Diskrete Modellierung

Wintersemester 2017/18

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übung 10

Ausgabe: 21.12.17
Abgabe: 11.01.18

Sie dürfen einen Matrizenrechner als Hilfsmittel verwenden. (z. B. https://matrixcalc.org/de)

Aufgabe 10.1. *Irreduzibilität und Aperiodizität* $(16 + 12 = 28$ Punkte$)$

a) Betrachten Sie die folgenden Graphen G_1, G_2, G_3 und G_4. Bestimmen Sie (mit kurzer Begründung), welche der Graphen i) irreduzibel, ii) aperiodisch sind, und welche nicht.

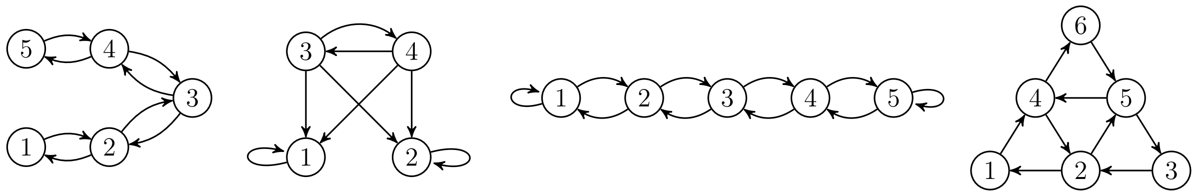
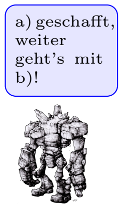


Abbildung 1: Von links nach rechts: G_1, G_2, G_3 und G_4



b) Wir modellieren die Bewegung einer einzelnen Schachfigur auf einem Schachbrett als Markov-Kette mit Zuständen $V := \{a, \ldots, h\} \times \{1, \ldots, 8\}$. In jedem Schritt führt die Figur einen der ihr nach den Schachregeln möglichen Züge aus, wobei jeder Zug mit derselben Wahrscheinlichkeit gewählt wird. Es ist nicht zulässig, dass die Figur auf ihrem Feld stehenbleibt, sie *muss* sich bewegen.

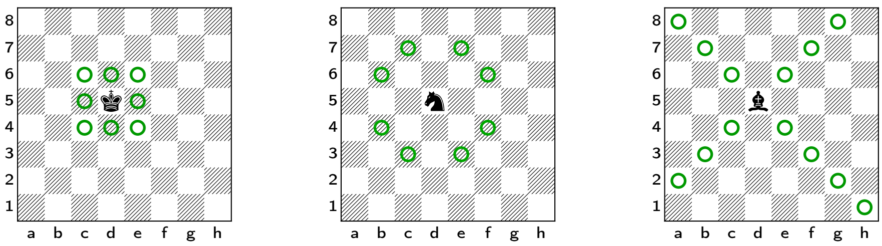


Abbildung 2: Schachfeld mit Spielfigur. Links: König, Mitte: Springer, rechts: Läufer. Die möglichen Züge jeder Figur sind mit grünen Kreisen markiert.

Geben Sie jeweils an, ob die so beschriebene Markov-Kette irreduzibel bzw. aperiodisch ist, wenn es sich bei der Figur um einen

i) König   ii) Springer   iii) Läufer

handelt. Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Antwort. Sie brauchen die Markov-Kette bzw. ihren Graphen und ihre Übergangsmatrix nicht explizit zu bestimmen!

Bitte wenden!

Aufgabe 10.2. *Modellierung mit Markov-Ketten: Post* $(6 + 6 + 4 + 4 + 8 = 28$ Punkte)

Die Deutsche Post unterhält eine Filiale mit drei Kundendienstarbeitern. Jeder Mitarbeiter kann einen Kunden betreuen (dann ist er *beschäftigt*) oder gerade nichts zu tun haben (dann ist er *frei*). Betrachten Sie die beiden folgenden Prozesse:

(A) **Die Kundenabfertigung:** In jedem Schritt fertigt jeder beschäftigte Mitarbeiter unabhängig von den anderen Mitarbeitern seinen Kunden mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ ab und ist anschließend frei. Mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ bleibt ein betreuter Kunde und sein Mitarbeiter ist weiterhin beschäftigt. Freie Mitarbeiter sind natürlich weiterhin frei.

(N) **Das Eintreffen neuer Kunden:** In jedem Schritt treffen mit Wahrscheinlichkeit $1/10$ drei neue Kunden, mit Wahrscheinlichkeit $2/10$ zwei neue Kunden, mit Wahrscheinlichkeit $3/10$ ein neuer Kunde und mit Wahrscheinlichkeit $4/10$ gar kein neuer Kunde ein.
Die Neuankömmlinge werden an die freien Mitarbeiter verteilt, die anschließend beschäftigt sind. Stehen nicht genügend freie Mitarbeiter für alle neuen Kunden zur Verfügung, so verlassen die überzähligen, nicht bedienten Kunden die Filiale wieder und gehen heim.

