0.1 Relasjoner og ordensrelasjoner

Noe som kommer til å være viktig gjennom oppgaven er relasjoner og spesielt ordensrelasjoner.

Definisjon 0.1.1. *En relasjon R på en mengde A er en undermengde av $A \times A$.*

Når et element $a \in A$ er relatert til et element $b \in A$ via en relasjon $R \subset A \times A$ skriver vi ofte aRb.

Noen egenskaper relasjoner kan ha er følgende:

For en relasjon $R \subset A \times A$, kan den ha

- Refleksivitet: Alle elementer i A er relaterte til seg selv.
- Symmetri: Hvis a er relatert til b så er b relatert til a.
- Transitivitet: Hvis a er relatert til b og b er relatert til c så er a relatert til c.
- Antisymmetri: Hvis a er relatert til b og b er relatert til a så er $a = b$.
- Strengt sammenhengendhet: a er relatert til b eller b er relatert til a.
- Asymmetri: Hvis a er relatert til b så er aldri b relatert til a.
- Irrefleksivitet: Ingen elementer er relatert til seg selv.

Eksempel 0.1.1. *For en mengde A er likhet $=$ en relasjon som er refleksiv, symmetrisk og transitiv*

Eksempel 0.1.2. *Mindre enn eller lik $\leq$ på $\mathbb{R}$ er refleksiv, symmetrisk, transitiv, og antisymmetrisk. Samme er sant for større enn eller likhetstegnet.*

Noen typer relasjoner som likhetstegnet og mindre enn eller likhetstegnet har samme egenskaper og brukes såpass ofte at de får sine egne navn

Definisjon 0.1.2. *En relasjon er kalt en ekvivalensrelasjon hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.*

En annen type relasjon er ordensrelasjoner. Det er en slik relasjon $\leq$ er. ordensrelasjoner kommer i mange former her er de tre største

Definisjon 0.1.3. *En preorden er en relasjon som er refleksiv og som er transitiv. En mengde med en preordensrelasjon er kalt en "preordnet mengde" "promengder."*

Definisjon 0.1.4. *En delvis orden er en preorden som også er antisymmetrisk. En mengde med en delvis ordensrelasjon er kalt en "devis ordnet mengde" ofte forkortet til "pomengde" fra det engelske ordet "partial order".*

Tilslutt har vi en total orden

Definisjon 0.1.5. *En total orden er en delvis orden som også er strengt sammenhengende. En mengde med en total orden er en kalt en "totalt ordnet mengde."*

Definisjon 0.1.6. *En relasjon er en streng ordensrelasjon hvis den er assymmetrisk, irrefleksiv og transitiv.*

Bemerk 0.1.1. *Per definisjon er alle total ordensrelasjoner en delvis orden og alle delvis ordensrelasjoner er en preordensrelasjon.*

Bemerk 0.1.2. *Delvis ordensrelasjoner induserer en streng orden ved relasjonen $<$ på følgende måte for en delvis ordensrelasjoner $\leq$*

$$a < b \text{ hvis og bare hvis } a \leq b \text{ og } a \neq b.$$

Denne type streng orden bruker vi nå hvor ordensrelasjonene med $\leq$ vil være delvis ordner, mens ordensrelasjonene med $<$ vil være strenger ordner.

Et viktig eksempel for denne oppgaven er den leksikografiske ordenen.

Eksempel 0.1.3. *For delvis ordnede mengder A med orden $\leq_A$ og B med orden $\leq_B$ kan vi sette den følgende ordenen $\leq$ på $A \times B$ ved å la $(a, b) \leq (a', b')$ hvis og bare hvis $a <_A a'$ eller hvis $a = a'$ og $b \leq_B b'$.*

Proposisjon 0.1.1. *Den leksikografiske ordenen er en delvis orden.*

Proof. La A og B være delvis ordnede mengder med ordner $\leq_A$ og $\leq_B$ hhv. og la $\leq$ være den leksikografiske ordnen på $A \times B$.

Refleksivitet

Refleksivitet er sant for gitt $(a, b) \in A \times B$ så er $a = a$ og $b \leq_B b$ ved **definisjon 0.1.4**, dermed er $(a, b) \leq (a, b)$.

Transitivitet

La $(a, b) \leq (a', b')$ og $(a', b') \leq (a'', b'')$. Enten så er $a <_A a'$ eller er $a = a'$ og $b \leq_B b'$, vi ser på disse tilfellene individuelt.

"$a <_A a'$": Siden $(a', b') \leq (a'', b'')$ har vi at $a' <_A a''$ eller $a' = a''$ og $b' \leq_B b''$. Hvis $a' <_A a''$ har vi ved transitivitet $a <_A a''$ og hvis $a' = a''$ og $b' \leq_B b''$ så har vi at $a <_A a''$.

