Stabilitet i topologisk dataanalyse

Andreas M. Kristensen

April 18, 2025

Innhold

1 Forkunnskaper

1.1 Relasjoner og ordensrelasjoner

Noe som kommer til å være viktig gjennom oppgaven er relasjoner og spesielt ordensrelasjoner.

Definisjon 1.1.1. *En relasjon R på en mengde A er en undermengde av $A \times A$.*

Når et element $a \in A$ er relatert til et element $b \in A$ via en relasjon $R \subset A \times A$ skriver vi ofte aRb.

Noen egenskaper relasjoner kan ha er følgende:

For en relasjon $R \subset A \times A$, kan den ha

- Refleksivitet: Alle elementer i A er relaterte til seg selv.

- Symmetri: Hvis a er relatert til b så er b relatert til a.
- Transitivitet: Hvis a er relatert til b og b er relatert til c så er a relatert til c.
- Antisymmetri: Hvis a er relatert til b og b er relatert til a så er $a = b$.
- Strengt sammenhengendhet: a er relatert til b eller b er relatert til a.
- Asymmetri: Hvis a er relatert til b så er aldri b relatert til a.
- Irrefleksivitet: Ingen elementer er relatert til seg selv.

Eksempel 1.1.1. *For en mengde A er likhet $=$ en relasjon som er refleksiv, symmetrisk og transitiv*

Eksempel 1.1.2. *Mindre enn eller lik $\leq$ på $\mathbb{R}$ er refleksiv, symmetrisk, transitiv, og antisymmetrisk. Samme er sant for større enn eller likhetstegnet.*

Noen typer relasjoner som likhetstegnet og mindre enn eller likhetstegnet har samme egenskaper og brukes såpass ofte at de får sine egne navn

Definisjon 1.1.2. *En relasjon er kalt en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.*

En annen type relasjon er ordensrelasjoner. Det er en slik relasjon $\leq$ er. ordensrelasjoner kommer i mange former her er de tre største

Definisjon 1.1.3. *En preorden er en relasjon som er refleksiv og som er transitiv. En mengde med en preordensrelasjon er kalt en "preordnet mengde" "promengder."*

Definisjon 1.1.4. *En delvis orden er en preorden som også er antisymmetrisk. En mengde med en delvis ordensrelasjon er kalt en "devis ordnet mengde" ofte forkortet til "pomengde" fra det engelske ordet "partial order".*

Tilslutt har vi en total orden

Definisjon 1.1.5. *En total orden er en delvis orden som også er strengt sammenhengende. En mengde med en total orden er en kalt en "totalt ordnet mengde."*

Definisjon 1.1.6. *En relasjon er en streng ordensrelasjon hvis den er assymmetrisk, irrefleksiv og transitiv.*

Bemerk 1.1.1. *Per definisjon er alle total ordensrelasjoner en delvis orden og alle delvis ordensrelasjoner er en preordensrelasjon.*

Bemerk 1.1.2. *Delvis ordensrelasjoner induserer en streng orden ved relasjonen $<$ på følgende måte for en delvis ordensrelasjoner $\leq$*

$$a < b \text{ hvis og bare hvis } a \leq b \text{ og } a \neq b.$$

Denne type streng orden bruker vi nå hvor ordensrelasjonene med $\leq$ vil være delvis ordner, mens ordensrelasjonene med $<$ vil være strenger ordner.

Et viktig eksempel for denne oppgaven er den leksikografiske ordenen.

Eksempel 1.1.3. *For delvis ordnede mengder A med orden $\leq_A$ og B med orden $\leq_B$ kan vi sette den følgende ordenen $\leq$ på $A \times B$ ved å la $(a,b) \leq (a',b')$ hvis og bare hvis $a <_A a'$ eller hvis $a = a'$ og $b \leq_B b'$.*

Proposisjon 1.1.1. *Den leksikografiske ordenen er en delvis orden.*

bevis. La A og B være delvis ordnede mengder med ordner $\leq_A$ og $\leq_B$ hhv. og la $\leq$ være den leksikografiske ordnen på $A \times B$.

Refleksivitet

Refleksivitet er sant for gitt $(a,b) \in A \times B$ så er $a = a$ og $b \leq_B b$ ved **definisjon 1.1.4**, dermed er $(a,b) \leq (a,b)$.

Transitivitet

La $(a,b) \leq (a',b')$ og $(a',b') \leq (a'',b'')$. Enten så er $a <_A a'$ eller er $a = a'$ og $b \leq_B b'$, vi ser på disse tilfellene individuelt.

"$a <_A a'$": Siden $(a',b') \leq (a'',b'')$ har vi at $a' <_A a''$ eller $a' = a''$ og $b' \leq_B b''$. Hvis $a' <_A a''$ har vi ved transitivitet $a <_A a''$ og hvis $a' = a''$ og $b' \leq_B b''$ så har vi at $a <_A a''$.

"$a = a'$ og $b \leq b'$": Likt som over, siden $(a',b') \leq (a'',b'')$ så er $a' <_A a''$ eller $a' = a''$ og $b' \leq_B b''$. Hvis $a' <_A a''$ har vi at $a = a'$ som betyr at $a <_A a''$. Hvis $a' = a''$ og $b' \leq_B b''$ så har vi at $a = a'$ og $a' = a''$ så ved transitivitet av $=$ så er $a = a''$, ved transitivitet av $\leq_B$, siden $b \leq_B b'$ og $b' \leq_B b''$ så er $b' \leq_B b''$.

Antisymmetri

Til slutt må en vise at hvis $(a,b) \leq (a',b')$ og $(a',b') \leq (a,b)$ så er $(a,b) = (a',b')$. Dette gjør vi ved et kontrapositivt bevis. Anta at $(a,b) \neq (a',b')$, da viser vi at $(a,b) \not\leq (a',b')$ eller $(a',b') \not\leq (a,b)$. Siden $(a,b) \neq (a',b')$ så er $a \neq a$ som betyr at hvis $(a,b) \leq (a',b')$ må dette være fordi $a <_A a'$, men da kan ikke $a' <_A a$ ved antisymmetri av $\leq_A$ altså er $(a',b') \leq (a,b)$ og på samme måte kan ikke $(a,b) \leq (a',b')$ hvis $(a',b') \leq (a,b)$.

□

Ordensrelasjoner gir oss en rekkefølge på elementer i mengden.

1.2 Topologiske rom

Definisjon 1.2.1. *Et par $(X, \mathcal{T})$ hvor X er en mengde og $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ slik at*

- $X, \emptyset \in \mathcal{T}$
- *Gitt en vilkårelig samling av mengder $\{U_\alpha\}_\alpha$ så er $\bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{T}$*
- *For en endelig samling av mengder $\{U_1, \ldots, U_n\} \in \mathcal{T}$ så er snittet $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{T}$*

Vi kaller mengden $\mathcal{T}$ for topologien på X og mengdene i $\mathcal{T}$ for åpne mengder.

Når topologien $\mathcal{T}$ på en mengde X er kjent eller ikke viktig lar vi være å skrive det topologiske rommet som et par $(X, \mathcal{T})$ og skriver bare X. Alle funksjoner mellom topologiske rom vil være kontinuerlige. Til slutt så vil et "rom" bety et topologisk rom.

