1 Beispielklausuren

Die Modulabschlussprüfung Diskrete Modellierung findet in Form einer 120 minütigen Klausur statt. Die Erstklausur findet am 23.02.2017 um 9:00 s.t. und die Zweitklausur am 06.04.2017 ebenfalls um 9:00 s.t. statt.

Details zum Ablauf der Klausur:

- Grundsätzlich gelten die in der Ordnung Ihres Studiengangs festgelegten Regelungen. Dieses hier sind nur ergänzende Hinweise.
- Vor Beginn der Klausur wird die Zuweisung in die Hörsäle mitgeteilt.
- Legen Sie Ihre „Goethe-Card“ deutlich sichtbar auf Ihren Platz, damit wir Ihre Identität überprüfen können.
- Außer einem dokumentenechten Schreibstift sind keine Hilfsmittel zugelassen. Das Mitbringen nicht zugelassener Hilfsmittel stellt eine Täuschung dar und führt zwangsläufig zum Nichtbestehen der Klausur. Schalten Sie insbesondere Handys und Smartwatches vor Beginn der Klausur aus.
- Schreibpapier wird von uns bereitgestellt.
- Begründungen sind nur dann notwendig, wenn die Aufgabenformulierung diese verlangt.
- Jedes(!) Blatt der abgegebenen Lösung muss mit Namen, Vornamen und Matrikelnummer gekennzeichnet sein.
- Werden zu einer Aufgabe zwei oder mehr Lösungen angegeben, so gilt die Aufgabe als nicht gelöst. Entscheiden Sie sich also immer für eine Lösung.

Checkliste - zur Klausur müssen Sie mitbringen:

- einen dokumentenechten Schreibstift
- Ihre Goethe-Card

Durch die in den Übungen gesammelten Punkte kann ein Bonus für die Klausur erworben werden. Zur Benotung wird die Summe aus dem Klausurergebnis und der Bonuspunkte verwendet. Die Klausur ist bestanden, wenn mit dem Bonus mindestens 50% der in der Klausur erzielbaren Punkte erreicht werden.

Nachfolgend finden Sie die Aufgaben der Klausuren aus den Wintersemestern 2014/15 und 2015/16 sowie den Sommersemestern 2015 und 2016.

Inhaltsverzeichnis

1.1 Erstklausur WS 15/16

Aufgabe 1: Aussagenlogik

(a) Es werden drei Wetten abgeschlossen, wobei wie üblich eine Wette entweder gewinnt oder verliert. Die folgenden Eigenschaften sind bekannt: **[8 Pkte]**

Eigenschaft 1: Wenn die erste Wette gewinnt, dann verliert die zweite Wette.

Eigenschaft 2: Die zweite Wette gewinnt genau dann, wenn die dritte Wette verliert.

Eigenschaft 3: Die erste Wette oder die dritte Wette verliert.

Formalisieren Sie die drei Aussagen durch je eine aussagenlogische Formel, indem Sie die atomaren Aussagen **E** (die **e**rste Wette gewinnt), **Z** (die **z**weite Wette gewinnt) und **D** (die **d**ritte Wette gewinnt) benutzen.

$\varphi_{\text{Eigenschaft 1}} :=$

$\varphi_{\text{Eigenschaft 2}} :=$

$\varphi_{\text{Eigenschaft 3}} :=$

Nehmen Sie an, dass alle drei Eigenschaften zutreffen. Ist es möglich, dass die erste Wette gewinnt? **Beweisen** Sie Ihre Antwort, z.B. mithilfe einer Wahrheitstafel.

Sie können die folgende Vorlage für Ihre Wahrheitstafel verwenden:

E	**Z**	**D**	$\varphi_{\text{Eigenschaft 1}}$	$\varphi_{\text{Eigenschaft 2}}$	$\varphi_{\text{Eigenschaft 3}}$	
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

(b) **[10 Pkte]**

(i) Geben Sie an, ob die aussagenlogische Formel (4 Pkte)

$$\varphi := \big((X_1 \oplus X_2) \rightarrow (X_1 \leftrightarrow X_2)\big)$$

erfüllbar und/oder falsifizierbar ist.

Kreuzen Sie **alle** richtigen Antworten an.

φ ist **erfüllbar:** ☐ ja ☐ nein

φ ist **falsifizierbar:** ☐ ja ☐ nein

Falls φ **erfüllbar** ist, geben Sie eine Belegung an, die φ erfüllt:

Falls φ **falsifizierbar** ist, geben Sie eine Belegung an, die φ falsifiziert:

(ii) Gelten die folgenden semantischen Äquivalenzen ($\equiv$) für beliebige aussagenlogische Formeln φ, ψ und χ? (6 Pkte)

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie zwei Punkte, für jedes **falsche Kreuz** werden **zwei Punkte abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl für Teilaufgabe (ii) ist aber mindestens 0.

$\big(\varphi \vee (\psi \wedge \chi)\big)$	$\equiv$	$\big((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)\big)$	☐ wahr	☐ falsch
$\big((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi\big)$	$\equiv$	$\big(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)\big)$	☐ wahr	☐ falsch
$\big(\varphi \vee (\varphi \rightarrow \psi)\big)$	$\equiv$	$\mathbf{1}$	☐ wahr	☐ falsch

(c) Geben Sie eine zur Formel **[6 Pkte]**

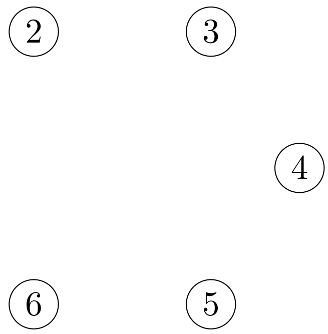
$$\psi := \Big((X_1 \rightarrow X_2) \wedge (X_2 \rightarrow X_3) \wedge (X_3 \rightarrow X_1) \Big)$$

äquivalente Formel ψ' in **disjunktiver** Normalform (DNF) an.
(Wenn Sie Ihren Lösungsweg angeben, können Sie Teilpunkte auch bei falscher Lösung erhalten.)

Aufgabe 2: Graphen und Bäume

(a) Sei $G = (V, E)$ der ungerichtete Graph mit Knotenmenge $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und Kantenmenge $E = \big\{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\big\}$. **[7 Pkte]**

(i) Geben Sie G in graphischer Darstellung an. (1 Pkt)

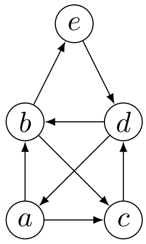


(ii) Geben Sie alle Knoten vom Grad 3 an. (1 Pkt)

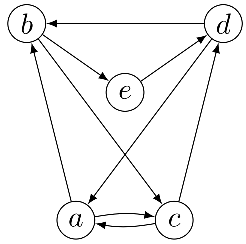
(iii) Geben Sie ein möglichst großes Matching M in G an. (2 Pkte)

$M = \{$

(iv) Betrachten Sie die folgenden Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$: (3 Pkte)



G_1



G_2

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

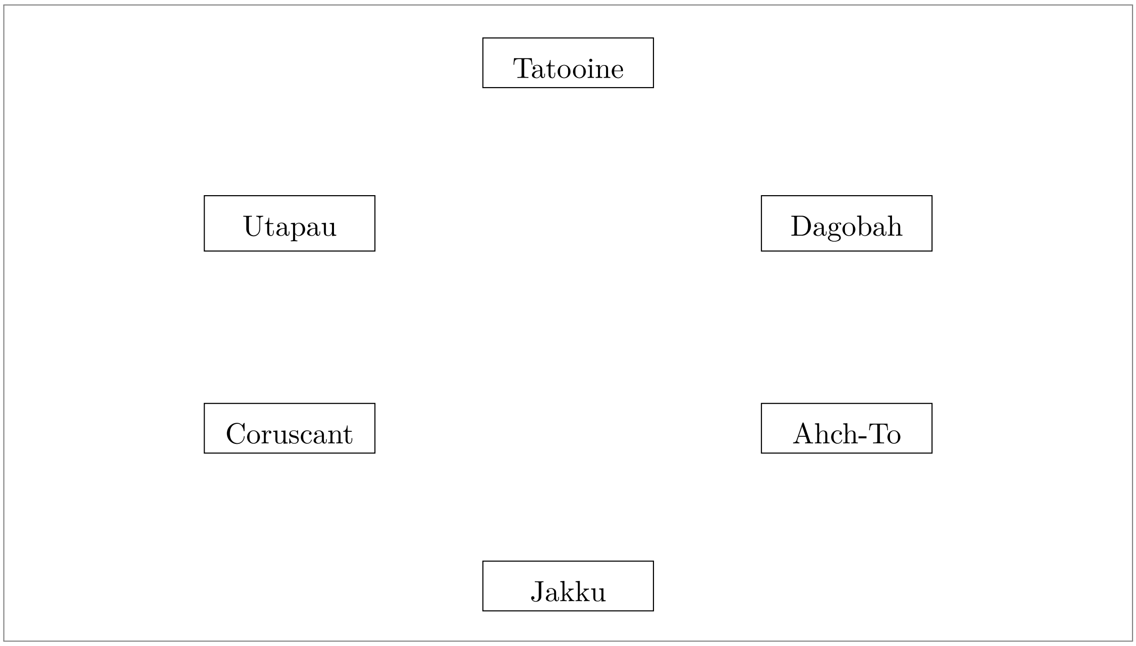
Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

- G_1 ist stark zusammenhängend. ☐ wahr ☐ falsch
- G_1 und G_2 sind isomorph. ☐ wahr ☐ falsch
- Es gibt eine surjektive Funktion $m : V_2 \to \{1, 2, 3, 4\}$. ☐ wahr ☐ falsch

(b) Auf der Suche nach Luke Skywalker fliegen Rey und Finn quer durch die Galaxis. Da sie sich vor den Truppen des Imperiums verstecken müssen, benutzen Sie nur die folgenden *sicheren* Routen, wobei jede sichere Route eine Direktverbindung zwischen zwei Planeten darstellt: **[7 Pkte]**

- Die Planeten **Tatooine**, **Utapau** und **Dagobah** sind jeweils durch eine sichere Route miteinander verbunden.
- Zwischen **Coruscant** und **Tatooine** gibt es eine sichere Route.
- **Ahch-To** ist ausschließlich mit **Jakku** durch eine sichere Route verbunden.
- **Jakku** ist mit allen anderen Planeten außer **Dagobah** durch eine sichere Route verbunden.