"$a = a'$ og $b \leq b'$": Likt som over, siden $(a', b') \leq (a'', b'')$ så er $a' <_A a''$ eller $a' = a''$ og $b' \leq_B b''$. Hvis $a' <_A a''$ har vi at $a = a'$ som betyr at $a <_A a''$. Hvis $a' = a''$ og $b' \leq_B b''$ så har vi at $a = a'$ og $a' = a''$ så ved transitivitet av $=$ så er $a = a''$, ved transitivitet av $\leq_B$, siden $b \leq_B b'$ og $b' \leq_B b''$ så er $b' \leq_B b''$.

Antisymmetri

Til slutt må en vise at hvis $(a, b) \leq (a', b')$ og $(a', b') \leq (a, b)$ så er $(a, b) = (a', b')$. Dette gjør vi ved et kontrapositivt bevis. Anta at $(a, b) \neq (a', b')$, da viser vi at $(a, b) \not\leq (a', b')$ eller $(a', b') \not\leq (a, b)$. Siden $(a, b) \neq (a', b')$ så er $a \neq a$ som betyr at hvis $(a, b) \leq (a', b')$ må dette være fordi $a <_A a'$, men da kan ikke $a' <_A a$

ved antisymmetri av $\leq_A$ altså er $(a', b') \leq (a, b)$ og på samme måte kan ikke $(a, b) \leq (a', b')$ hvis $(a', b') \leq (a, b)$.

□

Ordensrelasjoner gir oss en rekkefølge på elementer i mengden.

0.2 Topologiske rom

Definisjon 0.2.1. *Et par $(X, \mathcal{T})$ hvor X er en mengde og $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ slik at*

- $X, \in \mathcal{T}$
- *Gitt en vilkårelig samling av mengder $\{U_\alpha\}_\alpha$ så er $\bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{T}$*
- *For en endelig samling av mengder $\{U_1, \ldots, U_n\} \in \mathcal{T}$ så er snittet $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{T}$*

Vi kaller mengden $\mathcal{T}$ for topologien på X og mengdene i $\mathcal{T}$ for åpne mengder.

Når topologien $\mathcal{T}$ på en mengde X er kjent eller ikke viktig lar vi være å skrive det topologiske rommet som et par $(X, \mathcal{T})$ og skriver bare X. Alle funksjoner mellom topologiske rom vil være kontinuerlige. Til slutt så vil et "rom" bety et topologisk rom.

Eksempel 0.2.1. *Euklidisk rom $(\mathbf{R}^n, \mathcal{T})$ er et topologisk rom med åpne mengder unioner av vilkårlig mange mengder av typen*

$$\mathcal{B}(x, \delta) = \{y \in \mathbf{R}^n \mid \|x - y\| < \delta\}$$

kalt åpne baller. Euklidisk rom er som regel alltid bare skrevet $\mathbf{R}^n$ siden det er den topologien på $\mathbf{R}^n$ som er antatt.

Definisjon 0.2.2. *La $(X, \mathcal{T}_X)$ og $(Y, \mathcal{T}_Y)$ være topologiske rom. En funksjon $f : X \to Y$ er kalt kontinuerlig hvis for en hver $V \in \mathcal{T}_Y$ så er $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.*

Eksempel 0.2.2. *La $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være funksjonen $f(x) = 2x + 1$, da er f kontinuerlig. La $V = (a, b)$ et opent intervall, da blir $f^{-1}(V) = \{x \in \mathbf{R} \mid 2x + 1 \in V\} = \left\{\frac{a}{2} - 1, \frac{b}{2} - 1\right\}$ som også er et åpent intervall.*

Definisjon 0.2.3. *La $(X, \mathcal{T})$ være et topologisk rom og la $A \subset X$ da er det en naturlig topologi $\mathcal{T}_A$ vi kan sette på A definert ved*

$$U \in \mathcal{T}_A \iff \exists V \in \mathcal{T} \quad s.a \quad V \cap A = U$$

Vi kaller $(A, \mathcal{T}_A)$ et underrom av $(X, \mathcal{T})$ og vi kaller $\mathcal{T}_A$ underromstopologien på A.

Når vi senere ser på punktskyer i $\mathbf{R}^n$ og spesifkt simplisial kompleksene

0.3 Homotopi

Definisjon 0.3.1. *La X og Y være topologiske rom og la $f, g : X \to Y$ være funksjoner. En homotopi mellom f og g er en funksjon*

$$F : X \times [0, 1] \to Y.$$

Slik at $F(x, 0) = f(x)$ og $F(x, 1) = g(x)$. Hvis det eksisterer en homotopi mellom en funksjon f og g sier vi at de er homotope og vi skriver at $f \simeq g$.

