

Stabilitet i topologisk dataanalyse

Andreas M. Kristensen

May 1, 2025

Innhold

1	Forkunnskaper	1
1.1	Relasjoner	1
1.2	Topologiske rom	3
1.2.1	Homotopi	5
1.2.2	Simplisialkomplekser	5
1.3	Vektorrom	6
1.4	Multimengder og parvis kobling	7
1.5	Kategoriteori	8
1.5.1	Homologi	13
2	Varighetsmoduler	14
2.1	Inflettingsavstand	15
3	Strekkoder	18
3.1	Flaskehalsavstanden	21
4	Varighetshomologi	23

1 Forkunnskaper

1.1 Relasjoner

Noe som kommer til å være viktig gjennom oppgaven er relasjoner.

Definisjon 1.1.1. *En relasjon R på en mengde A er en undermengde av $A \times A$.*

Når et element $a \in A$ er relatert til et element $b \in A$ via en relasjon $R \subset A \times A$ skriver vi ofte aRb .

For en relasjon $R \subset A \times A$, kan den ha følgende egenskaper:

- Refleksivitet: Alle elementer i A er relaterte til seg selv.
- Symmetri: Hvis a er relatert til b så er b relatert til a .

- Transitivitet: Hvis a er relatert til b og b er relatert til c så er a relatert til c .
- Antisymmetri: Hvis a er relatert til b og b er relatert til a så er $a = b$.
- Strengt sammenhengendhet: a er relatert til b eller b er relatert til a .
- Asymmetri: Hvis a er relatert til b så er aldri b relatert til a .
- Irrefleksivitet: Ingen elementer er relatert til seg selv.

Eksempel 1.1.1. For en mengde A er likhet ($=$) gitt ved mengden

$$\{(a, a) \mid a \in A\}$$

en relasjon som er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Eksempel 1.1.2. Mindre enn eller lik \leq på \mathbb{R} , gitt ved mengden

$$\{(a, b) \mid a < b \text{ eller } a = b\}$$

er refleksiv, symmetrisk, transitiv, og antisymmetrisk. Samme er sant for større enn eller lik.

Noen typer relasjoner som likhetstegnet og mindre enn eller likhetstegnet har samme egenskaper og brukes såpass ofte at de får sine egne navn.

Definisjon 1.1.2. En relasjon er kalt en *ekvivalensrelasjon* hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

En annen type relasjon er ordensrelasjoner. Det er en slik relasjon \leq er. ordensrelasjoner kommer i mange former her er de tre hovedordensrelasjonene.

Definisjon 1.1.3. En *preorden* er en relasjon som er refleksiv og som er transitiv. En mengde med en preordensrelasjon er kalt en "preordnet mengde" "promengde."

Definisjon 1.1.4. En *delvis orden* er en preorden som også er antisymmetrisk. En mengde med en delvis ordensrelasjon er kalt en "delvis ordnet mengde" ofte forkortet til "pomengde" fra det engelske ordet "partial order".

Tilslutt har vi en total orden.

Definisjon 1.1.5. En *total orden* er en delvis orden som også er strengt sammenhengende. En mengde med en total orden er en kalt en "totalt ordnet mengde."

Definisjon 1.1.6. En relasjon er en *streng ordensrelasjon* hvis den er assymmetrisk, irrefleksiv og transitiv.

Bemerk 1.1.1. Per definisjon er alle total ordensrelasjoner en delvis orden og alle delvis ordensrelasjoner er en preordensrelasjon.

Bemerk 1.1.2. Delvis ordensrelasjoner inducerer en streng orden ved relasjonen $<$ på følgende måte for en delvis ordensrelasjoner \leq

$$a < b \text{ hvis og bare hvis } a \leq b \text{ og } a \neq b.$$

Denne type streng orden bruker vi nå hvor ordensrelasjonene med \leq vil være delvis ordner, mens ordensrelasjonene med $<$ vil være strenger ordner.

Et viktig eksempel for denne oppgaven er den leksikografiske ordenen.

Eksempel 1.1.3. For delvis ordnede mengder A med orden \leq_A og B med orden \leq_B kan vi sette den følgende ordenen \leq på $A \times B$ ved å la $(a, b) \leq (a', b')$ hvis og bare hvis $a <_A a'$ eller hvis $a = a'$ og $b \leq_B b'$.

Proposisjon 1.1.1. Den leksikografiske ordenen er en delvis orden.

bevis. La A og B være delvis ordnede mengder med ordner \leq_A og \leq_B hhv. og la \leq være den leksikografiske ordnen på $A \times B$.

Refleksivitet

Refleksivitet er sant for gitt $(a, b) \in A \times B$ så er $a = a$ og $b \leq_B b$ ved **definisjon 1.1.4**, dermed er $(a, b) \leq (a, b)$.

Transitivitet

La $(a, b) \leq (a', b')$ og $(a', b') \leq (a'', b'')$. Enten så er $a <_A a'$ eller er $a = a'$ og $b \leq_B b'$, vi ser på disse tilfellene individuelt.

" $a <_A a''$ ": Siden $(a', b') \leq (a'', b'')$ har vi at $a' <_A a''$ eller $a' = a''$ og $b' \leq_B b''$. Hvis $a' <_A a''$ har vi ved transitivitet $a <_A a''$ og hvis $a' = a''$ og $b' \leq_B b''$ så har vi at $a <_A a''$.

" $a = a'$ og $b \leq b''$ ": Likt som over, siden $(a', b') \leq (a'', b'')$ så er $a' <_A a''$ eller $a' = a''$ og $b' \leq_B b''$. Hvis $a' <_A a''$ har vi at $a = a'$ som betyr at $a <_A a''$. Hvis $a' = a''$ og $b' \leq_B b''$ så har vi at $a = a'$ og $a' = a''$ så ved transitivitet av \leq_B er $a = a''$, ved transitivitet av \leq_B , siden $b \leq_B b'$ og $b' \leq_B b''$ så er $b \leq_B b''$.

Antisymmetri

Til slutt må en vise at hvis $(a, b) \leq (a', b')$ og $(a', b') \leq (a, b)$ så er $(a, b) = (a', b')$. Dette gjør vi ved et kontrapositivt bevis. Anta at $(a, b) \neq (a', b')$, da viser vi at $(a, b) \not\leq (a', b')$ eller $(a', b') \not\leq (a, b)$. Siden $(a, b) \neq (a', b')$ så er $a \neq a'$ som betyr at hvis $(a, b) \leq (a', b')$ må dette være fordi $a <_A a'$, men da kan ikke $a' <_A a$ ved antisymmetri av \leq_A altså er $(a', b') \leq (a, b)$ og på samme måte kan ikke $(a, b) \leq (a', b')$ hvis $(a', b') \leq (a, b)$. □

Ordensrelasjoner gir oss en rekkefølge på elementer i mengden.

1.2 Topologiske rom

Topologiske rom generaliserer metriske rom videre ved å kvitte seg med en metrikk som måler avstanden mellom punkter i rommet. I topologiske rom er

alt beskrevet ved åpne mengder. Vi bruker topologiske rom til å undersøke formen på data. Definisjonen som følger er tatt fra [Munkres, 2013, seksjon 12].

Definisjon 1.2.1. Et par (X, \mathcal{T}) hvor X er en mengde og $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ slik at

- X og \emptyset er i \mathcal{T} .
- Unionen av elementene i enhver delmengde \mathcal{T} er også i \mathcal{T} .
- Snittet av elementene i enhver endelig delmengde av \mathcal{T} er i \mathcal{T} .

Vi kaller mengden \mathcal{T} for topologien på X og mengdene i \mathcal{T} for åpne mengder.

Mellom topologiske rom har vi også en spesiell type funksjon kalt en kontinuerlig funksjon. Definisjonen på en kontinuerlig funksjon er gitt i [Munkres, 2013, seksjon 18]

Definisjon 1.2.2. La (X, \mathcal{T}_X) og (Y, \mathcal{T}_Y) være topologiske rom. En funksjon $f : X \rightarrow Y$ er kalt kontinuerlig hvis for en hver $V \in \mathcal{T}_Y$ så er $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

Eksempel 1.2.1. La $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ være funksjonen $f(x) = 2x + 1$, da er f kontinuerlig. La $V = (a, b)$ et opent intervall, da blir $f^{-1}(V) = \{x \in \mathbf{R} \mid 2x + 1 \in V\} = \{\frac{a}{2} - 1, \frac{b}{2} - 1\}$ som også er et åpent intervall.

Når topologien \mathcal{T} på en mengde X er kjent eller ikke viktig lar vi være å skrive det topologiske rommet som et par (X, \mathcal{T}) og skriver bare X . Alle funksjoner mellom topologiske rom vil være kontinuerlige. Til slutt så vil et "rom" bety et topologisk rom.