Wir wollen das Geschehen durch Markov-Ketten modellieren, dazu verwenden wir die Zustände $0, 1, 2, 3$, wobei Zustand i bedeute, dass genau i Mitarbeiter beschäftigt und $3-i$ Mitarbeiter frei sind. (Es spielt keine Rolle, *welche* Mitarbeiter gerade beschäftigt oder frei sind. Beachten Sie auch, dass sich die in (N) angegebenenen Wahrscheinlichkeiten auf das Eintreffen neuer Kunden beziehen. Es können also stets ein, zwei oder drei neue Kunden eintreffen, auch wenn nicht genügend Mitarbeiter frei sind.)

a) Stellen Sie die Übergangsmatrix A auf, welche **nur die Kundenabfertigung** (A) beschreibt. Geben Sie auch den dazugehörigen Graphen G_A an.

b) Stellen Sie die Übergangsmatrix N auf, welche **nur das Eintreffen neuer Kunden** (N) beschreibt. Geben Sie auch den dazugehörigen Graphen G_N an.

c) Betrachten Sie nun Markov-Ketten, in denen die beiden Prozesse (A) und (N) abwechselnd ausgeführt werden: Auf jeden Schritt der Kundenabfertigung (A) folgt das Eintreffen neuer Kunden (N) und umgekehrt. Bestimmen Sie die Matrizen

$$P := A \cdot N \text{ und } Q := N \cdot A.$$

Was drückt die zu P gehörige Markov-Kette (G_P, P) aus? Was drückt die zu Q gehörige Markov-Kette (G_Q, Q) aus? Mit anderen Worten: Zu welchem Zeitpunkt (vor einem Schritt der Kundenabfertigung oder vor dem Eintreffen neuer Kunden) wird die Wahrscheinlichkeit bestimmt, in einem der vier Zustände zu sein?

d) Berechnen Sie für (G_P, P) und (G_Q, Q) jeweils (näherungsweise) eine stationäre Verteilung, z. B. indem Sie die Matrix-Potenzen P^k und Q^k für hinreichend großes $k \in \mathbb{N}_{>0}$ berechnen.

e) Beantworten Sie folgende Fragen mithilfe der vorherigen Teilaufgaben.
   - Mit welcher relativen Häufigkeit sind alle Mitarbeiter *vor* dem Eintreffen neuer Kunden beschäftigt?
   - Mit welcher relativen Häufigkeit sind alle Mitarbeiter *nach* dem Eintreffen neuer Kunden frei?
   - Würden Sie dazu raten, einen weiteren Mitarbeiter einzustellen?

Bitte wenden!

Aufgabe 10.3. *Volles Risiko oder auf Nummer sicher gehen?* $(6 + 8 + 6 + 4 = 24$ Punkte)

James hat sein gesamtes Vermögen bis auf 5 Dollar im Casino verspielt. Um seine Verluste besser zu verkraften, möchte sich James einen Martini gönnen. Dieser kostet jedoch 8 Dollar.

Am Roulette-Tisch kann James Geld auf „gerade“ oder „ungerade“ setzen und dabei den gesetzten Betrag verdoppeln oder verlieren. James’ Gewinnwahrscheinlichkeit für eine Partie sei $p \in (0, 1)$.

James möchte sich das Geld für den Martini erspielen und erwägt dabei die folgenden Strategien:

- Bei der *vorsichtigen* Strategie setzt er stets einen Dollar und verlässt den Tisch, sobald er 8 Dollar hat oder pleite ist.
- Bei der *aggressiven* Strategie setzt er stets soviel wie möglich, *aber nicht mehr als nötig*, um den Tisch mit 8 Dollar zu verlassen. Er verlässt den Tisch, sobald er 8 Dollar hat oder pleite ist.

a) Modellieren Sie jede der beiden Strategien als Markov-Kette.

b) Bestimmen Sie für beide Strategien die Wahrscheinlichkeit w_{Martini}, dass James sich einen Martini gönnen kann.

Hinweis: Für die vorsichtige Strategie können Sie die Ergebnisse zum Gambler’s-Ruin-Problem aus der Vorlesung (Beispiel 6.11 im Skript) verwenden. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $p = 1/2$ und $p \neq 1/2$.