Definisjon 0.3.2. *To topologiske rom X og Y er homotopiekvivalente hvis det eksisterer funksjoner $f : X \to Y$ og $g : Y \to X$ slik at*

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \quad f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$$

0.4 Δ-Komplekser

En måte å lage topologiske rom er å starte med enkle byggeklosser og lime dem sammen. Dette kan vi gjøre ved å bruke n-dimensjonale trekanter kalt n-simplekser.

Definisjonene er fra **?**

Definisjon 0.4.1. *Standardsimplekset Δ^n er definert ved*

$$\Delta^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n+1} x_i = 1, x_i \geq 0 \ \forall i = 0, \ldots, n\}$$

En side på et n-simpleks er en $(n-1)$-simpleks.

Definisjon 0.4.2. *Et Δ-kompleks struktur på et rom X er en samling av kontinuerlige funksjoner $\sigma_\alpha : \Delta^n \to X$ med n avhengig av α slik at:*

1. *Restriksjonen $\sigma_\alpha \mid \mathring{\Delta}^n$ er injektiv og hvert punkt i X er i bildet av nøyaktig en slik Restriksjon.*
2. *Hver restriksjon av σ_α til en side av Δ^n er en av funksjonene $\sigma_\beta : \Delta^{n-1} \to X$*
3. *En mengde $A \subset X$ er åpen hvis og bare hvis $\sigma_\alpha^{-1}(A)$ er åpen for hver σ_α.*

Disse kriteriene gir oss en måte å lage forskjellige topologiske rom ved enkle byggeklosser.

Eksempel 0.4.1 (ex:SirkelDkomp)**.** *Vi kan lage et Δ for sirkelen S^1 ved følgende:*

- *La $\sigma_0 : \Delta^0 = \{*\} \to S^1$ være en avbilding som sender $*$ til et punkt i S^1.*
- *La $\sigma_1 : \Delta^1 \to X$ være avbildingen som sender $\partial\Delta^1$ til punktet $\sigma_0(*)$ og alle andre punkter $x \in \mathring{\Delta}^1$ sendes injektiv til S^1.*

Her er $\{\sigma_0, \sigma_1\}$ et Δ-kompleks på S^1. Intuitivt kan en tenke på σ_1 som at man limer fast endepunktene til linjen som gir oss sirkelen.

0.5 Vektorrom

For å definere hva et vektorrom er må vi først gå igjennom hva en kropp er.

Definisjon 0.5.1. *En mengde K sammen med binære operatorer $+, \cdot : K \times K \to K$ er en kropp hvis gitt $a, b, c \in K$ så holder det følgende*

- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $a + b = b + a$
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- *Det eksisterer et element $0 \in K$ slik at $a + 0 = a = 0 + a$*
- *Det eksisterer et element $1 \in K$ slik at $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$*
- *Det eksisterer et element $-a \in K$ slik at $a + (-a) = 0$*
- *Det eksisterer et element $a^{-1} \in K$ slik at $a \cdot a^{-1} = 1$.*

Ofte lar vi være å skrive $a + (-b)$ og skriver heller $a - b$ vi lar også være å skrive $a \cdot b$ og skriver heller ab

Definisjon 0.5.2. *Et vektorrom V over en kropp K er en mengde med binære operatorer $+ : V \times V \to V$ og $\cdot : K \times V \to V$, kalt skalarmultiplikasjon, slik at for elementer $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ og $a, b, c \in K$ så holder det følgende*

- $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$
- $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
- *Det eksisterer et element $\boldsymbol{0} \in V$ slik at $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{u}$*
- *Det eksisterer et element $-\boldsymbol{u} \in V$ slik at $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$*
- $(a + b) \cdot \boldsymbol{u} = a \cdot \boldsymbol{u} + b \cdot \boldsymbol{u}$
- $a \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a \cdot \boldsymbol{u} + a \cdot \boldsymbol{v}$
- $a \cdot (b \cdot \boldsymbol{u}) = (ab) \cdot \boldsymbol{u}$.

Vi kaller elementer $\boldsymbol{v} \in V$ for vektorer og elementer $a \in K$ for skalarer.

Igjen skriver vi ofte $\mathbf{v} + (-\mathbf{u})$ som $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ og $a \cdot \mathbf{v}$ som $a\mathbf{v}$.

Definisjon 0.5.3. *La V og W være vektorrom over en kropp K og la $f : V \to W$ være en funksjon. Vi kaller f lineær hvis for vektorer $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ og en skalar $a \in K$ så holder det følgende*

- $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$
- $f(a\boldsymbol{v}) = af(\boldsymbol{v})$

Vi kaller også slike funksjoner lineære avbildinger/transformasjoner/funksjoner

Eksempel 0.5.1. *Rommet* $V = \mathbb{R}^n$ *over kroppen* $\mathbb{R}$ *er et vektorrom med punktvis addisjon, og skalarmultiplikasjon*

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

og

$$c(a_1, \dots, a_n) = (ca_1, \dots, ca_n).$$

Eksempel 0.5.2. *funksjonen* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definert ved* $f(\boldsymbol{v}) = 2\boldsymbol{v}$ *er lineær siden gitt* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ *og* $a \in \mathbb{R}$ *så er*

- $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = 2(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = 2\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$
- $f(a\boldsymbol{v}) = 2(a\boldsymbol{v}) = (2a)\boldsymbol{v} = (a \cdot 2)\boldsymbol{v} = af(\boldsymbol{v})$

0.6 Vektorrom

For å definere hva et vektorrom er må vi først gå igjennom hva en kropp er.

