripuista

Binäärihakupuun taustalla on yleisempi tietorakenne *binääripuu*. Ennen kuin tutustumme binäärihakupuuhun, meidän onkin hyvä selvittää ensin, mikä on binääripuu ja mitä ominaisuuksia siihen liittyy.

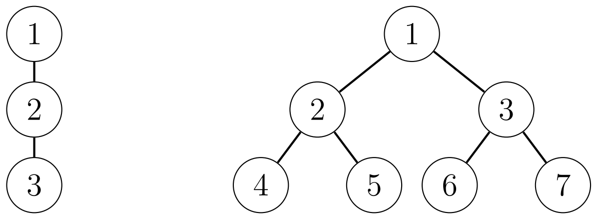
Binääripuu muodostuu n solmusta, jotka on yhdistetty toisiinsa. Puussa ylimpänä on solmu, jota kutsutaan *juureksi*. Jokaisella solmulla voi olla vasen ja oikea *lapsi*, ja kaikilla solmuilla juurta lukuun ottamatta on yksikäsitteinen *vanhempi*. Puun *lehtiä* ovat solmut, joilla ei ole lapsia.

Binääripuun rakenne on rekursiivinen: jokainen solmu toimii juurena *alipuulle*, joka on myös binääripuu. Solmun x alipuu sisältää solmun x sekä kaikki solmut, joihin pääsemme laskeutumalla alaspäin solmusta x. Voimme myös ajatella asiaa niin, että jokaisen binääripuun solmun vasen ja oikea lapsi on toinen (mahdollisesti tyhjä) binääripuu.

Kuvassa 6.1 on esimerkki binääripuusta, jossa on 8 solmua. Solmu 1 on puun juuri, ja solmut 4, 5, 7 ja 8 ovat puun lehtiä. Solmun 3 vasen lapsi on



Kuva 6.1: Binääripuu, jossa on 8 solmua. Puun juuri on solmu 1, ja puun lehtiä ovat solmut 4, 5, 7 ja 8.



(a) (b)

Kuva 6.2: (a) Vähiten solmuja sisältävä korkeuden 2 binääripuu. (b) Eniten solmuja sisältävä korkeuden 2 binääripuu.

solmu 5, oikea lapsi on solmu 6 ja vanhempi on solmu 1. Solmun 3 alipuu sisältää solmut 3, 5, 6, 7 ja 8.

Binääripuun juuren *syvyys* on 0 ja jokaisen muun solmun syvyys on yhtä suurempi kuin sen vanhemman syvyys. Binääripuun *korkeus* on puolestaan suurin askelten määrä juuresta alaspäin lehteen eli toisin sanoen suurin puun solmussa esiintyvä syvyys. Esimerkiksi kuvan 6.1 puun korkeus on 3, koska solmujen 7 ja 8 syvyys on 3.

Jos binääripuun korkeus on h, siinä on vähintään $h+1$ solmua, jolloin puu on pelkkä solmujen lista, ja enintään $2^{h+1}-1$ solmua, jolloin kaikilla tasoilla on kaikki mahdolliset solmut. Kuva 6.2 näyttää esimerkit näistä tapauksista, kun puun korkeus on 2.

6.1.1 Binääripuun toteutus

Voimme toteuttaa binääripuun linkitettynä rakenteena niin, että jokainen puun solmu on olio, josta on viittaus vasempaan ja oikeaan lapseen. Javassa voimme määritellä solmua vastaavan luokan seuraavasti:

```
public class Solmu {
    Solmu vasen, oikea;
    int arvo;

    public Solmu(Solmu vasen, Solmu oikea, int arvo) {
        this.vasen = vasen;
        this.oikea = oikea;
        this.arvo = arvo;
    }
}
```

Kentät `vasen` ja `oikea` osoittavat solmun vasempaan ja oikeaan lapseen. Jos lapsi puuttuu, sen tilalla on arvo `null`. Kentässä `arvo` on puolestaan solmun arvo. Nyt voimme määritellä kuvan 6.1 binääripuun näin:

```
Solmu s1, s2, s3, s4, s5, s6, s7, s8;
s1 = new Solmu(s2, s3, 1);
s2 = new Solmu(s4, null, 2);
s3 = new Solmu(s5, s6, 3);
s4 = new Solmu(null, null, 4);
s5 = new Solmu(null, null, 5);
s6 = new Solmu(s7, s8, 6);
s7 = new Solmu(null, null, 7);
s8 = new Solmu(null, null, 8);
```

Voimme toteuttaa monia binääripuun käsittelyyn liittyviä operaatioita luontevasti rekursiolla. Esimerkiksi seuraava metodi laskee, montako solmua sille annetussa puussa on:

```
int laskeSolmut(Solmu puu) {
    if (puu == null) return 0;
    return 1 + laskeSolmut(puu.vasen) + laskeSolmut(puu.oikea);
}
```

Metodille annetaan parametrina solmu, joka vastaa puun juurta. Jos puu on tyhjä, siinä ei ole yhtään solmua. Muuten puussa on juurisolmu sekä vasemman ja oikean alipuun solmut. Pystymme laskemaan alipuiden solmut rekursiivisesti kutsumalla samaa metodia uudestaan.

Seuraava metodi puolestaan selvittää, mikä on puun korkeus. Huomaa, että jos puu on tyhjä, tulkitsemme, että sen korkeus on -1.

```
int korkeus(Solmu puu) {
    if (puu == null) return -1;
    return 1 + Math.max(korkeus(puu.vasen), korkeus(puu.oikea));
}
```

6.1.2 Läpikäyntijärjestykset

Voimme käydä läpi binääripuun solmut rekursiivisesti juuresta alkaen. Solmujen läpikäyntiin on kolme tavallista järjestystä:

- *esijärjestys*: käsittelemme ensin solmun, sitten vasemman alipuun ja lopuksi oikean alipuun
- *sisäjärjestys*: käsittelemme ensin vasemman alipuun, sitten solmun ja lopuksi oikean alipuun
- *jälkijärjestys*: käsittelemme ensin vasemman alipuun, sitten oikean alipuun ja lopuksi solmun

Esimerkiksi kuvan 6.1 puussa esijärjestys on $[1, 2, 4, 3, 5, 6, 7, 8]$, sisäjärjestys on $[4, 2, 1, 5, 3, 7, 6, 8]$ ja jälkijärjestys on $[4, 2, 5, 7, 8, 6, 3, 1]$.

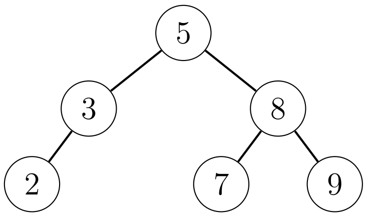
Seuraava Java-metodi tulostaa binääripuun solmut sisäjärjestyksessä, kun sille annetaan parametrina puun juuri.

```
void tulosta(Solmu puu) {
    if (puu == null) return;
    tulosta(puu.vasen);
    System.out.println(puu.arvo);
    tulosta(puu.oikea);
}
```

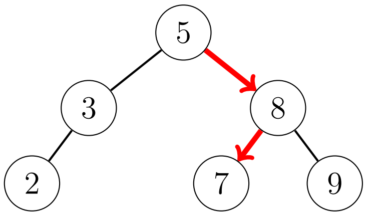
6.2 Binäärihakupuun toiminta

Binäärihakupuu on binääripuu, jonka kukin solmu vastaa yhtä joukon alkiota. Solmut on järjestetty niin, että jokaisessa solmussa kaikki vasemman alipuun alkiot ovat solmun alkiota pienempiä ja vastaavasti kaikki oikean alipuun alkiot ovat solmun alkiota suurempia. Tämän ansiosta voimme löytää kätevästi halutun alkion puusta aloittamalla haun puun juuresta.

Kuvassa 6.3 on esimerkkinä joukkoa $\{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ vastaava binäärihakupuu, jonka juurena on alkio 5. Vasemmassa alipuussa on kaikki alkiota 5



Kuva 6.3: Joukkoa $\{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ vastaava binäärihakupuu.



Kuva 6.4: Alkion 7 etsiminen joukosta $\{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ juuresta alkaen.

pienemmät alkiot, eli se vastaa joukkoa $\{2, 3\}$. Oikeassa alipuussa taas on kaikki alkiota 5 suuremmat alkiot, eli se vastaa joukkoa $\{7, 8, 9\}$. Huomaa, että tämä on yksi monista tavoista muodostaa binäärihakupuu joukolle ja voisimme valita myös minkä tahansa muun alkion puun juureksi.

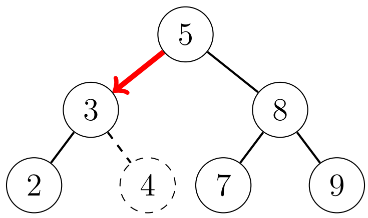
6.2.1 Operaatioiden toteutus

Seuraavaksi käymme läpi, kuinka voimme toteuttaa binäärihakupuun avulla operaatioita joukon alkioiden käsittelemiseen. Osoittautuu, että voimme toteuttaa kaikki operaatiot ajassa $O(h)$, missä h on puun korkeus.

Alkion etsiminen

Kun haluamme etsiä joukosta alkiota x, lähdemme liikkeelle puun juuresta ja kuljemme alaspäin puussa. Kun olemme solmussa, jossa on alkio a, vaihtoehtoja on kolme. Jos $a = x$, olemme löytäneet halutun alkion, jos $a > x$, jatkamme hakua solmun vasempaan lapseen, ja jos $a < x$, jatkamme hakua solmun oikeaan lapseen. Jos kuitenkaan solmulla ei ole lasta, johon meidän tulisi edetä, toteamme, ettei joukossa ole alkiota x.

Kuva 6.4 näyttää, kuinka löydämme alkion 7 joukosta $\{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$. Juurena on alkio 5, joten alkion 7 täytyy olla juuren oikeassa alipuussa. Tämän alipuun juurena on alkio 8, joten nyt taas tiedämme, että alkion 7 täytyy olla vasemmassa alipuussa, josta se löytyykin.



Kuva 6.5: Alkion 4 lisääminen joukkoon $\{2,3,5,7,8,9\}$.

Alkion lisääminen

Kun haluamme lisätä joukkoon alkion x, jota ei vielä ole joukossa, kuljemme ensin puussa aivan kuin etsisimme alkiota x. Sitten kun olemme päässeet solmuun, jolla ei ole lasta, johon meidän tulisi edetä, luomme uuden solmun alkiolle x ja lisäämme sen tähän kohtaan lapseksi.

Kuva 6.5 näyttää, kuinka lisäämme alkion 4 joukkoon $\{2,3,5,7,8,9\}$. Kun haemme puusta alkiota 4, päädymme solmuun, jossa on alkio 3 ja jolla ei ole oikeaa lasta. Niinpä luomme alkiolle 4 uuden solmun, jonka asetamme alkion 3 solmun oikeaksi lapseksi.

Pienin alkio / suurin alkio

Kun haluamme löytää joukon pienimmän alkion, lähdemme liikkeelle juuresta ja etenemme joka askeleella solmun vasempaan lapseen. Kun solmulla ei ole enää vasenta lasta, olemme löytäneet joukon pienimmän alkion.

Vastaavalla tavalla löydämme joukon suurimman alkion etenemällä koko ajan oikeaan lapseen juuresta.

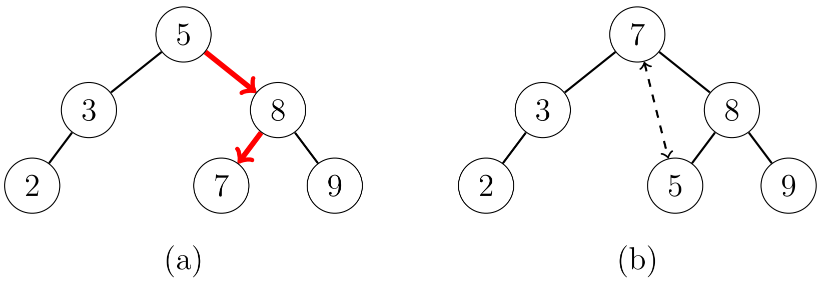
Seuraava suurempi alkio / edellinen pienempi alkio

Kun haluamme löytää joukon pienimmän alkion, joka on suurempi kuin x, lähdemme liikkeelle puun juuresta. Kun olemme solmussa, jossa on alkio a, etenemme vasempaan lapseen, jos $a > x$, ja oikeaan lapseen, jos $a \leq x$. Jatkamme näin, kunnes emme voi edetä alemmas. Haluttu alkio on pienin alkiota x suurempi alkio kaikista alkioista, joiden kautta kuljimme.

Kun haluamme vastaavasti löytää joukon suurimman alkion, joka on pienempi kuin x, menettelemme käänteisesti edelliseen nähden.

Alkion poistaminen

Kun haluamme poistaa joukosta alkion x, etsimme ensin alkiota x vastaavan solmun tavalliseen tapaan. Jos solmulla ei ole lapsia tai vain yksi lapsi,



Kuva 6.6: Alkion 5 poistaminen joukosta $\{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$. (a) Koska alkiolla 5 on kaksi lasta, etsimme seuraavan suuremman alkion 7. (b) Vaihdamme keskenään alkiot 5 ja 7, minkä jälkeen voimme poistaa helposti alkion 5.

meidän on helppoa poistaa solmu puusta ja säilyttää puun rakenne muuten ennallaan. Jos kuitenkin solmulla on kaksi lasta, tilanne on hankalampi. Tällöin etsimme alkion y, joka on pienin x:ää suurempi alkio, ja vaihdamme keskenään alkiot x ja y puussa. Tämän jälkeen meidän on helppoa poistaa solmu, jossa on nyt alkio x, koska sillä ei voi olla kahta lasta (jos solmulla olisi vasen lapsi, y ei olisi pienin x:ää suurempi alkio).

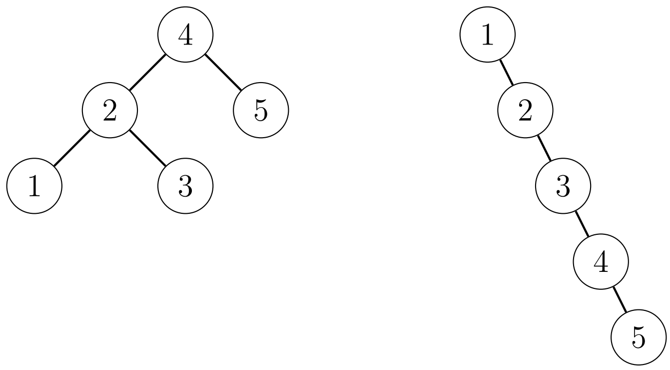
Kuva 6.6 näyttää, kuinka poistamme joukosta $\{2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ alkion 5. Alkio on puun juuressa ja solmulla on kaksi lasta, joten meidän tulee etsiä ensin pienin alkiota 5 suurempi alkio, joka on 7. Vaihdamme sitten keskenään arvot 5 ja 7, minkä jälkeen meidän on helppoa poistaa alkio 5.

6.2.2 Operaatioiden tehokkuus

Binäärihakupuun operaatiot vievät aikaa $O(h)$, missä h on puun korkeus, joten operaatioiden tehokkuus riippuu puun korkeudesta. Operaatioiden tehokkuuteen vaikuttaa siis, miten olemme rakentaneet puun. Esimerkiksi kuvassa 6.7 on kaksi mahdollista binäärihakupuuta joukolle $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Vasemman puun korkeus on 2, kun taas oikean puun korkeus on 4.

Jotta binäärihakupuu toimisi tehokkaasti, haluamme, että puun korkeus ei kasva liian suureksi. Tarkemmin ottaen tavoitteemme on, että solmut ovat jakautuneet tasaisesti puun eri puolille ja puun korkeus on $O(\log n)$. Tällöin sanomme, että puu on *tasapainoinen*. Jos onnistumme tässä, kaikki puun operaatiot toimivat tehokkaasti ajassa $O(\log n)$. Saavutamme tavoitteemme lisäämällä puuhun ehtoja, jotka rajoittavat sen korkeutta sopivasti.

Binäärihakupuun tasapainottamiseen tunnetaan monia menetelmiä. Tutustumme seuraavaksi AVL-puuhun, joka on varhaisin tunnettu tasapainoinen binäärihakupuu. AVL-puu on yksinkertaisempi kuin monet myöhemmin kehitetyt rakenteet, minkä vuoksi se sopii hyvin esittelemään puiden tasa-



Kuva 6.7: Kaksi binäärihakupuuta joukolle $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Vasemman puun korkeus on 2 ja oikean puun korkeus on 4.

painotuksen ideoita. Javan ja muiden ohjelmointikielten standardikirjastoissa käytetään kuitenkin muita rakenteita, kuten punamustaa puuta.

6.3 AVL-puu

AVL-puu on tasapainoinen binäärihakupuu, jonka korkeus on aina $O(\log n)$, minkä ansiosta puun operaatiot toimivat tehokkaasti ajassa $O(\log n)$. AVL-puussa jokaiseen solmuun liittyy *tasapainoehto*, joka takaa, että puu on tasapainoinen. Kun päivitämme puuta, meidän täytyy pitää huolta siitä, että tasapainoehto säilyy voimassa kaikissa solmuissa.

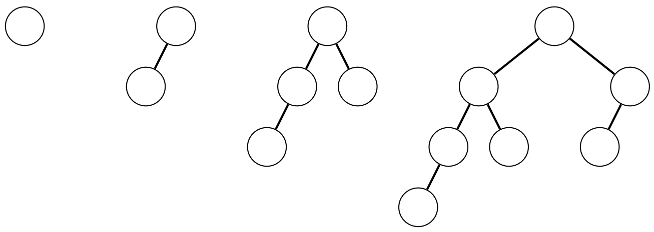
6.3.1 Tasapainoehto

AVL-puun tasapainoehtona on, että *jokaisessa solmussa vasemman ja oikean lapsen alipuiden korkeusero on enintään 1.*

Esimerkiksi kuvan 6.7 vasen puu on AVL-puu, kun taas oikea puu ei ole. Oikea puu ei ole AVL-puu, koska esimerkiksi solmussa 1 vasemman lapsen alipuun korkeus on -1 mutta oikean lapsen alipuun korkeus on 3. Korkeuksien erona on siis 4, vaikka ero saisi olla enintään 1.

Kutsumme AVL-puun tasapainoehtoa *AVL-ehdoksi*. Osoittautuu, että jos binäärihakupuu täyttää AVL-ehdon, sen korkeus on $O(\log n)$. Eli jos pystymme toteuttamaan puun operaatiot niin, että AVL-ehto säilyy, saamme aikaan binäärihakupuun, jonka operaatiot toimivat ajassa $O(\log n)$.

Miksi sitten AVL-ehto takaa, että binäärihakupuun korkeus on $O(\log n)$? Voimme lähestyä asiaa pahimman tapauksen kautta: kun tiedämme, että AVL-puussa on n solmua, mikä on sen *suurin mahdollinen* korkeus? Voimme



Kuva 6.8: Vähiten solmuja sisältävät AVL-puut korkeuksille 0, 1, 2 ja 3.

selvittää tämän laskemalla ensin käänteisesti, mikä on *pienin mahdollinen* solmujen määrä AVL-puussa, jonka korkeus on h.

Merkitään $f(h)$:lla korkeutta h olevan AVL-puun pienintä mahdollista solmujen määrää. Kuvan 6.13 mukaisesti funktion ensimmäiset arvot ovat $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ ja $f(3) = 7$. Yleisemmin

$$f(h) = 1 + f(h-1) + f(h-2),$$

kun $h \geq 2$, koska jos haluamme rakentaa AVL-puun korkeutta h, jossa on mahdollisimman vähän solmuja, meidän kannattaa laittaa juuren lapsiksi AVL-puut korkeutta $h-1$ ja $h-2$ niin, että kummassakin alipuussa on mahdollisimman vähän solmuja. Funktiolle pätee

$$f(h) \geq 2f(h-2),$$

eli funktion arvo ainakin kaksinkertaistuu kahden askeleen välein. Voimme ilmaista tämän alarajan

$$f(h) \geq 2^{h/2},$$

jonka voimme taas muuttaa ylärajaksi

$$h \leq 2 \log f(h).$$

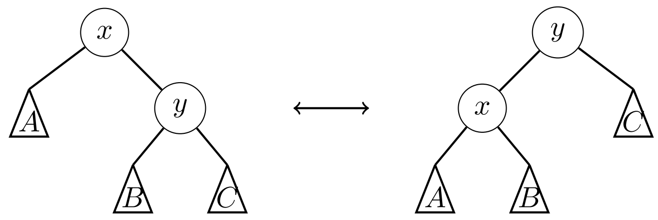
Tarkastellaan sitten puuta, jossa on n solmua ja jonka korkeus on h. Korkeudelle täytyy päteä $f(h) \leq n$, koska korkeutta h olevassa puussa on vähintään $f(h)$ solmua. Niinpä saamme ylärajan

$$h \leq 2 \log n,$$

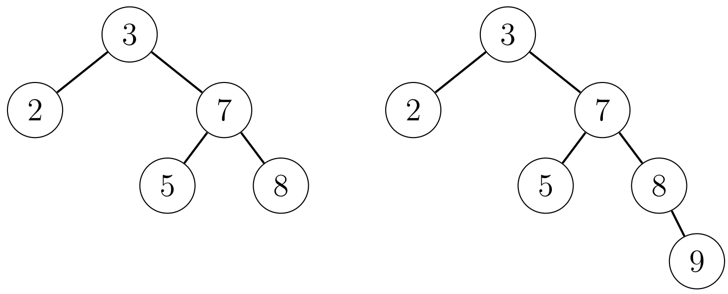
mikä tarkoittaa samaa kuin $h = O(\log n)$.

6.3.2 Kiertojen toteuttaminen

Voimme toteuttaa AVL-puun operaatiot muuten samaan tapaan kuin yleisessä binäärihakupuussa, mutta meidän täytyy varmistaa alkion lisäämisen



Kuva 6.9: Kierrot, joiden avulla korjaamme AVL-puuta.



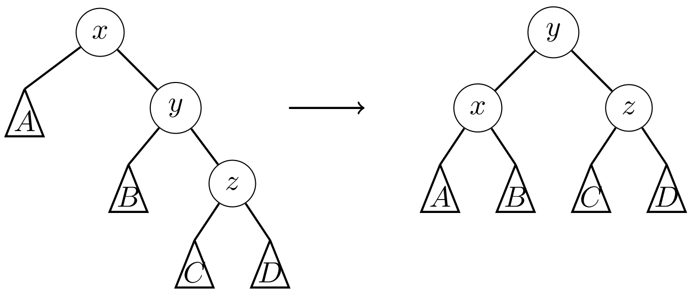
Kuva 6.10: AVL-ehto menee rikki, kun lisäämme puuhun solmun 9.

ja poistamisen jälkeen, että AVL-ehto on edelleen voimassa. Tämä onnistuu tekemällä sopivia *kiertoja*, jotka muuttavat puun rakennetta.

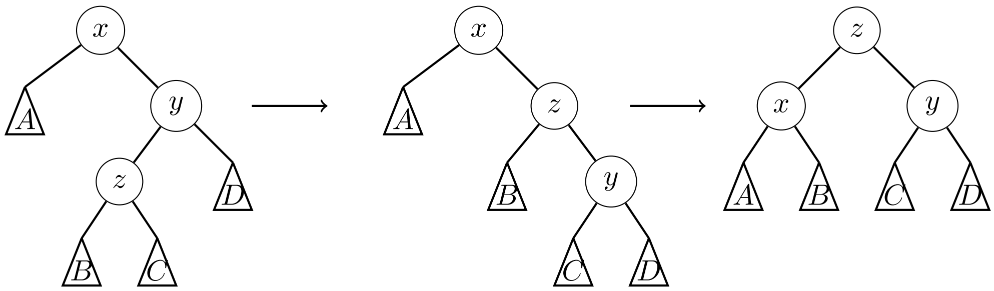
Osoittautuu, että voimme korjata puun rakenteen kaikissa tilanteessa käyttäen kahta kiertotyyppiä, jotka on esitetty kuvassa 6.9. Kierrämme solmuja x ja y, joihin liittyvät alipuut A, B ja C. Voimme tehdä kierron joko vasemmalta oikealle, jolloin solmu y nousee ylöspäin, tai oikealta vasemmalle, jolloin solmu x nousee ylöspäin.

Kun lisäämme AVL-puuhun solmun, jonkin solmun AVL-ehto voi rikkoontua. Tämä ilmenee niin, että jossain solmussa lasten alipuiden korkeudet ovat ennen lisäämistä h ja $h+1$ ja lisäämisen jälkeen h ja $h+2$. Kuva 6.10 näyttää esimerkin tällaisesta tilanteesta. Vasemmassa puussa solmun 3 lasten korkeudet ovat 0 ja 1, joten AVL-ehto on kunnossa. Oikeassa puussa olemme lisänneet solmun 9, minkä seurauksena solmun 3 lasten korkeudet ovat 0 ja 2 eikä AVL-ehto enää päde.

Solmun lisäämisen jälkeen meidän täytyy mahdollisesti muuttaa puun rakennetta niin, että AVL-ehto tulee taas voimaan kaikissa solmuissa. Tämän vuoksi kuljemme puussa ylöspäin lisätystä solmusta lähtien, kunnes tulemme ensimmäiseen solmuun, jossa ehto ei ole voimassa. Jos tällainen solmu x löytyy, palautamme ehdon voimaan tekemällä yhden tai kaksi kiertoa riippuen lisätyn solmun sijainnista. Oletetaan, että y on x:n lapsi, jonka alipuussa on lisätty solmu, ja z on puolestaan y:n lapsi, jonka alipuussa on lisätty solmu. Tapauksia on kaksi: jos y ja z ovat saman puoleisia lapsia, kierrämme



Kuva 6.11: Tapaus 1: nostamme solmua y ylöspäin.

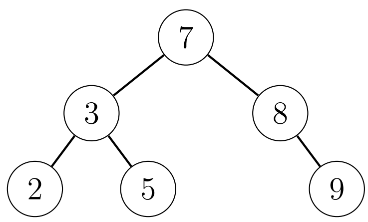


Kuva 6.12: Tapaus 2: nostamme solmua z kahdesti ylöspäin.

solmua y kerran ylöspäin (kuva 6.11), ja muuten kierrämme solmua z kahdesti ylöspäin (kuva 6.12). Tämän korjauksen jälkeen AVL-ehto on jälleen voimassa kaikissa puun solmuissa, eli meidän riittää aina korjata ehto alimmassa solmussa, jossa se ei ole voimassa.

Kuvassa 6.10 AVL-ehto ei ole voimassa solmussa 3, koska vasemman alipuun korkeus on 0 ja oikean alipuun korkeus on 2. Tässä tapauksessa $x = 3$, $y = 7$ ja $z = 8$. Koska y on x:n oikea lapsi ja z on y:n oikea lapsi, meidän riittää tehdä yksi kierto, joka nostaa solmua 7 ylöspäin puun juureksi. Tuloksena on kuvan 6.13 mukainen puu, jossa AVL-ehto on jälleen voimassa, koska solmun 7 kummankin alipuun korkeus on nyt 1.

Kun poistamme puusta solmun, menettelemme melko samalla tavalla



Kuva 6.13: Kierrämme solmun 7 puun juureksi, jolloin AVL-ehto pätee taas.

kuin lisäämisessä. Nyt on mahdollista, että ennen poistoa jossakin solmussa lasten alipuiden korkeudet ovat h ja $h-1$ ja poiston jälkeen h ja $h-2$. Poiston jälkeen nousemme puussa ylöspäin ja jos löydämme tällaisen solmun, korjaamme ehdon niin, että kummankin alipuun korkeus on $h-1$. Tällä kertaa valitsemme solmut x, y ja z niin, että y on x:n lapsi, jonka korkeus on suurin, ja samoin z on y:n lapsi, jonka korkeus on suurin. Toisin kuin lisäämisessä, jatkamme tämän jälkeen ylöspäin ja korjaamme tarvittaessa ehtoa muissa solmuissa, koska ehdon korjaaminen yhdessä solmussa saattaa rikkoa sen jossain ylemmässä solmussa. Kun lopulta saavumme juureen, ehto pätee jälleen kaikissa solmuissa.

Koska AVL-puun korkeus on $O(\log n)$ ja jokainen kierto tapahtuu vakioajassa, pystymme korjaamaan tasapainon sekä lisäämisen että poistamisen jälkeen ajassa $O(\log n)$. Lisäämisen jälkeen kuljemme puuta ylöspäin $O(\log n)$ askelta ja teemme enintään kaksi kiertoa. Poistamisen jälkeen taas kuljemme puuta ylöspäin $O(\log n)$ askelta ja teemme enintään $O(\log n)$ kiertoa.

6.4 Javan toteutukset

Javan tietorakenteet `TreeSet` ja `TreeMap` pohjautuvat punamustaan puuhun, joka on AVL-puun tapainen mutta monimutkaisempi binäärihakupuu. Ne muistuttavat rakenteita `HashSet` ja `HashMap`, mutta erona on, että pystymme lisäksi etsimään alkioita niiden järjestyksen perusteella.

6.4.1 `TreeSet`-rakenne

Seuraava koodi luo `TreeSet`-rakenteen, joka pitää yllä lukujen joukkoa. Koodi lisää joukkoon alkioita ja tulostaa sitten sen sisällön. Huomaa, että tulostuksessa joukon alkiot näkyvät järjestyksessä pienimmästä suurimpaan, koska binäärihakupuu pitää niitä järjestyksessä.

```
TreeSet<Integer> joukko = new TreeSet<>();
joukko.add(4);
joukko.add(1);
joukko.add(8);
joukko.add(7);
System.out.println(joukko); // [1, 4, 7, 8]
```

Koska joukko on järjestyksessä, pystymme etsimään tehokkaasti pienimmän ja suurimman alkion metodeilla `first` ja `last`:

```
System.out.println(joukko.first()); // 1
System.out.println(joukko.last()); // 8
```

Pystymme myös etsimään seuraavan tiettyä alkiota suuremman tai pienemmän alkion metodeilla `higher` ja `lower`:

```
System.out.println(joukko.higher(5)); // 7
System.out.println(joukko.lower(5)); // 4
```

Kaikki nämä operaatiot toimivat ajassa $O(\log n)$.

6.4.2 `TreeMap`-rakenne

Seuraava koodi luo sanakirjan `TreeMap`-rakenteen avulla:

```
TreeMap<String,String> sanakirja = new TreeMap<>();
sanakirja.put("apina","monkey");
sanakirja.put("banaani","banana");
sanakirja.put("cembalo","harpsichord");
```

Sanakirjan avaimet on järjestetty, joten pystymme etsimään tietoa avainten perusteella. Esimerkiksi voimme selvittää, mikä on aakkosjärjestyksessä ensimmäinen ja viimeinen sanakirjassa oleva sana:

```
System.out.println(sanakirja.firstKey()); // apina
System.out.println(sanakirja.lastKey()); // cembalo
```

Samoin voimme selvittää lähinnä tiettyä avainta olevat avaimet:

```
System.out.println(sanakirja.higherKey("biisoni")); // cembalo
System.out.println(sanakirja.lowerKey("biisoni")); // banaani
```

6.4.3 Omat luokat

Jos haluamme käyttää omia olioitamme `TreeSet`- ja `TreeMap`-rakenteissa, meidän tulee toteuttaa luokkaan kaksi metodia: `equals` ilmaisee, ovatko kaksi oliota samat, ja `compareTo` kertoo kahden olion suuruusjärjestyksen. Jälkimmäisen metodin ansiosta luokka toteuttaa rajapinnan `Comparable`.

6.5 Tehokkuusvertailu

Monissa ongelmissa meillä on kaksi mahdollista lähestymistapaa: voimme käyttää joko joukkorakenteita tai sitten taulukoita ja järjestämistä. Vaikka molemmat tavat johtavat tehokkaaseen ratkaisuun, vakiokertoimissa voi olla merkittäviä eroja, jotka vaikuttavat käytännön tehokkuuteen.

Tarkastelemme seuraavaksi ongelmaa, jossa meille on annettu n lukua sisältävä taulukko, ja haluamme selvittää, montako eri lukua taulukossa on. Ratkaisemme ongelman kolmella eri tavalla ja tutkimme sitten ratkaisujen tehokkuutta.

