Generelle Hinweise zum Lösen von Übungsaufgaben in der Mathematik

Übungsaufgaben spielen in der Mathematik eine zentrale Rolle. Mathematik fängt überhaupt erst da an, wo man Probleme löst. Übungsaufgaben sind der natürliche Weg, diese Fähigkeiten zu erwerben.

Planung

a) Betrachten Sie jede Übungsaufgabe als ein intellektuelles Abenteuer. Je schwieriger die Aufgabe, umso größer das Abenteuer. Man lernt Mathematik nicht aus Büchern oder Vorlesungen, sondern nur durch Selbermachen.

b) **Bearbeitungs*zeitraum* statt Bearbeitungs*zeitpunkt*:**

   Zwischen Ausgabe- und Abgabetermin eines Übungsblatts haben Sie üblicherweise **7 Tage** zum Nachdenken und Lösen, **nutzen Sie diese Zeit!** Wer erst am Tag vor der Abgabe das Blatt schaut, verschenkt fünf volle Arbeitstage.

c) **Lösen Sie die Aufgaben selber.**

   Gruppenarbeit ist sinnvoll, aber letztlich werden Sie an Ihren eigenen Fähigkeiten gemessen. Lösungen, die Sie "irgendwo gefunden" haben, helfen Ihnen bei dem Zwischenziel "Hausaufgabenpunkte", bringen Sie aber vom Gesamtziel "Klausurbestehen" weiter weg!

Analyse

d) **Formulieren Sie die Aufgabenstellung in eigenen Worten** (ohne das Aufgabenblatt):

   Man kann nur Aufgaben lösen, deren Aufgabenstellung man verstanden hat. Sie können also erst dann über eine Lösung nachdenken, wenn Sie die Aufgabe formulieren können, ohne aufs Blatt zu schauen.

   Formulieren sie konkret: Was ist hier *genau* gefragt? (Ein Beweis? Eine konkrete Berechnung?)

e) **Klären Sie zu erst *alle* verwendeten Begriffe.**

   Wiederholen Sie die Definitionen aller vorkommenden Begriffe. Sie müssen mit den Begriffen *präzise Definitionen* verbinden, nicht nur eine verschwommene Vorstellung oder Anschauung.

f) **Ermitteln Sie alle Aussagen/Sätze zu den Begriffen.**

   Begriffsdefinitionen *allein* reichen nicht aus. Ein Begriff wird erst vollständig durch die Angabe aller Sätze, die über diesen Begriff gemacht werden. Machen Sie sich also eine Liste der wesentlichen Eigenschaften und Beziehungen der verwendeten Begriffe.

g) **Beweis*methoden* nachschlagen.**

   Welche Beweismethoden sind in der VL oder UE im Zusammenhang mit den verwendeten Begriffen aufgetreten? Kann man diese Methoden für die Aufgabe verwenden?

Arbeitsweise

h) **Diskutieren Sie mit anderen über die Aufgabe**.

Reden hilft, die eigenen Gedanken zu ordnen. Sie können mit Ihren Kommilitonen oder Ihrem Übungsgruppenleiter über die Aufgabenstellung, Lösungsansätze und die Lösung reden.

In jedem Fall sollten Sie aber zunächst *selbst* versuchen, die Aufgabe zu lösen!

i) **Erklären Sie Ihren Lösungsansatz anderen.**

Eine Lösung oder einen Ansatz der Kritik anderer auszusetzen ist die beste Qualitäts-Kontrolle. Gleichzeitig lernen Sie beim Vorstellen Ihrer Ideen mathematisch zu Formulieren.

Der Moment des Aufschreibens

Der Augenblick der schriftlichen Fixierung ist ein kritischer Moment. Jetzt stellt sich heraus, ob die im Geiste gefundene Idee sich wirklich als Lösung hinschreiben läßt.
Jede richtige Lösung läßt sich auch in angemessener Weise niederschreiben. Wenn Sie Schwierigkeiten haben, Ihre Gedanken geordnet aufs Papier zu bringen, dann liegt es oft daran, daß Ihre Gedanken noch nicht genügend geordnet sind. Legen Sie den Stift wieder hin und denken Sie noch ein wenig nach. Überlassen Sie es auf keinen Fall dem Korrektor, grob hingeworfene Ideen zu ordnen.

