Entwurfsmethodik
Institut für Informatik

GOETHE
UNIVERSITÄT
FRANKFURT AM MAIN

Prof. Dr.-Ing. Lars Hedrich
M.Sc. Ahmad Tarraf

Hardwarearchitekturen und Rechensysteme
Aufgabenblatt 1

Abgabe: 18. April 2018 vor der Vorlesung.
Bitte vermerken Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen und die Übungsgruppenzugehörigkeit

HINWEIS
Die Tutorien beginnen am Donnerstag, den 19. April 2018.
Um die Korrekturen zu erleichtern, dokumentieren Sie bitte stets die relevanten Schritte und Zwischenergebnisse. Einzelne Schriftzeichen, Wörter oder Symbole ohne Zusammenhang, sowie Halbsätze sind schwer zu bewerten und können zu Punktabzug führen.
Die erlangten Punkte in Aufgabenblatt 1 werden in der Berechnung der Bonuspunkte nicht miteingerechnet

Aufgabe 1: Zahlendarstellungen (5 Punkte)

Theorie:
Zahlen lassen sich in unterschiedlichen Zahlensystemen darstellen. Das uns vertrauteste ist das Dezimalsystem. Schon in der Grundschule lernen wir, dass eine ganze Zahl aus "Einern", " Zehnern", "Hundertern", usw. besteht. Das sind alles 10er Potenzen. So lässt sich z.B. die Ziffernfolge 127 im Dezimalsystem als $1 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7 \cdot 1 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$ interpretieren. Dieses Prinzip lässt sich auf Nachkommastellen ausweiten; hier sind die Exponenten dann negativ. So ist z.B. $0,35 = 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}01 = 3 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$.
Die Ziffern werden also je nach ihrer Position mit verschiedenen Potenzen von 10 (der Basis im Dezimalsystem) multipliziert und schließlich addiert, um den Wert der Zahl zu erhalten. Andere Zahlensysteme haben andere Basen, so beruht z.B. das Binärsystem auf der Basis 2 und das Hexadezimalsystem auf der Basis 16 (hier werden die Buchstaben A, B, . . . , F für die Ziffern mit den Werten 10 bis 15 verwendet).
Allgemein gilt für ein Zahlensystem, das auf einer ganzen Zahl $b > 1$ als Basis beruht:
Die Ziffernfolge

$$(a_k a_{k-1} \dots a_0, a_{-1} \dots a_{-\ell})_b$$

mit geeigneten Ziffern $0 \leq a_j < b$ hat den Wert:

$$\sum_{-\ell \leq j \leq k} a_j \cdot b^j.$$

(a) Stellen Sie die folgenden Zahlen im Binär-, Dezimal- und Hexadezimalsystem dar.
- $(2)_3$
- $(15{,}125)_{10}$
- $(3{,}5)_8$

(b) Geben Sie den größten und kleinsten Zahlenwert an, der sich mit k Stellen (ohne Komma) in
- Dezimaldarstellung (ohne Minuszeichen),
- Binärdarstellung,
- Einerkomplementdarstellung (EK)
- Zweierkomplementdarstellung (ZK)

darstellen lässt.

Bei der Zweier- und Einerkomplementdarstellung wird die Zifferfolge mit EK oder ZK indiziert.

(c) Führen Sie die folgenden Berechnungen in der Zweierkomplementdarstellung durch. Wandeln Sie die Ergebnisse der Berechnungen anschließend wieder in Dezimalzahlen um.
- $00010010_{\mathrm{ZK}} + 45_{10}$
- $11111111_{\mathrm{EK}} - 26_{10}$
- $11111111_{\mathrm{ZK}} + 123_{10}$
- $26_{10} - 45_{10}$

Aufgabe 2: Gleitkommazahlen nach IEEE 754 (5 Punkte)

In dieser Aufgabe bedeute *Gleitkommazahl* stets 32-Bit (single precision) float im Sinne von IEEE 754.

(a) Geben Sie die folgenden Gleitkommazahlen in Dezimaldarstellung (ggf. gerundet) an.
- 10000000010000000000000000000000
- 01000000011000000000000000000000

(b) Stellen Sie die Dezimalzahl $12,5$ als IEEE 754 Gleitkommazahl dar.

(c) Die Konstante S (`SMALLREAL`) sei die kleinste positive Gleitkommazahl, die man im Gleitkommaformat auf 1 addieren kann, ohne 1 als Ergebnis zu erhalten.

i) Berechnen Sie S für das gewählte Gleitkommazahlenformat.

ii) Berechnen Sie $1 + \mathrm{S}/2 + \mathrm{S}/2$ und $1 + (\mathrm{S}/2 + \mathrm{S}/2)$ im Gleitkommazahlenformat. Was beobachten Sie?

Dokumentieren Sie die einzelnen Schritte und deren Zwischenergebnisse.

Aufgabe 3: normierte Mantisse (0 Punkte)

Eine Gleitkommazahl $s \cdot m \cdot 2^e$ mit Vorzeichen s, Mantisse m und Exponent e heißt genau dann normiert, wenn m die Ungleichung $1/2 \leq m < 1$ erfüllt.

Zeigen Sie, dass jede positive Gleitkommazahl x mit normierter Mantisse dargestellt werden kann.

Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $x \geq 1$ *und* $x < 1$ *getrennt.*