Diskrete Modellierung

Wintersemester 2017/18

Mario Holldack, M. Sc.
Prof. Dr. Georg Schnitger
Hannes Seiwert, M. Sc.

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN

Institut für Informatik
AG Theoretische Informatik

Übungsblatt 13

Ausgabe: 25.01.18
Abgabe: 01.02.18

Definition 1: Für ein Alphabet Σ, einen Buchstaben $\sigma \in \Sigma$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$ bezeichnet $|w|_\sigma$ die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens σ im Wort w.
(Zum Beispiel ist $|aababa|_a = 4$, $|aababa|_b = 2$ und $|aababa|_c = 0$.)
Definition 2: Für ein Wort $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in \Sigma^n$ bezeichnet $w^{\text{reverse}} := w_n w_{n-1} \cdots w_1$ das „gespiegelte" Wort, also das Wort w von rechts nach links gelesen. (z. B.: $aabac^{\text{reverse}} = cabaa$)

Aufgabe 13.1 *Grenzen der Regularität* $((10 + 10) + 5 = 25$ Punkte)

a) Zeigen Sie mit dem Satz von Myhill-Nerode II, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind.

i) $L_1 := \{ w \in \{a,b\}^* : |w|_a \geq |w|_b \}$ über $\Sigma = \{a,b\}$
ii) $L_2 := \{ ww^{\text{reverse}} : w \in \{c,d\}^* \}$ über $\Sigma = \{c,d\}$

Hinweis: Finden Sie jeweils eine unendliche Menge von Worten, die paarweise inäquivalent bzgl. der Nerode-Relation sind, und weisen Sie die Inäquivalenzen durch Angabe geeigneter Zeugen nach.

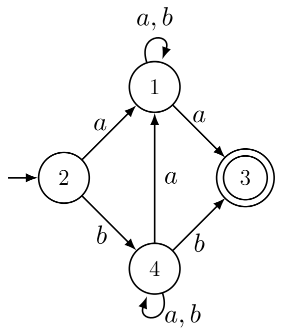
b) Finden Sie den Fehler im folgenden „Beweis":

Behauptung: $L = \{ w \in \{a,b\}^* : |w| \text{ ist gerade} \}$ ist nicht regulär.
Beweis mit dem Satz von Myhill-Nerode II:
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wähle den Vertreter a^n. Wir zeigen die Inäquivalenz $a^n \not\equiv_L a^m$ für beliebige $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m = n+1$ durch den Zeugen b^n:
- $a^n b^n \in L$, da $|a^n b^n| = 2n$ gerade ist, aber
- $a^m b^n \notin L$, da $|a^m b^n| = m + n = 2n + 1$ ungerade ist.

Also sind die Wörter $\varepsilon, a, aa, aaa, \ldots$ inäquivalent und Index(L) ist unendlich. $\square$

Aufgabe 13.2 *NFAs und Potenzmengenkonstruktion* $((4 + 6 + 6) + 6 + 6 = 28$ Punkte)

a) Sei N der rechts abgebildete NFA über dem Alphabet $\Sigma := \{a,b\}$.



i) Welche der folgenden Worte liegen in $L(N)$, welche nicht?

$w_1 := aaa$ $\quad w_2 := b$ $\quad w_3 := babb$ $\quad w_4 := bba$

ii) Konstruieren Sie mittels Potenzmengenkonstruktion einen DFA D, der dieselbe Sprache wie N akzeptiert. Berücksichtigen Sie in D nur Zustände, die vom Startzustand von D aus erreichbar sind.
iii) Geben Sie einen regulären Ausdruck für $L(N)$ an.

b) Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Konstruieren Sie einen NFA für die Sprache des regulären Ausdrucks $(a|b)^* b (a|b)^{n-1}$, wobei $(a|b)^{n-1} := \underbrace{(a|b) \cdots (a|b)}_{(n-1)-\text{mal}}$.

c) Sei $\Sigma := \{a\}$. Zeigen oder widerlegen Sie: Für jeden NFA $N := (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ akzeptiert der NFA $\overline{N} := (\Sigma, Q, \delta, q_0, Q \setminus F)$ die Sprache $\Sigma^* \setminus L(N)$.

Sie müssen Ihre Antworten in a) und b) nicht begründen.

Aufgabe 13.3 *Reguläre Ausdrücke* $((4+4)+(4+4+6) = 22$ Punkte)

a) Gegeben seien die folgenden regulären Ausdrücke:

$$R_1 := (a|b|\varepsilon)(aa|ab|bb|\emptyset)^* \qquad R_2 := (a|b)\big((a|b)(a|b)\big)^*$$

i) Welche der folgenden Worte w_i liegen in $L(R_1)$ bzw. $L(R_2)$, welche nicht?

$$w_1 := aab \qquad w_2 := ababb$$

ii) Beschreiben Sie die Sprache $L(R_2)$ umgangssprachlich.

b) Geben Sie für die folgenden Sprachen je einen möglichst kurzen regulären Ausdruck an, der die Sprache beschreibt.

i) $L_1 := \big\{w \in \{a,b\}^* : |w|_a \leq 2\big\}$
ii) $L_2 := \big\{w \in \{a,b\}^* : w$ beginnt mit bb und $|w|_b$ ist durch 3 teilbar$\big\}$
iii) $L_3 := \big\{w \in \{a,b\}^* : w$ enthält nicht das Teilwort $aab\big\}$

Sie müssen Ihre Antworten in a) und b) nicht begründen.

Aufgabe 13.4 *Kontextfreie Grammatiken* $((5+5)+15 = 25$ Punkte)

Hinweis: Möglicherweise wurden kontextfreie Grammatiken in der Vorlesung noch nicht in ausreichendem Umfang behandelt. In diesem Fall lesen Sie bitte in den Abschnitten 8.1 und 8.2 des Skriptes nach. Die entsprechenden Inhalte werden am Dienstag in der Vorlesung nachgeholt.

a) Betrachten Sie die folgende Grammatik $G := (\Sigma, V, S, P)$ mit

$$V := \{S\}, \quad \Sigma := \{0,1\}, \quad P := \big\{S \to \varepsilon \mid SS \mid S0S1S \mid S1S0S\big\}.$$

i) Geben Sie eine Ableitung für das Wort 1001 an.
ii) Beschreiben Sie die von G erzeugte Sprache $L(G)$ mathematisch oder umgangssprachlich.

b) Die Klammersprache K über dem Alphabet $\Sigma := \big\{\, (\, ,\,)\, ,\, \{\, ,\, \}\,\big\}$ ist wie folgt rekursiv definiert:

(B) $\varepsilon \in K$
(R1) Ist $w \in K$, dann ist auch $(w) \in K$.
(R2) Ist $w \in K$, dann ist auch $\{w\} \in K$.
(R3) Ist $u \in K$ und ist $v \in K$, dann ist auch $uv \in K$.

Konstruieren Sie eine kontextfreie Grammatik G_K für die Klammersprache K.

Sie müssen Ihre Antworten in a) und b) nicht begründen.

Bonusaufgabe 13.5. *Abschlusseigenschaften II* (20* Extrapunkte)

Sei Σ ein Alphabet und seien $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen. Zeigen Sie:

a) Die Vereinigung $L_v := L_1 \cup L_2$ ist regulär.

b) Die Konkatenation $L_k := L_1 \cdot L_2$ ist regulär.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass Sie NFAs A_1 bzw. A_2 für die Sprachen L_1 bzw. L_2 kennen, und konstruieren Sie daraus NFAs N_v und N_k für die Sprachen L_v und L_k.