Eksempel 1.2.1. *Euklidisk rom* $(\mathbf{R}^n, \mathcal{T})$ *er et topologisk rom med åpne mengder unioner av vilkårlig mange mengder av typen*

$$\mathcal{B}(x, \delta) = \{y \in \mathbf{R}^n \mid \|x - y\| < \delta\}$$

kalt åpne baller. Euklidisk rom er som regel alltid bare skrevet $\mathbf{R}^n$ *siden det er den topologien på* $\mathbf{R}^n$ *som er antatt.*

Definisjon 1.2.2. *La* $(X, \mathcal{T}_X)$ *og* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *være topologiske rom. En funksjon* $f : X \to Y$ *er kalt kontinuerlig hvis for en hver* $V \in \mathcal{T}_Y$ *så er* $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

Eksempel 1.2.2. *La* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *være funksjonen* $f(x) = 2x + 1$*, da er* f *kontinuerlig. La* $V = (a, b)$ *et opent intervall, da blir* $f^{-1}(V) = \{x \in \mathbf{R} \mid 2x + 1 \in V\} = \left\{\frac{a}{2} - 1, \frac{b}{2} - 1\right\}$ *som også er et åpent intervall.*

Definisjon 1.2.3. *La* $(X, \mathcal{T})$ *være et topologisk rom og la* $A \subset X$ *da er det en naturlig topologi* $\mathcal{T}_A$ *vi kan sette på* A *definert ved*

$$U \in \mathcal{T}_A \iff \exists V \in \mathcal{T} \quad s.a \quad V \cap A = U$$

Vi kaller $(A, \mathcal{T}_A)$ *et underrom av* $(X, \mathcal{T})$ *og vi kaller* $\mathcal{T}_A$ *underromstopologien på* A.

Når vi senere ser på punktskyer i $\mathbf{R}^n$ og spesifkt simplisial kompleksene

1.2.1 Homotopi

Definisjon 1.2.4. *La* X *og* Y *være topologiske rom og la* $f, g : X \to Y$ *være funksjoner. En homotopi mellom* f *og* g *er en funksjon*

$$F : X \times [0, 1] \to Y.$$

Slik at $F(x, 0) = f(x)$ *og* $F(x, 1) = g(x)$*. Hvis det eksisterer en homotopi mellom en funksjon* f *og* g *sier vi at de er homotope og vi skriver at* $f \simeq g$.

Definisjon 1.2.5. *To topologiske rom* X *og* Y *er homotopiekvivalente hvis det eksisterer funksjoner* $f : X \to Y$ *og* $g : Y \to X$ *slik at*

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \quad f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$$

1.2.2 Δ-Komplekser

Gitt at denne og neste seksjon om homologi er viktige i **seksjon 5**, men kommer ikke til å bli brukt ellers vil disse seksjonene inneholde uformelle forklaringer og noen eksempler. Definisjonene er tatt fra [**?** , seksjon 1] og [**?** , seksjon 2]hv.

Definisjon 1.2.6. *En mengde* $\{a_0, \ldots, a_n\}$ *av punkt i* $\mathbb{R}^N$ *er geometrisk uavhengige hvis likningene*

$$\sum_{i=0}^{n} t_i = 0 \quad og \quad \sum_{i=0}^{n} t_i a_i = 0$$

impliserer at $t_0 = t_1 = \cdots = t_n = 0$.

Definisjon 1.2.7. *La* $\{a_0, \ldots, a_n\}$ *være en geometrisk uavhengig mengde i* $\mathbb{R}^N$. *Vi lar* n*-simplekset* σ *utspent av* $a_0, \ldots, a_n$ *være mengden av punkt*

$$\sum_{i=0}^{n} t_i a_i \quad hvor \quad \sum_{i=0}^{n} t_i = 1$$

og $t_i \geq 0$ *for alle* i. *Vi skriver* $[a_0, \ldots, a_n]$ *for simplekset utspent av* $\{a_0, \ldots, a_n\}$.

Definisjon 1.2.8. *Et simplisialkompleks* K *i* $\mathbb{R}^N$ *er en samling av simplekser i* $\mathbb{R}^N$ *slik at:*

1. *En side av et simpleks av* K *er i* K.

2. *Snittet av ethvert par av simplekser av* K *er en side av begge simpleksene.*

Eksempel 1.2.3. *La* p_0, p_1, p_2 *være geometrisk uavhengige punkter i* $\mathbb{R}^2$ *da er* $X = \{[p_0], [p_1], [p_2], [p_0, p_1], [p_0, p_2], [p_1, p_2]\}$ *et simplisialkompleks for* S^1.

1.2.3 Homologi

Topologiske rom kan være vanskelige å studere i seg selv. Heldigvis kan man overføre informasjon om rommet til en algebraisk struktur som er lettere å håndtere. Vi kan gjøre dette på forskjellige måter, men i denne oppgaven bruker vi homologi. Definisjonene er fra [**?** , seksjon 2.1]

Definisjon 1.2.9. *Gitt et simplisialkompleks* X, *la* $\Delta_n(X)$ *være det frie vektorrommet over en kropp* K *med alle* n*-simpleksene i* X *som basis.*

Vektorer i $\Delta_n(X)$ er formelle summer $\sum n_\alpha \sigma_\alpha$ hvor $n_\alpha \in K$ og $\sigma_\alpha \in X$ et n-simpleks. Vi kaller vektorer i $\Delta_n(X)$ for n-kjeder.

Definisjon 1.2.10. *For ethvert simplisialkompleks og enhver* $n \in \mathbb{Z}^+$ *har vi avbildingen*

$$\partial_n : \Delta_n(X) \to \Delta_{n-1}(X)$$

som sender et n*-simpleks*

$$[v_0, \ldots, v_n] \mapsto \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$$

Hvor $[v_0, \ldots, \hat{v}_i, \ldots, v_n]$ *er* $(n-1)$*-simplekset hvor vi sletter* v_i. *Avbildingene* ∂_n *er kalt randhomomorfier.*

Eksempel 1.2.4. *For simplisialkomplekset i **eksempel ??** har vi*

$$\Delta_0(X) = \{a[p_0] + b[p_1] + c[p_2] \mid a, b, c \in K\}$$

$$\Delta_1(X) = \{a[p_0, p_1] + b[p_0, p_2] + c[p_1, p_2] \mid a, b, c \in K\}$$

$$\Delta_n(X) = \{0\}, \quad n > 1 \text{ eller } n < 0$$

og randhomomorfiene blir

$$\partial_1([p_i, p_j]) = p_j - p_i$$

for ethvert par $i, j = 0, 1$ og

$$\partial_n = 0.$$

Fra definisjonen fra randhomomorfiene har vi at $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Dette betyr at $\operatorname{im} \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$. Nå får vi definisjonen på homologien av et topologisk rom

Definisjon 1.2.11. *Den n-te homologien av et topologisk rom med simplisialkompleks X er definert som $H_n(X) = \ker \partial_n / \operatorname{im} \partial_{n+1}$.*

1.3 Vektorrom

For å definere hva et vektorrom er må vi først gå igjennom hva en kropp er.

Definisjon 1.3.1. *En mengde K sammen med binære operatorer $+, \cdot : K \times K \to K$ er en kropp hvis gitt $a, b, c \in K$ så holder det følgende*

- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $a + b = b + a$
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- *Det eksisterer et element $0 \in K$ slik at $a + 0 = a = 0 + a$*
- *Det eksisterer et element $1 \in K$ slik at $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$*
- *Det eksisterer et element $-a \in K$ slik at $a + (-a) = 0$*
- *Det eksisterer et element $a^{-1} \in K$ slik at $a \cdot a^{-1} = 1$.*

Ofte lar vi være å skrive $a + (-b)$ og skriver heller $a - b$ vi lar også være å skrive $a \cdot b$ og skriver heller ab

Definisjon 1.3.2. *Et vektorrom V over en kropp K er en mengde med binære operatorer $+ : V \times V \to V$ og $\cdot : K \times V \to V$, kalt skalarmultiplikasjon, slik at for elementer $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ og $a, b, c \in K$ så holder det følgende*

- $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$
- $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$

- *Det eksisterer et element* $\boldsymbol{0} \in V$ *slik at* $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{u}$
- *Det eksisterer et element* $-\boldsymbol{u} \in V$ *slik at* $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$
- $(a+b) \cdot \boldsymbol{u} = a \cdot \boldsymbol{u} + b \cdot \boldsymbol{u}$
- $a \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a \cdot \boldsymbol{u} + a \cdot \boldsymbol{v}$
- $a \cdot (b \cdot \boldsymbol{u}) = (ab) \cdot \boldsymbol{u}$.

