

4. Unterrichtseinheit zur Dynamik

Arbeit und Energie

Heiko Schröter

27. April 2021

Ziele für die heutige Unterrichtseinheit

Mechanische Arbeit

- Wie ist der Begriff mechanische Arbeit definiert?
- Welche Arten von mechanischer Arbeit gibt es?
- Wie hängen Arbeit und Energie zusammen?
- Der Energieerhaltungssatz der Mechanik?
- Welchen Einfluss hat eine mechanische Hilfe, ein Bauteil oder eine Maschine auf die Arbeit?
- Wie ist die Leistung P definiert?

Mechanische Arbeit I

Mechanische Arbeit wird verrichtet, wenn eine Kraft gegen einen Widerstand längs eines zurückgelegten Weges wirkt.

Die mechanische Arbeit W wird berechnet als Produkt aus der in Richtung des Weges wirkenden Kraft F und dem zurückgelegten Weg s .

$$W = F \cdot s$$

Die SI-Einheit der Arbeit W ist: $[W] = [F] \cdot [s] = 1 \text{ N m} = 1 \text{ J}$

Mechanische Arbeit II

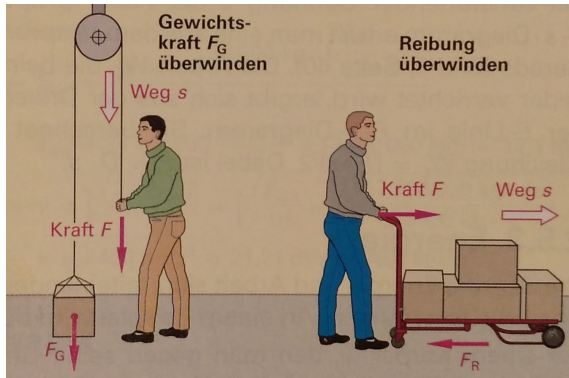
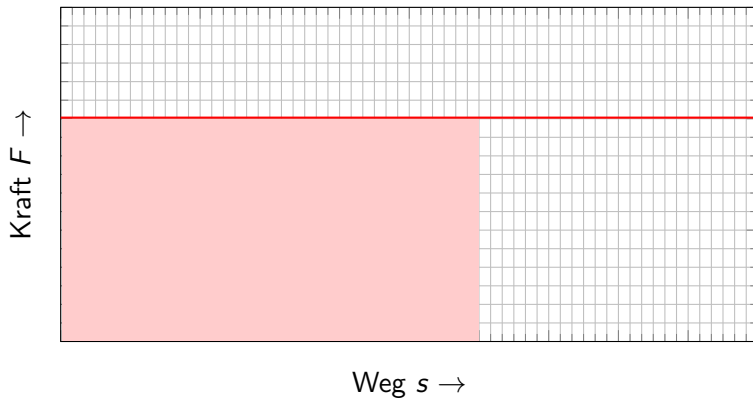


Abbildung: Verrichten mechanischer Arbeit

Die genannte Gleichung $W = F \cdot s$ gilt nur, wenn die Kraft F entlang des Weges s konstant bleibt.

Kraft Weg Diagramm

Kraft-Weg-Diagramm



Arten mechanischer Arbeit

Hubarbeit

$$W_H = F \cdot s = F_G \cdot h = m \cdot g \cdot h \quad (1)$$

Beispiel: Welche mechanische Arbeit (Hubarbeit) wird beim anheben einer Palette mit 1520 kg auf die Höhe der Ladefläche eines Lastwagens von 1,20 m verrichtet?

Lösung:

$$\begin{aligned} W_H &= m \cdot g \cdot h = 1520 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,20 \text{ m} \\ &= 17\,893 \text{ N m} = 17,9 \text{ kJ} \end{aligned}$$

Arten mechanischer Arbeit

Reibungsarbeit

$$W_R = F_R \cdot s = \mu \cdot F_N \cdot s \quad (2)$$

Reibungsarbeit. Bei der gleichförmig geradlinigen Bewegung eines Körpers auf horizontaler Unterlage muss die Reibungskraft F_R entlang des Weges s überwunden werden. Die Reibungskraft F_R ist: $F_R = \mu \cdot F_N$

Arten mechanischer Arbeit

Beschleunigungsarbeit

$$W_B = F_B \cdot s = m \cdot a \cdot s \quad | \text{ mit } s = \left(\frac{a}{2} \right) \cdot t^2 \curvearrowright \quad (3)$$

$$W_B = m \cdot \frac{(a \cdot t)^2}{2} \quad | \text{ und } a = v \cdot t \curvearrowright \quad (4)$$

$$W_B = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad (5)$$

Beschleunigungsarbeit. Um einen Körper längs eines Weges s konstant zu beschleunigen, muss nach dem Grundgesetz der Dynamik die Kraft F_B wirken.

