Mathe für die Informatik I – WiSe 2017
Dr. Samuel Hetterich

Blatt 5 — Abgabe: Mo 27.11.2017, 10:00 Uhr

Aufgabe 5.1 — **6 Punkte**

a) Welche der folgenden Mengen ist linear unabhängig in dem jeweiligen Vektorraum?

i. $\{1, x^4, (x^2+1)\cdot(x^2-1)\} \subset \mathbb{R}[x]$ ii. $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^4$

b) Es seien

- $v_1, v_2 \in V$ linear unabhängige Vektoren in einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V und
- $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängige Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

Zeigen Sie, dass die Vektoren $w_1, w_2 \in V$ mit

$$w_1 := a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 \qquad \text{und} \qquad w_2 := b_1 \cdot v_1 + b_2 \cdot v_2$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 5.2 — **6 Punkte**

Es sei

$$\mathbb{R}[x]_4 := \{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \ : \ a, b, c, d, e \in \mathbb{R}\}$$

die Menge der Polynome vom Grad höchstens 4.
Es sei

$$U := \{p \in \mathbb{R}[x]_4 \ : \ p(3) = 0\}$$

die Menge der Polynome in $\mathbb{R}[x]_4$ mit einer Nullstelle bei $x_0 := 3$

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}[x]_4$ ein Vektorraum ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}[x]_4$ isomorph zu einem $\mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ist (Nennen Sie dabei explizit n).

c) Zeigen Sie, dass die Menge U ein Untervektorraum vom $\mathbb{R}[x]_4$ ist.

Aufgabe 5.3 — **3 Punkte**

Es seien $v_1, \ldots, v_k$ Vektoren in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Zeigen Sie, dass $\mathsf{span}[v_1, \ldots, v_k]$ ein Untervektorraum von V ist.

Aufgabe 5.4 — **4 Punkte**

Es seien U, V, W $\mathbb{R}$-Vektorräume und $f : U \to V$ und $g : V \to W$ zwei lineare Abbildungen.
Zeigen Sie: $g \circ f$ mit $g \circ f(u) := g(f(u))$ für $u \in U$ ist linear.