Vi kaller elementer $\boldsymbol{v} \in V$ *for vektorer og elementer* $a \in K$ *for skalarer.*

Igjen skriver vi ofte $\mathbf{v} + (-\mathbf{u})$ som $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ og $a \cdot \mathbf{v}$ som $a\mathbf{v}$.

Definisjon 1.3.3. *La* V *og* W *være vektorrom over en kropp* K *og la* $f : V \to W$ *være en funksjon. Vi kaller* f *lineær hvis for vektorer* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ *og en skalar* $a \in K$ *så holder det følgende*

- $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$
- $f(a\boldsymbol{v}) = af(\boldsymbol{v})$

Vi kaller også slike funksjoner lineære avbildinger/transformasjoner/funksjoner

Eksempel 1.3.1. *Rommet* $V = \mathbb{R}^n$ *over kroppen* $\mathbb{R}$ *er et vektorrom med punktvis addisjon, og skalarmultiplikasjon*

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

og

$$c(a_1, \ldots, a_n) = (ca_1, \ldots, ca_n).$$

Eksempel 1.3.2. *funksjonen* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definert ved* $f(\boldsymbol{v}) = 2\boldsymbol{v}$ *er lineær siden gitt* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ *og* $a \in \mathbb{R}$ *så er*

- $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = 2(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = 2\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$
- $f(a\boldsymbol{v}) = 2(a\boldsymbol{v}) = (2a)\boldsymbol{v} = (a \cdot 2)\boldsymbol{v} = af(\boldsymbol{v})$

2 Multimengder

Mengder er ofte begrensende i og med at de ikke tillater repeterende elementer.

Definisjon 2.0.1. *En samling med (potensielt) repeterende elementer er kalt en multimengde.*

For å differensiere mellom vanlige mengder og multimengder bruker vi en annen notasjon for multimengder

Definisjon 2.0.2. *En multimengde* A *av elementer som tilfredstiller et predikat* Φ *er skrevet som følger*

$$\wr x \mid \Phi(x) \int$$

Definisjon 2.0.3. *For enhver multimengde $\mathcal{S}$ eksisterer det en unik mengde S som ignorerer repetisjoner. Det eksisterer også en funksjon $\mu : S \to \mathbb{N}$ som teller multiplisiteten av et element in $\mathcal{S}$*

Definisjon 2.0.4. *Representasjonen av en multimengde $\mathcal{S}$ er en mengde definert ved*

$$\mathrm{Rep}(\mathcal{S}) = \{(x, k) \mid x \in S, k \leq \mu(x)\}$$

2.1 Kategoriteori

Et samlende rammeverk i matematikk er en vanskelig oppgave å få laget, men et rammeverk som gjør en god jobb og som brukes heletiden nå til dags er kategoriteori. Kategoriteori gir en formulering på de forskjellige områdene i matematikk som f.eks. topologi og algebra.

Definisjon 2.1.1. *En kategori $\mathcal{C}$ er et par $(\mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \mathrm{hom}(\mathcal{C}))$ av klasser. Elementene i $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ er kalt objekter og elementene i $\mathrm{hom}(\mathcal{C})$ er kalt morfier. Morfiene i $\mathcal{C}$ kan bli sett på som piler mellom objektene i $\mathcal{C}$, en morfi f mellom objekter A og B skrives $f : A \to B$. For morfier $f : A \to B$ og $g : B \to C$ har vi en morfi $g \circ f : A \to C$ som vi kaller komposisjonen av f med g. For ethvert objekt $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ har vi en morfi $\mathrm{id}_A : A \to A$ som vi kaller identitetsmorfien som tilfredstiller for enhver morfi $f : A \to B$:*

$$f \circ \mathrm{id}_A = f, \quad \mathrm{id}_B \circ f = f.$$

Bemerk 2.1.1. *Objektene og morfiene til noen kategorier som f.eks.* **Set** *som vi senere snakker raskt om kan ikke være inneholdt i det vi kaller mengder og er heller elementer av en klasse. Vi kaller kategorier hvor objektene og morfiene er elementer av en mengde små kategorier eller at en kategori er liten. Disse kategoriene kommer til å bli brukt senere i definisjonen på et diagram.*

I en kategori er det noen spesielle morfier som kalles isomorfier.

Definisjon 2.1.2. *En isomorfi i en kategori $\mathcal{C}$ er en morfi $f : A \to B$ mellom to objekter $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ hvor det eksisterer en morfi $g : B \to A$ slik at følgende holder*

$$f \circ g = \mathrm{id}_B, \quad g \circ f = \mathrm{id}_A.$$

Vi kaller g inversen til f. Hvis to objekter A og B er ismorfe skriver vi $A \cong B$.

Bemerk 2.1.2. *Identitetsmorfien er en isomorfi siden $\mathrm{id}_A \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A$. Altså er id_A sin egen invers.*

Andre spesielle morfier er følgende:

Definisjon 2.1.3. *En morfi $f : A \to B$ er kalt en epimorfi hvis for ethvert par med mofier $g, h : B \to C$ så holder*

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h$$

En skriver $f : A \twoheadrightarrow B$ for en epimorfi når det er viktig å notere.

Definisjon 2.1.4. *En morfi $f : A \to B$ er kalt en monomorfi hvis for ethvert par $g, h : C \to A$ så holder*

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h$$

En skriver $f : A \hookrightarrow B$ for en monomorfi hvis det er viktig å notere.

Noen eksempler på kategorier, deres isomorfier, epimorfier og monomorfier er følgende

Eksempel 2.1.1. *Kategorien* **Set** *har mengder som objekter og funksjoner som morfier. Her er bijektive funksjoner isomorfier, surjektive funksjoner epimorfier og injektive funksjoner er monomorfier.*

Eksempel 2.1.2. *Kategorien* **Top** *er kategorien hvor objektene er topologiske rom og morfiene er kontinuerlige funksjoner. Isomorfier i* **Top**, *kalt homeomorfier, er bijektive og kontinuerlig funksjoner med en kontinuerlig invers, epimorfi er surjektive og kontinuerlige funksjoner og monomorfier er injektive og kontinuerlige funksjoner.*

Eksempel 2.1.3. *Kategorien* $\mathbf{Vect}_K$ *er kategorien av vektorrom over en kropp K som objekter og lineære avbildinger som morfier. Isomorfier i* $\mathbf{Vect}_K$, *kalt vektorromisomorfier, er bijektive og lineære avbildinger, inversen vil automatisk være lineær så vi trenger ikke inverskriteriet som vi gjør i* **Top**. *Epimorfiene er surjektive lineære avbildinger og monomorfiene er injektive lineære avbildinger.*

Morfiene i en kategori trenger ikke å være funksjoner, her er et eksempel på en kategori hvor morfiene ikke er funksjoner.

Eksempel 2.1.4. *Kategorien* **R** *har de reelle tall $\mathbb{R}$ som objekter og $\leq$ relasjonen som morfier. Komposisjon er gitt ved transitivitet og identitetsmorfiene er gitt ved $s = s$. Identitetsmorfiene er også de eneste isomorfiene fordi hvis $a \leq b$ er en isomorfi så er $b \leq a$ dens invers, men hvis $a \leq b$ og $b \leq a$ så er $a = b$. Her er alle morfier epimorfier og monomorfier.*

Bemerk 2.1.3. *Gitt en kategori $\mathcal{C}$ eksisterer det en kategori $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ kalt den omvendte kategorien av $\mathcal{C}$ med de samme objektene, men med alle morfiene snudd andre vei.*

I noen kategorier er det spesielle objekter kalt initialobjekt og terminalobjekter.

Definisjon 2.1.5. *I en kategori $\mathcal{C}$ er et initialobjekt I et objekt slik at for ethvert objekt A i $\mathcal{C}$ eksisterer det nøyaktig en morfi $I \to A$.*

Definisjon 2.1.6. *I en kategori $\mathcal{C}$ er et terminalobjekt T et objekt slik at for ethvert objekt A i $\mathcal{C}$ eksisterer det nøyaktig en morfi $T \to A$.*

Et objekt som er både initial og terminal er kalt et nullobjekt.

