1. Grundlagen

Symbole:

Operatoren:

Symbol	Name	Zugehörige Formulierung	Beispiel
$\neg$	Negation	Es gilt nicht ...	$\neg[3 = 4]$
$\vee$ $\dot{\vee}$	Oder Exklusives Oder	Es gilt ... oder ... Es gilt **entweder** ... oder ...	$[n \geq 2] \vee [n \leq 2]$ $[n \geq 2] \dot{\vee} [n \leq 2]$
$\wedge$	Und	Es gilt ... und ...	$[n \geq 2] \wedge [n \leq 2]$

Quantoren:

Symbol	Name	Zugehörige Formulierung	Beispiel
$\forall$	All-Quantor	Für alle ...	$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 0$
$\exists$ $\exists!$ $\nexists$	Existenz-Quantor	Es existiert (mindestens) ein ... Es existiert **genau** ein ... Es existiert **kein** ...	$\exists n \in \mathbb{N} : n \geq 5$ $\exists! n \in \mathbb{N} : n^2 = 25$ $\nexists n \in \mathbb{N} : n < 0$

Rechenoperationen:

Lemma 1.2.5 Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz für Mengen

Abbildungen (1.3)
Eine Abbildung (Funktion) bildet ein Element a (aus dem **Definitionsbereich** D), mithilfe einer Operation auf das Element b (aus **Bildbereich** B) ab. a ist das **Urbild** von b
f : D --> B
oder
x --> f(x), bzw. x --> y

Der Rückschritt dieser Operation wird als f^{-1} geschrieben:
f^{-1} : B --> D

Injektiv: Jedes Urbild x bildet auf ein anders y ab, als jedes andere, beliebige x´

$$x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$$

Surjektiv: Jedes Element y des Bildbereichs, besitzt wenigstens ein Urbild

$$\forall\, y \in B\, \exists\, x \in D : f(x) = y$$

Bijektiv:
Die Abbildung f ist injektiv und surjektiv

Anmerkung:
Ist eine Abbildung bijektiv, so existiert eine **Umkehrabbildung** f^{-1}. Da die Abbildung f injektiv ist, ist eine eindeutige Zuordnung von y zu genau einem x möglich

Induktionsbeweis (1.3.5):
Zeige, dass etwas für einen sehr einfachen Fall n gilt. Dann zeige, dass es ab diesem Fall auch für jeden folgenden Fall n+1 gilt.

Induktionsverankerung (IV): Beweis für einfachsten möglichen Fall zeigen (n = 0, n = 1, etc.)

Induktionsannahme (IA): Allgemeiner Ausdruck, des zu beweisenden Sachverhalts

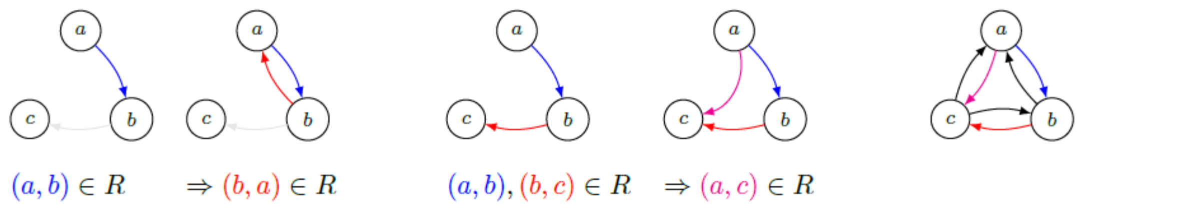
Induktionsschritt (IS): Allgemeiner Beweis, dass zu beweisender Fall für n+1 richtig ist

Relation (1.4):
Zwei Objekte stehen in einem bestimmten Bezug zu einander.

Kartesisches Produkt:
$A \times B := \{(a, b) \ : \ a \in A \wedge b \in B\}$
Jedes Element von A bildet ein Tupel mit jedem Element von B. Die Relation entsteht durch die Bedingung a Element von A und b Element von B.
Ein anderes Beispiel für eine Relation wäre die Bedingung a < 5 und b >5
(Eine Bedingung führt (beim kartesischen Produkt) zu einer Relation)

Eigenschaften von Relationen (1.4.3):

- **reflexiv**, wenn für alle $a \in A$ gilt
$$(a, a) \in R.$$
- **transitiv**, wenn für alle $a, b, c \in A$ gilt
$$(a, b) \in R \text{ und } (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R.$$
- **symmetrisch**, wenn für alle $a, b \in A$ gilt
$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R.$$



Symmetrie Transitivität Transitivität & Symmetrie

Äquivalenzrelationen (1.4.1):
Zwei Objekte verhalten sich (bezogen auf einen bestimmten Sachverhalt) identisch. Sie sind nicht identisch, aber sie verhalten sich (in einem Sachverhalt) identisch [äquivalent]

Eine Relation ist eine **Äquivalenzrelation**, wenn sie **reflexiv**, **transitiv** und **symmetrisch** ist

Äquivalenz (1.4.12):
(a, b) Element von R (R ist eine Äquivalenzrelation auf Menge A)
a $\sim_R$ b heißt: a und b sind **äquivalent bezüglich** R

a ~ b ⇔ b ~ a
a ~ b und b ~ c ⇔ a ~ c

Äquivalenzklassen (1.4.13):
Jedes Element a der Menge A, ist äquivalent zu jedem anderen Element b der Menge A

$$[a]_R := \{b \in A \ : \ (a,b) \in R\}$$

Lemma (1.4.16):
Es sei R eine Äquivalenzrelation über A.

i) Für $a, b \in A$ gilt dann entweder $[a]_R = [b]_R$ oder $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.
ii) Es gilt $[a]_R = [b]_R$ genau dann wenn $(a,b) \in R$ gilt.

$[a]_R$ ist der Vertreter der Äquivalenzklasse A

2. Rechnen mit Ganzen Zahlen

Teilbarkeit: a teilt b, wenn ein k existiert, für das b = k * a, gilt

$$a|b \quad :\Leftrightarrow \quad [\ \exists k \in \mathbb{Z} \ : \ b = k \cdot a \ ]$$

a ist ein **Teiler** von b
b ist ein **Vielfaches** von a

Anmerkung:
Jede Zahl teilt die Null, da 0 = k * n für jedes n gilt, wenn k = 0
Die Null teilt keine andere Zahl, da für n = k * 0 keine Lösung existiert, wenn n ungleich 0

Primzahl: Eine Zahl n (der natürlichen Zahlen) heißt Primzahl, wenn sie genau 2 Teiler hat (sich selbst und 1)

Anmerkung:
1 ist in den natürlichen Zahlen keine Primzahl, da sie nur einen Teiler besitzt (sich selbst)

Reste (2.3.1):
Es seinen $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Mit $\mathsf{Rest}(a, b)$ bezeichenen wir den ***Rest***, der beim Teilen von a durch b entsteht:

$$\mathsf{Rest}(a,b) := \min\{r \in \mathbb{N} \ : \ \exists m \in \mathbb{Z} \text{ mit } \ a = m \cdot b + r\}.$$

(Rest(a, b) gibt den kleinstmöglichen Rest aus, der beim Teilen von a durch b entstehen kann)

Berechnung von Rest(a, b):

$$\mathsf{Rest}(a,b) = a - m \cdot b \qquad \text{mit} \qquad m := \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$$

Abrundungsfunktion:

$$\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$$

(gleichbedeutend mit „Teile a durch b und dann runde auf die größtmögliche, ganze Zahl ab“
--> 2,9 wird abgerundet zu 2)

Eine Abrundungsfunktion, bei der die Klammern umgekehrt sind (nach oben zeigen, anstatt nach unten), ist eine Aufrundungsfunktion und funktioniert analog, nur mit Aufrundung

Rechenregeln für Reste:

$$\text{i)} \quad \mathsf{Rest}(a + b \;, n) = \mathsf{Rest}(a + \mathsf{Rest}(b, n) \;, n)$$

$$\text{ii)} \quad \mathsf{Rest}(a \cdot b \;, n) = \mathsf{Rest}(a \cdot \mathsf{Rest}(b, n) \;, n)$$

$$\text{iii)} \quad \mathsf{Rest}(\; b^k \;, n) = \mathsf{Rest}(\; \mathsf{Rest}(b, n)^k \;, n)$$

<u>Wichtig um Rechnungen mit schwierigen Zahlen zu vereinfachen!</u>

Modulo Rechnung:

$$a \equiv b \pmod{m} \quad :\Leftrightarrow \mathsf{Rest}(a, m) = \mathsf{Rest}(b, m)$$

ist das Ergebnis von Rest(a, m) identisch mit Rest(b, m), dann gilt die Gleichung:
a ≡ b (mod m)

Anmerkung:
a oder b müssen nicht kleiner als m sein, es zählt nur, dass die beiden Reste identisch sind.

5 ≡ 25 (mod 10) ist legitim, da

Rest(5, 10)	=	(0 * 10) + 5
Rest(25, 10)	=	(2 * 10) + 5

--> Reste sind identisch

Zusatz:
Korollar 2.3.10
Es sei $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ein fester Modul, und es gelte

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \text{und} \quad b \equiv c \pmod{m}$$

Dann gilt:

$$\underbrace{b \equiv a \pmod{m}}_{\text{Symmetrie}} \quad \text{und} \quad \underbrace{a \equiv c \pmod{m}}_{\text{Transitivität}}$$

Modulo Rechnungen sind <u>Symmetrisch</u> und <u>Transitiv</u>

Lemma 2.3.9:
Für jedes $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist $\mathcal{R}_m := \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \; : \; a \equiv b \pmod{m}\}$ eine Äquivalenzrelation.

Lemma 2.3.11:

Folgende Formulierungen sind Äquivalent für a, b Element der ganzen Zahlen und c Element der natürlichen Zahlen ohne Null

- Die Zahl m teilt $(a - b)$.
- Es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $a = b + k \cdot m$.
- $\text{Rest}(a, m) = \text{Rest}(b, m)$.

Lemma 2.3.12:

Wenn gilt

$$a \equiv \tilde{a} \pmod{m} \qquad \text{und} \qquad c \equiv \tilde{c} \pmod{m}$$

Dann gilt

Erstens:

$$\begin{aligned} a + c &\equiv \tilde{a} + c \pmod{m} \\ &\equiv \tilde{a} + \tilde{c} \pmod{m} \end{aligned}$$

Verhalten sich zwei paare von Zahlen äquivalent zu m (Kontext Modulo-Rechnung), dann sind verschiedene Summen aus den unterschiedlichen Paaren äquivalent in Bezug auf mod m. (vereinfacht und unpräzise ausgedrückt)

Zweitens:

$$\begin{aligned} a \cdot c &\equiv \tilde{a} \cdot c \pmod{m} \\ &\equiv \tilde{a} \cdot \tilde{c} \pmod{m} \end{aligned}$$

Analoge Aussage wie „Erstens", allerdings für Multiplikation anstatt für addition

Drittens:

$$a^k \equiv (\tilde{a})^k \pmod{m} \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

Werden zwei Zahlen, die sich in Bezug auf mod m äquivalent verhalten, k Mal mit sich selbst multipliziert, dann verhalten sich die Ergebnisse dieser Multiplikationen weiterhin äquivalent zu mod m.

Zusatz:

Bemerkung 2.3.13

Modulo Gleichungen können gelöst werden, indem man Teilreste der Modulo-Gleichungen berechnet:

$$\begin{aligned} a + b &\equiv \text{Rest}(a, \mathbf{m}) + b \pmod{\mathbf{m}} \\ a \cdot b &\equiv \text{Rest}(a, \mathbf{m}) \cdot b \pmod{\mathbf{m}} \\ a^{1000} &\equiv \text{Rest}(a, \mathbf{m})^{1000} \pmod{\mathbf{m}}. \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} 29^{100} &\equiv \text{Rest}(29, 7)^{100} \pmod{7} \\ &\equiv \underbrace{1^{100}} \pmod{7} \\ &\equiv 1 \pmod{7} \end{aligned}$$

Äquivalenzklassenrelation R_m:
Zwei Zahlen a und b sind Äquivalent, wenn sie sich genau um Vielfache von m unterscheiden
b = a + (k * m)

Äquivalenzklassen von R_m:

$$\begin{array}{lcll} [0]_{\mathcal{R}_m} & = & \{k \cdot m & : k \in \mathbb{Z}\} \\ [1]_{\mathcal{R}_m} & = & \{k \cdot m + 1 & : k \in \mathbb{Z}\} \\ [2]_{\mathcal{R}_m} & = & \{k \cdot m + 2 & : k \in \mathbb{Z}\} \\ & \vdots & & \\ [m-1]_{\mathcal{R}_m} & = & \{k \cdot m + m - 1 & : k \in \mathbb{Z}\} \end{array}$$

Beispiel
Äquivalenzklassen für R_3:

$$\begin{array}{lcll} [0]_{\mathcal{R}_3} & = & \{3 \cdot k & : k \in \mathbb{Z}\} \\ [1]_{\mathcal{R}_3} & = & \{3 \cdot k + 1 & : k \in \mathbb{Z}\} \\ [2]_{\mathcal{R}_3} & = & \{3 \cdot k + 2 & : k \in \mathbb{Z}\} \end{array}$$

größter gemeinsamer Teiler (ggT) 2.4.1

ggT ist die größtmögliche, natürliche Zahl, die zwei ganze, von Null verschiedene, Zahlen a und b teilt.

$$\mathrm{ggT}(a, b) := \max\{n \in \mathbb{N} \;:\; n|a \text{ und } n|b\}.$$

Anmerkung:
Der ggT von 0 und a, bzw. von a und 0 sind identisch und immer der Betrag von a
ggT(a, 0) = ggt(0, a) = |a|

Ist der ggT(a, b) = 1, so heißen a und b **teilerfremd**

Berechnung von ggT durch Primfaktorzerlegung:
Seien a, b natürliche Zahlen
Seien $p_1,\dots, p_l$ natürliche Zahlen und alle Primzahlen die in a, bzw. in b als Teiler vorhanden sind
Dann existieren, die Exponenten $m_1,\dots, m_l$, bzw. die $n_1,\dots, n_l$, mit denen sich die Zahlen a und b bilden lassen.

$$\begin{array}{lcl} a & = & p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdots p_\ell^{m_\ell} \\ b & = & p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_\ell^{n_\ell} \end{array}$$

Anmerkung:
Exponenten können auch 0 sein, sodass die Entsprechende Primzahl in der Rechnung zu 1 wird

Damit kann der ggT folgendermaßen berechnet werden:

$$\mathrm{ggT}(a,b) \quad = \quad p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_\ell^{k_\ell} \qquad \text{wobei} \qquad k_i := \min\{m_i, n_i\}.$$

(Bestimme Primzahlzerlegung von a und b und nimm für die jeweilige Primzahl den jeweils kleineren Exponenten)

Bsp:

$$\begin{aligned} 900 &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \\ 500 &= 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^3 \\ \mathrm{ggT}(900,500) &= 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^2 \qquad = 4 \cdot 25 = 100 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= \min\{2,2\} &= 2 \\ k_2 &= \min\{2,0\} &= 0 \\ k_3 &= \min\{2,3\} &= 2 \end{aligned}}$$

Euklidischer Algorithmus:
Berechnung von ggT, durch verringern der Inputvariablen

Seien die beiden Zahlen a, b ≠ 0, mit a ≥ b
--> a = (m * b) + r, mit m, r Elemente der natürlichen Zahlen und 0 ≤ r < b
--> m und r lassen sich über Rest(a, b) bestimmen

Es gilt: ggT(a, b) = ggT(b, r), wenn r < b ≤ a gilt

Dieser Schritt kann wiederholt werden, woraus folgt:

$$\mathrm{ggT}(a,b) = \mathrm{ggT}(b,r) = \ldots = \mathrm{ggT}(c,0) = c.$$

Lemma 2.4.7:

Es seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $a \geq b > 0$ mit $r := \mathsf{Rest}(a,b)$. Dann gilt

$$\mathrm{ggT}(a,b) = \mathrm{ggT}(a-b,b) = \mathrm{ggT}(r,b).$$

Beispiel:

Es sei $a := 77$ und $b := 21$ mit $\mathrm{ggT}(77,21) = 7$.

Dann ist $14 = \mathsf{Rest}(77,21)$ wegen $77 = \underbrace{3 \cdot 21}_{=63} + 14$

Es gilt $\mathrm{ggT}(77,21) = \mathrm{ggT}(21,14) = 7$.