Definisjon 0.6.1. *En mengde* K *sammen med binære operatorer* $+, \cdot : K \times K \to K$ *er en kropp hvis gitt* $a, b, c \in K$ *så holder det følgende*

- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $a + b = b + a$
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- *Det eksisterer et element* $0 \in K$ *slik at* $a + 0 = a = 0 + a$
- *Det eksisterer et element* $1 \in K$ *slik at* $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
- *Det eksisterer et element* $-a \in K$ *slik at* $a + (-a) = 0$
- *Det eksisterer et element* $a^{-1} \in K$ *slik at* $a \cdot a^{-1} = 1$.

Ofte lar vi være å skrive $a + (-b)$ og skriver heller $a - b$ vi lar også være å skrive $a \cdot b$ og skriver heller ab

Definisjon 0.6.2. *Et vektorrom* V *over en kropp* K *er en mengde med binære operatorer* $+ : V \times V \to V$ *og* $\cdot : K \times V \to V$*, kalt skalarmultiplikasjon, slik at for elementer* $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ *og* $a, b, c \in K$ *så holder det følgende*

- $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$
- $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
- *Det eksisterer et element* $\boldsymbol{0} \in V$ *slik at* $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{u}$
- *Det eksisterer et element* $-\boldsymbol{u} \in V$ *slik at* $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$
- $(a + b) \cdot \boldsymbol{u} = a \cdot \boldsymbol{u} + b \cdot \boldsymbol{u}$

- $a \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a \cdot \boldsymbol{u} + a \cdot \boldsymbol{v}$
- $a \cdot (b \cdot \boldsymbol{u}) = (ab) \cdot \boldsymbol{u}$.

Vi kaller elementer $\boldsymbol{v} \in V$ for vektorer og elementer $a \in K$ for skalarer.

Igjen skriver vi ofte $\mathbf{v} + (-\mathbf{u})$ som $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ og $a \cdot \mathbf{v}$ som $a\mathbf{v}$.

Definisjon 0.6.3. *La V og W være vektorrom over en kropp K og la $f : V \to W$ være en funksjon. Vi kaller f lineær hvis for vektorer $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ og en skalar $a \in K$ så holder det følgende*

- $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$
- $f(a\boldsymbol{v}) = af(\boldsymbol{v})$

Vi kaller også slike funksjoner lineære avbildinger/transformasjoner/funksjoner

Eksempel 0.6.1. *Rommet $V = \mathbb{R}^n$ over kroppen $\mathbb{R}$ er et vektorrom med punktvis addisjon, og skalarmultiplikasjon*

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

og

$$c(a_1, \dots, a_n) = (ca_1, \dots, ca_n).$$

Eksempel 0.6.2. *funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definert ved $f(\boldsymbol{v}) = 2\boldsymbol{v}$ er lineær siden gitt $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ og $a \in \mathbb{R}$ så er*

- $f(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = 2(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = 2\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$
- $f(a\boldsymbol{v}) = 2(a\boldsymbol{v}) = (2a)\boldsymbol{v} = (a \cdot 2)\boldsymbol{v} = af(\boldsymbol{v})$

0.7 Kategoriteori

Et samlende rammeverk i matematikk er en vanskelig oppgave å få laget, men et rammeverk som gjør en god jobb og som brukes heletiden nå til dags er kategoriteori. Kategoriteori gir en formulering på de forskjellige områdene i matematikk som f.eks. topologi og algebra.

Definisjon 0.7.1. *En kategori $\mathcal{C}$ er et par $(\mathrm{Ob}(\mathcal{C}), \hom(\mathcal{C}))$ av klasser. Elementene i $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ er kalt objekter og elementene i $\hom(\mathcal{C})$ er kalt morfier. Morfiene i $\mathcal{C}$ kan bli sett på som piler mellom objektene i $\mathcal{C}$, en morfi f mellom objekter A og B skrives $f : A \to B$. For morfier $f : A \to B$ og $g : B \to C$ har vi en morfi $g \circ f : A \to C$ som vi kaller komposisjonen av f med g. For ethvert objekt $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ har vi en morfi $\mathrm{id}_A : A \to A$ som vi kaller identitetsmorfien som tilfredstiller for enhver morfi $f : A \to B$:*

$$f \circ \mathrm{id}_A = f, \quad \mathrm{id}_B \circ f = f.$$

Bemerk 0.7.1. *Objektene og morfiene til noen kategorier som f.eks.* **Set** *som vi senere snakker raskt om kan ikke være inneholdt i det vi kaller mengder og er heller elementer av en klasse. Vi kaller kategorier hvor objektene og morfiene er elementer av en mengde små kategorier eller at en kategori er liten. Disse kategoriene kommer til å bli brukt senere i definisjonen på et diagram.*

I en kategori er det noen spesielle morfier som kalles isomorfier.

