Unterrichtseinheit zur Drehbewegung

Kräfte bei Drehbewegung (Rotationsdynamik)

Heiko Schröter

3. März 2021

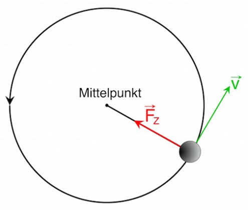
Ziele für die heutige Unterrichtseinheit

Warum werden die Räder von Fahrzeugen ausgewuchtet?

- Was versteht man unter Zentripedalkraft und Zentrifugalkraft?
- Welche Größen bestimmen die Zentrifugalkraft?
- Wie lässt sich der Zusammenhang zwischen Zentripedalbeschleunigung a_z und Winkelgeschwindigkeit ω experimentell bestimmen?
- Was sind technische Anwendungen von Drehbewegung?
- Berechnung von Übungsaufgaben

Die Zentripetalkraft F_p - Kräfte bei Drehbewegung I

Ohne äußere Kraft behält
ein Körper seinen Bewegungszustand
bei, das heißt, er bleibt in Ruhe oder
in geradlinig gleichförmiger Bewegung.
Bei einem Körper, der sich
auf einer Kreisbahn bewegt, ändert sich
jedoch ständig die Richtung. Es muss also
eine Kraft geben, die den Körper auf diese
Kreisbahn zwingt.



Lässt man beispielsweise einen Körper an einem Faden um einen Mittelpunkt herum kreisen, muss man diesen aktiv zum Mittelpunkt ziehen.

Die Zentripetalkraft F_p - Kräfte bei Drehbewegung II

Reißt der Faden, so kann keine Kraft mehr auf den Körper wirken – der Körper bewegt sich dann in die derzeitige Richtung weiter, und zwar geradlinig und tangential zur Kreisbahn.
Die Kraft, die einen Körper auf einer Kreisbahn hält, ist stets zum Kreismittelpunkt gerichtet und heißt Zentripetalkraft F_p. Sie wird in diesem Beispiel vom Kraftmesser gemessen.

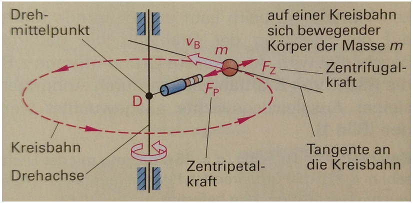


Abbildung: Kräftegleichgewicht $F_p = F_z$

Die Zentripetalkraft F_p - Kräfte bei Drehbewegung III

Die Zentripetalkraft

Die Kraft, die einen Körper auf eine Kreisbahn zwingt, heißt **Zentripetalkraft** F_p. Sie ist stets zum Kreismittelpunkt gerichtet und wirkt immer *senkrecht* auf den momentanen *Geschwindigkeitsvektor*.

Bei der Frage nach den Kräften bei Kreisbewegungen denken die meisten an die *Zentrifugalkraft* F_z. Schließlich hat diese jeder schon gespürt:
Bewegt man sich selbst auf einer Kreisbahn (z.B. in einem Karussell oder in einer engen Kurve), so hat man das Gefühl, dass man dabei nach *außen* gezogen wird. Die Kraft, die einen nach außen zieht, ist die sog. **Zentrifugalkraft** F_z (*Fliehkraft*).

Die Zentripetalkraft F_p - Kräfte bei Drehbewegung IV

Gleichzeitig spürt man jedoch auch die *Zentripetalkraft* F_p, die einen nach innen zieht (z.B. durch den Sitz, den Gurt etc.) und auf der Kreisbahn hält. Es herrscht scheinbar ein *Kräftegleichgewicht* (actio = rectio) zwischen Zentrifugal- und Zentripetalkraft, wodurch es möglich scheint, in Ruhe sitzen zu bleiben.
Für einen außenstehenden ruhenden Beobachter gibt es jedoch keinen Grund, eine nach außen gerichtete Kraft anzunehmen. Er erkennt kein Kräftegleichgewicht, denn für ihn ist die rotierende Person nicht in Ruhe, sondern sie ändert ständig ihre Richtung und wird demnach ständig beschleunigt.
Die Zentrifugalkraft wird also nur von demjenigen wahrgenommen, der sich selbst auf einer Kreisbewegung bewegt.
Ein Beobachter von außen benötigt zur Erkärung der Kreisbewegung lediglich die Zentripetalkraft.

Die Zentripetalkraft F_p - Kräfte bei Drehbewegung V

Die Zentrifugalkraft (Fliehkraft)

Die **Zentrifugalkraft** F_z **(Fliehkraft)** ist die Kraft, die ein sich auf einer Kreisbahn bewegender Beobachter verspürt. Sie ist der Zentripetalkraft entgegen gerichtet und gleich groß.
Die Zentrifugalkraft ist eine **Trägheitskraft** und nur im rotierenden Bezugssystem erkennbar. Daher bezeichnet man sie auch als **Scheinkraft**.

