Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 1: *Grundlagen* $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+1$

a) Geben Sie eine Menge M extensional an!

b) Geben Sie $\mathcal{P}(M)$ extensional an!

c) Geben Sie eine unendliche Menge $U \subsetneq \mathbb{N}$ und ein $u \in U$ an!

d) Geben Sie eine bijektive Funktion $f : U \to U \setminus \{u\}$ an!

e) Beweisen Sie induktiv: $\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1}-1}{2}$.

Matrikelnummer:____________________

Aufgabe 2: *Aussagenlogik* $1+1+1+2+3$ **Punkte**

An einer Weiche befindet sich ein Signal. Die Weiche ist entweder in gerader oder abzweigender Stellung. Das Signal kann drei Signalbegriffe darstellen: „Halt“, „Fahrt“ und „Langsamfahrt“. Die aussagenlogische Variable W sei genau dann wahr, wenn die Weiche in abzweigender Stellung ist.

a) Definieren Sie ausagenlogische Variablen, die jeweils aussagen, dass das Signal einen bestimmten Signalbegriff darstellt!

b) Geben Sie eine Aussagenlogische Formel φ an, die aussagt, dass das Signal immer genau einen Signalbegriff anzeigt!

c) Geben Sie eine Aussagenlogische Formel ψ an, die aussagt, dass das Signal nicht „Fahrt“ darstellt, wenn die Weiche in abzweigender Stellung ist!

d) Geben Sie eine Belegung β der aussagenlogischen Variablen an, bei der das Signal nicht „Halt“ darstellt, und die Weiche nicht in gerader Stellung ist! Ihre Belegung muss φ und ψ erfüllen!

e) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, V, S, P)$ an, so dass $L(G)$ eine Menge von aussagenlogischen Formeln ist. $L(G)$ soll alle Formeln enthalten, die nur W und die Variablen für die Signalbegriffe aus a) als Variablen enthalten. $L(G)$ soll keine Formeln enthalten, die andere Variablen enthalten.

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 3: *Normalformen* **1 + 1 + 3 Punkte**

a) Geben Sie zur aussagenlogischen Formel $(A \vee B) \wedge (C \vee \neg C) \wedge (A \vee \neg B)$ eine äquivalente in DNF an!

b) Geben Sie zur aussagenlogischen Formel $\neg(A \vee (B \wedge C) \vee \neg C)$ eine äquivalente in KNF an!

c) Sei φ eine aussagenlogische Formel, die nicht in DNF ist. Sie habe über dem Alphabet A_{AL} eine Länge von n. Könnte es sein, dass es eine zu φ äquivalente Formel ψ_1 in DNF der Länge höchstens $n-1$ gibt? Warum? Könnte es sein, dass es keine zu φ äquivalente Formel ψ_2 in DNF der Länge höchstens $23n + 42$ gibt?

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 4: *Relationen* **1 + 2 + 4 Punkte**

a) Sei E eine 2-stellige Relation über einer Menge V. Wann heißt E „Äquivalenzrelation"?

b) Sei M eine Menge und $R := \{(X, Y) \mid X \subseteq M, Y \subseteq M, \text{ es gibt eine Bijektion von } X \text{ nach } Y\}$.

Zeigen Sie: R ist eine Äquivalenzrelation über $\mathcal{P}(M)$. (Begründen Sie insbesondere auch, warum R eine 2-stellige Relation über $\mathcal{P}(M)$ ist.)

Hinweis: Sie dürfen folgendes verwenden: Seien A, B, C Mengen und $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ bijektive Funktionen. Dann ist auch die Funktion $g \circ f\colon A \to C$, gegeben durch $g \circ f(a) := g(f(a))$, eine bijektive Funktion.

c) Sei $\sigma := \{\dot{R}\}$ für ein 2-stelliges Relationssymbol $\dot{R}$. Seien $\mathfrak{A} = (A, \dot{R}^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (B, \dot{R}^{\mathfrak{B}})$ isomorphe σ-Strukturen. Sei $\dot{R}^{\mathfrak{B}}$ transitiv.