Definisjon 0.7.2. *En isomorfi i en kategori $\mathcal{C}$ er en morfi $f : A \to B$ mellom to objekter $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ hvor det eksisterer en morfi $g : B \to A$ slik at følgende holder*

$$f \circ g = \mathrm{id}_B, \quad g \circ f = \mathrm{id}_A.$$

Vi kaller g inversen til f. Hvis to objekter A og B er ismorfe skriver vi $A \cong B$.

Bemerk 0.7.2. *Identitetsmorfien er en isomorfi siden $\mathrm{id}_A \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_A$. Altså er id_A sin egen invers.*

Andre spesielle morfier er følgende:

Definisjon 0.7.3. *En morfi $f : A \to B$ er kalt en epimorfi hvis for ethvert par med mofier $g, h : B \to C$ så holder*

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h$$

En skriver $f : A \twoheadrightarrow B$ for en epimorfi når det er viktig å notere.

Definisjon 0.7.4. *En morfi $f : A \to B$ er kalt en monomorfi hvis for ethvert par $g, h : C \to A$ så holder*

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h$$

En skriver $f : A \hookrightarrow B$ for en monomorfi hvis det er viktig å notere.

Noen eksempler på kategorier, deres isomorfier, epimorfier og monomorfier er følgende

Eksempel 0.7.1. *Kategorien* **Set** *har mengder som objekter og funksjoner som morfier. Her er bijektive funksjoner isomorfier, surjektive funksjoner epimorfier og injektive funksjoner er monomorfier.*

Eksempel 0.7.2. *Kategorien* **Top** *er kategorien hvor objektene er topologiske rom og morfiene er kontinuerlige funksjoner. Isomorfier i* **Top***, kalt homeomorfier, er bijektive og kontinuerlig funksjoner med en kontinuerlig invers, epimorfi er surjektive og kontinuerlige funksjoner og monomorfier er injektive og kontinuerlige funksjoner.*

Eksempel 0.7.3. *Kategorien* $\mathbf{Vect}_K$ *er kategorien av vektorrom over en kropp K som objekter og lineære avbildinger som morfier. Isomorfier i* $\mathbf{Vect}_K$*, kalt vektorromisomorfier, er bijektive og lineære avbildinger, inversen vil automatisk være lineær så vi trenger ikke inverskriteriet som vi gjør i* **Top**. *Epimorfiene er surjektive lineære avbildinger og monomorfiene er injektive lineære avbildinger.*

Morfiene i en kategori trenger ikke å være funksjoner, her er et eksempel på en kategori hvor morfiene ikke er funksjoner.

Eksempel 0.7.4. *Kategorien* $\mathbf{R}$ *har de reelle tall* $\mathbb{R}$ *som objekter og* $\leq$ *relasjonen som morfier. Komposisjon er gitt ved transitivitet og identitetsmorfiene er gitt ved* $s = s$. *Identitetsmorfiene er også de eneste isomorfiene fordi hvis* $a \leq b$ *er en isomorfi så er* $b \leq a$ *dens invers, men hvis* $a \leq b$ *og* $b \leq a$ *så er* $a = b$. *Her er alle morfier epimorfier og monomorfier.*

Bemerk 0.7.3. *Gitt en kategori* $\mathcal{C}$ *eksisterer det en kategori* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ *kalt den omvendte kategorien av* $\mathcal{C}$ *med de samme objektene, men med alle morfiene snudd andre vei.*

I noen kategorier er det spesielle objekter kalt initialobjekt og terminalobjekter.

Definisjon 0.7.5. *I en kategori* $\mathcal{C}$ *er et initialobjekt* I *et objekt slik at for ethvert objekt* A *i* $\mathcal{C}$ *eksisterer det nøyaktig en morfi* $I \to A$.

Definisjon 0.7.6. *I en kategori* $\mathcal{C}$ *er et terminalobjekt* T *et objekt slik at for ethvert objekt* A *i* $\mathcal{C}$ *eksisterer det nøyaktig en morfi* $T \to A$.

Et objekt som er både initial og terminal er kalt et nullobjekt.

Vi kan også definere piler mellom kategorier. Disse pilene er kalt funktorer og er definert som følgende.