Arten mechanischer Arbeit

Spannarbeit

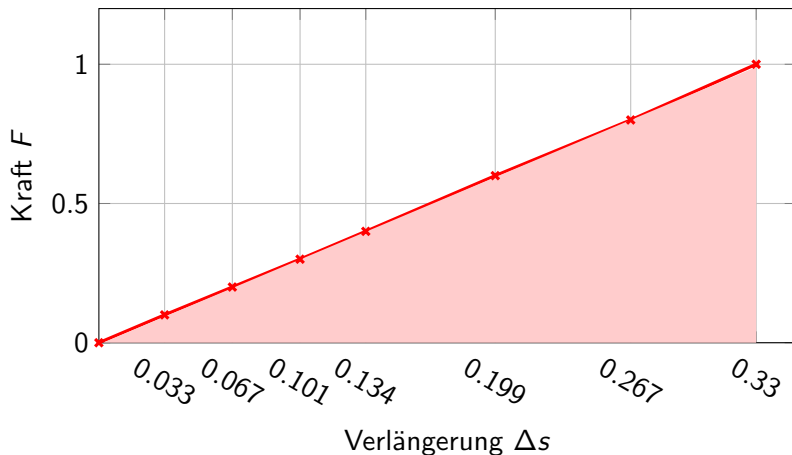
$$W_S = \frac{(F \cdot s)}{2} \quad | \text{mit } F = D \cdot s \curvearrowright \quad (6)$$

$$W_S = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 \quad (7)$$

Spannarbeit. Beim spannen einer Feder nimmt die Kraft F mit zunehmender Dehnung s der Feder proportional zu. Im F-s-Diagramm erhält man eine aus dem Ursprung ansteigende Gerade. Die Arbeit W_S , die beim Spannen der Feder verrichtet wird, ergibt sich aus der Dreiecksfläche unter der F-Linie im F-s-Diagramm.

Elastische Dehnung einer Schraubenfeder

Kraft-Verlängerungs-Diagramm



Energie I

Die Begriffe Energie und Arbeit sind miteinander verknüpft. Als Energie bezeichnet man in der Physik das Arbeitsvermögen.

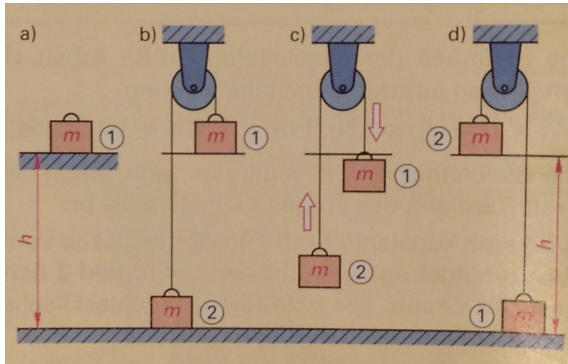


Abbildung: Zusammenhang von Arbeit und Energie

Energie II

Potentielle Energie

Das Arbeitsvermögen, das ein Körper aufgrund seiner Hochlage besitzt, wird als potentielle Hubenergie, kurz potentielle Energie oder Lageenergie bezeichnet.

$$E_{pot} = W_H = m \cdot g \cdot h \quad (8)$$

Energie III

Potentielle Spannenergie

Auch beim Spannen einer Feder bleibt die geleistete Spannarbeit W_S als potentielle Energie der gespannten Feder erhalten.

$$E_{pot} = W_S = \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 \quad (9)$$

Beispiel: Die in einem Ventil eingebaute Rückstellfeder mit der Federkonstante $D = 5000 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ist mit der Energie $E_{pot} = 3,8 \text{ J}$ gespannt.

- a) Wie groß ist der Federweg s , um den die Feder zusammengedrückt ist?
- b) Wie groß ist die dazu aufzuwendende Spannkraft?

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} E_{pot} = W_S &= \frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 \Rightarrow s = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{pot}}{D}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 3,8 \text{ N m}}{5000 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} \\ &= 0,039 \text{ m} = 3,9 \text{ cm} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} F &= D \cdot s = 5000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0,039 \text{ m} \\ &= 195 \text{ N} \end{aligned}$$

Energie V

Kinetische Energie

Lässt man einen Körper frei fallen, so erfährt er durch seine Gewichtskraft eine gleichmäßige Beschleunigung und seine Geschwindigkeit steigt fortlaufend an.

$$E_{kin} = W_B = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad (10)$$

Analog zur Speicherung der Hubarbeit W_H als Lageenergie E_{pot} , wird beim Fallen verrichtete Beschleunigungsarbeit W_B als Arbeitsfähigkeit im bewegten Körper gespeichert.