Zeigen Sie: $\dot{R}^{\mathfrak{A}}$ ist transitiv!

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 5: *Sprachen* $2 + 2 + 4\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} + 1 + 3$ **Punkte**

a) Geben sie für die Sprache $L_1 := \{a^n b^3 c^m \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$ einen regulären Ausdruck an!

b) Geben sie für die Sprache $L_2 := \{a^n b^3 c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine kontextfreie Grammatik an!

c) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Sprache $L_3 := \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.

d) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Sprache $L_4 := \{a^3 b^n c^3 \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist regulär.

e) Wir bezeichen den regulären Ausdruck $a(ba|ab)^*a$ als R. Gibt es ein Wort der Länge 8 in $L(R)$? Warum? Gibt es ein Wort der Länge 217 in $L(R)$? Warum?

f) Sei $G := (\Sigma, V, S, P)$ kontextfreie Grammatik mit $\Sigma := \{a, b, +, \cdot, (,)\}, V := \{S, F\}$ und $P := \{S \to a \mid b \mid S{+}S \mid F \cdot F, F \to a \mid b \mid (S{+}S)\}$. Geben Sie einen Ableitungsbaum für das Wort $a{+}b{+}a \cdot (a{+}b)$ an!

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 6: *Page-Rank* **1 + 2 Punkte**

Seien $k \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen mit $2 \leq k \leq n$.

Das Web bestehe aus n Seiten, die mit $1, \ldots, n$ durchnummeriert sind. Wir nehmen an, dass jede der ersten k Seiten $1, \ldots, k$ genau auf alle anderen dieser k Seiten verlinkt, und dass keine der $n - k$ Seiten $k + 1, \ldots, n$ auf eine der Seiten $1, \ldots, k$ verlinkt.

a) Zeichnen Sie einen Web-Graphen mit $k = 3$ und $n = 6$, der die obigen Bedingungen erfüllt!

b) Sei d der Dämpfungsfaktor mit $0 < d < 1$. Geben Sie den Page-Rank der Seite 1 an!

Matrikelnummer:__________________

Aufgabe 7: *Automaten* **2 + 2 + 2 + 2 + 4 Punkte**

Wir betrachten den nichtdeterministischen endlichen Automaten $A := (\{a, b, c\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \delta, q_0, \{q_2\})$, wobei $\delta(q_0, a) = \{q_0, q_1\}, \delta(q_0, b) = \{q_0\}, \delta(q_0, c) = \{q_0\}, \delta(q_1, a) = \varnothing, \delta(q_1, b) = \{q_2\}, \delta(q_1, c) = \varnothing, \delta(q_2, a) = \varnothing, \delta(q_2, b) = \varnothing, \delta(q_2, c) = \{q_2\}$.

a) Geben Sie den Automaten graphisch an!

b) Akzeptiert der Automat das Wort *aabb*? Warum?

c) Akzeptiert der Automat das Wort *abcab*? Warum?

d) Beschreiben Sie sprachlich, welche Wörter der Automat akzeptiert!

e) Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten B an, der die selbe Sprache wie A akzeptiert!

Matrikelnummer:____________________

Aufgabe 8: *Logik erster Stufe* **1 + 1 + 2 + 1 Punkte**

a) Sei σ eine Signatur. Wann heißt eine FO[σ]-Formel der Logik erster Stufe „allgemeingültig"?

b) Sei σ eine Signatur. Wann heißt eine FO[σ]-Formel der Logik erster Stufe „Satz"?

c) Sei $\sigma := \{\dot{E}\}$ für ein zweistelliges Relationssymbol $\dot{E}$. Geben sie zu jeder der folgenden Zeichenketten an, ob sie ein σ-Term ist, ob sie eine FO[σ]-Formel ist und ob sie eine atomare FO[σ]-Formel ist, indem Sie ein „Ja" bzw. „Nein" an der entsprechenden Stelle in der Tabelle eintragen.