Vi kan også definere piler mellom kategorier. Disse pilene er kalt funktorer og er definert som følgende.

Definisjon 2.1.7. *La $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ være kategorier en funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ er funksjoner $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ og $\hom(\mathcal{C}) \to \hom(\mathcal{D})$ slik at for morfier $f : A \to B$ og $g : B \to C$ i $\mathcal{C}$ så er $F(f) : F(A) \to F(B)$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ og for ethvert objekt $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ så er $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$.*

Definisjon 2.1.8. *En funktor på formen $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ eller $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ er kalt en kontravariant funktor fra $\mathcal{C}$ til $\mathcal{D}$.*

Ofte skriver vi bare $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ for en kontravariant funktor og sier at den er kontravariant. En funktor som ikke er kontravariant kalles også ofte kovariant, men også bare for en funktor.

Bemerk 2.1.4. *Gitt en funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ og en isomorfi $f : A \to B$ i $\mathcal{C}$ så er $F(f)$ en isomorfi i $\mathcal{D}$. Siden f er en isomorfi så eksisterer det en $g : B \to A$ med egenskapene i **Definisjon 2.1.2**. Dette gir*

$$\mathrm{id}_{F(A)} = F(\mathrm{id}_A) = F(f \circ g) = F(f) \circ F(g).$$

På samme måte får vi $F(f \circ g) = \mathrm{id}_{F(B)}$. Dermed blir $F(g)$ en invers av $F(f)$ som betyr at den er en isomorfi.

Eksempel 2.1.5. *Vi kan definere en funktor F : **Set** $\to$ **Top** som setter den diskrete topologien på en mengde X, her blir alle funksjoner $f : X \to Y$ sendt til $F(f) = f : (X, \mathcal{P}(X)) \to (Y, \mathcal{P}(Y))$, den er kontinuerlig siden for enhver delmengde $A \in \mathcal{P}(Y)$ så er $f^{-1}(A) \in \mathcal{P}(X)$.*

På samme måte har vi en funktor F : **Set** $\to$ **Top** som setter den trivielle topologien på en mengde og bevarer funksjonene.

Eksempel 2.1.6. *Vi har også en funktor F : **Top** $\to$ **Set** definert ved $F((X, \mathcal{T})) = X$ og $F(f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')) = f : X \to Y$. Denne funktoren kaller vi for glemmefunktoren siden den glemmer all struktur til rommet. En kan også gjøre dette for andre kategorier som $\mathbf{Vect}_K$ og $\mathbf{R}$.*

Eksempel 2.1.7. *Et eksempel på en kontravariant funktor er $\mathrm{Hom}(\cdot, W)$: $\mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Vect}_K$ som sender et vektorrom $V \in \mathbf{Vect}_K$ til vektorrommet $\mathrm{Hom}(V, W)$ av lineære avbildinger $V \to W$ og den sender lineære avbildinger $T : U \to V$ til $\mathrm{Hom}(T, W) : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(U, W)$ via $\mathrm{Hom}(T, W)(g) = g \circ T$ for en $g : V \to W$. Her kan man se at funktoren snur på morfien som gjør den kontravariant.*

Man kan også definere en pil mellom to funktorer

Definisjon 2.1.9. *La $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ være kategorier og la $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktorer. En naturlig transformasjoner er en pil $\eta : F \to G$ slik at for ethvert objekt $A \in \mathcal{C}$ har vi en morfi $\eta_A : F(A) \to G(A)$ og for enhver morfi $f : A \to B$ i $\mathcal{C}$ har vi at diagrammet*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

kommuterer.

Funktorer og naturlige transformasjoner gir oss en ny type kategori

Definisjon 2.1.10. *For kategorier $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ er kategorien $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$, med funktorer $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ som objekter og naturlige transformasjoner som morfier, kalt en funktorkategori*

Diagrammer er viktige for å kunne studere forskjellige egenskaper til objekter og morfier i en kategori. Her er definisjonen på et diagram.

Definisjon 2.1.11. *La $\mathcal{J}$ være en liten kategori. Et diagram av form $\mathcal{J}$ i en kategori $\mathcal{C}$ er en funktor $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$.*

Dette er ikke en intuitiv definisjon, men diagrammer er ikke så farlige som en skal tro her er noen illustrative eksempler

Eksempel 2.1.8. *Her er en illustrasjon som viser hvordan formen på kategorien $\mathcal{J}$ gir et diagram i en kategori $\mathcal{C}$*

$$\mathcal{J} \qquad\qquad\qquad\qquad \mathcal{C}$$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "d"] \arrow[loop above, "\mathrm{id}_1"] & 2 \arrow[d, "b"] \arrow[loop above, "\mathrm{id}_2"] \\
3 \arrow[r, "c"] \arrow[loop below, "\mathrm{id}_3"] & 4 \arrow[loop below, "\mathrm{id}_4"]
\end{tikzcd}
\quad \overset{D}{\Longrightarrow} \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] \arrow[loop above, "\mathrm{id}_A"] & B \arrow[d, "g"] \arrow[loop above, "\mathrm{id}_B"] \\
C \arrow[r, "h"] \arrow[loop below, "\mathrm{id}_C"] & D \arrow[loop below, "\mathrm{id}_D"]
\end{tikzcd}$$

Funktoren D sender 1 til A, 2 til B osv. Siden D er en funktor sender den id_1 *til* $\mathrm{id}_{D(1)} = \mathrm{id}_A$ *osv. Funktoren sender morfiene til de naturlige morfiene.*

Eksempel 2.1.9. *I dette eksempelet er $\mathcal{J}$ trekantformet, dette gir diagrammet $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$*

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{J} & & & \mathcal{C} & \\
1 \arrow[loop left, "\mathrm{id}_1"] \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "c"'] & 2 \arrow[loop right, "\mathrm{id}_2"] \arrow[d, "b"] & \overset{D}{\Longrightarrow} & A \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[loop right, "\mathrm{id}_B"] \arrow[d, "g"] \\
 & 3 \arrow[loop right, "\mathrm{id}_3"] & & & C \arrow[loop right, "\mathrm{id}_C"]
\end{tikzcd}$$

Funktoren D sender 1 til A, 2 til B og 3 til C og morfiene blir sendt til de naturlig morfiene.

Vi pleier aldri å faktisk tegne opp $\mathcal{J}$ og funktoren D, definisjonen er bare nødvendig for å være presis. Objektenes identiteter er alltid tilstede i et diagram, derfor er det ikke nødvendig å tegne dem i diagrammet med mindre de er viktige i diagrammet.

Vi bruker diagrammer hele tiden i matematikk og spesielt et type diagram kalt et kommutativt diagram

Definisjon 2.1.12. *Et diagram $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ er kalt kommutativt hvis alle morfier som starter med samme objekt og slutter på samme objekt er like.*

I **eksempel 2.1.8** er diagrammet kommutativt hvis $g \circ f = h \circ i$ og i **eksempel 2.1.9** er diagrammet kommutativt hvis $h = g \circ f$.

I en kategori med nullobjekt har morfier en kjerne og kokjerne. Her er definisjonene på kjernen fra [**?**]

Definisjon 2.1.13. *I en kategori $\mathcal{C}$ med nullobjekt 0, la $f : A \to B$ være en morfi. Kjernen til f er et objekt K sammen med en morfi $k : K \to A$ slik at $f \circ k = 0$ og gitt ethvert objekt Q med morfi $h : Q \to A$ slik at $f \circ h = 0$, eksisterer det en unik morfi $u : Q \to K$ slik at diagrammet*

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, bend left, "0"] & & \\
 & A \arrow[r, "f"] & B \\
Q \arrow[uu, dashed, "\exists!\, u"] \arrow[ur, "h"] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

kommuterer.