(i) Modellieren Sie die sicheren Routen durch einen ungerichteten Graphen $G = (V, E)$. (2 Pkte)



(ii) Welches graphentheoretische Problem in G müssen Rey und Finn lösen, wenn sie jeden Planeten genau einmal besuchen möchten und der Startplanet frei wählbar ist? (2 Pkte)

(iii) Können Rey und Finn dieses Problem lösen, wenn sie auf Jakku beginnen? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Pkte)

☐ ja ☐ nein

Begründung:

(c) (i) Sei $C_n = (V, E)$ der Kreis-Graph mit $n \geq 3$ Knoten, d. h. **[10 Pkte]**
$V = \{1, 2, \ldots, n\}$ und $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}\}$.

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Pkte)

Wenn n gerade ist, dann ist C_n ist bipartit.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung:

(ii) Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach der Anzahl n der Knoten: (7 Pkte)

Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Jeder ungerichtete Graph $G = (V, E)$ mit $n := |V| \geq 1$ und $\mathrm{Grad}(G) \leq k$ kann mit $k + 1$ Farben konfliktfrei gefärbt werden, d. h. $\chi(G) \leq k + 1$.

Zur Erinnerung: $\mathrm{Grad}(G) := \max\{\mathrm{Grad}_G(v) : v \in V\}$

Aufgabe 3: Markov-Ketten

(a) Im Computerspiel *World of Markov* (WoM) müssen Sie drei Welten W_1, W_2 und W_3 nacheinander retten, d. h. Sie retten erst W_1, dann W_2 und schließlich W_3. Gelingt Ihnen die Rettung aller drei Welten, so ruhen Sie sich danach für immer in Ihrem Helden-Status H aus. Gelingt Ihnen die Rettung der Welt W_i nicht ($i \in \{1, 2, 3\}$), müssen Sie das Spiel von vorne beginnen (und W_1 retten, danach W_2, usw.). **[8 Pkte]**

Nach Aussage der Entwickler von WoM kann W_1 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ gerettet werden. Die Rettung von W_2 ist nur in $\frac{1}{3}$ der Fälle erfolgreich. Die Welt W_3 wird lediglich mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$ gerettet.

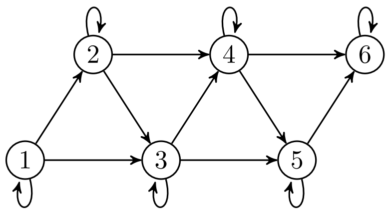
(i) Modellieren Sie WoM durch eine Markov-Kette (G, P). Geben Sie den Graphen G in graphischer Darstellung an und beschriften Sie die Kanten mit den Übergangswahrscheinlichkeiten. (Sie müssen die Übergangsmatrix P nicht angeben.) (6 Pkte)

(ii) Besitzt (G, P) eine stationäre Verteilung $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_h)$? Falls ja, geben Sie σ an. (2 Pkte)

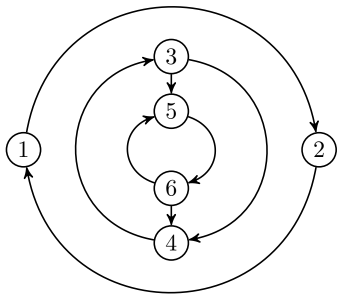
☐ ja ☐ nein

$\sigma = \Big($

(b) Betrachten Sie folgende Graphen G_1 und G_2: **[4 Pkte]**



G_1



G_2

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

G_1 ist aperiodisch.	☐ ja	☐ nein
G_1 ist irreduzibel.	☐ ja	☐ nein
G_2 ist aperiodisch.	☐ ja	☐ nein
G_2 ist irreduzibel.	☐ ja	☐ nein

(c) Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0. **[4 Pkte]**

Sei $\mathcal{M} = (G, P)$ eine **ergodische** Markov-Kette. Dann gilt immer ...

G ist irreduzibel.	☐ ja	☐ nein
G besitzt mindestens eine Eigenschleife.	☐ ja	☐ nein
$\mathcal{M}$ besitzt genau eine Grenzverteilung.	☐ ja	☐ nein
Die Gleichverteilung ist eine stationäre Verteilung von $\mathcal{M}$.	☐ ja	☐ nein

Aufgabe 4: Endliche Automaten und reguläre Sprachen

(a) Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Die Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei wie folgt definiert: **[9 Pkte]**

$$L := \{w \in \Sigma^* : |w| \geq 3 \text{ und } w \text{ endet auf } aab\}$$

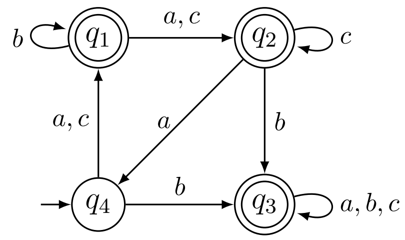
(i) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, sodass $L(R) = L$. (3 Pkte)

(ii) Konstruieren Sie einen DFA D mit genau vier Zuständen für L. (6 Pkte)

(b) Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0. **[4 Pkte]**

Eine Sprache L ist genau dann regulär, wenn sie nur endlich viele Wörter enthält.	☐ ja	☐ nein
Für jeden DFA D gibt es einen NFA N mit $L(N) = L(D)$.	☐ ja	☐ nein
Für jeden NFA N gibt es einen DFA D mit $L(D) = L(N)$.	☐ ja	☐ nein
Für zwei reguläre Ausdrücke R_1, R_2 gilt immer $L\big((R_1^*\|R_2^*)\big) = L\big((R_1\|R_2)^*\big)$.	☐ ja	☐ nein

(c) (i) Der folgende DFA A_1 über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ sei gegeben: **[10 Pkte]**



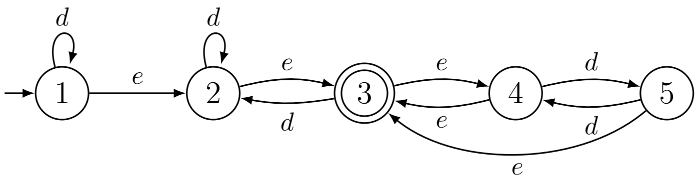
Geben Sie jeweils einen Zeugen für folgende Inäquivalenzen bezüglich der Verschmelzungsrelation an. (3 Pkte)

Zeuge für $q_1 \not\equiv_{A_1} q_2$:

Zeuge für $q_1 \not\equiv_{A_1} q_3$:

Zeuge für $q_1 \not\equiv_{A_1} q_4$:

(ii) Der folgende DFA Automat A_2 über dem Alphabet $\Sigma = \{d, e\}$ sei gegeben:



Bestimmen Sie den Äquivalenzklassenautomaten A_2' für A_2. Geben Sie A_2' in graphischer Darstellung an. (7 Pkte)

(Wenn sie Zwischenschritte angeben, können Sie auch bei falscher Lösung Teilpunkte erhalten.)

(Sie können folgende Vorlage verwenden.)

2				
3				
4				
5				
	1	2	3	4

Äquivalenzklassenautomat A_2':

(d) Bestimmen Sie, ob die folgende Sprache regulär ist, und beweisen Sie Ihre Antwort. **[7 Pkte]**

$$L := \{a^n b a^m : n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$$

regulär: ☐ ja ☐ nein

Beweis:

Aufgabe 5: Kontextfreie Grammatiken

Sei $\Sigma = \{a, c, g, t\}$. Die Sprache HN $\subseteq \Sigma^*$ (eine vereinfachte Form der Sprache aller DNA-Stränge, die eine *Haarnadelschleife* bilden) sei wie folgt definiert: **[6 Pkte]**

Basisregel: Es gilt: $a, c, g, t \in \text{HN}$.

Rekursive Regel: Ist $w \in \text{HN}$, so sind auch awt, twa, cwg, $gwc \in \text{HN}$.

Beispielsweise gehört das Wort *ggc* zur Sprache HN, ebenso wie *tcactga*.

(i) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$ an, sodass $L(G) = \text{HN}$ ist. (4 Pkte)

$G = (\Sigma, V, S, P)$

$V = \{$

$P = \{$

(ii) Geben Sie einen Ableitungsbaum des Wortes *tcactga* an. (2 Pkte)

1.2 Zweitklausur SS 16

Aufgabe 1: Aussagenlogik

(a) Dirk möchte sich einen *ModDog* mit Bockwurst, Ketchup und/oder Mayonnaise nach den folgenden Vorgaben zusammenstellen. **[8 Pkte]**

Vorgabe 1: Ketchup und Mayonnaise zusammen auf einem Brötchen geht gar nicht, aber eines von beiden ist unbedingt erforderlich.

Vorgabe 2: Nur wenn kein Ketchup dazukommt, legt er die Bockwurst auf das Brötchen.

Vorgabe 3: Keinesfalls darf Bockwurst zusammen mit Mayonnaise auf den ModDog.

Formalisieren Sie die drei Vorgaben durch je eine aussagenlogische Formel, indem Sie die atomaren Aussagen **K** (Ketchup kommt aufs Brötchen), **M** (Mayonnaise kommt aufs Brötchen) und **B** (Bockwurst kommt aufs Brötchen) benutzen.

$\varphi_{\text{Vorgabe 1}} :=$

$\varphi_{\text{Vorgabe 2}} :=$

$\varphi_{\text{Vorgabe 3}} :=$

Geben Sie alle Kombinationen aus Bockwurst, Ketchup und Mayonnaise an, die alle drei Vorgaben erfüllen. **Beweisen** Sie Ihre Antwort, z.B. mithilfe einer Wahrheitstafel.

Sie können die folgende Vorlage für Ihre Wahrheitstafel verwenden:

B	**K**	**M**	$\varphi_{\text{Vorgabe 1}}$	$\varphi_{\text{Vorgabe 2}}$	$\varphi_{\text{Vorgabe 3}}$	
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

(b) **[10 Pkte]**

(i) Geben Sie an, ob die aussagenlogische Formel (4 Pkte)

$$\varphi := \big((X_1 \vee X_2) \leftrightarrow (X_1 \oplus X_2)\big)$$

erfüllbar und/oder falsifizierbar ist.

