Mathe für die Informatik II – SoSe 2018

Dr. Samuel Hetterich

Blatt 3 — Abgabe: Di 08.05.2018, 12:15 Uhr

Hinweis:

▶ Bewertet und korrigiert werden nur die Aufgaben 3.1 bis 3.3 - also müssen Sie nur Lösungen dieser Aufgaben einreichen. Die Präsenzaufgaben 3.4 und 3.5 werden in den Tutorien gelöst und besprochen - gerne können Sie sich darauf vorbereiten.

▶ In der Vorlesung wird Ihnen der Gebrauch der freien Software Sage zur Lösung mathematischer Probleme nahegebracht. Diese Software lässt sich hier `www.sagemath.org/download` kostenlos herunterladen. Auf den folgenden Übungsblättern befindet sich nun jeweils eine Sage-Aufgabe. Diese Aufgabe lösen Sie indem Sie Ihren Programmcode und Ihre Berechnungen ausdrucken, an Ihre Abgabe heften und Ihren Programmcode über OLAT/per Mail Ihrem Tutor elektronisch zukommen lassen.

Aufgabe 3.1 — 4 Punkte

a) Berechnen Sie die 1-, 2-, 3- und ∞-Normen des Vektors $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

b) Nennen Sie den Hammingabstand der Tupel $(1,0,0,1,1,0)$ und $(1,0,1,1,0,1)$, also

$$\operatorname{dist}\left((1,0,0,1,1,0),(1,0,1,1,0,1)\right).$$

c) Berechnen Sie den Abstand der Vektoren v aus Aufgabenteil a) und $w = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bezüglich der von der 4-Norm induzierten Metrik.

d) Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 12 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie $\|A\|_\infty^*$ und $\|A\|_2^*$.

Aufgabe 3.2 — 6 Punkte

a) Welche Vektoren des $\mathbb{R}^2$ liegen in der Menge

$$\mathcal{B}_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbb{R}^2\right) \cap \mathcal{B}_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbb{R}^2\right)$$

bezüglich der Metrik, die durch die 1-Norm induziert wird?

b) Wieviele Punkte liegen in der Hammingkugel $\mathcal{B}_3(0,(\mathbb{F}_7)^4)$, wobei $0 = (0,0,0,0)$?

c) Sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für die Hammingkugeln eines beliebigen Paares von Vektoren $v, w \in (\mathbb{F}_p)^n$ stets gilt

$$|\mathcal{B}_1(v,(\mathbb{F}_p)^n) \cap \mathcal{B}_1(w,(\mathbb{F}_p)^n)| \in \{0, 2, p, 1 + n \cdot (p-1)\}.$$

Aufgabe 3.3 — 3 Punkte

Es sei `normx()` eine Funktion in Sage, welche für einen Vektor der Dimension $n \cdot m$ eine Länge berechnet und auf dem $\mathbb{R}^{n \cdot m}$ eine Norm bildet. Implementieren Sie eine Funktion `normmatrix()` welche für eine $n \times m$-Matrix die über die Vektornorm `normx()` gebildete Matrixnorm ausgibt. Zum Testen Ihrer Funktion `normmatrix()` nutzen Sie die euklididsche Norm `def normx(v): return v.norm()`.

Präsenzaufgabe 3.4 **6 Zusatzpunkte**

a) Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt $\|v\|_{p_1} \geq \|v\|_{p_2}$ für $p_1, p_2 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $p_1 < p_2$.

b) Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, welcher nicht einem Vielfachen eines Einheitsvektors entspricht, gilt $\|v\|_{p_1} > \|v\|_{p_2}$ für $p_1, p_2 \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mit $p_1 < p_2$.

c) Zeigen Sie, dass die Frobeniusnorm auf 2×2-Matrizen submultiplikativ ist.

Präsenzaufgabe 3.5 **2 Zusatzpunkte**

Finden Sie für alle p-Normen alle Vektoren der Form $\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\|v\|_p = 1$.