1) **Definieren Sie alle verwendeten Variablen.**

   Erklären Sie klar, woher die Elemente in Ihrem Beweis stammen (z.B. "Sei $n \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl.").

   Machen Sie deutllich ob es sich z.B um ein *beliebiges* oder ein *spezielles* Element einer Menge handelt.

2) **Erläutern Sie Ihre Terme (bzw. Aussagen oder Gleichungen)**

   Ihr Text muss zwischen den einzelnen Formelfragmenten einen Gesamtzusammenhang herstellen. Ein und dieselbe Symbolfolge (z.B. $x < n$) hat ganz verschiedene Bedeutungen je nachdem, ob im Text vorher steht: "*Hieraus schließen wir ...*" oder "*Angenommen, es gilt ...*" .

3) **Begründen Sie jede Ihrer Umformungen *kurz und knackig*.**

   Es gibt zwei Extreme, die beide wenig zufriedenstellend sind: i) die "*nackte Umformungskette*" ohne kommentierenden Text und ii) der "*Roman*", der um das Problem herumredet. Die Wahrheit liegt irgendwo dazwischen. Verweisen Sie so oft wie möglich auf bereits bekannte/bewiesene Aussagen (z.B. im Skript).

4) **Schreiben Sie kein "Mathesprech".**

   Ihr Text soll aus ganzen Sätzen bestehen und jeder Satz enthält ein Subjekt und ein Verb.

   Vermeiden Sie wenn möglich Ketten von logischen Symbolen.

   Vermeiden Sie aber auch umständliche Text-Umschreibungen, wo es eine konzise Symbolik gibt.

5) **Schreiben Sie deutlich, lesbar und möglichst ordentlich**

   Text, Formeln und Symbole sollten sorgfältig und sauber ausgeführt sein, schreiben Sie z.B. wenn möglich bei Termumformungen in mehreren Zeilen die passenden Terme untereinander.

6) **Validieren Sie Ihr Ergebnis**

   Lesen Sie Ihren Text durch und fragen Sie sich: Überzeugt Sie die Argumentation des Textes eigentlich selbst? Mal ganz ehrlich? Wenn nicht, fangen Sie von vorn an.

Das ganze ist ein manchmal mühseliger Vorgang. Aber der Stolz auf eine gleichermaßen richtige wie schöne Lösung wird Sie entschädigen.

Sehr gute Tipps für "*schönes*" Aufschreiben finden sich im Buch "Das ist o.B.d.A. trivial" von A. Beutelspacher.

1 Mathematische Anfängerfehler

Falsches Verwenden von Äquivalenz- bzw. Implikationszeichen
Die Symbole “⇔”, “⇒” und “⇐” können nicht zwischen *Termen* stehen, die keine Aussagen sind:

Richtig ist:	$4 \cdot a + 8 \;=\; 4 \cdot (a + 2)$
Ohne Aussage ist:	$4 \cdot a + 8 \;\rightarrow\; 4 \cdot (a + 2)$
Falsch ist:	$4 \cdot a + 8 \;\Rightarrow\; 4 \cdot (a + 2)$

Die Symbole ⇐, ⇒ und ⇔ können und dürfen nur zwischen *mathematischen Aussagen* stehen!
Eine Mathematische Aussage enthält immer ein Symbol, das einem sparchlichem Verb gleichzusetzen ist:

$=$ “**ist** gleich”	$\neq$ “**ist** nicht gleich”	$\leq$ “**ist** kleiner oder gleich”	$<$ “**ist** echt kleiner”
$\in$ “**ist** Element von”	$\subseteq$ “**ist** Teilmenge von”	$\perp$ “**steht** senkrecht auf”	$\mid$ “**teilt**”

Kein Verb in diesem Sinne enthalten Operatoren, die etwas *berechenen* oder *erstellen* wie z.B. $\cap$, $\cup$, $+$, $\cdot$.

Definition durch Verwendung des logischen Quantors “∃”
Generell gilt: Quantoren sind ausschließlich in logischen Formeln zu verwenden, also nie im Fließtext.

