4. Unterrichtseinheit zur Dynamik

Impuls und Kraftstoß

Heiko Schröter

22. April 2021

Ziele für die heutige Unterrichtseinheit

Impuls und Kraftstoß

- Was versteht man unter einem Impuls?
- Wie ist der Kraftstoß definiert?
- Wann tritt eine Änderung des Impulses ein?
- Beispielaufgabe zum Stoß
- Übungsaufgaben

Die Bewegungsgröße (Impuls)

Impuls

Unter der Bewegungsgröße bzw. dem Impuls p eines Körpers versteht man das Produkt seiner Masse m und seiner Geschwindigkeit v. Einheit: $\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$.

$$p = m \cdot v \qquad [p] = [m] \cdot [v] = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$$

Beispiel Impuls einer fallenden Kugel

Abbildung: Bewegungsenergie fallender Kugeln

Kraftstoß und Impulsänderung

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_t - v_0}{\Delta t} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

v_0 Geschwindigkeit vor der Impulsänderung

v_t Geschwindigkeit nach der Impulsänderung

Impulsänderung

Der Kraftstoß entspricht der Änderung des Impulses eines bewegten Körpers.

$$\Delta p = F \cdot \Delta t$$

Kraftstoß I :

$$I = \Delta p = F \cdot \Delta t = m \cdot v_t - m \cdot v_0$$

Simulation mit Algodoo

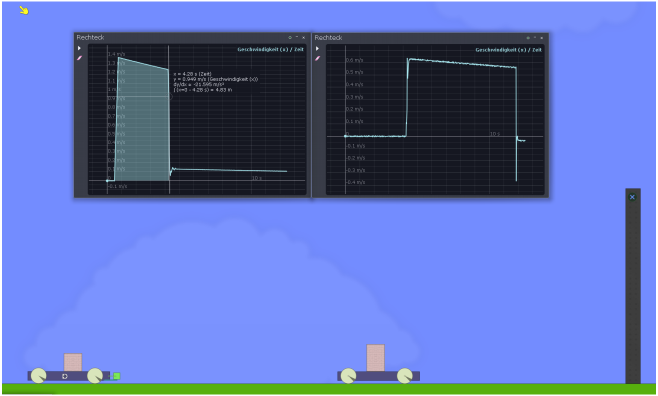


Abbildung: Beispiel Impulsänderung

Beispielaufgabe Impulsänderung I

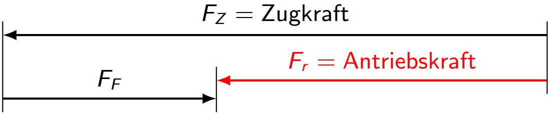
An einem Eisenbahnzug mit der Masse $m = 960\,000\,\mathrm{kg}$ wirkt eine Zugkraft $F_Z = 120\,\mathrm{kN}$. Die Gesamte Fahrwiderstandskraft (Reibung und Luftwiderstand) ist $F_F = 47{,}1\,\mathrm{kN}$. Berechnen Sie

a) die resultierende Kraft F_r,

b) v_t nach $t = 5\,\mathrm{min}$ (horizontale Strecke und $v_0 = 0$).

Beispielaufgabe Impulsänderung II

Lösung:



a) Das Bild zeigt die zeichnerische Lösung. Danach ist:

$$F_r = F_Z - F_F = 120\,\mathrm{kN} - 47{,}1\,\mathrm{kN} = 72{,}9\,\mathrm{kN}$$

b)

$$F_r \cdot t = m \cdot v_t - m \cdot v_0 \text{ Mit } v_0 = 0 : F_r \cdot t = m \cdot v_t.$$

$$\text{Somit: } v_t = \frac{F_r \cdot t}{m} = \frac{72\,900\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (5 \cdot 60)\mathrm{s}}{960\,000\,\mathrm{kg}} = 22{,}78\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v_t = 82\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