Proposisjon 2.1.1. *I $\mathbf{Vect}_k$ er kjernen av en lineær avbilding $f : V \to W$ gitt ved $K = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ og inkusjonen $k : K \to V$.*

bevis. La Q være et vektorrom med lineær avbilding $h : Q \to V$ med $f \circ h = 0$. Vi må finne en $u : Q \to K$ slik at $k \circ u = h$. Siden $f \circ h = 0$, har vi for enhver vektor $u \in Q$ er $f(h(u)) = 0$ altså er $h(u) \in K$. Dermed er $h = k \circ h'$ med $h' : Q \to K$ gitt ved $h'(u) = h(u)$ □

Definisjon 2.1.14. *hsdjkfhsdfhs*

3 Varighetsmoduler

Et sentralt tema for å kunne forstå stabilitet og topologisk dataanalyse er ideen om varighetsmoduler. I dette kapitellet går vi gjennom en litt abstrakt introduksjon og så ser vi på hvorfor de er viktige innenfor topologisk dataanalyse. Definisjonen på en varighetsmodul er kort og enkel.

Definisjon 3.0.1. *En varighetsmodul M er en funktor $M : \mathbf{R} \to \mathbf{vect}_K$.*

Vi skriver M_t for vektorromet $M(t)$. Siden en varighetsmodul M er en funktor fra pomengden $\mathbf{R}$ til $\mathbf{Vect}_K$ så har vi for hver $s \leq t$ en lineær avbilding $\varphi_M(s,t) : M_s \to M_t$ som vi kaller overgangsavbildinger.

Gitt to varighetsmoduler M og N kan vi definere en morfi $f : M \to N$ som en samling av lineære avbildinger $\{f_s : M_s \to N_s \mid s \in \mathbb{R}\}$ slik at diagrammet

$$\begin{tikzcd}
M_s \arrow[r, "f(s)"] \arrow[d, "\varphi_M(s,t)"] & N_s \arrow[d, "\varphi_N(s,t)"] \\
M_t \arrow[r, "f(t)"] & N_t
\end{tikzcd}$$

kommuterer. Vi kan komponere morfiene på den følgende måten; gitt morfier $f : M \to N$ og $g : M \to P$ er $g \circ f$ definert som samlingen $\{g_s \circ f_s : M_s \to P_s \mid s \in \mathbb{R}\}$.

Siden vi har objekter, varighetsmoduler og vi har morfier mellom dem kan vi definere kategorien av varighetsmoduler

Definisjon 3.0.2. *Kategorien $\mathbf{Vect}_K^{\mathbf{R}}$ er kategorien av varighetsmodulene med varighetsmodul-morfier mellom dem.*

Som notasjonen foreslår er kategorien av varighetsmoduler en funktorkategori. Et enkelt, men viktig eksempel på en varighetsmodul er intervallmodulen

Eksempel 3.0.1. *For et intervall $I \subset \mathbb{R}$ eksisterer det en varighetsmodul K^I definert på følgende måte i [**?**]*

$$K_r^I = \begin{cases} K, & \text{hvis } r \in I \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \qquad \varphi_{K^I}(r,s) = \begin{cases} \mathrm{id}_K, & r, s \in I \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

I denne kategorien kan en varighetsmodul inneholde uendeligdimensjonale vektorrom. Fra teorem 2.8 i [**?**] kan disse ikke bli intervalldekomponert. Dette er et problem når vi skal studere varighetsmodulene som barkodediagrammer. I topologisk dataanalyse er heldigvis vektorrommene i varighetsmodulen alltid endeligdimensjonale i praksis. Varighetsmoduler der vektorromene er alle endeligdimensjonale er kalt punktvis endelig dimensjonale varighetsmoduler eller p.e.d. varighetsmoduler tatt fra [**?**]. Kategorien av endeligdimensjonale vektorrom over en kropp k skriver vi som $\mathbf{vect}_K$ og kategorien av p.e.d. varighetsmoduler er da skrevet $\mathbf{vect}_K^{\mathbf{R}}$.

3.1 Inflettingsavstand

Stabilitet av varighetsmoduler innebærer relasjonen mellom to typer avstander, flaskehalsavstanden mellom barkoder og inflettingsavstanden mellom varighetsmoduler. Her definerer vi inflettingsavstanden mellom to varighetsmoduler.

For å definere distansen må vi gjennom noen få steg.

Definisjon 3.1.1. *En δ-forskyvning av en varighetsmodul er en funktor*

$$(\cdot)(\delta) : \mathbf{vect}_k^{\mathbf{R}} \to \mathbf{vect}_k^{\mathbf{R}}$$

Som tar en varighetsmodul M til $M(\delta)$ hvor $M(\delta)_t = M_{t+\delta}$ og tar varighetsmodulmorfier $f : M \to N$ til $f(\delta) : M(\delta) \to N(\delta)$ gitt ved $f(\delta)_t = f_{t+\delta}$.

Korollar 3.1.1. *For $\delta, \delta' \in \mathbb{R}$ er $((\cdot)(\delta))(\delta') = (\cdot)(\delta + \delta')$*

bevis. For en varighetsmodul M er $(M(\delta))(\delta')_t = M(\delta)_{t+\delta'} = M_{t+\delta+\delta'} = M(\delta+\delta')_t$ for enhver $t \in \mathbb{R}$. For samme grunn er $(f(\delta))(\delta') = f(\delta + \delta')$ for enhver varighetsmodulmorfi. $\square$

Denne funktoren gir oss konseptet av en δ-infletting.

Definisjon 3.1.2. *La M og N være varighetsmoduler. Vi sier at M og N er δ-inflettet hvis det eksisterer varighetsmodulmorfier $f : M \to N(\delta)$ og $g : N \to M(\delta)$ slik at*

$$g(\delta) \circ f = \varphi_M(t, t + 2\delta), \quad f(\delta) \circ g = \varphi_N(t, t + 2\delta).$$

Vi skriver $\varphi_M^{\varepsilon}(t) = \varphi_M(t, t + \varepsilon)$. Bemerk at $\varphi_M^0 = \mathrm{id}_M$ fordi $\varphi_M^0(t) = \varphi_M(t, t + 0) = \varphi_M(t, t) = \mathrm{id}_M$. Vi kaller varighetsmodulmorfiene f og g for δ-inflettingsmorfiene.

Definisjon 3.1.3. *En utvidet pseudometrikk på en klasse X er en funksjon $d : X \times X \to [0, \infty]$ med følgende egenskaper:*

- $d(x, x) = 0$ *for enhver* $x \in X$,
- $d(x, y) = d(y, x)$ *for enhver* $x, y \in X$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, x)$ *for enhver* $x, y, z \in X$ *slik at* $d(x, y), d(y, z) \leq \infty$.

Forskjellen på en utvidet pseudometrikk og en metrikk er at det kan være to elementer $x, y \in X$ slik at $x \neq y$, men $d(x,y) = 0$ i motsetning til metrikker der $d(x,y) = 0$ hvis og bare hvis $x = y$.

Definisjon 3.1.4. *For M og N varighetsmoduler definerer vi inflettingsavstanden d_I ved*

$$d_I(M,N) = \inf\{\delta \in [0,\infty) \mid M \text{ og } N \text{ er } \delta\text{-inflettet}\}$$

Denne avstanden gir et tall på hvor "isomorfe" to varighetsmoduler er.

Vi går gjennom et lemma gitt i [**?**] som en bemerkning ([**?** , Remark 3.1]).