Eksempel 1.2.2. Euklidisk rom $(\mathbf{R}^n, \mathcal{T})$ er et topologisk rom med åpne mengder unioner av vilkårlig mange mengder av typen

$$\mathcal{B}(x, \delta) = \{y \in \mathbf{R}^n \mid \|x - y\| < \delta\}$$

kalt åpne baller. Euklidisk rom er som regel alltid bare skrevet \mathbf{R}^n siden det er den topologien på \mathbf{R}^n som er antatt.

For et topologisk rom (X, \mathcal{T}) og en delmengde $A \subset X$ er det en naturlig topologi vi kan sette på A .

Definisjon 1.2.3. La (X, \mathcal{T}) være et topologisk rom og la $A \subset X$ da er det en naturlig topologi \mathcal{T}_A vi kan sette på A definert ved

$U \in \mathcal{T}_A$ hvis og bare hvis det eksisterer en åpen mengde $V \in \mathcal{T}$ slik at $V \cap A = U$

Vi kaller (A, \mathcal{T}_A) et underrom av (X, \mathcal{T}) og vi kaller \mathcal{T}_A underromstopologien på A .

1.2.1 Homotopi

Fra [Munkres, 2013, seksjon 51] kan man tenke at homotopi representerer en kontinuerlig "deforming" fra en funksjon til en annen.

Definisjon 1.2.4. La X og Y være topologiske rom og la $f, g : X \rightarrow Y$ være funksjoner. En homotopi mellom f og g er en funksjon

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow Y.$$

Slik at $F(x, 0) = f(x)$ og $F(x, 1) = g(x)$. Hvis det eksisterer en homotopi mellom en funksjon f og g sier vi at de er homotope og vi skriver $f \simeq g$.

Definisjon 1.2.5. To topologiske rom X og Y er homotopiekvivalente hvis det eksisterer funksjoner $f : X \rightarrow Y$ og $g : Y \rightarrow X$ slik at

$$g \circ f \simeq \text{id}_X \quad f \circ g \simeq \text{id}_Y$$

1.2.2 Simplisialkomplekser

Gitt at denne og neste seksjon om homologi er viktige i **seksjon 4**, men kommer ikke til å bli brukt ellers vil disse seksjonene inneholde uformelle forklaringer og noen eksempler. Definisjonene er tatt fra [Munkres, 2018, seksjon 1] og [?, seksjon 2].

Definisjon 1.2.6. En mengde $\{a_0, \dots, a_n\}$ av punkt i \mathbb{R}^N er geometrisk uavhengige hvis likningene

$$\sum_{i=0}^n t_i = 0 \quad \text{og} \quad \sum_{i=0}^n t_i a_i = 0$$

impliserer at $t_0 = t_1 = \dots = t_n = 0$.

Eksempel 1.2.3. Et eksempel på geometrisk uavhengige punkter er $(3, 3)$, $(4, 5)$ og $(6, 4)$. Likningene

$$t_0 + t_1 + t_2 = 0$$

$$3t_0 + 4t_1 + 6t_2 = 0$$

$$3t_0 + 5t_1 + 4t_2 = 0$$

gir at $t_0, t_1, t_2 = 0$

Definisjon 1.2.7. La $\{a_0, \dots, a_n\}$ være en geometrisk uavhengig mengde i \mathbb{R}^N . Vi lar n -simplekset σ utspent av a_0, \dots, a_n være mengden av punkt

$$\sum_{i=0}^n t_i a_i \quad \text{hvor} \quad \sum_{i=0}^n t_i = 1$$

og $t_i \geq 0$ for alle i . Vi skriver $[a_0, \dots, a_n]$ for simplekset utspent av $\{a_0, \dots, a_n\}$. Punktene som utspenner et simpleks er kalt noder.

Definisjon 1.2.8. En side av et simpleks $[v_0, \dots, v_n]$ er et simpleks $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$, hvor \hat{v}_i indikerer at vi sletter den i -te noden i simplekset.

Definisjon 1.2.9. Et simplisialkompleks K i \mathbb{R}^N er en samling av simplekser i \mathbb{R}^N slik at:

1. En side av et simpleks av K er i K .
2. Snittet av ethvert par av simplekser av K er en side av begge simpleksene.

I [Munkres, 2018, seksjon 5] gir forfatter følgende definisjon om simplisialkomplekser

Definisjon 1.2.10. La σ være et simpleks. Definer to rekkefølger av dens nodemengde som ekvivalente hvis de er forskjellig fra en annen opp til en jevn permutasjon. Hvis $\dim \sigma > 0$, faller rekkefølgene av dens noder inn i en av to ekvivalensklasser. Enhver av disse klassene er kalt en orientasjon av σ . Et orientert simpleks er et simpleks med en orientasjon.

Eksempel 1.2.4. La p_0, p_1, p_2 være geometrisk uavhengige punkter i \mathbb{R}^2 da er $X = \{[p_0], [p_1], [p_2], [p_0, p_1], [p_0, p_2], [p_1, p_2]\}$ et simplisialkompleks for S^1 .

1.3 Vektorrom

For å definere hva et vektorrom er må vi først gå igjennom hva en kropp er. Definisjonen er inspirert av definisjonen i [Hungerford, 2012, definisjon 1.1 kapittel 3] og [Hungerford, 2012, definisjon 1.5 kapittel 3].

Definisjon 1.3.1. En mengde K sammen med binære operasjoner $+, \cdot : K \times K \rightarrow K$ er en kropp hvis gitt $a, b, c \in K$ så holder det følgende

- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $a + b = b + a$
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- Det eksisterer et element $0 \in K$ slik at $a + 0 = a = 0 + a$
- Det eksisterer et element $1 \in K$ slik at $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
- Det eksisterer et element $-a \in K$ slik at $a + (-a) = 0$
- Det eksisterer et element $a^{-1} \in K$ slik at $a \cdot a^{-1} = 1$.

Ofte lar vi være å skrive $a + (-b)$ og skriver heller $a - b$ vi lar også være å skrive $a \cdot b$ og skriver heller ab .

Følgende definisjon er basert på [Hungerford, 2012, definisjon 1.1 kapittel 4]

Definisjon 1.3.2. Et vektorrom V over en kropp K er en mengde med binære operasjoner $+: V \times V \rightarrow V$ og $\cdot : K \times V \rightarrow V$, kalt skalarmultiplikasjon, slik at for elementer $u, v, w \in V$ og $a, b, c \in K$ så holder det følgende

- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- Det eksisterer et element $\mathbf{0} \in V$ slik at $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} = \mathbf{0} + \mathbf{u}$
- Det eksisterer et element $-\mathbf{u} \in V$ slik at $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
- $(a + b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot \mathbf{u} + b \cdot \mathbf{u}$
- $a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a \cdot \mathbf{u} + a \cdot \mathbf{v}$
- $a \cdot (b \cdot \mathbf{u}) = (ab) \cdot \mathbf{u}$.

Vi kaller elementer $\mathbf{v} \in V$ for vektorer og elementer $a \in K$ for skalarer.

Igjen skriver vi ofte $\mathbf{v} + (-\mathbf{u})$ som $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ og $a \cdot \mathbf{v}$ som $a\mathbf{v}$.

Definisjon 1.3.3. La V og W være vektorrom over en kropp K og la $f : V \rightarrow W$ være en funksjon. Vi kaller f lineær hvis for vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ og en skalar $a \in K$ så holder det følgende

- $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$
- $f(a\mathbf{v}) = af(\mathbf{v})$

Vi kaller også slike funksjoner lineære avbildinger/transformasjoner/funksjoner

Eksempel 1.3.1. Rommet $V = \mathbb{R}^n$ over kroppen \mathbb{R} er et vektorrom med punktvis addisjon, og skalarmultiplikasjon

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

og

$$c(a_1, \dots, a_n) = (ca_1, \dots, ca_n).$$

Eksempel 1.3.2. funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definert ved $f(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}$ er lineær siden gitt $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ og $a \in \mathbb{R}$ så er

- $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 2(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 2\mathbf{u} + 2\mathbf{v} = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$
- $f(a\mathbf{v}) = 2(a\mathbf{v}) = (2a)\mathbf{v} = (a \cdot 2)\mathbf{v} = af(\mathbf{v})$

1.4 Multimengder og parvis kobling

Mengder er ofte begrensede i og med at de ikke tillater repeterende elementer.

Definisjon 1.4.1. En samling med (potensielt) repeterende elementer er kalt en multimengde.

