# Mathe für die Informatik I – WiSe 2017

**Dr. Samuel Hetterich**

Blatt 11 Abgabe: Mo 22.01.2018, 10:00 Uhr

### Aufgabe 11.1 8 Punkte

a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix
- Berechnen Sie für $A$ den Eigenraum $\mathsf{ER}_k$ zum kleinsten Eigenwert $k$ der Matrix $A$.
- Geben Sie einen Eigenvektor von $A$ zum größten Eigenwert der Matrix $A$ an (vielleicht müssen Sie hier nicht mal rechnen!).

b) Diagonalisieren Sie die folgende Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

D. h. berechnen Sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $k_1, k_2, k_3$ mit

$$A = B \cdot \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix} \cdot B^{-1}$$

c) Zeigen Sie, für eine orthogonale Matrix $A$ ist $\det(A) = \pm 1$.

### Aufgabe 11.2 7 Punkte

Berechnen Sie, wenn möglich, die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^6+2n^3+5}{8n^3+2n^6+13}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{42n^2+23n+12}{31n^3+17n+\pi}$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{42n^2+23n+12}{31n^2+8n+c}$ mit $c \in \mathbb{R}$

Berechnen Sie, wenn möglich, den Wert der folgenden Reihen:

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{9^k}$

e) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

Entscheiden Sie, ob folgende Reihen konvergieren oder divergieren:

f) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{k^4}$

g) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4 \cdot 4^k}$

**Tipp:** Nutzen Sie Abschätzungen für die einzelnen Summanden.

### Aufgabe 11.3 5 Punkte

a) Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Begründen Sie bitte mit den jeweiligen Definitionen der Begriffe.

- $a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n}$ für $n \in \mathbb{N}$

- $b_n = n^3 - 2n^2$ für $n \in \mathbb{N}$
- $c_n = \frac{n+2}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$

b) Finden Sie eine rekursive Darstellung der Folge $a_n = 3n + 2$ für $n \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe 11.4** **4 Punkte**

Es konvergiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a$. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge der arithmetischen Mittel $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

gegen $a$ konvergiert.