Wichtiger Algorithmusschritt (Ganzer Algorithmus auf 2.4.9):
ggT(a, b)

while $b > 0$ **do**

  Setze $m := \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$.

  Setze $r := a - m \cdot b$.

  Setze $a := b$ und $b := r$.

(wiederhole Vorgang mit ggT(b, r) und Fortlaufend)

Satz von Bézout:
Berechne neben ggT(a, b) auch Variablen s, t für die gilt:
(s * a) + (t * b) = ggT(a, b)

Hierzu wird bei jedem Schritt des euklidischen Alg. für r auch s_r und t_r berechnet, für die gilt:
(s_r * a) + (t_r * b) = r
Am Ende des euklidischen Alg. erhält man r_{final}, für dessen s_{final} und t_{final} gilt:
(s_{final} * a) + (t_{final} * b) = r_{final} = ggT

Beginn:

$$s_a := 1 \quad \text{und} \quad t_a := 0, \quad \text{so dass } a = s_a \cdot a + t_a \cdot b \text{ gilt.}$$
$$s_b := 0 \quad \text{und} \quad t_b := 1, \quad \text{so dass } b = s_b \cdot a + t_b \cdot b \text{ gilt.}$$

Da r = Rest(a, b) = a – (m * b) gilt:

$$\begin{array}{ccccc} & a & = & s_a \cdot a & + & t_a \cdot b \\ \text{abziehen} & m \cdot b & = & m \cdot s_b \cdot a & + & m \cdot t_b \cdot b & \text{abziehen} \\ \hline r = & \underbrace{a - m \cdot b}_{=r} & = & \underbrace{(s_a - m \cdot s_b)}_{=s_r} \cdot a & + & \underbrace{(t_a - m \cdot t_b)}_{=t_r} \cdot b \end{array}$$

Berechnung von neuen s, t Werten grob Formuliert:

"Neuer Wert = Vorvorgänger $-m\cdot$Vorgänger".

<u>Achtung, Bsp. 2.5.4 zeigt nur Endergebnis, nicht Rechenweg</u>

Rechenart:

Berechnen von m_1 in Zeile 1

Laufindex	Faktor $\frac{\text{VorVor-}r}{\text{Vor-}r}$	aktueller Rest	Faktor vor a	Faktor vor b
j	m_j	r_j	s_j	t_j
0	/	a	1	0
1	$\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$	b	0	1

Berechnen von r_2, s_2, t_2 in Zeile 2

Laufindex	Faktor $\frac{\text{VorVor-}r}{\text{Vor-}r}$	aktueller Rest	Faktor vor a	Faktor vor b
j	m_j	r_j	s_j	t_j
0	/	a	1	0
1	$\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$	b	0	1
2		r_2	1	$-\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$

a	1	0
$-\lfloor \frac{a}{b} \rfloor \cdot b$	$-\lfloor \frac{a}{b} \rfloor \cdot 0$	$-\lfloor \frac{a}{b} \rfloor \cdot 1$
$= r_2$	$= 1$	$-\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$

$r_2 = a - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \cdot b$

$s_2 = 1 - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \cdot 0 = 1$

$t_2 = 0 - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \cdot 1 = -\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$

Eulersche Phi-Funktion: φ(n)
Bestimmt die Anzahl der mit n teilerfremden Zahlen zwischen 1 und n (für natürliche Zahlen)

Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Eulersche φ-Funktion definiert als

$$\varphi(n) := |\{m \in \{1, \ldots, n\} \ : \ \mathrm{ggT}(m, n) = 1\}|$$

Satz 2.6.3

Für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ gilt:

- $\varphi(p) = (p-1)$
- $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$ mit Exponenten $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$.
- Ist $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_\ell^{k_\ell}$ die Primzahlzerlegung von n mit $p_1 < p_2 < \ldots < p_\ell$ und $k_1, k_2 \ldots, k_\ell \neq 0$, so gilt:

$$\varphi(n) = p_1^{k_1-1} \cdot (p_1 - 1) \ \cdot p_2^{k_2-1} \cdot (p_2 - 1) \ \cdots \ p_\ell^{k_\ell-1} \cdot (p_\ell - 1)$$

Regeln aus Satz 2.6.3 können kombiniert werden (Bsp. 2.6.4)

$$\begin{aligned}
\varphi(8) &= \varphi\left(2^3\right) &&= 2^2 \cdot (2-1) &&= 4 \\
\varphi(12) &= \varphi\left(2^2 \cdot 3\right) &&= 2^1 \cdot (2-1) \cdot (3-1) &&= 4 \\
\varphi(360) &= \varphi\left(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5\right) &&= 2^2 \cdot (2-1) \cdot 3^1 \cdot (3-1) \cdot (5-1) \\
& &&= 2^2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 96
\end{aligned}$$

Lemma 2.5.6:

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$. Es gilt genau dann $\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$, wenn $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$.

Merke (Achten auf Flüchtigkeitsfehler):

Falsch ist:

$$\varphi(375) = \varphi(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3) \overset{\text{Falsch}}{=} \cancel{\varphi(5) \cdot \varphi(5) \cdot \varphi(5)} \cdot \varphi(3) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 128$$

Richtig ist:

$$\varphi(375) = \varphi(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3) = \varphi(5^3) \cdot \varphi(3) = 5^2 \cdot 4 \cdot 2 = 200$$

Algebraische Strukturen – Gruppen, Ringe, Körper und Vektorräume

Gruppen (3.1):

Tupel, bestehend aus einer Menge G und einer Rechenoperation (z.B. +, -, *, /) ○
Gruppe (G, ○)

Für Gruppen müssen folgende Eigenschaften gelten:

G1.	$a \circ b \in G$	$\forall a, b \in G$	(Abgeschlossenheit)
G2.	$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$	$\forall a, b, c \in G$	(Assoziativität)
G3.	$\exists\, e \in G : \forall a \in G : e \circ a = a$		(Neutrales Element)
G4.	$\forall a \in G : \exists\, \bar{a} \in G : \bar{a} \circ a = e$		(Inverses Element)

Def. 3.1.5

$s \odot_n t :=$ Rest$(s \cdot t, n)$

$s \oplus_n t :=$ Rest$(s + t, n)$

Für Zahlen $s, t, n \in \mathbb{N}$

Def. 3.1.6

$\mathbb{Z}_n^* := \{k \in \mathbb{N} : k \leq n \text{ und } \mathrm{ggT}(k, n) = 1\}$ Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$

--> Es gibt eine teilerfremde Zahl k im Bereich der ganzen Zahlen, die <= n ist

Bsp. Gruppe $(\mathbb{Z}_5^*, \odot_5)$ mit $\mathbb{Z}_5^* = \{1, 2, 3, 4\}$)

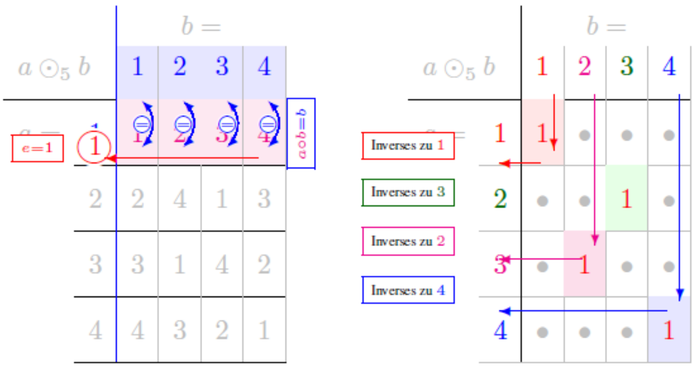
Erstelle Verknüpfungstabelle und Werte nach Kriterien für Gruppe aus:

Verknüpfungstabelle

$a \odot_5 b$	$b =$ 1	2	3	4
$a =$ 1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Auslesen: Neutrales Element

Auslesen: Inverse Elemente



Lemma 3.1.8 (Rechenregeln in einer Gruppe):

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe.

i. Es gibt in $(G, \circ)$ genau ein neutrales Element e.
ii. Es gilt $e \circ a = a \circ e$ für alle $a \in G$.
iii. Für jedes $a \in G$ gibt es genau ein Inverses $\overline{a}$.
iv. Es gilt $a \circ \overline{a} = \overline{a} \circ a$ für alle $a \in G$.
v. Das Inverse zu $\overline{a}$ ist a, d.h. es gilt $\overline{(\overline{a})} = a$ für alle $a \in G$.

In Gruppen sind lineare Gleichungen immer lösbar:

Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $a, b \in G$.

Die Gleichung der Form $a \circ x = b$ hat stets eine Lösung $x \in G$, nämlich $x = \overline{a} \circ b$.

Abelsche Gruppen:

Eine Gruppe $(G, \circ)$ heißt abelsch, wenn zusätzlich zu den Gruppenaxiomen **G1** bis **G4** gilt:

GS. $a \circ b = b \circ a \quad \forall a, b \in G$ (Kommutativität (Symmetrie))

Isomorphe Gruppen:

Jedem Element der jeweiligen Gruppe, wir ein Element der jeweils anderen Gruppe zugeordnet.
Die isomorphen Gruppen, müssen sich bei Rechenoperation mit isomorphen Elemente exakt gleich verhalten:

Für das Element $g \circ \tilde{g} = c \in G$ müssen die zu $g, \tilde{g}$ und c zugeordneten Elemente $f(g), f(\tilde{g}), f(c) \in H$ folgende Identität erfüllen:

$$f(g) * f(\tilde{g}) = f(c)$$

Formal aufgeschrieben:

Zwei Gruppen $(G, \circ)$ und $(H, *)$ heißen ***isomorph***, wenn es eine bijektive Abbildung $f : G \to H$ gibt, so dass gilt:

$$f(g) * f(\tilde{g}) = f(g \circ \tilde{g}) \quad \forall g, \tilde{g} \in G$$

Gruppenordung (3.1.5):

Bei der **Translation** wird eine Funktion, die von einer Gruppe G auf dieselbe Gruppe G abbildet (f: G→G) so definiert, dass sie ein Element x aus G mit einem festen Wert a verknüpft:

$f_a = G \rightarrow G = a \circ x$
(Translation nach a)

Eine Mehrfachverknüpfung wird mit a^n abgekürzt

Für ein Element $a \in G$ einer Gruppe $(G, \circ)$ und eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist definiert:

$$a^n = \underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{n-\text{oft}} \circ e$$

Es gilt also $a^0 = e$, $a^1 = a$, $a^2 = a \circ a$ etc.

Die Ordnung einer Gruppe ist die Anzahl |G| an Elementen in G:
Für eine Gruppe $(G, \circ)$ ist die Anzahl $|G|$ der Elemente in G die ***Ordnung*** von G.

Hat G	***endlich***	viele Elemente,	so nennt man $(G, \circ)$ eine ***endliche*** Gruppe.
	unendlich		so sagt man: Die Gruppenordnung von $(G, \circ)$ ist ∞.

Zusatz:
Es sei $(G, \circ)$ eine endliche abelsche Gruppe mit neutralem Element e.

Für alle $a \in G$ gilt dann: $a^{|G|} = e$ $\quad$ ($|G| =$ Anzahl der Elemente von G).

(Ist G eine endliche, abelsche Gruppe, dann bildet ein Element von G, dass |G| mal mit sich selbst verknüpft wurde, dass neutrale Element)

Lemma (3.1.22):
Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $a \in G$ sei ein fest gewähltes Element. Dann ist die Abbildung $f_a : G \to G$ mit $f_a(x) := a \circ x$ bijektiv.

Zusatz:
Da f_a: x → a ○ x bijektiv ist, gilt:
In jeder Zeile und Spalte der Verknüpfungstabelle einer Gruppe (G, ○) kommt jedes Element genau einmal vor

Die Gruppe $\mathbb{Z}_n^*$ (3.1.6)

$$\mathbb{Z}_n^* = (\mathbb{Z}_n^*, \odot_n)$$

Die Gruppe Besteht aus einer Menge von Zahlen, die ≤ n und teilerfremd zu n sind.
Die Rechenoperation ist die Multiplikation von zwei Elementen und dann dass bestimmen des Restes des Ergebnisses.

Wichtige Konzepte für Z^*_n:

1. Die Inversen mittels des Satzes von Bézout zu bestimmen.
2. Die Arbeit mit Potenzen der Form $a^k := a \odot_n a \odot_n \cdots \odot_n a$ für $a \in \mathbb{Z}_n^*$.

Teilerfremdheit:
Damit eine Zahl m teilerfremd zu einer Zahl n ist, dürfen die „relevanten“ (Potenz > 0; eigene Interpretation) Primzahlen der Primzahlzerlegung von n, keine Teiler von m sein.

Bsp:

Um zu der Zahl $n = 12 = 2^2 \cdot 3$ teilerfremd zu sein, muss eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ erfüllen:

[2 teilt nicht k] und [3 teilt nicht k]

--> Alle Vielfachen von 2 und 3 sind nicht Teilerfremd zu 12

$$\mathbb{Z}_{12}^* = \{1, 5, 7, 11\} = \{1, \cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{4}, 5, \cancel{6}, 7, \cancel{8}, \cancel{9}, \cancel{10}, 11, \cancel{12}\}$$

Satz 3.1.28:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$, dann ist $(\mathbb{Z}_n^*, \odot_n)$ eine abelsche Gruppe.

Inverse Elemente in Z^*_n bestimmen

--> mittels Satz von Bézout (3.1.7)

1. Berechne via Euklidischem Algorithmus Bézout-Multiplikatoren $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $s \cdot a + t \cdot n = \mathrm{ggT}(a, n) = 1$.
2. Berechne $\overline{a} = \mathsf{Rest}(s, n)$.

Bsp:

Gegeben sei $n := 20$ und $k := 7 \in \mathbb{Z}_{20}^*$ dann erhält man via E.A.: $3 \cdot 7 - 1 \cdot 20 = 1$.

Das Inverse zu 7 ist also $3 = \mathsf{Rest}(3, 20)$.

Probe: Es gilt $7 \odot_{20} 3 = \mathsf{Rest}(21, 20) = 1$

Bsp2:

Gegeben sei $n := 15$ und $k := 2 \in \mathbb{Z}_{15}^*$ dann erhält man via E.A.: $-7 \cdot 2 + 1 \cdot 15 = 1$.

Das Inverse zu 2 ist also $8 = \mathsf{Rest}(-7, 15)$.

(Die Zahl 8 erhält man durch sukzessives Adddieren von 15 zu $s = -7$.)

Probe: Es gilt $2 \odot_{15} 8 = \mathsf{Rest}(16, 15) = 1$

Ringe und Körper (3.2)

Halbgruppen (3.2.1)
Tupel aus einer Menge H und einer Rechenoperation ○

- einer Menge H und
- einer Verknüpfung $\circ: \; H' \times H' \to H'$ wobei $H \subset H'$

Hierfür gelten die Regeln:

H1.	$a \circ b \in H$	$\forall a, b \in H$	(Abgeschlossenheit)
H2.	$a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$	$\forall a, b, c \in H$	(Assoziativität)

Bei Halbgruppen muss die ausgeführte Operation nicht <u>umkehrbar</u> sein. Beispiel hierfür sind die ganzen Zahlen mit einer Multiplikation (Z, *)

Hier existiert ein Neutrales Element (die 1; x * 1 = x), allerdings existiert kein <u>ganzzahliges</u> inverses Element (außer für die 1 selbst). Die inversen Elemente von ganzen Zahlen wäre Brüche, die in den ganzen Zahlen allerdings nicht enthalten sind (n * 1/n = 1; i/n existiert nicht in Z)

Anderes Beispiel sind Natürliche Zahlen mit Addition (N, +)

Ringe (3.2.6)
Ein Ring ist ein Tripel mit einer Menge R und zwei Rechenoperationen $\circ_1$ und $\circ_2$ (R, $\circ_1$, $\circ_2$) [werden auch Addition und Multiplikation genannt (R, +, *)]

- einer Menge R und
- einer Verknüpfung $+: \; R' \times R' \to R'$ und
- einer Verknüpfung $\cdot: \; R' \times R' \to R'$ wobei $R \subset R'$

Für Ringe gelten die Regeln:

R1.	$(R, +)$ bildet eine abelsche Gruppe		(Addition)
R2.	$(R, \cdot)$ bildet eine Halbgruppe		(Multiplikation)
R3.	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$\forall a, b, c \in R$	(Distributivgesetz I)
R4.	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	$\forall a, b, c \in R$	(Distributivgesetz II)

Bei einem Ring erzeugt eine der Beiden Operationen eine **Gruppe** mit R (R, +) und die andere eine **Halbgruppe** (R, *).