Theoretische Grundlagen Zentrifugal- und Zentripetalbeschleunigung

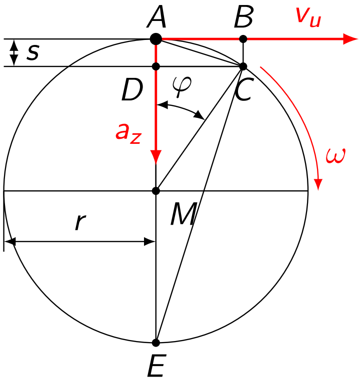


Abbildung:
Zentripetalbeschleunigung a_z

$$s = \frac{a_z}{2} \cdot t^2$$

$$\overline{DC}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DE}$$

$$\overline{AD} = s = \frac{a_z}{2} \cdot t^2$$

$$\overline{AB}^2 = \frac{a_z}{2} \cdot t^2 \cdot \overline{DE}$$

$$\overline{AB} = v_u \cdot t, \quad \overline{DE} = 2 \cdot r - s$$

$$(v_u \cdot t)^2 = \frac{a_z}{2} \cdot t^2 \cdot (2 \cdot r - s)$$

$$\boxed{a_z = \frac{v_u^2}{r}, \quad a_z = r \cdot \omega^2}$$

Theoretische Grundlagen Zentrifugal- und Zentripetalbeschleunigung

Die auf den Körper während der Drehbewegung wirkende Zentrifugalkraft (Trägheitskraft) ist gegeben durch:

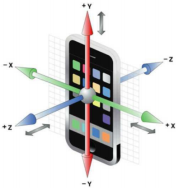
$$F_z = m \cdot a_z = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot r \cdot \omega^2 \tag{1}$$

Nach Division durch die Masse m erhalten wir den Ausdruck für die radial nach außen gerichtete Beschleunigung a_z. Der Betrag der Zentrifugalbeschleunigung a_z ist gleich dem Betrag der Zentripetalbeschleunigung a_p:

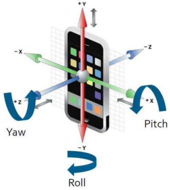
$$a_z = |a_p| = r \cdot \omega^2 \tag{2}$$

Daran erkennt man, dass die radial nach außen gerichtete Beschleunigung a_z linear mit dem Radius r und quadratisch mit der Winkelgeschwindigkeit (Drehrate) ω zunimmt.

Ein Smartphone besitzt einen dreiachsigen Beschleunigungssensor zur Bestimmung der linearen Beschleunigung $\overrightarrow{a} = (a_x, a_y, a_z)$ und einen dreiachsigen Drehratensensor (Gyro) zur Bestimmung der Drehgeschwindigkeit oder Winkelgeschwindigkeit $\overrightarrow{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ entlang jeder Koordinatenachse. Die Orientierung dieser Sensoren ist in (1) und (2) gezeigt:



Orientierung der Beschleunigungssensoren



Orientierung der Drehratensensoren

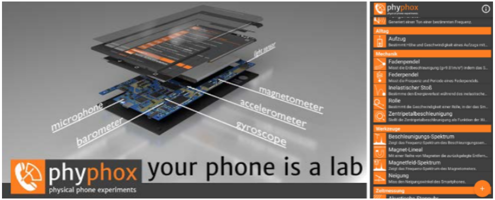
Messungen mit dem Smartphone

Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau besteht aus einem PC-Lüfter auf dem ein Smartphone fixiert ist. Über die Spannungsversorgung von 5 V kann der Lüfter samt Smartphone in eine Drehbewegung versetzt werden. Aufgrund des Trägheitsmomentes der Anordnung, nimmt die Winkelgeschwindigkeit beim Anlegen der Spannung langsam zu und reduziert sich ebenso langsam nach dem Abschalten.

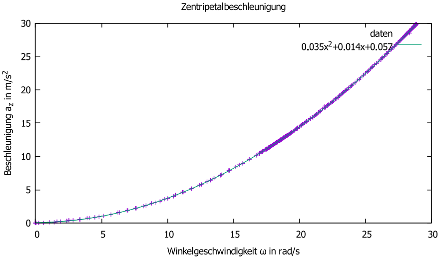
Messung mit phyphox

Mit der *phyphox* -App, welche unter `www.phyphox.org` heruntergeladen werden kann, lassen sich alle Sensoren eines Smartphones auslesen. Die Daten lassen sich in Quasi-Echtzeit per WLAN an einen Rechner übertragen, visualisieren, abspeichern und aus werten.



Messungen mit dem Smartphone II

Wir wählen den Versuch Zentripetalbeschleunigung. Die gewonnenen Daten werden lokal gespeichert und mit Hilfe von Gnuplot[1] grafisch dargestellt und ausgewertet.



