Aufgabe 1.1

(a) Definitionsbereich $x \in \mathbb{R}$
Differenzierbar, da $f'(x)$ an allen Stellen definiert

$$f(x) = x^3 - x + 8$$
$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

(b) Definitionsbereich $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
Nicht differenzierbar, da $f'(x)$ an Stelle $x = 0$ nicht definiert

$$f(x) = \frac{1}{2x}$$
$$f'(x) = \frac{2}{4x^2}$$

(c) Definitionsbereich $x \in \mathbb{R}$
Differenzierbar, da $f'(x)$ an allen Stellen definiert

$$f(x) = 3 \cdot \sin(2x)$$
$$f'(x) = 6 \cdot \cos(2x)$$

(d) Definitionsbereich $x \in \mathbb{R}$
Nicht differenzierbar, da $f'(x)$ an Stelle $x = 0$ nicht definiert

$$\begin{aligned} f(x) &= |2x| \\ &= 2 \cdot \sqrt{(x^2)} \\ f'(x) &= 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2}} \end{aligned}$$

Aufgabe 1.2

(a)

$$\begin{aligned} gradf(x) &= \nabla f(x_1, x_2) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x_1}(x_1, x_2) \\ \\ \frac{\delta f}{\delta x_2}(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6x_1^2 + 10x_1x_2 - 2x_2^2 \\ \\ 5x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{2||x||^2} \\
&= e^{g(x)} \\
f'(x) &= g'(x) \cdot e^{g(x)} \\
g(x) &= 2||x||^2 \\
&= 2\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}^2 \\
&= 2 \cdot (x_1^2 + ... + x_n^2) \\
&= 2x_1^2 + ... + 2x_n^2 \\
\frac{\delta g}{\delta x_i}(x) &= 4x_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
grad\ f(x) &= \nabla f(x_1, ..., x_n) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x_1}(x_1, ..., x_n) \\ ... \\ \frac{\delta f}{\delta x_n}(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4x_1 \cdot e^{2||x||^2} \\ ... \\ 4x_n \cdot e^{2||x||^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 1.3

(a)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \begin{pmatrix} v_1(x_1, x_2) \\ v_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \\
\nabla f(x) &= \frac{\delta v_1}{\delta x_1}(x_1, x_2) + \frac{\delta v_2}{\delta x_2}(x_1, x_2) \\
&= 3 + 2x_2 + 5x_2^4 + x_1^2
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \begin{pmatrix} v_1(x_1, ..., x_n) \\ ... \\ v_n(x_1, ..., x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ ... \\ 2x_n \end{pmatrix} \\
\nabla f(x) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta v_i}{\delta x_i}(x_1, ..., x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2 = n \cdot 2
\end{aligned}$$

Marvin Glaser
s1468394

Aufgabe 1.4

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} det\begin{pmatrix} (3-\lambda) & 4 \\ 2 & (1-\lambda) \end{pmatrix} &= (3-\lambda)(1-\lambda) - 4 \cdot 2 \\ &= \lambda^2 - 4\lambda - 5 \end{aligned}$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$

Eigenvektor:

Sei $\lambda = 5$

$$\begin{aligned} (I) \quad & (3-\lambda)x + 4y = 0 \\ (II) \quad & 2x + (1-\lambda)y = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I) \quad & -2x + 4y = 0 \\ (II) \quad & 2x - 4y = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow x = 2y$$

Lösungsmenge L:

$$L = \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$$

Sei $\lambda = -1$

$$\begin{aligned} (I) \quad & (3-\lambda)x + 4y = 0 \\ (II) \quad & 2x + (1-\lambda)y = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I) \quad & 4x + 4y = 0 \\ (II) \quad & 2x + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow x = -y$$

Lösungsmenge L:

$$L = \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} det\begin{pmatrix} (-1-\lambda) & 3 \\ 2 & (-2-\lambda) \end{pmatrix} &= (-1-\lambda)(-2-\lambda) - 2 \cdot 3 \\ &= \lambda^2 + 3\lambda - 4 \end{aligned}$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4$

Eigenvektor:

Sei $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} (I) \quad & (-1-\lambda)x + 3y = 0 \\ (II) \quad & 2x + (-2-\lambda)y = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I) \quad & -2x + 3y = 0 \\ (II) \quad & 2x - 3y = 0 \\ & \rightarrow x = \frac{3}{2}y \end{aligned}$$

Lösungsmenge L:

$$L \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$$

Sei λ = -4

$$\begin{aligned} (I) \quad & (-1-\lambda)x + 3y = 0 \\ (II) \quad & 2x + (-2-\lambda)y = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (I) \quad & 3x + 3y = 0 \\ (II) \quad & 2x + 2y = 0 \\ & \rightarrow x = -y \end{aligned}$$

Lösungsmenge L:

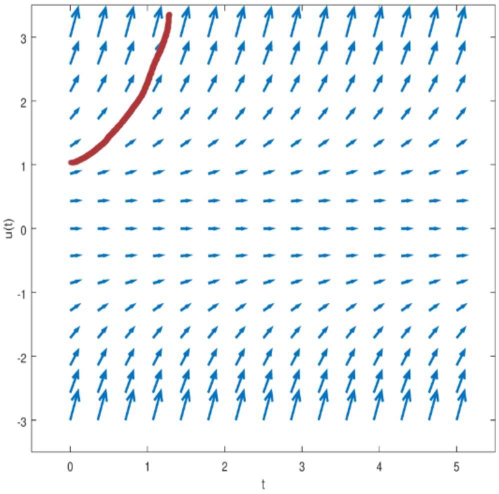
$$L \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 1.5

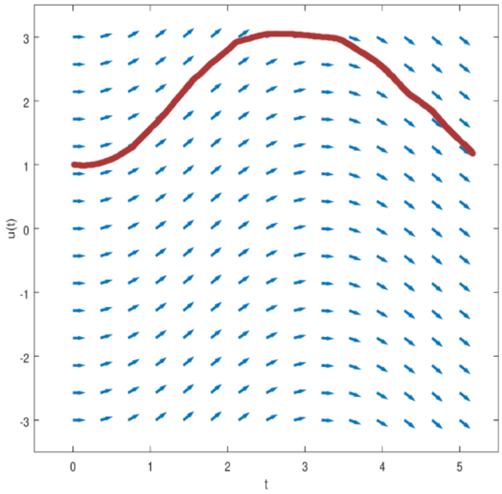
(a)

- (1) dargestellt durch (D)
  Begründung: $u'(t)$ ist linear abhängig von $u(t)$ und unabhändig von t. (D) zeigt an jedem Punkt genau dieses Steigunsverhalten.
- (2) dargestellt durch (A)
  Begründung: $u'(t)$ wird mit steigendem und sinkendem $u(t)$ exponentiell größer. Mit größerer Nähe zu $u(t) = 0$ wird convergiert die Steigung gegen 0. Außerdem wir die ist die Steigung unabhängig von t. All dies ist in (A) zu erkennen.
- (3) dargestellt durch (B)
  Begründung: $u'(t)$ ist unabhängig von $u(t)$ und hñgt nur von t ab. Die Steigung verhält sich hier wie ein sin Funktion abhängig von t. Gut zu sehen ist, dass in (B) die Steigung bei $\frac{\pi}{2}$ (~ 1.57) maximal und bei 0, bzw. π (~ 3.14) null ist. Außerdem ist die Steigung bei zwischen 3.14 und 5 negativ.
- (4) dargestellt durch (C)
  Begründung: Der Verlauf von $u'(t)$ ist unabhängig von $u(t)$ und wird bei $t < 1$ von der Konstanten +1 dominiert. Für $t = 1$ ist die Steigung 0 und ab $t > 1$ beginnt fr̈ $u'(t)$ der Term $-t$ zu dominieren. Genau das ist in (C) abgebildet.

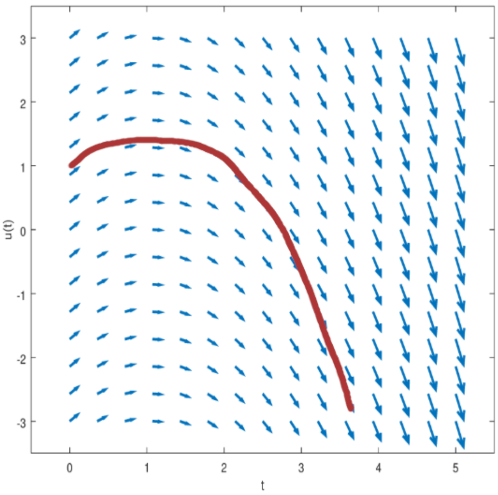
(b)



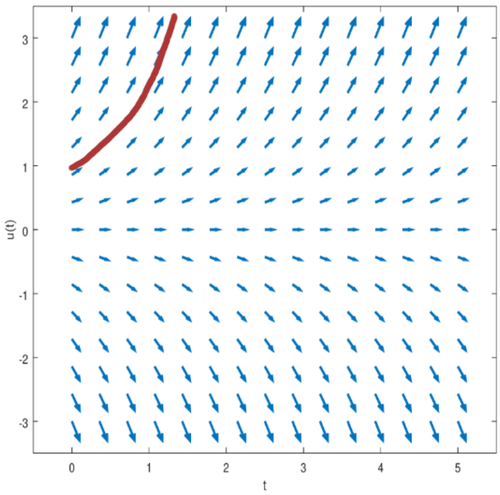
(A)



(B)



(C)



(D)