Mathe für die Informatik I – WiSe 2017
Dr. Samuel Hetterich

Blatt 6 Abgabe: Mo 04.12.2017, 10:00 Uhr

▶ In der Vorlesung wird Ihnen der Gebrauch der freien Software Sage zur Lösung mathematischer Probleme nahegebracht. Diese Software lässt sich hier `www.sagemath.org/download` kostenlos herunterladen. Brauchen Sie Hilfe bei der Installation oder haben Sie sonst Fragen zur Nutzung von Sage, sind Sie eingeladen am **Donnerstag den 30.11.2017 in Hörsaal H VI** Ihre Fragen zu stellen. Auf den folgenden Übungsblättern befindet sich nun jeweils eine Sage-Aufgabe. Diese Aufgabe lösen Sie indem Sie Ihren Programmcode und Ihre Berechnungen ausdrucken und an Ihre Abgabe heften.

Aufgabe 6.1 **6 Punkte**

a) Bilden die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

b) Zeigen Sie, dass in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V der Dimension n jeweils n Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ genau dann eine Basis von v bilden, wenn Sie linear unabhängig sind.

Aufgabe 6.2 **4 Punkte**

Es sei, wie in Aufgabe 5.2,

$$\mathbb{R}[x]_4 := \{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \ : \ a, b, c, d, e \in \mathbb{R}\}$$

die Menge der Polynome vom Grad höchstens 4.
Es sei

$$U := \{p \in \mathbb{R}[x]_4 \ : \ p(3) = 0\}$$

die Menge der Polynome in $\mathbb{R}[x]_4$ mit einer Nullstelle bei $x_0 := 3$

d) Geben Sie eine Basis von U an.

e) Welche Dimension hat U?

Aufgabe 6.3 **4 Punkte**

Berechnen Sie:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \\ 17 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

e) Sei $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\operatorname{diag}(a) \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6.4 **4 Punkte**

Bestimmen Sie die Anzahl der linear unabhängigen Teilmengen der Kardinalität 4 von

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Schreiben Sie dafür ein Sage-Programm. Definieren Sie in diesem einen Vektorraum `V` über $\mathbb{Q}$ der Dimension 5, erstellen Sie eine Liste `list` der obigen Vektoren und nutzen Sie die Funktion `Combinations(list, 4)` um sich eine Liste mit allen vierelementigen Teillisten von `list` auszugeben. Zuletzt zählen Sie, wie viele dieser Teillisten linear unabhängig sind. Dafür können Sie die Abfrage `V.linear_dependence(vs) == []` verwenden, welche `True` zurückgibt, falls es tatsächlich keine Abhängigkeit zwischen den Vektoren in der Liste `vs` gibt, sie also unabhängig sind und `False` falls sie doch linear abhängig sind.