Kreuzen Sie **alle** richtigen Antworten an.

φ ist **erfüllbar:** ☐ ja ☐ nein

φ ist **falsifizierbar:** ☐ ja ☐ nein

Falls φ **erfüllbar** ist, geben Sie eine Belegung an, die φ erfüllt:

Falls φ **falsifzierbar** ist, geben Sie eine Belegung an, die φ falsifiziert:

(ii) Gelten die folgenden semantischen Folgerungen ($\models$) für *beliebige* aussagenlogische Formeln φ, ψ und χ? (6 Pkte)

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie zwei Punkte, für jedes **falsche Kreuz** werden **zwei Punkte abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl für diese Teilaufgabe ist aber mindestens 0.

$\big(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi\big) \models \big(\psi \rightarrow \varphi\big)$ ☐ wahr ☐ falsch

$\big(\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)\big) \models \psi$ ☐ wahr ☐ falsch

$\big(\varphi \wedge \neg\varphi\big) \models \big(\varphi \vee \neg\varphi\big)$ ☐ wahr ☐ falsch

(c) Geben Sie eine zur Formel **[5 Pkte]**

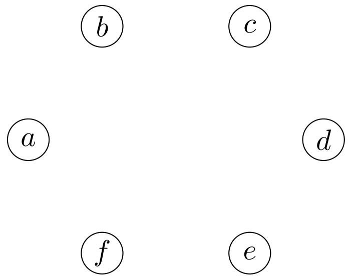
$$\varphi := \Big((X_1 \oplus X_2) \wedge (X_2 \oplus X_3)\Big)$$

äquivalente Formel φ' in **disjunktiver** Normalform (DNF) an.
(Wenn Sie Ihren Lösungsweg angeben, können Sie Teilpunkte auch bei falscher Lösung erhalten.)

Aufgabe 2: Graphen

(a) Sei $G = (V, E)$ der gerichtete Graph mit Knotenmenge $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ und Kantenmenge $E = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, e), (e, b), (f, d), (f, f)\}$. **[9 Pkte]**

(i) Geben Sie G in graphischer Darstellung an. (1 Pkt)



(ii) Geben Sie den Aus-Grad von Knoten f in G an. (1 Pkt)

$\text{Aus-Grad}_G(f) =$

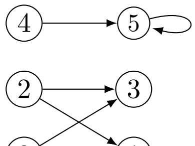
(iii) Geben Sie einen möglichst langen einfachen Weg in G an. (1 Pkt)

(iv) Ist G stark zusammenhängend? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

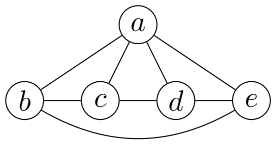
☐ ja ☐ nein

Begründung:

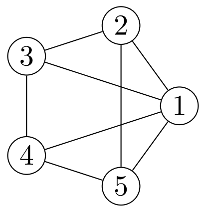
(v) Betrachten Sie die folgenden Graphen G_1, G_2 und G_3:



G_1



G_2



G_3

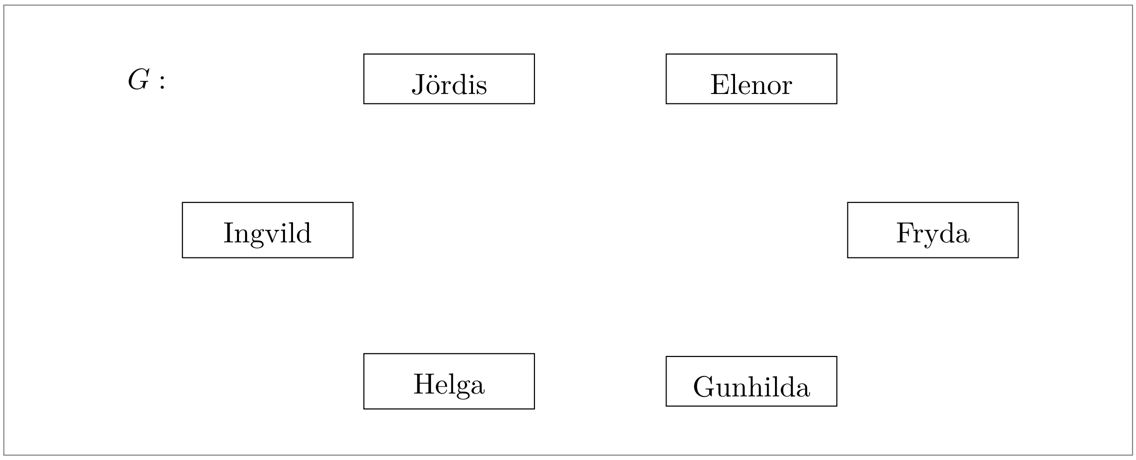
Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0. (4 Pkte)

- Alle Knoten in G_1 haben denselben Ein-Grad. ☐ wahr ☐ falsch
- G_2 ist bipartit. ☐ wahr ☐ falsch
- G_3 ist planar. ☐ wahr ☐ falsch
- G_2 und G_3 sind isomorph. ☐ wahr ☐ falsch

(b) Die Wikingerinnen Elenor, Fryda, Gunhilda, Helga, Ingvild und Jördis wollen mit ihrem Drachenboot nach Grönland rudern. Um das Boot schnell und sicher fortzubewegen, muss in jeder Sitzreihe des Bootes ein kompatibles Wikingerinnen-Paar rudern, d. h. eine Wikingerin sitzt am linken und eine am rechten Ruder der jeweiligen Sitzreihe. Leider ist nicht jede Wikingerin mit jeder anderen kompatibel: **[6 Pkte]**

- **Elenor** kann nur zusammen mit **Helga** oder **Gunhilda** rudern.
- **Helga** kann mit allen außer **Ingvild** und **Fryda** rudern.
- **Fryda** und **Ingvild** sind ein kompatibles Paar, ebenso wie **Fryda** und **Jördis**.

(i) Modellieren Sie alle Kompatibilitäten durch einen ungerichteten Graphen G. (2 Pkte)

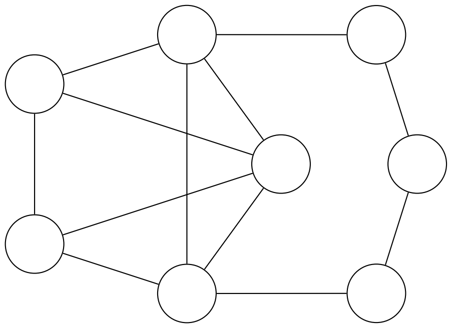


(ii) Welches graphentheoretische Problem in G muss gelöst werden, damit jede Frau eine kompatible Ruder-Partnerin hat? (2 Pkte)

(iii) Geben Sie an, welche Wikingerinnen-Paare gemeinsam rudern sollten, damit die Fahrt nach Grönland schnell und sicher gelingt. (2 Pkte)

(c) **[8 Pkte]**

(i) Bestimmen Sie für den folgenden Graphen $G = (V, E)$ eine Färbung f mit möglichst wenigen Farben. Tragen Sie die Farben direkt in die Knoten ein. (4 Pkte)



Begründen Sie, warum G nicht mit weniger Farben färbbär ist:

Bestimmen Sie die chromatische Zahl von G.

$$\chi(G) = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

(ii) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Beweisen Sie Ihre Antwort. (4 Pkte)

Seien u und v zwei verschiedene Knoten in einem ungerichteten Baum.
Dann haben u und v höchstens einen gemeinsamen Nachbarn.

☐ wahr ☐ falsch

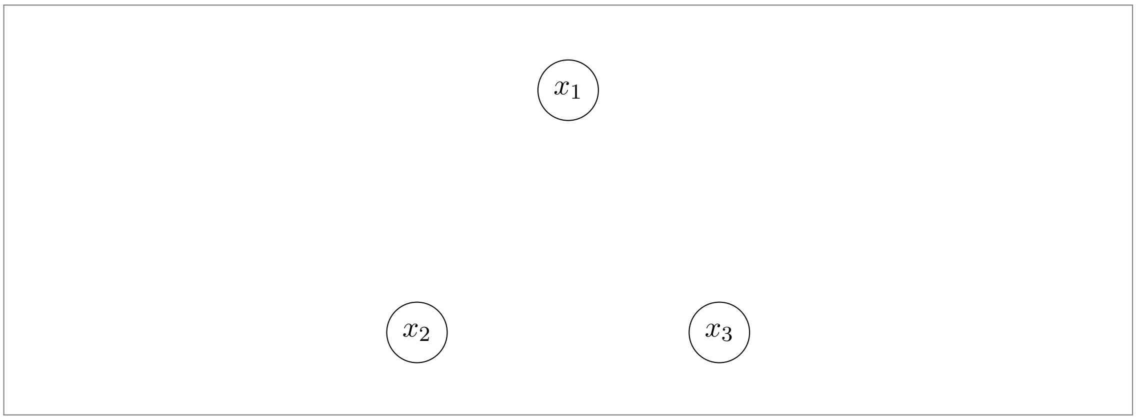
Beweis:

Aufgabe 3: Markov-Ketten

(a) Der Versandhändler Amarkov wertet das Kaufverhalten seiner Kunden aus. Hierfür werden exemplarisch drei Produkte x_1, x_2 und x_3 untersucht. Aus den Statistiken lässt sich die folgende Beobachtung ableiten: **[6 Pkte]**

Kauft ein Kunde das Produkt x_i ($i \in \{1, 2, 3\}$), so wird es mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{i}$ beim nächsten Mal wieder gekauft. Andernfalls wählt der Kunde beim nächsten Einkauf zufällig eines der anderen beiden Produkte mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit.