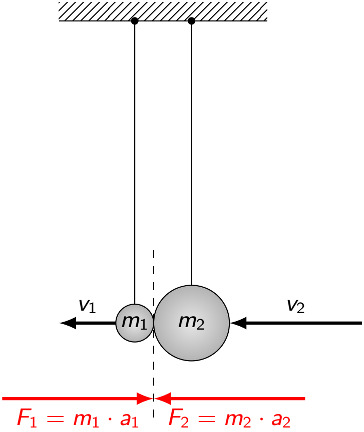
Impulserhaltung

Impulserhaltungssatz

Ist die Summe aller äußeren am Körper angreifenden Kräfte Null, dann ändert sich der Impuls des Körpers nicht.

$$\textbf{Impulserhaltung} \quad \Delta p = 0 = m \cdot v_t - m \cdot v_0$$

Der Stoß I



Der Stoß II

$$F_1 = -F_2$$

$$m_1 \cdot a_1 = -m_2 \cdot a_2 \rightarrow m_1 \cdot \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = -m_2 \cdot \frac{\Delta v_2}{\Delta t}$$

$$\curvearrowright m_1 \cdot \Delta v_1 = -m_2 \cdot \Delta v_2 \rightarrow \frac{\Delta v_1}{\Delta v_2} = -\frac{m_2}{m_1}$$

Stoß

Die Geschwindigkeitsänderungen beim Stoß zweier Massen sind entgegengesetzt gerichtet und verhalten sich umgekehrt proportional zu den Massen.

Der Stoß III

Dabei ist die Summe aller auf das Körpersystem wirkenden Kräfte Null, d.h., dass der Impulserhaltungssatz angewendet werden kann. Dies bedeutet:

Impulserhaltungssatz

Beim Stoß ändert sich der Gesamtimpuls, d.h. die Summe aller Einzelimpulse in einem System bewegter Körper, nicht.

Der unelastische Stoß

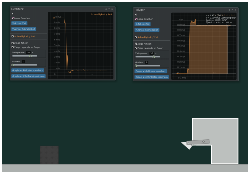
Beim unelastischen, d.h. plastischen Stoß verformt sich mindestens einer der beiden Körper vollkommen plastisch.

Geschwindigkeit beider Massen nach einem unelastischen Stoß

$$v = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

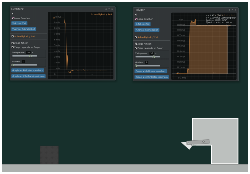
Beispielaufgabe unelastischer Stoß

Ein Körper mit der Masse $m_1 = 10\,\text{kg}$ bewegt sich mit $v_1 = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf einen Körper mit der Masse $m_2 = 100\,\text{kg}$, der sich in Ruhe befindet, zu. Wie groß ist die gemeinsame Endgeschwindigkeit v, wenn sich die Masse m_1 vollkommen plastisch verhält?



Beispielaufgabe unelastischer Stoß

Ein Körper mit der Masse $m_1 = 10\,\mathrm{kg}$ bewegt sich mit $v_1 = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf einen Körper mit der Masse $m_2 = 100\,\mathrm{kg}$, der sich in Ruhe befindet, zu. Wie groß ist die gemeinsame Endgeschwindigkeit v, wenn sich die Masse m_1 vollkommen plastisch verhält?



Lösung:

$$v = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} = \frac{10\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 100\,\mathrm{kg} \cdot 0}{10\,\mathrm{kg} + 100\,\mathrm{kg}} = \frac{100\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}}{110\,\mathrm{kg}}$$

$$= 0{,}909\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Der elastische Stoß

Beim elastischen Stoß unterscheidet man den ersten Teil des Stoßes vom zweiten Teil des Stoßes.