Zusatz:
Ist die Operation, die die Gruppe erzeugt eine abelsche Gruppe, dann nennt man den Ring einen **kommutativen Ring**
--> R3 und R4 sind in einem kommutativen Ring äquivalent

Existiert in der Halbgruppe des Rings ein neutrales Element, so nennt man den Ring einen **unitären Ring**

Ähnliche Zahlenmenge, wie Z^*_n
Definition 3.2.9:
Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathbb{Z}_n := \{k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : k < n\}$$

Z_n beinhaltet alle natürlichen Zahlen von 0 bis n-1 und beinhaltet damit alle möglichen Restklassen von von modulo n (alle möglichen Reste, die beim Rechnen mit Modulo n auftreten können)

Außerdem:

$\mathbb{Z}^*_n \subset \mathbb{Z}_n$

Restklassenring (3.2.10):

Das Tripel $(\mathbb{Z}_n, \oplus_n, \otimes_n)$ bildet einen kommutativen unitären Ring auch als Restklassenring zum Parameter n bezeichnet.

R1 Man prüft leicht nach, dass $(\mathbb{Z}_n, \oplus_n)$ eine abelsche Gruppe ist (Abgeschlossenheit - Rechnen modulo n; Assozitivität und Kommutativität - Rechnenregeln in $\mathbb{Z}$ mit Resten verträglich; Inverses - für $a \in \mathbb{Z}_n$ ist Rest$(-a, n)$ das inverse Element; Neutrales Element - die 0).

R2 Die Multiplikation $\otimes_n$ liefert als Ergebnis eine natürliche Zahl zwischen 0 und $n-1$ und ist Assoziativ, wie wir gezeigt haben.

R3 & R4 Bleiben die Distributivgesetze zu prüfen. In Bemerkung 3.2.7 haben wir festgehalten, dass in kommutativen Ringen die beiden Distributivgesetze äquivalent sind. Mit Lemma 2.3.4 lässt sich die Distributivität der natürlichen Zahlen auf $\mathbb{Z}_n$ übertragen.

Körper (3.2.11)
Bildet ähnlich dem Ring ein Tripel aus (K, +, *)

- einer Menge K und
- einer Verknüpfung $+: \ K' \times K' \to K'$ und
- einer Verknüpfung $\cdot: \ K' \times K' \to K'$ wobei $K \subset K'$

Und es muss gelten:

K1.	$(K, +)$ bildet abelsche Gruppe mit neutralem Element 0		(Addition)
K2.	$(K \setminus \{0\}, \cdot)$ bildet abelsche Gruppe mit neutralem Element 1		(Multiplikation)
K3.	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$\forall a, b, c \in K$	(Distributivgesetz)

Ein Körper ist ein kommutativer, unitärer Ring, mit multiplikativem neutralem Element und multiplikativem Inversen.

Lemme 3.2.15:

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Dann ist der Restklassenring $\mathbb{Z}_p$ eine Körper.

Isomorphie von Körpern (3.2.16):

Zwei Körper $(K, +, \cdot)$ und $(K', \oplus, \otimes)$ heißen ***isomorph***, wenn es eine bijektive Abbildung $f : K \to K'$ gibt, so dass gilt:

$$f(0_K) = 0_{K_1}$$
$$f(a+b) = f(a) \oplus f(b) \quad \forall a, b \in K$$
$$f(1_K) = 1_{K_1}$$
$$f(a \cdot b) = f(a) \otimes f(b) \quad \forall a, b \in K$$

Zusatzinfo (Endliche Körper)

Satz 3.2.17:

Sei $n \in \mathbb{N}$. Alle endlichen Körper der Ordnung n sind isomorph.

Satz 3.2.18:

Für jede Primzahl p und jede positive natürliche Zahl n existiert (bis auf Isomorphie) genau ein Körper mit p^n Elementen.

Definition 3.2.19:

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Dann bezeichnen wir den (bis auf Isomorphie) eindeutigen Körper mit p^n Element als $\mathbb{F}_p^n$. Dabei heißt p die ***Charakteristik*** von $\mathbb{F}_{p^n}$. Für unendliche Körper haben Charakteristik 0.

Lemma 3.2.20:

In endlichen Körpern mit der Chrakteristik p gilt die *falsche binomische Formel*

$$(x+y)^p = x^p + y^p.$$

Vektorräume 3.3

Definition:

Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}^n$ ein n-dimensionaler Vektorraum.

Ein Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist ein Tupel mit n reellen Zahleneinträgen $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Form eines solchen Vektors $\vec{x}$ lautet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Die Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ heißen die Komponenten des Vektors.

Rechenregeln für Vektoren:

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \qquad \lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}$$

(Vektoren **müssen gleich viele Einträge** haben, um sie addieren oder voneinander abziehen zu können)

Vektormultiplikation ist gleich der Addition von mehreren gleichen Vektoren

$$2 \cdot \vec{a} = 2 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot a_1 \\ \vdots \\ 2 \cdot a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_1 \\ \vdots \\ a_n + a_n \end{pmatrix} = \vec{a} + \vec{a}.$$

Begriffe:

0 < |λ| < 1	-->	Vektor wird kürzer	-->	Stauchung
1 < |λ|	-->	Vektor wird länger	-->	Streckung

Korollar (3.3.3)

Für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gelten:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a} && \text{(Kommutativgesetz)} \\ \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} &= \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) && \text{(Assoziativgesetz)} \\ (\lambda + \mu) \cdot \vec{a} &= \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a} \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b} && \text{(Distributivgesetze)} \end{aligned}$$

Die Addition von Vektoren aus R^n bildet eine Gruppe:

$V = R^n$

--> (V, +) ist eine abelsche Gruppe

Eigenschaften von R^n

RA1. $\vec{v} + \vec{w} \in V$ $\quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$ (Abgeschl. der Addition)

RA2. $\vec{v} + (\vec{w} + \vec{x}) = (\vec{v} + \vec{w}) + \vec{x}$ $\quad \forall \vec{v}, \vec{w}, \vec{x} \in V$ (Assoziativität)

RA3. $\exists\, \vec{e} \in V : \forall \vec{v} \in V : \vec{e} + \vec{v} = \vec{v}$ (Neutrales Element)

RA4. $\forall \vec{v} \in V : \exists\, -\vec{v} \in V : -\vec{v} + \vec{v} = e$ (Inverses Element)

RA5. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ $\quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$ (Kommutativität)

Abgeschlossenheit bezüglich der Multiplikation mit Elementen in $\mathbb{R}$:

RM1. $\lambda \cdot \vec{v} \in V$ $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} \in V$ (Abgeschl. der Multiplikation)

Es gelten Verträglichkeitsregeln für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

RV1. $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{v}$ (Assoziativität)

RV2. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v} + \mu \cdot \vec{v}$ (Distributivgesetz I)

RV3. $\lambda \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \lambda \cdot \vec{v} + \lambda \cdot \vec{w}$ (Distributivgesetz II)

RV4. $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ (Neutralität der 1)

Mehr formale Definitionen bezüglich Vektor-Addition, bzw. Vektor-Multiplikation

Eine Menge V zusammen mit

- einer inneren Verknüpfung $\oplus : V' \times V' \to V'$ ("Vektor-Addition")
- einer äußeren Verknüpfung $\odot : \mathbb{K} \times V' \to V'$, wobei $V \subset V'$ ist, ("Multiplikation mit einem Skalar")

nennt man einen *Vektorraum über* $\mathbb{K}$, falls gelten

- $(V, \oplus)$ ist eine *abelsche* Gruppe. Also gelten

VA1.	$\vec{v} \oplus \vec{w} \in V$	$\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$	(Abgeschl. der Addition)
VA2.	$\vec{v} \oplus (\vec{w} \oplus \vec{x}) = (\vec{v} \oplus \vec{w}) + \vec{x}$	$\forall \vec{v}, \vec{w}, \vec{x} \in V$	(Assoziativität)
VA3.	$\exists\, \vec{e} \in V : \forall \vec{v} \in V : \vec{e} \oplus \vec{v} = \vec{v}$		(Neutrales Element)
VA4.	$\forall \vec{v} \in V : \exists\, -\vec{v} \in V : -\vec{v} \oplus \vec{v} = \vec{e}$		(Inverses Element)
VA5.	$\vec{v} \oplus \vec{w} = \vec{w} \oplus \vec{v}$	$\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$	(Kommutativität)

- Abgeschlossenheit bezüglich der Multiplikation mit Elementen in $\mathbb{K}$:

VM1.	$\lambda \odot \vec{v} \in V$	$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \vec{v} \in V$	(Abgeschl. der Multiplikation)

- Es gelten Verträglichkeitsregeln für alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

VV1.	$\lambda \odot (\mu \odot \vec{v})$	$=$	$(\lambda \cdot \mu) \odot \vec{v}$	(Assoziativität)
VV2.	$(\lambda + \mu) \odot \vec{v}$	$=$	$\lambda \odot \vec{v} + \mu \odot \vec{v}$	(Distributivgesetz I)
VV3.	$\lambda \odot (\vec{v} + \vec{w})$	$=$	$\lambda \odot \vec{v} + \lambda \odot \vec{w}$	(Distributivgesetz II)
VV4.	$1 \odot \vec{v}$	$=$	$\vec{v}$	(Neutralität der 1)

In der Gruppe $(V, \oplus)$ bezeichnet man ...

- das neutrale Element mit $\vec{0}$.
- das zu $\vec{v} \in V$ inverse Element mit $-\vec{v}$.

Hieraus Folgt (irgendwie):

In einem Vektorraum V gelten:

a. Die Menge V ist nicht leer.

b. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $\vec{v} \in V$ gelten die Rechenregeln:

i.	$0 \odot \vec{v}$	$=$	$\vec{0}$	
ii.	$(-1) \odot \vec{v}$	$=$	$-\vec{v}$	
iii.	$\lambda \odot \vec{0}$	$=$	$\vec{0}$	
iv.	$\lambda \odot \vec{v}$	$=$	$\vec{0}$	$\iff \left((\lambda = 0) \quad \vee \quad (\vec{v} = \vec{0}) \right)$

Untervektorräume (3.3.11):

Es sei V ein Vektorraum. Wir nenne eine Teilmenge $W \subset V$ *Untervektorraum* von V, falls gelten:

UV0.	$\emptyset \neq W \subset V$		
UV1.	$v + w \in W$	$\forall v, w \in W$	(Abgeschl. bez. der Addition)
UV2.	$\lambda \cdot v \in W$	$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall v \in W$	(Abgeschl. bez. der Skalarmultiplikation)

Korollar 3.3.12:
Für einen Untervektorraum $W \subset V$ des Vektrorraums V gelten:

i. Es ist $0 \in W$.
ii. Für alle $v \in W$ ist auch $-v \in W$.

Anmerkung:
Ein Untervektorraum „erbt“ alle Rechenregeln des originalen Vektorraums
--> was in dem Vektorraum funktionier, kann auch im Untervektorraum durchgeführt werden

Korollar 3.3.13:
Jeder Untervektorraum ist ein Vektorraum

Wichtig für Beweise (evtl.)
Zu erkennen, ob eine Teilmenge $W \subset V$ ein Untervektorraum eines Vektorraumes V ist, erfordert also per Definition zu prüfen, ob W abgeschlossen ist unter Addition und skalarer Multiplikation. Ein erster Anhaltspunkt ist das “Enthaltensein der Null”:

Gilt $0 \notin W$ so ist W *kein* Vektorraum und damit auch kein Untervektorraum.

--> zuerst Prüfen, enthält W die 0 (Nullvektor), dann Prüfen ob Abgeschlossenheit mit Addition und skalarer Multiplikation gilt

Lineare Algebra 4

$$\begin{array}{rrrr} & (ax^2 & +bx & +c) \\ + & (\alpha x^2 & +\beta x & +\gamma) \\ \hline + & ((a+\alpha)x^2 & +(b+\beta)x & +(c+\gamma)) \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\alpha \\ b+\beta \\ c+\gamma \end{pmatrix}$$

Vektoren und Polynome verhalten sich relativ ähnlich (grob ausgedrückt)

Lineare Abbildungen (4.1.1):
Seien V, V' Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to V'$ heißt linear, falls sie die folgenden Bedingungen erfüllt.

L1.	$f(v+w) = f(v) + f(w)$	$\forall v, w \in V$	(”Additivität“)
L2.	$f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$	$\forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K}$	(”Homogenität“)

Regeln zum Arbeiten mit linearen Abbildungen (4.1.3)

Seien $f, g : V \to V'$ und $h : V' \to V''$ lineare Abbildungen.

i. Für jede Zahl $\lambda \in \mathbb{K}$ ist $\lambda \cdot f$ linear.
ii. Die Abbildung $f + g$ ist linear.
iii. Die Abbildung $h \circ f : V \to V''$ ist linear.

1. Vielfache von f bleiben linear

2. Wenn man zwei Abbildungen von addiert, bleibt das Ergebnis (die Abbildung f + g) linear

3. Existiert eine Abbildung von f: V --> V´ und eine Abbildung h: V´ --> V´´ und führt man diese hintereinander aus, so ist die Abbildung V --> V´ --> V´´ linear (h ○ f; <u>Achtung</u>, hier wird als erstes f und dann erst h ausgeführt [von rechts nach links])

Zusatz (4.14):
Wenn f: V --> V´ eine bijektive, lineare Abbildung ist, dann ist auch die Umkehrabbildung f^{-1}: V´ --> V linear.

Begriffe:

Lineare Abbildung	=	Homomorphismus
Bijektive, lineare Abbildung	=	Isomorphismus

<u>Basen und Dimensionen</u>

Dimension (informal, später genaue Definition):
Die Dimension gibt an, wie viele Freiheitsgrade (Bewegungsmöglichkeiten) in einem Vektorraum existieren

R^2 --> 2 Freiheitsgrade

R^3 --> 3 Freiheitsgrade

Spann und Linearkombination (5.1.2):
Es seien $v_1, \ldots, v_k \in V$ Vektoren in einem Vektorraum V.

Eine Summe der Form $\mu_1 \cdot v_1 + \ldots + \mu_k \cdot v_k$ mit $\mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{K}$ nennt man *eine Linearkombination* der Vektoren $v_i, \ldots, v_k$. Die Menge aller Linearkombinationen dieser Vektoren nennt man den Spann von $v_1, \ldots, v_k$ bezeichnet mit

$$\mathsf{span}(v_1, \ldots, v_k) := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i \quad : \quad \mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Es ist $\mathsf{span}(\emptyset) = \{0\}$.

Vielfache von einer gegebenen Zahl an Vektoren zusammenaddiert nennt man **Linearkombination**

Die Menge aller möglichen Linearkombinationen einer gegebenen Menge an Vektoren, nennt man **Span**

(Linearkombination ist eine „Laufanweisung", Span sind alle möglichen erreichbaren Punkte, die über alle möglichen Laufanweisungen erreichbar sind)

Lineare Unabhängigkeit (5.1.5): WICHTIG!

Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_k\} \subset V$ in einem Vektorraum V heißt ***linear unabhängig*** falls gilt:

$$\mu_1 \cdot v_1 + \ldots + \mu_k \cdot v_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k = 0$$

Gilt dies nicht, nennt man die Vektoren ***linear abhängig*** (oder auch kurz abhängig).

Gibt es (als einzige Lösung), die **triviale Lösung**, um mittels einer Linearkombination der gegebenen Vektoren den Nullvektor zu erreichen, dann sind die Vektoren **linear unabhängig**
[Die triviale Lösung ist immer eine Lösung, aber es kann noch weitere Lösungen geben]

Lemma 5.1.8:

Die Vektoren $\{v_1, \ldots, v_k\}$ sind genau dann linear **ab**hängig, wenn es einen Vektor $v_j \in \{v_1, \ldots, v_k\}$ gibt, der sich als Linearkombination der anderen Vektoren schreiben lässt, wenn also gilt:

$$\exists \mu_1, \ldots, \mu_{j-1}, \ \mu_{j+1}, \ldots \mu_k \in \mathbb{K} \ : \ v_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \mu_i v_i \tag{5.1}$$

Ein Vektor, der als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden kann, ist „unnötig". Auch ohne ihn kann (mithilfe der anderen Vektoren) derselbe Spann erzeugt werden.