Ratkaisu 1: `TreeSet`

Ensimmäinen tapa ratkaista tehtävä on luoda `TreeSet`, johon lisäämme taulukon luvut. Koska jokainen luku voi esiintyä joukossa vain kerran, joukon koko ilmaisee meille, montako eri lukua taulukossa on. Tämä ratkaisu vie aikaa $O(n \log n)$, koska jokainen `add`-operaatio vie aikaa $O(\log n)$.

```
TreeSet<Integer> joukko = new TreeSet<>();
for (int i = 0; i < taulu.length; i++) {
    joukko.add(taulu[i]);
}
System.out.println(joukko.size());
```

Ratkaisu 2: `HashSet`

Emme tarvitse `TreeSet`-rakenteen alkioiden järjestystä, joten saamme toisen ratkaisun käyttämällä sen sijaan `HashSet`-rakennetta. Koodi säilyy muuten täysin samanlaisena. Tämä ratkaisu vie aikaa $O(n)$ hajautuksen ansiosta.

```
HashSet<Integer> joukko = new HashSet<>();
for (int i = 0; i < taulu.length; i++) {
    joukko.add(taulu[i]);
}
System.out.println(joukko.size());
```

Ratkaisu 3: järjestäminen

Kolmas tapa ratkaista tehtävä on käyttää järjestämistä: kopioimme ensin luvut uuteen taulukkoon, järjestämme tämän taulukon ja tutkimme sitten,

taulukon koko n	`TreeSet`	`HashSet`	järjestäminen
10^6	0.74 s	0.25 s	0.09 s
$2 \cdot 10^6$	1.60 s	0.45 s	0.19 s
$4 \cdot 10^6$	5.60 s	1.56 s	0.52 s
$8 \cdot 10^6$	12.19 s	4.50 s	0.97 s

Taulukko 6.1: Algoritmien suoritusaikojen vertailu.

monessako kohdassa järjestetyssä taulukossa luku vaihtuu. Tämä ratkaisu vie aikaa $O(n \log n)$, koska taulukon järjestäminen vie aikaa $O(n \log n)$.

```
int[] lista = taulu.clone();
Arrays.sort(lista);
int laskuri = 1;
for (int i = 1; i < lista.length; i++) {
    if (lista[i-1] != lista[i]) laskuri++;
}
System.out.println(laskuri);
```

Vertailun tulokset

Taulukko 6.1 esittää tehokkuusvertailun tulokset. Jokaisessa testissä taulukossa on satunnaisia lukuja väliltä $1 \dots 10^9$.

Osoittautuu, että ratkaisujen välillä on merkittäviä tehokkuuseroja. Ensinnäkin `HashSet`-ratkaisu on noin kolme kertaa nopeampi kuin `TreeSet`-ratkaisu. Tämä onkin odotettavaa, koska hajautustaulun operaatiot vievät aikaa $O(1)$, kun taas binäärihakupuun operaatiot vievät aikaa $O(\log n)$. Selvästi nopein ratkaisu on kuitenkin kolmas järjestämistä käyttävä ratkaisu, joka on noin kymmenen kertaa `TreeSet`-ratkaisua nopeampi.

Miten on mahdollista, että sekä `TreeSet`-ratkaisun että järjestämisratkaisun aikavaativuus on $O(n \log n)$, mutta järjestämisratkaisu on kymmenen kertaa nopeampi? Tämä johtuu siitä, että taulukon järjestäminen on hyvin kevyt operaatio ja se tehdään vain kerran. Binäärihakupuussa jokainen lisäys muuttaa puun rakennetta, mikä aiheuttaa suuret vakiokertoimet.

Vaikka joukot ovat käteviä, niitä ei siis kannata käyttää turhaan. Jos haluamme ratkaista ongelman todella tehokkaasti, kannattaa miettiä, voisimmeko käyttää tavalla tai toisella järjestämistä joukkojen sijaan.

Luku 7

Keko

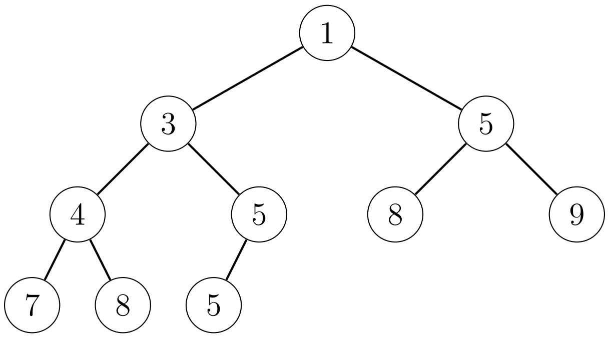
Keko on tietorakenne, joka toteuttaa erikoistuneen joukon, jossa voimme lisätä alkioita vapaasti, mutta voimme etsiä ja poistaa vain pienimmän tai suurimman alkion, riippuen keon tyypistä. Vaikka voisimme sinänsä toteuttaa nämä operaatiot myös binäärihakupuulla, keon etuna on, että saamme aikaan *kevyemmän* toteutuksen, kun rajoitumme tilanteeseen, jossa tarvitsemme vain nämä operaatiot.

Tutustumme tässä luvussa binäärikeko-rakenteeseen, joka on tavallisimmin käytetty kekorakenne. Binäärikeko toteutetaan binääripuuna, ja se mahdollistaa alkion etsimisen ajassa $O(1)$ sekä alkioiden lisäykset ja poistot ajassa $O(\log n)$. Käsittelemme myös Javan `PriorityQueue`-rakenteen, joka perustuu binäärikekoon.

7.1 Binäärikeko

Binäärikeko on binääripuu, jonka jokaisessa solmussa on yksi joukkoon kuuluva alkio. Puu on rakennettu niin, että sen kaikki tasot alinta tasoa lukuun ottamatta ovat täynnä solmuja, eli kaikilla solmuilla on vasen ja oikea lapsi. Alin taso on puolestaan täytetty niin, että solmut on sijoitettu mahdollisimman vasemmalle ylempien solmujen lapsiksi.

Kun luomme keon, meidän täytyy päättää, onko se *minimikeko* vai *maksimikeko*. Minimikeossa voimme etsiä ja poistaa pienimmän alkion, kun taas maksimikeossa voimme etsiä ja poistaa suurimman alkion. Keon toiminta perustuu siihen, että jokainen keon solmu täyttää *kekoehdon*. Minimikeossa ehtona on, että solmun arvo on suurempi tai yhtä suuri kuin vanhemman arvo, ja maksimikeossa solmun arvon tulee olla pienempi tai yhtä suuri kuin vanhemman arvon. Kekoehdon ansiosta minimikeon juuressa on keon pienin alkio ja maksimikeon juuressa on keon suurin alkio.



Kuva 7.1: Minimikeko, joka sisältää alkiot $[1, 3, 4, 5, 5, 5, 7, 8, 8, 9]$.

Kuvassa 7.1 on minimikeko, johon on tallennettu kymmenen alkiota. Keon kolme ensimmäistä tasoa ovat täynnä ja neljännellä tasolla kolme ensimmäistä kohtaa on käytetty. Keon juurena on joukon pienin alkio 1, ja kaikki solmut täyttävät kekoehdon.

Huomaa, että toisin kuin aiemmissa joukkorakenteissamme, sama alkio voi esiintyä keossa useasti. Esimerkiksi kuvan 7.1 keko sisältää monta kertaa alkiot 5 ja 8.

7.1.1 Keon tallentaminen

Tallennamme binäärikeon *taulukkona*, joka sisältää keon solmujen arvot järjestyksessä ylhäältä alaspäin ja vasemmalta oikealle. Tämä tehokas tallennustapa on mahdollinen, koska keon kaikki tasot ovat täynnä solmuja. Tallennamme keon taulukkoon kohdasta 1 alkaen, koska tämä helpottaa keon operaatioiden toteuttamista.

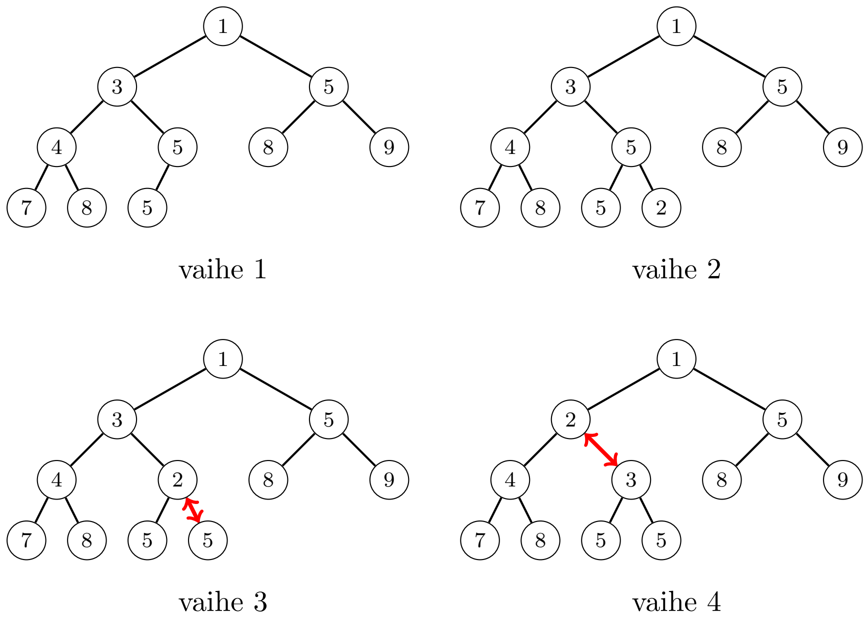
Esimerkiksi tallennamme kuvan 7.1 keon taulukkona seuraavasti:

```
keko = [0,1,3,5,4,5,8,9,7,8,5]
```

Huomaa, että taulukon ensimmäinen alkio on 0, koska emme käytä kohtaa 0 keon tallentamiseen.

Taulukkototeutuksen etuna on, että voimme laskea helposti, missä kohdissa keon alkiot ovat taulukossa. Ensinnäkin keon juuri eli pienin tai suurin alkio on aina kohdassa 1. Lisäksi jos tiedämme, että tietty solmu on kohdassa k, niin solmun vasen lapsi on kohdassa $2k$, solmun oikea lapsi on kohdassa $2k + 1$ ja solmun vanhempi on kohdassa $\lfloor k/2 \rfloor$. Esimerkissämme solmu 4 on taulukossa kohdassa 4, joten sen vasen lapsi on kohdassa 8, oikea lapsi on kohdassa 9 ja vanhempi on kohdassa 2.

Käytännössä haluamme yleensä, että pystymme lisäämään kekoon uusia



Kuva 7.2: Lisäämme alkion 2 kekoon ja nostamme sitä ylöspäin, kunnes kekoehto tulee jälleen voimaan.

alkioita, jolloin saattaa olla tarpeen suurentaa taulukkoa. Voimme toteuttaa tämän samalla tavalla kuin taulukkolistassa, jolloin taulukon suurentaminen ei hidasta keon operaatioita.

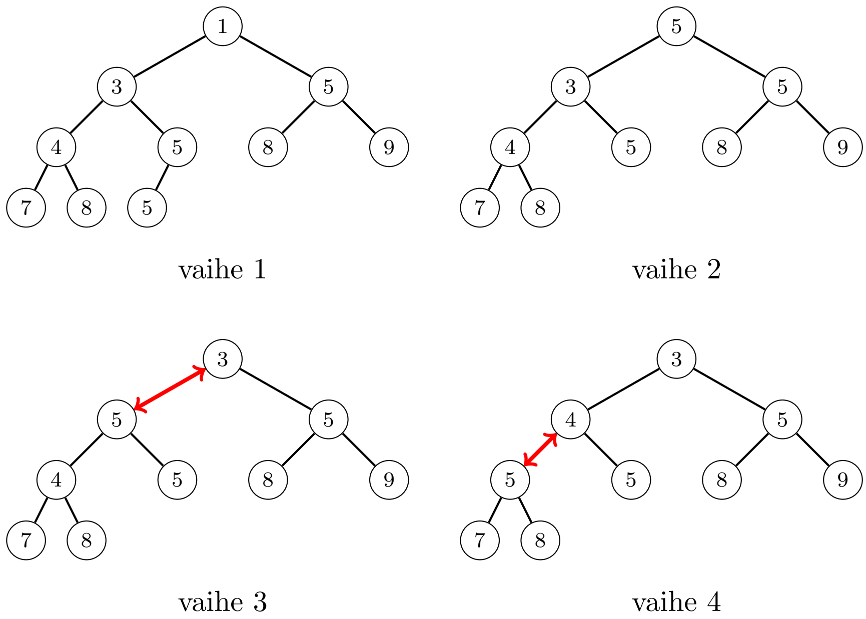
7.1.2 Operaatioiden toteutus

On helppoa etsiä minimikeon pienin alkio tai maksimikeon suurin alkio $O(1)$-ajassa, koska tämä alkio on aina keon juuressa. Seuraavaksi näemme, kuinka voimme toteuttaa alkion lisäämisen sekä pienimmän tai suurimman alkion poistamisen $O(\log n)$-ajassa.

Alkion lisääminen

Kun lisäämme uuden alkion kekoon, lisäämme sen ensin seuraavaan vapaana olevaan paikkaan puussa. Jos alimmalla tasolla on tilaa, lisäämme sen sinne mahdollisimman vasemmalle, ja muuten aloitamme uuden tason, jossa on toistaiseksi vain lisättävä solmu. Alkion lisäämisen jälkeen meidän täytyy varmistaa, että kekoehto säilyy edelleen voimassa. Tämä tapahtuu siirtämällä alkiota ylöspäin keossa, kunnes kekoehto tulee voimaan.

Kuva 7.2 näyttää, mitä tapahtuu, kun lisäämme alkion 2 esimerkkikekoomme. Lisäämme alkion ensimmäiseen vapaaseen kohtaan keon alimmalla



Kuva 7.3: Poistamme keon juuressa olevan alkion korvaamalla sen viimeisellä alkiolla ja laskettamalla sitä alaspäin puussa.

tasolla. Koska alkio 2 on pienempi kuin sen vanhempi 5, vaihdamme nämä alkiot keskenään. Tämän jälkeen alkio 2 on pienempi kuin sen vanhempi 3, joten vaihdamme myös nämä alkiot keskenään. Nyt kekoehto on voimassa eikä meidän tarvitse enää tehdä muutoksia kekoon.

Alkion lisääminen kekoon vie aikaa $O(\log n)$, koska keossa on $O(\log n)$ tasoa ja kuljemme aina ylöspäin keon pohjalta huippua kohden, kunnes olemme löytäneet alkiolle sopivan paikan keosta.

Alkion poistaminen

Kun haluamme poistaa keon juuressa olevan alkion, siirrämme ensin keon viimeisen alkion keon juureksi ja poistamme sille kuuluneen solmun. Tämän jälkeen lasketamme juureen nostettua alkiota alaspäin keossa, kunnes kekoehto tulee jälleen voimaan. Koska solmulla voi olla kaksi lasta, meillä voi olla kaksi vaihtoehtoa, kumman lapsista nostamme ylemmäs. Jos keko on minimikeko, valitsemme lapsen, jossa on pienempi arvo, ja jos keko on maksimikeko, valitsemme vastaavasti lapsen, jossa on suurempi arvo.

Kuva 7.3 näyttää, kuinka poistamme esimerkkikeostamme pienimmän alkion eli juuressa olevan alkion 1. Aluksi korvaamme alkion 1 keon viimeisellä alkiolla 5 ja poistamme keosta alkiolle 5 kuuluneen solmun. Tämän jälkeen vaihdamme keskenään alkion 5 ja sen vasemman lapsen alkion 3, ja sitten vielä alkion 5 ja sen vasemman lapsen alkion 4. Tämän jälkeen kekoehto on voimassa ja olemme onnistuneet poistamaan pienimmän alkion keosta.

Alkion poistaminen keosta vie aikaa $O(\log n)$, koska keossa on $O(\log n)$ tasoa ja kuljemme polkua alaspäin keon huipulta pohjaa kohden.

7.2 Prioriteettijono

Monissa ohjelmointikielissä kekoa vastaava tietorakenne tunnetaan nimellä *prioriteettijono*. Näin on myös Javassa, jonka standardikirjastoon kuuluu tietorakenne `PriorityQueue`. Se on binäärikekoon perustuva tietorakenne, joka toteuttaa oletuksena minimikeon.

Seuraava koodi esittelee Javan prioriteettijonon käyttämistä. Metodi `add` lisää alkion jonoon, metodi `peek` hakee pienimmän alkion ja metodi `poll` hakee ja poistaa pienimmän alkion.

```
PriorityQueue<Integer> jono = new PriorityQueue<>();
jono.add(5);
jono.add(3);
jono.add(8);
jono.add(7);
System.out.println(jono.peek()); // 3
System.out.println(jono.poll()); // 3
System.out.println(jono.poll()); // 5
```

Jos haluamme luoda prioriteettijonon, joka onkin maksimikeko, voimme tehdä sen seuraavaan tapaan:

```
PriorityQueue<Integer> jono =
    new PriorityQueue<>(10,Collections.reverseOrder());
```

Tässä tilanteessa meidän täytyy antaa konstruktorille kaksi tietoa: keolle alussa muistista varattava tila (tässä 10) sekä alkioiden järjestämistapa (tässä käänteinen järjestys). Huomaa, että Java varaa keolle tarvittaessa myöhemmin uuden suuremman muistialueen, joten tämä määrittely ei tarkoita, että keossa voisi olla enintään 10 alkiota.

Jos haluamme tallentaa `PriorityQueue`-rakenteeseen omia olioitamme, meidän tulee toteuttaa luokkaan metodi `compareTo` ja merkitä, että luokka toteuttaa rajapinnan `Comparable`.

7.3 Tehokkuusvertailu

Mitä hyötyä keosta oikeastaan on? Meillähän on olemassa jo binäärihakupuu, jonka avulla voimme toteuttaa kaikki keon operaatiot ja *enemmänkin*. Keossa voimme hakea ja poistaa vain pienimmän tai suurimman alkion, mutta binäärihakupuussa voimme käsitellä myös muita alkioita.

Keon etuna on, että siinä on tehokkaan taulukkototeutuksen ansiosta pienemmät *vakiokertoimet* kuin binäärihakupuussa. Jos meille riittää, että voimme hakea ja poistaa vain pienimmän tai suurimman alkion, voi siis olla hyvä ratkaisu käyttää kekoa binäärihakupuun sijasta. Mutta kuinka suuria erot ovat käytännössä?

Tämän selvittämiseksi teemme testin, jossa vertailemme keskenään Javan tietorakenteita `PriorityQueue` ja `TreeSet`. Testissä meillä on taulukko, jossa on satunnaisessa järjestyksessä luvut $1, 2, \ldots, n$. Lisäämme ensin taulukon $n/2$ ensimmäistä lukua joukkoon. Tämän jälkeen käymme läpi loput $n/2$ lukua, ja jokaisen luvun kohdalla lisäämme sen joukkoon ja poistamme joukon pienimmän luvun. Laskemme lisäksi samalla summaa poistetuista luvuista. Käytämme testissä seuraavia koodeja:

```
PriorityQueue<Integer> jono = new PriorityQueue<>();
for (int i = 0; i < n/2; i++) {
    jono.add(luvut[i]);
}
long summa = 0;
for (int i = n/2; i < n; i++) {
    jono.add(luvut[i]);
    summa += jono.poll();
}
System.out.println(summa);
```

```
TreeSet<Integer> joukko = new TreeSet<>();
for (int i = 0; i < n/2; i++) {
    joukko.add(luvut[i]);
}
long summa = 0;
for (int i = n/2; i < n; i++) {
    joukko.add(luvut[i]);
    summa += jono.pollFirst();
}
System.out.println(summa);
```

Taulukko 7.1 näyttää testin tulokset. Tämän testin perusteella näyttää

taulukon koko n	`PriorityQueue`	`TreeSet`
10^6	0.29 s	0.78 s
$2 \cdot 10^6$	0.71 s	1.50 s
$4 \cdot 10^6$	1.56 s	3.72 s
$8 \cdot 10^6$	3.68 s	9.43 s

Taulukko 7.1: Algoritmien suoritusaikojen vertailu.

siltä, että keon käyttämiseestä on todellista hyötyä, koska `PriorityQueue` toimii 2–3 kertaa nopeammin kuin `TreeSet`.

7.4 Lisää keosta

Käymme seuraavaksi läpi menetelmän, jonka avulla voimme *muuttaa* taulukon keoksi $O(n)$-ajassa. Tämän jälkeen luomme katsauksen $O(n \log n)$-aikaiseen järjestämisalgoritmiin, jonka toiminta perustuu kekoon.

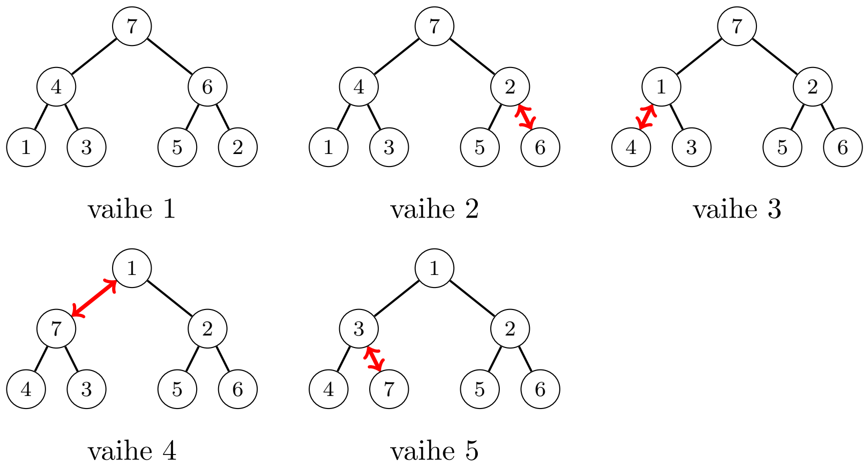
7.4.1 Taulukosta keoksi

Oletetaan, että meillä on n alkiota sisältävä taulukko ja haluamme muuttaa sen keoksi. Suoraviivainen tapa on luoda tyhjä keko ja lisätä jokainen taulukon alkio siihen erikseen $O(\log n)$-ajassa. Tällä tavalla saamme rakennettua keon $O(n \log n)$-ajassa. Osoittautuu kuitenkin, että pystymme myös muuttamaan taulukon *suoraan* keoksi tehokkaammin ajassa $O(n)$.

Ideana on järjestää alkuperäisen taulukon alkioita uudestaan niin, että kekoehto tulee voimaan taulukon jokaiseen kohtaan – jolloin taulukko on muuttunut keoksi. Käymme läpi taulukon alkiot lopusta alkuun ja varmistamme jokaisessa kohdassa, että kekoehto on voimassa kyseisestä kohdasta alkavassa alipuussa. Jos kekoehto ei ole voimassa, korjaamme sen laskettamalla kyseisen kohdan alkiota alaspäin keossa. Kun lopulta pääsemme taulukon alkuun, kekoehto on voimassa koko taulukossa.

Kuva 7.4 näyttää esimerkin, jossa muutamme taulukon $[7, 4, 6, 1, 3, 5, 2]$ minimikeoksi. Kun tulkitsemme taulukon kekona, kekoehto on aluksi rikki monessa kohdassa taulukossa. Ensin korjaamme kekoehdon tason 2 alipuissa vaihtamalla keskenään alkiot 2 ja 6 ja sitten alkiot 1 ja 4. Tämän jälkeen korjaamme kekoehdon tason 1 alipuussa eli koko keossa laskettamalla alkion 7 keon huipulta pohjalle. Nyt kekoehto on voimassa kaikkialla taulukossa, joten olemme onnistuneet muuttamaan taulukon keoksi.

Miksi sitten tämä vie aikaa vain $O(n)$? Oletetaan, että keossa on h tasoa ja kaikki tasot ovat täynnä solmuja, eli keossa on $n = 2^h - 1$ solmua. Laskemme



Kuva 7.4: Muutamme taulukon keoksi korjaamalla kekoehdon alipuissa.

jokaiselle tasolle, montako alkiota laskeutuu enintään jostakin tämän tason solmusta alaspäin. Ensinnäkin tasolta 1 tasolle 2 laskeutuu enintään 1 alkio – juuressa oleva alkio. Vastaavasti tasolta 2 tasolle 3 laskeutuu enintään $1 + 2$ alkiota ja tasolta 3 tasolle 4 laskeutuu enintään $1 + 2 + 4$ alkiota. Yleisemmin tasolta k tasolle $k+1$ laskeutuu enintään $1+2+\cdots+2^{k-1} = 2^k-1$ alkiota Koska tasoja on h ja alimmalta tasolta ei voi laskeutua alaspäin, kokonaistyömäärä on enintään

$$(2^1 - 1) + (2^2 - 1) + \cdots + (2^{h-1} - 1) = 2^h - h \leq n,$$

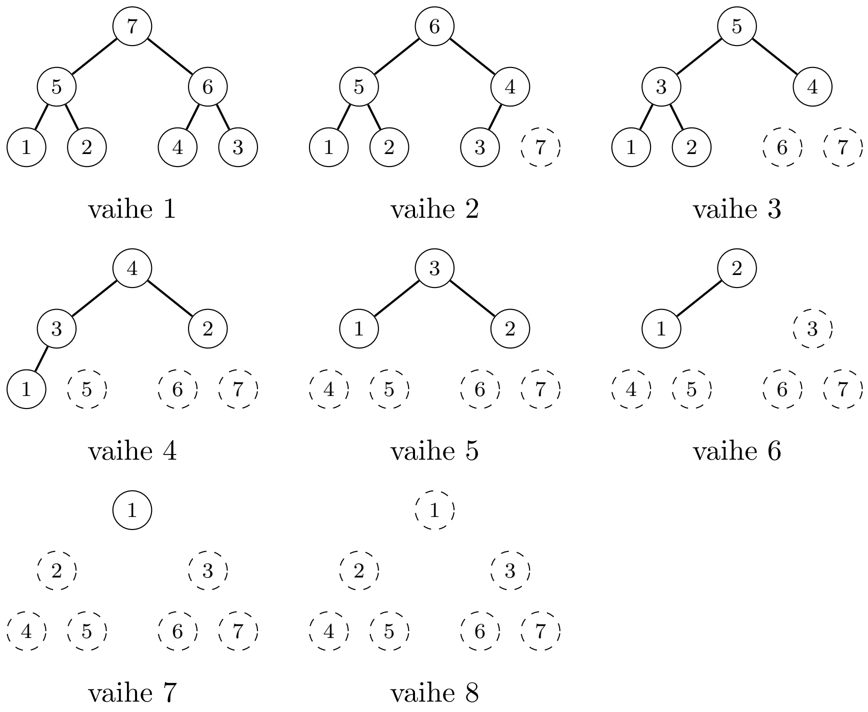
joten aikaa kuluu vain $O(n)$.

7.4.2 Kekojärjestäminen

Kekojärjestäminen on järjestämisalgoritmi, jonka toiminta perustuu kekoon. Ideana on muuttaa järjestettävä taulukko ensin keoksi ja sen jälkeen poistaa alkiot keosta yksi kerrallaan järjestyksessä. Kekojärjestäminen vie aikaa $O(n \log n)$, koska taulukon muuttaminen keoksi vie aikaa $O(n)$ ja n alkion poistaminen keosta vie aikaa $O(n \log n)$.

Kuva 7.5 näyttää esimerkin kekojärjestämisestä, kun järjestämme taulukon $[5, 2, 3, 1, 7, 4, 6]$ pienimmästä suurimpaan. Muutamme ensin taulukon maksimikeoksi, jolloin taulukosta tulee $[7, 5, 6, 1, 2, 4, 3]$. Tämän jälkeen poistamme yksi kerrallaan keon juuressa olevan alkion vaihtamalla sen keon viimeisen alkion kanssa. Tämän seurauksena keosta poistuneet alkiot (merkitty katkoviivoilla) muodostavat lopulta järjestetyn taulukon.

Kekojärjestäminen ei ole käytännössä yhtä tehokas algoritmi kuin lomitusjärjestäminen tai pikajärjestäminen, minkä vuoksi se ei ole saavuttanut



Kuva 7.5: Esimerkki kekojärjestämisestä.

samanlaista asemaa järjestämisalgoritmien joukossa. Siinä on kuitenkin yksi kiinnostava ominaisuus: jos haluamme selvittää vain taulukon k pienintä tai suurinta alkiota, tämä onnistuu ajassa $O(n + k \log n)$, koska meidän riittää poistaa keosta k kertaa pienin tai suurin alkio ajassa $O(\log n)$.

Luku 8

Algoritmien suunnittelu

Kuinka voi suunnitella hyvän algoritmin? On selvää, ettei tähän kysymykseen ole yhtä helppoa vastausta. Yhtä hyvin voisi kysyä, kuinka voi kirjoittaa hyvän kirjan tai säveltää hyvää musiikkia. Algoritmien suunnittelu on taito, jonka oppiminen vie aikaa.

Keskitymme tässä luvussa tavoitteeseen saada aikaan algoritmi, jonka aikavaativuus on $O(n)$ tai $O(n \log n)$ eli joka toimii tehokkaasti myös silloin, kun n on suuri. Tavoitteen asettaminen etukäteen on hyödyllistä, koska voimme ottaa sen algoritmin suunnittelun lähtökohdaksi ja rajata sen avulla mahdollisia lähestymistapoja, joita voimme käyttää.

8.1 Algoritmin tehostaminen

Millainen on algoritmi, joka vie aikaa $O(n)$ tai $O(n \log n)$? Tämä tarkoittaa, että kun algoritmille annetaan syötteenä n alkiota, se saa käyttää jokaisen alkion käsittelyyn vain pienen määrän aikaa. Niinpä algoritmissa tulisi esiintyä seuraavan kaltaisia silmukoita:

```
for i = 0 to n-1
    // tee jotain nopeaa
```

Tässä ”jotain nopeaa” tarkoittaa koodia, joka vie aikaa $O(1)$ tai $O(\log n)$. Algoritmi voi myös järjestää aineistoa, koska tehokkaat järjestämisalgoritmit vievät aikaa $O(n \log n)$. Kovin paljon muuta tehokas algoritmi ei sitten voikaan tehdä. Tämä rajoittaa paljon, mitä aineksia voimme laittaa algoritmiin, mutta voimme ajatella asiaa myös myönteisesti: vaatimus tehokkuudesta rajaa pois suuren määrän lähestymistapoja, eli meidän on helpompaa löytää hyvä algoritmi, kun vaihtoehtojen määrä on pienempi.

Tavallinen tilanne algoritmien suunnittelussa on, että pystymme ratkaisemaan annetun ongelman helposti $O(n^2)$-ajassa ensimmäisellä mieleen tulevalla algoritmilla, mutta haluaisimme tehokkaamman algoritmin, joka toimisi ajassa $O(n)$ tai $O(n \log n)$. Kokemus on osoittanut, että tämä on hyvä tilanne: yleensä *pystymme* tehostamaan tavalla tai toisella algoritmia, kunhan mietimme huolellisesti asiaa. Donald Knuth kuvailee samaa ilmiötä teoksessaan *The Art of Computer Programming* (osa 4A, esipuhe):

> Starting about 1970, computer scientists began to experience a phenomenon that we called "Floyd's Lemma": Problems that seemed to need n^3 operations could actually be solved in $O(n^2)$; problems that seemed to require n^2 could be handled in $O(n \log n)$; and $n \log n$ was often reducible to $O(n)$.

Tarkastellaan esimerkkinä seuraavaa tehtävää: Annettuna on taulukko, joka sisältää luvut $1, 2, \ldots, n$ jossakin järjestyksessä, ja haluamme kerätä luvut järjestyksessä pienimmästä suurimpaan. Joka kierroksella käymme läpi taulukon sisällön vasemmalta oikealle ja keräämme mahdollisimman monta seuraavaa lukua. Montako kierrosta tarvitsemme yhteensä? Esimerkiksi taulukossa $[4, 3, 1, 5, 2]$ tarvitsemme kolme kierrosta: ensimmäisellä kierroksella keräämme luvut 1 ja 2, toisella luvun 3 ja kolmannella luvut 4 ja 5.

Voimme ratkaista tehtävän helposti $O(n^2)$-ajassa simuloimalla lukujen keräämistä tehtävänannon kuvaamalla tavalla:

```
luku = 1
laskuri = 0
while luku <= n
    laskuri++
    for i = 0 to n-1
        if taulu[i] == luku
            luku++
print(laskuri)
```

Tässä muuttuja `luku` kertoo, minkä luvun haluamme kerätä seuraavaksi, ja muuttuja `laskuri` laskee, montako kierrosta tarvitaan. Kierroksia tarvitaan aina korkeintaan n, koska saamme kerättyä joka kierroksella ainakin yhden luvun, joten algoritmi toimii ajassa $O(n^2)$.