Beweise für Aussagen mit einem Allquantor[a] führt man für gewöhnlich durch einen “pars-pro-totum-Beweis”: Ein solcher Beweis beginnt typischerweise mit “Sei $x \in M$ beliebig.”. Hier schreiben Anfänger oft fälschlich “$\exists x \in M$.”, was sich aber mit “Es gibt (mindestens) ein Element in M.” übersetzt – und deswegen zwar etwas über M aber *nichts* über x aussagt!

Übrigens: nach dem Satzende von “$\exists x \in M$.” ist x bereits nicht mehr definiert!

Falsch ist:
$\exists x \in M$. x ist gerade. übersetzt: “Es gibt ein Element in M. Ein bisher nicht gennantes x ist gerade.”[b]

Gemeint ist:
$\exists x \in M$: x ist gerade. übersetzt: “Es gibt ein Element x in M für dieses gilt: x ist gerade.”

[a] “Alle Vielfachen von 4 sind gerade.”
[b] Was hier das x in “x ist gerade” sein soll, ist völlig unklar.

Keine Einführung der Variablen Jede Argumentation *muss* mit einer Einführung der Variablen beginnen, analog zur gesprochenen Sprache:

- Der Satz “*Das* ist immer *da* drin.” ist zwar grammatikalisch korrekt, aber *inhaltlich wertlos* ohne einen Hinweis, was genau “das” und “da” bedeuten.
- Analog ist $B \subseteq A$ zwar von der Syntax[a] her (scheinbar) korrekt, aber:
  - Ohne den Hinweis was hier B und A sind, ist $B \subseteq A$ nicht als wahr oder falsch erkennbar, und lässt sich nur lesen als “*Das* ist immer *da* drin.”.
  - Falls A, B keine Mengen sind, ist die Aussage sogar *syntaktisch falsch*!
  - Ohne einen *Kontext* ist nicht erkennbar ob dies eine *Voraussetzung* (“Es gelte: $B \subseteq A$”) oder eine *Folgerung* ist (“Deswegen gilt: $B \subseteq A$”).

  Inklusive Kontext könnte es z.B.(richtig) heißen: “Für zwei Mengen A, B gelte: $B \subseteq A$.”

[a] *Syntax* ist die “mathematische Grammatik”, gemeint ist hier also: “...ist ein mathematisch korrekt geformter Ausdruck”.

2 Stilistische Anfängerfehler

Impliziter Dritter

Der Implizite Dritte ist ein vergessenes "Schlusswort", das dem Leser erläutert *hätte*, was genau wir nun gezeigt haben.

Zum Beispiel sei zu beweisen: "Die Zahl 6 ist keine Primzahl[a]."
Im Beweis "Für die Zahl 6 gilt $6 = 3 \cdot 2$." fehlt der komplette Schlussteil:
"...also hat 6 außer den Teilern 6 und 1 noch einen echten Teiler $3 \neq 6$. Deswegen ist 6 *keine Primzahl.*"

Was hier Trivial scheint, wird in komplexeren Beispielen schnell unangenehm:
Ist zu beweisen, dass ein Vektorraum V ein *Bananachraum* ist, enden Lehrbuchbeweise oft mit dem Satz: "...und deswegen gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ mit $a \in V$." Es bleibt dann dem Leser, den letzten Schritt zwischen "Folge konvergiert" und "ist Bananachraum" herzustellen.

Im normalen Leben begegnet man dem "Impliziten Dritten" häufig in Form von kryptischen Antworten:

Frage: "Wo ist der nächste Supermarkt?"	Antwort: "Es ist Sonntag.".
Frage: "Haben wir noch Zeit für einen Kaffee?"	Antwort: "Es ist schon drei.".

Können Sie den impliziten Dritten jeweils *explizit* nennen?

[a] Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl $p > 1$, die nur die Teiler p (sich selbst) und 1 hat.

Warten auf die Pointe

Wissenschaftliches Schreiben und Vortragen ist das Gegenteil von einem Witz: Die *Pointe kommt zuerst!*

Stellen Sie was sie Zeigen wollen *ganz nach vorn*! Zum Beispiel durch durch Angabe, was gleich bewiesen wird ("Zu zeigen ist:..."). Schreiben Sie also (im Zweifel formlos) kurz worauf sie hinauswollen: "Die Vektoren sind linear abhängig. Denn:..."

Dies gilt ganz besonders für jeden wissenschaftlichen Vortrag!