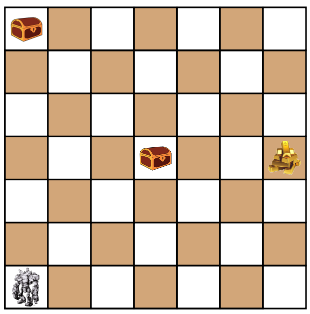
c) Berechnen Sie für beide Strategien jeweils die Wahrscheinlichkeit w_{Martini} für die drei Fälle

i) $p = \frac{1}{3}$, ii) $p = \frac{1}{2}$, iii) $p = \frac{2}{3}$.

d) Skizzieren Sie den Funktionsgraphen der Wahrscheinlichkeiten w_{Martini} für beide Strategien in Abhängigkeit von p und diskutieren Sie das Ergebnis. Sie können den Funktionsgraphen plotten lassen, z. B. mit diesem Online-Tool: https://rechneronline.de/funktionsgraphen/

Aufgabe 10.4. *Gauner, Golems, Gold, Gewölbe* $(6 + 6 + 4 + 4 = 20$ Punkte)

Eine größere Gruppe gar geldgieriger Gauner geht auf Goldsuche in ein großes Gewölbe, das von einem gefährlichen Gebirgsgolem bewacht wird.



Das Gewölbe hat den Grundriss eines 7×7-Gitters. Der Golem patrouilliert zufällig durch das Gewölbe: In jeder Sekunde bewegt er sich zufällig genau drei Felder weit entweder in horizontale oder in vertikale Richtung.

Dem Golem möchten die Gauner lieber nicht in die Quere kommen. Um also möglichst unbeschadet das Gold plündern zu können, müssen sie wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich der Golem wo befindet.

Die Gauner versprechen, Ihnen (ja, genau: Sie sind gemeint!) ein Vierzehntel der Beute abzugeben, wenn Sie die Wahrscheinlichkeiten berechnen.

a) Angenommen, der Golem startet auf dem Feld ganz unten links.

Modellieren Sie die Bewegung des Golems als eine Irrfahrt auf einem ungerichteten Graphen U. Berücksichtigen Sie dabei **nur** die vom Golem erreichbaren Felder. Wie sieht die dazugehörige Markov -Kette (G, P) aus? Besitzt diese Markov-Kette eine Grenzverteilung?

b) Nehmen Sie nun an, dass der Golem stets **zwei Bewegungen** auf einmal ausführt. Wie sehen der Übergangsgraph G' und die Matrix P' der neuen Markov-Kette (G', P') aus? Welche Felder sind von der Anfangsposition des Golems aus erreichbar?

c) Bestimmen Sie für die beiden Felder mit den Schatztruhen, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich der Golem dort nach sehr, sehr langer Zeit in einem **geraden** Zeitschritt befindet.

Hinweis: Berechnen Sie (näherungsweise) $\lim_{k\to\infty} P^{2k} = \lim_{k\to\infty} (P')^k$.

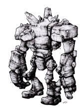
d) Bestimmen Sie für das Feld mit den Goldbarren, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich der Golem dort nach sehr, sehr langer Zeit in einem **ungeraden** Zeitschritt befindet.

Hinweis: Berechnen Sie (näherungsweise) $\lim_{k\to\infty} P^{2k+1} = \lim_{k\to\infty} P \cdot (P')^k$.

Bitte wenden!

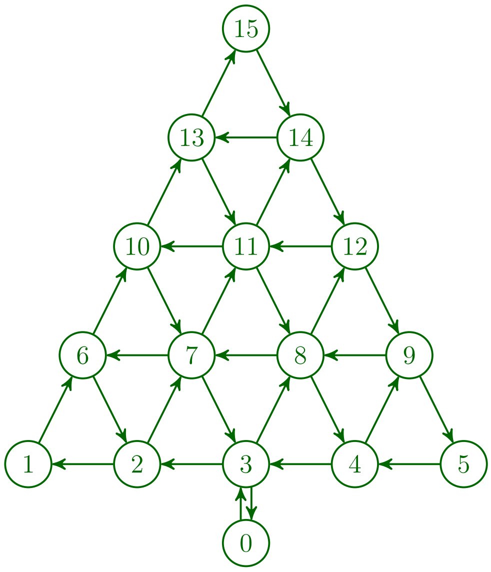
Weihnachtsaufgabe 10.5. *Aperiodische Markov-Ketten* (20* Extrapunkte)

Hol dir die Punkte!



Sei (G, P) eine Markov-Kette mit Zustandsmenge V und sei G irreduzibel.
Zeigen Sie: Wenn es einen Zustand $x \in V$ mit Periode 1 gibt, dann ist G aperiodisch.

Hinweis: Sie dürfen folgenden Satz verwenden: Seien $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}_{>0}$ und gelte $\operatorname{ggT}(a_1, \ldots, a_k) = 1$, dann lässt sich jede natürliche Zahl bis auf endlich viele als Linearkombination $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{N}$ darstellen.



Eine besinnliche Denkaufgabe zum Jahresende:
Ist der Weihnachtsbaum aperiodisch?
Ist der Weihnachtsbaum irreduzibel?
Ist der Weihnachtsbaum ergodisch?

Frohe Feiertage und einen tollen Start ins Jahr 2018!