(i) Modellieren Sie das Kaufverhalten der Kunden durch eine Markov-Kette (G, P). Geben Sie den Graphen G in graphischer Darstellung an und beschriften Sie die Kanten mit den Übergangswahrscheinlichkeiten. (Sie müssen die Übergangsmatrix P nicht angeben.) (4 Pkte)

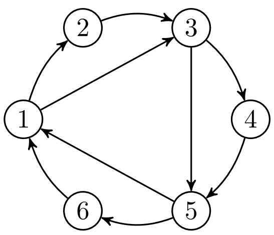


(ii) Besitzt (G, P) eine stationäre Verteilung σ? Falls ja, geben Sie σ an. (2 Pkte)

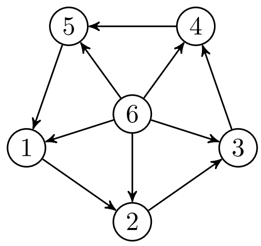
☐ ja ☐ nein

$\sigma = \big($

(b) Betrachten Sie folgende Graphen G_1 und G_2: **[4 Pkte]**



G_1

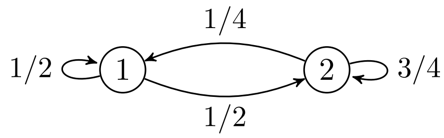


G_2

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

G_1 ist aperiodisch.	☐ ja	☐ nein
G_1 ist irreduzibel.	☐ ja	☐ nein
G_2 ist aperiodisch.	☐ ja	☐ nein
G_2 ist irreduzibel.	☐ ja	☐ nein

(c) Betrachten Sie die folgende Markov-Kette. **[10 Pkte]**



(i) Stellen Sie die Übergangsmatrix P auf. (2 Pkte)

$P =$

(ii) Ein Zufallssurfer beginne eine Irrfahrt in Zustand 2. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: (6 Pkte)
Der Surfer besitzt nach k Schritten die Verteilung $X^{(k)} = \left(\frac{1}{3}(1 - 4^{-k}),\ \frac{1}{3}(2 + 4^{-k})\right)$.

(iii) Bestimmen Sie die Grenzverteilung der Kette. (2 Pkte)
(Sie dürfen Teil (ii) auch dann verwenden, wenn Sie ihn nicht gelöst haben.)

Aufgabe 4: Endliche Automaten und reguläre Sprachen

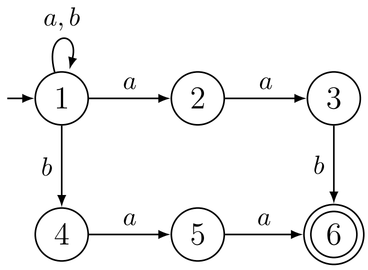
(a) Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Die Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei wie folgt definiert: **[7 Pkte]**

$$L := \{w \in \Sigma^* : |w| \geq 2 \text{ und der vorletzte Buchstabe von } w \text{ ist ein } b. \}$$

(i) Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass $L(R) = L$. (2 Pkte)

(ii) Konstruieren Sie einen DFA D mit genau vier Zuständen für L. (5 Pkte)

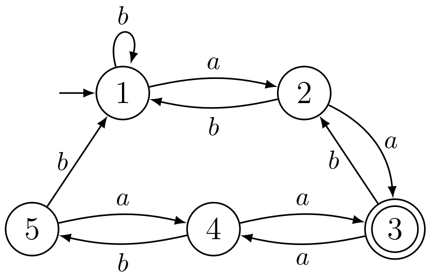
(b) Sei N der folgende NFA über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$: **[4 Pkte]**



Welche der folgenden Worte liegen in der von N akzeptierten Sprache $L(N)$, welche nicht? Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

Wort	. . . liegt in $L(N)$?	
aab	☐ ja	☐ nein
$baba$	☐ ja	☐ nein
$abaaa$	☐ ja	☐ nein
$abaaab$	☐ ja	☐ nein

(c) (i) Der folgende DFA A über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ sei gegeben: **[10 Pkte]**



Bestimmen Sie den Äquivalenzklassenautomaten A' für A. Geben Sie A' in graphischer Darstellung an. (7 Pkte)

(Wenn Sie Zwischenschritte angeben, können Sie auch bei falscher Lösung Teilpunkte erhalten.)

(*Sie können folgende Vorlage verwenden.*)

2				
3				
4				
5				
	1	2	3	4

Äquivalenzklassenautomat A':

(ii) Genau **eine** der folgenden Antworten ist richtig. Kreuzen Sie die richtige Antwort an. (3 Pkte)

Sei D ein DFA mit Zustandsmenge Q und es gelte $L = L(D)$. Dann gilt immer ...

- ☐ $|Q| < \text{Index}(L)$
- ☐ $|Q| \geq \text{Index}(L)$
- ☐ $|Q| = \text{Index}(L)$
- ☐ keine der obigen Antworten

(d) Bestimmen Sie, ob die folgende Sprache regulär ist, und beweisen Sie Ihre Antwort. **[7 Pkte]**

$$L := \{a^n b^{2n} : n \in \mathbb{N}\}$$

regulär: ☐ ja ☐ nein

Beweis:

Aufgabe 5: Kontextfreie Grammatiken

[6 Pkte]

Sei $\Sigma = \{$ `if b then` , `else` , `a` $\}$, es stehen also die drei Buchstaben

- `if b then`
- `else`
- `a`

zur Verfügung. Interpretiere dabei `b` als Abkürzung für „Bedingung“ und `a` als Abkürzung für „Anweisung“.

Die Sprache IF $\subseteq \Sigma^*$ aller wohlgeformten `if-then-else`-Anweisungen ist wie folgt definiert:

Basisregel: Es gilt: `a` $\in$ IF.

Rekursive Regel: Sind $u, v \in$ IF, so ist auch `if b then` $u \in$ IF und `if b then` u `else` $v \in$ IF.

So gehört z.B. das Wort `if b then a else a` zur Sprache IF.

(i) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$ an, so dass $L(G) =$ IF ist. (4 Pkte)

$G = (\Sigma, V, S, P)$

$V = \{$

$P = \{$

(ii) Geben Sie einen Ableitungsbaum für (2 Pkte)

$w :=$ `if b then a else if b then a else if b then a`

an.

1.3 Erstklausur WS 14/15

Aufgabe 1: **(24 Punkte)**

(a) Mary Modder besucht die Zauberschule Modwarts. Im Unterrichtsfach Zaubertränke muss sie einen Konzentrationstrank zubereiten. Dazu muss sie entscheiden, welche der drei möglichen Zutaten *Fliegenpilze*, *Krötenaugen* und *Spinnenbeine* sie verwendet (oder nicht verwendet). (8 Pkte)

Laut Rezeptbuch muss sie die drei folgenden Anweisungen beachten:

Anweisung 1: Mindestens eine der drei Zutaten Fliegenpilze, Krötenaugen und Spinnenbeine muss verwendet werden.

Anweisung 2: Wenn Fliegenpilze verwendet werden, darf keine der anderen beiden Zutaten verwendet werden.

Anweisung 3: Werden keine Fliegenpilze und keine Spinnenbeine verwendet, so dürfen auch keine Krötenaugen verwendet werden.

Formalisieren Sie die drei Aussagen durch je eine aussagenlogische Formel, indem Sie die atomaren Aussagen F (Fliegenpilze werden verwendet), K (Krötenaugen werden verwendet) und S (Spinnenbeine werden verwendet) benutzen.

$\varphi_{\text{Anweisung 1}} :=$

$\varphi_{\text{Anweisung 2}} :=$

$\varphi_{\text{Anweisung 3}} :=$

Nach etwas Überlegen hat Mary den Verdacht, dass diese Anweisungen kein eindeutiges Rezept ergeben. Gibt es mehr als eine Möglichkeit, unter den drei Zutaten eine Auswahl zu treffen, so dass alle drei Anweisungen erfüllt sind? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Sie können die folgende Vorlage für Ihre Wahrheitstafel verwenden:

F	S	K	$\varphi_{\text{Anweisung 1}}$	$\varphi_{\text{Anweisung 2}}$	$\varphi_{\text{Anweisung 3}}$	
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

(b) Geben Sie zu jeder der folgenden aussagenlogischen Formeln an, ob sie erfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. (6 Pkte)

Wenn Sie „erfüllbar“ ankreuzen, dann **müssen** Sie eine Belegung angeben, die die Formel erfüllt. Falls Sie „allgemeingültig“ ankreuzen, **müssen** Sie Ihre Antwort beweisen und ansonsten eine Belegung angeben, die die Formel nicht erfüllt.

- $\varphi = \big((\neg X_1 \vee X_2) \leftrightarrow (X_1 \rightarrow X_2)\big)$

erfüllbar: ☐ ja ☐ nein

allgemeingültig: ☐ ja ☐ nein

Falls φ erfüllbar ist, geben Sie hier eine zu φ passende Belegung an, die φ erfüllt:

Falls φ allgemeingültig ist, beweisen Sie Ihre Antwort; andernfalls geben Sie eine zu φ passende Belegung an, die φ nicht erfüllt:

- $\psi = \big((X_1 \vee (X_1 \wedge X_2)) \leftrightarrow X_1\big)$

erfüllbar: ☐ ja ☐ nein

allgemeingültig: ☐ ja ☐ nein

Falls ψ erfüllbar ist, geben Sie hier eine zu ψ passende Belegung an, die ψ erfüllt:

Falls ψ allgemeingültig ist, beweisen Sie Ihre Antwort; andernfalls geben Sie eine zu ψ passende Belegung an, die ψ nicht erfüllt:

(c) Seien φ, ψ und χ beliebige aussagenlogische Formeln. Gelten folgende (semantische) Äquivalenzen ($\equiv$)? (6 Pkte)

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie zwei Punkte, für jedes **falsche Kreuz** werden **zwei Punkte abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe ist aber mindestens 0.