Bzw. umgekehrt: Kann man keinen Vektor, aus einer Linearkombination der anderen Vektoren bilden, so sind die untersuchten Vektoren linear unabhängig.

Basis (5.2.1)

Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$ Vektoren in einem Vektorraum V. Wir nennen $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine ***Basis*** von V, wenn erfüllt sind:

B1. Die Vektoren $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sind linear unabhängig.
B2. $V = \mathsf{span}(v_1, \ldots, v_n)$.

Einfach ausgedrückt:
Kann man mit den möglichen Linearkombinationen der gegebenen Vektoren alle Punkte im Vektorraum V erreichen und ist keiner der Vektoren „unnötig", dann sind die gegebenen Vektoren eine Basis des Vektorraums.

Proposition 5.2.2:

Ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis des Vektorraums V, so gibt es zu jedem Vektor $w \in V$ *genau ein* n-tupel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $w = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i$.

Jeder Vektor w der in dem Vektorraum V existiert (jeder mögliche Punkt in V), kann mit genau einem Tupel der Basis gebildet werden (Jeder mögliche Vektor kann eindeutig gebildet werden. Es existieren keine zwei Möglichkeiten denselben Vektor zu bilden [Eigeninterpretation])

Einheitsvektoren (5.2.4):

Es sei $\mathbb{K}^n$ der Vektorraum, der von den n ***Einheitsvektoren***

$$e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

Dimension:

Definition von Dimension soll die Zahl der Vektoren sein, die benötigt werden eine Basis für einen Vektorraum V zu bilden.

Vorab:

- Jeder Vektorraum hat eine Basis.
- Alle Basen bestehen aus gleichvielen Vektoren.

Satz 5.2.5:

Sind $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, v_k$ Basen des Vektorraums V, so gilt: $k = n$.

--> Alle möglichen Basen eines Vektorraums V besitzen genau gleich viele Vektoren

Formale Definition für Dimension (5.2.6):

Hat ein Vektorraum V eine Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ so sagt man die Dimension von V ist n. Ist es nicht möglich, eine (endliche) Basis von V zu finden, so sagt man die Dimension von V ist unendlich.

Satz 5.2.8:

Jeder n-dimensionale Vektorraum ist isomorph zu $\mathbb{R}^n$ (wobei $n \in \mathbb{N}$).

Anmerkung:
Basis des Nullvektorraum (5.2.9)
Der ***Nullvektorraum*** besteht nur aus dem Nullvektor 0 und hat eine leere Basis. Nach Beispiel $\boxed{5.1.7}$ ist nämlich die Menge bestehend alleine aus dem Nullvektor $\{0\}$ nicht linear unabhängig. Nach der Definition gilt $\mathrm{span}(\emptyset) = \{0\}$.

Basisaustauschsätze:

Lemma 5.2.10:
Sei $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine Basis des Vektorraumes V, und $z = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$ eine Linearkombination mit $a_j \neq 0$. Dann ist auch $\{v_1, \dots, v_{j-1}, z, v_{j+1}, \dots, v_n\}$ eine Basis von V.

Eigeninterpretation: Wenn die Menge der gegebenen Vektoren eine Basis im Vektorraum V bilden, dann kann jeder Vektor durch eine gestreckte oder gestauchte Version von sich selbst ersetzt werden.

Basisaustauschsatz von Steinitz (Wichtig?)
Es seien $\{w_1, \dots, w_k\} \subset V$ linear unabhängig und es sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V.

Dann gilt $k \leq n$, und es gibt $n - k$ paarweise verschiedene $\widetilde{v}_{k+1}, \dots, \widetilde{v}_n \in \{v_1, \dots, v_k\}$, so dass gilt:

$$\{ w_1, \dots, w_k, \ \widetilde{v}_{k+1}, \dots, \widetilde{v}_n \} \quad \text{ist eine Basis von } V$$

Anmerkung:
„paarweise verschieden“ heißt einfach „unterschiedlich“
Eigeninterpretation:
Es gibt eine Menge K, bestehend aus k Vektoren (in dem Vektorraum V), die linear unabhängig sind
Es gibt eine Menge B, bestehend aus n Vektoren (in dem Vektorraum V), die eine Basis von V bilden
--> Wenn k ≤ n, dann kann K, durch n – k viele, unterschiedliche Vektoren von B ergänzt werden, um eine neue Basis von V zu generieren
(man kann beliebige, passende Vektoren aus B nehmen und sie in K einfügen, damit aus K eine Basis wird)

Matrizen

Abbildungen von einem Vektorraum der Größe n zu einem Vektorraum der Größe m (= Matrizen) (f: R^n --> R^m)

Definition (6.1.1)

Sei S eine Menge. Eine $m \times n$-Matrix (sprich „m-Kreuz-n-Matrix“) A ist eine Abbildung

$$A : \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to S, \qquad (i, j) \mapsto A_{ij}.$$

Die Menge aller $m \times n$-Matrizen bezeichnen wir mit $S^{n \times n}$.

- Wir schreiben eine Matrix in der Form

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \cdots & A_{1,\mathbf{n}} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots & A_{2,\mathbf{n}} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & \cdots & A_{3,\mathbf{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mathbf{m},1} & A_{\mathbf{m},2} & A_{\mathbf{m},3} & \cdots & A_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \end{pmatrix}.$$

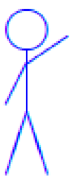
- Wir nennen das n-Tupel $A_{(i)} = (A_{i1}, \dots, A_{in})$ die ***i-te Zeile*** von A.
- Entsprechend heißt der Vektor

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} A_{1j} \\ \vdots \\ A_{mj} \end{pmatrix}$$

  die ***j-te Spalte*** von A.
- Die einzelnen Zahlen A_{ij} heißen die ***Einträge*** von A.
- Falls $m = n$, nennen wir M eine ***quadratische*** Matrix.

Bemerkung:
Bei der Benennung einer Matrix gilt m x n wird geschrieben als Höhe x Breite

Der Leser nimmt immer zuerst die Höhe der Matrix wahr, deswegen steht m vorne.



$$\begin{array}{cc} & \text{Breite n} \\ \text{Höhe m} & A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \cdots & A_{1,\mathbf{n}} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \cdots & A_{2,\mathbf{n}} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & \cdots & A_{3,\mathbf{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{\mathbf{m},1} & A_{\mathbf{m},2} & A_{\mathbf{m},3} & \cdots & A_{\mathbf{m},\mathbf{n}} \end{pmatrix} \end{array}$$

Matrizen können verwendet werden, um lineare Gleichungssysteme auszudrücken:

$$\begin{array}{rrrcl} 4x_1 & +6x_2 & -8x_3 & = & 0 \\ & -2x_2 & -8x_3 & = & 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -8 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für Matrizen:

Addition (6.2.1)

Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die Matrix $C := A + B$ ist die Matrix mit den Einträgen $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$.

Die einzelnen Einträge der beiden Matrizen werden einfach addiert

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 8 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & 6+7 \\ 2+3 & 8+9 \\ 4+5 & 10+11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 5 & 17 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$$

Nur Matrizen mit derselben Anzahl an Spalten und Zeilen können addiert werden

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist nicht definiert.}$$

Subtraktion von Matrizen funktioniert analog

Multiplikation mit Skalaren

Definition (6.2.4):

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $B := \lambda \cdot A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Matrix mit den Einträgen $B_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

Multipliziere jeden Eintrag der Matrix mit dem Skalar λ

Bsp:

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot 5 & 5 \cdot 5 & 5 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 20 & 25 & 30 \end{pmatrix}$$

Lemma 6.2.6:

Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ drei $m \times n$-Matrizen und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Skalare. Dann gelten:

$$A + B = B + A \qquad \text{(Kommutativgesetz der Addition)}$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \qquad \text{(Assoziativgesetz der Addition)}$$

$$\lambda(\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu)A = \mu(\lambda \cdot A) \qquad \text{(Assoziativgesetz der Multiplikaton)}$$

$$\left.\begin{aligned} (\lambda + \mu)A) &= \lambda \cdot A + \mu \cdot A \\ \lambda \cdot (A + B) &= \lambda \cdot A + \lambda \cdot B \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Distributivgesetze)}$$

Transposition von Matrizen (6.2.7)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix.

Die zu A *transponierte* Matrix $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ist die Matrix, mit den Einträgen $(A^T)_{k\ell} = A_{\ell k}$.

Die *Spalten* der Matrix A (von oben nach unten gelesen) werden zu
Zeilen der Matrix A^T (von links nach rechts gelesen)

Bei einer Transponierten Matrix M^T wird die Nummerierung von Zeilen uns Spalten der Originalmatrix M verdreht. Aus $M_{1,2}$ wird $M_{2,1}$ und umgekehrt.

Bsp:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Transposition funktioniert analog für Vektoren:

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Anmerkung:

- Es ist für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ die transponierte Matrix des Produkts $B \cdot A$ das Produkt der einzelnen Transponierten Matrizen in umgekehrter Reihenfolge, also $(B \cdot A)^T = A^T \cdot B^T$.
- Es ist für eine invertierbare Matrix A auch die transponierte Matrix invertierbar und es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

1. Multipliziert man zwei Matrizen A und B miteinander und transponiert das Ergebnis $(A*B)^T$, so erhält man das gleiche Ergebnis wie bei einer Multiplikation der transponierten Matrizen A^T und B^T.

$(B*A)^T = A^T * B^T$ Achtung! Reihenfolge von A und B wird verdreht!

2. Wird die invertierte Matrix A^{-1} transponiert $(A^{-1})^T$ erhält man das gleiche Ergebnis wie bei einer Invertierung der der transponierten Matrix A

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Einschub:
Die invertierte (inverse) Matrix A^{-1} ist eine Matrix für die gilt:
$A * A^{-1} = id$
wobei id die Einheitsmatrix ist (in Bild id = E) [später näheres zur Einheitsmatrix]

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplikation von Vektoren (2.6.10):
Bei der Multiplikation von einer Matrix $A^{m\times n}$ mit einem Vektor V^n entsteht ein Vektor V'^m
Die Breite n der Matrix und die Höhe n des Vektors müssen hierbei übereinstimmen

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}\times\mathbf{n}}$ mit n Spalten und einen Vektor $v \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ mit n Einträgen gilt:

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \cdot v_1 + & A_{12} \cdot v_2 + & \cdots & + A_{1n} \cdot v_n \\ A_{21} \cdot v_1 + & A_{22} \cdot v_2 + & \cdots & + A_{2n} \cdot v_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} \cdot v_1 + & A_{m2} \cdot v_2 + & \cdots & + A_{mn} \cdot v_n \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis der Multiplikation $A \cdot v$ ist also ein Vektor aus $\mathbb{R}^{\mathbf{m}}$.

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \cdot \mathbf{1} & +7 \cdot \mathbf{2} & +5 \cdot \mathbf{3} \\ 8 \cdot \mathbf{1} & +6 \cdot \mathbf{2} & +4 \cdot \mathbf{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Matrix-Matrix Multiplikation (6.2.1):
Bei einer Matrix-Matrix Multiplikation von A * B, muss die Breite von Matrix A mit der Höhe von Matrix B übereinstimmen

Es sei $A \in \mathbb{R}^{k \times \mathbf{m}}$ mit "Inputdimension" $\mathbf{m}$
und $B \in \mathbb{R}^{\mathbf{m} \times n}$ mit n Spalten $B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(1)} \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$:

$$A = \left(\overbrace{\begin{matrix} A_{11} \ldots A_{1\mathbf{m}} \\ \vdots \qquad \vdots \\ A_{k1} \ldots A_{k\mathbf{m}} \end{matrix}}^{\text{Breite } m} \right) \qquad \text{Höhe m} \quad B = \left(\begin{matrix} B_{11} \ldots B_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots \\ B_{\mathbf{m}1} \ldots B_{\mathbf{m}n} \end{matrix} \right)$$

Die Matrix $C := A \cdot B$ ist die $k \times n$-Matrix mit den Einträgen

$$C_{i,j} := \sum_{s=1}^{m} A_{is} \cdot B_{sj}.$$

Das heißt die Matrix C hat n-viele Spalten der Form $C^{(j)} = A \cdot B^{(j)} \in \mathbb{R}^k$. Also ist

$$A \cdot B = \left(A \cdot B^{(1)}, A \cdot B^{(2)}, \ldots, A \cdot B^{(n)} \right).$$

Bei $A^{m \times k} * B^{k \times n} = C^{m \times n}$, ist:

m die Input-Dimension (wird zur neuen Höhe von C)
k die Zwischen-Dimension (geht verloren und taucht nicht in C auf)
n die Output-Dimension (wird zur neuen Breite von C)

Die Berechnung einer Matrix-Matrix Multiplikation lässt sich vereinfacht ausdrücken als:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \left(A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}$$

Die Spalten der neuen Matrix ergibt sich aus der Multiplikation der Matrix A mit dein Spalten der Matrix B (als würde die Matrix B nur aus einer Reihe von Vektoren bestehen)

Wichtig!

Für Matrix-Matrix Multiplikation gilt das Kommutativgesetz **nicht**!

--> A * B ≠ B * A

Zusatz:

Korollar 6.2.15:

Es seien $A \in \mathbb{R}^{k \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$A \cdot (B \cdot x) = (A \cdot B) \cdot x.$$

Rechenregeln für Matrix-Matrix Multiplikation (6.2.16):

Es seien $A, \widetilde{A}, B, \widetilde{B}, C$ Matrizen mit passender Größe, d.h.

$$A, \widetilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad B, \widetilde{B} \in \mathbb{R}^{n \times k} \quad \text{und } C \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$$

Dann gilt:

$$\begin{array}{llll} 1) & (A \cdot B) \cdot C & = & A \cdot (B \cdot C) \quad \text{(Assoziativgesetz)} \\ 2) & A \cdot (B + \widetilde{B}) & = & A \cdot B + A \cdot \widetilde{B} \quad \text{(Distributivgesetz)} \\ & (A + \widetilde{A}) \cdot B & = & A \cdot B + \widetilde{A} \cdot B \\ 3) & A \cdot (\lambda \cdot B) & = & \lambda \cdot A \cdot B \quad \text{gilt für alle } \lambda \in \mathbb{R} \end{array}$$

Im Allgemeinen gilt:

$$A \cdot B \neq B \cdot A \qquad \text{(Kommutativgesetz gilt im Allgemeinen nicht)}$$

Matrizen und lineare Abbildungen

Komponentenschreibweise (7.1.1):

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + v_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} v_k e^{(k)}.$$

Eigeninterpretation:
Man kann sich die Vektoren einer Basis B auch als Matrix vorstellen, wenn man sie nebeneinander schreibt. Ein beliebiger Punkt v (repräsentiert durch einen Vektor) im Vektorraum V, der mit der Basis abgebildet wird hat dann die Koordinaten v = (v_1, v_2 , …, v_n).
Multipliziert man die „Matrix aus Basisvektoren" dann mit dem Punkt v, erhält man einen einzelnen Vektor, dessen Koordinaten als eine Kombination der Basisvektoren dargestellt sind.

--> Der entstandene Vektor v ist zur Basis von B

Im Skript:

$$u = u_1 \cdot b_1 + \ldots + u_n \cdot b_k = \sum_{k=1}^{n} u_k b_k. \quad \text{-->} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}_{[\mathcal{B}]}$$

Matrixdarstellung linearer Abbildungen (7.1.2):

Definition 7.1.1:
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Wir nennen die $m \times n$-Matrix $M(f)$ deren Spalten den Bildern der Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$ unter der Abbildung f entsprechen die ***darstellende Matrix*** (oder Darstellungsmatrix) von f.

Man kann eine Reihe von Vektoren zu einer **Darstellungsmatrix M(f)** [$M^{m \times n}$] zusammenfassen. Diese Matrix kann verwendet werden, um einen Vektor von R^n in R^m zu überführen
f: R^n --> R^m

$$f(v) = M(f) \cdot v.$$

Eigeninterpretation: Die Darstellungsmatrix verändert die Basis eines Vektors. Ein Vektor der Vorher auf der Basis von $e^{(1)}$ war, ist nach der Multiplikation mit M(f) auf der Basis von $f(e^{(1)})$
(evtl. falsch, konzipiert auf der Basis von Beispiel 7.1.2)

Proposition 7.1.3 (Rechenregeln mit Darstellungsmatrizen):

Sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist

- $M(f+g) = M(f) + M(g)$
- $M(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot M(f)$
- $M(g \circ f) = M(g) \cdot M(f)$.