For å differensiere mellom vanlige mengder og multimengder bruker vi en annen notasjon for multimengder

Definisjon 1.4.2. En multimengde A av elementer som tilfredstiller et predikat Φ er skrevet som følger

$$\{x \mid \Phi(x)\}$$

Definisjon 1.4.3. For enhver multimengde S eksisterer det en unik mengde S som ignorerer repetisjoner. Det eksisterer også en funksjon $\mu : S \rightarrow \mathbb{N}$ som teller multiplisiteten av et element in S

Definisjon 1.4.4. Representasjonen av en multimengde S er en mengde definert ved

$$\text{Rep}(S) = \{(x, k) \mid x \in S, k \leq \mu(x)\}$$

mellom to mengder kan vi definere noe kalt en parvis kobling

Definisjon 1.4.5. En parvis kobling mellom mengder S og T (skrevet $\sigma : S \rightarrow T$) er en bijeksjon $\sigma : S' \rightarrow T'$ mellom delmengder $S' \subset S$ og $T' \subset T$. Formelt er $\sigma \subset S \times T$ en relasjon slik at $(s, t) \in \sigma$ hvis og bare hvis $s \in S'$ og $\sigma(s) = t$. Komposisjonen av to parvis koblinger $\sigma : S \rightarrow T$ og $\tau : T \rightarrow U$ er definert som relasjonen

$$\tau \circ \sigma = \{(s, u) \mid (s, t) \in \sigma, (t, u) \in \tau \text{ for en } t \in T\}.$$

Klassen av mengder sammen med parvis koblinger gir en ny kategori vi kaller **Mch**.

1.5 Kategoriteori

Forfatter i [Lane, 2010, introduksjon] sier "Category theory starts with the observation that many properties of mathematical systems can be unified and simplified by a presentation with diagrams of arrows." Kategoriteori lar oss samle forskjellige områder innen matematikk som topologiske rom og vektorrom. Teorien lar oss også studere egenskaper i en kategori ved bruk av en annen kategori via spesielle piler kalt funktorer.

Fra [Agore, 2023, definisjon 1.2.1] er definisjonen på en kategori følgende

Definisjon 1.5.1. En kategori \mathcal{C} består av den følgende data:

1. En klasse $\text{Ob}(\mathcal{C})$ med elementer kalt objekter.
2. for ethvert par av objekter A, B en (mulig rom) mengde $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ med elementer kalt morfier fra A til B . Et element $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ denoteres $f : A \rightarrow B$, A og B er kalt domenen og kodomenen av f hhv.
3. for enhver trippel av objekter A, B, C , en komposisjonslov

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

$$(f, g) \mapsto g \circ f$$

4. for ethvert objekt A en morfi $\text{id}_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ kalt identiteten på A .

5. *Assosiativ lov: for morfier $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ og $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D)$ holder følgende likning*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

6. *Identitetslov: for en morfi $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ holder likningen*

$$\text{id}_B \circ f = f = f \circ \text{id}_A.$$

En kategori hvor klassen av objekter er en mengde er kalt en liten kategori og en kategori med endelig mange morfier er kalt endelig.

I en kategori er det noen spesielle morfier som kalles isomorfier, monomorfier og epimorfier. Fra [Agore, 2023, definisjon 1.3.1] har vi følgende definisjoner for disse morfene.

Definisjon 1.5.2. *En isomorfi i en kategori \mathcal{C} er en morfi $f : A \rightarrow B$ mellom to objekter $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ hvor det eksisterer en morfi $g : B \rightarrow A$ slik at følgende holder*

$$f \circ g = \text{id}_B, \quad g \circ f = \text{id}_A.$$

Vi kaller g inversen til f . Hvis to objekter A og B er isomorfe skriver vi $A \cong B$.

Bemerk 1.5.1. *Identitetsmorfien er en isomorfi siden $\text{id}_A \circ \text{id}_A = \text{id}_A$. Altså er id_A sin egen invers.*

Andre spesielle morfier er følgende:

Definisjon 1.5.3. *En morfi $f : A \rightarrow B$ er kalt en epimorfi hvis for ethvert par med morfier $g, h : B \rightarrow C$ så holder*

$$g \circ f = h \circ f \implies g = h$$

En skriver $f : A \twoheadrightarrow B$ for en epimorfi når det er viktig å notere.

Definisjon 1.5.4. *En morfi $f : A \rightarrow B$ er kalt en monomorfi hvis for ethvert par $g, h : C \rightarrow A$ så holder*

$$f \circ g = f \circ h \implies g = h$$

En skriver $f : A \hookrightarrow B$ for en monomorfi hvis det er viktig å notere.

Noen eksempler på kategorier, deres isomorfier, epimorfier og monomorfier er følgende

Eksempel 1.5.1. *Kategorien **Set** har mengder som objekter og funksjoner som morfier. Her er bijektive funksjoner isomorfier, surjektive funksjoner epimorfier og injektive funksjoner er monomorfier.*

Eksempel 1.5.2. *Kategorien \mathbf{Top} er kategorien hvor objektene er topologiske rom og morfene er kontinuerlige funksjoner. Isomorfier i \mathbf{Top} , kalt homeomorfier, er bijektive og kontinuerlige funksjoner med en kontinuerlig invers, epimorfi er surjektive og kontinuerlige funksjoner og monomorfier er injektive og kontinuerlige funksjoner.*

Eksempel 1.5.3. *Kategorien \mathbf{Vect}_K er kategorien av vektorrom over en kropp K som objekter og lineære avbildinger som morfier. Isomorfier i \mathbf{Vect}_K , kalt vektorromisomorfier, er bijektive og lineære avbildinger, inversen vil automatisk være lineær så vi trenger ikke inverskriteriet som vi gjør i \mathbf{Top} . Epimorfierne er surjektive lineære avbildinger og monomorfierne er injektive lineære avbildinger.*

Morfierne i en kategori trenger ikke å være funksjoner, her er et eksempel på en kategori hvor morfierne ikke er funksjoner.

Eksempel 1.5.4. *Kategorien \mathbf{R} har de reelle tall \mathbb{R} som objekter og \leq relasjonen som morfier. Komposisjon er gitt ved transitivitet og identitetsmorfierne er gitt ved $s = s$. Identitetsmorfierne er også de eneste isomorfierne fordi hvis $a \leq b$ er en isomorfi så er $b \leq a$ dens invers, men hvis $a \leq b$ og $b \leq a$ så er $a = b$. Her er alle morfier epimorfier og monomorfier.*

For enhver kategori kan vi alltid lage dens motsatte eller dualkategorien

Definisjon 1.5.5. *La \mathcal{C} være en kategori. Dualkategorien \mathcal{C}^{op} av \mathcal{C} er definert som følger*

1. $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$
2. $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$. Vi skriver $f^{\text{op}} : A \rightarrow B$ for morfien i \mathcal{C}^{op} som korresponderer med morfien $f : B \rightarrow A$ i \mathcal{C} .
3. Komposisjonsavbildningen

$$\circ^{\text{op}} : \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, C)$$

er gitt ved

$$g^{\text{op}} \circ^{\text{op}} f^{\text{op}} = (f \circ g)^{\text{op}} \quad \text{for alle } f^{\text{op}} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(A, B), g^{\text{op}} \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(B, C).$$

4. Identiteter er gitt ved $\text{id}_A^{\text{op}} = \text{id}_A$ for alle objekter.

I noen kategorier er det spesielle objekter kalt initialobjekt og terminalobjekter. Her er definisjonene deres basert på [Agore, 2023, definisjon 1.3.7].

Definisjon 1.5.6. *I en kategori \mathcal{C} er et initialobjekt I et objekt slik at for ethvert objekt A i \mathcal{C} eksisterer det nøyaktig en morfi $I \rightarrow A$.*

Definisjon 1.5.7. *I en kategori \mathcal{C} er et terminalobjekt T et objekt slik at for ethvert objekt A i \mathcal{C} eksisterer det nøyaktig en morfi $T \rightarrow A$.*

Et objekt som er både initial og terminal er kalt et nullobjekt.

Vi kan også definere piler mellom kategorier. Disse pilene er kalt funktorer og er definert som følgende. I [Agore, 2023, definisjon 1.5.1] er en funktor gitt ved

Definisjon 1.5.8. La \mathcal{C} og \mathcal{D} være to kategorier. En kovariant funktor (hhv. kontravariant funktor) $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ består av følgende data:

1. En avbildning $A \mapsto F(A) : \text{Ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{D})$
2. for ethvert par av objekter $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ en avbildning

$$f \mapsto F(f) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

$$(hhv. f \mapsto F(f) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A)))$$

med følgende egenskaper

1. for ethvert objekt $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ har vi $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$
2. for enhver $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$ har vi

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \quad (hhv. F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)).$$

Ofte skriver vi bare $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ for en kontravariant funktor og sier at den er kontravariant. En kovariant funktor kalles ofte bare en funktor.

Bemerk 1.5.2. Gitt en funktor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ og en isomorfi $f : A \rightarrow B$ i \mathcal{C} så er $F(f)$ en isomorfi i \mathcal{D} . Siden f er en isomorfi så eksisterer det en $g : B \rightarrow A$ med egenskapene i **Definisjon 1.5.2**. Dette gir

$$\text{id}_{F(A)} = F(\text{id}_A) = F(f \circ g) = F(f) \circ F(g).$$

På samme måte får vi $F(f \circ g) = \text{id}_{F(B)}$. Dermed blir $F(g)$ en invers av $F(f)$ som betyr at den er en isomorfi.