Geschwindigkeit beider Massen nach der ersten Stoßhälfte

gemeinsame Geschwindigkeit: $v = \dfrac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$

Endgeschwindigkeit $m_1 : v_{1e} = 2 \cdot \dfrac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} - v_1$

Endgeschwindigkeit $m_2 : v_{2e} = 2 \cdot \dfrac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} - v_2$

Beispielaufgabe elastischer Stoß

Ein Körper mit der Masse $m_1 = 6\,\mathrm{kg}$ bewegt sich mit $v_1 = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ zentrisch auf einen Körper mit der Masse $m_2 = 18\,\mathrm{kg}$, der sich mit $v_2 = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ in die gleiche Richtung wie der Körper mit der Masse m_1 bewegt, zu. Berechnen Sie

a) Die Geschwindigkeit v beider Körper nach der ersten Hälfte des Stoßes.

b) die Endgeschwindigkeiten beider Körper am Ende eines vollkommen elastischen Stoßes.

Lösung:

a)

$$v = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} = \frac{6\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 18\,\mathrm{kg} \cdot 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{6\,\mathrm{kg} + 18\,\mathrm{kg}} = \frac{96\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}}{24\,\mathrm{kg}}$$

$$= 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

b)

$$v_{1e} = 2 \cdot \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} - v_1$$
$$= 2 \cdot \frac{6\,\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 18\,\text{kg} \cdot 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{6\,\text{kg} + 18\,\text{kg}} - 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 8\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$= -2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$v_{2e} = 2 \cdot \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} - v_2$$
$$= 2 \cdot \frac{6\,\text{kg} \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 18\,\text{kg} \cdot 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{6\,\text{kg} + 18\,\text{kg}} - 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 8\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$= 6\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Beispielaufgabe Impulsänderung

Aus einem Kanonenrohr mit der Länge 8,3 m fliegt ein Geschoss mit der Masse $m = 42\,\mathrm{kg}$ und der Geschwindigkeit $v = 680\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.
Berechnen Sie

a) Die Geschosslaufzeit bei konstanter Beschleunigung im Rohr,

b) die wirkende Kraft auf das Geschoss im Rohr.

Lösung:

a) Es wird eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung von $v_0 = 0$ auf $v_t = 680\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ angenommen. Somit:

$$s = \frac{v_t \cdot t}{2} \rightarrow t = \frac{2 \cdot s}{v_t}$$
$$= \frac{2 \cdot 8{,}3\,\mathrm{m}}{680\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 0{,}0244\,\mathrm{s}$$

b)

$$F \cdot t = m \cdot \Delta v \quad \text{Somit:}$$
$$F = \frac{m \cdot \Delta v}{t} = \frac{42\,\mathrm{kg} \cdot 680\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{0{,}0244\,\mathrm{s}}$$
$$F = 1\,170\,492\,\mathrm{N} = 1170{,}5\,\mathrm{kN}$$

Überblick über Begriffe der Mechanik

Beschreibung

Energie	Kraft	Arbeit
Leistung	Potential	Feld

Am Beispiel der schiefen Ebene.

Energie

Beschreibung

Unter Energie versteht man gespeicherte Arbeit, d.h. Fähigkeit eines Systems, Arbeit zu verrichten. Energie kann zwischen verschiedenen Energieformen hin- und her gewandelt werden, aber die Gesamtenergie bleibt dabei erhalten (Energieerhaltungssatz).

Die SI-Einheit der Energie E ist: $[E] = 1\,\mathrm{N\,m} = 1\,\mathrm{J} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}$

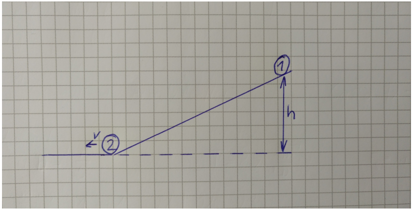


Abbildung: Energie an der schiefen Ebene

Kraft

Beschreibung

Eine Kraft ist durch ihre Größe (Stärke), ihre Richtung und ihren Angriffspunkt eindeutig bestimmt. Sie kann Körper verformen oder beschleunigen.