Anmerkung:

Für quadratische Matrizes wir auch die Potenzschreibweise A^k verwendet:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\text{mal}}$$

Die Nullmatrix 0:

Matrix beliebiger Größe m x n Matrix, mit der Eigenschaft, dass alle Einträge der Matrix Null sind. Für diese Matrix gilt:

A + 0 = 0 + A = A

Einheitsmatrix id:

Eine quadratische n x n Matrix, deren Diagonaleinträge ($A_{1,1}$, $A_{2,2}$, … , $A_{n,n}$) alle eine 1 sind und deren restliche Einträge alle Null sind. Für diese Matrix gilt:

A * id = id * A = A

und

id * x = x (x ist ein Vektor von R^n)

diag(a):

Eine quadratische n x n Matrix, deren Diagonaleinträge alle den Wert a haben und deren restliche Einträge alle Null sind. Für jeden Vektor x aus R^n gilt dann:

$$\operatorname{diag}(a) \cdot x = \begin{pmatrix} a_1 x_1 \\ a_2 x_2 \\ \vdots \\ a_n x_n \end{pmatrix}$$

Diagonalform:

Jede Matrix D der Form m x n (nicht zwangsläufig quadratisch), bei der sich nur die Diagonaleinträge von Null unterscheiden.

Es gilt:

Wenn $D_{i,j} \neq 0$, dann folgt, dass i = j

Inverse Matrix (7.1.5):

Seien A, B $n \times n$-Matrizen. Wir sagen, dass B zu A ***invers*** ist, wenn $A \cdot B = B \cdot A = \mathrm{id}$. Falls es eine Matrix B gibt, die zu A invers ist, heißt A ***invertierbar*** oder ***regulär***, andernfalls heißt A ***singulär***.

Proposition 7.1.6:

Eine $n \times n$-Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn die lineare Abbildung $v \in \mathbb{R}^n \to A \cdot v$ ein Isomorphismus ist.

???

Dimensionssatz:

Definition zweier Mengen, die Aussage über eine Matrix machen (7.2.1)

Kern: Enthält alle Vektoren, die auf den Nullvektor abgebildet werden. Also alle Vektoren für die gilt:

$$\mathrm{Kern}(A) := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ A \cdot x = 0\}$$

Bild: Enthält alle Vektoren, die mit einem Urbild auf das Bild abgebildet werden. Also alle Vektoren für die gilt:

$$\mathrm{Bild}(A) := \{A \cdot x \ : \ x \in \mathbb{R}^n\}$$

Bemerkungen (7.2.2):

- Für $A = (a_1, \ldots, a_n)$ mit Spalten $a_i \in \mathbb{R}^m$ gilt: $\mathrm{Bild}(A) = \mathrm{span}\left(\{a_1, \ldots, a_n\}\right)$
- Für die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $x \mapsto A \cdot x$ gilt:
  - Der Kern ist eine Teilmenge der ***Urbildmenge*** $\mathbb{R}^n$ der Abbildung f
  - Das Bild ist eine Teilmenge des ***Bildmenge*** $\mathbb{R}^m$ der Abbildung f
- Sind A eine $m \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^m$ und $x \in \mathbb{R}^n$ so, dass $A \cdot x = b$, so gilt für jeden Vektor z im Kern von A, dass $A(x + z) = b$. Ist umgekehrt x' ein Vektor mit $A \cdot x' = b$, so ist $z = x - x'$ im Kern von A.

Betonung (Lemma 7.2.3):

Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sind $\mathrm{Kern}(A) \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathrm{Bild}(A) \subset \mathbb{R}^m$ Vektorräume.

Lemma 7.2.4: WICHTIG!

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dann gilt für die Vektorräume Kern und Bild:

$$\dim\left(\mathrm{Kern}(A)\right) + \dim\left(\mathrm{Bild}(A)\right) = n$$

Bildet eine Matrix von R^n nach R^m ab, so ist die „Summe aller Kern-, bzw. Bildvektoren“ gleich n

Allgemeine lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen
(Abbildungen von einem Vektorraum V auf einen anderen Vektorraum V´)

Schlussfolgerung: Kann man machen, aber 7.3 gibt erstmal nicht viele Informationen her, später hoffentlich genauere Definitionen

Quadratische Matrizen A Element von $R^{n\times n}$ bilden auf sich selbst ab und heißen daher lineare Selbsabbildungen. f(x) = A(x) mit f: R^n --> R^n

Lineare Gleichungssysteme (LGS) (7.4.1):

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) ist ein System von Gleichungen der Form

$$\begin{array}{cccccc} A_{1,1} \cdot x_1 & +A_{1,2} \cdot x_2 & +\ldots+ & A_{1,n} \cdot x_n & = & b_1 \\ A_{2,1} \cdot x_1 & +A_{2,2} \cdot x_2 & +\ldots+ & A_{2,n} \cdot x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ A_{m1} \cdot x_1 & +A_{m,2} \cdot x_2 & +\ldots+ & A_{m,n} \cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

mit $A_{1,1}, \ldots, A_{m,n} \in \mathbb{R}$ und $b_1, \ldots b_m \in \mathbb{R}$.

Jedes lineare Gleichungssystem lässt sich äquivalent schreiben als $A \cdot x = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$.

Bestimme alle möglichen Vektoren x Element von R^n, für die gilt: A * x = b, wenn A und b bekannt sind.

--> Lösen des LGS mittels Gauß´schem Eliminationsverfahren

Stufen-Zeilen Forma einer Matrix (7.4.2):

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ hat Zeilen-Stufen-Form, wenn es einen Zeilen-Index $\ell \in \{1, \ldots, m+1\}$ gibt mit:

- Jede Zeile mit Index in $\{2, \ldots, \ell-1\}$ enthält mindesten eine führende Null mehr als die Zeile davor.
- Jede Zeile mit Index in $\{\ell, \ldots, m\}$ enthält nur Nullen (falls $\ell = m+1$ gibt es keine solchen Zeilen).

Bsp:

Die folgenden Matrizen haben jeweils Zeilen-Stufen-Form mit $\ell = 4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anzahl führender Nullen steigt bis Zeile $3 = \ell - 1$

Anzahl führender Nullen ist maximal ab Zeile $4 = \ell$

Bsp2:

Die folgende Matrix ist nicht in Zeilen-Stufen-Form, denn Zeile 2 enthält genauso viele führende Nullen wie Zeile 3, obwohl beide nicht maximal viele Nullen enthalten:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

LGS in Stufe-Zeilen Form sind sehr leicht zu lösen, jede Zeile bestimmt eine Variable, die mit den bereits bestimmten Variablen genutzt werden kann um die nächste Variable zu bestimmen.

Tableau (7.4.5):
Alternative Schreibweise zu LGS

Für eine Gleichung $A \cdot x = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ ist das zugehörige Tableau

$$\begin{array}{ccc|c} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} & b_m \end{array}$$

Die Lösungen eines Tableaus sind die Lösungen der zugehörigen Gleichung $A \cdot x = b$.

Zwei Tableaus heißen ***äquivalent***, wenn sie dieselben Lösungen haben.

Zulässige Schritte um ein Tableau zu lösen (Lemma 7.4.6):

Die Lösungen eines Tableaus verändern sich nicht, wenn man einen der folgenden Schritte anwendet:

G1. Addiere das Vielfache einer Zeile zu einer ***anderen*** Zeile.

G2. Multipliziere eine Zeile des Tableaus mit einer Zahl.

G3. Vertausche zwei Zeilen des Tableaus.

G4. Streiche eine Nullzeile (eine Zeile deren Einträge alle Null sind).

. . . wobei jeweils die anderen Zeilen des Tableaus unberührt bleiben.

Tableau mit Nullzeilen (7.4.8):

Das Tableau hat einen "Vorspann" aus einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$, gefolgt von einer Nullzeile. Dieses Tableau hat dann die selben Lösungen wie $A \cdot x = b$:

Tableau: $\begin{array}{ccc|c} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} & b_m \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}$ Gleichungssystem $\left[\begin{array}{ccccc} A_{1,1}x_1 & +\dots+ & A_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & & \vdots & \\ A_{m,1}x_1 & +\dots+ & A_{m,n}x_n & = & b_m \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$

Bedeutung: Das LGS hat <u>unendlich viele Lösungen</u>, die Einträge des am Ende gebildeten Vektors x sind also abhängig von dem in der Nullzeile eingetragenen Wert.
Mathematisch ausgedrückt:

Die Lösungen dieses Systems sind:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ A \cdot x = b\} \bigcap \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ 0 = 0\}}_{=\mathbb{R}^n} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ A \cdot x = b\}$$

Tableau mit Fast-Nullzeilen (7.4.9):

Hat man ein Tableau, dass (am Ende) eine Nullzeile mit Rechter Seite ungleich Null enthält, so hat das zugehörige Gleichungssytem **keine Lösung**

Allgemein sieht dies wie folgt aus: Nach umsortieren der Zeilen, hat das Tableau hat einen "Vorspann" aus einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$, gefolgt von einer weiteren Zeile:

$$\text{Tableau: } \begin{array}{ccc|c} A_{1,1} & \dots & A_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{m,1} & \dots & A_{m,n} & b_m \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \qquad \text{Gleichungssystem } \left[\begin{array}{ccccc} A_{1,1}x_1 & +\dots+ & A_{1,n}x_n & = & b_1 \\ & & & \vdots & \\ A_{m,1}x_1 & +\dots+ & A_{m,n}x_n & = & b_{m-1} \\ & & 0 & = & 1 \end{array} \right.$$

Hat ein Tableau eine Nullzeile, deren rechte Seite (das Ergebnis) ungleich Null ist, so ist das LGS nicht Lösbar.

Mathematisch ausgedrückt:

Die Lösungen dieses Systems sind:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ A \cdot x = \vec{b}\} \bigcap \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ 0 = 1\}}_{=\emptyset} = \emptyset$$

--> es existiert kein Vektor x, für den A * x = b gilt

Sprünge in Tableaus (7.4.3):

Die Folgende Zeile in einem Tableau hat mehr als eine zusätzliche Nullstelle im Vergleich zur vorherigen Zeile

- einen Sprung der Länge 3 von Zeile 2 zu Zeile 3
- einen Sprung der Länge 2 von Zeile 4 zu Zeile 5

1	2	3	4	5	6	7
0	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	5	6	7
0	0	0	0	0	6	7
0	0	0	0	0	0	0

Länge 3 Länge 2

--> Bei einem Sprung der Länge k, lassen sich k-1 Variablen des LGS nicht konkret festlegen. Diese Variablen tauchen als Variablen im finalen Vektor x auf.

Umformungsschritte zum Lösen eines LGS A * x = b mittels Matrix-Matrix Multiplikation(7.4.4)

- ▶ $S[i,j]$ die $m \times m$-Matrix, die aus der Einheitsmatrix id durch Vertauschen der $i$ten und der j-ten Zeile hervorgeht.
- ▶ $T[i,j,\lambda]$ die $m \times m$-Matrix, deren Diagonaleinträge alle gleich 1 sind, deren Eintrag in Zeile i und Spalte j gleich λ ist, und deren übrige Einträge gleich 0 sind (ist $i = j$, dann ist der entsprechende Diagonaleintrag in Zeile und Spalte i gleich $z \in \mathbb{R}$).
- ▶ $U[i]$ die $m \times (m-1)$-Matrix, die aus der Einheitsmatrix id durch Weglassen der $i$ten Zeile hervorgeht.

Etwas verwirrend im Skript beschrieben. Grundsätzlich hat man Matrix A, B und C mit der Gleichung A * B = C, und verändert über diese Regeln Matrix A. Allerdings müssen alle Veränderungen an Matrix A auch in Matrix C durchgeführt werden.

Bsp im Skript:

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & 16 & 3 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$S[2,4] \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & 16 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 2 & 11 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T[1,3,\frac{1}{2}] \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & 16 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 11 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & 16 & 3 \end{pmatrix}$$

$$T[2,2,3] \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & 16 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 6 & 33 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & 16 & 3 \end{pmatrix}$$

$$U[3] \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & 16 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 16 & 3 \end{pmatrix}$$

Vereinfacht ausgedrückt:

G1.	Addition des z-fachen der Zeile i zur Zeile j	$T[i,j,z] \cdot A$
G2.	Multiplizieren der Zeile i mit einer Zahl z	$T[i,i,z] \cdot A$
G3.	Vertauschen der Zeilen i und j	$S[i,j] \cdot A$
G4.	Streichen der Nullzeile i (eine Zeile deren Einträge alle Null sind).	$U[i] \cdot A$

Satz 7.4.14:
Zu jeder $m \times n$-Matrix A gibt es eine invertierbare $m \times m$-Matrix C, so dass $C \cdot A$ Zeilenstufenform hat.

Korollar 7.4.15:
Zu jeder $m \times n$-Matrix A gibt es eine invertierbare $m \times m$-Matrix C und eine invertierbare $n \times n$-Matrix D und eine Zahl $r \leq \min\{m, n\}$, so dass $C \cdot A \cdot D = E_r$, wobei E_r die Matrix ist, deren erste r Diagonaleinträge gleich 1 sind und deren übrige Einträge gleich 0 sind.

Zu den Dimensionen der Matrix:
$C^{m \times m} * A^{m \times n} * D^{n \times n} = E^{m \times n}$

Kurz: Für jede Matrix A kann man zwei invertierbare Matrizen konstruieren, mit denen man die Matrix A zur Einheitsmatrix umformen kann.

Zeilen- und Spaltenrang (7.4.16):
Spalten und Zeilen einer Matrix A m x n kann man sich auch vorstellen als:
Zeilen: Vektoren $A_{(1)},\dots,A_{(m)}$ aus dem Raum R^n
Spalten: Vektoren $A_{(1)},\dots,A_{(n)}$ aus dem Raum R^m
Dann ist der Zeilen-, bzw. Spaltenrang die Anzahl der jeweiligen Vektoren:

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sei der ***Zeilenrang*** von A definiert als

$$\dim\left(\text{span}\left(A_{(1)}, \dots, A_{(m)}\right)\right)$$

und der ***Spaltenrang*** von A definiert als

$$\dim\left(\text{span}\left(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\right)\right)$$

Bemerkung:
Wir haben als das Bild von A den Aufspann der Spaltenvektoren $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ definiert. Also ist der Spaltenrang gleich $\dim(\text{Bild}(A))$.

Korollar 7.4.18:
Für jede Matrix A stimmen Zeilen- und Spaltenrang überein.

Irgendwie komisch, aber kann man wohl einfach akzeptieren
--> Man kann vom Rang der Matrix A reden

Korollar 7.4.21:

Sei A eine $m \times n$-Matrix vom Rang r. Sei l die Dimension des Kerns von A.

- Dann gilt $n = r + l$.
- Ferner ist A genau dann invertierbar, wenn $m = n = r$.

Bestimmung einer inversen Matrix (Beispiel 7.4.22)
Man kann die Inverse Matrix bestimmen, indem die zu invertierende Matrix neben eine Einheitsmatrix Matrix schreibt und die zu invertierende Matrix dann zu einer Einheitsmatrix Matrix umformt. Alle durchgeführten Schritte werden mit beiden Matrizen gemacht, die inverse Matrix A^{-1} ist das Ergebnis aller Umformungsschritte an der Einheitsmatrix

(siehe Beispiel 7.4.22)

Die Determinante

Einer quadratischen Matrix A^{nxn} wird eine reelle Zahl zugewiesen, die Aussage über bestimmte Eigenschaften der Matrix macht.

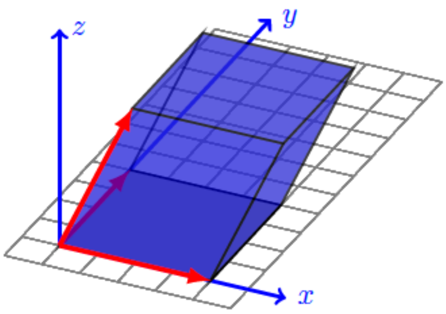
- Es gilt $\det(A) = 0$ genau dann wenn die Spalten von A linear abhängig sind.
- Die Determinante ist multilinear (dies Hilft beim Berechnen per Gauß-Verfahren).
- Die Determinante lässt sich...
  - per Zeilen- oder Spaltenentwicklung berechnen
    (Verfahren hat theoretische Bedeutung, in der Praxis nur für kleine Matrizen geeignet)
  - per Gauß-Verfahren berechnen
    (Verfahren hat große praktische Bedeutung).