Definisjon 0.7.7. *La* $\mathcal{C}$ *og* $\mathcal{D}$ *være kategorier en funktor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *er funksjoner* $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$ *og* $\hom(\mathcal{C}) \to \hom(\mathcal{D})$ *slik at for morfier* $f : A \to B$ *og* $g : B \to C$ *i* $\mathcal{C}$ *så er* $F(f) : F(A) \to F(B)$, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ *og for ethvert objekt* $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *så er* $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$.

Definisjon 0.7.8. *En funktor på formen* $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ *eller* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$ *er kalt en kontravariant funktor fra* $\mathcal{C}$ *til* $\mathcal{D}$.

Ofte skriver vi bare $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ for en kontravariant funktor og sier at den er kontravariant. En funktor som ikke er kontravariant kalles også ofte kovariant, men også bare for en funktor.

Bemerk 0.7.4. *Gitt en funktor* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *og en isomorfi* $f : A \to B$ *i* $\mathcal{C}$ *så er* $F(f)$ *en isomorfi i* $\mathcal{D}$. *Siden* f *er en isomorfi så eksisterer det en* $g : B \to A$ *med egenskapene i* ***Definisjon 0.7.2***. *Dette gir*

$$\mathrm{id}_{F(A)} = F(\mathrm{id}_A) = F(f \circ g) = F(f) \circ F(g).$$

På samme måte får vi $F(f \circ g) = \mathrm{id}_{F(B)}$. *Dermed blir* $F(g)$ *en invers av* $F(f)$ *som betyr at den er en isomorfi.*

Eksempel 0.7.5. *Vi kan definere en funktor* $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$ *som setter den diskrete topologien på en mengde* X, *her blir alle funksjoner* $f : X \to Y$ *sendt til* $F(f) = f : (X, \mathcal{P}(X)) \to (Y, \mathcal{P}(Y))$, *den er kontinuerlig siden for enhver delmengde* $A \in \mathcal{P}(Y)$ *så er* $f^{-1}(A) \in \mathcal{P}(X)$.

På samme måte har vi en funktor $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$ som setter den trivielle topologien på en mengde og bevarer funksjonene.

Eksempel 0.7.6. *Vi har også en funktor* $F : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ *definert ved* $F((X, \mathcal{T})) = X$ *og* $F(f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}')) = f : X \to Y$. *Denne funktoren kaller vi for glemmefunktoren siden den glemmer all struktur til rommet. En kan også gjøre dette for andre kategorier som* $\mathbf{Vect}_K$ *og* $\mathbf{R}$.

Eksempel 0.7.7. *Et eksempel på en kontravariant funktor er* $\mathrm{Hom}(\cdot, W) : \mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Vect}_K$ *som sender et vektorrom* $V \in \mathbf{Vect}_K$ *til vektorrommet* $\mathrm{Hom}(V, W)$ *av lineære avbildinger* $V \to W$ *og den sender lineære avbildinger* $T : U \to V$ *til* $\mathrm{Hom}(T, W) : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(U, W)$ *via* $\mathrm{Hom}(T, W)(g) = g \circ T$ *for en* $g : V \to W$. *Her kan man se at funktoren snur på morfien som gjør den kontravariant.*

Man kan også definere en pil mellom to funktorer

Definisjon 0.7.9. *La* $\mathcal{C}$ *og* $\mathcal{D}$ *være kategorier og la* $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *funktorer. En naturlig transformasjoner er en pil* $\eta : F \to G$ *slik at for ethvert objekt* $A \in \mathcal{C}$ *har vi en morfi* $\eta_A : F(A) \to G(A)$ *og for enhver morfi* $f : A \to B$ *i* $\mathcal{C}$ *har vi at diagrammet*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"'] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

kommuterer.

Funktorer og naturlige transformasjoner gir oss en ny type kategori

Definisjon 0.7.10. *For kategorier* $\mathcal{C}$ *og* $\mathcal{D}$ *er kategorien* $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$, *med funktorer* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *som objekter og naturlige transformasjoner som morfier, kalt en funktorkategori*

Diagrammer er viktige for å kunne studere forskjellige egenskaper til objekter og morfier i en kategori. Her er definisjonen på et diagram.

Definisjon 0.7.11. *La* $\mathcal{J}$ *være en liten kategori. Et diagram av form* $\mathcal{J}$ *i en kategori* $\mathcal{C}$ *er en funktor* $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$.