Lemma 3.1.1. *La L, M og N være varighetsmoduler slik at L og M er δ-inflettet og M og N er δ'-inflettet. Da er L og N $(\delta+\delta')$-inflettet.*

bevis. La $f : L \to M(\delta)$, $g : M \to L(\delta)$ være δ inflettingsmorfier for L og M, la $h : M \to N(\delta')$ og $i : N \to M(\delta')$ være inflettingsmorfier for M og N. Vi viser at $F = h(\delta) \circ f : L \to N(\delta+\delta')$ og $G = g(\delta') \circ i : N \to L(\delta+\delta')$ er $(\delta+\delta')$-inflettingsmorfier for L og N. Vi har komposisjonen

$$G(\delta+\delta') \circ F = (g(\delta') \circ i)(\delta+\delta') \circ h(\delta) \circ f.$$

Ved funktorialitet av $(\cdot)(\delta)$ får vi

$$(g(\delta') \circ i)(\delta+\delta') \circ h(\delta) \circ f = g(\delta')(\delta+\delta') \circ i(\delta+\delta') \circ h(\delta) \circ f.$$

Videre ved **korollar 3.1.1** og funktorialitet blir komposisjonen

$$g(\delta')(\delta+\delta') \circ i(\delta+\delta') \circ h(\delta) \circ f = g(\delta+2\delta') \circ (i(\delta') \circ h)(\delta) \circ f.$$

Nå har vi komposisjonen $i(\delta') \circ h$ som vi vet er $\varphi_M^{2\delta'}$ da har vi

$$g(\delta+2\delta') \circ (i(\delta') \circ h)(\delta) \circ f = g(\delta+2\delta') \circ \varphi_M^{2\delta'} \circ f.$$

Fra definisjonen av en varighetsmodulmorfi har vi at $\varphi_M^{2\delta'} \circ f = f(2\delta') \circ \varphi_L^{2\delta'}$, dermed får vi

$$g(\delta+2\delta') \circ \varphi_M^{2\delta'} \circ f = g(\delta+2\delta') \circ f(2\delta') \circ \varphi_M^{2\delta'}$$

Tilslutt får vi da

$$g(\delta+2\delta') \circ f(2\delta') \circ \varphi_L^{2\delta'} = (g(\delta) \circ f)(2\delta') \circ \varphi_L^{2\delta'} = \varphi_L^{2\delta}(2\delta') \circ \varphi_L^{2\delta'}$$
$$= \varphi_L^{2\delta+2\delta'} \circ \varphi_L^{2\delta'} = \varphi_L^{2\delta'+2\delta}.$$

På samme måte har vi at $F(\delta+\delta') \circ G) = \varphi_N^{2\delta+2\delta'}$. $\square$

Teorem 3.1.1. *Inflettingsavstanden er en utvidet metrikk* *bevis.* Vi starter med første punktet i **definisjon 3.1.3**. La M være en varighetsmodul. Vi har en 0-infletting $f, g : M \to M(0)$ gitt ved $f_t, g_t = \varphi(t, t+0) = \mathrm{id}_{M_t}$. Siden vi ikke kan finne en δ mindre er $d_I(M, M) = 0$.

Varighetsmoduler M og N er δ-inflettet hvis og bare hvis N og M er δ-inflettet. Dette betyr at $d_I(M, N) = d_I(N, M)$.

La L, M og N være varighetsmoduler slik at L og M er δ-inflettet og M og N er δ'-inflettet. Vi lar $f : L \to M(\delta)$, $g : M \to L(\delta)$, $h : M \to N(\delta')$ og $i : N \to M(\delta')$ være δ-inflettingsmorfiene. □

Proposisjon 3.1.1. *For M og N varighetsmoduler så holder*

$$d_I(M, N) = 0 \iff M \cong N$$

bevis. " $\implies$ "

Hvis $d_I(M, N) = 0$ så finnes det en 0-infletting mellom M og N altså det eksisterer varighetsmodulmorfier $f : M \to N(0) = N$ og $g : N \to M(0) = M$ slik at $g(0) \circ f = g \circ f = \varphi_M^0 = \mathrm{id}_M$ og $f(0) \circ g = \varphi_N^0 = \mathrm{id}_N$. Dermed er f og g inverser av hverandre og er dermed isomorfier.

" $\impliedby$ "

Hvis $M \cong N$ så eksisterer det varighetsmodulmorfier $f : M \to N$ og $g : N \to M$ slik at $g \circ f = \mathrm{id}_M = \varphi_M^0$ og $f \circ g = \mathrm{id}_N = \varphi_N^0$. Så det eksisterer en 0-infletting og dermed er $d_I(M, N) = 0$. □

Proposisjon 3.1.2. *Hvis $M \cong M'$ er isomorfe varighetsmoduler så er $d_I(M, N) = d_I(M', N)$ for enhver varighetsmodul.*

bevis. Siden d_I er en utvidet metrikk betyr det at den oppfyller den trekantulikheten $d_I(M, N) \leq d_I(M, M') + d_I(M', N)$. Ved **proposisjon 3.1.1** er $d_I(M, M') = 0$ altså er $d_I(M, N) \leq d_I(M', N)$. Ved samme argument er $d_I(M', N) \leq d_I(M, N)$. Dermed er $d_I(M, N) = d_I(M', N)$. □

Resultatet fra **proposisjon 3.1.2** betyr at inflettingsavstanden er en metrikk på isomorfiklassene av varighetsmodulene som forfatter i [**?**] nevner.

4 Barkoder

En barkode er en multimengde av intervaller.

I [**?**] skriver forfatter at gitt en varighetsmodul M som kan skrives på formen

$$M \cong \bigoplus_{I \in \mathcal{B}_M} K^I,$$

hvor $\mathcal{B}_M$ er en barkode. Da er $\mathcal{B}_M$ unikt bestemt. Vi kaller slike varighetsmoduler intervalldekomponerbare.

I [**?**] har vi følgende teorem

Teorem 4.0.1. *Enhver p.e.d. varighetsmodul er intervalldekomponerbar.*

Barkoder kan også gjøres om til en kategori med morfier kalt overlappkoblinger. For å definere en overlappkobling må vi først definere hva det betyr at et intervall overlapper et annet intervall over og hva en parvis kobling av mengder er.

Definisjon 4.0.1. *Et intervall I overlapper et annet intervall J over (hhv. overlapper J I under) hvis følgende holder*

- $I \cap J \neq \emptyset$.
- *For enhver $s \in J$ eksisterer det en $t \in I$ slik at $t \leq s$. Vi sier at I begrenser J over.*
- *For enhver $s \in I$ eksisterer det en $t \in J$ slik at $t \leq s$. Vi sier at J begrenser I under.*

Definisjon 4.0.2. *En parvis kobling mellom mengder S og T (skrevet $\sigma : S \to T$) er en bijeksjon $\sigma : S' \to T'$ mellom delmengder $S' \subset S$ og $T' \subset T$. Formelt er $\sigma \subset S \times T$ en relasjon slik at $(s,t) \in \sigma$ hvis og bare hvis $s \in S'$ og $\sigma(s) = t$. Komposisjonen av to parvis koblinger $\sigma : S \to T$ og $\tau : T \to U$ er definert som relasjonen*

$$\tau \circ \sigma = \{(s,u) \mid (s,t) \in \sigma, (t,u) \in \tau \text{ for en } t \in T\}$$

Definisjon 4.0.3. *En parvis kobling $\sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ av barkoder er en overlappkobling hvis gitt $\sigma(I) = J$ så overlapper I J over.*

Komposisjonen av overlappkoblinger som parvis koblinger resulterer ikke alltid i en overlappkobling. Vi endrer komposisjonen på følgende måte

Definisjon 4.0.4. *La $\sigma : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ og $\tau : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ være overlappkoblinger. Komposisjonen blir da definert som*

$$\tau \bullet \sigma = \{(I,J) \in \tau \circ \sigma \mid I \text{ overlapper } J\}$$

Her er $\tau \circ \sigma$ komposisjonen som parvis koblinger.