Definition 8.1.2:
Für n Vektoren $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ sei

$$\mathsf{P}(\{a_1, \ldots, a_n\}) := \{\lambda_1 \cdot a_1 + \ldots + \lambda_n \cdot a_n \;:\; 0 \le \lambda_1, \ldots, \lambda_n \le 1\}.$$

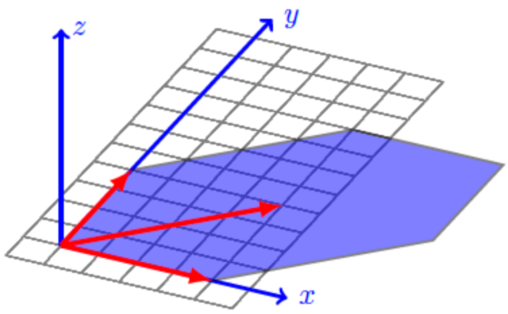
Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Spalten $A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}$ schreibt man auch kurz $\mathsf{P}(A)$ für $\mathsf{P}(\{A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}\})$

Geometrische Interpretation der Determinanten (Beispiel 8.1.2):



Das Parallelotop P $\left(\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right)$

Volumen ist $8 =$ Höhe 2 mal Grundfläche 4



Das Parallelotop P $\left(\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right)$ ist **flach**.

Volumen ist 0

Sind die $A^{(1)}, \ldots A^{(n)}$ linear **un**abhängig so ist $\mathsf{P}(A)$ das Parallelotop mit Kanten parallel zu den $A^{(i)}$.
Sind die $A^{(1)}, \ldots A^{(n)}$ linear **ab**hängig so ist $\mathsf{P}(A)$ ***flach***.

Lemma 8.1.3 WICHTIG!

In einer quadratischen Matrix A sind die Spalten linear **ab**hängig genau dann wenn $\det(A) = 0$ gilt.

Um zu bestimmen, ob die Spalten einer Matrix A linear unabhängig sind, reicht es zu zeigen, dass die Determinante der Matrix det(A) ≠ 0

Berechnung der Determinante kommt später

Permutation (8.2.1):

- Eine Permutation der Länge n ist eine Bijektion $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.
- Wir schreiben eine Permutation auch als $[\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)]$.
- Wir bezeichnen die Menge aller Permutationen der Länge n mit S_n.
- Es ist $|S_n| = n!$ (Beweis beispielsweise über vollständige Induktion.)
- Ferner definieren wir das ***Vorzeichen*** oder ***Signum*** von $\sigma \in S_n$ als

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}.$$

Sieht kompliziert aus, aber um das Vorzeichen einer Permutation zu bestimmen geht man folgendermaßen vor:

Bsp (8.2.2):

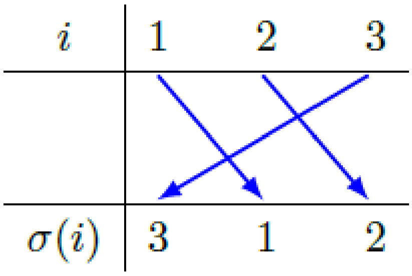
Sei $n = 3$, dann findet man:

$$S_3 = \{[123], [132], [213], [231], [312], [321]\}$$

Betrachtet man [312], so vergleicht man die Permutation mit der „Standardpermutation“ [123] und sieht, dass 3 auf die 1, 1 auf die 2 und die 2 auf die 3 abgebildet wird. Formal:

$\sigma(1) = 3$
$\sigma(2) = 1$
$\sigma(3) = 2$

Man kann schreiben:



Jetzt zählt man die Anzahl an Kreuzungen, die zwischen den Pfeilen auftreten. Ergebnis:
Zwei Kreuzungen --> Zwei Fehlstellungen
Anzahl der Fehlstellungen ist <u>gerade</u> --> Vorzeichen der Permutation ist 1 (bei <u>ungerader</u> Anzahl an Fehlstellungen ist Vorzeichen -1)

Lemma 8.2.3:
Es gilt:

- Für alle $\sigma \in S_n$ ist $\text{sign}(\sigma) \in \{-1, 1\}$.
- Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ ist $\text{sign}(\sigma \circ \tau) = \text{sign}(\sigma) \cdot \text{sign}(\tau)$.

Definition der Leibnitz-Formel (8.2.4):
Die ***Determinante*** einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)}.$$

(Extrem hässlich im Skript. Einfach die Rechenart für die Sonderfälle n=2 und n=3 lernen und dann größere Matrizen auf diese Fälle „runterbrechen“. Kommt gleich)

Eigenschaften der Determinante (8.2.6): WICHTIG!

Seien A, B, C drei $n \times n$-Matrizen. Die Determinante hat die folgenden Eigenschaften

DET1. $\det(\mathrm{id}) = 1$.

DET2. Falls A zwei identische Zeilen hat, gilt $\det(A) = 0$.

DET3. Die Determinante ist linear in jeder Zeile, d.h. die beiden folgenden Bedingungen sind erfüllt.

- Angenommen es gibt ein $i \in \{1, \ldots, n\}$, so dass $A_{(i)} + B_{(i)} = C_{(i)}$, während $A_{(h)} = B_{(h)} = C_{(h)}$ für alle $h \neq i$. Dann gilt $\det(A) + \det(B) = \det(C)$.
- Angenommen es gibt ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ und ein $z \in \mathbb{R}$ so dass $B_{(i)} = z \cdot A_{(i)}$, während $B_{(h)} = A_{(h)}$ für alle $h \neq i$. Dann gilt $\det(B) = z \cdot \det(A)$.

Insbesondere gilt $\det(A) = 0$ wenn A eine Zeile hat, die nur aus 0en besteht.

DET4. Wenn B aus A durch Vertauschen von zwei Zeilen entsteht, gilt $\det(B) = -\det(A)$.

DET5. Seien $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ verschieden und $z \in \mathbb{R}$. Wenn B aus A durch Addition des z-fachen der $i$ten Zeile zur j-ten Zeile entsteht, gilt $\det(B) = \det(A)$.

DET6. Wenn A in Zeilen-Stufen-Form ist, gilt $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}$.

DET7. Es gilt $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

DET8. Die Matrix A ist invertierbar genau dann, wenn $\det(A) \neq 0$. In diesem Fall gilt $\det(A) = \det(A^{-1})^{-1} = \frac{1}{\det(A^{-1})}$.

DET9. Es gilt $\det(A^T) = \det(A)$.

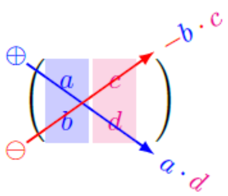
Anmerkungen:

- Im Allgemeinen gilt nicht $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
- Die Eigenschaft **DET6** ist wenig überraschend. Jede andere Permutation als die Identität, welche zu dem Produkt der Diagonaleinträgen korrespondiert, involviert in dem Produkt mindestens ein Element unterhalb der Diagonalen. Diese Einträge sind allerdings bei einer Matrix in Zeilen-Stufen-Form alle gleich 0.
- Die Eigenschaft **DET1** folgt direkt aus Eigenschaft **DET6**, weil id in Zeilen-Stufen-Form ist.
- Aufgrund von **DET9** gelten **DET2-DET6** auch entsprechend für die Spalten der Matrix.

Determinantenberechnung Spezialfällte:

Matrix ist 2x2 Matrix (8.3.1):

Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ dann lässt sich $\det(A)$ über das Bilden von 2 Summanden berechnen:

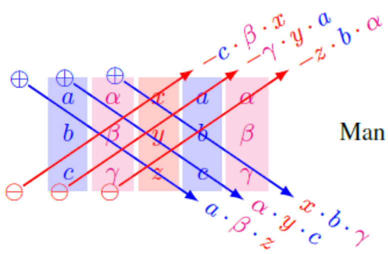


Man erhält $\det(A) = a \cdot d - b \cdot c$

Matrix ist 3x3 Matrix (Sarrusregel) (8.3.3):

Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A = \begin{pmatrix} a & \alpha & x \\ b & \beta & y \\ c & \gamma & z \end{pmatrix}$ dann lässt sich $\det(A)$ über das Bilden von 6 Summanden berechnen.

Für das Ermitteln der Summanden schreibt man die drei Spalten von A in ein Schema und wiederholt die ersten beiden Spalten. Dann bildet man drei "Abwärts-Produkte" mit positivem Vorzeichen, und drei "Aufwärts-Produkte" mit negativem Vorzeichen. Die Determinante ist dann die Summe dieser 6 Produkte:



Man erhält: $\det(A) = \begin{cases} a\cdot\beta\cdot z & +\alpha\cdot y\cdot c \quad +x\cdot b\cdot\gamma \\ -c\cdot\beta\cdot x & -\gamma\cdot y\cdot a \quad -z\cdot b\cdot\alpha \end{cases}$

Determinante durch Entwicklung nach Zeilen und Spalten (Streichungsmatrix) (8.3.4):

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}\times\mathbf{n}}$ und zwei Indices $k, \ell \in \{1, \ldots, n\}$

ist die *Streichungsmatrix* $A^{\cancel{k,\ell}} \in \mathbb{R}^{(\mathbf{n-1})\times(\mathbf{n-1})}$ die jenige Matrix, die aus A hervorgeht durch

Streichen der k-ten Zeile und Streichen der ℓ-ten Spalte :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,\ell-1} & A_{1,\ell} & A_{1,\ell+1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ A_{k-1,1} & \cdots & A_{k-1,\ell-1} & A_{k-1,\ell} & A_{k-1,\ell+1} & \cdots & A_{k-1,n} \\ A_{k,1} & \cdots & A_{k,\ell-1} & A_{k,\ell} & A_{k,\ell+1} & \cdots & A_{k,n} \\ A_{k+1,1} & \cdots & A_{k+1,\ell-1} & A_{k+1,\ell} & A_{k+1,\ell+1} & \cdots & A_{k+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,\ell-1} & A_{n,\ell} & A_{n,\ell+1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$A^{\cancel{k,\ell}} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,\ell-1} & A_{1,\ell+1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{k-1,1} & \cdots & A_{k-1,\ell-1} & A_{k-1,\ell+1} & \cdots & A_{k-1,n} \\ A_{k+1,1} & \cdots & A_{k+1,\ell-1} & A_{k+1,\ell+1} & \cdots & A_{k+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,\ell-1} & A_{n,\ell+1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

Lemma 8.3.6:

Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- Falls $n = 1$ gilt, so hat $A = (A_{1,1})$ genau einen Eintrag $A_{1,1} \in \mathbb{R}$ und des gilt $\det(A) = A_{1,1}$
- Falls $n > 1$ gilt, so können wir eine Spalte $\ell \in \{1, \ldots, n\}$ wählen und nach dieser Spalte die Determinante *entwickeln*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+\ell} A_{i,\ell} \cdot \det\left(A^{\cancel{i,\ell}}\right)$$

Berechnung der Determinanten:

Wähle eine Zeile oder Spalte aus und erstelle Alle Streichungsmatrizen für diese Zeile. addiere oder subtrahiere die Determinante der Restlichen Einträge multipliziert mit dem Kreuzungspunkt $A_{i,j}$ der Streichungsmatrix.

Vorzeichenmatrix:

Hilfreich zum Ermitteln des korrekten Vorzeichens ist eine "Vorzeichen-Matrix": Man trägt in einer Matrix in Zeile i und Spalte ℓ nur das Vorzeichen von $(-1)^{i+\ell}$ ein, dies sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \quad \text{für } \mathbb{R}^{3\times 3} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix} \quad \text{für } \mathbb{R}^{4\times 4}$$

Bsp:

Es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$. Entwickelt man die Determinante nach der zweiten Spalte so erhält man:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (-1) \cdot 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} + (1) \cdot 5 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} + (-1) \cdot 6 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \\
&= -4 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \quad +5 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \quad -6 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \\
&= -4 \cdot (2 \cdot 9 - 3 \cdot 8) \quad 5 \cdot (1 \cdot 9 - 3 \cdot 7) \quad 6 \cdot (1 \cdot 8 - 2 \cdot 7)
\end{aligned}$$

Hilfreiche Tricks:

Tipp 8.3.11:

Das rekursive Enwickeln einer Determinante nach einer Zeile oder Spalte ist für "große" Matrizen im Allgemeinen schlicht *nicht* möglich. Für Matrizen mit vielen Null-Einträgen ist dies aber weiterhin möglich:

Bsp zu 8.3.11:

Beim Entwickeln der Determinante nach einer Spalte (bzw. Zeile) sollte man eine Spalte (bzw. Zeile) mit vielen Nulleinträgen wählen. Hierdurch veringert sich der Rechenaufwand erheblich!

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entwickeln nach Zeile 3, dann nach Original-Zeile 4 und dann nach Original-Zeile 5 liefert:

$$\det(A) = +1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = +1 \cdot 2 \det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 8 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = +1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinante mittels Gauß:

Determinante kann auch mittels Umformung der Matrix gemacht werden, wenn man dabei die Anzahl der Zeilenvertauschungen k Zählt:

(Pro Zeilenvertauschung wird die Determinante mit (-1) multipliziert: det(A) = det(B) * $(-1)^k$

Wir möchten die Determinante von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Nach Gauß addieren wir die ersten Zeilen zur zweiten und dritten Zeile; wegen **DET5** ändert sich die Determinante dabei nicht:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Um die Matrix in Zeilen-Stufen-Form zu bringen, bruachen wir nur noch die zweite und dritte Zeile zu tauschen. Dies ergibt

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun zeigt **DET6**, dass $\det(B) = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$. Die Gesamtzahl der Zeilenvertauschungen, die wir durchgeführt haben, ist $k = 1$. Also zeigt **DET4**, dass $\det(A) = (-1)^k \det(B) = -\det(B) = -2$.

Orthogonalität

Skalarprodukt (9.1.1):

Es seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ dann ist das ***Skalarprodukt*** der beiden v und w definiert als

$$\langle v, w \rangle := v_1 \cdot w_1 + \ldots + v_n \cdot w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i.$$

Anmerkung:

Skalarprodukt ist Formal eine Matrix-Matrix Multiplikation mit zwei Vektoren

- Man beachte, dass das **Skalarprodukt eine *Zahl* berechnet**.
- Das Skalarprodukt ist gleich dem Matrix-Matrix-Produkt des transponierten Vektors v^T und w, es ist:

$$\langle v, w \rangle = v^T \cdot w = (v_1, \ldots, v_n) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Euklidische Norm (9.1.4):

Für $v \in \mathbb{R}^n$ ist die ***euklidische Norm*** definiert als

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}.$$

Geometrische Interpretation:

- Die euklidische Norm eines Vektors entspricht geometrisch seiner Länge.
- **F:** Warum wird die Länge eines Vektors mit Doppelstrichen angegeben?
  A: Um den Unterschied zum Betrag einer Zahl klar darzustellen (z.B. $|-3|$)

Bsp:

Es gilt: $\left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Cauchy-Schwarz-Ungleichung (9.1.7):

Für Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt stets

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

Rechenregeln für Skalarprodukt (9.1.8):

Es seien $v, w, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ dann gelten:

i.	$\langle v, y\rangle$	$=$	$\langle y, v\rangle$	(Symmetrie)
ii.	$\langle v+w\ ,\ y\rangle$	$=$	$\langle v\ ,\ y\rangle\ +\ \langle w\ ,\ y\rangle$	(Additivität im ersten Eintrag)
iii.	$\langle v+w\ ,\ y\rangle$	$=$	$\langle v\ ,\ y\rangle\ +\ \langle w\ ,\ y\rangle$	(Homogenität im ersten Eintrag)

Bemerkung (keine Ahnung warum das nicht Teil von 9.1.8 ist) (9.1.9):

Wegen der Symmetrie gilt sofort, dass das Skalarprodukt auch linear, also additiv und homogen im zweiten Eintrag ist:

$$\langle y\ ,\ w+v\rangle = \langle y\ ,\ v\rangle\ +\ \langle y\ ,\ w\rangle$$

$$\langle y\ ,\ \lambda\cdot v\rangle = \lambda\cdot\langle y\ ,\ v\rangle$$

Rechenregeln für Norm (9.1.10):

Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten:

i.	$\|v\|$	$=$	0	$\Leftrightarrow$	$v=0$	(Definitheit)
ii.	$\|v+w\|$	$\leq$	$\|v\|+\|w\|$			(Dreiecksungleichung)
iii.	$\|\lambda\cdot v\|$	$=$	$\lvert\lambda\rvert\cdot\|v\|$			(Absolute Homgenität)

Geometrische Interpretation des Skalarprodukts (9.1.11):

Zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ heißen *orthogonal*, wenn gilt

$$\langle v\ ,\ w\rangle = 0.$$

Anmerkungen:

Der Nullvektor ist ein Sonderfall, da alle Vektoren nach dieser Definition orthogonal zum Nullvektor stehen.