$(\varphi \to \psi)$	$\equiv$	$(\neg\psi \to \neg\varphi)$	☐ wahr	☐ falsch
$((\varphi \land \psi) \to \chi)$	$\equiv$	$(\neg\chi \to (\neg\varphi \lor \neg\psi))$	☐ wahr	☐ falsch
$(\varphi \to \psi)$	$\equiv$	$(\varphi \land \neg\psi)$	☐ wahr	☐ falsch

(d) Geben Sie eine zur Formel (4 Pkte)

$$\varphi := \Big(X_3 \land \big((\neg X_1 \lor X_2) \land (X_1 \lor \neg X_2)\big)\Big)$$

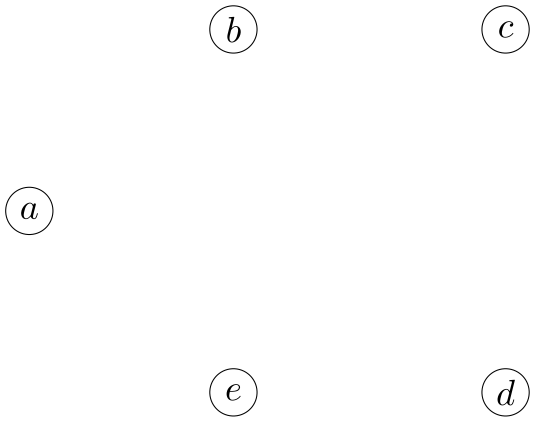
äquivalente Formel in disjunktiver Normalform an. Geben Sie auch Ihren Lösungsweg an.
(Ihr Lösungsweg ist nur dann relevant, wenn Ihre Formel *falsch* ist; Sie können dann Teilpunkte erhalten. Für die richtige Formel erhalten Sie stets die volle Punktzahl.)

Aufgabe 2: **(22 Punkte)**

(a) Sei $G = (V, E)$ der gerichtete Graph mit Knotenmenge $V = \{a, b, c, d, e\}$ und Kantenmenge $E = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (b, e), (c, d), (d, e), (e, b)\}$.

(i) Geben Sie die graphische Darstellung von G an. (1 Pkt)

Graphische Darstellung:

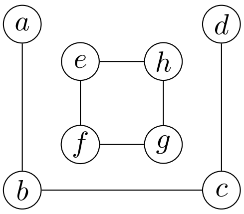


(ii) Geben Sie $\text{Ein-Grad}_G(b)$ an. (1 Pkt)

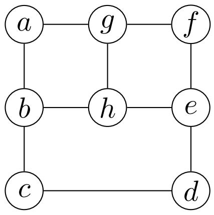
(iii) Geben Sie einen Kreis der Länge 4 in G an. (1 Pkt)

(iv) Ist G stark zusammenhängend? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

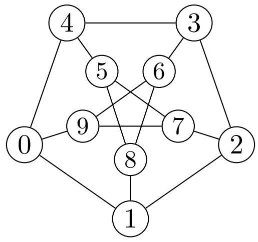
(b) Betrachten Sie die folgenden ungerichteten Graphen G_1, G_2 und G_3:



G_1



G_2



G_3

(i) Geben Sie ein größtmögliches Matching in G_1 an: (1 Pkt)

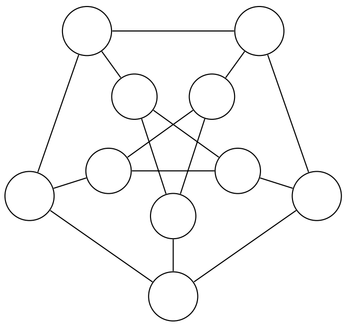
(ii) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? (4 Pkte)

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

- G_1 ist bipartit. ☐ wahr ☐ falsch
- G_1 ist ein Teilgraph von G_2. ☐ wahr ☐ falsch
- Die chromatische Zahl $\chi(G_2)$ von G_2 ist 3. ☐ wahr ☐ falsch
- G_2 und G_3 sind isomorph. ☐ wahr ☐ falsch

(iii) Geben Sie eine konfliktfreie Knotenfärbung $f\colon V_3 \to \{1, 2, 3\}$ für die Knotenmenge V_3 von G_3 an. Tragen Sie dazu in jeden Knoten v den Wert $f(v)$ ein. (2 Pkte)

G_3:



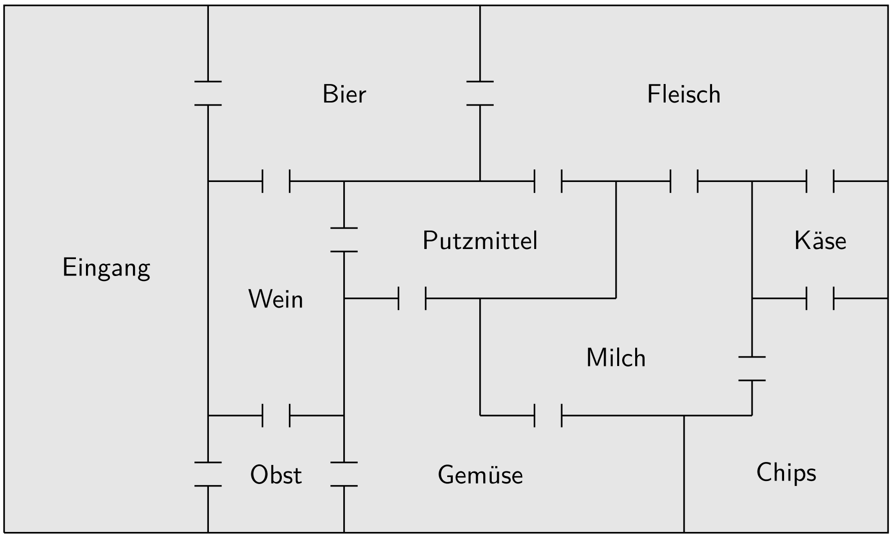
(iv) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

Für alle $n \in \mathbb{N}_{>2}$ besitzt der vollständige ungerichtete Graph K_n mit Knotenmenge $\{1, 2, \ldots, n\}$ einen Hamiltonkreis.

☐ wahr ☐ falsch

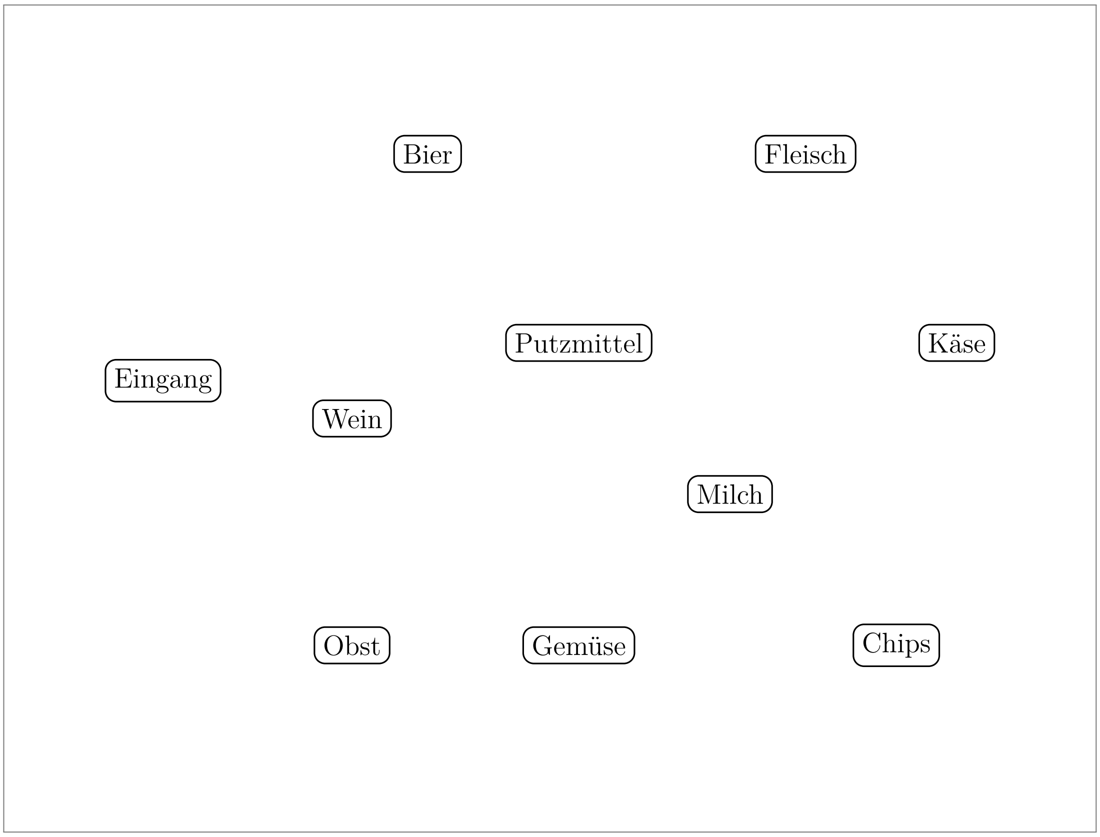
Begründung:

(c) Der DisMod-Supermarkt hat sein Warenangebot auf zehn Abteilungen verteilt (davon dient eine als Eingangsbereich). Der unten stehende Gebäudeplan zeigt deren Anordnung:



Dabei sind zwei angrenzende Abteilungen genau dann direkt mit einem Durchgang verbunden, wenn auf dem Plan eine Tür eingezeichnet ist. (Beispielsweise sind die Abteilungen für Fleisch und Käse direkt verbunden, *nicht* aber die Abteilungen für Gemüse und Chips.)

(i) Modellieren Sie den Raumplan des Supermarktes als ungerichteten Graphen. Dabei sollen die Knoten die Abteilungen repräsentieren und genau dann durch eine Kante verbunden sein, wenn es einen Durchgang zwischen ihnen gibt. (1 Pkt)



(ii) Für seinen Großeinkauf muss Klaus Uhr alle zehn Abteilungen aufsuchen. (1 Pkt)
Dies möchte er so effizient wie möglich machen: Er plant seinen Einkauf so, dass er – beginnend im Eingangsbereich – alle Abteilungen **genau einmal** betritt und am Ende wieder im Eingangsbereich ankommt.

Formulieren Sie Klaus' Plan als graphentheoretische Fragestellung.

(iii) Geben Sie eine Lösung für Klaus' Einkaufsproblem an. (2 Pkte)

Sie können die Abteilungen durch ihre jeweiligen Anfangsbuchstaben abkürzen. (z.B. E für **E**ingang, O für **O**bst, etc.)