Kuinka voisimme sitten tehostaa algoritmia niin, että se veisi aikaa vain $O(n)$ tai $O(n \log n)$? Yllä olevan algoritmin hitaus johtuu pohjimmiltaan siitä, että algoritmilla menee kauan aikaa löytää, missä kohdassa taulukossa on seuraava luku, jonka haluamme kerätä. Niinpä jotta voimme ratkaista tehtävän tehokkaasti, meidän täytyy jollakin tavalla löytää seuraava kerättävä luku nopeammin. Kätevä ratkaisu tähän on luoda aputaulukko `kohta`, joka kertoo jokaisen luvun kohdan:

```
for i = 0 to n-1
    kohta[taulu[i]] = i
```

Tämän taulukon avulla saamme selville $O(1)$-ajassa, missä kohdassa taulukkoa on seuraava kerättävä luku. Entä mistä tiedämme, montako kierrosta tarvitsemme? Meidän täytyy aloittaa uusi kierros aina silloin, kun viimeksi keräämämme luku on myöhemmin taulukossa kuin seuraava kerättävä luku. Niinpä voimme laskea kierrosten määrän näin:

```
laskuri = 1
for i = 2 to n
    if kohta[i-1] > kohta[i]
        laskuri++
print(laskuri)
```

Tuloksena on algoritmi, jossa on kaksi silmukkaa, joista molemmat vievät aikaa vain $O(n)$. Niinpä algoritmin aikavaativuus on $O(n)$, eli olemme saavuttaneet tavoitteemme.

8.2 Algoritmien aineksia

Seuraavaksi käymme läpi tarkemmin *aineksia*, joita näkee usein tehokkaissa algoritmeissa. Nämä ainekset muodostavat hyvän perustan algoritmien suunnittelemiseen: kun saamme vastaamme uuden ongelman, voimme miettiä, voisimmeko hyödyntää aineksia jotenkin ongelman ratkaisemisessa.

8.2.1 Järjestäminen

Tehokas algoritmi perustuu usein tavalla tai toisella järjestämiseen. Monessa tilanteessa meidän on helpompaa lähestyä ongelmaa, jos voimme olettaa, että syöte on järjestyksessä. Järjestäminen vie aikaa $O(n \log n)$, joten voimme käyttää sitä huoletta tehokkaassa algoritmissa.

Jotta voimme käyttää järjestämistä, meidän täytyy usein havaita ongelmasta jokin ominaisuus, jonka ansiosta voimme ratkaista ongelman *ahneesti*. Meillä täytyy siis olla syy, miksi voimme käsitellä aineiston pienimmästä suurimpaan tai suurimmasta pienimpään ja olla varmoja, että saamme oikean ratkaisun tällä tavalla.

Tarkastellaan esimerkkinä tehtävää, jossa annettuna on n kolikkoa ja haluamme löytää pienimmän rahamäärän, jota *emme* voi muodostaa summana kolikoista. Jokaisella kolikolla on tietty kokonaislukuarvo, ja muodostettava rahamäärä on myös kokonaisluku. Esimerkiksi jos kolikot ovat $[1, 2, 2, 7]$, voimme muodostaa rahamäärät $1, 2, \ldots, 5$, mutta emme voi muodostaa rahamäärää 6, joten tässä tapauksessa oikea vastaus on 6.

Algoritmien suunnittelussa on usein hyödyllistä lähteä liikkeelle helpoista tapauksista. Kun meillä on käytössämme tietyt kolikot, hyvä ensimmäinen tavoite on koettaa muodostaa rahamäärä 1. Jotta onnistumme tässä, meillä on pakko olla kolikko, jonka arvo on 1. Entä milloin voimme muodostaa rahamäärän 2, jos tiedämme, että voimme muodostaa rahamäärän 1? Tässä on kaksi vaihtoehtoa: meillä täytyy olla toinen kolikko, jonka arvo on 1, jolloin saamme summan $1 + 1 = 2$, tai sitten kolikko, jonka arvo on 2.

Tämä on hyvää päättelyä, mutta jotta saamme aikaan algoritmin, meidän täytyy pystyä yleistämään se kaikkiin tapauksiin. Voimme ajatella asiaa hieman toisesta näkökulmasta: Meillä on joukko kolikoita, joiden avulla voimme muodostaa rahamäärät $1, 2, \ldots, k$. Miten voisimme muodostaa myös rahamäärän $k+1$? Ratkaisu on, että tarvitsemme uuden kolikon, jonka arvo on *enintään* $k+1$. Kun uuden kolikon arvo on $u \leq k+1$, voimme tämän jälkeen muodostaa rahamäärät $1, 2, \ldots, k + u$. Tämän havainnon ansiosta voimme alkaa muodostaa ratkaisua kolikko kerrallaan. Lisäksi jos mahdollisia uusia kolikoita on useita, voimme aina valita ahneesti *pienimmän* kolikon, koska pystymme valitsemaan suuremmat kolikot myöhemminkin.

Nyt meillä on kaikki ainekset tehokasta algoritmia varten. Järjestämme ensin kolikot ja muodostamme sitten ratkaisun käymällä kolikot läpi pienimmästä suurimpaan. Aloitamme tyhjästä ratkaisusta, jossa $k = 0$. Jokaisen kolikon kohdalla tiedämme, että voimme muodostaa tällä hetkellä rahamäärät $1, 2, \ldots, k$, joten voimme parantaa ratkaisua kolikon avulla, jos sen arvo on enintään $k + 1$. Muuten lopetamme ratkaisun muodostamisen, koska kaikki tulevat kolikot ovat vielä suurempia. Lopuksi toteamme, että $k + 1$ on pienin rahamäärä, jota emme voi muodostaa.

```
sort(kolikot)
k = 0
for i = 0 to n-1
    u = kolikot[i]
    if u <= k+1
        k += u
    else
        break
print(k+1)
```

Algoritmi järjestää ensin kolikot ajassa $O(n \log n)$ ja tämän jälkeen käy ne läpi ajassa $O(n)$, joten algoritmin aikavaativuus on $O(n \log n)$.

8.2.2 Tietorakenteet

Olemme tutustuneet jo kirjassa moniin tietorakenteisiin: listoihin, hajautustauluun, binäärihakupuuhun ja kekoon. Näissä tietorakenteissa kannattaa kiinnittää erityisesti huomiota siihen, mitkä operaatiot toimivat tehokkaasti $O(1)$- tai $O(\log n)$-ajassa. Nämä ovat operaatioita, joita voimme käyttää tehokkaissa algoritmeissa.

Tarkastellaan esimerkkinä tehtävää, jossa haluamme laskea, monellako tavalla voimme valita taulukosta yhtenäisen osataulukon, jossa lukujen summa on x. Voimme alkajaisiksi ratkaista tehtävän suoraviivaisesti ajassa $O(n^2)$ käymällä läpi kaikki osataulukot kahdella silmukalla:

```
laskuri = 0
for i = 0 to n-1
    summa = 0
    for j = i to n-1
        summa += taulu[j]
        if summa == x:
            laskuri++
print(laskuri)
```

Entä kuinka voisimme ratkaista tehtävän tehokkaasti? Tässä meitä auttaa muotoilla hieman toisin, mitä tarkoittaa, että osataulukon summa on x. Merkitään $s(i)$:llä osataulukon summaa taulukon alusta kohtaan i asti, ja oletetaan lisäksi, että $s(-1) = 0$. Tätä merkintää käyttäen osataulukon summa kohdasta a kohtaan b on

$$s(b) - s(a-1),$$

eli meidän riittää itse asiassa keskittyä vain taulukon alusta alkavien osataulukoiden summiin.

Koska haluamme saada tehokkaan algoritmin, hyvä tavoite olisi käydä taulukko läpi vain kerran. Kun olemme taulukon kohdassa i, monessako tähän kohtaan päättyvässä osataulukossa lukujen summa on x? Tämä tarkoittaa, että haluamme etsiä kohdat $j \leq i$, joille pätee

$$s(i) - s(j-1) = x$$

eli

$$s(j-1) = s(i) - x.$$

Tämä onnistuu tehokkaasti, kun pidämme taulukon läpikäynnissä kirjaa, montako kertaa mikäkin summa on esiintynyt taulukon alkuosassa. Voimme toteuttaa algoritmin seuraavasti:

```
summat[0] = 1
laskuri = 0
summa = 0
for i = 0 to n-1
    laskuri += summat[taulu[i]-x]
    summa += taulu[i]
    summat[summa]++
print(laskuri)
```

Tässä rakenne `summat` pitää kirjaa, montako kertaa mikäkin alkuosan summa on esiintynyt tähän mennessä. Koska summat voivat olla suuria, emme voi käyttää tavallista taulukkoa, mutta voimme sen sijaan käyttää hajautustauluun tai binäärihakupuuhun perustuvaa hakemistoa. Näin saamme aikaan ratkaisun, joka vie aikaa $O(n)$ tai $O(n \log n)$ riippuen valitusta tietorakenteesta.

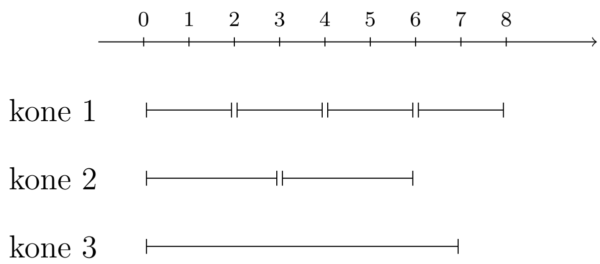
8.2.3 Binäärihaku

Binäärihaun tunnetuin käyttötarkoitus on alkion etsiminen järjestetystä taulukosta ajassa $O(\log n)$. Tämä on kuitenkin vain alkusoittoa sille, mitä binäärihaulla pystyy tekemään ja mikä on sen merkitys algoritmien suunnittelussa. Binäärihaun todellinen hyöty piilee siinä, että pystymme etsimään sen avulla tehokkaasti funktion *muutoskohdan*.

Oletetaan, että meillä on funktio $\texttt{ok}(x)$, joka kertoo, onko x kelvollinen ratkaisu tehtävään. Lisäksi pätee $\texttt{ok}(x) = \texttt{false}$, kun $x < k$, ja $\texttt{ok}(x) = \texttt{true}$, kun $x \geq k$. Binäärihaun avulla voimme etsiä tehokkaasti, mikä on funktion muutoskohta k eli ensimmäinen kohta, jossa funktio saa arvon `true`. Seuraava koodi toteuttaa haun, kun oletamme, että k on välillä $1 \dots N$:

```
a = 1, b = N
while a < b
    u = (a+b)/2
    if ok(u)
        b = u
    else
        a = u+1
k = a
```

Haun joka vaiheessa tiedämme, että muutoskohta on välillä $[a, b]$. Laskemme keskikohdan $u = (a + b)/2$ ja tutkimme funktion arvoa kohdassa u. Jos pätee $\texttt{ok}(u)$, niin muutoskohdan on oltava välillä $[a, u]$, ja muuten



Kuva 8.1: Optimaalinen tapa valmistaa 7 tavaraa vie 8 minuuttia, kun koneiden nopeudet ovat $[2, 3, 7]$.

sen täytyy olla välillä $[u+1, b]$. Lopulta välillä on vain yksi alkio, jolloin olemme löytäneet muutoskohdan. Koska välin koko puolittuu joka askeleella, kutsumme funktiota `ok` yhteensä $O(\log N)$ kertaa.

Mutta mitä hyötyä on siitä, että löydämme tehokkaasti funktion muutoskohdan? Tämä selviää seuraavassa tehtävässä: Käytössämme on n konetta ja haluamme valmistaa niiden avulla m tavaraa. Tiedämme jokaisesta koneesta, montako minuuttia kestää valmistaa yksi tavara konetta käyttäen, ja haluamme löytää aikataulun, jota seuraamalla pystymme valmistamaan m tavaraa mahdollisimman nopeasti.

Kuva 8.1 näyttää parhaan aikataulun esimerkkitilanteessa, jossa koneiden nopeudet ovat $[2, 3, 7]$ ja haluamme valmistaa seitsemän tavaraa (eli $m = 7$). Käynnistämme koneen 1 neljästi kahden minuutin välein, koneen 2 kahdesti kolmen minuutin välein ja koneen 3 kerran. Viimeisenä pysähtyy kone 1, kun aloittamisesta on kulunut kahdeksan minuuttia.

Voimme pukea tehtävän binäärihaulle sopivaan muotoon määrittämällä, että $\texttt{ok}(x) = \texttt{true}$ tarkalleen silloin, kun voimme muodostaa *ainakin* m tavaraa ajassa x. Tällöin funktion muutoskohta k vastaa tehtävän ratkaisua. Entä miten voimme laskea funktion `ok` arvon? Jos meillä on u minuuttia aikaa ja koneella i kestää x_i minuuttia valmistaa yksi tavara, pystymme valmistamaan $\lfloor u/x_i \rfloor$ tavaraa kyseistä konetta käyttäen. Kun sitten käytössämme on kaikki koneet, pystymme valmistamaan yhteensä

$$s = \sum_{i=1}^{n} \lfloor u/x_i \rfloor$$

tavaraa. Niinpä $\texttt{ok}(u) = \texttt{false}$, jos $s < m$, ja $\texttt{ok}(u) = \texttt{true}$, jos $s \geq m$. Voimme toteuttaa tämän käytännössä seuraavasti:

```
function ok(u)
    s = 0
    for i = 1 to n
        s += u/x[i]
    return s >= m
```

Voimme kytkeä tämän funktion suoraan binäärihakuun, jolloin tuloksena on tehokas algoritmi tehtävän ratkaisemiseen. Meidän täytyy kuitenkin vielä valita arvo N, joka on jokin yläraja kohdalle k. Tässä tehtävässä helppo valinta on

$$N = x_1 \cdot m,$$

mikä vastaa ratkaisua, jossa käytämme vain ensimmäistä konetta. On varmaa, että oikea k:n arvo on korkeintaan N, joten binäärihaku kutsuu $O(\log N)$ kertaa metodia `ok`. Koska jokainen metodin kutsu vie aikaa $O(n)$, tuloksena on algoritmi, jonka aikavaativuus on $O(n \log N)$.

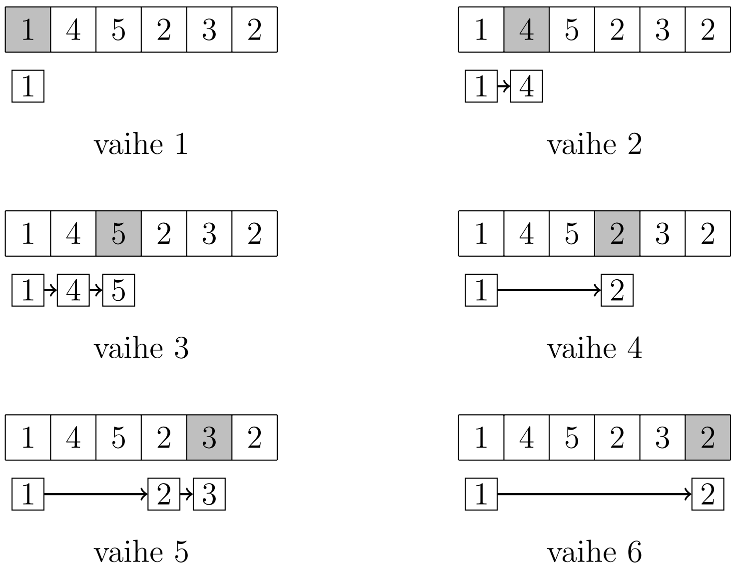
Huomaa, että $\log N$ on käytännössä pieni luku riippumatta siitä, kuinka suuri luku N on. Niinpä meidän ei tarvitse murehtia siitä, kuinka suuria x_1 ja m ovat, vaan voimme luottaa siihen, että algoritmi on tehokas.

8.2.4 Tasoitettu analyysi

Voimme yleensä määrittää algoritmin aikavaativuuden helposti katsomalla jokaisesta silmukasta, montako kertaa siinä olevaa koodia suoritetaan. Joskus näin suoraviivainen analyysi ei anna kuitenkaan oikeaa kuvaa algoritmin tehokkuudesta, koska silmukan suorituskertojen määrä saattaa vaihdella algoritmin eri vaiheissa. Tutustumme seuraavaksi tekniikkaan nimeltä *tasoitettu analyysi*, jossa koetamme arvioida tarkemmin, montako kertaa silmukassa olevaa koodia suoritetaan *yhteensä* algoritmin aikana.

Tasoitettuun analyysiin liittyy yleensä jokin tietorakenne, jonka operaatioiden määrää haluamme arvioida. Tarkastellaan esimerkkinä tehtävää, jossa meillä on n lukua sisältävä taulukko ja haluamme muodostaa toisen taulukon, jossa on jokaisen luvun *lähin pienempi edeltäjä*. Tämä tarkoittaa, että haluamme löytää jokaiselle luvulle pienemmän luvun, joka on mahdollisimman lähellä aiemmin taulukossa. Esimerkiksi taulukon $[1,4,5,2,3,2]$ lähimmät pienemmät edeltäjät ovat $[-,1,4,1,2,1]$. Koska luvulla 1 ei ole pienempää edeltäjää, sen kohdalla on merkki $-$.

Seuraava koodi ratkaisee tehtävän $O(n^2)$-ajassa ja muodostaa taulukon `edeltaja`, jossa on jokaisen luvun lähin pienempi edeltäjä:



Kuva 8.2: Etsimme lähimmät pienemmät edeltäjät pinon avulla.

```
for i = 0 to n-1
    for j = i-1 to 0
        if taulu[j] < taulu[i]
            edeltaja[i] = taulu[j]
            break
```

Nyt haluamme kuitenkin saada aikaan tehokkaamman algoritmin. Onnistumme tässä, kun käymme läpi taulukon vasemmalta oikealle ja pidämme yllä *pinoa*, jossa on kasvava lista taulukon lukuja. Jokaisessa kohdassa i poistamme ensin pinon lopusta lukuja niin kauan kuin pinon viimeinen luku on suurempi tai yhtä suuri kuin kohdan i luku. Tämän jälkeen kirjaamme muistiin, että kohdan i luvun lähin pienempi edeltäjä on pinon viimeinen luku (jos pino ei ole tyhjä) ja lisäämme kohdan i luvun pinon loppuun. Tuloksena on seuraava algoritmi:

```
pino = []
for i = 0 to n-1
    while not pino.empty() and pino.top() >= taulu[i]
        pino.pop()
    if not pino.empty()
        edeltaja[i] = pino.top()
    pino.push(taulu[i])
```

Kuva 8.2 näyttää, kuinka algoritmi käsittelee taulukon $[1,4,5,2,3,2]$. Alussa pino on tyhjä, joten toteamme, ettei luvulla 1 ole lähintä pienempää edeltäjää ja lisäämme sen pinoon. Sitten vuoroon tulee luku 4, jonka lähin pienempi edeltäjä on pinon päällä oleva luku 1. Tämän jälkeen lisäämme luvun 4 pinoon. Vastaavasti luvun 5 lähin pienempi edeltäjä on luku 4, ja lisäämme luvun 5 pinoon. Luvun 2 kohdalla poistamme pinosta luvut 5 ja 4 ja toteamme, että luvun 2 lähin pienempi edeltäjä on luku 1. Lopuksi käsittelemme vielä vastaavasti luvut 3 ja 2.

Algoritmin tehokkuus riippuu siitä, montako kertaa suoritamme `while`-silmukassa olevan koodin. Oleellinen havainto on, että voimme poistaa pinosta korkeintaan niin monta alkiota kuin olemme lisänneet siihen, eli emme voi kutsua `pop`-metodia useammin kuin `push`-metodia. Koska lisäämme pinoon n alkiota, suoritamme `while`-silmukassa olevaa koodia siis enintään n kertaa algoritmin aikana. Tämän ansiosta koko algoritmi vie aikaa vain $O(n)$.

Luku 9

Dynaaminen ohjelmointi

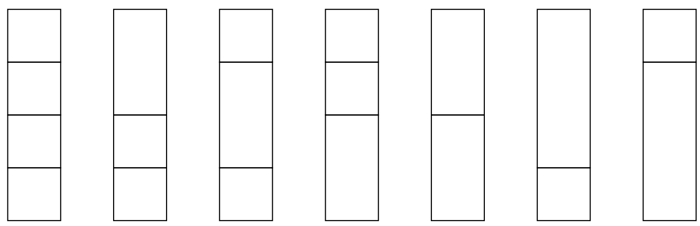
Dynaaminen ohjelmointi on tekniikka, jonka avulla voimme ratkaista tehokkaasti monia algoritmiikan ongelmia. Ideana on muotoilla ongelma rekursiivisesti niin, että ratkaisu ongelmaan palautuu saman ongelman pienempiin osaongelmiin. Tämän jälkeen saamme aikaan tehokkaan algoritmin, kun laskemme jokaisen osaongelman ratkaisun vain kerran.

Tässä luvussa tutustumme ensin dynaamisen ohjelmoinnin perusteisiin käyttäen esimerkkinä tehtävää, jossa rakennamme torneja palikoista. Tämän jälkeen käymme läpi kokoelman muita tehtäviä, jotka esittelevät lisää dynaamisen ohjelmoinnin mahdollisuuksia.

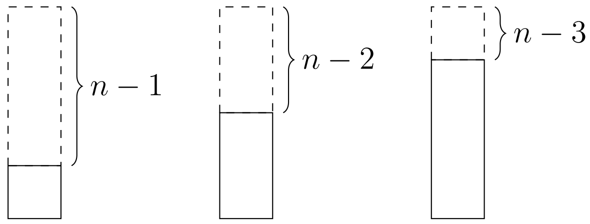
9.1 Perustekniikat

Aloitamme dynaamiseen ohjelmointiin tutustumisen seuraavasta tehtävästä: meillä on palikoita, joiden korkeudet ovat 1, 2 ja 3, ja haluamme rakentaa niistä tornin, jonka korkeus on n. Jokaista palikkatyyppiä on saatavilla rajattomasti. Monellako tavalla voimme rakentaa tornin?

Esimerkiksi kun tornin korkeus on $n = 4$, voimme rakentaa sen 7 tavalla



Kuva 9.1: Voimme rakentaa korkeuden 4 tornin 7 tavalla palikoista, joiden korkeudet ovat 1, 2 ja 3.



Kuva 9.2: Rekursiivinen idea: kun alamme rakentaa tornia, voimme laittaa pohjalle korkeuden 1, 2 tai 3 palikan.

kuvan 9.1 mukaisesti. Jos n on pieni, voimme laskea tornien määrän helposti käymällä läpi kaikki tavat, mutta tornien määrä kasvaa nopeasti emmekä voi käyttää raakaa voimaa suuremmilla n:n arvoilla. Seuraavaksi ratkaisemmekin ongelman tehokkaasti dynaamisella ohjelmoinnilla.

9.1.1 Rekursiivinen esitys

Jotta voimme käyttää dynaamista ohjelmointia, meidän täytyy pystyä esittämään ongelma *rekursiivisesti* niin, että saamme laskettua ongelman ratkaisun käyttäen osaongelmina pienempiä vastaavia ongelmia. Tässä tehtävässä luonteva rekursiivinen funktio on $\texttt{tornit}(n)$: monellako tavalla voimme rakentaa tornin, jonka korkeus on n? Esimerkiksi $\texttt{tornit}(4) = 7$, koska voimme rakentaa korkeuden 4 tornin 7 tavalla.

Funktion pienten arvojen laskeminen on helppoa. Ensinnäkin $\texttt{tornit}(0) = 1$, koska on tarkalleen yksi tapa rakentaa tyhjä torni: siinä ei ole mitään palikoita. Sitten $\texttt{tornit}(1) = 1$, koska ainoa tapa rakentaa korkeuden 1 torni on valita palikka, jonka korkeus on 1, ja $\texttt{tornit}(2) = 2$, koska voimme rakentaa korkeuden 2 tornin valitsemalla joko kaksi palikkaa, jonka kummankin korkeus on 1, tai yhden palikan, jonka korkeus on 2.

Kuinka voisimme sitten laskea funktion arvon *yleisessä* tapauksessa, kun tornin korkeus on n? Tässä voimme miettiä, kuinka tornin rakentaminen alkaa. Meillä on kolme mahdollisuutta: voimme laittaa ensin palikan, jonka korkeus on 1, 2 tai 3. Jos aloitamme korkeuden 1 palikalla, meidän täytyy rakentaa sen päälle korkeuden $n-1$ torni. Vastaavasti jos aloitamme korkeuden 2 tai 3 palikalla, meidän täytyy rakentaa sen päälle torni, jonka korkeus on $n-2$ tai $n-3$. Kuva 9.2 havainnollistaa tämän idean. Niinpä voimme laskea tornien määrän rekursiivisesti kaavalla

$$\texttt{tornit}(n) = \texttt{tornit}(n-1) + \texttt{tornit}(n-2) + \texttt{tornit}(n-3),$$

kun $n \geq 3$. Esimerkiksi voimme laskea

$$\texttt{tornit}(3) = \texttt{tornit}(2) + \texttt{tornit}(1) + \texttt{tornit}(0) = 4$$

korkeus n	`tornit`(n)
0	1
1	1
2	2
3	4
4	7
5	13
6	24
7	44
8	81
9	149

Taulukko 9.1: Tornien määrät, kun korkeus n on $0, 1, \ldots, 9$.

ja

$$\texttt{tornit}(4) = \texttt{tornit}(3) + \texttt{tornit}(2) + \texttt{tornit}(1) = 7,$$

jolloin olemme saaneet laskettua esimerkkitapaustamme vastaavasti, että voimme rakentaa korkeuden 4 tornin 7 tavalla.

Taulukko 9.1 näyttää funktion `tornit`(n) arvot, kun $n = 0, 1, \ldots, 9$. Kuten taulukosta voi huomata, funktion arvo kasvaa nopeasti: se lähes kaksinkertaistuu joka askeleella. Kun n on suuri, meillä onkin valtavasti mahdollisuuksia tornin rakentamiseen.

9.1.2 Tehokas toteutus

Nyt kun olemme saaneet aikaan rekursiivisen funktion, voimme toteuttaa sen ohjelmoimalla seuraavasti:

```
function tornit(n)
    if (n == 0) return 1
    if (n == 1) return 1
    if (n == 2) return 2
    return tornit(n-1)+tornit(n-2)+tornit(n-3)
```

Tämä on toimiva ratkaisu, mutta siinä on yksi ongelma: funktion arvon laskeminen vie kauan aikaa, jos n on vähänkin suurempi. Käytännössä laskenta alkaa hidastua parametrin $n = 30$ tienoilla. Esimerkiksi arvon `tornit`(40) laskeminen vie aikaa noin minuutin ja arvon `tornit`(50) vie aikaa niin kauan, että emme jaksa odottaa laskennan valmistumista.

Syynä laskennan hitauteen on, että funktiota `tornit` kutsutaan uudestaan ja uudestaan samoilla parametreilla ja tornien määrä lasketaan loppujen lopuksi summana luvuista 1 ja 2 pohjatapauksista. Niinpä kun tornien määrä on suuri, laskenta on tuomittu viemään kauan aikaa. Voimme kuitenkin selviytyä ongelmasta toteuttamalla laskennan hieman toisella tavalla.

Tässä astuu kuvaan dynaamisen ohjelmoinnin keskeinen idea: laskemme funktion arvon kullekin parametrille vain kerran ja tallennamme tulokset taulukkoon myöhempää käyttöä varten. Tätä varten luomme taulukon `tornit`, jossa kohtaan `tornit`$[i]$ tallennetaan funktion arvo `tornit`(i). Kun haluamme laskea korkeuden n tornien määrän, täytämme taulukon kohdat $0, 1, \ldots, n$. Seuraava koodi toteuttaa laskennan:

```
tornit[0] = 1
tornit[1] = 1
tornit[2] = 2
for i = 3 to n
    tornit[i] = tornit[i-1]+tornit[i-2]+tornit[i-3]
```

Koodin suorituksen jälkeen taulukon arvo `tornit`$[n]$ kertoo meille, monellako tavalla voimme rakentaa korkeuden n tornin.

Tämän toteutuksen etuna on, että se on huomattavasti nopeampi kuin rekursiivinen metodi. Koska koodissa on vain yksi for-silmukka, se vie aikaa vain $O(n)$, eli voimme käsitellä tehokkaasti myös suuria n:n arvoja. Esimerkiksi voimme nyt laskea salamannopeasti, että

$$\texttt{tornit}(50) = 10562230626642,$$

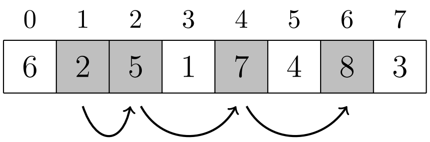
eli on yli 10562 miljardia tapaa rakentaa korkeuden 50 torni.

9.2 Esimerkkejä

Olemme nyt tutustuneet dynaamisen ohjelmoinnin perusideaan, mutta tämä on vasta alkua sille, mitä kaikkea tekniikan avulla pystyy tekemään. Seuraavaksi käymme läpi kokoelman tehtäviä, jotka esittelevät lisää dynaamisen ohjelmoinnin mahdollisuuksia.

9.2.1 Pisin nouseva alijono

Ensimmäinen ongelmamme on selvittää, kuinka pitkä on n alkiota sisältävän taulukon *pisin nouseva alijono*. Tämä tarkoittaa, että meidän tulee valita taulukosta mahdollisimman pitkä jono alkioita niin, että seuraava alkio on aina edellistä suurempi. Kuvassa 9.3 on esimerkki taulukosta, jonka pisin nouseva alijono $[2, 5, 7, 8]$ on pituudeltaan 4.



Kuva 9.3: Taulukon pisin nouseva alijono on $[2, 5, 7, 8]$.

Voimme lähestyä tehtävää laskemalla jokaiselle taulukon kohdalle $k = 0, 1, \ldots, n-1$ arvon `pisin`(k): kuinka pitkä on pisin nouseva alijono, joka päättyy kohtaan k. Kun olemme laskeneet kaikki nämä arvot, suurin arvoista kertoo meille, kuinka pitkä on pisin nouseva alijono koko taulukossa. Esimerkiksi kuvan 9.3 taulukossa `pisin`$(6) = 4$, koska kohtaan 6 päättyvä pisin nouseva alijono on pituudeltaan 4.

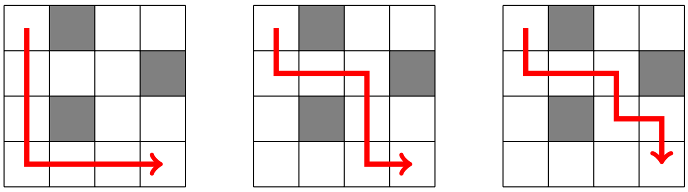
Millainen on sitten pisin kohtaan k päättyvä alijono? Yksi mahdollisuus on, että alijonossa on vain kohdan k alkio, jolloin `pisin`$(k) = 1$. Muussa tapauksessa alijonossa on ensin kohtaan x päättyvä pisin nouseva alijono, missä $x < k$, ja sitten vielä kohdan k alkio. Tämä edellyttää, että kohdan x alkio on pienempi kuin kohdan k alkio. Tuloksena olevan alijonon pituus on `pisin`$(x) + 1$. Tämä antaa mahdollisuuden dynaamiseen ohjelmointiin: kun haluamme laskea arvon `pisin`(k), käymme läpi kaikki mahdolliset tavat valita kohta x ja valitsemme niistä parhaan vaihtoehdon.

Seuraava koodi laskee jokaiselle $k = 0, 1, \ldots, n-1$ pisimmän kohtaan k päättyvän alijonon pituuden yllä kuvattua ideaa käyttäen. Koodi olettaa, että taulukon sisältö on taulukossa `taulu`, ja se muodostaa taulukon `pisin`, jossa on pisimpien alijonojen pituudet.

```
for k = 0 to n-1
    pisin[k] = 1
    for x = 0 to k-1
        if taulu[x] < taulu[k] and pisin[x]+1 > pisin[k]
            pisin[k] = pisin[x]+1
```

Koodin suorituksen jälkeen pisimmän nousevan alijonon pituus on siis suurin taulukon `pisin` arvoista. Tämä algoritmi vie aikaa $O(n^2)$, koska käymme jokaisessa kohdassa k läpi kaikki taulukon edelliset kohdat.

Mitä jos haluaisimme selvittää pisimmän nousevan alijonon pituuden lisäksi, mistä alkioista se muodostuu? Tämä onnistuu laajentamalla hieman koodia. Rakennamme taulukon `aiempi`, joka kertoo jokaisessa kohdassa, missä on tähän kohtaan päättyvän pisimmän alijonon edellinen alkio. Voimme muodostaa taulukon seuraavasti:



Kuva 9.4: Mahdolliset reitit vasemmasta yläkulmasta oikeaan alakulmaan.

```
for k = 0 to n-1
    pisin[k] = 1
    aiempi[k] = -1
    for x = 0 to k-1
        if taulu[x] < taulu[k] and pisin[x]+1 > pisin[k]
            pisin[k] = pisin[x]+1
            aiempi[k] = x
```

Tämän jälkeen jokaisessa kohdassa k arvo aiempi[k] kertoo pisimmän alijonon edellisen alkion kohdan. Kuitenkin jos alijonon pituus on 1, taulukossa on arvo -1. Voimme nyt selvittää kohtaan k päättyvän alijonon alkiot käänteisesti seuraavasti:

```
while k != -1
    print(taulu[k])
    k = aiempi[k]
```

Voimme käyttää vastaavaa tekniikkaa dynaamisessa ohjelmoinnissa aina, kun haluamme selvittää, mistä aineksista paras ratkaisu muodostuu.