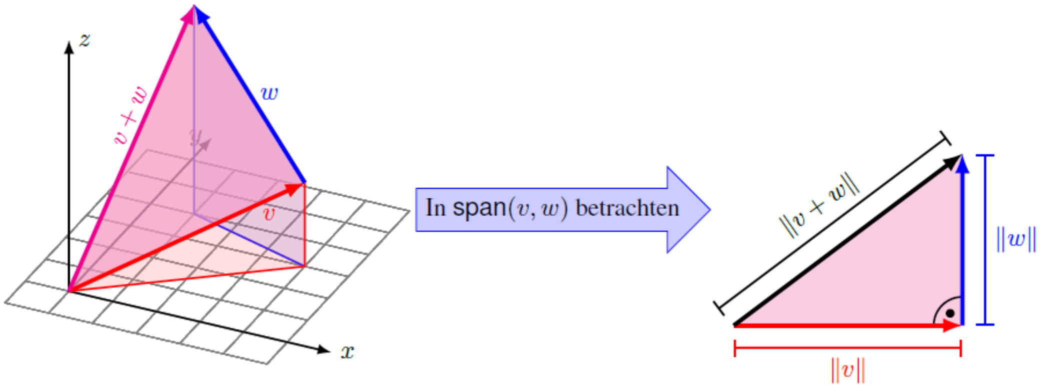
Geometrisch zur Orthogonalität (Lemma 9.1.13 / 9.1.14):

Orthogonalität bedeutet geometrisch, dass die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Dies kann durch folgende Gleichung ausgedrückt werden:

Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\langle v, w\rangle = \frac{\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2}$$

Geometrisch zu 9.1.13:



Phytagoras: $\|v\|^2 + \|w\|^2 = \|v+w\|^2$

Abbildung 9.1.: Phytagoras für Dreiecke im $\mathbb{R}^3$

Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren:

Es seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in [0, \pi]$ der Winkel, der zwischen v und w eingeschlossen wird, dann gilt:

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\alpha)$$

Orthonormalbasen (9.2.1): Basen eines Vektorraums, dessen Vektoren alle senkreicht aufeinander stehen (alle orthogonal zu einander sind)

- Wir nennen zwei Vektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ ***orthogonal***, falls $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$.(Definition 9.1.11)
- Allgemeiner heißen Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ ***orthogonal***, wenn alle paarweise verschiedenen Vektoren v_i, v_j orthogonal sind.
- Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$ ist $w = \frac{v}{\|v\|}$ der zu v gehörige ***normierte*** Vektor. Ein Vektor, für den gilt $w = v$, wird auch als normierter Vektor bezeichnet.
- Ferner heißen $v_1, \ldots, v_k$ ***orthonormal***, wenn $v_1, \ldots, v_k$ orthogonal und normierte Vektoren sind.
- Sei V ein Vektorraum mit $\dim(V) = k$. Wir nennen $v_1, \ldots, v_k$ eine ***Orthonormalbasis*** von V, falls $v_1, \ldots, v_k$ orthonormal sind.

WICHTIGE Begriffe:

normiert:
Jeder Eintrag des Vektors wurde durch seine Länge geteilt, sodass die neue Länge des normierten Vektors genau 1 ist

orthonormal:
Die betrachteten Vektoren sind alle normiert und orthogonal zueinander

Orthonormalbasis:
k viele Vektoren im Vektorraum mit dim(V) = k, die alle orthogonal zueinander stehen und normiert sind.
(Orthogonal zueinander stehende Vektoren können nicht linear abhängig sein --> nicht nötig diesen Fall zu betrachten)

Bemerkung 9.2.2:

- Für einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ gilt, dass der zugehörige normierte Vektor $w = \frac{v}{\|v\|}$ die Norm $\|w\| = 1$ hat und in die selbe Richtung wie v zeigt. Außerdem ist $\langle w, v\rangle = \frac{1}{\|v\|} \cdot \langle v, v\rangle = \frac{\|v\|^2}{\|v\|} = \|v\|$.
- In der Definition von Orthonormalbasen von Vektorräumen, fehlt die Bedingung, dass die Vektoren linear unabhängig sein müssen. Da sie orthonormal sind, sind sie auf jeden Fall ungleich 0 (dem Nullvektor). Wir werden in Lemma 9.2.4 sehen, dass orthogonale Vektoren, welche alle ungleich 0 sind, linear unabhängig sind.

Lemma 9.2.4:

Wenn die Vektoren $v_1, \dots, v_k$ alle ungleich 0 und orthogonal sind, dann sind sie linear unabhängig.

Lemma 9.2.5:

Jeder reelle Vektorraum V hat eine Orthonormalbasis.

Orthogonales Komplement (9.2.6):

Menge aller Vektoren eines Untervektorraums W, die Orthogonal zu W stehen

Sei V ein Vektorraum und $W \subset V$ ein Untervektorraum. Das ***orthogonale Komplement*** von W in V ist

$$W^\perp = \{v \in V : \langle v, w\rangle \forall w \in W\}.$$

W ist Untervektorraum von V, also hat V mehr Vektoren als W

W orthogonal ist die Menge aller Vektoren, die orthogonal zu den Vektoren aus W sind

(in der Skriptversion fehlt wahrscheinlich <v,w> = 0)

Lemma 9.2.7:

Die Menge $W^\perp$ ist ein Untervektorraum von V.

Proposition 9.2.8.:

Sei V ein Vektorraum und $W \subset V$ ein Untervektorraum. Die Abbildung

$$f : W \times W^\perp \to V,$$

$$(w_1, w_2) \mapsto w_1 + w_2$$

ist bijektiv und es gilt

$$\dim(W) + \dim(W^\perp) = dim(V).$$

Etwas verwirrend, aber die Vektorräume multipliziert ergeben wohl wieder den originalen Vektorraum

Orthogonale Abbildungen (9.3.2)

Eine $n \times n$-Matrix A heißt ***orthogonal***, wenn $A^T \cdot A = \mathrm{id}$.

Besondere Bedeutung des Skalarprodukts:

Das Skalarprodukt spielt in diesem Zusammenhang eine besondere Rolle.

- Ist A eine $n \times n$-Matrix und sind $v, w \in \mathbb{R}^n$ so gilt

$$\langle A \cdot v, w\rangle = \langle v, A^T \cdot w\rangle,$$

  wie man leicht nachrechnet.
- In der Tat ist A^T die einzige Matrix mit dieser Eigenschaft: Wenn B eine Matrix ist, so dass

$$\langle A \cdot v, w\rangle = \langle v, B \cdot w\rangle,$$

  für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$, so gilt $B = A^T$.

Kongruenzabbildungen (9.3.5):

Orthogonale Matrizen erhalten bei Multiplikation mit einem Vektor das Skalarprodukt, bzw. die euklidische Norm.

Wenn A eine orthogonale Matrix ist, dann gilt

$$\langle A \cdot v, A \cdot w\rangle = \langle v, w\rangle$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$. Ferner ist A^T orthogonal.

Scheinbar gilt für orthogonale Matrizen:

$A = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = (A^T)^T$

Lemma (9.3.6):

Wenn A, B orthogonale $n \times n$-Matrizen sind, dann ist $A \cdot B$ orthogonal.

Anmerkung aus Graphischer Darstellung nach 9.3.6:

Orthogonale Abbildungen (Vektorraum V --> V´) sind <u>Längen-</u> und <u>Winkelerhaltend</u>

Nicht orthogonale Abbildungen (Vektorraum V --> V´) sind **nicht** <u>Längen-</u> und <u>Winkelerhaltend</u>

Eigen und Singulärwerte

Eigenwerte (10.0.8):
Sei A eine $n \times n$-Matrix.

- Eine reelle Zahl k heißt ***Eigenwert*** von A, wenn es einen Vektor $v \neq 0$ gibt, so dass $A \cdot v = k \cdot v$.
- Entsprechend heißt ein Vektor v ***Eigenvektor*** von A zum Eigenwert k, falls $A \cdot v = k \cdot v$.
- Ferner heißt die Menge aller Eigenvektoren von A zum Eigenwert k ***Eigenraum*** von A zum Eigenwert k. Man schreibt
$$\mathsf{ER}_k(A) = \{v \in \mathbb{R}^n : A \cdot v = k \cdot v\}.$$

Bedeutung: Alle Vektoren, die mit A multipliziert nicht ihre Richtung ändern (also nur ihre Länge ändern (Streckung, Stauchung oder auch keine Änderung)) heißen **Eigenvektoren**.

Der Faktor um den die Länge eines Eigenvektors modifiziert wird heißt **Eigenwert**

Menge aller Vektoren, deren Länge sich um den Eigenwert modifiziert heißt **Eigenraum**

Lemma 10.0.10:
Es sei k ein Eigenwert einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Der Eigenraum $\mathsf{ER}_k(A)$ zum Eigenwert k ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

Berechnung von Eigenwerten:
$$(A - k \cdot \mathrm{id}) \cdot v = 0$$

Wichtige Bemerkung:
Wenn für k Eigenwerte existieren, dann gibt es für v mehr als nur die Triviale Lösung
--> der Rang von A ist < n (?)
--> A ist nicht invertierbar

Regelungen/Beobachtungen:
Mittels der Determinanten kann man bestimmen ob eine Matrix invertierbar ist (**DET8**)
--> Matrix A ist invertierbar, wenn det(A) ≠ 0

Folgerung:
- Wenn $\det(A - k \cdot \mathrm{id}) = 0$ ist, dann ist $A - k \cdot \mathrm{id}$ nicht invertierbar und k ist ein Eigenwert von A.
- Wenn $\det(A - k \cdot \mathrm{id}) \neq 0$ ist, dann ist $A - k \cdot \mathrm{id}$ invertierbar und k ist kein Eigenwert von A.

Charakteristisches Polynom (10.1.3):
Sei A eine $n \times n$-Matrix. Dann heißt char_A das ***charakteristische Polynom*** von A.

Lemma (10.1.4)
Eine reele Zahl k ist genau dann ein Eigenwert von einer $n \times n$-Matrix A, wenn $\mathsf{char}_A(k) = 0$.

Berechnung des charakteristischen Polynoms (Bsp 10.1.5):

Für unsere Beispielmatrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ berechnet sich das charakteristische Polynom char_A wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathsf{char}_A(k) = \det(A - k \cdot I) &= \det\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - z \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} 3-k & 2 \\ 1 & 2-k \end{pmatrix}\right) \\ &= (3-k) \cdot (2-k) - 1 \cdot 2 \\ &= k^2 - 5z + 4 \end{aligned}$$

p-q Formel oder Polynom zu (k - 4) * (k - 1) auflösen:

Die Eigenwerte von A sind also $k_1 = 1$ und $k_2 = 4$.

Diagonalisierbarkeit (10.2.1):

Eine $n \times n$-Matrix A heißt ***symmetrisch***, wenn $A^T = A$.

Satz 10.2.2:

Zu jeder symmetrischen $n \times n$-Matrix A existieren

- eine orthogonale $n \times n$-Matrix U
- reelle Zahlen $k_1, \ldots, k_n$ (nicht notwendigerweise verschieden)

so dass

$$U^T \cdot A \cdot U = \mathrm{diag}(k_1, \ldots, k_n).$$

Dabei sind

- die Zahlen $k_1, \ldots, k_n$ genau die Eigenwerte von A
- die Spalten von U eine Orthonormalbasis, die aus Eigenvektoren von A besteht.

Siehe Bsp (10.2.5):

Hat man die Eigenwerte einer Matrix mithilfe der Berechnung der Nullstellen von char_A(k) bestimmt, kann man die Nullstellen in die Gleichung (A – (k*id)) * v = 0 schreiben und die Gleichung nach v lösen.

Damit erhält man den/die Einheitsvektoren und kann den Eigenraum für k bilden

Diagonalisierbarkeit:

Für jede Matrix A existieren zwei orthogonale Matizen V und U, mit denen A diagonalisiert werden kann:

Sei A eine $m \times n$-Matrix. Dann existieren eine orthogonale $m \times m$-Matrix V, eine orthogonale $n \times n$-Matrix U und eine $m \times n$-Matrix in Diagonalform, so dass $V^T \cdot A \cdot U = D$.

Definition 10.3.2:

Die Darstellung $A = V \cdot D \cdot U$ aus Satz $\boxed{10.3.1}$ nennt sich die ***Singulärwertzerlegung von*** A. Die Diagonaleinträge der Matrix D heißen entsprechend die ***Singulärwerte von*** A.

3. Analysis

Folgen und Reihen

Folgen (11.1.1):

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, der Form $n \mapsto a_n$. Man schreibt die Folge in der Form $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Die a_n werden als Folgenglieder bezeichnet.

Schreibweisen von Folgen (11.1.2):

Eine Folge kann auf verschiedene Weisen angegeben werden.

- Aufzählend (z.B. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots)$)
- Definierend (z.B. $a_n := \frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$)
- Rekursiv durch einen Startwert und eine Rekursionsgleichung (z.B. $a_1 = \frac{1}{2}$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n$)

Bsp:

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$ der natürlichen Zahlen lässt sich tatsächlich auf alle drei unterschiedlichen Weisen angeben:

- Definierend ist $a_n := n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- Rekursiv durch (einen) Startwert(e) und eine Rekursionsgleichung, zum Beispiel:
  - $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$
  - $a_1 = 1, a_2 = 2$ und $a_{n+2} = a_n + 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Definition des Limes/Grenzwerts (11.1.4):

Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt ***Grenzwert*** oder ***Limes*** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \ : \ \exists N \in \mathbb{N} \ : \ |a_n - x| \leq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$$

In diesem Fall schreibt man $x = \lim_{n\to\infty} a_n$ an und sagt, dass "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen x konvergiert*".

Umgangssprachlich: x ist ein Grenzwert, wenn für eine Folge ein beliebig kleines ε gewählt werden kann und für jedes beliebige ε eine Zahl N existiert, ab der (alle Reihenglieder ab N, N eingeschlossen) alle folgenden Reihenglieder näher an x sind, als ε

Schranken einer Folge (11.1.7):
Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Menge reeller Zahlen.

- Wir nennen eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ eine ***obere Schranke für*** A, falls für alle $a \in A$ gilt $a \leq x$.
- Analog heißt $y \in \mathbb{R}$ eine ***untere Schranke für*** A, falls für alle $a \in A$ gilt $a \geq y$.
- Die Menge A heißt ***nach oben/unten beschränkt***, falls sie eine obere/untere Schranke hat. Falls beides zutrifft, nennt man A einfach ***beschränkt***.
- Sei A eine nach oben beschränkte Menge. Wir nennen $x \in \mathbb{R}$ das ***Supremum von*** A, falls x eine obere Schranke von A ist und für jede obere Schranke z von A gilt $z \geq x$. Man schreibt dann $\sup(A) = x$ (verkürzend schreibt man manchmal $\sup A = x$).
- Entsprechend heißt $y \in \mathbb{R}$ das ***Infimum einer nach unten beschränkten Menge*** A, falls y eine untere Schranke von A ist und für jede untere Schranke z von A gilt $z \leq y$. Man schreibt dann $\inf(A) = y$ (verkürzend schreibt man manchmal $\inf A = y$).

Lemma 11.1.8:
Jede nach oben beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}$ hat ein Supremum, und jede nach unten beschränkte Menge hat ein Infimum.

Wachsende und Fallende Folgen (11.1.10):
Wir nennen eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***nach oben/unten beschränkt***, falls die Menge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ diese Eigenschaft hat. Ferner heißt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- *monoton wachsend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \leq a_{n+1}$
- ***streng** monoton wachsend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n < a_{n+1}$
- *monoton fallend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n \geq a_{n+1}$
- ***streng** monoton fallend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n > a_{n+1}$

Proposition 11.1.12:
Sei $(a_n)_{n\in N}$ eine Folge.