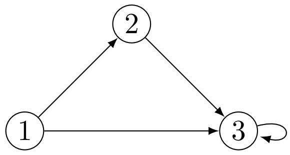
(iv) Auch Leo plant einen Einkauf und möchte nach demselben Verfahren wie Klaus vorgehen. Allerdings benötigt Leo keinerlei Putzutensilien und möchte deshalb die **Putzmittel**-Abteilung komplett **auslassen**. (4 Pkte)

Kann Leo den Einkauf wie gewünscht durchführen? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Aufgabe 3: **(8 Punkte)**

(a) Betrachten Sie den folgenden Webgraphen (4 Pkte)

$G:$



Geben Sie die Übergangsmatrix $P_d(G)$ für den Dämpfungsfaktor $d = 1$ an. (Der Zufalls-Surfer darf somit nur die Kanten des Webgraphen benutzen.)

$$P_d(G) := \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

(b) Diesmal kennen wir weder Webgraphen noch Dämpfungsfaktor, aber wir kennen die Übergangsmatrix P mit (4 Pkte)

$$P := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gegeben sei die Anfangsverteilung $X^{(0)} := \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. Der Zufalls-Surfer befindet sich anfangs also mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ im Knoten 1 und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ im Knoten 2. Bestimmen Sie die Verteilung $X^{(1)} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, die die Wahrscheinlichkeit π_j angibt, mit der sich der Zufalls-Surfer nach einem Schritt im Knoten j befindet.

$\pi_1 =$

$\pi_2 =$

$\pi_3 =$

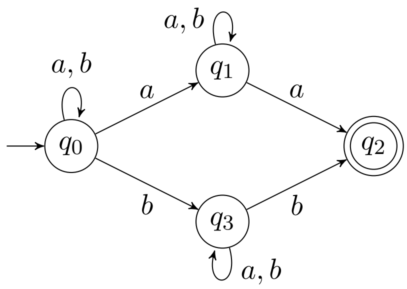
Aufgabe 4: **(30 Punkte)**

(a) Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Die Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei wie folgt definiert: (3 Pkte)

$$L := \{w \in \Sigma^* : w \text{ beginnt mit } ab \text{ oder enthält } bb \text{ als Teilwort}\}$$

Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass $L(R) = L$.

(b) Sei A der folgende nichtdeterministische Automat über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$:

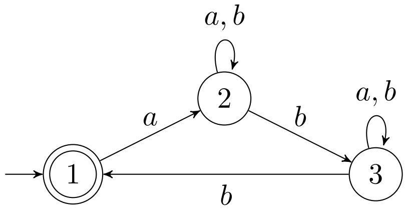


(i) Welche der folgenden Worte liegen in der von A akzeptierten Sprache $L(A)$, welche nicht? Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0. (4 Pkte)

Wort	… liegt in $L(A)$?	
$abba$	☐ ja	☐ nein
$aaab$	☐ ja	☐ nein
aaq_2	☐ ja	☐ nein
$aabb$	☐ ja	☐ nein

(ii) Geben Sie eine (mathematische oder umgangssprachliche) Beschreibung der Sprache $L(A)$ an, zum Beispiel in Form eines regulären Ausdrucks. (2 Pkte)

(c) Sei A der folgende nichtdeterministische Automat über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$: (6 Pkte)



Wandeln Sie den NFA A mit Hilfe der Potenzmengenkonstruktion in einen vollständigen DFA A' um. Berücksichtigen Sie nur solche Zustände von A', die vom Startzustand von A' aus erreicht werden können, und geben Sie die graphische Darstellung von A' an.

(d) Geben Sie für jede der folgenden beiden Sprachen an, ob sie regulär ist. Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0. (7 Pkte)
Beweisen Sie, dass Ihre jeweilige Antwort korrekt ist.

$L_1 := \{a^n b a^n : n \in \mathbb{N}\}$

regulär: ☐ ja ☐ nein

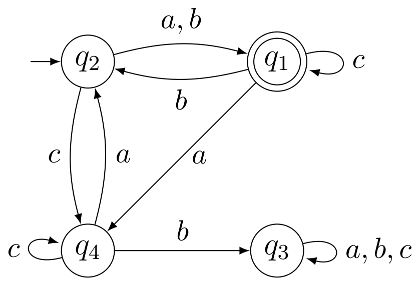
Beweis:

$L_2 := \{w \in \{a, b\}^* : |w| \geq 3\}$

regulär: ☐ ja ☐ nein

Beweis:

(e) (i) Sei A_1 der folgende deterministische Automat über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$: (3 Pkte)



Geben Sie für die Zustandspaare $\{q_1, q_4\}, \{q_2, q_4\}, \{q_3, q_4\}$ jeweils einen Zeugen für ihre Nicht-Äquivalenz bezüglich der Verschmelzungsrelation an.

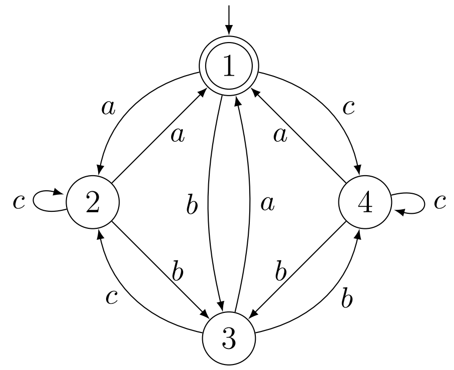
Erinnerung: Ein Zeuge für die Nicht-Äquivalenz eines Zustandspaares $\{q_i, q_j\}$ ist ein Wort $z \in \Sigma^*$, sodass $\hat{\delta}(q_i, z) \in F$ und $\hat{\delta}(q_j, z) \notin F$ (oder umgekehrt: $\hat{\delta}(q_i, z) \notin F$ und $\hat{\delta}(q_j, z) \in F$) gilt.

Zeuge für $q_1 \not\equiv_{A_1} q_4$:

Zeuge für $q_2 \not\equiv_{A_1} q_4$:

Zeuge für $q_3 \not\equiv_{A_1} q_4$:

(ii) Sei A_2 der folgende deterministische Automat über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$: (5 Pkte)



Minimieren Sie A_2, d.h. finden Sie einen vollständigen DFA A_2' mit $L(A_2') = L(A_2)$ und minimaler Zustandszahl. Sie müssen keine Zwischenschritte angeben. Geben Sie A_2' in graphischer Darstellung an.

Minimaler DFA A_2':

Weiterer Platz zur Lösung dieser Aufgabe befindet sich auf der nächsten Seite.

Minimaler DFA A_2' (Fortsetzung):

Aufgabe 5: **(16 Punkte)**

(a) Die kontextfreie Grammatik $G=(\Sigma, V, S, P)$ sei definiert durch die beiden Nicht-Terminale $V := \{S, A\}$, die fünf Terminale

$$\Sigma := \{ \texttt{\_} , \texttt{sehr} , \texttt{toll} , \texttt{ist} , \texttt{dismod} \}$$

und

$$P := \{ S \to \texttt{dismod\_}S\texttt{\_toll} \mid \texttt{ist} \mid \texttt{ist\_}A, \quad A \to \texttt{sehr} \mid \texttt{sehr\_}A \}.$$

(i) Welche der folgenden Worte liegen in der von G erzeugten Sprache $L(G)$, welche nicht? Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0. (4 Pkte)

Wort	. . . liegt in $L(G)$?	
`sehr` | `sehr_`A	☐ ja	☐ nein
`dismod_ist_toll_toll`	☐ ja	☐ nein
`dismod_ist_sehr_toll`	☐ ja	☐ nein
`dismod_dismod_ist_toll_toll`	☐ ja	☐ nein

(ii) Geben Sie einen Ableitungsbaum für das Wort `dismod_ist_sehr_sehr_toll` $\in L(G)$ an. (2 Pkte)

(b) Die Sprache $\mathcal{L}$ über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b, \langle, \rangle, \star\}$ sei wie folgt rekursiv definiert: (4 Pkte)

Basisregel:	(B)	Es gilt: $a \in \mathcal{L}$ und $b \in \mathcal{L}$.
Rekursive Regeln:	(R1)	Ist $w \in \mathcal{L}$, so ist auch $\langle w \rangle \in \mathcal{L}$.
	(R2)	Sind $u, v, w \in \mathcal{L}$, so ist auch $\langle u \star v \star w \rangle \in \mathcal{L}$.

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, so dass $L(G) = \mathcal{L}$.

$G = (\Sigma, V, S, P)$

$V =$

$P =$

(c) Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei für alle $n \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert: (6 Pkte)

$$f(n) := \begin{cases} 2 & \text{falls } n = 0, \\ 2 \cdot f(n-1) + 1 & \text{falls } n \geq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $f(n) = 3 \cdot 2^n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

1.4 Zweitklausur SS 15

Aufgabe 1:

(a) Das alte Philosophicum auf dem Campus Bockenheim steht schon so lange leer, dass dort inzwischen Geister spuken. Da das Gebäude umgebaut werden soll, werden die Bockenheimer Geisterjäger beauftragt. Um die richtigen Geisterfallen auszulegen, müssen die Geisterjäger wissen, welche Arten von Geistern dort spuken. Dabei kommen drei Sorten von Geistern in Frage: *Poltergeister*, *Zeitgeister* und *Himbeergeister*. **[8 Pkte]**

Bei ihren Vorbereitungen machen die Geisterjäger folgende Beobachtungen über das Philosophicum:

Beobachtung 1: Dort spuken Poltergeister oder Zeitgeister.

Beobachtung 2: Falls dort Zeitgeister spuken, dann spuken dort keine Himbeergeister und keine Poltergeister.

Beobachtung 3: Wenn dort Himbeergeister spuken, dann spuken dort auch Zeitgeister.

Formalisieren Sie die drei Aussagen durch je eine aussagenlogische Formel, indem Sie die atomaren Aussagen H (Himbeergeister spuken), P (Poltergeister spuken) und Z (Zeitgeister spuken) benutzen.

$\varphi_{\text{Beobachtung 1}} :=$

$\varphi_{\text{Beobachtung 2}} :=$

$\varphi_{\text{Beobachtung 3}} :=$

Nehmen Sie an, dass alle drei Beobachtungen zutreffen. Ist es möglich, dass im Philosophicum Himbeergeister spuken? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Sie können die folgende Vorlage für Ihre Wahrheitstafel verwenden:

H	P	Z	$\varphi_{\text{Beobachtung 1}}$	$\varphi_{\text{Beobachtung 2}}$	$\varphi_{\text{Beobachtung 3}}$	
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

(b) Geben Sie zu jeder der folgenden aussagenlogischen Formeln an, ob sie erfüllbar und/oder allgemeingültig ist. Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. **[6 Pkte]**

Wenn Sie „erfüllbar“ ankreuzen, dann **müssen** Sie eine Belegung angeben, die die Formel erfüllt. Falls Sie „allgemeingültig“ ankreuzen, **müssen** Sie Ihre Antwort beweisen und ansonsten eine Belegung angeben, die die Formel nicht erfüllt.