9.2.2 Reitti ruudukossa

Olemme $n \times n$ -ruudukon vasemmassa yläkulmassa ja haluamme päästä oikeaan alakulmaan. Jokaisella askeleella voimme siirtyä ruudun alaspäin tai oikealle. Kuitenkin joissakin ruuduissa on este, emmekä voi kulkea sellaisen ruudun kautta. Montako mahdollista reittiä on olemassa? Esimerkiksi kuvassa 9.4 on 4×4 -ruudukko, jossa on kolme mahdollista reittiä ruudukon vasemmasta yläkulmasta oikeaan alakulmaan.

Tässä tehtävässä osaongelmat ovat *kaksiulotteisia*, koska olemme reitin joka vaiheessa tietyn rivin tietyllä sarakkeella. Niinpä määrittelemme rekursiivisen funktion, jolla on kaksi parametria: reitit(y, x) kertoo, montako reittiä on vasemmasta yläkulmasta ruutuun (y, x). Numeroimme rivit ja sarakkeet $1, 2, \ldots, n$ ja haluamme laskea arvon reitit(n, n), joka on reittien määrää vasemmasta yläkulmasta oikeaan alakulmaan.

Hyödyllinen havainto on, että jokaisessa ruudussa on kaksi mahdollisuutta, kuinka reitti voi tulla ruutuun, koska voimme tulla joko ylhäältä tai vasemmalta. Kun haluamme laskea reittien määrää, laskemmekin yhteen ylhäältä ja vasemmalta tulevat reitit. Rajoituksena jos ruudussa on este, siihen tulevien reittien määrä on aina nolla. Tämän perusteella saamme aikaan seuraavan dynaamisen ohjelmoinnin algoritmin:

```
reitit[1][1] = 1
for y = 1 to n
    for x = 1 to n
        if este[y][x]
            reitit[y][x] = 0
        else
            reitit[y][x] = reitit[y-1][x]+reitit[y][x-1]
```

Aluksi merkitsemme muistiin, että vasempaan yläkulmaan on yksi reitti, koska lähdemme liikkeelle siitä. Tämän jälkeen laskemme reittien määrän kaikkiin muihin ruutuihin. Jos ruudussa on este, siihen ei tule mitään reittiä, ja muuten laskemme yhteen ylhäältä ja vasemmalta tulevat reitit. Tuloksena on algoritmi, joka vie aikaa $O(n^2)$.

Huomaa, että tässä käytämme taulukon kohtia $1, 2, \dots, n$ ja oletamme, että kohdissa 0 on arvona nolla. Tämä on kätevää, koska meidän ei tarvitse tehdä erikoistapauksia ruudukon yläreunaa ja vasenta reunaa varten.

9.2.3 Repunpakkaus

Termi *repunpakkaus* viittaa ongelmiin, jossa meillä on joukko tavaroita, joilla on tietyt painot, ja haluamme selvittää, millaisia yhdistelmiä niistä voi muodostaa. Ongelmasta on monia muunnelmia, joiden yhdistävänä tekijänä on, että ne voi ratkaista tehokkaasti dynaamisella ohjelmoinnilla.

Seuraavaksi keskitymme ongelmaan, jossa meillä on n tavaraa, joilla on tietyt painot $p_1, p_2, \dots, p_n$. Haluamme selvittää kaikki mahdolliset yhteispainot, jotka voimme muodostaa valitsemalla jonkin osajoukon tavaroista. Esimerkiksi jos tavaroiden painot ovat $[1, 3, 3, 4]$, niin mahdolliset yhteispainot ovat $[0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11]$. Esimerkiksi yhteispaino 6 on listalla, koska saamme sen painoista $3 + 3 = 6$, ja yhteispaino 8 on listalla, koska saamme sen painoista $1 + 3 + 4 = 8$.

On helppoa laskea, mikä on suurin mahdollinen tavaroiden yhteispaino, koska saamme sen valitsemalla kaikki tavarat. Suurin yhteispaino on siis $s = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$. Tämä on meille hyödyllinen yläraja, koska tiedämme nyt,

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$k = 0$	✓											
$k = 1$	✓	✓										
$k = 2$	✓	✓		✓	✓							
$k = 3$	✓	✓		✓	✓		✓	✓				
$k = 4$	✓	✓		✓	✓	✓	✓	✓	✓		✓	✓

Kuva 9.5: Mahdolliset yhteispainot, kun painot ovat $[1, 3, 3, 4]$.

että tavaroiden yhteispaino on aina jokin luku välillä $0 \ldots s$.

Voimme lähestyä tehtävää dynaamisella ohjelmoinnilla määrittelemällä funktion `painot`(k): mitkä kaikki yhteispainot voimme muodostaa, jos käytössämme on tavarat $1, 2, \ldots, k$? Oletamme, että funktio palauttaa *taulukon*, jossa on $s + 1$ alkiota: jokaiselle yhteispainolle $0, 1, \ldots, s$ tieto siitä, voimmeko muodostaa sen painoista $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Tapaus `painot`(0) on helppo, koska kun meillä ei ole mitään tavaroita, ainoa mahdollinen yhteispaino on 0. Tämän jälkeen pystymme laskemaan tapauksen `painot`(k) ottamalla lähtökohdaksi tapauksen `painot`$(k - 1)$ ja selvittämällä, mitä uusia yhteispainoja voimme muodostaa, kun saamme käyttää myös painoa p_k.

Kuva 9.5 näyttää dynaamisen ohjelmoinnin taulukoiden sisällön esimerkissämme, jossa painot ovat $[1, 3, 3, 4]$. Ensimmäisellä rivillä $k = 0$, joten ainoa yhteispaino on 0. Toisella rivillä $k = 1$, joten saamme käyttää painoa $p_1 = 1$ ja voimme muodostaa yhteispainot 0 ja 1. Kolmannella rivillä $k = 2$, jolloin saamme käyttöömme painon $p_2 = 3$ ja voimme muodostaa yhteispainot 0, 1, 3 ja 4. Viimeisellä rivillä käytössämme ovat kaikki painot, joten se vastaa ongelman ratkaisua.

Voimme toteuttaa dynaamisen ohjelmoinnin kätevästi niin, että koodissa on vain yksi boolean-taulukko `painot`, jossa on $s + 1$ alkiota. Taulukko kertoo laskennan jokaisessa vaiheessa, mitkä yhteispainot ovat mahdollisia sillä hetkellä. Aluksi taulukossa kohdassa 0 on arvo tosi ja kaikki muut arvot ovat epätosia. Tämän jälkeen päivitämme taulukkoa lisäämällä mukaan painoja yksi kerrallaan.

```
painot[0] = true
for i = 1 to n
    for j = s to 0
        if painot[j]
            painot[j+p[i]] = true
```

Tärkeä yksityiskohta algoritmissa on, että käymme jokaisen painon kohdalla taulukon läpi *lopusta alkuun*. Syynä tähän on, että tällä tavalla saamme laskettua oikealla tavalla, mitä uusia yhteispainoja voimme muodostaa, kun saamme käyttää uutta painoa kerran. Laskennan jälkeen voimme tulostaa kaikki mahdolliset yhteispainot näin:

```
for i = 0 to s
    if painot[i]
        print(i)
```

Tuloksena olevan algoritmin aikavaativuus on $O(ns)$. Algoritmin tehokkuus riippuu siis paitsi tavaroiden määrästä, myös niiden painoista. Jotta algoritmi on käyttökelpoinen, painojen summan s täytyy olla niin pieni, että voimme varata niin suuren taulukon.

9.2.4 Binomikertoimet

Binomikerroin $\binom{n}{k}$ kertoo, monellako tavalla voimme muodostaa n alkion joukosta k alkion osajoukon. Esimerkiksi $\binom{5}{3} = 10$, koska voimme muodostaa joukosta $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ seuraavat 3 alkion osajoukot:

- $\{1, 2, 3\}$
- $\{1, 2, 4\}$
- $\{1, 2, 5\}$
- $\{1, 3, 4\}$
- $\{1, 3, 5\}$
- $\{1, 4, 5\}$
- $\{2, 3, 4\}$
- $\{2, 3, 5\}$
- $\{2, 4, 5\}$
- $\{3, 4, 5\}$

Binomikerrointen laskemiseen on monia tapoja. Dynaamisen ohjelmoinnin kannalta kiinnostava tapa on rekursiivinen kaava

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Kaavassa on ideana, että meillä on kaksi tapaa muodostaa k alkion osajoukko joukosta $\{1, 2, \ldots, n\}$. Jos otamme osajoukkoon mukaan alkion n, meidän tulee muodostaa vielä $k-1$ alkion osajoukko joukosta $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Jos taas emme ota osajoukkoon mukaan alkiota n, meidän tulee muodostaa k alkion osajoukko joukosta $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Lisäksi pohjatapauksina

$$\binom{n}{0} = 1,$$

koska voimme muodostaa tyhjän osajoukon yhdellä tavalla, ja

$$\binom{n}{k} = 0, \text{ jos } k > n,$$

koska n alkiosta ei voi muodostaa osajoukkoa, jossa on yli n alkiota.

Tämä rekursiivinen kaava tarjoaa meille tavan laskea tehokkaasti binomikertoimia dynaamisen ohjelmoinnin avulla. Voimme toteuttaa laskennan seuraavasti:

```
for i = 1 to n
    binom[i][0] = 1
    for j = 1 to k
        binom[i][j] = binom[i-1][j-1]+binom[i-1][j]
```

Koodin suorituksen jälkeen taulukon kohdassa `binom`$[n][k]$ on binomikerroin $\binom{n}{k}$. Algoritmi vie aikaa $O(nk)$, joten sitä voi käyttää melko suurten binomikerrointen laskemiseen.

Luku 10

Verkkojen perusteet

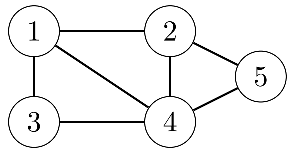
Voimme ratkaista monia algoritmiikan ongelmia esittämällä tilanteen *verkkona* ja käyttämällä sitten sopivaa verkkoalgoritmia. Tyypillinen esimerkki verkosta on tieverkosto, joka muodostuu kaupungeista ja niiden välisistä teistä. Tällaisessa verkossa ongelmana voi olla selvittää vaikkapa, kuinka voimme matkustaa kaupungista a kaupunkiin b.

Tässä luvussa aloitamme verkkoihin tutustumisen käymällä läpi verkkojen käsitteitä sekä tapoja esittää verkkoja ohjelmoinnissa. Tämän jälkeen näemme, miten voimme tutkia verkkojen rakennetta ja ominaisuuksia syvyyshaun ja leveyshaun avulla. Seuraavissa kirjan luvuissa jatkamme verkkojen käsittelyä ja opimme lisää verkkoalgoritmeja.

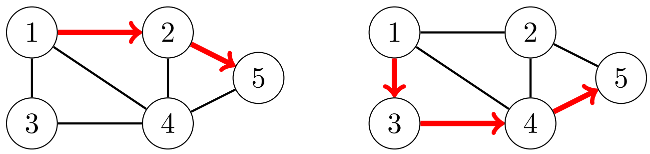
10.1 Verkkojen käsitteitä

Verkko muodostuu *solmuista* ja niitä yhdistävistä *kaarista*. Esimerkiksi kuvassa 10.1 on verkko, jossa on viisi solmua ja seitsemän kaarta. Merkitsemme verkon solmujen määrää kirjaimella n ja kaarten määrää kirjaimella m. Lisäksi numeroimme verkon solmut kokonaisluvuin $1, 2, \ldots, n$.

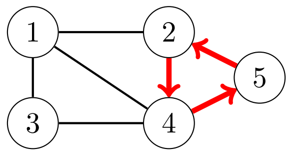
Sanomme, että kaksi solmua ovat *vierekkäin* verkossa, jos niiden välillä on kaari. Solmun *naapureja* ovat kaikki solmut, joihin se on yhteydessä kaarella, ja solmun *aste* on sen naapureiden määrä. Kuvassa 10.1 solmun 2 naapurit



Kuva 10.1: Verkko, jossa on viisi solmua ja seitsemän kaarta.



Kuva 10.2: Kaksi polkua solmusta 1 solmuun 5.



Kuva 10.3: Verkossa on sykli $2 \to 4 \to 5 \to 2$.

ovat 1, 4 ja 5, joten solmun aste on 3. Voimme kulkea solmusta 1 solmuun 5 esimerkiksi polkua $1 \to 2 \to 5$ tai $1 \to 3 \to 4 \to 5$.

Polku ja sykli

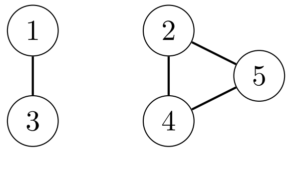
Verkossa oleva *polku* on kaaria pitkin kulkeva reitti lähtösolmusta kohdesolmuun. Kuva 10.2 näyttää kaksi mahdollista polkua solmusta 1 solmuun 5 esimerkkiverkossamme. Ensimmäinen polku on $1 \to 2 \to 5$ ja toinen polku on $1 \to 3 \to 4 \to 5$.

Polku on *sykli*, jos sen alku- ja loppusolmu on sama, siinä on ainakin yksi kaari eikä se kulje kahta kertaa saman solmun tai kaaren kautta. Kuvassa 10.3 on esimerkkinä sykli $2 \to 4 \to 5 \to 2$. Jos verkossa ei ole yhtään sykliä, sanomme, että verkko on *syklitön*.

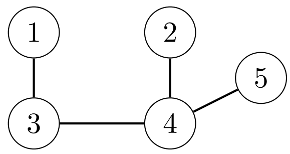
Yhtenäisyys ja komponentit

Verkko on *yhtenäinen*, jos minkä tahansa kahden solmun välillä on polku. Kuvan 10.1 verkko on yhtenäinen, mutta kuvan 10.4 verkko ei ole yhtenäinen, koska esimerkiksi solmujen 1 ja 2 välillä ei ole polkua.

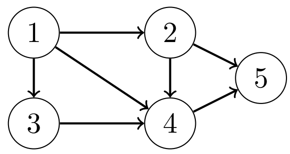
Voimme esittää verkon aina kokoelmana yhtenäisiä *komponentteja*. Kuvassa 10.4 yhtenäiset komponentit ovat $\{1, 3\}$ ja $\{2, 4, 5\}$.



Kuva 10.4: Verkon yhtenäiset komponentit ovat $\{1, 3\}$ ja $\{2, 4, 5\}$.



Kuva 10.5: Puu eli yhtenäinen, syklitön verkko.



Kuva 10.6: Suunnattu verkko.

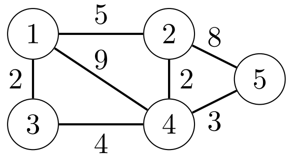
Verkko on *puu*, jos se on sekä yhtenäinen että syklitön. Puussa kaarten määrä on aina yhden pienempi kuin solmujen määrä, ja jokaisen kahden solmun välillä on yksikäsitteinen polku. Kuvassa 10.5 on esimerkkinä puu, jossa on viisi solmua ja neljä kaarta.

Suunnattu verkko

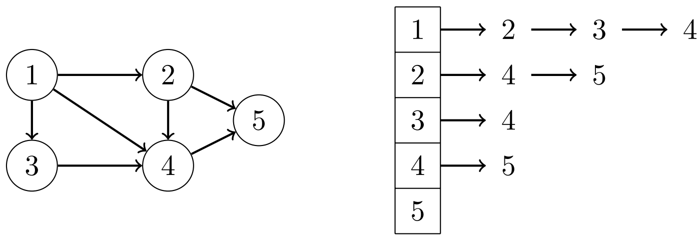
Suunnatussa verkossa jokaisella kaarella on tietty suunta, jonka mukaisesti meidän täytyy kulkea kaarta pitkin. Suunnat rajoittavat siis kulkemistamme verkossa. Kuvassa 10.6 on esimerkkinä suunnattu verkko, jossa voimme kulkea solmusta 1 solmuun 5 polkua $1 \to 2 \to 5$, mutta emme voi kulkea mitenkään solmusta 5 solmuun 1.

Painotettu verkko

Painotetussa verkossa jokaiseen kaareen liittyy jokin paino, joka kuvaa tyypillisesti kaaren pituutta. Kun kuljemme polkua painotetussa verkossa, polun pituus on kaarten painojen summa. Kuvassa 10.7 on esimerkkinä painotettu verkko, jossa polun $1 \to 2 \to 5$ paino on $5 + 8 = 13$ ja polun $1 \to 3 \to 4 \to 5$ paino on $2 + 4 + 3 = 9$.



Kuva 10.7: Painotettu verkko.



Kuva 10.8: Verkon vieruslistaesitys.

10.2 Verkot ohjelmoinnissa

Verkon esittämiseen ohjelmoinnissa on monia mahdollisuuksia. Sopivan esitystavan valintaan vaikuttaa, miten haluamme käsitellä verkkoa algoritmissa, koska jokaisessa esitystavassa on omat etunsa. Seuraavaksi käymme läpi kolme tavallista esitystapaa.

10.2.1 Vieruslistaesitys

Vieruslistaesityksessä luomme kullekin verkon solmulle *vieruslistan*, joka kertoo, mihin solmuihin voimme siirtyä solmusta kaaria pitkin. Kuva 10.8 näyttää esimerkkinä verkon ja sitä vastaavan vieruslistaesityksen. Jos haluamme tallentaa verkon vieruslistoina Javassa, voimme luoda taulukon

```
ArrayList<Integer>[] verkko = new ArrayList<>[n+1];
```

ja alustaa vieruslistat näin:

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    verkko[i] = new ArrayList<>();
}
```

Tämän jälkeen lisäämme kaaret listoille näin:

```
verkko[1].add(2);
verkko[1].add(3);
verkko[1].add(4);
verkko[2].add(4);
verkko[2].add(5);
verkko[3].add(4);
verkko[4].add(5);
```

Vieruslistaesitys on monessa tilanteessa hyvä tapa tallentaa verkko, koska haluamme usein selvittää, mihin solmuihin pääsemme siirtymään tietystä solmusta kaaria pitkin. Esimerkiksi seuraava koodi käy läpi solmut, joihin voimme siirtyä solmusta x kaarella:

```
for (Integer s : verkko[x]) {
    // käsittele solmu s
}
```

Jos verkko on suuntaamaton, eli voimme kulkea kaaria molempiin suuntiin, voimme tallentaa verkon vastaavalla tavalla, kunhan tallennamme kunkin kaaren molempiin suuntiin. Jos taas verkko on painotettu, voimme tallentaa jokaisesta kaaresta sekä kohdesolmun että painon.

10.2.2 Kaarilistaesitys

Kaarilistaesityksessä luomme listan, jossa on kaikki verkon kaaret. Javassa voimme luoda listan

```
ArrayList<Kaari> kaaret = new ArrayList<>();
```

jossa on seuraavanlaisia kaaria:

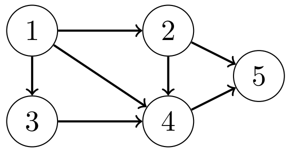
```
public class Kaari {
    public int alku, loppu;

    public Kaari(int alku, int loppu) {
        this.alku = alku;
        this.loppu = loppu;
    }
}
```

Seuraava koodi luo esimerkkiverkkoamme vastaavan kaarilistan:

```
kaaret.add(new Kaari(1,2));
kaaret.add(new Kaari(1,3));
kaaret.add(new Kaari(1,4));
kaaret.add(new Kaari(2,4));
kaaret.add(new Kaari(2,5));
kaaret.add(new Kaari(3,4));
kaaret.add(new Kaari(4,5));
```

Kaarilista on hyvä esitystapa algoritmeissa, joissa haluamme pystyä käymään helposti läpi kaikki verkon kaaret eikä ole tarvetta selvittää tietystä solmusta lähteviä kaaria.



	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	0
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0

Kuva 10.9: Verkon vierusmatriisiesitys.

10.2.3 Vierusmatriisiesitys

Vierusmatriisi on kaksiulotteinen taulukko, joka kertoo jokaisesta verkon kaaresta, esiintyykö se verkossa. Tavallinen tapa on muodostaa vierusmatriisi niin, että sen jokainen alkio on 0 tai 1. Jos verkossa pääsee kaarella solmusta a solmuun b, niin matriisin rivin a sarakkeessa b lukee 1, ja muuten 0. Kuvassa 10.9 on esimerkki verkon vierusmatriisiesityksestä.

Javassa voimme määritellä vierusmatriisin seuraavasti:

```
int[][] verkko = new int[n+1][n+1];
```

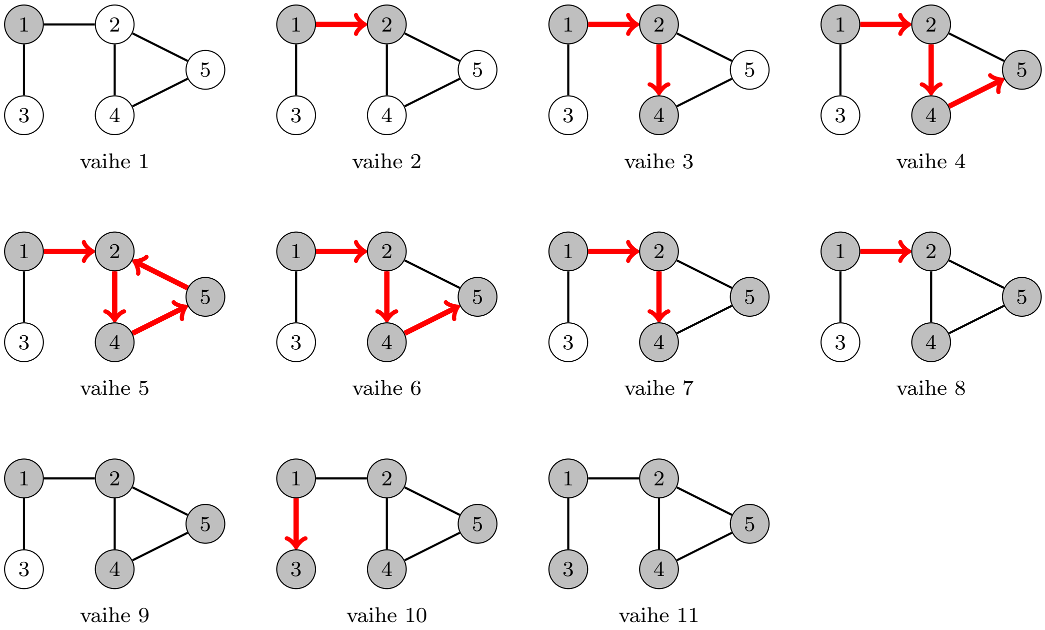
Tämän jälkeen merkitsemme, miten voimme kulkea solmujen välillä kaaria pitkin:

```
verkko[1][2] = 1;
verkko[1][3] = 1;
verkko[1][4] = 1;
verkko[2][4] = 1;
verkko[2][5] = 1;
verkko[3][4] = 1;
verkko[4][5] = 1;
```

Vierusmatriisin etuna on, että voimme tarkastaa helposti, onko tietty kaari verkossa. Esitystapa kuluttaa kuitenkin paljon muistia, eikä sitä voi käyttää, jos verkon solmujen määrä on suuri.

10.3 Verkon läpikäynti

Tutustumme seuraavaksi kahteen keskeiseen verkkoalgoritmiin, jotka käyvät läpi verkossa olevia solmuja ja kaaria. Ensin käsittelemme syvyyshakua, joka on yleiskäyttöinen algoritmi verkon läpikäyntiin, ja sen jälkeen leveyshakua, jonka avulla voimme löytää lyhimpiä polkuja verkossa.



Kuva 10.10: Esimerkki syvyyshaun toiminnasta.

10.3.1 Syvyyshaku

Syvyyshaku on verkkojen käsittelyn yleistyökalu, jonka avulla voimme selvittää monia asioita verkon rakenteesta. Kun alamme tutkia verkkoa syvyyshaulla, meidän tulee päättää ensin, mistä solmusta haku lähtee liikkeelle. Etenemme vuorollaan kaikkiin solmuihin, jotka ovat saavutettavissa lähtösolmusta kulkemalla kaaria pitkin.

Syvyyshaku pitää yllä jokaisesta verkon solmusta tietoa, onko se vielä vieraillut solmussa. Kun haku saapuu solmuun, jossa se ei ole vieraillut aiemmin, se merkitsee solmun vierailluksi ja alkaa käydä läpi solmusta lähteviä kaaria. Jokaisen kaaren kohdalla haku etenee verkon niihin osiin, joihin pääsee kaaren kautta. Lopulta kun haku on käynyt läpi kaikki kaaret, se peräänty taaksepäin samaa reittiä kuin tuli solmuun.

Kuvassa 10.10 on esimerkki syvyyshaun toiminnasta. Jokaisessa vaiheessa harmaat solmut ovat solmuja, joissa haku on jo vieraillut. Tässä esimerkissä lähdemme liikkeelle solmusta 1, josta pääsee kaarella solmuihin 2 ja 3. Etenemme ensin solmuun 2, josta pääsemme edelleen solmuihin 4 ja 5. Koska emme pysty enää etenemään solmusta 5 uusiin solmuihin, peräännymme takaisin kulkemaamme reittiä solmuun 1. Tämän jälkeen käymme vielä solmussa 3, josta ei pääse muihin solmuihin. Nyt olemme käyneet läpi kaikki solmut, joihin pääsee solmusta 1.

Syvyyshaku on mukavaa toteuttaa rekursiivisesti seuraavaan tapaan:

```
function haku(solmu)
    if vierailtu[solmu]
        return
    vierailtu[solmu] = true
    for naapuri in verkko[solmu]
        haku(naapuri)
```

Haku käynnistyy, kun kutsumme funktiota `haku` parametrina haun lähtösolmu. Jokaisessa kutsussa funktio tarkistaa ensin, olemmeko jo käyneet parametrina annetussa solmussa, ja päättyy heti tässä tilanteessa. Muuten funktio merkitsee, että olemme nyt käyneet solmussa ja etenee rekursiivisesti kaikkiin sen naapureihin. Haku vie aikaa $O(n+m)$, koska käsittelemme jokaisen solmun ja kaaren enintään kerran.

Mihin voisimme sitten käyttää syvyyshakua? Seuraavassa on joitakin esimerkkejä syvyyshaun käyttökohteista:

Polun etsiminen

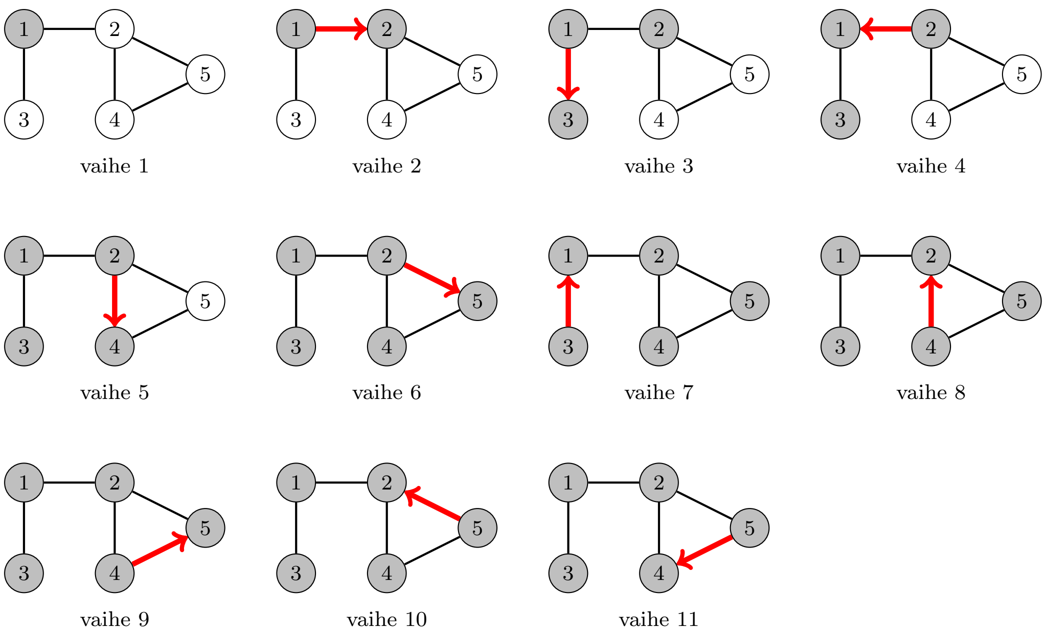
Syvyyshaun avulla voimme etsiä verkosta polun solmusta a solmuun b, jos tällainen polku on olemassa. Tämä tapahtuu aloittamalla haku solmusta a ja pysähtymällä, kun vastaan tulee solmu b. Jos polkuja on useita, syvyyshaku löytää jonkin niistä riippuen solmujen käsittelyjärjestyksestä.

Yhtenäisyys ja komponentit

Suuntaamaton verkko on yhtenäinen, jos kaikki solmut ovat yhteydessä toisiinsa. Voimmekin tarkastaa verkon yhtenäisyyden aloittamalla syvyyshaun jostakin solmusta ja tutkimalla, saavuttaako haku kaikki verkon solmut. Lisäksi voimme löytää verkon yhtenäiset komponentit käymällä läpi solmut ja aloittamalla syvyyshaun aina, kun vastaan tulee uusi solmu. Jokainen syvyyshaku muodostaa yhden komponentin.

Syklin etsiminen

Jos suuntaamaton verkko sisältää syklin, huomaamme tämän syvyyshaun aikana siitä, että tulemme tulemme toista kautta johonkin solmuun, jossa olemme käyneet jo aiemmin. Niinpä löydämme syvyyshaun avulla jonkin verkossa olevan syklin, jos sellainen on olemassa.



Kuva 10.11: Esimerkki leveyshaun toiminnasta.

10.3.2 Leveyshaku

Leveyshaku käy syvyyshaun tavoin läpi kaikki verkon solmut, joihin pääsee kulkemaan kaaria pitkin annetusta lähtösolmusta. Erona on kuitenkin, missä järjestyksessä solmut käydään läpi. Leveyshaku käy solmuja läpi *kerroksittain* niin, että se käsittelee solmut siinä järjestyksessä kuin ne ovat tulleet ensimmäistä kertaa vastaan haun aikana.

Vaikka voisimme käyttää leveyshakua yleisenä algoritmina verkon läpikäyntiin syvyyshaun tavoin, käytämme sitä tavallisesti silloin, kun olemme kiinnostuneita verkon *lyhimmistä poluista*. Leveyshaun avulla pystymme nimittäin määrittämään lyhimmän polun pituuden eli *etäisyyden* lähtösolmusta kuhunkin haun aikana kohtaamaamme solmuun. Tässä oletamme, että polun pituus tarkoittaa sen kaarten määrää eli lyhin polku on mahdollisimman vähän kaaria sisältävä polku.

Kuvassa 10.11 on esimerkki leveyshaun toiminnasta, kun aloitamme haun solmusta 1 lähtien. Käsittelemme ensin solmun 1, josta pääsemme uusiin solmuihin 2 ja 3. Tämä tarkoittaa, että lyhimmät polut solmuihin 2 ja 3 ovat $1 \to 2$ ja $1 \to 3$ eli etäisyys näihin solmuihin on 1. Sitten käsittelemme solmun 2, josta pääsemme uusiin solmuihin 4 ja 5. Tämä tarkoittaa, että lyhimmät polut solmuihin 4 ja 5 ovat $1 \to 2 \to 4$ ja $1 \to 2 \to 5$ eli etäisyys näihin solmuihin on 2. Lopuksi käsittelemme vielä solmut 3, 4 ja 5, joista emme kuitenkaan pääse enää uusiin solmuihin.

Tavallinen tapa toteuttaa leveyshaku on käyttää *jonoa*, jossa on käsittelyä odottavia solmuja. Jonon ansiosta pystymme käymään läpi solmut siinä järjestyksessä kuin olemme löytäneet ne leveyshaun aikana. Oletamme, että jonossa on metodi `enqueue`, joka lisää alkion jonon loppuun, sekä metodi `dequeue`, joka hakee ja poistaa jonon ensimmäisen alkion. Seuraava koodi suorittaa leveyshaun lähtösolmusta `alku` alkaen:

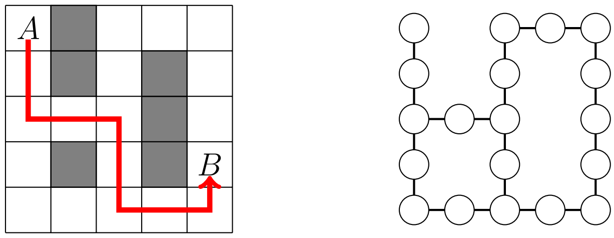
```
jono.enqueue(alku)
vierailtu[alku] = true
etaisyys[alku] = 0
while jono.size() > 0
    solmu = jono.dequeue()
    for naapuri in verkko[solmu]
        if vierailtu[naapuri]
            continue
        jono.enqueue(naapuri)
        vierailtu[naapuri] = true
        etaisyys[naapuri] = etaisyys[solmu]+1
```

Lisäämme ensin jonoon lähtösolmun ja merkitsemme, että olemme vierailleet siinä ja että etäisyys siihen on 0. Tämän jälkeen alamme käsitellä solmuja siinä järjestyksessä kuin ne ovat jonossa. Käsittelemme solmun käymällä läpi sen naapurit. Jos emme ole aiemmin käyneet naapurissa, lisäämme sen jonoon ja päivitämme taulukoita. Haku vie aikaa $O(n+m)$, koska käsittelemme jokaisen solmun ja kaaren enintään kerran.

10.3.3 Esimerkki: Labyrintti

Olemme labyrintissa ja haluamme päästä ruudusta A ruutuun B. Joka askeleella voimme siirtyä yhden ruudun verran ylöspäin, alaspäin, vasemmalle tai oikealle. Pystymmekö pääsemään ruudusta A ruutuun B, ja jos pystymme, mikä on lyhin mahdollinen reitti? Esimerkiksi kuvassa 10.12(a) lyhin reitti ruudusta A ruutuun B muodostuu 9 askeleesta.

Voimme esittää ongelman verkkona niin, että jokainen lattiaruutu on yksi verkon solmuista ja kahden solmun välillä on kaari, jos vastaavat ruudut ovat vierekkäin labyrintissa. Kuva 10.12(b) näyttää esimerkkilabyrinttimme verkkona. Tätä esitystapaa käyttäen ruudusta A on reitti ruutuun B tarkalleen silloin, kun vastaavat verkon solmut kuuluvat samaan yhtenäiseen komponenttiin. Voimme siis tarkastaa syvyyshaulla, onko ruudusta A reittiä ruutuun B. Lyhin reitti ruudusta A ruutuun B löytyy puolestaan leveyshaulla, joka lähtee liikkeelle ruudusta A.



(a) (b)

Kuva 10.12: (a) Lyhin reitti labyrintissa ruudusta A ruutuun B. (b) Labyrintin esittäminen verkkona.

Huomaa, että meidän ei tarvitse erikseen muuttaa labyrinttia verkoksi, vaan voimme toteuttaa haut *implisiittiseen* verkkoon. Tämä tarkoittaa, että teemme haun labyrinttiin sen omassa esitysmuodossa. Käytännössä labyrintti on kätevää tallentaa kaksiulotteisena taulukkona, joka kertoo, mitkä ruudut ovat seinäruutuja. Tällöin voimme toteuttaa esimerkiksi syvyyshaun seuraavan tyylisesti:

```
function haku(y,x)
    if y < 0 or x < 0 or y >= n or x >= n
        return
    if seina[y][x] or vierailtu[y][x]
        return
    vierailtu[y][x] = true
    haku(y+1,x)
    haku(y-1,x)
    haku(y,x+1)
    haku(y,x-1)
```

Luku 11

Lyhimmät polut

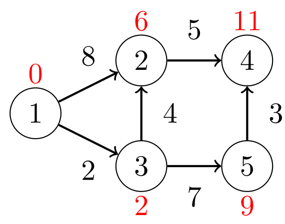
Monissa verkkoihin liittyvissä ongelmissa on kysymys siitä, että haluamme löytää *lyhimmän polun* verkon solmusta toiseen. Esimerkiksi voimme haluta selvittää, mikä on nopein reitti kahden katuosoitteen välillä tai mikä on halvin tapa lentää kaupungista toiseen. Näissä ja muissa sovelluksissa on tärkeää, että löydämme lyhimmän polun tehokkaasti.

Olemme käyttäneet aiemmin leveyshakua lyhimpien polkujen etsimiseen. Tämä onkin hyvä ratkaisu, kun haluamme löytää polut, joiden kaarten määrä on pienin. Tässä luvussa keskitymme kuitenkin vaikeampaan tilanteeseen, jossa verkko on *painotettu* ja haluamme löytää polut, joissa painojen summa on pienin. Tällöin emme voi enää käyttää leveyshakua vaan tarvitsemme kehittyneempiä menetelmiä.

Lyhimpien polkujen etsimiseen painotetussa verkossa on monia algoritmeja, joilla on erilaisia ominaisuuksia. Tässä luvussa käymme läpi ensin Bellman–Fordin algoritmin ja Dijkstran algoritmin, jotka etsivät lyhimmät polut annetusta lähtösolmusta kaikkiin verkon solmuihin. Tämän jälkeen tutustumme Floyd–Warshallin algoritmiin, joka etsii samanaikaisesti lyhimmät polut kaikkien verkon solmujen välillä.

11.1 Lyhimmät polut lähtösolmusta

Tavallisin tilanne käytännön verkko-ongelmissa on, että haluamme löytää lyhimmän polun verkon solmusta toiseen. Yksittäisen lyhimmän polun etsiminen vaatii usein kuitenkin, että etsimme sitä ennen muitakin lyhimpiä polkuja. Niinpä keskitymme alusta asti yleisempään ongelmaan, jossa olemme valinneet jonkin solmun lähtösolmuksi ja haluamme määrittää *jokaiselle* verkon solmulle, kuinka pitkä on lyhin polku lähtösolmusta solmuun eli mikä on solmun etäisyys lähtösolmusta.



Kuva 11.1: Lyhimpien polkujen pituudet solmusta 1 alkaen.

Kuvassa 11.1 on esimerkkinä verkko, jossa lähtösolmuna on solmu 1 ja jokaisen solmun viereen on merkitty sen etäisyys. Esimerkiksi solmun 5 etäisyys on 9, koska lyhin polku solmusta 1 solmuun 5 on $1 \to 3 \to 5$, jonka pituus on $2+7 = 9$. Käytämme tätä verkkoa esimerkkinä, kun tutustumme seuraavaksi kahteen algoritmiin lyhimpien polkujen etsimiseen.

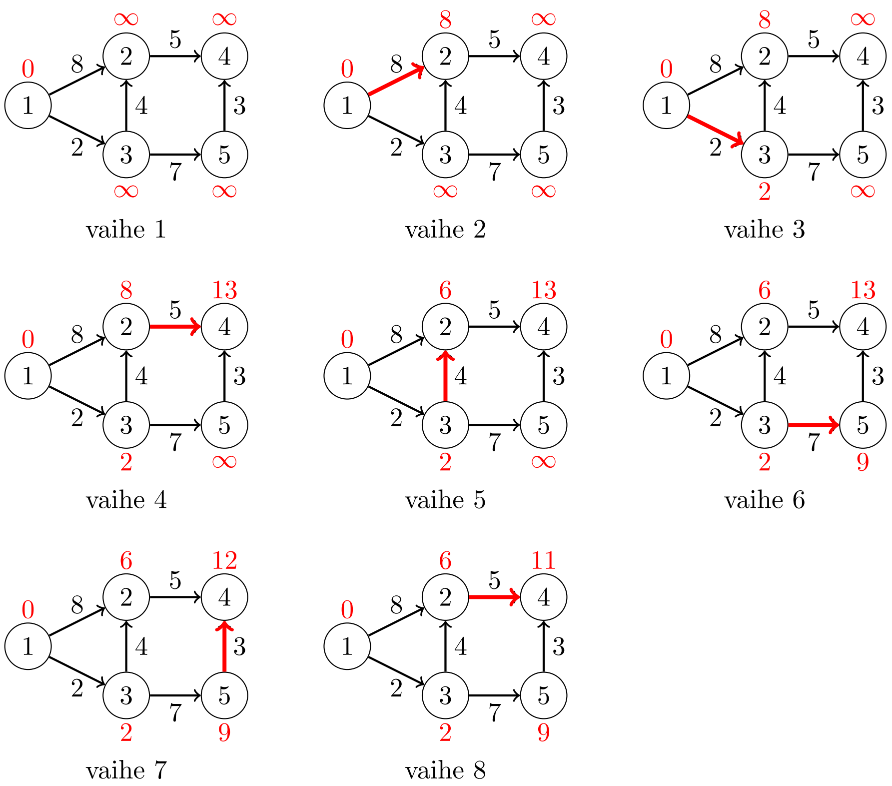
11.1.1 Bellman–Fordin algoritmi

Bellman–Fordin algoritmi etsii lyhimmät polut annetusta lähtösolmusta kaikkiin verkon solmuihin. Algoritmi muodostaa taulukon, joka kertoo jokaiselle verkon solmulle sen etäisyyden lähtösolmusta. Algoritmi toimii missä tahansa verkossa, kunhan verkossa ei ole negatiivista sykliä eli sykliä, jonka painojen summa on negatiivinen.

Bellman–Fordin algoritmi pitää yllä *arvioita* solmujen etäisyyksistä niin, että aluksi etäisyys lähtösolmuun on 0 ja etäisyys kaikkiin muihin solmuihin on ääretön. Tämän jälkeen algoritmi alkaa parantaa etäisyyksiä etsimällä verkosta kaaria, joiden kautta kulkeminen lyhentää polkuja. Jokaisella askeleella algoritmi etsii kaaren $a \to b$, jolle pätee, että pääsemme solmuun b aiempaa lyhempää polkua kulkemalla kaarella solmusta a. Kun mitään etäisyysarviota ei voi enää parantaa, algoritmi päättyy ja kaikki etäisyydet vastaavat todellisia lyhimpien polkujen pituuksia.

Kuva 11.2 näyttää esimerkin Bellman–Fordin algoritmin toiminnasta, kun lähtösolmuna on solmu 1. Jokaisen solmun vieressä on ilmoitettu sen etäisyysarvio: aluksi etäisyys solmuun 1 on 0 ja etäisyys kaikkiin muihin solmuihin on ääretön. Jokainen etäisyyden muutos näkyy kuvassa omana vaiheenaan. Ensin parannamme etäisyyttä solmuun 2 kulkemalla kaarta $1 \to 2$, jolloin etäisyydeksi tulee 8. Sitten parannamme etäisyyttä solmuun 3 kulkemalla kaarta $1 \to 3$, jolloin solmun uudeksi etäisyydeksi tulee 2. Jatkamme samalla tavalla, kunnes emme voi enää parantaa mitään etäisyyttä ja kaikki etäisyydet vastaavat lyhimpien polkujen pituuksia.

Bellman–Fordin algoritmi on mukavaa toteuttaa käyttäen verkon kaarilistaesitystä, jossa jokaisesta kaaresta on tallennettu alku- ja loppusolmu sekä



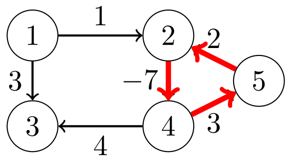
Kuva 11.2: Esimerkki Bellman–Fordin algoritmin toiminnasta.

paino. Toteutamme algoritmin niin, että se muodostuu *kierroksista*, joista jokainen käy läpi kaikki verkon kaaret ja koettaa parantaa etäisyysarvioita niiden avulla. Kuten pian huomaamme, algoritmia riittää suorittaa $n-1$ kierrosta, minkä jälkeen se on varmasti löytänyt kaikki lyhimmät polut. Voimme siis toteuttaa algoritmin seuraavasti:

```
for i = 1 to n-1
    for kaari in kaaret
        nyky = etaisyys[kaari.loppu]
        uusi = etaisyys[kaari.alku]+kaari.paino
        if uusi < nyky
            etaisyys[kaari.loppu] = uusi
```

Algoritmi käy jokaisella kierroksella läpi verkon kaaret ja tutkii kunkin kaaren kohdalla, mikä on nykyinen etäisyys kaaren kohdesolmuun sekä mikä on uusi etäisyys, jos kuljemmekin solmuun kaaren kautta. Jos uusi etäisyys on pienempi, päivitämme sen solmun etäisyysarvioksi.

Olemme nyt kuvailleet ja toteuttaneet Bellman–Fordin algoritmin, mut-



Kuva 11.3: Negatiivinen sykli $2 \to 4 \to 5 \to 2$, jonka avulla voimme lyhentää polkuja loputtomasti.

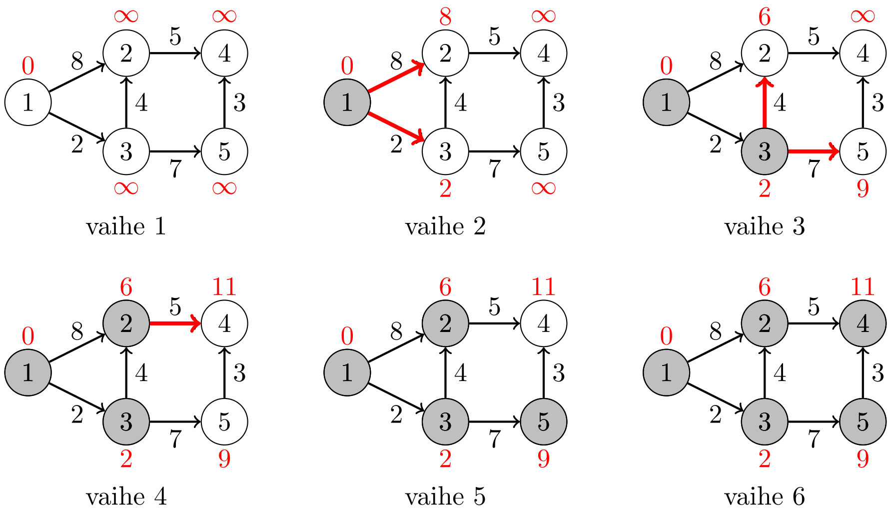
ta miten voimme olla varmoja, että se löytää kaikissa tilanteissa lyhimmät polut $n-1$ kierroksen kuluessa? Jotta voimme vastata tähän kysymykseen, tarvitsemme kaksi havaintoa koskien verkon lyhimpiä polkuja.

Ensimmäinen havainto on, että jos $s_1 \to s_2 \to \cdots \to s_k$ on lyhin polku solmusta s_1 solmuun s_k, niin myös $s_1 \to s_2$ on lyhin polku solmusta s_1 solmuun s_2, $s_1 \to s_2 \to s_3$ on lyhin polku solmusta s_1 solmuun s_3, jne., eli jokainen polun alkuosa on myös lyhin polku vastaavaan solmuun. Jos näin ei olisi, voisimme parantaa lyhintä polkua solmusta s_1 solmuun s_k parantamalla jotain polun alkuosaa, mikä aiheuttaisi ristiriidan.

Toinen havainto on, että n solmun verkossa jokainen lyhin polku voi sisältää enintään $n-1$ kaarta, kun oletamme, että verkossa ei ole negatiivista sykliä. Jos polkuun kuuluisi n tai enemmän kaaria, jokin solmu esiintyisi polulla monta kertaa. Tämä ei ole kuitenkaan mahdollista, koska ei olisi järkeä kulkea monta kertaa saman solmun kautta, kun haluamme saada aikaan lyhimmän polun.

Tarkastellaan nyt, mitä tapahtuu algoritmin kierroksissa. Ensimmäisen kierroksen jälkeen olemme löytäneet lyhimmät polut, joissa on enintään yksi kaari. Toisen kierroksen jälkeen olemme löytäneet lyhimmät polut, joissa on enintään kaksi kaarta. Sama jatkuu, kunnes $n-1$ kierroksen jälkeen olemme löytäneet lyhimmät polut, joissa on enintään $n-1$ kaarta. Koska missään lyhimmässä polussa ei voi olla enempää kaaria, olemme löytäneet kaikki lyhimmät polut. Algoritmin riittää suorittaa siis $n-1$ kierrosta, joista jokainen käy läpi kaikki verkon kaaret ajassa $O(m)$. Niinpä algoritmi löytää kaikki lyhimmät polut ajassa $O(nm)$.

Mitä tapahtuu sitten, jos verkossa on negatiivinen sykli? Esimerkiksi kuvan 11.3 verkossa on negatiivinen sykli $2 \to 4 \to 5 \to 2$, jonka paino on -2. Tässä tilanteessa Bellman–Fordin algoritmi ei anna oikeaa tulosta, koska voimme lyhentää loputtomasti syklin kautta kulkevia polkuja. Oikeastaan ongelma on siinä, että lyhin polku ei ole mielekäs käsite, jos polun osana on negatiivinen sykli. Voimme kuitenkin havaita negatiivisen syklin suorittamalla algoritmia n kierrosta tavallisen $n-1$ kierroksen sijaan. Jos jokin etäisyys paranee vielä viimeisellä kierroksella, olemme löytäneet negatiivisen syklin.



Kuva 11.4: Esimerkki Dijkstran algoritmin toiminnasta.

11.1.2 Dijkstran algoritmi

Dijkstran algoritmi on Bellman–Fordin algoritmin tehostettu versio, jonka toiminta perustuu oletukseen, että verkossa ei ole negatiivisen painoisia kaaria. Bellman–Fordin algoritmin tapaan Dijkstran algoritmi pitää yllä arvioita etäisyyksistä lähtösolmusta muihin solmuihin. Erona on kuitenkin tapa, miten Dijkstran algoritmi parantaa etäisyyksiä.

Dijkstran algoritmissa verkon solmut kuuluvat kahteen luokkaan: käsittelemättömiin ja käsiteltyihin. Aluksi kaikki solmut ovat käsittelemättömiä. Algoritmi etsii joka askeleella käsittelemättömän solmun, jonka etäisyysarvio on pienin. Sitten algoritmi käy läpi kaikki solmusta lähtevät kaaret ja koettaa parantaa etäisyyksiä niiden avulla. Tämän jälkeen solmu on käsitelty eikä sen etäisyys enää muutu, eli aina kun olemme käsitelleet solmun, olemme saaneet selville sen lopullisen etäisyyden.

Kuva 11.4 näyttää esimerkin Dijkstran algoritmin toiminnasta. Solmun harmaa väri tarkoittaa, että se on käsitelty. Aluksi valitsemme käsittelyyn solmun 1, koska sen etäisyys 0 on pienin. Sitten jäljellä ovat solmut 2, 3, 4 ja 5, joista valitsemme käsittelyyn solmun 3, jonka etäisyys 2 on pienin. Tämän jälkeen valitsemme käsittelyyn solmun 2, jonka etäisyys on 6. Sama jatkuu, kunnes olemme käsitelleet kaikki verkon solmut.

Dijkstran algoritmissa etsimme n kertaa käsittelemättömän solmun, jonka etäisyysarvio on pienin. Koska haluamme saada algoritmista tehokkaan, meidän täytyy pystyä löytämään solmut nopeasti. Tavallinen tapa toteuttaa Dijkstran algoritmi on käyttää *kekoa*, jonka avulla löydämme joka vaiheessa pienimmän etäisyyden solmun logaritmisessa ajassa. Tallennamme kekoon pareja, joissa on solmun etäisyys ja tunnus ja jotka järjestetään etäisyyden mukaan pienimmästä suurimpaan. Aluksi keossa on vain lähtösolmua vastaava solmu, jonka etäisyys on 0. Tämän jälkeen haemme joka askeleella keosta solmun, jonka etäisyys on pienin. Jos solmu on jo käsitelty, emme tee mitään. Muuten käymme läpi kaikki solmusta lähtevät kaaret ja tarkastamme, voimmeko parantaa etäisyyksiä niiden avulla. Aina kun voimme parantaa etäisyyttä, lisäämme uuden etäisyyden kekoon.

Dijkstran algoritmi on mukavaa toteuttaa käyttäen verkon vieruslistaesitystä. Voimme toteuttaa algoritmin seuraavasti:

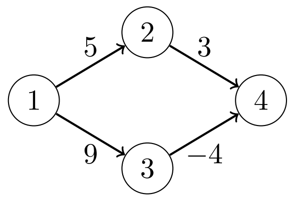
```
keko.push([0,alku])
while not keko.empty()
    solmu = keko.pop()[1]
    if kasitelty[solmu]
        continue
    kasitelty[solmu] = true
    for kaari in verkko[solmu]
        nyky = etaisyys[kaari.loppu]
        uusi = etaisyys[solmu]+kaari.paino
        if uusi < nyky
            etaisyys[kaari.loppu] = uusi
            keko.push([uusi,kaari.loppu])
```

Huomaa, että keossa voi olla samaan aikaan *useita* etäisyyksiä samalle solmulle, koska lisäämme kekoon uuden solmun aina etäisyyden parantuessa. Käsittelemme kuitenkin jokaisen solmun vain kerran, koska aina kun olemme hakeneet uuden solmun keosta käsittelyä varten, varmistamme ensin, että emme ole käsitelleet sitä aiemmin.

Dijkstran algoritmi on ahne algoritmi, koska se valitsee joka vaiheessa käsittelyyn solmun, jonka etäisyys on pienin, minkä jälkeen kyseisen solmun etäisyys ei enää muutu. Miten voimme olla varmoja, että olemme löytäneet tässä vaiheessa oikean etäisyyden?

Voimme ajatella asiaa siltä kannalta, että jos etäisyyttä olisi mahdollista parantaa, niin verkossa olisi oltava jokin toinen vielä käsittelemätön solmu, jonka kautta voisimme muodostaa lyhemmän polun. Kuitenkin tiedämme, että kaikkien muiden tarjolla olevien solmujen etäisyydet ovat suurempia tai yhtä suuria eivätkä etäisyydet voi lyhentyä, koska verkossa ei ole negatiivisia kaaria. Tästä syystä voimme turvallisesti valita käsittelyyn pienimmän etäisyyden solmun ja kiinnittää sen etäisyyden.

Dijkstran algoritmi toimii siis oikein, jos verkossa ei ole negatiivisia kaaria, mutta kuinka nopeasti algoritmi toimii? Ensinnäkin algoritmi käy läpi



Kuva 11.5: Dijkstran algoritmi ei toimi oikein negatiivisen kaaren takia.

verkon solmut ja kaaret, missä kuluu aikaa $O(n+m)$. Lisäksi algoritmissa on joukko kekoon liittyviä operaatioita, jotka vaikuttavat tehokkuuteen. Pahimmassa tapauksessa lisäämme jokaisen kaaren kohdalla kekoon uuden alkion, eli lisäykset kekoon vievät aikaa $O(m \log m)$. Toisaalta poistamme kaikki alkiot aikanaan keosta, mihin menee myös aikaa $O(m \log m)$. Algoritmin kokonaisaikavaativuus on siis $O(n + m \log m)$.

Voimme vielä hieman siistiä aikavaativuutta, kun oletamme, että verkossa ei ole kahta kaarta, joiden alku- ja loppusolmu on sama. Tällöin $m \le n^2$, jolloin $\log m = \log(n^2) = 2 \log n$ ja voimme ilmoittaa algoritmin aikavaativuudeksi muodossa $O(n + m \log n)$.

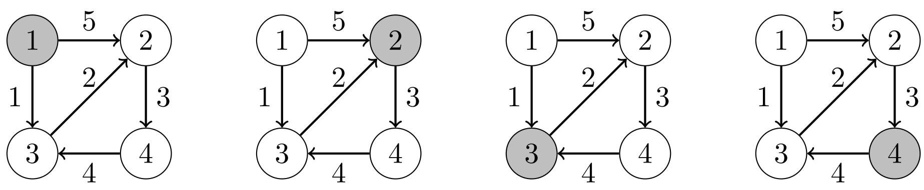
Entä mitä tapahtuu, jos verkossa on kuitenkin negatiivinen kaari? Tällöin Dijkstran algoritmi ei toimi välttämättä oikein. Kuva 11.5 näyttää esimerkin tällaisesta tilanteesta. Algoritmi seuraa ahneesti ylempää polkua ja toteaa, että pienin etäisyys solmusta 1 solmuun 4 on 8. Kuitenkin parempi tapa olisi kulkea alempaa polkua, jolloin polun pituus on vain 5.

11.2 Kaikki lyhimmät polut

Muutamme nyt ongelman asettelua niin, että haluamme etsiä lyhimmät polut verkon *kaikista* solmuista *kaikkiin* solmuihin. Yksi tapa ratkaista tehtävä olisi suorittaa Bellman–Fordin tai Dijkstran algoritmi jokaisesta verkon solmusta alkaen. Voimme kuitenkin ratkaista tehtävän suoremmin etsimällä kaikki polut *samanaikaisesti* Floyd–Warshallin algoritmilla.

11.2.1 Floyd–Warshallin algoritmi

Floyd-Warshallin algoritmi muodostaa $n \times n$ -kokoisen *etäisyysmatriisin*, jossa rivin a sarakkeessa b on lyhimmän polun pituus solmusta a solmuun b. Algoritmi alustaa ensin etäisyysmatriisin niin, että siihen on merkitty vain etäisyydet, jotka toteutuvat kulkemalla yksittäistä kaarta, ja kaikissa muissa matriisin kohdissa etäisyys on ääretön. Sitten algoritmi suorittaa n kierrosta, jotka on numeroitu $1, 2, \ldots, n$. Kierroksella k algoritmi etsii polkuja,



	1	2	3	4
1	0	5	1	∞
2	∞	0	∞	3
3	∞	2	0	∞
4	∞	∞	4	0

kierros 1

	1	2	3	4
1	0	5	1	8
2	∞	0	∞	3
3	∞	2	0	5
4	∞	∞	4	0

kierros 2

	1	2	3	4
1	0	3	1	6
2	∞	0	∞	3
3	∞	2	0	5
4	∞	6	4	0

kierros 3

	1	2	3	4
1	0	3	1	6
2	∞	0	7	3
3	∞	2	0	5
4	∞	6	4	0

kierros 4

Kuva 11.6: Esimerkki Floyd–Warshallin algoritmin toiminnasta.

joissa on välisolmuna solmu k sekä mahdollisesti muita välisolmuja joukosta $1, 2, \ldots, k-1$. Jos tällainen polku parantaa etäisyyttä, päivitämme uuden etäisyyden matriisiin. Lopulta jokainen solmu on ollut välisolmuna poluilla, jolloin olemme saaneet selville kaikki lyhimmät polut.

Kuva 11.6 näyttää esimerkin Floyd–Warshallin algoritmin toiminnasta. Kierroksella 1 etsimme polkuja, joissa solmu 1 on välisolmuna. Tällaisia polkuja ei ole, koska solmuun 1 ei pääse mistään solmusta, joten matriisi ei muutu. Kierroksella 2 huomaamme, että voimme kulkea solmun 2 kautta solmusta 1 solmuun 4, jolloin saamme etäisyyden 8. Samoin voimme kulkea solmun 2 kautta solmusta 3 solmuun 4, jolloin saamme etäisyyden 5. Jatkamme vastaavasti, kunnes kierroksen 4 jälkeen olemme saaneet selville kaikki etäisyydet ja etäisyysmatriisi on lopullinen.

Floyd–Warshallin algoritmin mukavana puolena on, että se on hyvin helppoa toteuttaa. Meidän riittää luoda kolme sisäkkäistä for-silmukkaa, jotka toteuttavat matriisin päivitykset. Seuraavassa koodissa muuttuja k kertoo, mikä kierros on kyseessä eli mitä solmua käytämme välisolmuna. Jokaisella kierroksella käymme läpi kaikki solmuparit (i, j) ja koetamme parantaa niiden etäisyyksiä kulkemalla solmun k kautta.