Dette er ikke en intuitiv definisjon, men diagrammer er ikke så farlige som en skal tro her er noen illustrative eksempler

Eksempel 0.7.8. *Her er en illustrasjon som viser hvordan formen på kategorien* $\mathcal{J}$ *gir et diagram i en kategori* $\mathcal{C}$

$$\mathcal{J}$$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "d"] \arrow[loop left, "\mathrm{id}_1"] & 2 \arrow[d, "b"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}_2"] \\
3 \arrow[r, "c"] \arrow[loop left, "\mathrm{id}_3"] & 4 \arrow[loop right, "\mathrm{id}_4"]
\end{tikzcd}
\quad \xRightarrow{D} \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"] \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] & B \arrow[d, "g"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}_B"] \\
C \arrow[r, "h"] \arrow[loop left, "\mathrm{id}_C"] & D \arrow[loop right, "\mathrm{id}_D"]
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{C}$$

Funktoren D sender 1 til A, 2 til B osv. Siden D er en funktor sender den id_1 *til* $\mathrm{id}_{D(1)} = \mathrm{id}_A$ *osv. Funktoren sender morfiene til de naturlige morfiene.*

Eksempel 0.7.9. *I dette eksempelet er $\mathcal{J}$ trekantformet, dette gir diagrammet* $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$

$$\mathcal{J}$$

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "a"] \arrow[dr, "c"] \arrow[loop left, "\mathrm{id}_1"] & 2 \arrow[d, "b"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}_2"] \\
& 3 \arrow[loop right, "\mathrm{id}_3"]
\end{tikzcd}
\quad \xRightarrow{D} \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"] \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] & B \arrow[d, "g"] \arrow[loop right, "\mathrm{id}_B"] \\
& C \arrow[loop right, "\mathrm{id}_C"]
\end{tikzcd}$$

$$\mathcal{C}$$

Funktoren D sender 1 til A, 2 til B og 3 til C og morfiene blir sendt til de naturlig morfiene.

Vi pleier aldri å faktisk tegne opp $\mathcal{J}$ og funktoren D, definisjonen er bare nødvendig for å være presis. Objektenes identiteter er alltid tilstede i et diagram, derfor er det ikke nødvendig å tegne dem i diagrammet med mindre de er viktige i diagrammet.

Vi bruker diagrammer hele tiden i matematikk og spesielt et type diagram kalt et kommutativt diagram

Definisjon 0.7.12. *Et diagram $D : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ er kalt kommutativt hvis alle morfier som starter med samme objekt og slutter på samme objekt er like.*

I **eksempel 0.7.8** er diagrammet kommutativt hvis $g \circ f = h \circ i$ og i **eksempel 0.7.9** er diagrammet kommutativt hvis $h = g \circ f$.

1 Varighetsmoduler

Et sentralt tema for å kunne forstå stabilitet og topologisk dataanalyse er ideen om varighetsmoduler. I dette kapitellet går vi gjennom en litt abstrakt introduksjon og så ser vi på hvorfor de er viktige innenfor topologisk dataanalyse. Definisjonen på en varighetsmodul er kort og enkel.

Definisjon 1.0.1. *En varighetsmodul M er en funktor $M : \mathbf{R} \to \mathbf{vect}_k$.*

Vi skriver M_t for vektorromet $M(t)$ (det t-ende vektorromet) for å unngå fremtidig forvirring. Siden en varighetsmodul M er en funktor fra pomengden $\mathbf{R}$ til $\mathbf{vect}_k$ så har vi for hver $s \leq t$ en lineær avbilding $\varphi_M(s,t) : M_s \to M_t$ som vi kaller overgangsavbildinger.

Gitt to varighetsmoduler M og N kan vi definere en morfi $f : M \to N$ som en samling av lineære avbildinger $\{f(s) : M_s \to N_s \mid s \in \mathbb{R}\}$ slik at diagrammet

$$\begin{tikzcd}
M_s \arrow[r, "f(s)"] \arrow[d, "\varphi_M(s,t)"] & N_s \arrow[d, "\varphi_N(s,t)"] \\
M_t \arrow[r, "f(t)"] & N_t
\end{tikzcd}$$

kommuterer. Vi kan komponere morfiene på den følgende måten; gitt morfier $f : M \to N$ og $g : M \to P$ er $g \circ f$ definert som samlingen $\{g_s \circ f_s : M_s \to P_s \mid s \in \mathbb{R}\}$.

Siden vi har objekter, varighetsmoduler, og vi har morfier mellom dem kan vi definere kategorien av varighets moduler

Definisjon 1.0.2. *Kategorien $\mathbf{vect}_k^{\mathbf{R}}$ er kategorien av varighetsmodulene med varighetsmodul-morfier mellom dem.*

1.1 Inflettingsavstand

Stabilitet av varighetsmoduler innebærer relasjonen mellom to typer distanser, Bottleneck distansen mellom barkoder og inflettingsavstanden mellom varighetsmoduler. Her definerer vi inflettingsavstanden mellom to varighetsmoduler.

For å definere distansen må vi gjennom noen få steg.

Definisjon 1.1.1. *En δ-forskyvning av en varighetsmodul er en funktor*

$$(\cdot)(\delta) : \mathbf{vect}_k^{\mathbf{R}} \to \mathbf{vect}_k^{\mathbf{R}}$$

Som tar en varighetsmodul M til $M(\delta)$ hvor $M(\delta)_t = M_{t+\delta}$ og tar varighetsmodulmorfier $f : M \to N$ til $f(\delta) : M(\delta) \to N(\delta)$.