- $\varphi = \big((X_1 \to (X_1 \to X_2)) \leftrightarrow X_1\big)$

erfüllbar: ☐ ja ☐ nein (0.5 Pkte)

allgemeingültig: ☐ ja ☐ nein (0.5 Pkte)

Falls φ erfüllbar ist, geben Sie hier eine zu φ passende **Belegung** an, die φ erfüllt: (1 Pkt)

Falls φ allgemeingültig ist, beweisen Sie Ihre Antwort; andernfalls geben Sie eine zu φ passende Belegung an, die φ nicht erfüllt: (1 Pkt)

- $\psi = \big((X_1 \to (X_1 \to X_2)) \leftrightarrow (X_1 \to X_2)\big)$

erfüllbar: ☐ ja ☐ nein (0.5 Pkte)

allgemeingültig: ☐ ja ☐ nein (0.5 Pkte)

Falls ψ erfüllbar ist, geben Sie hier eine zu ψ passende **Belegung** an, die ψ erfüllt: (1 Pkt)

Falls ψ allgemeingültig ist, beweisen Sie Ihre Antwort; andernfalls geben Sie eine zu ψ passende Belegung an, die ψ nicht erfüllt: (1 Pkt)

(c) **[10 Pkte]**

(i) Seien φ, ψ und χ beliebige aussagenlogische Formeln. Gelten die folgenden semantischen Äquivalenzen ($\equiv$)? (6 Pkte)
Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie zwei Punkte, für jedes **falsche Kreuz** werden **zwei Punkte abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl für diese Teilaufgabe ist aber mindestens 0.

$\neg(\varphi \vee (\neg\psi \wedge \neg\chi)) \equiv (\neg\varphi \wedge (\psi \vee \chi))$ ☐ wahr ☐ falsch

$((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi) \equiv (\varphi \vee \neg\varphi)$ ☐ wahr ☐ falsch

$(\varphi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$ ☐ wahr ☐ falsch

(ii) Geben Sie eine zur Formel (4 Pkte)

$$\varphi := \Big(\big(X_1 \leftrightarrow (X_2 \leftrightarrow X_3)\big) \wedge X_1\Big)$$

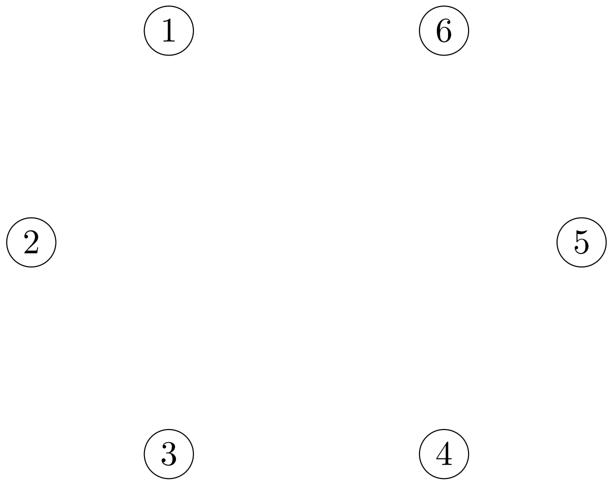
äquivalente Formel φ' in disjunktiver Normalform an. Geben Sie auch Ihren Lösungsweg an.
(Ihr Lösungsweg ist nur dann relevant, wenn Ihre Formel φ' *falsch* ist; Sie können dann Teilpunkte erhalten. Für die richtige Formel erhalten Sie stets die volle Punktzahl.)

Aufgabe 2:

(a) Sei $G = (V, E)$ der ungerichtete Graph mit Knotenmenge $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und Kantenmenge $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$. **[4 Pkte]**

(i) Geben Sie die graphische Darstellung von G an. (1 Pkt)

Graphische Darstellung:

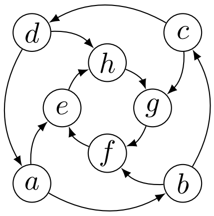


(ii) Geben Sie alle Nachbarn von Knoten 4 an. (1 Pkt)

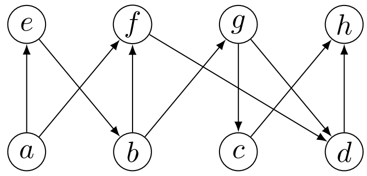
(iii) Geben Sie einen einfachen Kreis der Länge 5 in G an. (1 Pkt)

(iv) Ist G bipartit? Begründen Sie Ihre Antwort! (1 Pkt)

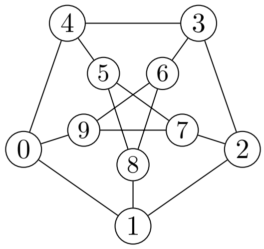
(b) Betrachten Sie die folgenden Graphen G_1, G_2 und G_3: **[8 Pkte]**



G_1



G_2



G_3

(i) Geben Sie einen Hamiltonweg in G_1 an: (1 Pkt)

(ii) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? (4 Pkte)

Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz bekommen Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

- G_1 ist stark zusammenhängend. ☐ wahr ☐ falsch
- G_2 ist azyklisch. ☐ wahr ☐ falsch
- G_1 und G_2 sind isomorph. ☐ wahr ☐ falsch
- Alle Knoten in G_3 haben denselben Grad. ☐ wahr ☐ falsch

(iii) Geben Sie ein größtmögliches Matching für G_3 an: (1 Pkt)

(iv) Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Pkte)

Jeder stark zusammenhängende gerichtete Graph besitzt einen Hamiltonweg.

☐ wahr ☐ falsch

Begründung:

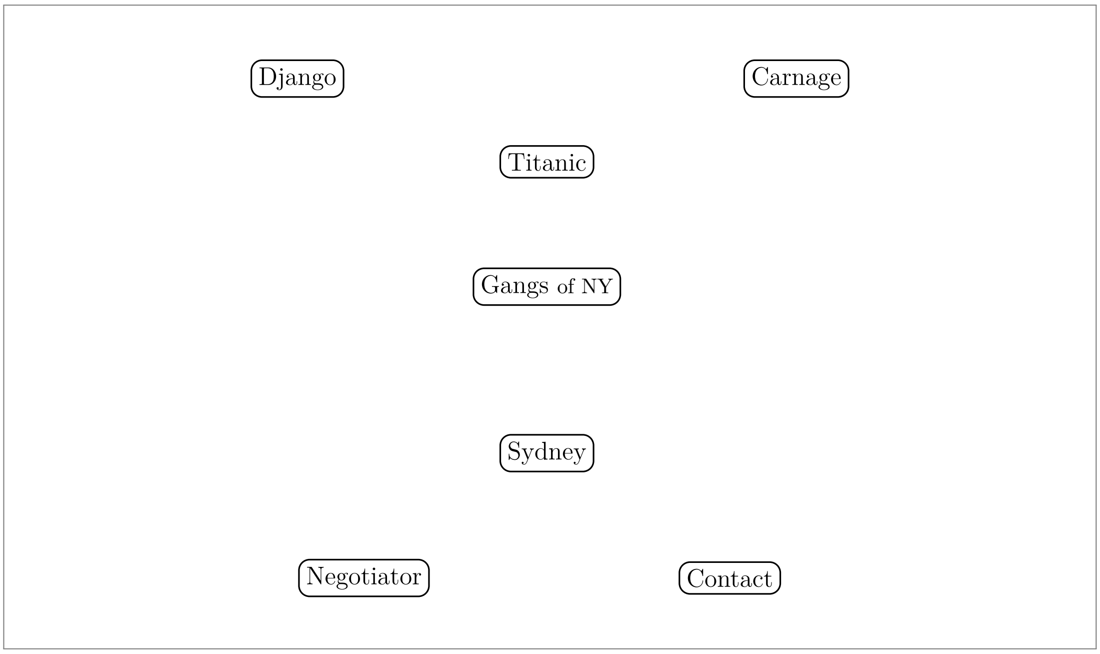
(c) Alice, Bob, Charlie und Eve haben sich sieben Filme auf DVD gekauft: *Carnage, The Negotiator, Django Unchained, Contact, Sydney, Gangs of New York* und *Titanic*. **[10 Pkte]**

Als sie die DVDs in die Hand nehmen, fällt ihnen jedoch auf, dass folgende Schauspieler in mehreren der Filme mitspielen:

- Samuel L. Jackson spielt in **Django Unchained**, in **The Negotiator** und in **Sydney** mit.
- Leonardo DiCaprio spielt in **Gangs of New York**, in **Django Unchained** sowie in **Titanic** mit.
- John C. Reilly spielt in **Carnage** mit, außerdem in **Sydney** und in **Gangs of New York**.
- Jodie Foster spielt in **Carnage** und in **Contact** mit.
- Christoph Waltz spielt in **Django Unchained** und in **Carnage** mit.
- Kate Winslett spielt sowohl in **Carnage** als auch in **Titanic** mit.
- David Morse spielt in den beiden Filmen **Contact** und **The Negotiator** mit.

(i) Stellen Sie den Konfliktgraphen auf. Ein Konflikt zwischen zwei Filmen besteht genau dann, wenn einer der oben genannten Schauspieler in beiden Filmen mitspielt. (2 Pkte)

(Beispielsweise besteht ein Konflikt zwischen Django Unchained und Sydney, da in beiden Filmen Samuel L. Jackson mitspielt.)