Proposisjon 4.0.1. *For enhver barkode $\mathcal{D}$ eksisterer det alltid en overlappkobling $\sigma : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ gitt ved $\sigma = \{(I,I) \mid I \in \mathcal{D}\}$.*

bevis. Første punktet er å vise at $I \cap \sigma(I) \neq \emptyset$. Dette er sant siden $\sigma(I) = I$ altså er $I \cap \sigma(I) = I \cap I$ som er lik $I \neq \emptyset$. Andre punktet er å vise at I overlapper seg selv over. Velg en $s \in I$ da har vi $s \leq s$ dermed begrenser I seg selv over og under. Dette betyr at σ er en overlappkobling. □

Teorem 4.0.2. *Klassen av barkoder sammen med overlappkoblinger skaper en kategori.*

bevis. Objektene er barkodene og morfiene er overlappkoblingene. Vi lar identiteten til en barkode være overlappkoblingen $\mathrm{id}_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ gitt i **proposisjon 4.0.1** Komposisjonen er den definert i **definisjon 4.0.4**. Vi må vise at $\bullet$ komposisjonen er assosiativ og respekterer identiteter.

Vi starter med identitetene. La $\sigma : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ være en overlappkobling da har vi

$$\sigma \bullet \mathrm{id}_{\mathcal{C}} = \{(I, J) \in \sigma \circ \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \mid I \text{ overlapper } J \text{ over}\}.$$

La $(I, J) \in \sigma \bullet \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$, Da eksisterer det en $K \in \mathcal{C}$ slik at $(I, K) \in \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ og $(K, J) \in \sigma$ og I overlapper J over. Siden $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(I) = I$ så må $K = I$ altså er $\sigma(K) = \sigma(I) = J$, derfor har vi at $(I, J) \in \sigma$. Dette betyr at $\sigma \bullet \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \subset \sigma$ og gitt et par $(I, J) \in \sigma$ har vi paret $(I, I) \in \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ slik at $J = \sigma(I) = \sigma \bullet \mathrm{id}_{\mathcal{C}}(I)$ dermed har vi også at $\sigma \subset \sigma \bullet \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ det vil si at $\sigma = \sigma \bullet \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. På samme måte kan vi vise at $\sigma = \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \bullet \sigma$.

La $\sigma : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, $\tau : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ og $\psi : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$. La (I, K) være et par i komposisjonen $(\psi \bullet \tau) \bullet \sigma$. Dette betyr at det eksisterer et intervall $J \in \mathcal{C}$ slik at $(I, J) \in \sigma$ og $(J, K) \in \psi \bullet \tau$ og at I overlapper K over. Siden $(J, K) \in \psi \bullet \tau$ må det også finnes et intervall $L \in \mathcal{D}$ slik at $(J, L) \in \tau$ og $(L, K) \in \psi$ og J må overlappe K over. Fordi $(I, J) \in \sigma$ og $(J, L) \in \tau$ $\square$

Barcer en Puppe-eksakt kategori. Dette betyr at kategorien har et nullobjekt gitt under.

Proposisjon 4.0.2. *Den tomme mengden $\emptyset$ er nullobjektet i* **Barc**.

bevis. La $\mathcal{D}$ være en barkode. En overlappkobling $\sigma : \emptyset \to \mathcal{D}$ er en delmengde av $\emptyset \times \mathbf{Barc} = \emptyset$, siden $\emptyset$ er sin eneste delmengde så er $\sigma = \emptyset$. For samme grunn er det bare en overlappkobling $\mathcal{D} \to \emptyset$. Dermed er $\emptyset$ nullobjekt. $\square$

I [**?**] **seksjon 2.5** beskriver forfatter kjernen, kokjernen og bildet til en overlappkobling som barkoder, men som beskrevet i seksjon **seksjon ??** i **definisjon 2.1.13** og **definisjon 2.1.14** er ikke bare (ko)kjernen av en morfi i en kategori et objekt, det er et par gitt av et objekt og en morfi. Her er konstruksjonen av kjernen, kokjernen og bildet, kjernen av kokjernen, som barkoder sammen med en overlappkobling.

Teorem 4.0.3. *Kjernen til en overlappkobling $\sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ er en barkode* $\ker \sigma$ *med overlappkobling* $\kappa_\sigma : \ker \sigma \to \mathcal{C}$

$$\ker \sigma = \wr \ker(\sigma, I) \neq \emptyset \mid I \in \mathcal{C} \wr, \quad \kappa_\sigma = \{(\ker(\sigma, I), I) \mid \ker(\sigma, I) \neq \emptyset\}$$

bevis. Gitt en barkode $\mathcal{B}$ og en overlappkobling $\eta : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ slik at $\sigma \bullet \eta = \emptyset$, viser vi at det eksisterer en unik overlappkobling $\eta' : \mathcal{B} \to \ker \sigma$ slik at $\eta = \kappa_\sigma \bullet \eta'$. Vi antar at en slik η' eksisterer og finner et uttrykk for overlappkobling. La $(I, J) \in \eta$ altså er $(I, J) \in \kappa_\sigma \bullet \eta'$. Fra **definisjon ??** betyr dette at det eksisterer et intervall $K \in \mathcal{C}$ slik at $(I, K) \in \eta'$ og $(K, J) \in \kappa_\sigma$. Siden $(K, J) \in \kappa_\sigma$ må $K = \ker(\sigma, J)$. Dermed har vi

$$\eta'(I) = \ker(\sigma, \eta(I)).$$

Her lar vi η' koble $I \in \mathcal{B}$ hvis η kobler I og I overlapper $\ker(\sigma, \eta(I))$ over. Dermed for ethvert par $(\mathcal{B}, \eta : \mathcal{B} \to \mathcal{C})$ av en barkode og overlappkobling slik at $\sigma \bullet \eta = \emptyset$, eksisterer det en unik overlappkobling $\eta' : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ definert som over slik at $\kappa_\sigma \bullet \eta' = \eta$. □

Teorem 4.0.4. *Kokjernen til en overlappkobling er gitt som en barkode* $\operatorname{coker} \sigma$ *med en overlappkobling* $\mu_\sigma : \mathcal{D} \to \operatorname{coker} \sigma$ *gitt ved*

$$\operatorname{coker} \sigma = \wr \operatorname{coker}(\sigma, J) \neq \emptyset \mid J \in \mathcal{D} \int, \quad \mu_\sigma = \wr (J, \operatorname{coker}(\sigma, J)) \mid J \text{ overlapper } \operatorname{coker}(\sigma, J) \text{ over} \int$$

bevis. Vi viser at gitt en barkode $\mathcal{B}$ og en overlappkobling $\eta : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ slik at $\eta \bullet \sigma = \emptyset$ eksisterer det en unik overlappkobling $\eta' : \operatorname{coker} \sigma \to \mathcal{B}$ slik at $\eta' \bullet \mu_\sigma = \eta$. Vi gjør dette på samme måte som i beviset for **teorem 4.0.3**. La $(I, J) \in \eta$ dermed er $(I, J) \in \eta' \bullet \mu_\sigma$. Siden $(I, J) \in \eta' \bullet \mu_\sigma$ eksisterer det et intervall $K \in \operatorname{coker} \sigma$ slik at $(I, K) \in \mu_\sigma$ og $(K, J) \in \eta'$. Siden $(I, K) \in \mu_\sigma$ er $K = \operatorname{coker}(\sigma, I)$. Dermed er $(\operatorname{coker}(\sigma, I), J) \in \eta'$. Vi lar dermed $\eta'(\operatorname{coker}(\sigma, I)) = J$ hvor $(I, J) \in \eta$ og $\operatorname{coker}(\sigma, I)$ overlapper J over. □

Teorem 4.0.5. *Bildet av en overlappkobling* $\sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *er en barkode* $\operatorname{im} \sigma$ *og en overlappkobling* $\omega_\sigma : \operatorname{im} \sigma \to \mathcal{D}$ *gitt ved*

$$\operatorname{im} \sigma = \wr I \cap J \mid (I, J) \in \sigma \int, \quad \omega_\sigma = \wr (I \cap J, J) \mid (I, J) \in \sigma \int$$

bevis. Siden **Barc** er en Puppe-eksakt kategori er bildet av σ kjernen av kokjernen av σ. Barkoden blir multimengden av elementer på formen $J - (\operatorname{coker}(\sigma, J)) \neq \emptyset$. Hvis σ ikke parvis kobler J er $J - (\operatorname{coker}(\sigma, J)) = J - J = \emptyset$, hvis $(I, J) \in \sigma$, er $J - (\operatorname{coker}(\sigma, J)) = J - (J - I)$ som er det samme som $I \cap J$. Siden $(I, J) \in \sigma$ overlapper I J over, altså er $I \cap J \neq \emptyset$ som videre betyr at

$$\ker \mu_\sigma = \operatorname{im} \sigma = \wr I \cap J \mid (I, J) \in \sigma \int.$$

