Mathe für die Informatik I – WiSe 2017
Dr. Samuel Hetterich

Blatt 10 Abgabe: Mo 15.01.2018, 10:00 Uhr

▶ In der Vorlesung wird Ihnen der Gebrauch der freien Software Sage zur Lösung mathematischer Probleme nahegebracht. Diese Software lässt sich hier `www.sagemath.org/download` kostenlos herunterladen. Auf den folgenden Übungsblättern befindet sich nun jeweils eine Sage-Aufgabe. Diese Aufgabe lösen Sie indem Sie Ihren Programmcode und Ihre Berechnungen ausdrucken und an Ihre Abgabe heften.

Aufgabe 10.1 — 3 Punkte

Es seien die Vektoren $w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ und $v_2^T = \begin{pmatrix} 11 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Berechnen Sie die euklidische Norm von w_1, w_2, v_1 und v_2.

b) Berechnen Sie das Skalarprodukt von w_1 mit w_2.

c) Welchen Winkel schließen die beiden normierten Vektoren $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$ ein? Nutzen Sie die Kenntnisse über das Skalarprodukt aus der Vorlesung, um diese Aufgabe zu lösen.

Aufgabe 10.2 — 8 Punkte

Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Welche der nachfolgenden Aussagen ist wahr?

a) Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind orthogonal.

b) Die Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

c) Die Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$. Falls nein, wie lässt sich aus der Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ erzeugen?

d) Berechnen Sie die Darstellung $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ von $w = e^{(1)} + e^{(3)}$ bezüglich $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

e) Zeigen Sie, dass eine Menge von n orthonormalen Vektoren $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ ist.

f) Sei $U = \mathsf{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie $U^\perp$.

g) Finden Sie eine Belegung der Variablen $a, b \in \mathbb{Z}$, so dass $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$ orthogonal ist.

Aufgabe 10.3 — 4 Punkte

Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Zeigen Sie, dass genau dann $A^T \cdot A = A \cdot A^T$ gilt, wenn

$$\text{entweder} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Nutzen Sie, dass $x^2 = y^2 \Leftrightarrow (x = y \ \vee \ x = -y)$ und $z \cdot x = z \cdot y \Leftrightarrow (x = y \ \vee \ z = 0)$.

Aufgabe 10.4 — 5 Punkte

Man kann das Gram-Schmidt-Verfahren dazu nutzen, um eine Orthonormalebasis zu konstruieren, welche denselben Raum aufspannt, wie eine gegebene Menge von Vektoren.

Der Orthogonalisierungschritt ist der Grundbaustein dieses Verfahrens. Von zwei Vektoren `u` und `v` wird dabei der Vektor `u` so verändert, dass er orthogonal auf `v` steht, aber der aufgespannte Raum von `u` und `v` derselbe bleibt. Das wird mit der folgenden Berechnungsvorschrift erreicht:

$$\mathtt{u} = \mathtt{u} - \langle \mathtt{u}, \mathtt{v} \rangle \mathtt{v}$$

Das Gram-Schmidt-Verfahren besteht nun darin, den ersten Vektor zu normieren und für jeden darauffolgenden Vektor den Orthogonalisierungschritt mit allen vorherigen Vektoren durchzuführen und diesen neuen Vektor anschließend zu normieren.
Schreiben Sie dafür in Sage eine Funktion `GramSchmidt(veclist)`, welche eine Liste von Vektoren `veclist` nimmt und eine Liste von Vektoren zurückgibt, mit der Eigenschaft, dass die zurückgegebene Liste denselben Raum aufspannt wie die Vektoren in `veclist` und sie eine Orthonormalbasis dieses Raums bilden.
Beachten Sie dabei, dass `veclist` nicht linear unabhängig sein muss. An welcher Stelle in dem Verfahren können Sie leicht feststellen, dass der aktuelle Vektor nicht linear unabhängig zu den vorherigen ist?
Hinweis: Ein Vektor `v` stellt die folgenden Methoden bereit, welche Sie für die Aufgabenstellung benutzen können:

- `v.normalized()` um `v` zu normalisieren (sie können dies aber auch „per Hand“ machen,
- `v.dot_product(u)` berechnet das Skalarprodukt $\langle \mathtt{v}, \mathtt{u} \rangle$,
- `v.is_zero()` um zu überprüfen, ob `v` der Nullvektor ist.