Man bezeichnet das Arbeitsvermögen, das ein Körper aufgrund seiner Geschwindigkeit hat, als Bewegungsenergie oder kinetische Energie.

Beispiel: Ein Gefahrguttransporter mit einer Masse von 38 t fährt auf der Autobahn mit der überhöhten Geschwindigkeit von $108 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

- a) Berechnen Sie die kinetische Energie E_{kin} des Lastzuges.?
- b) Mit welcher Geschwindigkeit v fährt der Gefahrguttransporter, wenn seine kinetische Energie E_{kin} durch bremsen halbiert wurde?

Lösung:

a)

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{38\,000 \text{ kg} \cdot \left(\frac{108 \text{ m}}{3,6 \text{ s}}\right)^2}{2} \\ &= 17\,100\,000 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} = 17\,100\,000 \text{ N m} = 17,1 \text{ MJ} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{E_{kin}}{2}}{m}} = \sqrt{\frac{E_{kin}}{m}} = \sqrt{\frac{17\,100\,000 \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}}{38\,000 \text{ kg}}} \\ &= \sqrt{450 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = 21,21 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 76,4 \text{ km h} \end{aligned}$$

Energieerhaltungssatz der Mechanik I

Energieerhaltungssatz der Mechanik

Bei mechanischen Vorgängen wird potentielle Energie in kinetische Energie bzw. kinetische Energie in potentielle Energie umgewandelt. Wirken dabei nur die Schwerkraft und Federkräfte, bleibt die Summe von potentieller und kinetischer Energie konstant.

$$E_{Ges} = E_{pot} + E_{kin} = \text{konstant}$$

Energieerhaltungssatz der Mechanik II

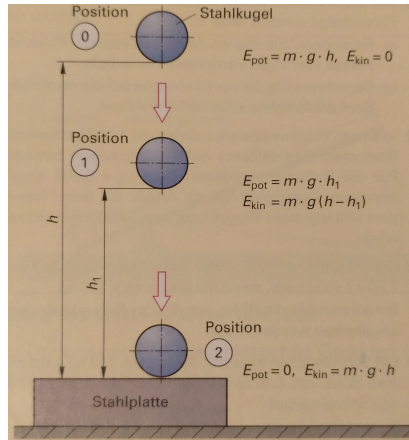


Abbildung: Umwandlung der Energieformen beim Fallen

Mechanische Hilfen und Bauteile I

goldene Regel der Mechanik

Durch eine mechanische Hilfe, ein Bauteil oder eine Maschine kann keine Arbeit gespart werden. Was an Kraft gespart wird muss an Weg zugegeben werden.

geneigte Ebene

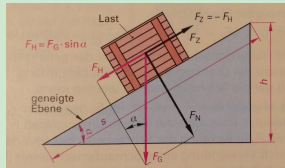


Abbildung: Kräfte an der Last einer geneigten Ebene

Mechanische Hilfen und Bauteile II

Hebel

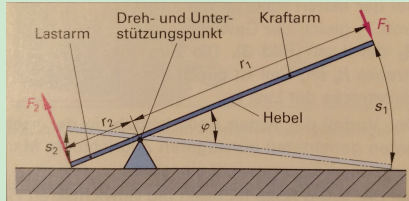


Abbildung: Kräfte beim Heben mit dem Hebel

$$F_1 \cdot s_1 = F_2 \cdot s_2$$

Mechanische Hilfen und Bauteile III

Schraube

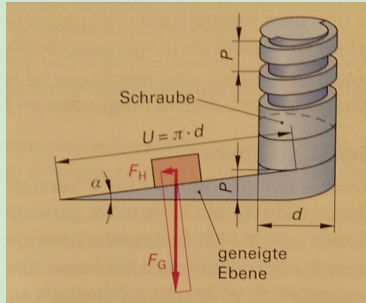


Abbildung: Das Schraubengewinde als aufgewinkelte, geneigte Ebene

Mechanische Hilfen und Bauteile IV

Schraube

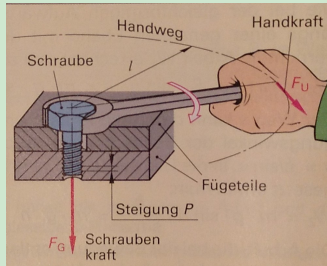


Abbildung: Kräfte beim Anziehen einer Schraube mit dem Schraubenschlüssel

$$F_H \cdot (2\pi \cdot l) = F_G \cdot \sin P$$

Mechanische Hilfen und Bauteile V

Feste Rolle und lose Rolle

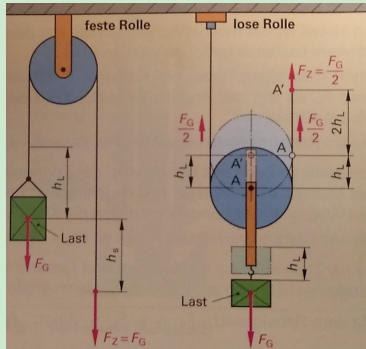


Abbildung: Kräfte bei der festen Rolle und bei der losen Rolle

Leistung I

Definition

Die Leistung P ist der Quotient aus der verrichteten Arbeit W und der dazugehörigen Zeit t .