La $(L, J) \in \kappa_{\mu_\sigma}$ da er $L = \ker(\mu_\sigma, J)$. Dermed hvis μ_σ ikke parvis kobler L er $L = J$. Hvis $(J, K) \in \mu_\sigma$ er $K = \operatorname{coker}(\sigma, J)$ som er J hvis σ ikke parvis kobler J, da er $K = \emptyset$ og bryter overlapping, eller så er $(I, J) \in \sigma$ og $K = J - I$. I tilfellet der $(I, J) \in \sigma$ er $L = J - K = J - (J - I)$ som tilslutt er $I \cap J$. Dermed er $\omega_\sigma(I \cap J) = J$, eller sagt annerledes er ω_σ multimengden av par $(I \cap, J, J)$ hvor $(I, J) \in \sigma$. □

Som sagt i **seksjon 3** er det også en avstand mellom barkoder.

4.1 Flaskehalsavstanden

En kan definere en avstand av barkoder på to forskjellige måter gitt i [**?**]. En måte er å definere en type inflettingsavstand i **Barc**og en annen kalt Flaskehalsavstanden. Vi starter med å definere den første type avstand.

En definisjon som blir brukt senere er at et intervall I er kalt δ-triviell som er kortere enn δ.

Definisjon 4.1.1. *For et intervall $I \subset \mathbb{R}$ og $\delta \geq 0$ definerer vi*

$$I(\delta) = \{t \mid t + \delta \in I\}$$

Dette intervallet er I forskjøvet en δ til venstre.

Dette gir en funktor $(\cdot)(\delta) : \mathbf{Barc} \to \mathbf{Barc}$ definert ved

Definisjon 4.1.2. *For en barkode $\mathcal{B}$, lar vi*

$$\mathcal{B}(\delta) = \{I(\delta) \mid I \in \mathcal{B}\}.$$

For en overlappkobling $\sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ definerer vi

$$\sigma(\delta) = \{(I(\delta), J(\delta)) \mid (I, J) \in \sigma\}.$$

Fra [?] har vi for enhver barkode $\mathcal{C}$ og $\delta \geq 0$ overlappkoblingen $S^{\mathcal{C},\delta} = \wr(I, I(\delta)) \mid I$ ikke er δ-triviell$\wr$.

Definisjon 4.1.3. *To barkoder $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ sies å være δ-inflettet hvis det eksisterer overlappkoblinger $f : \mathcal{C} \to \mathcal{D}(\delta)$ og $g : \mathcal{D} \to \mathcal{C}(\delta)$ slik at $g(\delta) \bullet f = S^{\mathcal{C},2\delta}$ og $f(\delta) \bullet g = S^{\mathcal{D},2\delta}$.*

Dette gir på samme måte som i **seksjon 3** en inflettingsavstand gitt ved

$$d_I(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \inf \{\delta \in [0, \infty) \mid \mathcal{C} \text{ og } \mathcal{D} \ \delta\text{-inflettet}\}.$$

Den andre måten en kan definere en avstand på er gitt i [? , seksjon 4.2].
La $U_\delta(I) = \{t \in \mathbb{R} \mid \text{det eksisterer en } s \in I \text{ slik at } |s - t| \leq \delta\}$

Definisjon 4.1.4. *En δ-kobling $\sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ er en parvis kobling, den trenger ikke å være en overlappkobling, med følgende egenskaper:*

1. *σ kobler hvert intervall i $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ som ikke er 2δ-trivielle*

2. *Hvis $(I, J) \in \sigma$, er $J \subset U_\delta(I)$ og $I \subset U_\delta(J)$.*

Definisjon 4.1.5. *Gitt to barkoder $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ er flaskehalsavstanden*

$$d_B(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \inf \{\delta \geq 0 \mid \textit{Det eksisterer en } \delta\textit{-kobling mellom } \mathcal{C} \textit{ og } \mathcal{D}\}.$$

Nå som vi har to typer avstander av barkoder er det naturlige spørsmålet "hvilken skal man bruke?" Heldigvis er det ikke nødvendig å velge fordi inflettingsavstanden og flaskehalsavstanden er like.

Teorem 4.1.1. *Gitt barkoder $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ holder følgende*

$$d_I(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = d_B(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

bevis. □

5 Varighetshomologi

I denne seksjonen går vi over hvordan man gjør data fra et eksperiment eller en statistisk undersøkelse om til topologiske rom og videre om til varighetsmoduler. Vi starter med å lage varighetsmoduler av generelle topologiske rom, deretter går vi over forskjellige måter å lage topologiske rom fra data i form av punktskyer.

Definisjon 5.0.1. *En filtrering av et topologisk rom X over en pomengde $(P, \leq)$ er en samling $\{X_p\}_{p\in P}$ slik at når $q \leq p$ så er $X_q \subset X_p$ og $\bigcup_{p\in P} X_p = X$.*

En kan også tenke på en filtrering av et rom X over en pomengde $\mathbf{P}$ som en funktor $X_\bullet = \mathbf{P} \to \mathbf{Top}$ slik at morfien $q \leq p$ i $\mathbf{P}$ blir sendt til inklusjonen $i_X(q,p) : X_q \hookrightarrow X_p$.

I denne oppgaven er en filtrering av et rom alltid over $\mathbf{R}$ pomengden.

Gitt et topologisk rom, kan vi kalkulere homologigruppene dens. Vi bruker koeffisienter fra en kropp K til å kalkulere homologigruppene, da får vi vektorrom.

Vi kan lage en varighetsmodul av et rom ved å filtrere rommet og så ta homologien av rommene i filtreringen.

Definisjon 5.0.2. *La X være et topologisk rom med filtrering $X_\bullet$ en filtrering av X. Da er den n-te varighetshomologien $\mathcal{H}(n) : \mathbf{R} \to \mathbf{vect}_K$ definert ved $\mathcal{H}(n)_s = H_n(X_s)$ og $\varphi_{\mathcal{H}(n)}(s,t) = i_X(s,t)$.*

Nå som vi har definisjonen på varighetshomologien av et rom går vi videre til å lage topologiske rom av data i form av en filtrering av et rom.

I **Seksjoner 1** gikk vi over Δ-komplekser. Rommene vi lager fra punktskydataen er slike Δ-komplekser. Det er to hovedmetoder for å lage rom av punktskyer, kalt Čech-komplekser og Vietoris-Rips-komplekser også kalt Rips-komplekser.

Følgende definisjoner er inspirert fra [**?**]

Definisjon 5.0.3. *La $P \subset \mathbb{R}^d$ være en punktsky og la $B_\varepsilon(p)$ være den lukkede ε-ballen om et punkt $p \in P$. Čech-komplekset $\mathcal{C}_\varepsilon$ av P inneholder k-simplekser som korresponderer med $k+1$-tupler av punkter $p \in P$ slik at*

$$\bigcap_{i=0}^{k} \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(p_i)} \neq \emptyset.$$

Altså er en $k+1$-tuppel $(p_0, \ldots, p_k) \in \mathcal{C}$ hvis deres lukkede ε-baller deler minst et punkt.

Definisjon 5.0.4. *La $P \subset \mathbb{R}^d$ være en punktsky. Rips-komplekset $\mathcal{R}_\varepsilon$ av P gitt ved k-simplekser som korresponderer med $k+1$-tupler $(p_0, \ldots, p_k)$ slik at $|p_i - p_j| \leq \varepsilon$ for alle par i, j.*

[**?**]