```
for k = 1 to n
    for i = 1 to n
        for j = 1 to n
            etaisyys[i][j] = min(etaisyys[i][j],
                                 etaisyys[i][k]+etaisyys[k][j])
```

algoritmi n	aikavaativuus	erityistä
leveyshaku	$O(n+m)$	ei salli painoja kaarissa
Bellman–Fordin algoritmi	$O(nm)$	
Dijkstran algoritmi	$O(n+m\log n)$	ei salli negatiivisia kaaria
Floyd–Warshallin algoritmi	$O(n^3)$	etsii kaikki polut

Taulukko 11.1: Algoritmit lyhimpien polkujen etsimiseen.

Algoritmin aikavaativuus on selkeästi $O(n^3)$, koska se muodostuu kolmesta sisäkkäisestä for-silmukasta. Mutta miksi algoritmi onnistuu määrittämään kaikki etäisyydet? Yksi tapa ymmärtää algoritmia on ajatella algoritmin toimintaa "käänteisesti" rekursiivisesti: kun verkossa on lyhin polku solmusta a solmuun b, millainen tämä polku voi olla?

Jos solmu x kuuluu polkuun, meille syntyy kaksi osaongelmaa: meidän tulee etsiä ensin lyhin polku solmusta a solmuun x ja sitten lyhin polku solmusta x solmuun b. Näiden polkujen muodostamisessa voimme jälleen käydä läpi tapauksia, mitkä solmut kuuluvat polkuihin. Esimerkiksi lyhin polku solmusta a solmuun x voi kulkea vuorostaan solmun y kautta, jolloin haluamme etsiä lyhimmät polut solmusta a solmuun y ja solmusta y solmuun x, ja niin edelleen.

Floyd–Warshallin algoritmissa muodostamme joka vaiheessa polkuja, joissa voi olla välisolmuina solmuja $1, 2, \ldots, i$. Kun haluamme muodostaa lyhimmän polun solmusta a solmuun b, meillä on kaksi vaihtoehtoa: Jos solmu i on välisolmuna, yhdistämme lyhimmät polut solmusta a solmuun i ja solmusta i solmuun b. Jos taas solmu i ei ole välisolmuna, olemme käsitelleet polun jo aiemmin. Algoritmin päätteeksi välisolmuina voi olla solmuja $1, 2, \ldots, n$, eli mikä tahansa verkon solmu voi olla välisolmu.

11.2.2 Algoritmien vertailua

Olemme nyt käyneet läpi monia algoritmeja lyhimpien polkujen etsintään ja voimme alkaa muodostaa yleiskuvaa aiheesta. Taulukko 11.1 näyttää yhteenvedon algoritmiemme tehokkuudesta ja ominaisuuksista.

Käytännössä leveyshaku ja Dijkstran algoritmi ovat yleisimmin tarvittavat algoritmit: jos kaarilla ei ole painoja, käytämme leveyshakua, ja muuten Dijkstran algoritmia. Dijkstran algoritmin rajoituksena on, että verkossa ei saa olla negatiivisia kaaria, mutta tällä rajoituksella ei ole yleensä merkitystä käytännön ongelmissa, koska kaarten painot eivät useimmiten voi olla negatiivisia. Esimerkiksi selvästikään tien pituus tai lennon hinta ei voi olla negatiivinen. Jos kuitenkin verkossa voi olla negatiivisia kaaria, voimme turvautua Bellman–Fordin algoritmiin.

Miten sitten Floyd–Warshallin algoritmi vertautuu muihin algoritmeihin? Tämä riippuu siitä, onko verkko *harva* vai *tiheä*. Harvassa verkossa on vähän kaaria ja $m \approx n$, kun taas tiheässä verkossa on paljon kaaria ja $m \approx n^2$. Floyd–Warshallin algoritmi on parhaimmillaan silloin, kun verkko on tiheä, koska sen aikavaativuus ei riipu kaarten määrästä. Esimerkiksi jos etsimme kaikki lyhimmät polut suorittamalla n kertaa Dijkstran algoritmin, harvassa verkossa aikaa kuluu $O(n^2 \log n)$, mutta tiheässä verkossa aikaa kuluu $O(n^3 \log n)$. Siis harvassa verkossa aikavaativuus on parempi kuin Floyd–Warshallin algoritmissa, mutta tiheässä verkossa se on huonompi. Toisaalta Floyd–Warshallin algoritmin vakiokertoimet ovat hyvin pienet sen yksinkertaisen rakenteen ansiosta, minkä ansiosta algoritmi voi toimia käytännössä yllättävänkin nopeasti.

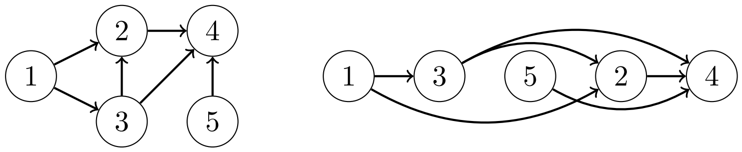
Luku 12

Suunnatut syklittömät verkot

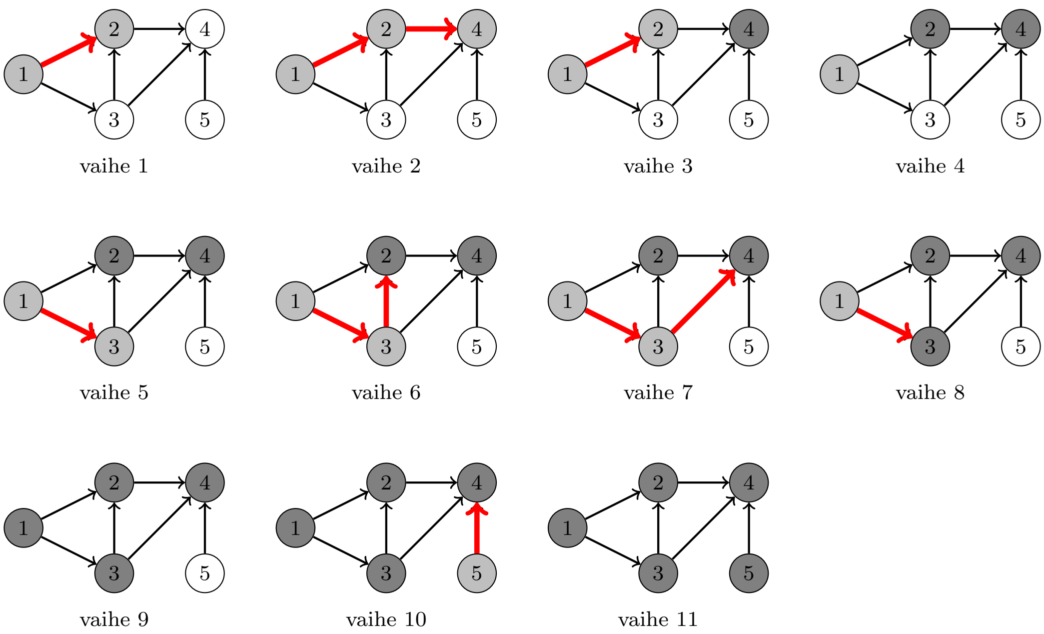
Verkkoalgoritmien suunnittelussa aiheuttavat usein vaikeuksia verkossa olevat syklit, ja monen ongelman ratkaiseminen on vaikeaa nimenomaan sen takia, että meidän täytyy ottaa huomioon, mitä tapahtuu sykleissä. Tässä luvussa katsomme, miten asiat muuttuvat, kun voimmekin olettaa, että käsiteltävänä on suunnattu verkko, jossa *ei ole* syklejä.

Kun verkko on suunnattu ja syklitön, voimme muodostaa sille aina *topologisen järjestyksen*, joka antaa meille luontevan järjestyksen käsitellä verkon solmut niiden riippuvuuksien mukaisesti. Tämän ansiosta voimme hyödyntää dynaamista ohjelmointia verkon polkujen käsittelyssä. Itse asiassa tulemme huomaamaan, että *mikä tahansa* dynaamisen ohjelmoinnin algoritmi voidaan nähdä suunnatun syklittömän verkon käsittelynä.

Entä jos verkossa kuitenkin on syklejä? Osoittautuu, että voimme silti esittää sen syvärakenteen syklittömänä verkkona muodostamalla verkon *vahvasti yhtenäiset* komponentit. Tämän ansiosta voimme tietyissä tilanteissa käsitellä verkkoa mukavasti syklittömän verkon tavoin, vaikka se ei olisikaan alun perin syklitön.



Kuva 12.1: Verkko ja yksi sen topologinen järjestys $[1, 3, 5, 2, 4]$.



Kuva 12.2: Esimerkki topologisen järjestyksen muodostamisesta.

12.1 Topologinen järjestys

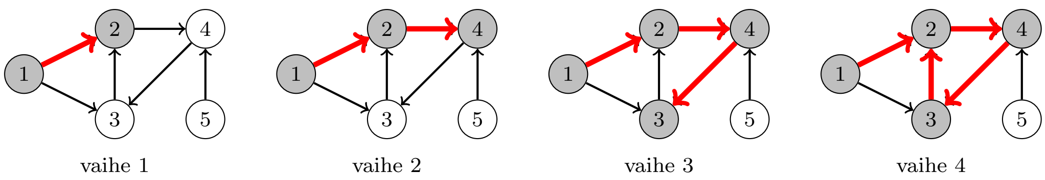
Topologinen järjestys on suunnatun verkon solmujen järjestys, jossa pätee, että jos solmusta a on kaari solmuun b, niin solmu a on ennen solmua b järjestyksessä. Topologinen järjestys voidaan esittää listana, joka ilmaisee solmujen järjestyksen. Kuvassa 12.1 on esimerkkinä verkko ja yksi sen topologinen järjestys $[1, 3, 5, 2, 4]$.

Osoittautuu, että voimme muodostaa suunnatulle verkolle topologisen järjestyksen tarkalleen silloin, kun verkko on syklitön. Tutustumme seuraavaksi tehokkaaseen algoritmiin, joka muodostaa topologisen järjestyksen tai toteaa, ettei järjestystä voi muodostaa verkossa olevan syklin takia.

12.1.1 Järjestyksen muodostaminen

Voimme muodostaa topologisen järjestyksen suorittamalla joukon syvyyshakuja, joissa jokaisella solmulla on kolme mahdollista tilaa:

- tila 0 (valkoinen): solmussa ei ole käyty
- tila 1 (harmaa): solmun käsittely on kesken
- tila 2 (musta): solmun käsittely on valmis



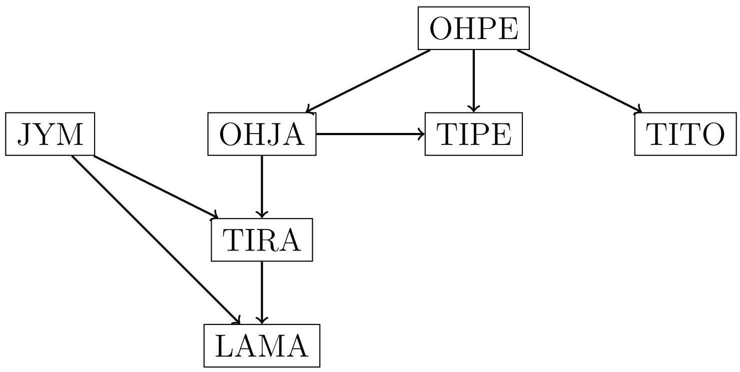
Kuva 12.3: Topologista järjestystä ei voi muodostaa syklin takia.

Algoritmin alussa jokainen solmu on valkoinen. Käymme läpi kaikki verkon solmut ja aloitamme aina syvyyshaun solmusta, jos se on valkoinen. Aina kun saavumme uuteen solmuun, sen väri muuttuu valkoisesta harmaaksi. Sitten kun olemme käsitelleet kaikki solmusta lähtevät kaaret, solmun väri muuttuu harmaasta mustaksi ja lisäämme solmun listalle. Tämä lista käänteisessä järjestyksessä on verkon topologinen järjestys. Kuitenkin jos saavumme jossain vaiheessa toista kautta harmaaseen solmuun, verkossa on sykli eikä topologista järjestystä ole olemassa.

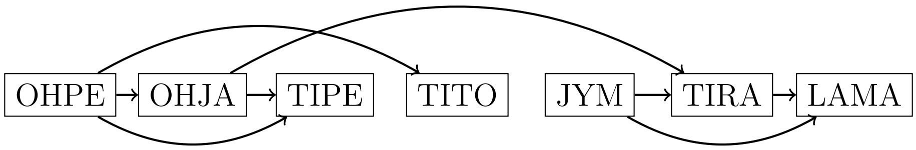
Kuva 12.2 näyttää, kuinka algoritmi muodostaa topologisen järjestyksen esimerkkiverkossamme. Tässä tapauksessa suoritamme kaksi syvyyshakua, joista ensimmäinen alkaa solmusta 1 ja toinen alkaa solmusta 5. Algoritmin tuloksena on lista $[4,2,3,1,5]$, joten käänteinen lista $[5,1,3,2,4]$ on verkon topologinen järjestys. Huomaa, että tämä on eri järjestys kuin kuvassa 12.1 – topologinen järjestys ei ole yksikäsitteinen ja voimme yleensä muodostaa järjestyksen monella tavalla. Kuva 12.3 näyttää puolestaan tilanteen, jossa topologista järjestystä ei voi muodostaa verkossa olevan syklin takia. Tässä verkossa on sykli $2 \to 4 \to 3 \to 2$, jonka olemassaolon huomaamme siitä, että tulemme uudestaan harmaaseen solmuun 2.

Miten voimme tietää, että algoritmimme on toimiva? Tarkastellaan ensin tilannetta, jossa verkossa on sykli. Jos algoritmi saapuu toista reittiä harmaaseen solmuun, on selvää, että verkossa on sykli, koska algoritmi on onnistunut pääsemään harmaasta solmusta itseensä kulkemalla jotain polkua verkossa. Toisaalta jos verkossa on sykli, algoritmi tulee jossain vaiheessa ensimmäistä kertaa johonkin sykliin kuuluvaan solmuun x. Tämän jälkeen se käy läpi solmusta lähtevät kaaret ja aikanaan käy varmasti läpi kaikki syklin solmut ja saapuu uudestaan solmuun x. Niinpä algoritmi tunnistaa kaikissa tilanteissa verkossa olevan syklin.

Jos sitten verkossa ei ole sykliä, algoritmi lisää jokaisen solmun listalle sen jälkeen, kun se on käsitellyt kaikki solmusta lähtevät kaaret. Jos siis verkossa on kaari $a \to b$, solmu b lisätään listalle ennen solmua a. Lopuksi lista käännetään, jolloin solmu a tulee ennen solmua b. Tämän ansiosta jokaiselle kaarelle $a \to b$ pätee, että solmu a tulee järjestykseen ennen solmua b, eli algoritmi muodostaa kelvollisen topologisen järjestyksen.



Kuva 12.4: Kurssien esitietovaatimukset verkkona.



Kuva 12.5: Topologinen järjestys antaa kurssien suoritusjärjestyksen.

12.1.2 Esimerkki: Kurssivalinnat

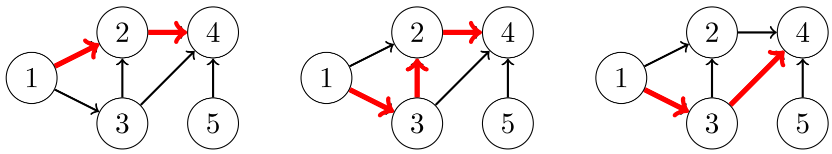
Yliopiston kurssit ja niiden esitietovaatimukset voidaan esittää suunnattuna verkkona, jonka solmut ovat kursseja ja kaaret kuvaavat, missä järjestyksessä kurssit tulisi suorittaa.

Kuvassa 12.4 on esimerkkinä joitakin tietojenkäsittelytieteen kursseja. Tällaisen verkon topologinen järjestys antaa meille yhden tavan suorittaa kurssit esitietovaatimusten mukaisesti. Kuvassa 12.5 näkyy esimerkkinä topologinen järjestys, joka vastaa suoritusjärjestystä OHPE, OHJA, TIPE, TITO, JYM, TIRA, LAMA.

On selvää, että kurssien ja esitietovaatimusten muodostaman verkon tulee olla syklitön, jotta kurssit voi suorittaa halutulla tavalla. Jos verkossa on sykli, topologista järjestystä ei ole olemassa eikä meillä ole mitään mahdollisuutta suorittaa kursseja esitietovaatimusten mukaisesti.

12.2 Dynaaminen ohjelmointi

Kun tiedämme, että suunnattu verkko on syklitön, voimme ratkaista helposti monia verkon polkuihin liittyviä ongelmia *dynaamisen ohjelmoinnin* avulla. Tämä on mahdollista, koska topologinen järjestys antaa meille selkeän järjestyksen, jossa voimme käsitellä solmut.



Kuva 12.6: Mahdolliset polut solmusta 1 solmuun 4.

12.2.1 Polkujen laskeminen

Tarkastellaan esimerkkinä ongelmaa, jossa haluamme laskea, montako polkua verkossa on solmusta a solmuun b. Esimerkiksi kuva 12.6 näyttää tilanteen, jossa haluamme laskea polut solmusta 1 solmuun 4. Tällaisia polkuja on kolme: $1 \to 2 \to 4$, $1 \to 3 \to 2 \to 4$ ja $1 \to 3 \to 4$.

Polkujen määrän laskeminen on vaikea ongelma yleisessä verkossa, jossa voi olla syklejä. Itse asiassa tehtävä ei ole edes mielekäs sellaisenaan: jos verkossa on sykli, voimme kiertää sykliä miten monta kertaa tahansa ja tuottaa aina vain uusia polkuja, joten polkuja tulee äärettömästi. Nyt kuitenkin oletamme, että verkko on syklitön, jolloin polkujen määrä on rajoitettu ja voimme laskea sen tehokkaasti dynaamisella ohjelmoinnilla.

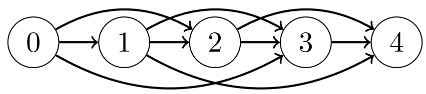
Jotta voimme käyttää dynaamista ohjelmointia, meidän täytyy määritellä ongelma rekursiivisesti. Sopiva funktio on $\texttt{polut}(x)$, joka antaa polkujen määrän solmusta a solmuun x. Tätä funktiota käyttäen $\texttt{polut}(b)$ vastaa tehtävän ratkaisua. Esimerkiksi kuvan 12.6 tilanteessa lähtösolmu on $a = 1$ ja funktion arvot ovat seuraavat:

$$
\begin{aligned}
\texttt{polut}(1) &= 1 \\
\texttt{polut}(2) &= 2 \\
\texttt{polut}(3) &= 1 \\
\texttt{polut}(4) &= 3 \\
\texttt{polut}(5) &= 0
\end{aligned}
$$

Nyt meidän täytyy enää löytää tapa laskea funktion arvoja. Pohjatapauksessa olemme solmussa a, jolloin on aina yksi tyhjä polku:

$$\texttt{polut}(a) = 1$$

Entä sitten, kun olemme jossain muussa solmussa x? Tällöin käymme läpi kaikki solmut, joista pääsemme solmuun x kaarella, ja laskemme yhteen näihin solmuihin tulevien polkujen määrät. Kun oletamme, että solmuun x



Kuva 12.7: Tornitehtävän tapaus $n = 4$ esitettynä verkkona.

on kaari solmuista $u_1, u_2, \ldots, u_k$, saamme seuraavan rekursiivisen kaavan:

$$\texttt{polut}(x) = \texttt{polut}(u_1) + \texttt{polut}(u_2) + \cdots + \texttt{polut}(u_k)$$

Esimerkiksi kuvan 12.6 verkossa solmuun 4 on kaari solmuista 2, 3 ja 5, joten

$$\texttt{polut}(4) = \texttt{polut}(2) + \texttt{polut}(3) + \texttt{polut}(5) = 2 + 1 + 0 = 3.$$

Koska tiedämme, että verkko on syklitön, voimme laskea funktion arvoja tehokkaasti dynaamisella ohjelmoinnilla. Oleellista on, että emme voi joutua koskaan silmukkaan laskiessamme arvoja, ja käytännössä laskemme arvot jossakin solmujen topologisessa järjestyksessä.

12.2.2 Ongelmat verkkoina

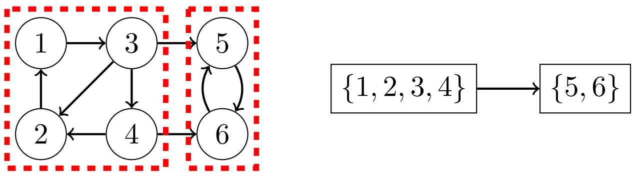
Itse asiassa voimme esittää *minkä tahansa* dynaamisen ohjelmoinnin algoritmin suunnatun syklittömän verkon käsittelynä. Ideana on, että muodostamme verkon, jossa jokainen solmu on yksi osaongelma ja kaaret ilmaisevat, miten osaongelmat liittyvät toisiinsa.

Tarkastellaan esimerkkinä luvusta 9.1 tuttua tehtävää, jossa haluamme laskea, monellako tavalla voimme muodostaa korkeuden n tornin, kun voimme käyttää palikoita, joiden korkeudet ovat 1, 2 ja 3. Voimme esittää tämän tehtävän verkkona niin, että solmut ovat tornien korkeuksia ja kaaret kertovat, kuinka voimme rakentaa tornia palikoista. Jokaisesta solmusta x on kaari solmuihin $x + 1$, $x + 2$ ja $x + 3$, ja polkujen määrä solmusta 0 solmuun n on yhtä suuri kuin tornin rakentamistapojen määrä. Esimerkiksi kuva 12.7 näyttää verkon, joka vastaa tapausta $n = 4$. Solmusta 0 solmuun 4 on yhteensä 7 polkua, eli voimme rakentaa korkeuden 4 tornin 7 tavalla.

Olemme saaneet siis uuden tavan luonnehtia dynaamista ohjelmointia: voimme käyttää dynaamista ohjelmointia, jos pystymme esittämään ongelman suunnattuna syklittömänä verkkona.

12.3 Vahvasti yhtenäisyys

Jos suunnatussa verkossa on sykli, emme voi muodostaa sille topologista järjestystä emmekä käyttää dynaamista ohjelmointia. Mikä neuvoksi, jos kui-



(a) (b)

Kuva 12.8: (a) Verkon vahvasti yhtenäiset komponentit. (b) Komponenttiverkko, joka kuvaa verkon syvärakenteen.

tenkin haluaisimme tehdä näin?

Joskus voimme selviytyä tilanteesta käsittelemällä verkon vahvasti yhtenäisiä komponentteja. Sanomme, että suunnattu verkko on *vahvasti yhtenäinen*, jos mistä tahansa solmusta on polku mihin tahansa solmuun. Voimme esittää suunnatun verkon aina yhtenä tai useampana vahvasti yhtenäisenä komponenttina, joista muodostuu syklitön *komponenttiverkko*. Tämä verkko esittää alkuperäisen verkon syvärakenteen.

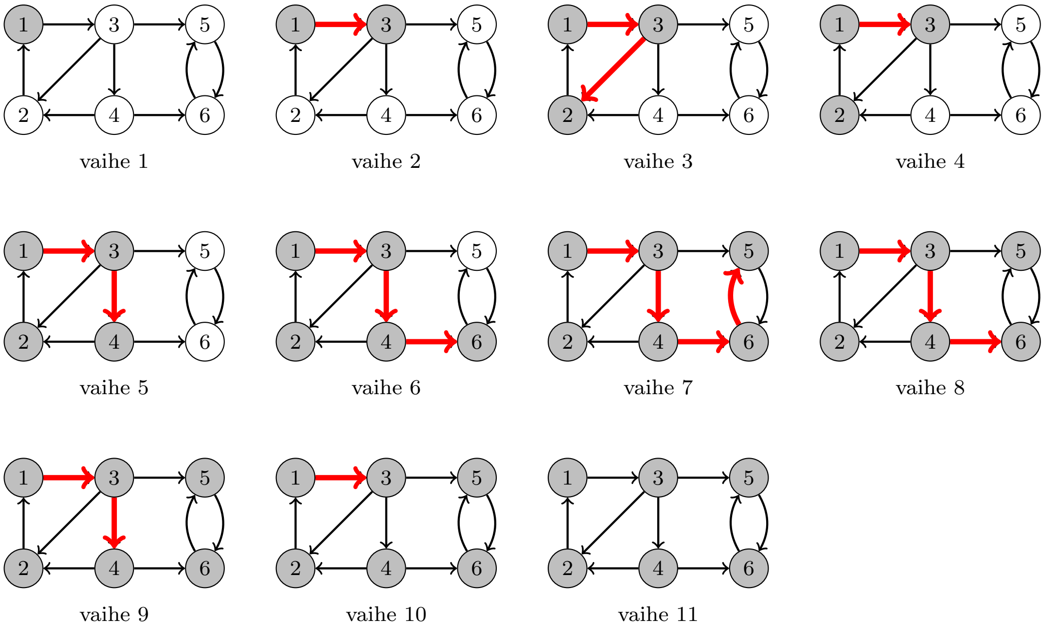
Kuvassa 12.8 on esimerkkinä verkko, joka muodostuu kahdesta vahvasti yhtenäisestä komponentista. Ensimmäinen komponentti on $\{1, 2, 3, 4\}$ ja toinen komponentti on $\{5, 6\}$. Komponenteista muodostuu syklitön komponenttiverkko, jossa on kaari solmusta $\{1, 2, 3, 4\}$ solmuun $\{5, 6\}$. Tämä tarkoittaa, että voimme liikkua miten tahansa joukon $\{1, 2, 3, 4\}$ solmuissa sekä joukon $\{5, 6\}$ solmuissa. Lisäksi pääsemme joukosta $\{1, 2, 3, 4\}$ joukkoon $\{5, 6\}$, mutta emme pääse takaisin joukosta $\{5, 6\}$ joukkoon $\{1, 2, 3, 4\}$.

12.3.1 Kosarajun algoritmi

Kosarajun algoritmi on tehokas algoritmi, joka muodostaa suunnatun verkon vahvasti yhtenäiset komponentit. Algoritmissa on kaksi vaihetta, joista kumpikin käy läpi verkon solmut syvyyshaulla. Ensimmäinen vaihe muistuttaa topologisen järjestyksen etsimistä ja tuottaa listan solmuista. Toinen vaihe muodostaa vahvasti yhtenäiset komponentit tämän listan perusteella.

Algoritmin ensimmäisessä vaiheessa käymme läpi verkon solmut ja aloitamme uuden syvyyshaun aina, jos emme ole vielä käyneet solmussa. Syvyyshaun aikana lisäämme solmun listalle, kun olemme käyneet läpi kaikki solmusta lähtevät kaaret. Toimimme siis kuten topologisen järjestyksen muodostamisessa, mutta emme välitä, jos tulemme toista reittiä solmuun, jota ei ole vielä käsitelty loppuun.

Algoritmin toisen vaiheen alussa käännämme jokaisen verkon kaaren suunnan. Tämän jälkeen käymme läpi käänteisessä järjestyksessä listalla olevat



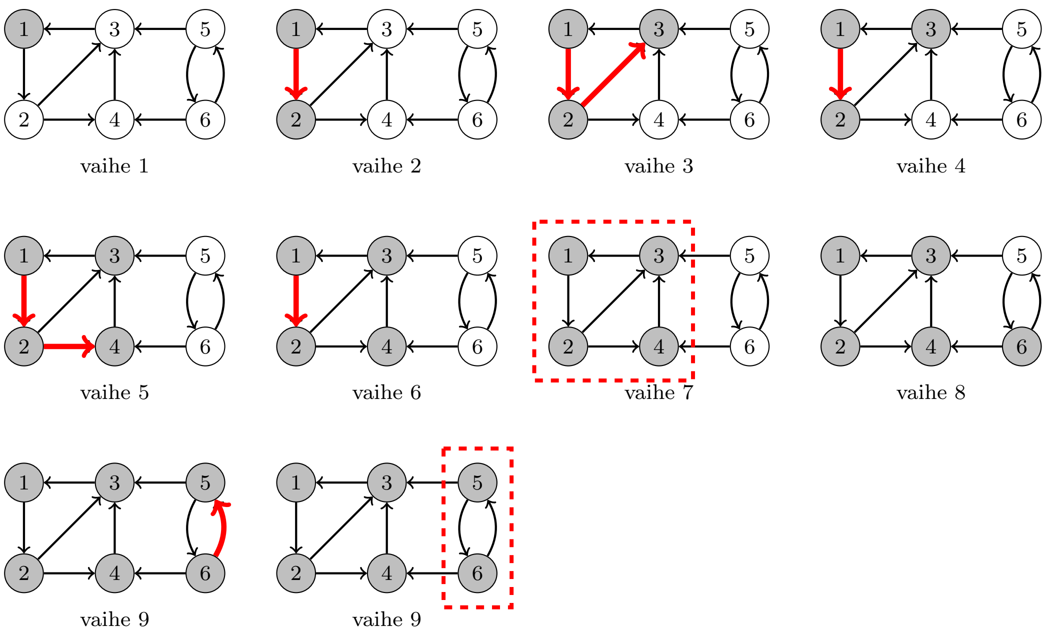
Kuva 12.9: Kosarajun algoritmin ensimmäinen vaihe.

solmut. Aina kun vuoroon tulee solmu, jossa emme ole vielä käyneet, aloitamme siitä solmusta syvyyshaun, joka muodostaa uuden vahvasti yhtenäisen komponentin. Lisäämme komponenttiin kaikki solmut, joihin pääsemme syvyyshaun aikana ja jotka eivät vielä kuulu mihinkään komponenttiin.

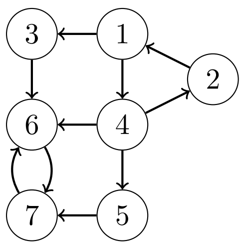
Tarkastellaan seuraavaksi, kuinka Kosarajun algoritmi toimii esimerkkiverkossamme. Kuva 12.9 näyttää algoritmin ensimmäisen vaiheen, joka muodostaa solmuista listan $[2, 5, 6, 4, 3, 1]$. Kuva 12.10 näyttää algoritmin toisen vaiheen, jossa käännämme ensin verkon kaaret ja käymme sitten läpi solmut järjestyksessä $[1, 3, 4, 6, 5, 2]$. Vahvasti yhtenäiset komponentit syntyvät solmuista 1 ja 6 alkaen. Kaarten kääntämisen ansiosta solmusta 1 alkava vahvasti yhtenäinen komponentti ei ”vuoda” solmujen 5 ja 6 alueelle.

Keskeinen kysymys Kosarajun algoritmiin liittyen on, miten voimme olla varmoja, että algoritmin toinen vaihe muodostaa vahvasti yhtenäisiä komponentteja, joihin ei tule ylimääräisiä solmuja.

Voimme tarkastella asiaa muodostettavan komponenttiverkon näkökulmasta. Jos meillä on komponentti A, josta pääsee kaarella komponenttiin B, algoritmin ensimmäisessä vaiheessa jokin A:n solmu lisätään listalle kaikkien B:n solmujen jälkeen. Kun sitten käymme läpi listan käänteisessä järjestyksessä, jokin A:n solmu tulee vastaan ennen kaikkia B:n solmuja. Niinpä alamme rakentaa ensin komponenttia A emmekä mene komponentin B puolelle, koska verkon kaaret on käännetty. Sitten kun myöhemmin muodostam-



Kuva 12.10: Kosarajun algoritmin toinen vaihe.

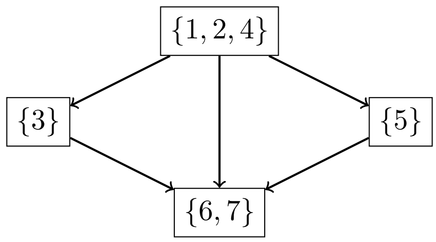


Kuva 12.11: Luolasto, jossa on 7 luolaa ja 10 käytävää. Haluamme kulkea luolasta 1 luolaan 7 keräten mahdollisimman paljon aarteita.

me komponentin B, emme mene käännettyä kaarta komponenttiin A, koska komponentti A on jo muodostettu.

12.3.2 Esimerkki: Luolapeli

Olemme pelissä luolastossa, joka muodostuu n luolasta ja joukosta käytäviä niiden välillä. Jokainen käytävä on yksisuuntainen. Jokaisessa luolassa on yksi aarre, jonka voimme ottaa mukaamme, jos kuljemme luolan kautta. Peli alkaa luolasta 1 ja päättyy luolaan n. Montako aarretta voimme saada, jos valitsemme parhaan mahdollisen reitin? On sallittua kulkea saman luolan kautta monta kertaa tarvittaessa.



Kuva 12.12: Luolaston vahvasti yhtenäiset komponentit.

Voimme mallintaa tilanteen verkkona, jonka solmut ovat luolia ja kaaret ovat käytäviä. Haluamme löytää reitin solmusta 1 solmuun n niin, että kuljemme mahdollisimman monen solmun kautta. Esimerkiksi kuva 12.11 näyttää verkkona luolaston, joka muodostuu seitsemästä luolasta ja kymmenestä käytävästä. Yksi optimaalinen reitti luolasta 1 luolaan 7 on $1 \to 4 \to 2 \to 1 \to 3 \to 6 \to 7$, jota seuraten saamme kerättyä kaikki aarteet paitsi luolassa 5 olevan aarteen. Ei ole olemassa reittiä, jota noudattamalla saisimme haltuumme kaikki luolaston aarteet.

Voimme ratkaista ongelman tehokkaasti määrittämällä ensin verkon vahvasti yhtenäiset komponentit. Tämän jälkeen riittää löytää sellainen polku alkusolmun komponentista loppusolmun komponenttiin, että komponenttien kokojen summa on suurin mahdollinen. Koska verkko on syklitön, tämä onnistuu dynaamisella ohjelmoinnilla.

Kuva 12.12 näyttää vahvasti yhtenäiset komponentit esimerkkiverkossamme. Tästä esityksestä näemme suoraan, että optimaalisia reittejä on olennaisesti kaksi: voimme kulkea joko luolan 3 tai luolan 5 kautta.

Luku 13

Komponentit ja virittävät puut

Tähän mennessä olemme tarkastelleet verkkoja, joiden rakenne säilyy samana koko algoritmin ajan. Mitä tapahtuu sitten, jos verkkoon tuleekin *muutoksia*, kuten lisäämme verkkoon uusia kaaria?

Tutustumme tässä luvussa union-find-rakenteeseen, joka on hyödyllinen työkalu verkkojen käsittelyssä. Rakenteen avulla voimme pitää kirjaa verkon yhtenäisistä komponenteista ja päivittää rakennetta tehokkaasti, kun lisäämme verkkoon kaaria. Voimme esimerkiksi tarkkailla, montako yhtenäistä komponenttia verkossa on milläkin hetkellä.

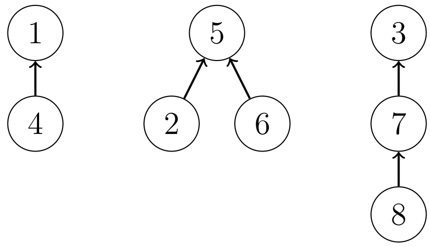
Käsittelemme myös pienimmän virittävän puun ongelmaa, jossa haluamme kytkeä verkon solmut toisiinsa kaaria käyttäen niin, että kaarten yhteispaino on pienin. Voimme ratkaista ongelman tehokkaasti Kruskalin algoritmilla, joka perustuu union-find-rakenteeseen, tai Primin algoritmilla, joka muistuttaa Dijkstran algoritmia.

13.1 Union-find-rakenne

Union-find-rakenne on tietorakenne, joka pitää yllä kokoelmaa alkioiden joukkoja ja tarjoaa seuraavat tehokkaat operaatiot:

- tarkasta, ovatko kaksi alkiota samassa joukossa
- yhdistä kaksi joukkoa samaksi joukoksi

Oletamme, että alkiot ovat $1, 2, \ldots, n$, ja jokainen alkio kuuluu tarkalleen yhteen joukkoon. Esimerkiksi kun $n = 8$, joukot voivat olla vaikkapa $A = \{1, 4\}$, $B = \{2, 5, 6\}$ ja $C = \{3, 7, 8\}$. Kun yhdistämme sitten joukot A ja B, niistä syntyy joukko $\{1, 2, 4, 5, 6\}$. Ennen yhdistämistä alkiot 1 ja 2 olivat eri joukoissa, mutta yhdistämisen jälkeen ne ovat samassa joukossa.



Kuva 13.1: Union-find-rakenne joukoille $\{1, 4\}$, $\{2, 5, 6\}$ ja $\{3, 7, 8\}$.

13.1.1 Rakenteen toteutus

Toteutamme union-find-rakenteen niin, että jokaisessa joukossa yksi alkioista on joukon *edustaja*. Kutakin joukkoa vastaa puu, jonka juurena on joukon edustaja ja muut alkiot viittaavat edustajaan yhden tai useamman kaaren kautta. Kun haluamme tarkastaa, ovatko kaksi alkiota samassa joukossa, selvitämme niiden edustajat ja vertaamme niitä toisiinsa.

Kuvassa 13.1 on esimerkkinä union-find-rakenne, joka vastaa joukkoja $A = \{1, 4\}$, $B = \{2, 5, 6\}$ ja $C = \{3, 7, 8\}$. Tässä tapauksessa joukkojen edustajat ovat 1, 5 ja 3. Esimerkiksi jos haluamme tarkastaa, ovatko alkiot 2 ja 6 samassa joukossa, selvitämme ensin alkioiden edustajat kulkemalla polkuja $2 \to 5$ ja $6 \to 5$. Kummankin alkion edustaja on 5, joten toteamme, että alkiot ovat samassa joukossa.

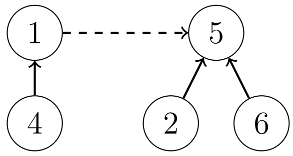
Jotta saamme toteutettua union-find-rakenteen, pidämme yllä jokaiselle alkiolle x arvoa `vanhempi`$[x]$, joka kertoo seuraavan alkion ylempänä puussa. Kuitenkin jos x on joukon edustaja, `vanhempi`$[x] = x$. Esimerkiksi kuvassa 13.1 `vanhempi`$[2] = 5$ ja `vanhempi`$[5] = 5$. Tämän ansiosta pystymme selvittämään alkion x edustajan seuraavasti:

```
function edustaja(x)
    while x != vanhempi[x]
        x = vanhempi[x]
    return x
```

Tämän jälkeen voimme tarkastaa seuraavalla operaatiolla, ovatko alkiot a ja b samassa joukossa. Alkiot ovat samassa joukossa täsmälleen silloin, kun niillä on sama edustaja:

```
function sama(a,b)
    return edustaja(a) == edustaja(b)
```

Haluamme toteuttaa vielä operaation, jolla voimme yhdistää kaksi joukkoa toisiinsa. Tämän operaation toteutus ratkaisee, kuinka tehokas raken-



Kuva 13.2: Tehokas yhdistäminen. Alkion 1 joukon koko on 2 ja alkion 5 joukon koko on 3, joten yhdistämme alkion 1 alkioon 5.

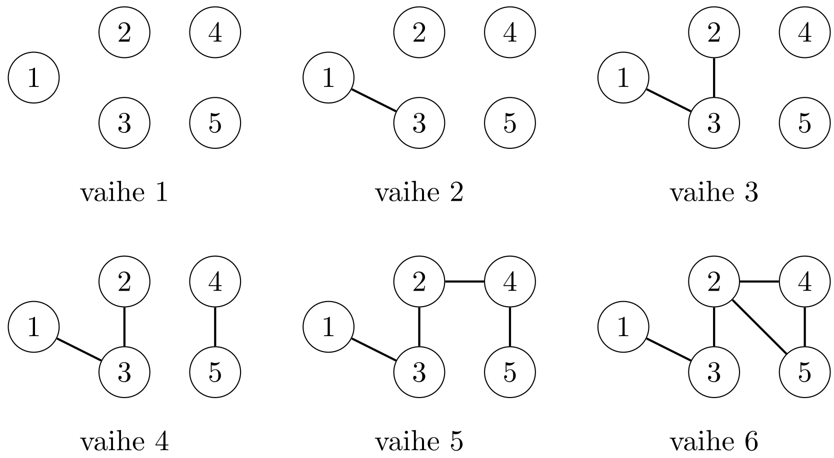
teemme on. Alkion edustajan etsiminen vie aikaa $O(k)$, missä k on polun pituus, joten haluamme toteuttaa yhdistämiset niin, että puussa on vain lyhyitä polkuja. Saavutamme tämän tavoitteen yhdistämällä kaksi joukkoa aina asettamalla *pienemmän* joukon edustajan osoittamaan *suuremman* joukon edustajaan. Jos joukot ovat yhtä suuria, voimme toteuttaa yhdistämisen kummin päin vain.

Kuva 13.2 näyttää, mitä tapahtuu, kun yhdistämme joukot $A = \{1, 4\}$ ja $B = \{2, 5, 6\}$. Joukon A edustaja on 1 ja siinä on kaksi alkiota, kun taas joukon B edustaja on 5 ja siinä on kolme alkiota. Koska joukko A on pienempi, asetamme joukon A edustajan osoittamaan joukon B edustajaan. Tämän jälkeen kaikki alkiot kuuluvat samaan joukkoon ja alkio 5 on tästä lähtien koko joukon edustaja.

Nyt olemme valmiita toteuttamaan operaation, joka yhdistää toisiinsa joukot, joissa on alkiot a ja b. Oletamme, että alkiot ovat eri joukoissa ennen yhdistämistä. Jotta voimme toteuttaa yhdistämisen tehokkaasti, meidän täytyy myös pitää kirjaa kunkin joukon koosta. Seuraavassa toteutuksessa `koko`$[x]$ kertoo, montako alkiota alkion x edustama joukko sisältää.