Denne funktorer gir oss konseptet av δ-infletting.

Definisjon 1.1.2. *La M og N være varighetsmoduler. Vi sier at M og N er δ-interleavet hvis det eksisterer varighetsmodulmorfier $f : M \to N(\delta)$ og $g : N \to M(\delta)$ slik at*

$$g(\delta) \circ f = \varphi_M(t, t + 2\delta), \quad f(\delta) \circ g = \varphi_N(t, t + 2\delta)$$

Vi kaller $\varphi^{\varepsilon}_M(t) = \varphi_M(t, t + \varepsilon)$. Bemerk at $\varphi^0_M = \mathrm{id}_M$ fordi $\varphi^0_M(t) = \varphi_M(t, t + 0) = \varphi_M(t, t) = \mathrm{id}_M$.

Definisjon 1.1.3. *For M og N varighetsmoduler definerer vi inflettingsavstanden d_I ved*

$$d_I(M, N) = \inf\{\delta \in [0, \infty) \mid M \text{ og } N \text{ er } \delta\text{-interleavet}\}$$

Denne avstanden gir et tall på hvor "isomorfe" to varighetsmoduler er.

Proposisjon 1.1.1. *For M og N varighetsmoduler så holder*

$$d_I(M, N) = 0 \iff M \cong N$$

Proof. " $\implies$ "

Hvis $d_I(M, N) = 0$ så finnes det en 0-infletting mellom M og N altså det eksisterer varighetsmodulmorfier $f : M \to N(0) = N$ og $g : N \to M(0) = M$ slik at $g(0) \circ f = g \circ f = \varphi^0_M = \mathrm{id}_M$ og $f(0) \circ g = \varphi^0_N = \mathrm{id}_N$. Dermed er f og g inverser av hverandre og er dermed isomorfier.

" $\impliedby$ "

Hvis $M \cong N$ så eksisterer det varighetsmodulmorfier $f : M \to N$ og $g : N \to M$ slik at $g \circ f = \mathrm{id}_M = \varphi^0_M$ og $f \circ g = \mathrm{id}_N = \varphi^0_N$. Så det eksisterer en 0-infletting og dermed er $d_I(M, N) = 0$. $\square$

2 Barkoder

En barkode $\mathcal{B}$ er en representasjon av en multimengde av intervaller. Elementer i en barkode er dermed par (I, k) der I er et intervall og $k \in \mathbb{N}$. Ofte når indeksen k ikke er nødvendig skriver vi bare I for et intervall i barkoden.

I **?** sier forfatter at gitt en persistensmodul M som kan skrives

$$M \cong \bigoplus_{I \in \mathcal{B}_M} C(I)$$

Da er $\mathcal{B}_M$ unikt bestemt. Vi kaller slike persistensmoduler intervalldekomponerbare.

Dette er en konsekvens av følgende teorem

Teorem 2.0.1. *Hvis $\bigoplus_{I\in\mathcal{B}} C(I) \cong \bigoplus_{J\in\mathcal{C}} C(J)$ så er $\mathcal{B} \cong \mathcal{C}$*

Proof. Anta at det ikke eksisterer en bijeksjon mellom $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$ f.eks. $\square$

I følge **?** har vi følgende teorem

Teorem 2.0.2. *Enhver p.e.d. persistensmodul er intervalldekomponerbar.*

Proof. La M være en p.e.d. peristensmodul. Mengden $I_n = \{s \in \mathbb{R} \mid \dim M_s = n\}$ er en disjunkt union av intervaller $I_{n_1} \sqcup I_{n_2} \sqcup \dots$, vi kan la $C(I_{n_1} \sqcup I_{n_2} \sqcup \dots) = C(I_{n_1}) \oplus C(I_{n_2}) \oplus \dots$ og få

$$M \cong \bigoplus_{n,k\in\in\mathbb{N}} C(I_{n_k}).$$

Da blir $\mathcal{B}_M = \{I_{n_j} \mid n, j \in \mathbb{N}\}$, en kan la $I_{n_j} =$ når den ikke påvirker unionen I_n. $\square$

Barkoder kan også gjøres om til en kategori med morfier kalt overlapp-matchinger. For å definere en overlapp-matching må vi først definere hva en matching av mengder er.

Definisjon 2.0.1. *En matching mellom mengder S og T (skrevet $\sigma : S \to T$) er en bijeksjon $\sigma : S' \to T'$ mellom delmengder $S' \subset S$ og $T' \subset T$.*

Definisjon 2.0.2. *En matching $\sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ av barkoder er en overlapp-matching hvis gitt $\sigma(I) = J$ oppfylles følgende:*

- $I \cap J \neq$.
- *I begrenser J over.*
- *J begrenser I under.*