	σ-Term	FO[σ]-Formel	atom. FO[σ]-Formel
v_3			
$v_3 \doteq v_3$			
$(\forall v_2 \dot{E}(v_2, v_3) \wedge \exists v_3(\dot{E}(v_2, v_3) \vee \dot{E}(v_3, v_2)))$			
$\dot{E}(v_2, \dot{f}(v_2, v_2, v_3))$			
$(\dot{E}(v_2, v_2) \vee \dot{E}(v_2, v_2) \vee \dot{E}(v_2, v_2))$			

Hierbei zählen nicht ausgefüllte Felder als falsch bearbeitet. Für diese Aufgabe gibt es insgesamt maximal 2 Punkte, für jede falsche Antwort wird $\frac{1}{4}$ Punkt abgezogen. Insgesamt gibt es jedoch mindestens 0 Punkte.

d) Geben Sie für jede der folgenden Formeln jeweils die Menge der freien Variablen an!

$\varphi := (\exists v_2 \dot{E}(v_2, v_3) \wedge \forall v_3(\dot{E}(v_2, v_3) \vee \dot{E}(v_3, v_2)))$, $\quad \mathrm{frei}(\varphi) =$

$\psi := \exists v_3(\dot{E}(v_3, v_3) \wedge \forall v_2(\dot{E}(v_2, v_3) \vee \dot{E}(v_3, v_2)))$, $\quad \mathrm{frei}(\psi) =$

Matrikelnummer:____________________

Aufgabe 9: *Markov-Ketten* **3 + 1 Punkte**

Prof. Dr. BB veranstaltet jedes Jahr ein Seminar. Die Benotung fällt dabei jeweils so aus, dass entweder die Hälfte der Studierenden nicht besteht oder über die Hälfte der Studierenden eine 1 erhält. Wenn in einem Jahr die Hälfte der Studierenden nicht besteht, führt dies dazu, dass im nächsten Jahr mit Wahrscheinlichkeit $\frac{19}{20}$ über die Hälfte der Studierenden die Note 1 erhält. Wenn in einem Jahr über die Hälfte der Studierenden eine 1 erhält, führt das dazu, dass im nächsten Jahr mit Wahrscheinlichkeit $\frac{19}{20}$ die Hälfte der Studierenden nicht besteht.

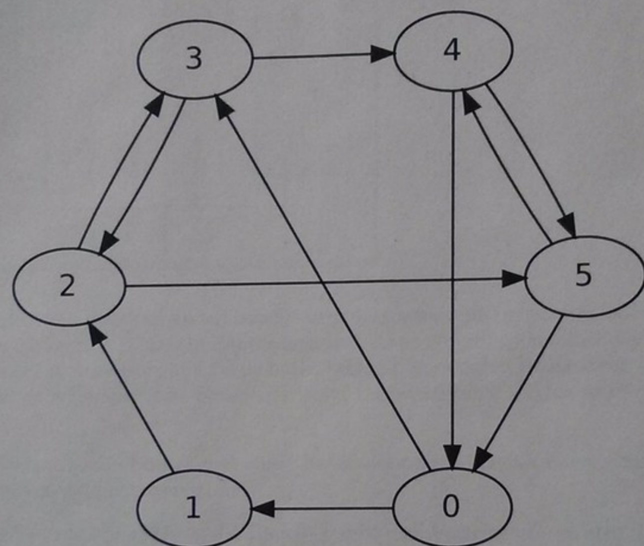
a) Modellieren Sie dies als Markov-Kette mit 2 Zuständen: Geben Sie dazu die Übergangsmatrix P und den zu P gehörenden Graphen G an!

b) Geben Sie eine stationäre Verteilung für P an!

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 10: *Graphen* 2 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 **Punkte**

Sei $G = (V, E)$ der hier graphisch dargestellte Graph:



Sei $G_u := (V, \{\{x, y\} \mid (x, y) \in E \text{ oder } (y, x) \in E\})$.

a) Geben Sie den Graphen $G = (V, E)$ die Mengen V und E an!

b) G ist stark zusammenhängend. Geben Sie eine Kante e an, so dass man aus G durch Entfernen von e einen Graphen erhält, der nicht stark zusammenhängend ist.

c) Geben Sie G_u graphisch an!

d) Hat G_u einen Euler-Kreis? Warum?