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{F_s \cdot s}{t} = F_s \cdot v \quad (11)$$

$$\text{bei Drehbewegung: } P = M \cdot \omega \quad (12)$$

P Leistung

W Arbeit

t Zeit

F_s Kraft in Wegerichtung

v Geschwindigkeit

M Drehmoment

ω Winkelgeschwindigkeit

s Weg

Leistung II

Die SI-Einheit der Leistung P ergibt sich aus der Einheitengleichung zu $\frac{\text{Nm}}{\text{s}}$ oder $\frac{\text{J}}{\text{s}}$. Sie wird **Watt**¹ (Einheitszeichen W) genannt.

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{1 \text{ N m}}{1 \text{ s}} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} = 1 \text{ W (Watt)}$$

¹James Watt: englischer Physiker (1736 bis 1819) ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ▶ ≡ ▶ ≡ ▶

Übungsaufgabeaufgabe Arbeit

Bei einem Wasserkraftwerk werden tagsüber $100\,000\text{ m}^3$ ($\rho = 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) Wasser dem oberen Rückhaltebecken entnommen. Dabei wird den Turbinen eine Arbeit von $40\,000\text{ kW h}$ zugeführt. Wie groß ist die Fallhöhe ($g = 9,81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, Strömungsverluste bleiben unberücksichtigt)?

Übungsaufgabeaufgabe Arbeit

Bei einem Wasserkraftwerk werden tagsüber $100\,000\text{ m}^3$ ($\rho = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) Wasser dem oberen Rückhaltebecken entnommen. Dabei wird den Turbinen eine Arbeit von $40\,000\text{ kW h}$ zugeführt. Wie groß ist die Fallhöhe ($g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, Strömungsverluste bleiben unberücksichtigt)?

Lösung:

$$\begin{aligned}\Delta W &= F_s \cdot \Delta s \Rightarrow \Delta s = \frac{\Delta W}{F_s} \Rightarrow \Delta s = \frac{\Delta W}{m \cdot g} \\ \Delta s &= \frac{40\,000\text{ kW h}}{100 \cdot 10^6\text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = \frac{4 \cdot 10^7 \cdot 3600\text{ W s}}{100 \cdot 10^6\text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \\ \Delta s &\approx 147\text{ m}\end{aligned}$$

Übungsaufgabeaufgabe Leistung

Ein Aufzug soll mit der Kraft von 1000 N angetrieben werden und dabei eine Geschwindigkeit von $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ haben. Berechnen Sie die erforderliche Leistung.

Übungsaufgabeübung Leistung

Ein Aufzug soll mit der Kraft von 1000 N angetrieben werden und dabei eine Geschwindigkeit von $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ haben. Berechnen Sie die erforderliche Leistung.

Lösung:

$$P = F_s \cdot v = 1000 \text{ N} \cdot 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2000 \frac{\text{N m}}{\text{s}} = 2 \text{ kW}$$

Übungsaufgabeaufgabe Leistung

Ein Elektroauto muss eine Reibungskraft von 400 N überwinden und soll eine Geschwindigkeit von $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ haben. Wie groß muss die erforderliche Antriebsleistung sein?

Übungsaufgabeaufgabe Leistung

Ein Elektroauto muss eine Reibungskraft von 400 N überwinden und soll eine Geschwindigkeit von $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ haben. Wie groß muss die erforderliche Antriebsleistung sein?

Lösung:

$$\begin{aligned} P &= F_s \cdot v = 400 \text{ N} \cdot 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 400 \text{ N} \cdot \frac{60\,000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} \\ &= 6667 \frac{\text{N m}}{\text{s}} = 6,667 \text{ kW} \end{aligned}$$

Fragen zur heutigen Unterrichtseinheit

Mechanische Arbeit

1. Wie ist die mechanische Arbeit definiert?
2. Welche Formen mechanischer Energie werden unterschieden?
3. Weshalb haben die mechanische Arbeit und die Energie dieselbe SI-Einheit?
4. Was besagt der Energieerhaltungssatz der Mechanik?
5. Wie lautet die goldene Regel der Mechanik?
6. Wozu verwendet man einen Hebel?
7. Wie ist die Leistung P definiert?