Mathe für die Informatik I – WiSe 2017

Dr. Samuel Hetterich

Blatt 8 — Abgabe: Mo 18.12.2017, 10:00 Uhr

► In der Vorlesung wird Ihnen der Gebrauch der freien Software Sage zur Lösung mathematischer Probleme nahegebracht. Diese Software lässt sich hier `www.sagemath.org/download` kostenlos herunterladen. Auf den folgenden Übungsblättern befindet sich nun jeweils eine Sage-Aufgabe. Diese Aufgabe lösen Sie indem Sie Ihren Programmcode und Ihre Berechnungen ausdrucken und an Ihre Abgabe heften.

Aufgabe 8.1 — 4 Punkte

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Beweisen Sie mit Hilfe Ihres Wissens über den Kern und das Bild von der Darstellungsmatrix $M(f)$ folgende Aussagen.

a) Zeigen Sie, dass $m \leq n$ ist, wenn f surjektiv ist.

b) Zeigen Sie, dass $m \geq n$ ist, wenn f injektiv ist.

c) Zeigen Sie, dass $m = n$ ist, wenn f ein Isomorphismus ist.

d) Zeigen Sie, dass die Aussage aus c) keine Äquivalenz sondern eine Implikation ist (umgangssprachlich: "Die Rückrichtung nicht gilt").

Aufgabe 8.2 — 4 Punkte

Es sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix $M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.
Außerdem bildet die Menge

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und die Menge

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Darstellungsmatrix von g bezüglich der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, also die Matrix $M_{\mathcal{AB}}(g)$.

Aufgabe 8.3 — 4 Punkte

Es seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 9 \\ 4 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \\ 28 \\ c \end{pmatrix}$ mit $c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie mit dem Gauss-Verfahren:

a) Für welche Zahlen $c \in \mathbb{R}$ ist $A \cdot x = b$ lösbar?

b) Wie lauten die Lösungen x für dieses c?

Aufgabe 8.4 — 4 Punkte

Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ Matrizen, welche Ziffern als Einträge haben, also

$$A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \text{ für alle } i, j \in \{1, 2\}.$$

Es gibt 10^4 unterschiedliche Matrizen dieser Form und demnach 10^{12} mögliche Dreiertupel (A, B, C) insgesamt. Für wie viele dieser 10^{12} Dreiertupel ist das Produkt

$$A \cdot B \cdot C$$

invertierbar? Zum Überprüfen der Invertierbarkeit einer Matrix `A` können Sie die Funktion `A.is_invertible()` verwenden oder Sie benutzen das Invertierbarkeitskriterium für 2×2-Matrizen

$$A \text{ invertierbar} \iff A_{1,1} \cdot A_{2,2} - A_{1,2} \cdot A_{2,1} \neq 0.$$

Hinweis: Versuchen sie nicht alle 10^{12} Möglichkeiten durchzuprobieren. Das Produkt von Matrizen ist invertierbar, wenn die einzelnen Matrizen invertierbar sind.