[1](Eigenschreibweise: gnuplot) ist ein skript- bzw. kommandozeilengesteuertes Computerprogramm zur grafischen Darstellung von Messdaten und mathematischen Funktionen (Funktionenplotter).

Zusammenfassung Zentripetalkraft, Zentrifugalkraft

Theorem (Bei der Drehbewegung einer Masse wirken zwei radiale Kräfte, die gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet sind)

$$F_z = F_p = m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \omega^2 \cdot r = m \cdot (2\pi \cdot n)^2 \cdot r$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned} F_z &= \text{Zentrifugalkraft in N} \\ F_p &= \text{Zentripetalkraft in N} \\ m &= \text{Masse in kg} \\ v &= \text{Umlaufgeschwindigkeit in } \tfrac{m}{s} \\ r &= \text{Abstand vom Drehmittelpunkt in m} \\ n &= \text{Drehzahl in } \tfrac{1}{s} \end{aligned}$$

F_z, F_p	m	v	ω	r	n
N	kg	$\frac{m}{s}$	$\frac{rad}{s}$	m	$\frac{1}{s}$

Beispielaufgabe 1

Aufgabe:
Auf der Felge ($d = 35\,\mathrm{cm}$) eines mit der Drehzahl $n = 2100\,\mathrm{min}^{-1}$ rotierenden Pkw-Reifens ist ein 'Auswuchtgewicht' von $20\,\mathrm{g}$ befestigt.
Wie groß ist die von ihm ausgehende Zentrifugalkraft?

Beispielaufgabe 1

Aufgabe:
Auf der Felge ($d = 35\,\text{cm}$) eines mit der Drehzahl $n = 2100\,\text{min}^{-1}$ rotierenden Pkw-Reifens ist ein 'Auswuchtgewicht' von $20\,\text{g}$ befestigt.
Wie groß ist die von ihm ausgehende Zentrifugalkraft?
Lösung:

$$n = 2100\,\text{min}^{-1} = \frac{2100}{60\,\text{s}} = 35\,\text{s}^{-1}; \quad m = 20\,\text{g} = 0{,}020\,\text{kg}$$

$$r = \frac{35\,\text{cm}}{2} = 17{,}5\,\text{cm} = 0{,}175\,\text{m}$$

$$\begin{aligned} F_z &= m \cdot (2\pi \cdot n)^2 \cdot r \\ &= 0{,}020\,\text{kg} \cdot (2\pi \cdot 35)^2 s^{-2} \cdot 0{,}175\,\text{m} \approx 169\,\text{N} \end{aligned}$$

Beispielaufgabe 2 I

Aufgabe:
Jeder kennt sicherlich das Phänomen, dass man einen mit Wasser gefüllten Eimer vertikal kreisen lassen kann, ohne dass das Wasser aus dem Eimer fließt. Der Radius ergibt sich aus der Länge des Armes und dem Henkel des Eimers und soll 1 m betragen.
Wie schnell muss der Eimer rotieren, damit kein Wasser heraus fließt?

Beispielaufgabe 2 II

$$
\begin{aligned}
F_z \geq F_G \Rightarrow m \cdot \frac{v^2}{r} &\geq m \cdot g \\
v &\geq \sqrt{r \cdot g} \\
v &\geq 3{,}13\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}; \quad v \geq 11{,}3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \\
\omega &= \frac{v}{r}; \quad \omega = 2\pi \cdot f \\
f &= \frac{v}{2\pi \cdot r} = \frac{3{,}13\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{2\pi \cdot 1\,\mathrm{m}} = 0{,}5\,\mathrm{Hz} \\
T &= 2\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

Beispielaufgabe 3 I

Aufgabe:
Ein Triebwagen durchfährt eine Kurve mit dem Krümmungsradius 250 m Das Gleis ist genau horizontal verlegt, d.h., dass sich die beiden Schienen genau auf der gleichen Höhe befinden. Bei welcher Geschwindigkeit beginnt der Wagen zu kippen, wenn sein Schwerpunkt 1,3 m über der Oberkante der Schienen liegt und wenn Normalspurweite $= 1435\,\text{mm}$ (Schienenabstand) vorliegt?

Beispielaufgabe 3 II

Lösung:

$$F_z \geq tan\alpha \cdot F_G \Rightarrow tan\alpha = \frac{1435\,\mathrm{mm}}{2 \cdot 1{,}3\,\mathrm{m}}$$

$$F_z = m \cdot \frac{v^2}{r} \geq F_G = \frac{1435\,\mathrm{mm}}{2 \cdot 1{,}3\,\mathrm{m}} \cdot m \cdot g$$

$$v \geq \sqrt{\frac{r \cdot g \cdot 1.435}{2 \cdot 1.3}} = \sqrt{\frac{250\,\mathrm{m} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1.435}{2 \cdot 1.3}}$$

$$v \geq 36{,}78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 132{,}43\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$