Eksempel 1.5.5. Vi kan definere en funktor $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ som setter den diskrete topologien på en mengde X , her blir alle funksjoner $f : X \rightarrow Y$ sendt til $F(f) = f : (X, \mathcal{P}(X)) \rightarrow (Y, \mathcal{P}(Y))$, den er kontinuerlig siden for enhver delmengde $A \in \mathcal{P}(Y)$ så er $f^{-1}(A) \in \mathcal{P}(X)$.

På samme måte har vi en funktor $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ som setter den trivielle topologien på en mengde og bevarer funksjonene.

Eksempel 1.5.6. Vi har også en funktor $F : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ definert ved $F((X, \mathcal{T})) = X$ og $F(f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')) = f : X \rightarrow Y$. Denne funktoren kaller vi for glemmefunktoren siden den glemmer all struktur til rommet. En kan også gjøre dette for andre kategorier som \mathbf{Vect}_K og \mathbf{R} .

Eksempel 1.5.7. Et eksempel på en kontravariant funktor er $\text{Hom}(\cdot, W) : \mathbf{Vect}_K \rightarrow \mathbf{Vect}_K$ som sender et vektorrom $V \in \mathbf{Vect}_K$ til vektorrommet $\text{Hom}(V, W)$ av lineære avbildinger $V \rightarrow W$ og den sender lineære avbildinger $T : U \rightarrow V$ til $\text{Hom}(T, W) : \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(U, W)$ via $\text{Hom}(T, W)(g) = g \circ T$ for en $g : V \rightarrow W$. Her kan man se at funktoren snur på morfien som gjør den kontravariant.

Man kan også definere en pil mellom to funktorer som gjort i [Agore, 2023]

Definisjon 1.5.9. La $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ være to funktorer. En naturlig transformasjon $\alpha : F \rightarrow G$ består av en familie av morfier $\alpha_C : F(C) \rightarrow G(C)$ i \mathcal{D} indisert av $\text{COb}(\mathcal{C})$ slik at for enhver $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')$ har vi $\alpha_{C'} \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_C$.

Funktorer og naturlige transformasjoner gir oss en ny type kategori

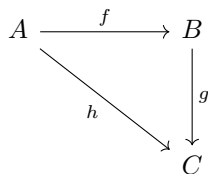
Definisjon 1.5.10. For kategorier \mathcal{C} og \mathcal{D} er kategorien $\mathcal{C}^{\mathcal{D}}$, med funktorer $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ som objekter og naturlige transformasjoner som morfier, kalt en funktorkategori.

Diagrammer er viktige for å kunne studere forskjellige egenskaper til objekter og morfier i en kategori. Her er definisjonen på et diagram. I [Agore, 2023, definisjon 1.4.9] har vi definisjonen

Definisjon 1.5.11. La \mathcal{C} være en kategori. Et diagram i \mathcal{C} er en graf med noder og kanter objekter og morfier i \mathcal{C} hhv. Et diagram kalles kommutativt hvis for ethvert par av noder alle stier mellom dem er like som morfier.

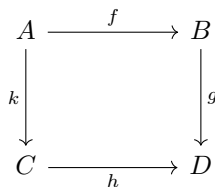
Her er noen diagrammer i en gitt kategori fra [Agore, 2023, eksempler 1.4.10]

Eksempel 1.5.8. Diagrammet



kommuterer når $h = g \circ f$

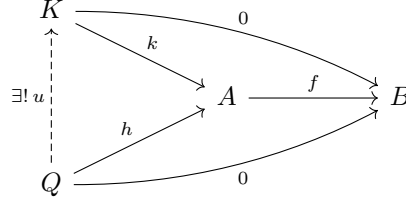
Eksempel 1.5.9. Diagrammet



kommuterer når $g \circ f = h \circ k$.

I en kategori med nullobjekt har morfier en kjerne og kokjerne. Her er definisjonene på kjernen fra [Lane, 2010, seksjon VIII.1]

Definisjon 1.5.12. I en kategori \mathcal{C} med nullobjekt 0 , la $f : A \rightarrow B$ være en morfi. Kjernen til f er et objekt K sammen med en morfi $k : K \rightarrow A$ slik at $f \circ k = 0$ og gitt ethvert objekt Q med morfi $h : Q \rightarrow A$ slik at $f \circ h = 0$, eksisterer det en unik morfi $u : Q \rightarrow K$ slik at diagrammet



kommutterer.

Proposisjon 1.5.1. I \mathbf{Vect}_K er kjernen av en lineær avbilding $f : V \rightarrow W$ gitt ved $U = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ og inklusjonen $k : U \rightarrow V$.

bevis. La Q være et vektorrom med lineær avbilding $h : Q \rightarrow V$ med $f \circ h = 0$. Vi må finne en $u : Q \rightarrow U$ slik at $k \circ u = h$. Siden $f \circ h = 0$, har vi for enhver vektor $v \in Q$ er $f(h(v)) = 0$ altså er $h(v) \in U$. Dermed er $h = k \circ h'$ med $h' : Q \rightarrow U$ gitt ved $h'(v) = h(v)$. \square

Fra [Lane, 2010, seksjon III.3] har vi også kokjernen av en morfi.

Definisjon 1.5.13. I en kategori \mathcal{C} med nullobjekt, er kokjernen av en morfi $f : A \rightarrow B$ en morfi $u : B \rightarrow E$ slik at

1. $u \circ f = 0 : A \rightarrow E$
2. hvis $h : B \rightarrow C$ har $h \circ f = 0$, da er $h = h' \circ u$ for en unik morfi $h' : E \rightarrow C$.

Fra [Bauer and Lesnick, 2020, definisjon 1.3] har vi følgende viktig teorem for oppgaven

Definisjon 1.5.14. For \mathbf{A} en kategori med nullobjekt og $\delta \geq 0$, sier vi at et diagram $M : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{A}$ er δ -triviell hvis for enhver $t \in \mathbf{R}$, den interne morfien $M_{t,t+\delta} : M_t \rightarrow M_{t+\delta}$ er en nullmorfi, altså den faktoriserer gjennom nullobjektet.

Kategoriene i denne oppgaven er kalt Puppe-eksakte kategorier. Definisjonen er gitt i [Bauer and Lesnick, 2020, definisjon 2.1].

Definisjon 1.5.15. En Puppe-eksakt kategori er en kategori med følgende egenskaper:

1. den har et nullobjekt
2. den har alle kjerner og kokjerner
3. alle monomorfi er en kjerne og alle epimorfier er en kokjerne
4. alle morfier har en epi-mono faktorisering.

1.5.1 Homologi

Topologiske rom kan være vanskelige å studere i seg selv. Heldigvis kan man overføre informasjon om rommet til en algebraisk struktur som er lettere å håndtere. Vi kan gjøre dette på forskjellige måter, men i denne oppgaven bruker vi homologi.

Følgende definisjoner er fra [Hatcher, 2001, seksjon 2.1].

Definisjon 1.5.16. *Gitt et simplisialkompleks X , la $\Delta_n(X)$ være det frie vektorrommet over en kropp K med alle n -simpleksene i X som basis.*

Vektorer i $\Delta_n(X)$ er formelle summer $\sum n_\alpha \sigma_\alpha$ hvor $n_\alpha \in K$ og $\sigma_\alpha \in X$ er n -simpleks. Vi kaller vektorer i $\Delta_n(X)$ for n -kjeder.

Definisjon 1.5.17. *For ethvert simplisialkompleks og enhver $n \in \mathbb{Z}^+$ har vi avbildingen*

$$\partial_n : \Delta_n(X) \rightarrow \Delta_{n-1}(X)$$

som sender et n -simpleks

$$[v_0, \dots, v_n] \mapsto \sum_{i=0}^n (-1)^i [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$$

Hvor $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ er $(n-1)$ -simplekset hvor vi sletter v_i . Avbildingene ∂_n er kalt randhomomorfier.

Eksempel 1.5.10. *For simplisialkomplekset i **eksempel 1.2.3** har vi*

$$\Delta_0(X) = \{a[p_0] + b[p_1] + c[p_2] \mid a, b, c \in K\}$$

$$\Delta_1(X) = \{a[p_0, p_1] + b[p_0, p_2] + c[p_1, p_2] \mid a, b, c \in K\}$$

$$\Delta_n(X) = \{0\}, \quad n > 1 \text{ eller } n < 0$$

og randhomomorfiene blir

$$\partial_1([p_i, p_j]) = p_j - p_i$$

for ethvert par $i, j = 0, 1$ og

$$\partial_n = 0.$$

Fra definisjonen av randhomomorfiene har vi at $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. Dette betyr at $\text{im } \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n$. Definisjonen på homologien av et rom er gitt ved simplisialkomplekset til rommet. I [Hatcher, 2001, seksjon 2.1] definerer forfatter den n -te homologigruppen ved

Definisjon 1.5.18. *Den n -te homologien av et topologisk rom med simplisialkompleks X er definert som $H_n(X) = \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}$.*

I vårt tilfellet er $H_n(X)$ et vektorrom over en kropp K .