```
function yhdista(a,b)
    a = edustaja(a)
    b = edustaja(b)
    if koko[a] < koko[b]
        swap(a,b)
    vanhempi[b] = a
    koko[a] += koko[b]
```

Kun toteutamme yhdistämiset tällä tavalla, jokainen puussa esiintyvä polku sisältää vain $O(\log n)$ alkiota. Tämä johtuu siitä, että aina kun kuljemme polkua askeleen ylöspäin alkiosta a alkioon b, `koko`$[b] \geq 2 \cdot$ `koko`$[a]$ eli edustajaa vastaavan joukon koko ainakin *kaksinkertaistuu*. Koska joukossa on enintään n alkiota, kuljemme siis yhteensä enintään $O(\log n)$ askelta. Niinpä kaikki union-find-rakenteen operaatiot toimivat ajassa $O(\log n)$.



Kuva 13.3: Esimerkki kaupunkien yhdistämisestä teillä. Vaiheen 5 jälkeen kaikki kaupungit ovat yhteydessä toisiinsa.

13.1.2 Esimerkki: Kaupungit

Bittimaassa on n kaupunkia, joiden välillä ei ole vielä yhtään tietä. Sitten teitä aletaan rakentaa yksi kerrallaan, yhteensä m tietä. Jokainen tie yhdistää kaksi kaupunkia toisiinsa. Minkä tien rakentamisen jälkeen kaikki kaupungit ovat ensimmäistä kertaa yhteydessä toisiinsa?

Kuva 13.3 näyttää esimerkkitapauksen, jossa $n = 5$, $m = 6$ ja tiet rakennetaan järjestyksessä $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(4, 5)$, $(2, 4)$ ja $(2, 5)$. Kaikki kaupungit ovat yhteydessä toisiinsa vaiheen 5 jälkeen.

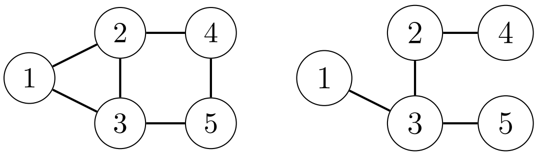
Ratkaisu 1: Union-find-rakenne

Pidämme yllä verkon komponentteja union-find-rakenteen avulla. Aluksi jokainen solmu on omassa komponentissaan eli joukot ovat $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}$. Sitten jokaisen kaaren kohdalla tarkastamme, ovatko sen päätesolmut eri joukoissa, ja jos ovat, yhdistämme joukot. Kun lopulta kaikki solmut ovat samassa joukossa, verkko on tullut yhtenäiseksi.

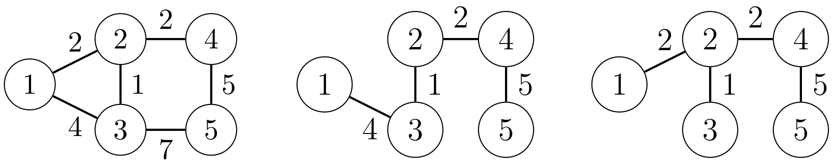
Tuloksena oleva algoritmi vie aikaa $O(n + m \log n)$, koska luomme ensin n komponenttia ajassa $O(n)$ ja käsittelemme tämän jälkeen m kaarta. Jokaisen kaaren kohdalla suoritamme enintään kaksi operaatiota union-find-rakenteessa ajassa $O(\log n)$.

Ratkaisu 2: Binäärihaku

Toinen tapa ratkaista tehtävä on hyödyntää *binäärihakua*. Jos meillä on arvaus, että kaikki kaupungit ovat yhteydessä x lisäyksen jälkeen, voimme tar-



Kuva 13.4: Verkko ja yksi sen virittävistä puista.



Kuva 13.5: Painotettu verkko ja kaksi virittävää puuta, joiden painot ovat $4+1+2+5=12$ ja $2+1+2+5=10$.

kistaa helposti, pitääkö arvaus paikkansa: lisäämme ensin x ensimmäistä tietä tyhjään verkkoon ja tarkastamme sitten, onko verkko yhtenäinen. Tämä vie aikaa $O(n+m)$ käyttäen syvyyshakua.

Jos verkko on yhtenäinen ensimmäistä kertaa vaiheessa k, selvästikin verkko ei ole yhtenäinen vaiheissa $1, 2, \ldots, k-1$ ja on yhtenäinen vaiheissa $k, k+1, \ldots, m$, koska kaarten lisääminen ei voi poistaa verkon yhtenäisyyttä. Tämän ansiosta voimme etsiä arvon k binäärihaun avulla. Binäärihaku suorittaa $O(\log m)$ askelta ja ratkaisu vie aikaa $O((n+m)\log m)$.

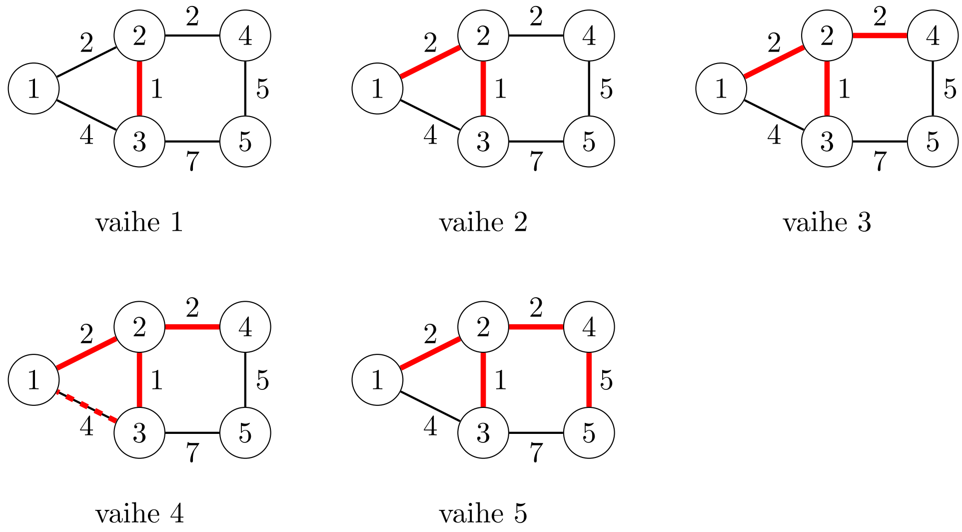
13.2 Pienin virittävä puu

Verkon *virittävä puu* on kokoelma verkon kaaria, jotka kytkevät kaikki verkon solmut toisiinsa. Kuten puut yleensäkin, virittävä puu on yhtenäinen ja syklitön eli jokaisen kahden solmun välillä on yksikäsitteinen polku. Kuvassa 13.4 on esimerkkinä verkko ja yksi sen virittävistä puista.

Jos verkko on painotettu, kiinnostava ongelma on etsiä verkon *pienin virittävä puu*. Tämä on virittävä puu, jonka kaarten painojen summa on mahdollisimman pieni. Esimerkiksi kuvassa 13.5 on painotettu verkko ja kaksi sen virittävää puuta, joiden painot ovat 12 ja 10. Näistä jälkimmäinen on verkon pienin virittävä puu.

13.2.1 Kruskalin algoritmi

Kruskalin algoritmi muodostaa verkon pienimmän virittävän puun aloittamalla tyhjästä verkosta, jossa on vain verkon solmut, ja lisäämällä siihen



Kuva 13.6: Esimerkki Kruskalin algoritmin toiminnasta.

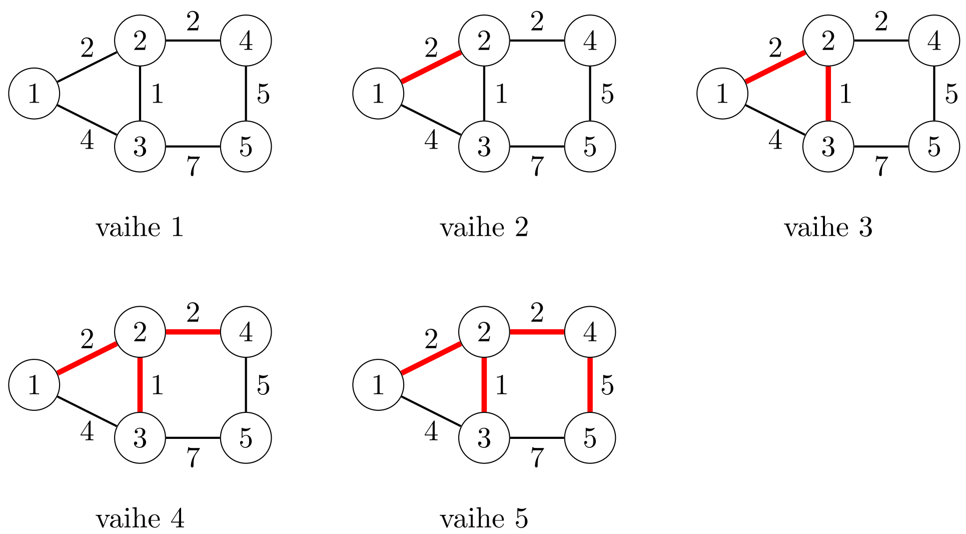
kaaria. Algoritmi käy läpi tarjolla olevat kaaret järjestyksessä niiden painon mukaan kevyimmästä raskaimpaan. Jokaisen kaaren kohdalla algoritmi ottaa kaaren mukaan, jos se yhdistää kaksi eri komponenttia. Kun kaikki komponentit on yhdistetty, pienin virittävä puu on valmis.

Kuva 13.6 näyttää, kuinka Kruskalin algoritmi löytää pienimmän virittävän puun esimerkkiverkossamme. Verkon kaaret järjestyksessä kevyimmästä raskaimpaan ovat:

kaari	paino
$(2,3)$	1
$(1,2)$	2
$(2,4)$	2
$(1,3)$	4
$(4,5)$	5
$(3,5)$	7

Algoritmi käsittelee ensin kaaren $(2,3)$. Solmut 2 ja 3 ovat eri komponenteissa, joten kaari otetaan mukaan puuhun. Tämän jälkeen algoritmi käsittelee kaaret $(1,2)$ ja $(2,4)$, jotka valitaan myös puuhun. Seuraavaksi vuorossa on kaari $(1,3)$, mutta tämä kaari ei tule puuhun, koska solmut 1 ja 3 ovat jo samassa komponentissa. Lopuksi algoritmi ottaa mukaan kaaren $(4,5)$, jolloin pienin virittävä puu on valmis.

Voimme toteuttaa Kruskalin algoritmin tehokkaasti käyttäen union-find-rakennetta. Algoritmin alussa järjestämme kaaret painojärjestykseen, missä



Kuva 13.7: Esimerkki Primin algoritmin toiminnasta.

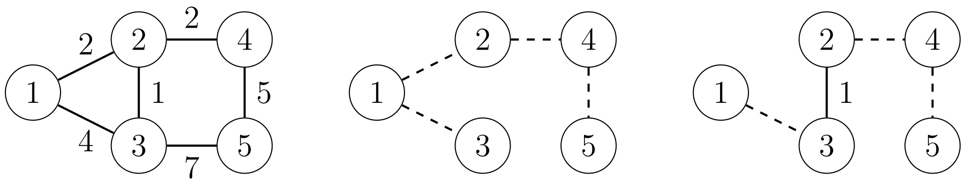
kuluu aikaa $O(m \log m)$. Tämän jälkeen käymme kaaret läpi, ja jokaisen kaaren kohdalla otamme kaaren mukaan, jos se yhdistää kaksi eri komponenttia. Tässä kuluu aikaa $O(m \log n)$, kun käytämme union-find-rakennetta. Algoritmi vie siis yhteensä aikaa $O(m \log m)$.

13.2.2 Primin algoritmi

Primin algoritmi tarjoaa toisen lähestymistavan pienimmän virittävän puun muodostamiseen. Algoritmi aloittaa puun muodostamisen tilanteesta, jossa puussa on vain yksi solmu. Tämän jälkeen se etsii joka vaiheessa kevyimmän kaaren, jonka toinen päätesolmu kuuluu puuhun ja toinen päätesolmu on vielä puun ulkopuolella, ja lisää puuhun tämän kaaren. Kun kaikki solmut on lisätty puuhun, pienin virittävä puu on valmis.

Kuva 13.7 näyttää esimerkin Primin algoritmin toiminnasta. Voimme aloittaa puun rakentamisen mistä tahansa solmusta; tässä esimerkissä aloitamme solmusta 1. Solmuun 1 on yhteydessä kaksi kaarta $(1, 2)$ ja $(1, 3)$, joista valitsemme kaaren $(1, 2)$, koska se on kevyempi. Seuraavaksi tarjolla ovat kaaret $(1, 3)$, $(2, 3)$ ja $(2, 4)$, joista valitsemme kaaren $(2, 3)$. Tämän jälkeen lisäämme puuhun vastaavalla tavalla kaaret $(2, 4)$, $(4, 5)$, minkä jälkeen pienin virittävä puu on valmis.

Primin algoritmi muistuttaa paljon Dijkstran algoritmia. Erona on, että Dijkstran algoritmissa valitsemme seuraavaksi solmun, jonka etäisyys *alkusolmuun* on pienin, mutta Primin algoritmissa valitsemme solmun, jonka etäisyys *johonkin solmuun* puussa on pienin. Voimme myös toteuttaa Pri-



Kuva 13.8: Pienin virittävä puu sisältää varmasti kaaren $(2,3)$, koska muuten voisimme pienentää puun painoa valitsemalla sen.

min algoritmin tehokkaasti samaan tapaan kuin Dijkstran algoritmin keon avulla, jolloin algoritmi vie aikaa $O(m \log n)$.

13.2.3 Miksi algoritmit toimivat?

Kruskalin ja Primin algoritmit ovat ahneita algoritmeja: ne lisäävät joka askeleella kevyimmän mahdollisen kaaren puuhun. Miksi on varmaa, että algoritmit tuottavat pienimmän virittävän puun joka tilanteessa?

Voimme ajatella asiaa näin: Jos meillä on kaksi solmua a ja b, jotka ovat eri komponenteissa, meidän on yhdistettävä ne jotenkin samaan komponenttiin algoritmin aikana. Jos kevyin saatavilla oleva kaari on solmujen a ja b välillä, meidän kannattaa valita se, koska muuten joutuisimme yhdistämään komponentit myöhemmin käyttäen raskaampaa kaarta.

Tarkastellaan esimerkkinä Kruskalin algoritmin alkua: mitä tapahtuu, jos emme valitse puuhun kevyintä kaarta? Kuvassa 13.8 näkyy kuvitteellinen tilanne, jossa katkoviivoilla esitetty pienin virittävä puu ei sisällä kevyintä kaarta $(2,3)$, jonka paino on 1. Ei ole kuitenkaan mahdollista, että tämä olisi todellisuudessa pienin virittävä puu, koska voisimme vaihtaa jonkin puun kaaren kaareen $(2,3)$, jolloin puun paino pienenee. Tämä tarkoittaa, että on varmasti turvallinen ratkaisu valita kevyin kaari puuhun Kruskalin algoritmin alussa. Vastaavasti voimme perustella, miksi tämän jälkeen kannattaa valita seuraavaksi kevyin kaari, jne.

Luku 14

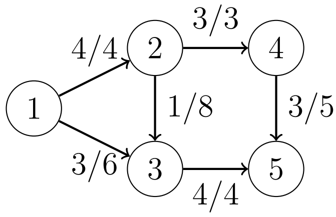
Maksimivirtaus

Tässä luvussa tarkastelemme ongelmaa, jossa haluamme välittää mahdollisimman paljon *virtausta* verkon solmusta toiseen, kun jokaisella kaarella on tietty kapasiteetti, jota emme saa ylittää. Voimme esimerkiksi haluta laskea, kuinka tehokkaasti voimme siirtää tietoa verkossa kahden koneen välillä, kun tiedämme verkon rakenteen ja yhteyksien nopeudet.

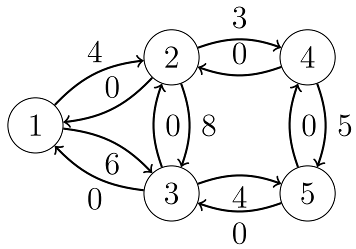
Tutustumme aluksi Ford-Fulkersonin algoritmiin, jonka avulla voimme sekä selvittää maksimivirtauksen että ymmärtää paremmin, mistä ongelmassa on kysymys. Tämän jälkeen tarkastelemme joitakin verkko-ongelmia, jotka pystymme ratkaisemaan *palauttamalla* ongelmat maksimivirtaukseen.

14.1 Maksimivirtauksen laskeminen

Käsittelemme suunnattua verkkoa, jossa on kaksi erityistä solmua: *lähtösolmu* ja *kohdesolmu*. Haluamme muodostaa verkkoon mahdollisimman suuren virtauksen eli *maksimivirtauksen* lähtösolmusta kohdesolmuun niin, että jokaiseen välisolmuun tuleva virtaus on yhtä suuri kuin solmusta lähtevä virtaus. Virtausta rajoittaa, että kullakin verkon kaarella on *kapasiteetti*, jota virtauksen määrä kaarta pitkin ei saa ylittää.



Kuva 14.1: Maksimivirtaus solmusta 1 solmuun 5 on 7.



Kuva 14.2: Verkon esitysmuoto Ford-Fulkersonin algoritmissa.

Kuvassa 14.1 näkyy esimerkkinä verkon maksimivirtaus, kun lähtösolmu on 1 ja kohdesolmu 5. Tässä tapauksessa maksimivirtauksen suuruus on 7. Jokaisessa kaaressa merkintä v/k tarkoittaa, että kaaren kautta kulkee virtausta v ja kaaren kapasiteetti on k. Solmusta 1 lähtevä virtauksen määrä on $4+3=7$, solmuun 5 saapuva virtauksen määrä on $3+4=7$ ja kaikissa muissa solmuissa saapuva virtaus on yhtä suuri kuin lähtevä virtaus.

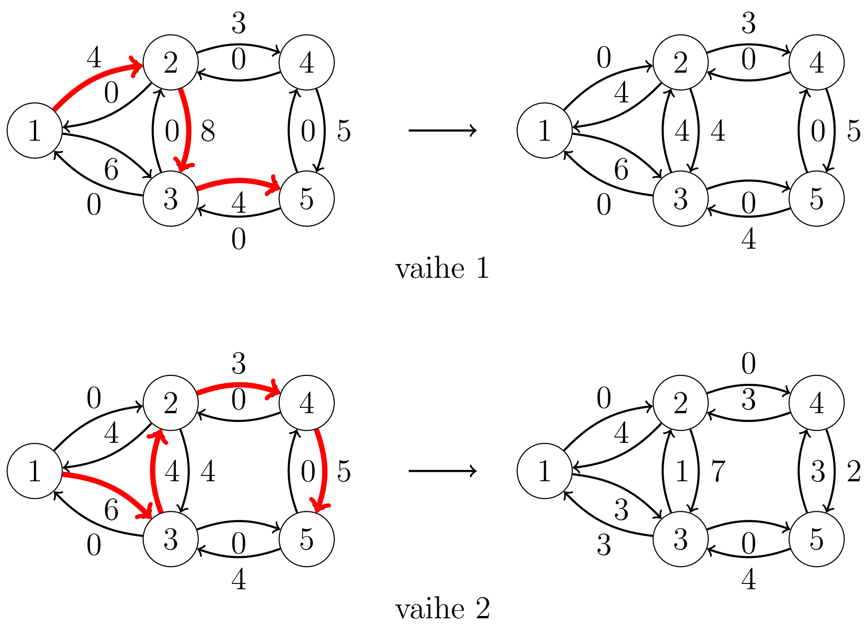
14.1.1 Ford-Fulkersonin algoritmi

Ford-Fulkersonin algoritmi on tavallisin menetelmä verkon maksimivirtauksen etsimiseen, ja tutustumme seuraavaksi tämän algoritmin toimintaan. Algoritmi muodostaa lähtösolmusta kohdesolmuun polkuja, jotka kasvattavat virtausta pikkuhiljaa. Kun mitään polkua ei voi enää muodostaa, algoritmi on saanut valmiiksi maksimivirtauksen.

Jotta voimme käyttää algoritmia, esitämme verkon erityisessä muodossa, jossa jokaista alkuperäisen verkon kaarta vastaa *kaksi* kaarta: alkuperäinen kaari, jonka painona on kaaren kapasiteetti, sekä sille käänteinen kaari, jonka painona on 0. Käänteisten kaarten avulla pystymme tarvittaessa *peruuttamaan* virtausta algoritmin aikana. Kuva 14.2 näyttää, kuinka esitämme esimerkkiverkkomme algoritmissa.

Algoritmin jokaisessa vaiheessa muodostamme polun lähtösolmusta kohdesolmuun. Polku voi olla mikä tahansa, kunhan jokaisen kaaren paino polulla on positiivinen. Polun muodostamisen jälkeen virtaus lähtösolmusta kohdesolmuun kasvaa p:llä, missä p on pienin kaaren paino polulla. Lisäksi jokaisen polulla olevan kaaren paino vähenee p:llä ja jokaisen niille käänteisen kaaren paino kasvaa p:llä. Etsimme tällä tavalla uusia polkuja, kunnes mitään sallittua polkua ei voi enää muodostaa.

Kuva 14.3 näyttää, kuinka Ford-Fulkersonin algoritmi muodostaa maksimivirtauksen esimerkkiverkossamme. Algoritmi muodostaa ensin polun $1 \to 2 \to 3 \to 5$, jossa pienin paino on 4. Tämän seurauksena virtaus kasvaa 4:llä, polulla olevien kaarten paino vähenee 4:llä ja käänteisten kaarten paino kas-



Kuva 14.3: Esimerkki Ford-Fulkersonin algoritmin toiminnasta.

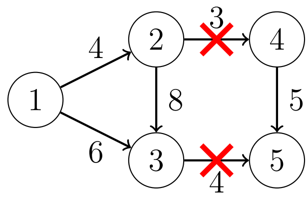
vaa 4:llä. Tämän jälkeen algoritmi muodostaa polun $1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 5$, joka kasvattaa virtausta 3:lla. Huomaa, että tämä polku peruuttaa kaarta $2 \to 3$ menevää virtausta, koska se kulkee käänteisen kaaren $3 \to 2$ kautta. Tämän jälkeen algoritmi ei enää pysty muodostamaan mitään polkua solmusta 1 solmuun 5, joten maksimivirtaus on $4 + 3 = 7$.

Kun olemme saaneet maksimivirtauksen muodostettua, voimme selvittää jokaisessa alkuperäisessä kaaressa kulkevan virtauksen tutkimalla, miten kaaren paino on muuttunut algoritmin aikana. Kaarta pitkin kulkeva virtaus on yhtä suuri kuin kaaren painon vähennys algoritmin aikana. Esimerkiksi kuvassa 14.3 kaaren $4 \to 5$ paino on alussa 5 ja algoritmin suorituksen jälkeen 2, joten kaarta pitkin kulkevan virtauksen määrä on $5 - 2 = 3$.

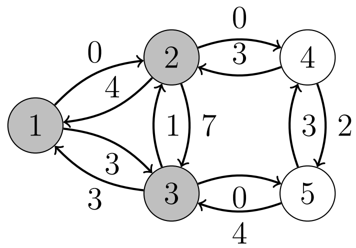
14.1.2 Yhteys minimileikkaukseen

Ford-Fulkersonin algoritmin toimintaidea on sinänsä järkevä, koska polut lähtösolmusta kohdesolmuun kasvattavat virtausta, mutta ei ole silti todellakaan päältä päin selvää, miksi algoritmi löytää varmasti *suurimman* mahdollisen virtauksen. Jotta voimme ymmärtää paremmin algoritmin toimintaa, tarkastelemme seuraavaksi toista verkko-ongelmaa, joka antaa meille uuden näkökulman maksimivirtaukseen.

Lähtökohtanamme on edelleen suunnattu verkko, jossa on lähtösolmu ja



Kuva 14.4: Minimileikkaus, jossa poistamme kaaret $2 \to 4$ ja $3 \to 5$.



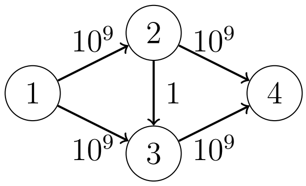
Kuva 14.5: Solmut 1, 2 ja 3 ovat saavutettavissa lähtösolmusta.

kohdesolmu. Sanomme, että joukko kaaria muodostaa *leikkauksen*, jos niiden poistaminen verkosta estää kulkemisen lähtösolmusta kohdesolmuun. *Minimileikkaus* on puolestaan leikkaus, jossa kaarten yhteispaino on mahdollisimman pieni. Kuvassa 14.4 näkyy esimerkkiverkkomme minimileikkaus, jossa poistamme kaaret $2 \to 4$ ja $3 \to 5$ ja jonka paino on $3 + 4 = 7$.

Osoittautuu, että verkon maksimivirtaus on aina yhtä suuri kuin minimileikkaus, ja tämä yhteys auttaa perustelemaan, miksi Ford-Fulkersonin algoritmi toimii. Ensinnäkin voimme havaita, että *mikä tahansa* verkon leikkaus on yhtä suuri tai suurempi kuin maksimivirtaus. Tämä johtuu siitä, että virtauksen täytyy ylittää leikkaukseen kuuluvat kaaret, jotta se pääsee lähtösolmusta kohdesolmuun. Esimerkiksi kuvassa 14.4 virtaus voi päästä solmusta 1 solmuun 5 joko kulkemalla kaarta $2 \to 4$ tai kaarta $3 \to 5$. Niinpä virtaus ei voi olla suurempi kuin näiden kaarten painojen summa.

Toisaalta Ford-Fulkersonin algoritmi muodostaa sivutuotteenaan myös verkon leikkauksen, joka on yhtä suuri kuin maksimivirtaus. Löydämme leikkauksen etsimällä ensin kaikki solmut, joihin pääsemme lähtösolmusta positiivisia kaaria pitkin algoritmin lopputilanteessa. Esimerkkiverkossamme nämä solmut ovat 1, 2 ja 3 kuvan 14.5 mukaisesti. Kun valitsemme sitten alkuperäisen verkon kaaret, jotka johtavat näiden solmujen ulkopuolelle ja joiden kapasiteetti on käytetty kokonaan, saamme aikaan verkon leikkauksen. Esimerkissämme nämä kaaret ovat $2 \to 4$ ja $3 \to 5$.

Koska olemme löytäneet virtauksen, joka on yhtä suuri kuin leikkaus, ja toisaalta virtaus ei voi olla mitään leikkausta suurempi, olemme siis löytäneet



Kuva 14.6: Verkko, joka voi aiheuttaa ongelmia algoritmille.

maksimivirtauksen ja minimileikkauksen, joten Ford-Fulkersonin algoritmi toimii oikein.

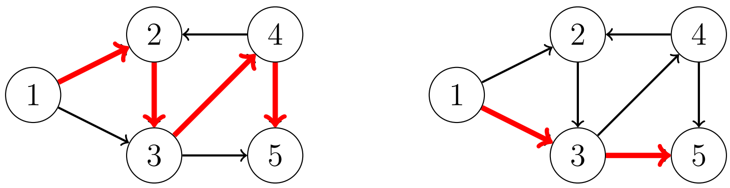
14.1.3 Polkujen valitseminen

Voimme muodostaa polkuja Ford-Fulkersonin algoritmin aikana miten tahansa, mutta polkujen valintatapa vaikuttaa algoritmin tehokkuuteen. Riippumatta polkujen valintatavasta on selvää, että jokainen polku kasvattaa virtausta ainakin *yhdellä* yksiköllä. Niinpä tiedämme, että joudumme etsimään enintään f polkua, kun verkon maksimivirtaus on f. Jos muodostamme polut syvyyshaulla, jokaisen polun muodostaminen vie aikaa $O(m)$, joten saamme algoritmin ajankäytölle ylärajan $O(fm)$.

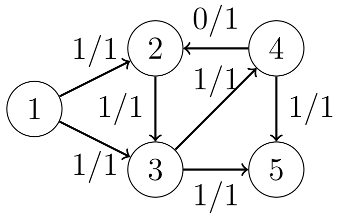
Voiko todella käydä niin, että jokainen polku parantaa virtausta vain yhdellä? Tämä on mahdollista, ja kuva 14.6 tarjoaa esimerkin asiasta. Jos muodostamme polut syvyyshaulla ja valitsemme haussa aina solmun, jonka numero on pienin, muodostamme vuorotellen polkuja $1 \to 2 \to 3 \to 4$ ja $1 \to 3 \to 2 \to 4$ niin, että lisäämme ja peruutamme edestakaisin kaarta $2 \to 3$ kulkevaa virtausta. Tämän vuoksi joudumme muodostamaan $2 \cdot 10^9$ polkua, ennen kuin olemme saaneet selville verkon maksimivirtauksen.

Voimme kuitenkin estää tämän ilmiön määrittelemällä tarkemmin, miten valitsemme polkuja algoritmin aikana. Edmonds-Karpin algoritmi on Ford-Fulkersonin algoritmin versio, jossa muodostamme polut *leveyshaulla*. Tämä tarkoittaa, että valitsemme aina polun, jossa on mahdollisimman vähän kaaria. Leveyshakua käyttäen muodostamme kuvan 14.6 verkossa vain kaksi polkua $1 \to 2 \to 4$ ja $1 \to 3 \to 4$, jotka antavat suoraan maksimivirtauksen.

Kun käytämme Edmonds-Karpin algoritmia, meidän täytyy muodostaa aina vain $O(nm)$ polkua, joten algoritmi vie aikaa $O(nm^2)$. Saamme tämän rajan tarkastelemalla kullakin polulla jotain kaarta, jonka kapasiteetti on käytetty kokonaan polulla. Jotta voimme käyttää kyseistä kaarta uudestaan jollain tulevalla polulla, meidän täytyy sitä ennen peruuttaa virtausta kulkemalla kaarta käänteiseen suuntaan, mikä kasvattaa etäisyyttä lähtösolmusta kaareen. Koska valitsemme polut leveyshaun avulla, kukin m kaaresta voi tämän vuoksi olla vain $O(n)$ kertaa kaarena, jonka kapasiteetti käytetään



Kuva 14.7: Kaksi erillistä polkua solmusta 1 solmuun 5.



Kuva 14.8: Erilliset polut tulkittuna maksimivirtauksena.

kokonaan, ja saamme polkujen määrälle ylärajan $O(nm)$.

14.2 Maksimivirtauksen sovelluksia

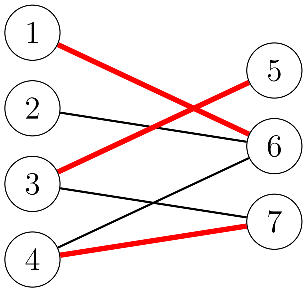
Maksimivirtauksen etsiminen on tärkeä ongelma, koska pystymme *palauttamaan* monia verkko-ongelmia maksimivirtaukseen. Tämä tarkoittaa, että esitämme ongelman jotenkin sellaisessa muodossa, että se vastaa maksimivirtausta. Tutustumme seuraavaksi joihinkin tällaisiin ongelmiin.

14.2.1 Erilliset polut

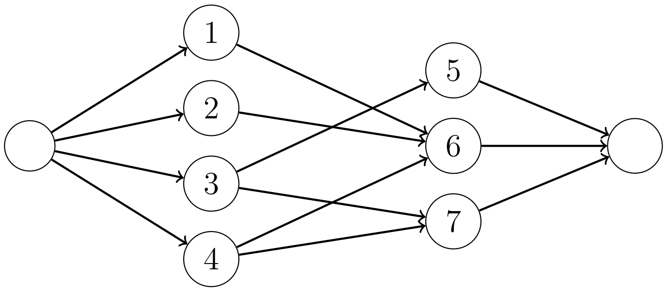
Ensimmäinen tehtävämme on muodostaa mahdollisimman monta *erillistä* polkua verkon lähtösolmusta kohdesolmuun. Erillisyys tarkoittaa, että jokainen verkon kaari saa esiintyä enintään yhdellä polulla. Saamme kuitenkin halutessamme kulkea saman solmun kautta useita kertoja. Esimerkiksi kuvassa 14.7 voimme muodostaa kaksi erillistä polkua solmusta 1 solmuun 5, mutta ei ole mahdollista muodostaa kolmea erillistä polkua.

Voimme ratkaista ongelman tulkitsemalla erilliset polut maksimivirtauksena. Ideana on etsiä maksimivirtaus lähtösolmusta kohdesolmuun olettaen, että jokaisen kaaren kapasiteetti on 1. Tämä maksimivirtaus on yhtä suuri kuin suurin erillisten polkujen määrä. Kuva 14.8 näyttää maksimivirtauksen esimerkkiverkossamme.

Miksi maksimivirtaus ja erillisten polkujen määrä ovat yhtä suuret? Ensinnäkin erilliset polut muodostavat yhdessä virtauksen, joten maksimivir-



Kuva 14.9: Kaksijakoisen verkon maksimiparitus.



Kuva 14.10: Maksimiparitus tulkittuna maksimivirtauksena.

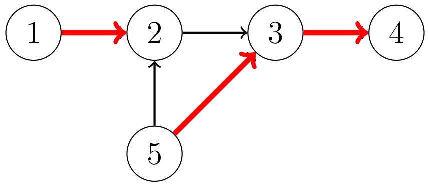
taus ei voi olla pienempi kuin erillisten polkujen määrä. Toisaalta jos verkossa on virtaus, jonka suuruus on k, voimme muodostaa k erillistä polkua valitsemalla kaaria ahneesti lähtösolmusta alkaen, joten maksimivirtaus ei voi olla suurempi kuin erillisten polkujen määrä. Ainoa mahdollisuus on, että maksimivirtaus ja erillisten polkujen määrä ovat yhtä suuret.

14.2.2 Maksimiparitus

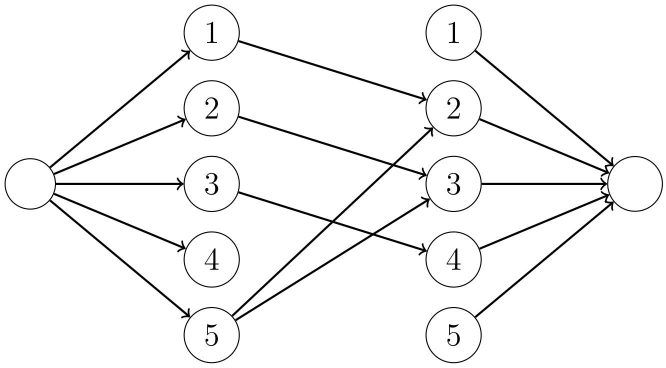
Verkon *paritus* on joukko kaaria, joille pätee, että jokainen solmu on enintään yhden kaaren päätepisteenä. *Maksimiparitus* on puolestaan paritus, jossa on mahdollisimman paljon kaaria. Keskitymme tapaukseen, jossa verkko on *kaksijakoinen* eli voimme jakaa verkon solmut vasempaan ja oikeaan ryhmään niin, että jokainen kaari kulkee ryhmien välillä.

Kuvassa 14.9 on esimerkkinä kaksijakoinen verkko, jonka maksimiparitus on 3. Tässä vasen ryhmä on $\{1, 2, 3, 4\}$, oikea ryhmä on $\{5, 6, 7\}$ ja maksimiparitus muodostuu kaarista $(1, 6)$, $(3, 5)$ ja $(4, 7)$.