Die SI-Einheit der Kraft F ist: $[F] = 1\,\mathrm{N} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}$

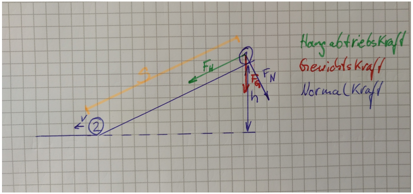


Abbildung: Kräfte an der schiefen Ebene

Wirkt die Kraft entlang eines Weges, so kann sie Energie übertragen bzw. Arbeit verrichten.

Arbeit

Beschreibung

Arbeit ist das Produkt aus der wirkenden Kraft F und dem zurückgelegten Weg s des bewegten Körpers. Durch Arbeit kann Energie in eine andere Form gewandelt werden.

Die SI-Einheit der Arbeit W ist: $[W] = 1\,\mathrm{N\,m} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}} = 1\,\mathrm{J}$

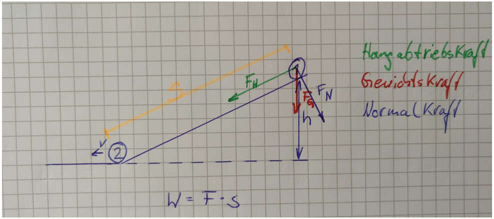


Abbildung: Arbeit an der schiefen Ebene

Leistung

Beschreibung

Die mechanische Leistung ist gleich dem Quotienten aus der mechanischen Arbeit und der für die Verrichtung dieser Arbeit erforderlichen Zeit. Sie gibt an, in welchem Maß ein System Arbeit verrichten kann.

SI-Einheit der Leistung P: $[P] = 1\,\frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^3}} = 1\,\mathrm{W}$

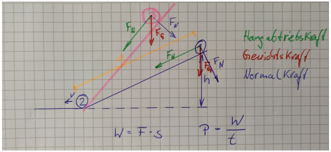


Abbildung: Leistung an der schiefen Ebene

Je mehr Energie ein System pro Sekunde umwandeln kann, desto größer ist seine Leistung.

Potential

Beschreibung

Das Potential, das ein Körper in einem Feld hat, beschreibt, wie viel Arbeit das Feld an ihm verrichten kann. Das Potential hängt vom gewählten Bezugspunkt ab.

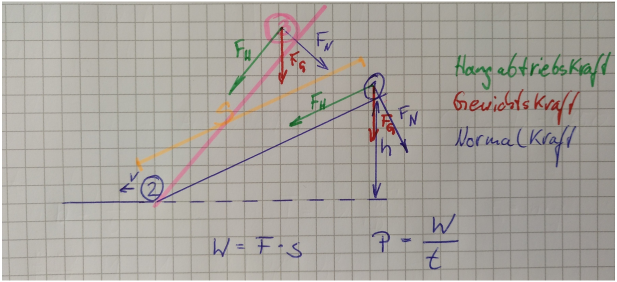


Abbildung: Potential an der schiefen Ebene

Feld

Beschreibung

Ein "Feld" nennt man einen Bereich im Raum, in dem auf einen Körper eine Kraft wirkt. z.B. das Gravitationsfeld der Erde.

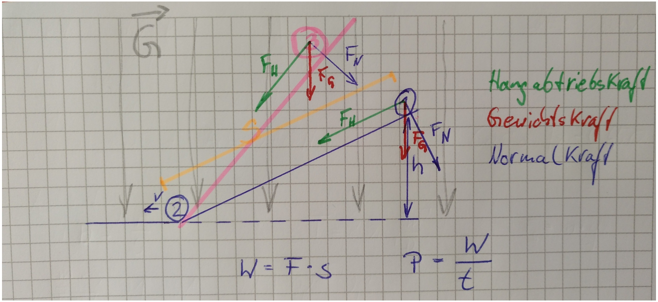


Abbildung: Gravitationsfeld an der schiefen Ebene