2 Varighetsmoduler

Stabilitetsteoremet benytter to strukturer kalt varighetsmoduler og barkoder og mål på hvor like to varighetsmoduler og to barkoder er kalt inflettingsavstanden mellom varighetsmoduler og flaskehalsavstanden mellom barkoder.

Denne seksjonen er basert på [Bauer and Lesnick, 2015, seksjon 2.1]

Definisjon 2.0.1. *En varighetsmodul M er en funktor $M : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{vect}_K$.*

Vi skriver M_t for vektorrommet $M(t)$. Siden en varighetsmodul M er en funktor fra pomengden \mathbf{R} til \mathbf{Vect}_K så har vi for hver $s \leq t$ en lineær avbilding $\varphi_M(s, t) : M_s \rightarrow M_t$ som vi kaller overgangsavbildinger.

Gitt to varighetsmoduler M og N kan vi definere en morfi $f : M \rightarrow N$ som en samling av lineære avbildinger $\{f_s : M_s \rightarrow N_s \mid s \in \mathbb{R}\}$ slik at diagrammet

$$\begin{array}{ccc} M_s & \xrightarrow{f(s)} & N_s \\ \downarrow \varphi_M(s, t) & & \downarrow \varphi_N(s, t) \\ M_t & \xrightarrow{f(t)} & N_t \end{array}$$

kommutterer. Vi kan komponere morfien på den følgende måten; gitt morfier $f : M \rightarrow N$ og $g : N \rightarrow P$ er $g \circ f$ definert som samlingen $\{g_s \circ f_s : M_s \rightarrow P_s \mid s \in \mathbb{R}\}$.

Siden vi har objekter, varighetsmoduler og vi har morfier mellom dem kan vi definere kategorien av varighetsmoduler

Definisjon 2.0.2. *Kategorien $\mathbf{Vect}_K^{\mathbf{R}}$ er kategorien av varighetsmodulene med varighetsmodul-morfier mellom dem.*

Som notasjonen foreslår er kategorien av varighetsmoduler en funktorkategori. Et enkelt, men viktig eksempel på en varighetsmodul er intervallmodulen

Eksempel 2.0.1. *For et intervall $I \subset \mathbb{R}$ eksisterer det en varighetsmodul K^I definert på følgende måte i Bauer [2018]*

$$K_r^I = \begin{cases} K, & \text{hvis } r \in I \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases} \quad \varphi_{K^I}(r, s) = \begin{cases} \text{id}_K, & r, s \in I \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

I denne kategorien kan en varighetsmodul inneholde uendeligdimensjonale vektorrom. Fra teorem 2.8 i Chazal et al. [2016] kan disse ikke bli intervalldekomponert. Dette er et problem når vi skal studere barkodediagrammene til varighetsmoduler. I denne oppgaven begrenser vi oss bare til varighetsmoduler hvor alle vektorrommene er endeligdimensjonale. Varighetsmoduler der vektorrommene er alle endeligdimensjonale er kalt punktvis endeligdimensjonale varighetsmoduler eller p.e.d. varighetsmoduler tatt fra Bauer and Lesnick [2015]. Kategorien av endeligdimensjonale vektorrom over en kropp K skriver vi som \mathbf{vect}_K , i motsetning til kategorien av alle vektorrom skrevet \mathbf{Vect}_K og kategorien av p.e.d. varighetsmoduler er da skrevet $\mathbf{vect}_K^{\mathbf{R}}$.

2.1 Inflettingsavstand

Stabilitet av varighetsmoduler innebærer relasjonen mellom to typer avstander, flaskehalsavstanden mellom barkoder og inflettingsavstanden mellom varighetsmoduler. Her definerer vi inflettingsavstanden mellom to varighetsmoduler.

For å definere distansen må vi gjennom noen få steg. I [Bauer and Lesnick, 2015, seksjon 3.1] gir forfatter følgende definisjoner for forskyvingsfunktorene, inflettinger, inflettingsavstanden og en utvidet pseudometrikk.

Definisjon 2.1.1. En δ -forskyvning av en varighetsmodul er en funktor

$$(\cdot)(\delta) : \mathbf{vect}_k^{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{vect}_k^{\mathbf{R}}$$

Som tar en varighetsmodul M til $M(\delta)$ hvor $M(\delta)_t = M_{t+\delta}$ og tar varighetsmodulmorfier $f : M \rightarrow N$ til $f(\delta) : M(\delta) \rightarrow N(\delta)$ gitt ved $f(\delta)_t = f_{t+\delta}$.

Korollar 2.1.1. For $\delta, \delta' \in \mathbb{R}$ er $((\cdot)(\delta))(\delta') = (\cdot)(\delta + \delta')$

bevis. For en varighetsmodul M er $(M(\delta))(\delta')_t = M(\delta)_{t+\delta'} = M_{t+\delta+\delta'} = M(\delta+\delta')_t$ for enhver $t \in \mathbb{R}$. For samme grunn er $(f(\delta))(\delta') = f(\delta+\delta')$ for enhver varighetsmodulmorfie. \square

Denne funktoren gir oss konseptet av en δ -infletting.

Definisjon 2.1.2. La M og N være varighetsmoduler. Vi sier at M og N er δ -inflettet hvis det eksisterer varighetsmodulmorfier $f : M \rightarrow N(\delta)$ og $g : N \rightarrow M(\delta)$ slik at

$$g(\delta) \circ f = \varphi_M(t, t + 2\delta), \quad f(\delta) \circ g = \varphi_N(t, t + 2\delta).$$

Vi skriver $\varphi_M^\varepsilon(t) = \varphi_M(t, t + \varepsilon)$. Bemerk at $\varphi_M^0 = \text{id}_M$ fordi $\varphi_M^0(t) = \varphi_M(t, t + 0) = \varphi_M(t, t) = \text{id}_M$. Vi kaller varighetsmodulmorfierne f og g for δ -inflettingsmorfierne.

Definisjon 2.1.3. En utvidet pseudometrikk på en klasse X er en funksjon $d : X \times X \rightarrow [0, \infty]$ med følgende egenskaper:

- $d(x, x) = 0$ for enhver $x \in X$,
- $d(x, y) = d(y, x)$ for enhver $x, y \in X$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ for enhver $x, y, z \in X$ slik at $d(x, y), d(y, z) \leq \infty$.

Forskjellen på en utvidet pseudometrikk og en metrikk er at det kan være to elementer $x, y \in X$ slik at $x \neq y$, men $d(x, y) = 0$ i motsetning til metrikker der $d(x, y) = 0$ hvis og bare hvis $x = y$.

Definisjon 2.1.4. For M og N varighetsmoduler definerer vi inflettingsavstanden d_I ved

$$d_I(M, N) = \inf\{\delta \in [0, \infty) \mid M \text{ og } N \text{ er } \delta\text{-inflettet}\}$$

Denne avstanden gir et tall på hvor ”isomorfe” to varighetsmoduler er.

Vi går gjennom et lemma gitt i Bauer and Lesnick [2015] som en bemerkning ([Bauer and Lesnick, 2015, Remark 3.1]).