Voimme tulkita maksimiparituksen maksimivirtauksena lisäämällä verkkoon kaksi uutta solmua: lähtösolmun ja kohdesolmun. Lähtösolmusta pääsee kaarella jokaiseen vasemman ryhmän solmuun, ja jokaisesta oikean ryhmän solmusta pääsee kaarella kohdesolmuun. Lisäksi suuntaamme alkuperäiset



Kuva 14.11: Polkupeite, joka muodostuu poluista $1 \to 2$ ja $5 \to 3 \to 4$.



Kuva 14.12: Polkupeitteen etsiminen maksimivirtauksen avulla.

kaaret niin, että ne kulkevat vasemmasta ryhmästä oikeaan ryhmään. Kuva 14.10 näyttää tuloksena olevan verkon esimerkissämme. Maksimivirtaus tässä verkossa vastaa alkuperäisen verkon maksimiparitusta.

14.2.3 Pienin polkupeite

Polkupeite on joukko verkon polkuja, jotka kattavat yhdessä kaikki verkon solmut. Oletamme, että verkko on suunnattu ja syklitön, ja haluamme muodostaa mahdollisimman pienen polkupeitteen niin, että jokainen solmu esiintyy tarkalleen yhdessä polussa. Kuvassa 14.11 on esimerkkinä verkko ja sen pienin polkupeite, joka muodostuu kahdesta polusta.

Voimme ratkaista pienimmän polkupeitteen etsimisen ongelman maksimivirtauksen avulla muodostamalla verkon, jossa jokaista alkuperäistä solmua vastaa kaksi solmua: vasen ja oikea solmu. Vasemmasta solmusta on kaari oikeaan solmuun, jos alkuperäisessä verkossa on vastaava kaari. Lisäämme vielä verkkoon lähtösolmun ja kohdesolmun niin, että lähtösolmusta pääsee kaikkiin vasempiin solmuihin ja kaikista oikeista solmuista pääsee kohdesolmuihin. Tämän verkon maksimivirtaus antaa meille alkuperäisen verkon pienimmän solmupeitteen.

Kuva 14.12 näyttää tuloksena olevan verkon esimerkissämme. Ideana on, että maksimivirtaus etsii, mitkä kaaret kuuluvat polkuihin: jos kaari solmusta

a solmuun b kuuluu virtaukseen, niin vastaavasti polkupeitteessä on polku, jossa on kaari $a \to b$. Koska virtauksessa voi olla valittuna vain yksi kaari, joka alkaa tietystä solmusta tai päättyy tiettyyn solmuun, tuloksena on varmasti joukko polkuja. Toisaalta mitä enemmän kaaria saamme laitettua polkuihin, sitä pienempi on polkujen määrä.

Luku 15

NP-ongelmat

Olemme tässä kirjassa tutustuneet menetelmiin, joiden avulla voimme ratkaista tehokkaasti ongelmia. Kuitenkin on myös monia ongelmia, joiden ratkaisemiseen ei tällä hetkellä tunneta mitään tehokasta algoritmia. Jos vastaamme tulee tällainen ongelma, hyvät neuvot ovat kalliit.

Vaikeiden ongelmien yhteydessä esiintyy usein kirjainyhdistelmä NP. Erityisen tunnettu on P vs. NP -ongelma, jonka ratkaisijalle on luvattu miljoonan dollarin potti. Hankalalta tuntuvasta ongelmasta saatetaan arvella, että se on NP-täydellinen tai NP-vaikea. Nyt on aika selvittää, mitä nämä käsitteet oikeastaan tarkoittavat.

15.1 Luokat P ja NP

Keskitymme tässä luvussa *päätösongelmiin*, joissa algoritmin tulee antaa aina vastaus "kyllä" tai "ei". Esimerkiksi ongelma "onko verkossa polkua solmusta a solmuun b?" on päätösongelma. Tulemme huomaamaan, että voimme muotoilla monenlaisia ongelmia päätösongelmina eikä tämä rajoita juurikaan, mitä ongelmia voimme tarkastella.

Luokka P

Luokka P sisältää päätösongelmat, joiden ratkaisemiseen on olemassa *polynominen* algoritmi eli algoritmi, jonka aikavaativuus on enintään $O(n^k)$, missä k on vakio. Lähes kaikki tässä kirjassa esitetyt algoritmit ovat toimineet polynomisessa ajassa. Tuttuja polynomisia aikavaativuuksia ovat esimerkiksi $O(1)$, $O(\log n)$ $O(n)$, $O(n \log n)$, $O(n^2)$ ja $O(n^3)$.

Esimerkiksi ongelma "onko verkossa polkua solmusta a solmuun b?" kuuluu luokkaan P, koska voimme ratkaista sen monellakin tavalla polynomisessa ajassa. Voimme vaikkapa aloittaa syvyyshaun solmusta a ja tarkastaa, pääsemmekö solmuun b. Tuloksena on algoritmi, jolla on polynominen aikavaativuus $O(n+m)$, joten ongelma kuuluu luokkaan P.

Luokan P tarkoituksena on kuvata ongelmia, jotka voimme ratkaista jossain mielessä *tehokkaasti*. Tässä tehokkuuden määritelmä on varsin karkea: pidämme algoritmia tehokkaana, jos sillä on mikä tahansa polynominen aikavaativuus. Onko $O(n^{100})$-aikainen algoritmi siis tehokas? Ei, mutta käytännössä vakio k on yleensä pieni ja polynominen aikavaativuus on osoittautunut toimivaksi tehokkuuden mittariksi.

Luokka NP

Luokka NP sisältää päätösongelmat, joissa jokaisessa "kyllä"-tapauksessa on olemassa *todiste*, jonka avulla voimme *tarkastaa* polynomisessa ajassa, että vastaus todellakin on "kyllä". Todiste on merkkijono, jonka koko on polynominen suhteessa syötteeseen, ja se antaa meille lisätietoa siitä, minkä takia "kyllä"-vastaus pitää paikkansa syötteelle.

Esimerkki luokkaan NP kuuluvasta ongelmasta on "onko verkossa polkua solmusta a solmuun b, joka kulkee tasan kerran jokaisen verkon solmun kautta?". Tämän ongelman ratkaisemiseen ei tunneta polynomista algoritmia, mutta jokaisessa "kyllä"-tapauksessa on olemassa todiste: halutunlainen polku solmusta a solmuun b. Voimme tarkastaa helposti polynomisessa ajassa, että todisteen kuvaamalla polulla on vaaditut ominaisuudet.

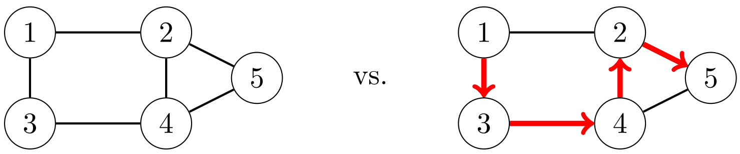
Jos vastaus syötteeseen on "ei", tähän ei tarvitse liittyä mitään todistetta. Usein olisikin hankalaa antaa todiste siitä, että jotain asiaa *ei* ole olemassa. Esimerkiksi jos etsimme verkosta tietynlaista polkua, on helppoa todistaa polun olemassaolo, koska voimme vain näyttää kyseisen polun, mutta ei ole vastaavaa keinoa todistaa, että polkua ei ole olemassa.

Huomaa, että kaikki luokan P ongelmat kuuluvat myös luokkaan NP. Tämä johtuu siitä, että luokan P ongelmissa voimme tarkastaa "kyllä"-vastauksen *tyhjän* todisteen avulla: voimme saman tien ratkaista koko ongelman alusta alkaen polynomisessa ajassa.

P vs. NP

Äkkiseltään tuntuu selvältä, että luokassa NP täytyy olla enemmän ongelmia kuin luokassa P. Luokassa NP meidän riittää vain tarkastaa "kyllä"-vastauksen todiste, mikä tuntuu helpommalta kuin muodostaa ongelman ratkaisu tyhjästä (kuva 15.1). Monet uskovatkin, että luokka NP on suurempi kuin luokka P – mutta kukaan ei ole onnistunut todistamaan asiaa.

Tietojenkäsittelytieteen merkittävä avoin ongelma on, päteekö $P = NP$ vai $P \neq NP$. Monet tutkijat ovat tarttuneet haasteeseen 70-luvulta lähtien,



Kuva 15.1: P vs. NP: Voisiko olla yhtä helppoa muodostaa ratkaisu tyhjästä kuin tarkastaa, onko annettu ratkaisu oikein?

mutta tähän mennessä kaikki ovat epäonnistuneet. Ongelman ratkaisija saisi maineen ja kunnian lisäksi myös tuntuvan rahallisen korvauksen, koska Clay-instituutti on luvannut miljoonan dollarin palkinnon sille, joka todistaa, että P = NP tai P $\neq$ NP. Voi olla kuitenkin, että tämä on yksi *vaikeimmista* tavoista ansaita miljoona dollaria.

Jos pätee P $\neq$ NP, kuten uskotaan, vaikeutena on keksiä keino todistaa, että jotakin luokan NP ongelmaa on mahdotonta ratkaista polynomisessa ajassa. Tämän todistaminen on vaikeaa, koska meidän pitää näyttää, että tehokasta algoritmia ei ole olemassa, vaikka laatisimme algoritmin miten tahansa. Vaikka moni on koettanut tuloksetta ratkoa tunnettuja NP-ongelmia, kysymys saattaa silti olla siitä, että tehokas algoritmi olisi olemassa mutta kukaan ei vain ole vielä löytänyt sitä.

15.2 NP-täydellisyys

Sanomme, että ongelma on *NP-täydellinen*, jos se kuuluu luokkaan NP ja mikä tahansa luokan NP ongelma voidaan *palauttaa* siihen polynomisessa ajassa. NP-täydelliset ongelmat ovat luokan NP vaikeimpia ongelmia: jos voisimme ratkaista jonkin NP-täydellisen ongelman tehokkaasti, voisimme ratkaista minkä tahansa luokan NP ongelman tehokkaasti.

Kiinnostava ilmiö on, että lähes kaikki tunnetut luokan NP ongelmat joko kuuluvat myös luokkaan P tai ovat NP-täydellisiä. Nykyään tunnetaankin tuhansia erilaisia NP-täydellisiä ongelmia. Jos keksisimme mihin tahansa niistä polynomisessa ajassa toimivan ratkaisun, olisimme samalla onnistuneet todistamaan, että P = NP.

15.2.1 SAT-ongelma

Ensimmäinen löydetty NP-täydellinen ongelma oli SAT-ongelma, jossa annettuna on konjunktiivisessa normaalimuodossa oleva looginen kaava ja haluamme selvittää, voimmeko valita muuttujien arvot niin, että kaava on tosi. Konjunktiivinen normaalimuoto tarkoittaa, että kaava koostuu lausekkeista, jotka on yhdistetty ja-operaatiolla ($\wedge$), ja jokainen lauseke muodostuu muuttujista ja niiden negaatioista, jotka on yhdistetty tai-operaatiolla ($\vee$).

Esimerkiksi kaava

$$(\neg x_1 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$$

on mahdollista saada todeksi, koska voimme esimerkiksi asettaa muuttujat x_1 ja x_2 epätosiksi ja muuttujan x_3 todeksi. Vastaavasti kaava

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2)$$

ei ole tosi, vaikka valitsisimme muuttujien arvot miten tahansa.

Kun haluamme osoittaa, että SAT on NP-täydellinen ongelma, meidän täytyy näyttää, että se kuuluu luokkaan NP ja mikä tahansa luokan NP ongelma voidaan palauttaa siihen. Luokkaan NP kuuluminen on helppoa näyttää: "kyllä"-tapauksessa todiste on kullekin muuttujalle valittu arvo. Huomattavasti vaikeampaa on osoittaa, että *jokainen* luokan NP ongelma voidaan palauttaa SAT-ongelmaan polynomisessa ajassa.

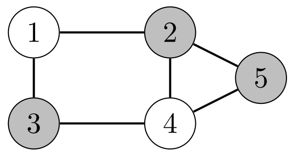
Tässä kirjassa emme käsittele todistusta yksityiskohtaisesti, mutta voimme kuitenkin kuvailla sen perusideaa. Tarkastellaan tiettyä luokan NP ongelmaa, joka meidän täytyy pystyä palauttamaan SAT-ongelmaan. Koska ongelma voi olla mikä tahansa luokkaan NP kuuluva, tiedämme siitä vain, että on olemassa algoritmi, joka tarkastaa polynomisessa ajassa "kyllä"-tapauksen todisteen. Tämä vastaa sitä, että on olemassa *epädeterministinen* Turingin kone, joka ratkaisee ongelman polynomisessa ajassa. Ideana on muodostaa looginen kaava, joka luonnehtii tällaisen Turing-koneen laskentaa "kyllä"-tapauksessa: koneen tulee käsitellä syöte jollakin tavalla niin, että askelten määrä on polynominen. Kaavan tarkka sisältö riippuu siitä, miten kone on rakentunut, mutta voimme aina muodostaa kaavan, kunhan tiedämme koneen rakenteen ja annetun syötteen. Tuloksena on looginen kaava, jonka voi saada todeksi tarkalleen silloin, kun vastaus syötteeseen on "kyllä", joten olemme palauttaneet ongelman SAT-ongelmaan.

15.2.2 Ongelmien palautukset

Nyt kun tiedämme, että SAT-ongelma on NP-täydellinen, voimme alkaa osoittaa muita ongelmia NP-täydellisiksi palautusten avulla. Ideana on, että jos ongelma A on NP-täydellinen ja voimme palauttaa sen polynomisessa ajassa ongelmaksi B, myös ongelma B on NP-täydellinen.

Palautus SAT $\rightarrow$ 3SAT

Aloitamme osoittamalla, että 3SAT-ongelma on NP-täydellinen. 3SAT-ongelma on SAT-ongelman erikoistapaus, jossa jokaisessa $\wedge$-merkeillä yhdistetyssä



Kuva 15.2: Solmut $\{2, 3, 5\}$ muodostavat solmupeitteen.

lausekkeessa on tarkalleen kolme muuttujaa. Esimerkiksi

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

on kelvollinen 3SAT-ongelman syöte. Jotta saamme palautettua SAT-ongelman 3SAT-ongelmaan, meidän on näytettävä, että voimme muuttaa polynomisessa ajassa minkä tahansa SAT-ongelman syötteen 3SAT-ongelman syötteeksi, jonka totuusarvo on sama.

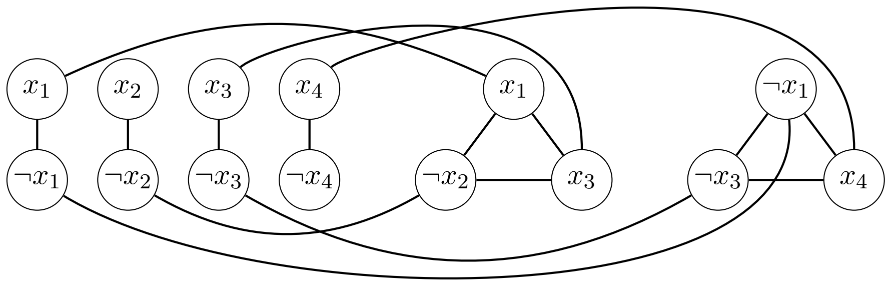
Ideana on muokata jokaista SAT-ongelman lauseketta niin, että tuloksena on yksi tai useampia kolmen muuttujan lausekkeita. Merkitään k:lla lausekkeen muuttujien määrää. Jos $k = 1$ tai $k = 2$, toistamme viimeistä muuttujaa uudestaan, jotta saamme aikaan kolme muuttujaa. Esimerkiksi jos lauseke on (x_1), muutamme sen muotoon $(x_1 \vee x_1 \vee x_1)$, ja jos lauseke on $(x_1 \vee x_2)$, muutamme sen muotoon $(x_1 \vee x_2 \vee x_2)$. Jos $k = 3$, meidän ei tarvitse tehdä mitään, koska lausekkeessa on valmiiksi kolme muuttujaa. Jos sitten $k > 3$, jaamme lausekkeen osiin, jotka ketjutetaan uusien apumuuttujien avulla. Ketjun jokaisessa kohdassa vasemman lausekkeen viimeinen muuttuja on a_i ja oikean lausekkeen ensimmäinen muuttuja on $\neg a_i$. Tämä takaa, että ainakin yksi alkuperäinen muuttuja saa oikean arvon. Esimerkiksi jos lauseke on $(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 \vee x_5)$, muutamme sen kolmeksi lausekkeeksi $(x_1 \vee x_2 \vee a_1)$, $(\neg a_1 \vee x_3 \vee a_2)$ ja $(\neg a_2 \vee x_4 \vee x_5)$.

Tämä palautus osoittaa, että 3SAT on NP-täydellinen ongelma – eli saimme tietää, että SAT-ongelman oleellinen vaikeus syntyy jo siitä, että lausekkeissa voi olla kolme muuttujaa[1]. Palautuksen hyötynä on myös se, että myöhemmissä todistuksissa meidän on helpompaa käsitellä kolmen muuttujan lausekkeita kuin vaihtelevan pituisia lausekkeita.

Palautus 3SAT → solmupeite

Seuraavaksi osoitamme, että on NP-täydellinen ongelma tarkastaa, onko verkossa *solmupeitettä*, jossa on enintään k solmua. Solmupeite on verkon solmujen osajoukko, joka on valittu niin, että jokaisessa kaaressa ainakin toinen

[1] Entä ongelma 2SAT, jossa jokaisessa lausekkeessa on kaksi muuttujaa? Tämä *ei* ole NP-täydellinen ongelma, vaan kuuluu luokkaan P.



Kuva 15.3: Kaava $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4)$ verkkona.

päätesolmu kuuluu solmupeitteeseen. Esimerkiksi kuvassa 15.2 on verkko ja sen solmupeite, johon kuuluu kolme solmua.

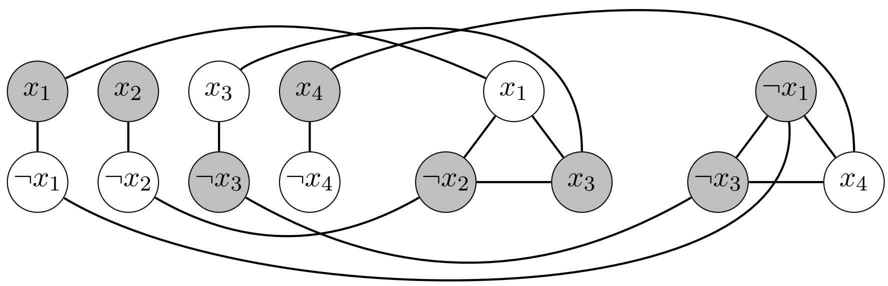
Kun haluamme palauttaa 3SAT-ongelman solmupeiteongelmaan, meidän täytyy näyttää, että voimme tulkita minkä tahansa 3SAT-ongelman tapauksen verkon solmupeitteen etsimisenä. Meidän tulee siis keksiä systemaattinen tapa muuttaa looginen kaava verkoksi, jonka jokin solmupeite vastaa sitä, että kaava on totta.

Oletamme, että kaavassa esiintyy n muuttujaa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ja siinä on m lauseketta. Muodostamme verkon, jossa on ensinnäkin n paria solmuja, jotka vastaavat muuttujia ja niiden negaatioita. Jokaisen solmun x_i ja $\neg x_i$ välillä on kaari. Lisäksi verkossa on m kolmen solmun ryhmää, jotka vastaavat lausekkeita. Kussakin ryhmässä kaikki solmut ovat yhteydessä toisiinsa, minkä lisäksi kukin solmu on yhteydessä sitä vastaavaan solmuun pareissa. Esimerkiksi jos kaava on

$$(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee x_4),$$

muodostamme siitä kuvan 15.3 mukaisen verkon.

Osoittautuu, että voimme saada kaavan todeksi tarkalleen silloin, kun verkossa on solmupeite, jossa on enintään $n+2m$ solmua. Tällaiseen peitteeseen kuuluu toinen solmu jokaisesta parista x_i ja $\neg x_i$, mikä määrittää, miten muuttujien arvot asetetaan. Lisäksi peitteeseen kuuluu kaksi solmua jokaisesta kolmen solmun ryhmästä. Koska ryhmässä on yksi solmu, joka ei kuulu peitteeseen, kyseisen solmun täytyy olla yhteydessä kaarella peitteeseen kuuluvaan solmuun. Tämä varmistaa, että jokaisessa lausekkeessa ainakin yksi kolmesta muuttujasta on asetettu oikein. Kuva 15.4 näyttää esimerkin solmupeitteestä, joka saa kaavan todeksi.



Kuva 15.4: Ratkaisu, jossa x_1, x_2 ja x_4 ovat tosia ja x_3 on epätosi.

Olemme siis onnistuneet palauttamaan 3SAT-ongelman solmupeiteongelmaksi niin, että verkon koko on polynominen suhteessa kaavan pituuteen, joten solmupeiteongelma on NP-täydellinen.

15.2.3 Lisää ongelmia

Palautusten avulla on onnistuttu löytämään tuhansia NP-täydellisiä ongelmia. Esimerkiksi myös seuraavat ongelmat ovat NP-täydellisiä:

- onko verkossa k-kokoista *klikkiä* eli k solmun joukkoa, jossa jokaisen kahden solmun välillä on kaari?
- voimmeko värittää verkon solmut kolmella värillä niin, että jokaisen kaaren päätesolmut ovat erivärisiä?
- onko verkossa polkua, joka kulkee tasan kerran jokaisen verkon solmun kautta (eli *Hamiltonin polkua*)?
- voiko annetuista n luvusta valita osajoukon, jonka summa on x?

Entä millainen olisi ongelma, jonka ei tiedetä kuuluvan luokkaan P eikä olevan NP-täydellinen? Klassinen esimerkki on ongelma, jossa haluamme tutkia, ovatko kaksi verkkoa *isomorfiset* eli onko niiden rakenne samanlainen. Tähän ongelmaan ei tunneta polynomiaikaista algoritmia, mutta ei ole myöskään tiedossa tapaa palauttaa jotain NP-täydellistä ongelmaa siihen.

15.2.4 Optimointiongelmat

Käytännössä haluamme usein ratkaista päätösongelman sijasta *optimointiongelman*: haluamme etsiä pienimmän tai suurimman mahdollisen ratkaisun. Esimerkiksi emme halua tarkastaa, onko verkossa enintään k solmun solmupeitettä (päätösongelma), vaan haluamme etsiä *pienimmän* solmupeitteen (optimointiongelma). Osoittautuu kuitenkin, että päätösongelmat ja optimointiongelmat ovat loppujen lopuksi hyvin lähellä toisiaan.

Oletetaan, että meillä on keino tarkastaa tehokkaasti, onko verkossa enintään k solmun solmupeitettä. Miten voimme menetellä, jos haluammekin etsiä pienimmän solmupeitteen? Ratkaisuna on käyttää *binäärihakua*: etsimme pienimmän arvon x, jolle pätee, että verkossa on enintään x solmun solmupeite. Tämä tarkoittaa, että verkon pienin solmupeite sisältää x solmua. Koska käytämme binäärihakua, meidän riittää ratkaista päätösongelma vain logaritminen määrä kertoja, joten saamme ratkaistua optimointiongelman lähes yhtä tehokkaasti kuin päätösongelman.

Sanomme, että ongelma on *NP-vaikea*, jos voimme palauttaa kaikki luokan NP ongelmat siihen mutta ongelman ei tarvitse itse kuulua luokkaan NP. Jos ongelma on NP-vaikea, se on siis ainakin yhtä vaikea kuin luokan NP vaikeimmat ongelmat. Tyypillisiä NP-vaikeita ongelmia ovat NP-täydellisten päätösongelmien optimointiversiot, koska voimme palauttaa niihin NP-täydellisiä ongelmia mutta ne eivät itse kuulu luokkaan NP.

Käytännössä termejä ei käytetä aina näin täsmällisesti ja optimointiongelmaa saatetaan sanoa NP-täydelliseksi, vaikka se oikeastaan on NP-vaikea. Voimme myös vain puhua yleisesti NP-ongelmista, kun tarkoitamme NP-täydellisiä tai NP-vaikeita ongelmia.

15.3 Ongelmien ratkaiseminen

Jos saamme ratkaistavaksemme NP-ongelman, tilanne ei näytä hyvältä, koska edessämme on silloin ongelma, johon ei tunneta mitään tehokasta algoritmia. Emme voi toivoa, että osaisimme ratkaista tehokkaasti ongelmaa, jota kukaan muukaan ei ole osannut, etenkin kun yleisesti uskotaan, että P $\neq$ NP. Peli ei ole kuitenkaan välttämättä menetetty.

Suoraviivainen tapa koettaa ratkaista NP-ongelmaa on käyttää peruuttavaa hakua, joka käy läpi kaikki mahdolliset ratkaisut raa'alla voimalla. Tässä tulee kuitenkin ongelmaksi haun hitaus, eikä haku löydä välttämättä mitään järkevää ratkaisua alkuvaiheessa. Onneksi voimme käytännössä usein tyytyä siihen, että löydämme nopeasti *melko hyvän* ratkaisun, vaikka se ei olisi optimaalinen. Voimme koettaa muodostaa ratkaisua ahneesti niin, että käytämme sopivaa *heuristiikkaa*, joka ohjaa hakua hyvältä näyttävään suuntaan. Voimme myös hyödyntää *satunnaisuutta* niin, että algoritmi arpoo suuren määrän ratkaisuja ja valitsee niistä parhaan. Näiden ainesten avulla on saatu aikaan käytännössä hyviä ratkaisuja monissa vaikeissa ongelmissa.

Esimerkiksi jos haluamme löytää verkosta suuren klikin, voimme järjestää verkon solmut satunnaiseen järjestykseen ja muodostaa sitten klikin ahneesti käymällä solmut läpi ja lisäämällä solmun klikkiin, jos siitä on kaari kaikkiin klikissä tällä hetkellä oleviin solmuihin. Kun toistamme tätä monta kertaa, löydämme todennäköisesti jonkin klikin, jonka koko on lähellä verkon suurinta klikkiä. Toisaalta emme voi tietää koskaan varmasti, onko suurin löytynyt klikki suurin mahdollinen, koska käymme läpi vain satunnaisia järjestyksiä emmekä kaikkia mahdollisia vaihtoehtoja, mikä olisi liian hidasta.

Joskus voimme saada aikaan NP-ongelmaan *pseudopolynomisen* ratkaisun dynaamisen ohjelmoinnin avulla. Tämä tarkoittaa, että algoritmi näyttää päältä päin polynomiselta, mutta sen tehokkuus perustuu siihen, että teemme oletuksia syötteen lukujen suuruudesta. Tyypillinen esimerkki on NP-täydellinen ongelma, jossa haluamme muodostaa n kokonaisluvusta osajoukon, jonka summa on x. Voimme ratkaista tehtävän dynaamisella ohjelmoinnilla niin, että ratkaisun aikavaativuus on $O(ns)$, missä s on lukujen summa. Tällainen ratkaisu on tehokas monissa käytännön tilanteissa, kunhan s on riittävän pieni. Kuitenkin yleisessä tilanteessa luvut voivat olla suuria emmekä voi enää käyttää dynaamista ohjelmointia.