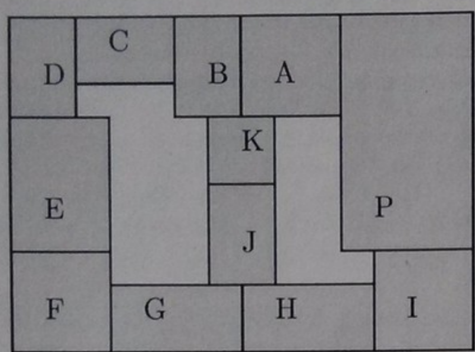
e) Enthält G_u einen $K_{2,2}$ als induzierten Teilgraphen? Warum?

f) Geben Sie einen FO[σ_{Graph}]-Satz an, der genau für die gerichteten Graphen gilt, die einen Kreis der Länge 4 als induzierten Teilgraphen enthalten! Erinnerung: $\sigma_{\text{Graph}} = \{\dot{E}\}$, wobei $\dot{E}$ zweistelliges Relationssymbol ist.

Matrikelnummer:____________________

Aufgabe 11: *Färbungen* **2 + 2 + 3 + 1 Punkte**

Häuser $A, B, \ldots, K, P$ in Bunthausen, mit Parteizentrale P:



Der Stadtrat von Bunthausen hat beschlossen, dass keine zwei nebeneinanderstehenden Häuser die gleiche Farbe haben dürfen. Die Häuser in Bunthausen sind etwas heruntergekommen und müssen alle neu gestrichen werden. Obwohl all dies schon seit Jahrzehnten bekannt ist, wurden Bunthausen im aktuellen Fünfjahresplan nur drei Farben zugeteilt: Rot, Grün und Blau. Parteizentralen dürfen nur in Rot oder Gelb gestrichen werden.

a) Modellieren Sie die Häuser und deren Nebeneinanderstehen als ungerichteten Graphen G! Geben Sie G graphisch oder extensional an!

b) Geben Sie eine Möglichkeit, die Häuser gemäß den Vorschriften zu streichen, als Knotenfärbung des Graphen G an!

c) Wir betrachten die Signatur $\sigma_{\text{Graph}} \cup \{\dot{R}, \dot{G}, \dot{B}, \dot{P}\}$ für einstellige Relationszeichen $\dot{R}, \dot{G}, \dot{B}$ und $\dot{P}$. Das Relationszeichen $\dot{R}$ werde dabei stets so interpretiert, dass die zugehörige Relation die rotgefärbten Knoten enthalte. Analog steht $\dot{G}$ für grüngefärbte Knoten und $\dot{B}$ für blaugefärbte Knoten. Das Relationszeichen $\dot{P}$ werde stets so interpretiert, dass die zugehörige Relation genau die Parteizentralen enthalte. Geben Sie einen FO$[\sigma_{\text{Graph}} \cup \{\dot{R}, \dot{G}, \dot{B}, \dot{P}\}]$-Satz an, der aussagt, dass jeder Knoten genau mit einer der drei Farben gefärbt ist und die Färbung konfliktfrei ist, und die Bedingung an die Parteizentralen erfüllt ist.

d) Da die Farbe nicht hält, sind die Häuser fünf Jahre später schon wieder zu streichen. Dann wird Bunthausen aber nur noch rote und grüne Farbe zugeteilt. Ist es immer noch möglich, die Häuser gemäß den Vorschriften zu streichen? Warum?