Lemma 2.1.1. *La L , M og N være varighetsmoduler slik at L og M er δ -inflettet og M og N er δ' -inflettet. Da er L og N $(\delta + \delta')$ -inflettet.*

bevis. La $f : L \rightarrow M(\delta)$, $g : M \rightarrow L(\delta)$ være δ inflettingsmorfier for L og M , la $h : M \rightarrow N(\delta')$ og $i : N \rightarrow M(\delta')$ være inflettingsmorfier for M og N . Vi viser at $F = h(\delta) \circ f : L \rightarrow N(\delta + \delta')$ og $G = g(\delta') \circ i : N \rightarrow L(\delta + \delta')$ er $(\delta + \delta')$ -inflettingsmorfier for L og N . Vi har komposisjonen

$$G(\delta + \delta') \circ F = (g(\delta') \circ i)(\delta + \delta') \circ h(\delta) \circ f.$$

Ved funktorialitet av $(\cdot)(\delta)$ får vi

$$(g(\delta') \circ i)(\delta + \delta') \circ h(\delta) \circ f = g(\delta')(\delta + \delta') \circ i(\delta + \delta') \circ h(\delta) \circ f.$$

Videre ved **korollar 2.1.1** og funktorialitet blir komposisjonen

$$g(\delta')(\delta + \delta') \circ i(\delta + \delta') \circ h(\delta) \circ f = g(\delta + 2\delta') \circ (i(\delta') \circ h)(\delta) \circ f.$$

Nå har vi komposisjonen $i(\delta') \circ h$ som vi vet er $\varphi_M^{2\delta'}$ da har vi

$$g(\delta + 2\delta') \circ (i(\delta') \circ h)(\delta) \circ f = g(\delta + 2\delta') \circ \varphi_M^{2\delta'} \circ f.$$

Fra definisjonen av en varighetsmodulmorf har vi at $\varphi_M^{2\delta'} \circ f = f(2\delta') \circ \varphi_L^{2\delta'}$, dermed får vi

$$g(\delta + 2\delta') \circ \varphi_M^{2\delta'} \circ f = g(\delta + 2\delta') \circ f(2\delta') \circ \varphi_M^{2\delta'}$$

Tilslutt får vi da

$$\begin{aligned} g(\delta + 2\delta') \circ f(2\delta') \circ \varphi_L^{2\delta'} &= (g(\delta) \circ f)(2\delta') \circ \varphi_L^{2\delta'} = \varphi_L^{2\delta}(2\delta') \circ \varphi_L^{2\delta'} \\ &= \varphi_L^{2\delta+2\delta'} \circ \varphi_L^{2\delta'} = \varphi_L^{2\delta'+2\delta}. \end{aligned}$$

På samme måte har vi at $F(\delta + \delta') \circ G = \varphi_N^{2\delta+2\delta'}$. □

Teorem 2.1.1. *Inflettingsavstanden er en utvidet metrikk*

bevis. Vi starter med første punktet i **definisjon 2.1.3**. La M være en varighetsmodul. Vi har en 0-infletting $f, g : M \rightarrow M(0)$ gitt ved $f_t, g_t = \varphi(t, t+0) = \text{id}_{M_t}$. Siden vi ikke kan finne en δ mindre er $d_I(M, M) = 0$.

Varighetsmoduler M og N er δ -inflettet hvis og bare hvis N og M er δ -inflettet. Dette betyr at $d_I(M, N) = d_I(N, M)$.

La L , M og N være varighetsmoduler slik at L og M er δ -inflettet og M og N er δ' -inflettet. Vi lar $f : L \rightarrow M(\delta)$, $g : M \rightarrow L(\delta)$, $h : M \rightarrow N(\delta')$ og $i : N \rightarrow M(\delta')$ være δ -inflettingsmorfier. □

Proposisjon 2.1.1. For M og N varighetsmoduler så holder

$$d_I(M, N) = 0 \iff M \cong N$$

bevis. " \implies "

Hvis $d_I(M, N) = 0$ så finnes det en 0-infletting mellom M og N altså det eksisterer varighetsmodulmorfier $f : M \rightarrow N(0) = N$ og $g : N \rightarrow M(0) = M$ slik at $g(0) \circ f = g \circ f = \varphi_M^0 = \text{id}_M$ og $f(0) \circ g = \varphi_N^0 = \text{id}_N$. Dermed er f og g inverser av hverandre og er dermed isomorfier.

" \impliedby "

Hvis $M \cong N$ så eksisterer det varighetsmodulmorfier $f : M \rightarrow N$ og $g : N \rightarrow M$ slik at $g \circ f = \text{id}_M = \varphi_M^0$ og $f \circ g = \text{id}_N = \varphi_N^0$. Så det eksisterer en 0-infletting og dermed er $d_I(M, N) = 0$. \square

Proposisjon 2.1.2. Hvis $M \cong M'$ er isomorfe varighetsmoduler så er $d_I(M, N) = d_I(M', N)$ for enhver varighetsmodul.

bevis. Siden d_I er en utvidet metrikk betyr det at den oppfyller den trekantulikheten $d_I(M, N) \leq d_I(M, M') + d_I(M', N)$. Ved **proposisjon 2.1.1** er $d_I(M, M') = 0$ altså er $d_I(M, N) \leq d_I(M', N)$. Ved samme argument er $d_I(M', N) \leq d_I(M, N)$. Dermed er $d_I(M, N) = d_I(M', N)$. \square

Resultatet fra **proposisjon 2.1.2** betyr at inflettingsavstanden er en metrikk på isomorfiklassene av varighetsmodulene som forfatter i Bauer and Lesnick [2015] nevner.

3 Strekkoder

En strekkode \mathcal{B} er en representasjon av en multimengde av intervaller. Elementer i en strekkode er dermed par (I, k) der I er et intervall og $k \in \mathbb{N}$. Ofte når indeksen k er nødvendig skriver vi bare I for et intervall i strekkoden. Når vi ignorerer indeksene bruker vi multimengdenotasjonen for strekkoder og for morfien som senere blir definert.

I [Bauer and Lesnick, 2020, teorem 2.4] har vi følgende resultat.

Teorem 3.0.1. For enhver p.e.d. varighetsmodul M , eksisterer det en unik naturlig strekkode $\mathcal{B}(M)$ slik at

$$M \cong \bigoplus_{I \in \mathcal{B}(M)} K^I.$$

Forfatter kaller strekkoden $\mathcal{B}(M)$ dekomponeringsstrekkoden.

Strekkoder kan også gjøres om til en kategori med morfier vi kaller overlappkoblinger. For å definere en overlappkobling må vi først definere hva det betyr at et intervall overlapper et annet intervall over. Fra [Bauer and Lesnick, 2020, seksjon 2.3] har vi følgende definisjon.

Definisjon 3.0.1. Et intervall I overlapper et annet intervall J over (hhv. overlapper J I under) hvis følgende holder

- $I \cap J \neq \emptyset$.
- For enhver $s \in J$ eksisterer det en $t \in I$ slik at $t \leq s$. Vi sier at I begrenser J over.
- For enhver $s \in I$ eksisterer det en $t \in J$ slik at $t \leq s$. Vi sier at J begrenser I under.

Definisjon 3.0.2. En parvis kobling $\sigma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ av strekkoder er en overlappkobling hvis gitt $\sigma(I) = J$ så overlapper I J over.

Komposisjonen av overlappkoblinger som parvis koblinger resulterer ikke alltid i en overlappkobling. Vi endrer komposisjonen på følgende måte

Definisjon 3.0.3. La $\sigma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ og $\tau : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ være overlappkoblinger. Komposisjonen blir da definert som

$$\tau \bullet \sigma = \{(I, J) \in \tau \circ \sigma \mid I \text{ overlapper } J\}$$

Her er $\tau \circ \sigma$ komposisjonen som parvis koblinger.

Proposisjon 3.0.1. For enhver strekkode \mathcal{D} eksisterer det alltid en overlappkobling $\sigma : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ gitt ved $\sigma = \{(I, I) \mid I \in \mathcal{D}\}$.

bevis. Første punktet er å vise at $I \cap \sigma(I) \neq \emptyset$. Dette er sant siden $\sigma(I) = I$ altså er $I \cap \sigma(I) = I \cap I$ som er lik $I \neq \emptyset$. Andre punktet er å vise at I overlapper seg selv over. Velg en $s \in I$ da har vi $s \leq s$ dermed begrenser I seg selv over og under. Dette betyr at σ er en overlappkobling. \square

Teorem 3.0.2. Mengden av strekkoder sammen med overlappkoblinger skaper en kategori.

bevis. Objektene er strekkodene og morfien er overlappkoblingene. Vi lar identiteten til en strekkode være overlappkoblingen $\text{id}_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ gitt i **proposisjon 3.0.1** Komposisjonen er den definert i **definisjon 3.0.3**. Vi må vise at \bullet komposisjonen er assosiativ og respekterer identiteter.

Vi starter med identitetene. La $\sigma : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ være en overlappkobling da har vi

$$\sigma \bullet \text{id}_{\mathcal{C}} = \{(I, J) \in \sigma \circ \text{id}_{\mathcal{C}} \mid I \text{ overlapper } J \text{ over}\}.$$

La $(I, J) \in \sigma \bullet \text{id}_{\mathcal{C}}$, Da eksisterer det en $K \in \mathcal{C}$ slik at $(I, K) \in \text{id}_{\mathcal{C}}$ og $(K, J) \in \sigma$ og I overlapper J over. Siden $\text{id}_{\mathcal{C}}(I) = I$ så må $K = I$ altså er $\sigma(K) = \sigma(I) = J$, derfor har vi at $(I, J) \in \sigma$. Dette betyr at $\sigma \bullet \text{id}_{\mathcal{C}} \subset \sigma$ og gitt et par $(I, J) \in \sigma$ har vi paret $(I, I) \in \text{id}_{\mathcal{C}}$ slik at $J = \sigma(I) = \sigma \bullet \text{id}_{\mathcal{C}}(I)$ dermed har vi også at $\sigma \subset \sigma \bullet \text{id}_{\mathcal{C}}$ det vil si at $\sigma = \sigma \bullet \text{id}_{\mathcal{C}}$. På samme måte kan vi vise at $\sigma = \text{id}_{\mathcal{D}} \bullet \sigma$.