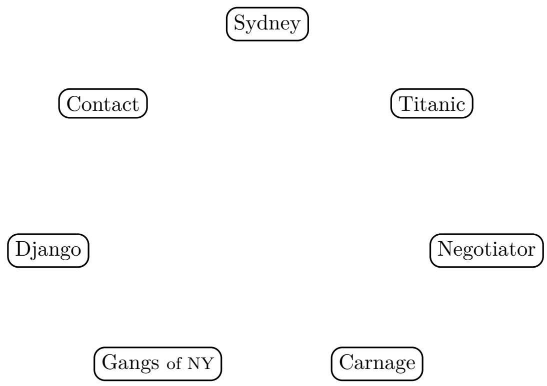
(ii) Da Alice und Bob nicht mehrmals am Tag denselben Schauspieler sehen wollen, verteilen sie die Filme auf mehrere Tage. Dabei dürfen am selben Tag **nicht** zwei Filme geschaut werden, in denen derselbe Schauspieler mitspielt. (2 Pkte)
Aufgrund ihres vollen Terminplans stehen den beiden nur 4 Tage zum Filmschauen zur Verfügung.

Formulieren Sie Alice' und Bobs Vorhaben als graphentheoretische Fragestellung.

(iii) Können Alice und Bob ihr Vorhaben in die Tat umsetzen? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist. (2 Pkte)

(iv) Charlie und Eve haben einen anderen Plan: Sie wollen **alle** Filme hintereinander an **einem** einzigen Tag schauen. Dabei dürfen aber **nicht** zwei Filme direkt aufeinander folgen, in denen derselbe Schauspieler mitspielt. (Beispielsweise kann Django Unchained direkt vor oder nach Contact geschaut werden, *nicht* aber direkt vor oder nach Sydney.) (4 Pkte)
Außerdem wollen sie unbedingt mit dem Film **Titanic** beginnen.

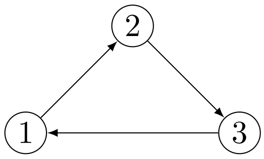
Können Charlie und Eve ihren Plan umsetzen? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.



(Sie können den hier abgebildeten Graphen für Ihre Lösung verwenden.)

Aufgabe 3:

Betrachten Sie den folgenden Webgraphen G und den Dämpfungsfaktor $d = \frac{1}{2}$: **[8 Pkte]**



(i) Geben Sie die Matrix $P_d(G)$ an. (4 Pkte)

$$P_d(G) := \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

(ii) Vervollständigen Sie die folgende Definition: (1 Pkt)

Eine Verteilung π ist genau dann eine stationäre Verteilung für die Markov-Kette $(G, P_d(G))$, wenn

(iii) Bestimmen Sie den Page-Rank Vektor $\mathrm{PR} = (\mathrm{PR}_1, \mathrm{PR}_2, \mathrm{PR}_3)$, also die stationäre Verteilung der Markov-Kette $(G, P_d(G))$. (3 Pkte)

$\mathrm{PR}_1 =$

$\mathrm{PR}_2 =$

$\mathrm{PR}_3 =$

Aufgabe 4:

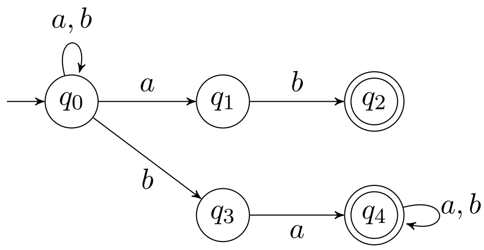
(a) **[9 Pkte]**

(i) Sei $\Sigma := \{a, b\}$. Die Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei wie folgt definiert:

$$L := \{w \in \Sigma^* : \text{der erste und der letzte Buchstabe von } w \text{ sind unterschiedlich}\}$$

Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, so dass $L(R) = L$. (3 Pkte)

(ii) Sei A der folgende nichtdeterministische Automat über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b\}$: (4 Pkte)

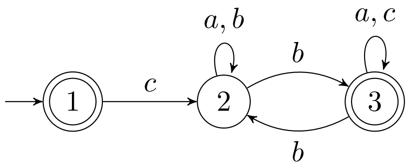


Welche der folgenden Worte liegen in der von A akzeptierten Sprache $L(A)$, welche nicht? Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0.

Wort	... liegt in $L(A)$?	
$aaab$	☐ ja	☐ nein
baq_4	☐ ja	☐ nein
$bbbb$	☐ ja	☐ nein
$abaa$	☐ ja	☐ nein

(iii) Geben Sie eine (mathematische oder umgangssprachliche) Beschreibung der Sprache $L(A)$ des obigen NFAs an, zum Beispiel in Form eines regulären Ausdrucks. (2 Pkte)

(b) Sei A der folgende nichtdeterministische Automat über dem Alphabet $\Sigma := \{a, b, c\}$: **[6 Pkte]**



Wandeln Sie den NFA A mit Hilfe der Potenzmengenkonstruktion in einen **vollständigen** DFA A' um. Berücksichtigen Sie nur solche Zustände von A', die vom Startzustand von A' aus erreicht werden können, und geben Sie die graphische Darstellung von A' an.

(c) Geben Sie für jede der folgenden beiden Sprachen an, ob sie regulär ist. Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0. **[7 Pkte]**
Beweisen Sie, dass Ihre jeweilige Antwort korrekt ist.

$L_1 := \{a^n b^m : n, m \in \mathbb{N}\}$

regulär: ☐ ja ☐ nein

Beweis:

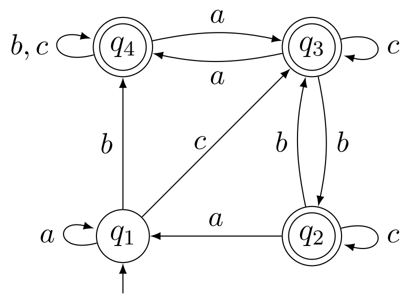
$L_2 := \{wbw : w \in \{a, b\}^*\}$

regulär: ☐ ja ☐ nein

Beweis:

(d) **[8 Pkte]**

(i) Der folgende deterministische Automat A_1 über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ sei gegeben:



Geben Sie für die Zustandspaare $\{q_1, q_2\}, \{q_2, q_3\}, \{q_3, q_4\}$ jeweils einen Zeugen für ihre Nicht-Äquivalenz bezüglich der Verschmelzungsrelation an. (3 Pkte)

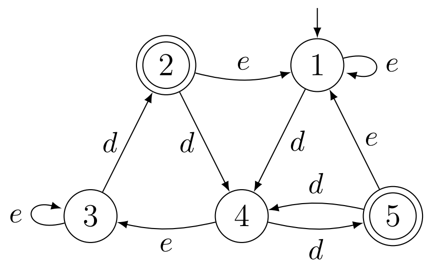
Erinnerung: Ein Zeuge für die Nicht-Äquivalenz eines Zustandspaares $\{q_i, q_j\}$ ist ein Wort $z \in \Sigma^*$, sodass $\hat{\delta}(q_i, z) \in F$ und $\hat{\delta}(q_j, z) \notin F$ (oder umgekehrt: $\hat{\delta}(q_i, z) \notin F$ und $\hat{\delta}(q_j, z) \in F$) gilt.

Zeuge für $q_1 \not\equiv_{A_1} q_2$:

Zeuge für $q_2 \not\equiv_{A_1} q_3$:

Zeuge für $q_3 \not\equiv_{A_1} q_4$:

(ii) Der folgende deterministische Automat A_2 über dem Alphabet $\Sigma = \{d, e\}$ sei gegeben: (5 Pkte)



Minimieren Sie A_2, d.h. finden Sie einen vollständigen DFA A_2' mit $L(A_2') = L(A_2)$ und minimaler Zustandszahl. Sie müssen keine Zwischenschritte angeben. Geben Sie A_2' in graphischer Darstellung an.

Minimaler DFA A_2':

Weiterer Platz zur Lösung dieser Aufgabe befindet sich auf der nächsten Seite.

Minimaler DFA A_2' (Fortsetzung):

Aufgabe 5:

(a) Die kontextfreie Grammatik G=(Σ, V, S, P) sei definiert durch V:=$\{S, A, B\}$, die acht Terminale **[6 Pkte]**

$$\Sigma := \{ \texttt{\_} , \texttt{nix} , \texttt{fleiss} , \texttt{kommt} , \texttt{ohne} , \texttt{von} , \texttt{preis} , \texttt{kein} \}$$

und

$$P := \{ S \to \texttt{ohne\_}A \mid \texttt{von\_}B,$$
$$A \to \texttt{fleiss\_}A\texttt{\_preis} \mid \texttt{kein},$$
$$B \to \texttt{nix\_}B\texttt{\_nix} \mid \texttt{kommt} \}.$$

(i) Welche der folgenden Worte liegen in der von G erzeugten Sprache $L(G)$, welche nicht? Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an. Für jedes korrekte Kreuz erhalten Sie einen Punkt, für jedes **falsche Kreuz** wird **ein Punkt abgezogen**; wird keine Option angekreuzt, erhalten Sie keinen Punkt. Ihre Gesamtpunktzahl ist aber mindestens 0. (4 Pkte)

Wort	. . . liegt in $L(G)$?	
`von_nix_kein_preis`	☐ ja	☐ nein
`von_nix_kommt_nix`	☐ ja	☐ nein
`ohne_fleiss_kein_preis_preis`	☐ ja	☐ nein
`von_nix_nix_kommt_nix_nix`	☐ ja	☐ nein

(ii) Geben Sie einen Ableitungsbaum für das Wort `ohne_fleiss_fleiss_kein_preis_preis` $\in L(G)$ an. (2 Pkte)

(b) Die Sprache $\mathcal{L}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{\ (\ ,\ )\ ,\ [\ ,\ ]\ \}$ von runden und eckigen Klammern **[4 Pkte]** sei wie folgt rekursiv definiert:

Basisregel:	(B)	Es gilt $() \in \mathcal{L}$ und $[\,] \in \mathcal{L}$.
Rekursive Regeln:	(R1)	Ist $w \in \mathcal{L}$, so sind auch $(w) \in \mathcal{L}$ und $[w] \in \mathcal{L}$.
	(R2)	Sind $u, v \in \mathcal{L}$, so ist auch $uv \in \mathcal{L}$.

Beispielsweise ist $[(()[\,])] \in \mathcal{L}$ ein Wort dieser Sprache.

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G an, so dass $L(G) = \mathcal{L}$.

$G = (\Sigma, V, S, P)$

$V =$

$P =$

(c) Die Funktion $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sei für alle $n \in \mathbb{N}$ wie folgt definiert: **[6 Pkte]**

$$f(n) := \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0, \\ f(n-1) + 2n & \text{falls } n \geq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass $f(n) = n^2 + n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.