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 12: *Datenbanken* **2 + 1 + 1 + 2 Punkte**

In Neubunthausen sind alle Häuser entweder rot, grün oder blau gestrichen. Wir betrachten die Signatur $\sigma := \sigma_{\text{Graph}} \cup \{\dot{R}, \dot{G}, \dot{B}, \dot{P}\}$ für einstellige Relationszeichen $\dot{R}, \dot{G}, \dot{B}$ und $\dot{P}$. Das Relationszeichen $\dot{R}$ werde dabei stets so interpretiert, dass die zugehörige Relation genau die rot gestrichenen Häuser enthalte. Analog steht $\dot{G}$ für grüngefärbte Knoten und $\dot{B}$ für blaugefärbte Knoten. Das Relationszeichen $\dot{P}$ werde stets so interpretiert, dass die zugehörige Relation genau die Parteizentralen enthalte. Neubunthausen werde durch die Struktur $\mathfrak{N} := (N, \dot{E}^{\mathfrak{N}}, \dot{R}^{\mathfrak{N}}, \dot{G}^{\mathfrak{N}}, \dot{B}^{\mathfrak{N}}, \dot{P}^{\mathfrak{N}})$ modelliert.

Die Häuser in Neubunthausen liegen entlang einer langen Straße und sind fortlaufend durchnummeriert. Sei also $N := \{0, 1, \ldots, 14\}$ mit $\dot{E}^{\mathfrak{N}} := \{(x, y) \mid x \in N \text{ und } y \in N \text{ und } |x - y| = 1\}$. Sei $\dot{R}^{\mathfrak{N}} := \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, und sei $\dot{G}^{\mathfrak{N}} := \{3, 5, 11\}$.

Sei β eine Belegung, gegeben durch $\beta(x) := 6$ und $\beta(y) := 13$.

Sei $\varphi(x) := \dot{G}(x) \vee \Big(\dot{R}(x) \wedge \exists y \, \big(\dot{G}(y) \wedge \dot{E}(x, y)\big)\Big)$ eine σ-Formel.

a) Berechnen Sie $[\![\varphi]\!]^{(\mathfrak{N}, \beta)}$! Der Lösungsweg soll ersichtlich sein.

b) Beschreiben Sie $\varphi(\mathfrak{N})$ umgangssprachlich (vgl. Aufgabenstellung d))!

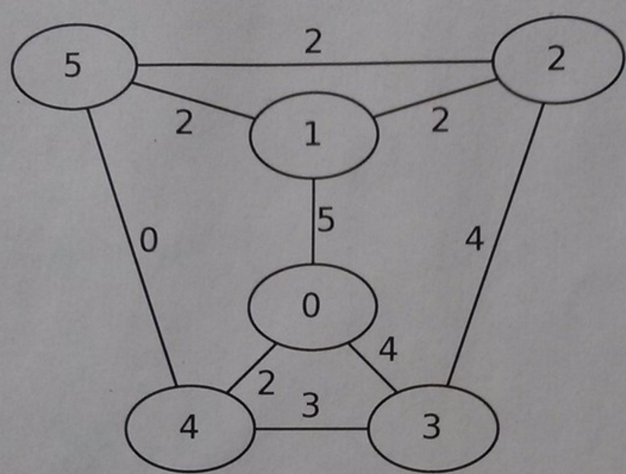
c) Geben Sie $\varphi(\mathfrak{N})$ an!

d) Geben Sie eine Anfrage, die alle blaugestrichenen Häuser, die neben Parteizentralen liegen, als Antwortrelation liefert, in Logik erster Stufe an!

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 13: *Bäume* **2 + 2 + 6 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ der hier graphisch mit einer Kantenmarkierung $w : E \to \mathbb{N}$ dargestellte Graph:



a) Sei m die drittletzte Ziffer Ihrer Matrikelnummer, falls Sie eine Matrikelnummer haben, ansonsten gelte $m = 0$. Geben Sie einen Baum $B = (V_B, V_E)$ in G an, so dass $\sum_{e \in E_B} w(e) = 2m$!

b) Geben Sie einen spannenden Baum $S = (V, E_S)$ für den Graphen G an! Dabei soll $\sum_{e \in E_S} w(e)$ möglichst klein sein.

c) Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ungerichteter, endlicher Graph. Beweisen Sie: Falls $|V| = |E| + 1$, so ist G ein Baum. Hinweis: Eine Möglichkeit, dies zu zeigen, verwendet Induktion über die Anzahl der Knoten.