La $\sigma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$, $\tau : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ og $\psi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$. La (I, K) være et par i komposisjonen $(\psi \bullet \tau) \bullet \sigma$. Dette betyr at det eksisterer et intervall $J \in \mathcal{C}$ slik at $(I, J) \in \sigma$ og $(J, K) \in \psi \bullet \tau$ og at I overlapper K over. Siden $(J, K) \in \psi \bullet \tau$ må det også finnes et intervall $L \in \mathcal{D}$ slik at $(J, L) \in \tau$ og $(L, K) \in \psi$ og J må overlappe K over. Fordi $(I, J) \in \sigma$ og $(J, L) \in \tau$ \square

Barc er en Puppe-eksakt kategori. Dette betyr at kategorien har et nullobjekt gitt under.

Proposisjon 3.0.2. *Den tomme mengden \emptyset er nullobjektet i **Barc**.*

bevis. La \mathcal{D} være en strekkode. En overlappkobling $\sigma : \emptyset \rightarrow \mathcal{D}$ er en delmengde av $\emptyset \times \mathbf{Barc} = \emptyset$, siden \emptyset er sin eneste delmengde så er $\sigma = \emptyset$. For samme grunn er det bare en overlappkobling $\mathcal{D} \rightarrow \emptyset$. Dermed er \emptyset nullobjekt. \square

I [Bauer and Lesnick, 2020, seksjon 2.5] beskriver forfatter kjernen, kokjernen og bildet til en overlappkobling som strekkoder, men som beskrevet i seksjon **seksjon ??** i **definisjon 1.5.12** og **definisjon 1.5.13** er ikke bare (ko)kjernen av en morfi i en kategori et objekt, det er et par gitt av et objekt og en morfi. Her er konstruksjonen av kjernen, kokjernen og bildet, som strekkoder sammen med en overlappkobling.

Teorem 3.0.3. *Kjernen til en overlappkobling $\sigma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ er en strekkode $\ker \sigma$ med overlappkobling $\kappa_\sigma : \ker \sigma \rightarrow \mathcal{C}$*

$$\ker \sigma = \{ \ker(\sigma, I) \neq \emptyset \mid I \in \mathcal{C} \}, \quad \kappa_\sigma = \{ (\ker(\sigma, I), I) \mid \ker(\sigma, I) \neq \emptyset \}$$

bevis. Gitt en strekkode \mathcal{B} og en overlappkobling $\eta : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ slik at $\sigma \bullet \eta = \emptyset$, viser vi at det eksisterer en unik overlappkobling $\eta' : \mathcal{B} \rightarrow \ker \sigma$ slik at $\eta = \kappa_\sigma \bullet \eta'$. Vi antar at en slik η' eksisterer og finner et uttrykk for overlappkobling. La $(I, J) \in \eta$ altså er $(I, J) \in \kappa_\sigma \bullet \eta'$. Fra **definisjon ??** betyr dette at det eksisterer et intervall $K \in \mathcal{C}$ slik at $(I, K) \in \eta'$ og $(K, J) \in \kappa_\sigma$. Siden $(K, J) \in \kappa_\sigma$ må $K = \ker(\sigma, J)$. Dermed har vi

$$\eta'(I) = \ker(\sigma, \eta(I)).$$

Her lar vi η' koble $I \in \mathcal{B}$ hvis η kobler I og I overlapper $\ker(\sigma, \eta(I))$ over. Dermed for ethvert par $(\mathcal{B}, \eta : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$ av en strekkode og overlappkobling slik at $\sigma \bullet \eta = \emptyset$, eksisterer det en unik overlappkobling $\eta' : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ definert som over slik at $\kappa_\sigma \bullet \eta' = \eta$. \square

Teorem 3.0.4. *Kokjernen til en overlappkobling er gitt som en strekkode $\operatorname{coker} \sigma$ med en overlappkobling $\mu_\sigma : \mathcal{D} \rightarrow \operatorname{coker} \sigma$ gitt ved*

$$\operatorname{coker} \sigma = \{ \operatorname{coker}(\sigma, J) \neq \emptyset \mid J \in \mathcal{D} \}, \quad \mu_\sigma = \{ (J, \operatorname{coker}(\sigma, J)) \mid J \text{ overlapper } \operatorname{coker}(\sigma, J) \text{ over} \}$$

bevis. Vi viser at gitt en strekkode \mathcal{B} og en overlappkobling $\eta : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ slik at $\eta \bullet \sigma = \emptyset$ eksisterer det en unik overlappkobling $\eta' : \operatorname{coker} \sigma \rightarrow \mathcal{B}$ slik at $\eta' \bullet \mu_\sigma = \eta$. Vi gjør dette på samme måte som i beviset for **teorem 3.0.3**. La $(I, J) \in \eta$ dermed er $(I, J) \in \eta' \bullet \mu_\sigma$. Siden $(I, J) \in \eta' \bullet \mu_\sigma$ eksisterer det et intervall $K \in \operatorname{coker} \sigma$ slik at $(I, K) \in \mu_\sigma$ og $(K, J) \in \eta'$. Siden $(I, K) \in \mu_\sigma$ er $K = \operatorname{coker}(\sigma, I)$. Dermed er $(\operatorname{coker}(\sigma, I), J) \in \eta'$. Vi lar dermed $\eta'(\operatorname{coker}(\sigma, I)) = J$ hvor $(I, J) \in \eta$ og $\operatorname{coker}(\sigma, I)$ overlapper J over. \square

Teorem 3.0.5. *Bildet av en overlappkobling $\sigma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ er en strekkode $\text{im } \sigma$ og en overlappkobling $\omega_\sigma : \text{im } \sigma \rightarrow \mathcal{D}$ gitt ved*

$$\text{im } \sigma = \{I \cap J \mid (I, J) \in \sigma\}, \quad \omega_\sigma = \{(I \cap J, J) \mid (I, J) \in \sigma\}$$

bevis. Siden **Barc** er en Puppe-eksakt kategori er bildet av σ kjernen av cocoker av σ . Strekkoden blir multimengden av elementer på formen $J - (\text{coker}(\sigma, J)) \neq \emptyset$. Hvis σ ikke parvis kobler J er $J - (\text{coker}(\sigma, J)) = J - J = \emptyset$, hvis $(I, J) \in \sigma$, er $J - (\text{coker}(\sigma, J)) = J - (J - I)$ som er det samme som $I \cap J$. Siden $(I, J) \in \sigma$ overlapper I J over, altså er $I \cap J \neq \emptyset$ som videre betyr at

$$\ker \mu_\sigma = \text{im } \sigma = \{I \cap J \mid (I, J) \in \sigma\}.$$

La $(L, J) \in \kappa_{\mu_\sigma}$ da er $L = \ker(\mu_\sigma, J)$. Dermed hvis μ_σ ikke parvis kobler L er $L = J$. Hvis $(J, K) \in \mu_\sigma$ er $K = \text{coker}(\sigma, J)$ som er J hvis σ ikke parvis kobler J , da er $K = \emptyset$ og bryter overlapping, eller så er $(I, J) \in \sigma$ og $K = J - I$. I tilfellet der $(I, J) \in \sigma$ er $L = J - K = J - (J - I)$ som tilslutt er $I \cap J$. Dermed er $\omega_\sigma(I \cap J) = J$, eller sagt annerledes er ω_σ multimengden av par $(I \cap J, J)$ hvor $(I, J) \in \sigma$. \square

Forfatter i [Bauer and Lesnick, 2020] bruker definisjonene av (ko)kjernen av en overlappkobling til å gi tilstrekkelige betingelser for δ -trivialitet av (ko)kjernen av en overlappkobling. Forfatter definerer for et intervall $I \subset \mathbb{R}$

Som sagt i **seksjon 2** er det også en avstand mellom strekkoder.

3.1 Flaskehalsavstanden

En kan definere en avstand av strekkoder på to forskjellige måter gitt i Bauer and Lesnick [2020]. En måte er å definere en type inflettingsavstand i **Barc** og en annen kalt Flaskehalsavstanden. Vi starter med å definere den første type avstand.

Bemerk 3.1.1. *Under [Bauer and Lesnick, 2020, definisjon 1.3] skriver forfatter at en strekkode er δ -triviell hvis og bare hvis alle intervallene i strekkoden er inneholdt i et halv-åpent intervall av lengde δ .*

Bemerk 3.1.2. *Et intervall er δ -triviell hvis strekkoden $\{I\}$ er δ -triviell*

I [Bauer and Lesnick, 2020, seksjon 2.5] definerer forfatter en forskyvingsavbildning av intervaller som induserer en funktor **Barc** \rightarrow **Barc**.

Definisjon 3.1.1. *For et intervall $I \subset \mathbb{R}$ og $\delta \geq 0$ definerer vi*

$$I(\delta) = \{t \mid t + \delta \in I\}$$

Dette intervallet er I forskjøvet en δ til venstre.

Dette gir en funktor $(\cdot)(\delta) : \mathbf{Barc} \rightarrow \mathbf{Barc}$ definert ved

Definisjon 3.1.2. For en strekkode \mathcal{B} , lar vi

$$\mathcal{B}(\delta) = \{I(\delta) \mid I \in \mathcal{B}\}.$$

For en overlappkobling $\sigma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ definerer vi

$$\sigma(\delta) = \{(I(\delta), J(\delta)) \mid (I, J) \in \sigma\}.$$

Fra Bauer and Lesnick [2020] har vi for enhver strekkode \mathcal{C} og $\delta \geq 0$ overlappkoblingen $S^{\mathcal{C}, \delta} = \{(I, I(\delta)) \mid I \text{ ikke er } \delta\text{-triviell}\}$.

Definisjon 3.1.3. To strekkoder \mathcal{C} og \mathcal{D} sies å være δ -inflettet hvis det eksisterer overlappkoblinger $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}(\delta)$ og $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}(\delta)$ slik at $g(\delta) \bullet f = S^{\mathcal{C}, 2\delta}$ og $f(\delta) \bullet g = S^{\mathcal{D}, 2\delta}$.

Dette gir på samme måte som i seksjon 2 en inflettingsavstand gitt ved

$$d_I(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \inf \{\delta \in [0, \infty) \mid \mathcal{C} \text{ og } \mathcal{D} \text{ } \delta\text{-inflettet}\}.$$

Den andre måten en kan definere en avstand på er gitt i [Bauer and Lesnick, 2020, seksjon 4.2].

La $U_\delta(I) = \{t \in \mathbb{R} \mid \text{det eksisterer en } s \in I \text{ slik at } |s - t| \leq \delta\}$

Definisjon 3.1.4. En δ -kobling $\sigma : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ er en parvis kobling, den trenger ikke å være en overlappkobling, med følgende egenskaper:

1. σ kobler hvert intervall i $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ som ikke er 2δ -trivielle
2. Hvis $(I, J) \in \sigma$, er $J \subset U_\delta(I)$ og $I \subset U_\delta(J)$.

Definisjon 3.1.5. Gitt to strekkoder \mathcal{C} og \mathcal{D} er flaskehalsavstanden

$$d_B(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \inf \{\delta \geq 0 \mid \text{Det eksisterer en } \delta\text{-kobling mellom } \mathcal{C} \text{ og } \mathcal{D}\}.$$

Nå som vi har to typer avstander av strekkoder er det naturlige spørsmålet ”hvilken skal man bruke?” Heldigvis er det ikke nødvendig å velge fordi inflettingsavstanden og flaskehalsavstanden er like. For å vise dette bruker vi [Bauer and Lesnick, 2020, proposisjon 4.2] og en bemerkning i [Bauer and Lesnick, 2020, seksjon 4.2]

Proposisjon 3.1.1. I kategoriene $\mathbf{vect}_K^{\mathbf{R}}$ og \mathbf{Bar} er to objekter M og N δ -inflettet hvis og bare hvis det er en morfi $f : M \rightarrow N(\delta)$ med 2δ -triviell kjerne og kokjerne.

Bemerk 3.1.3. I [Bauer and Lesnick, 2020, seksjon 4.2] nevner forfatter at for enhver strekkode \mathcal{D} har vi en bijeksjon $r_\delta : \mathcal{D}(\delta) \rightarrow \mathcal{D}$ gitt ved $I(\delta) \rightarrow I$.

Teorem 3.1.1. Gitt strekkoder \mathcal{C} og \mathcal{D} holder følgende

$$d_I(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = d_B(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

bevis. Vi beviser utsagnet i siste del av beviset for [?, proposisjon 4.2] Vi viser at en overlappkobling $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}(\delta)$ har 2δ -triviell kjerne og kokjerne hvis og bare hvis $r_\delta \circ f$ er en δ -kobling.

□

4 Varighetshomologi

I denne seksjonen går vi over hvordan man gjør data fra et eksperiment eller en statistisk undersøkelse om til topologiske rom og videre om til varighetsmoduler. Vi starter med å lage varighetsmoduler av generelle topologiske rom, deretter går vi over forskjellige måter å lage topologiske rom fra data i form av punktskyer.

Definisjon 4.0.1. *En filtrering av et topologisk rom X over en pomengde (P, \leq) er en samling $\{X_p\}_{p \in P}$ slik at når $q \leq p$ så er $X_q \subset X_p$ og $\bigcup_{p \in P} X_p = X$.*

En kan også tenke på en filtrering av et rom X over en pomengde \mathbf{P} som en funktor $X_\bullet = \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Top}$ slik at morfien $q \leq p$ i \mathbf{P} blir sendt til inklusjonen $i_X(q, p) : X_q \hookrightarrow X_p$.

I denne oppgaven er en filtrering av et rom alltid over \mathbf{R} pomengden.

Gitt et topologisk rom, kan vi kalkulere homologigruppene dens. Vi bruker koeffisienter fra en kropp K til å kalkulere homologigruppene, da får vi vektorrom.

Vi kan lage en varighetsmodul av et rom ved å filtrere rommet og så ta homologien av rommene i filtreringen.

Definisjon 4.0.2. *La X være et topologisk rom med filtrering X_\bullet en filtrering av X . Da er den n -te varighetshomologien $\mathcal{H}_n(X_\bullet) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{vect}_K$ definert ved $\mathcal{H}_n(X_\bullet)_s = H_n(X_s)$ og $\varphi_{\mathcal{H}_n(X_\bullet)}(s, t) = i_X(s, t)_*$.*

Nå som vi har definisjonen på varighetshomologien av et rom går vi videre til å lage topologiske rom av data i form av en filtrering av et rom.

I **Seksjoner 1** gikk vi over Δ -komplekser. Rommene vi lager fra punktskydataen er slike Δ -komplekser. Det er to hovedmetoder for å lage rom av punktskyer, kalt Čech-komplekser og Vietoris-Rips-komplekser også kalt Rips-komplekser.

Følgende definisjoner er inspirert fra Schenck [2022]

Definisjon 4.0.3. *La $P \subset \mathbb{R}^d$ være en punktsky og la $B_\varepsilon(p)$ være den lukkede ε -ballen om et punkt $p \in P$. Čech-komplekset C_ε av P inneholder k -simplekser som korresponderer med $k + 1$ -tupler av punkter $p \in P$ slik at*

$$\bigcap_{i=0}^k \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}(p_i)} \neq \emptyset.$$

Altså er en $k + 1$ -tupel $(p_0, \dots, p_k) \in C$ hvis deres lukkede ε -baller deler minst et punkt.

Definisjon 4.0.4. *La $P \subset \mathbb{R}^d$ være en punktsky. Rips-komplekset \mathcal{R}_ε av P gitt ved k -simplekser som korresponderer med $k + 1$ -tupler (p_0, \dots, p_k) slik at $|p_i - p_j| \leq \varepsilon$ for alle par i, j .*

References

- Ana Agore. *A first course in category theory*. Springer International Publishing, Cham, 2023.
- Ulrich Bauer. Persistent diagrams as diagrams. June 2018.
- Ulrich Bauer and Michael Lesnick. Induced Matchings and the Algebraic Stability of Persistence Barcodes. *Journal of Computational Geometry*, pages 162–191 Pages, March 2015. doi:10.20382/jocg.v6i2a9.
- Ulrich Bauer and Michael Lesnick. Persistence Diagrams as Diagrams: A Categorification of the Stability Theorem. volume 15, pages 67–96. 2020. doi:10.1007/978-3-030-43408-3_3.
- Frédéric Chazal, William Crawley-Boevey, and Vin De Silva. The observable structure of persistence modules. *Homology, Homotopy and Applications*, 18(2):247–265, 2016. ISSN 15320073, 15320081. doi:10.4310/HHA.2016.v18.n2.a14.
- Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, England, December 2001.
- Thomas W Hungerford. *Algebra*. Graduate texts in mathematics. Springer, New York, NY, 1974 edition, December 2012.
- Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Graduate texts in mathematics. Springer, New York, NY, 2 edition, November 2010.
- James R Munkres. *Topology: Pearson New International Edition*. Pearson custom library. Pearson Education, London, England, 2 edition, July 2013.
- James R. Munkres. Elements of algebraic topology, 2018.
- Hal Schenck. *Algebraic Foundations for Applied Topology and Data Analysis*, volume 1 of *Mathematics of Data*. Springer International Publishing, Cham, 2022. ISBN 978-3-031-06663-4 978-3-031-06664-1. doi:10.1007/978-3-031-06664-1.