- Wenn $(a_n)_{n\in N}$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, dann konvergiert diese Folge gegen $\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.
- Wenn $(a_n)_{n\in N}$ monoton fallend und nach unten beschränkt ist, dann konvergiert diese Folge gegen $\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Ist eine Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt, dann konvergiert sie gegen den Größten Wert der Folge. Gilt umgekehrt analog für monoton fallende Folgen.

Definition 11.1.14:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge mit $m_n \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, die wir ***Teilfolge von*** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nennen.

Heißt sowas wie, man kann eine Folge von natürlichen Zahlen nutzen um aus einer Folge eine Teilfolge zu „extrahieren". Die Nummerierung einer Folge kann also auch eine Folge sein.

Lemma 11.1.16:

Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat entweder eine monoton wachsende oder eine monoton fallende Teilfolge.

Aus jeder beliebigen Folge kann immer wenigstens eine monoton wachsende oder monoton fallende Teilfolge extrahiert werden.

Bolzano-Weierstraß 11.1.17:

Jede beschränkte Folge enthält (mindestens) eine konvergente Teilfolge.

Cauchyfolge (11.1.18):

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt ***Cauchyfolge***, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \quad : \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad : \quad |a_n - a_m| \leq \varepsilon \quad \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq N$$

Sehr ähnlich der Definition des Grenzwerts. In den Reihen, die in der Vorlesung dran kommen (Reihen aus reellen Zahlen) keinen Unterschied zwischen Grenzwert und Cauchyfolgen. Sind erst interessant, wenn der Zahlenbereich erweitert wird (z.B. Bereich der Komplexen Zahlen)

Anmerkung (11.1.19):

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Berechnungen von Grenzwerten:

Lemma 11.2.1:

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit Grenzwerten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b$$

Dann gilt:

- **Addition** $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$ sowie
  $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b$
- **Multiplikation** $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

Gilt zusätzlich $b \neq 0$ so folgt

- **Division** $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Berechnen des Grenzwertes aus Polynomen:

Für rationale Funktionen (Brüche aus Polynomen) in $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein einfaches Verfahren zum Berechnen des Grenzwertes:

1. Finde die größte im Nenner auftretende Potenz n^k und *kürze* den Bruch mit dieser.
2. Berechne den Grenzwert unter Verwendung von $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} n^k = \infty$ und

Bsp 11.2.3:

Es sei $a_n := \frac{8\cdot n^2 + 3\cdot n^3}{3\cdot n + 2\cdot n^4}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8\cdot n^2 + 3\cdot n^3}{3\cdot n + 2\cdot n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{(8\cdot\frac{1}{n^2} + 3\cdot\frac{1}{n})\cdot n^4}{(3\cdot\frac{1}{n^3} + 2\cdot 1)\cdot n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{(8\cdot\frac{1}{n^2} + 3\cdot\frac{1}{n})}{(3\cdot\frac{1}{n^3} + 2\cdot 1)} = \frac{0+0}{0+2} = 0$$

Denn es gelten: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$

Bsp2:

Es sei $a_n := \frac{8\cdot n^2 + 3\cdot n^4}{3\cdot n + 2\cdot n^4}$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8\cdot n^2 + 3\cdot n^4}{3\cdot n + 2\cdot n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{(8\cdot\frac{1}{n^2} + 3\cdot 1)\cdot n^4}{(3\cdot\frac{1}{n^3} + 2\cdot 1)\cdot n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{(8\cdot\frac{1}{n^2} + 3\cdot 1)}{(3\cdot\frac{1}{n^3} + 2\cdot 1)} = \frac{0+3}{0+2} = 1.5$$

Bsp3:

Es sei $a_n := \dfrac{8 \cdot n^2 + 3 \cdot n^5}{3 \cdot n + 2 \cdot n^4}$. Dann gilt:

$$a_n = \frac{8 \cdot n^2 + 3 \cdot n^5}{3 \cdot n + 2 \cdot n^4} = \frac{(8 \cdot \frac{1}{n^2} + 3 \cdot n) \cdot n^4}{(3 \cdot \frac{1}{n^3} + 2 \cdot 1) \cdot n^4} = \frac{(8 \cdot \frac{1}{n^2} + 3 \cdot n)}{(3 \cdot \frac{1}{n^3} + 2 \cdot 1)} \geq \frac{8 \cdot 0 + 3 \cdot n}{3 \cdot 1 + 2 \cdot 1} = \frac{3}{5} \cdot n$$

Es gilt also $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$, denn die Folge ist monoton wachsend und unbeschränkt.

Anmerkung:
Rechnen mit ꝏ ist nicht möglich! Um ꝏ auszudrücken muss immer ein lim n --> ꝏ definiert sein. Besonders die „Rechnung" ꝏ/ ꝏ ist nicht definiert

Reihen (11.3.1):
Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Wir definieren eine weitere Folge

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_n,$$

welche wir ***Reihe*** und deren Glieder wir ***Partialsummen*** nennen. Wenn die Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine Zahl

$S \in \mathbb{R}$ konvergiert, schreiben wir

$$S = \sum_{k_1}^{\infty} = \lim_{n \to \infty} A_n.$$

Man sagt dann auch, die Reihe konvergiert. Nicht konvergente Reihen heißen divergent. Man verwendet die Schreibweise $\sum_{n_1}^{\infty} a_n$ auch, um die Reihe zu bezeichnen.

Bedeutung: Eine Reihe ist die Summation aller bisher durchlaufenen Reihenglieder (Partialsummen).

Konvergierende Reihen heißen <u>konvergent</u>
Nicht Konvergierende Reihen heißen <u>divergent</u>

Bemerkung 11.3.2 WICHTIG!:

Vereinfacht ausgedrückt, ist eine *Reihe* also eine "Summe unendlich vieler Summanden". Wenn aber unendlich viele Werte addiert werden, kann der Wert dieser Summe auch unendlich groß werden und dadurch gar nicht existieren. Bei manchen Summen ist ihr Wert, oder sogar die Existenz des Wertes, unklar:

$$\begin{array}{llllllll} 1 & -1 & +1 & -1 & +1 & \pm\ldots & =? \\ 1 & +\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & +\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & +\ldots & =? \\ 1 & +\frac{1}{2^2} & +\frac{1}{3^2} & +\frac{1}{4^2} & +\frac{1}{5^2} & +\ldots & =? \end{array}$$

Bei solchen "unendlichen Summen" müssen wir also tatsächlich Grenzwerte betrachten, wie wir sie von Folgen bereits kennen.

Die Reihe muss nicht bei $k = 0$ oder $k = 1$ beginnen, sondern kann bei jeder *ganzen* Zahl $m \in \mathbb{Z}$ beginnen: Analog zu obiger Definition definiert man dann $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$.

Ändert man in einer Reihe (nur) *endlich viele* Summanden, so ändert sich das *Konvergenzverhalten* (Konvergenz oder Divergenz) nicht. Natürlich kann sich hierdurch der Wert der Reihe ändern (falls die die Reihe konvergiert, d.h. falls sie "überhaupt "einen Wert hat"). Gleiches gilt für das Weglassen oder Hinzufügen von *endlich vielen* Summanden.

Kernaussagen:

Nicht bei jeder Reihe ist klar, ob ihre Summe in der Unendlichkeit existiert

Ändert man in einer Reihe **endlich** viele Summanden (durch modifizieren, hinzufügen, abziehen), dann verändert sich das Konvergenzverhalten **nicht**

SEHR WICHTIG!

Es ist bei Reihen extrem wichtig, dass man in der Lage ist eine Reihe so umzuformen, dass man sie oder Teile von ihr ersetzten/vereinfachen kann, bzw. es ist möglich Reihen mit anderen bereits bekannten Reihen zu vergleichen.

So lassen sich Aussagen über Reihen treffen, die sonst nur sehr schwer zu ermitteln sind.

Bsp:
Es ist ungekannt ob Reihe A eine obere Schranke hat
Es ist bekannt, dass Reihe B eine obere Schranke besitzt
Wenn jetzt gezeigt werden kann, dass $A \leq B$ ist, hat man gezeigt, dass A eine obere Schranke besitzts

Beispiel 11.3.3:

- Es gilt

$$1 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)\cdot k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$$

Diese Reihe ist also *konvergent*. Denn wegen $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k}{(k-1)k} - \frac{k-1}{(k-1)k} = \frac{k-k+1}{(k-1)\cdot k}$ (ein Trick!) folgt für die Partialsumme bis $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-1)k} &= \sum_{k=2}^{N} \left(\frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{1} \underbrace{- \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N-1}}_{=0} - \frac{1}{N} = 1 - \frac{1}{N}\end{aligned}$$

Es folgt also

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{(k-1)k} \right) = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N} \right) = 1$$

Tricksen ist wichtig: 1/(k-1)k wird solange umgeformt, bis man zeigen kann, dass es das gleiche ist wie (1/(k-1)) – (1/k). Dann kann man der Originalterm, durch den zweiten ersetzen und stellt fest, dass sich die Zahlen beim Einsetzen paarweise wegkürzen.
--> die einzigen relevanten Ergebnisse sind 1 – 1/N
1/N wird in der Unendlichkeit 0, daher ist der Term in der Unendlichkeit 1

- Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$ ist *divergent*, denn die Folge der Partialsummen $0, 1, 3, 6, 10, 15, \dots$ ist divergent. Genauer gilt $\sum_{k=0}^{\infty} k = \infty$ wegen

$$\sum_{k=0}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2} \qquad \text{und} \qquad \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{N} k \right) = \lim_{N\to\infty} \frac{N(N+1)}{2} = \infty$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots$ ist *divergent*, denn die Folge der Partialsummen $1, 0, 1, 0, 1, \dots$ ist divergent, weil sie zwei Häufungspunkte hat (nämlich 1 und 0). Hier lässt sich als "Wert" für die Reihe nichts angeben, im Gegensatz zur ersten Reihe in diesem Beispiel.

Nachweise für die Konvergenz von Reihen:

Proposition (11.3.4):

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Korollar (11.3.5):

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn es eine reelle Zahl $0 < x < 1$ gibt, so dass $|a_n| \leq q^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Majorantenkriterium (11.3.6) WICHTIG!:

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$ eine konvergente Reihe mit Grenzwert $b \in \mathbb{R}$.

Gilt für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Abschätzung $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe über die a_n **konvergent** und es gilt:

$$0 \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n = b$$

Wie oben schon beschrieben. Wenn es eine „größere" Reihe gibt, die konvergiert, konvergieren auch kleinere Reihen.

Es ist wichtig, bekannte Reihen anpassen zu können.

Bsp 11.3.7:

Die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent, denn die konvergente Reihe $1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\cdot n}$ aus $\boxed{11.3.3}$ lässt sich als Majorante nutzen.

Um dies zu erreichen müssen wir die Folge $\frac{1}{(n-1)\cdot n}$ "vorne" ergänzen, weil dieser Bruch für $n = 0$ nicht definiert ist. Wir setzen:

$$b_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1 \\ \dfrac{1}{(n-1)\cdot n} & \text{sonst} \end{cases}$$

Für die Folge $a_n := \frac{1}{n^2}$ und b_n gilt dann $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn

$$a_1 = 1 = b_1 \qquad \text{und} \qquad a_n = \frac{1}{n\cdot n} \leq \frac{1}{(n-1)\cdot n} = b_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

Es gilt also

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\cdot n}}_{=1 \text{ s. Bsp. } \boxed{11.3.3}} = 2$$

Die Reihe aus 11.3.3 wird um n = 1 ergänzt. Hierbei wird für n=1 b_n = 1 gesetzt, damit es identisch (oder größer; wahrscheinlich, Eigeninterpretation) der ersten Stelle von a_n ist.
Ab da wird das Majorantenkriterium angewendet.

WICHTIG!

Einige wichtige Reihen:

- Die ***geometrische Reihe*** hat die Form $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ mit $q \in \mathbb{R}$.
- Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deren Folgenglieder alle der Form $a_n = a_0 + n \cdot d$ für ein $a_0 \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{R}$ sind (die konstante Differenz zweier aufeinander folgende Folgenglieder), bezeichnen wir als ***arithmetische Folge***. Die ***arithmetische Reihe*** wird über arithmetische Folgen gebildet.
- Die ***harmonische Reihe*** wird gebildet über die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Geometrische Reihe (11.3.9):

Die Partialsummen der geometrischen Reihe sind für jedes $q \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Für $-1 < q < 1$ konvergiert die geometrische Reihe, es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{für } -1 < q < 1$$

Für $1 \leq q$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \infty$ und für $q \leq -1$ ist die geometrische Reihe divergent.

Unteren Zeilen am interessantesten. Wenn eine Gleichung zur Geometrischen Reihe umgeformt werden kann, dann kann man anhand des q entscheiden, ob die Reihe gegen einen festen Wert konvergiert (-1 < q < 1), gegen unendlich konvergiert (1 ≤ q) (heißt auch bestimmt divergiert) oder divergiert (q ≤ -1).

Arithmetische Reihe (11.3.10):

Die Partialsummen der arthmetischen Reihe sind für eine arithmetische Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $a_0 \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = (n+1)a_0 + d\frac{n(n+1)}{2}.$$

(Keine Ahnung was man damit machen kann)

Harmonische Reihe (11.3.11):

Die Harmonische Reihe basiert auf der Folge 1/n und geht von 1 bis unendlich

Die harmonische Reihe divergiert.

Stetigkeit

Konvergenz für reelle Funktionen (12.1.1):

Sei

- $u \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl,
- $X \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen und
- $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion von X in die reellen Zahlen.

Wir sagen $f(x)$ ***konvergiert gegen*** $y \in \mathbb{R}$ ***für*** $x \to u$, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

- Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $x \in X$ mit $|x - u| < \delta$.
- Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ mit $|x - u| < \delta$ gilt $|f(x) - y| < \varepsilon$.

Man schreibt auch kurz $\lim_{x \to u} f(x) = y$.

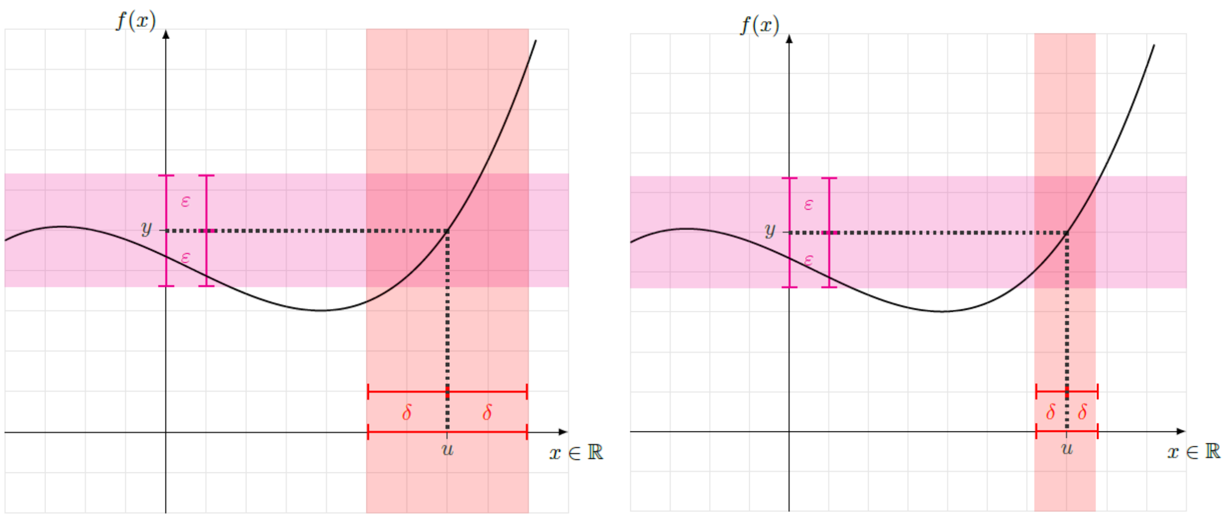
Mit der gegebenen Methode wird jeweils der Punkt u auf Stetigkeit untersucht.

Eigeninterpretation: Für jedes δ das ausgewählt werden kann, gibt es wenigstens einen Punkt der untersuchten Funktion, der der in dem Bereich u-δ und u+δ (|x – u| < δ) liegt.

Für jedes ε das gewählt werden kann, muss ein δ existieren, dessen Bereich u-δ und u+δ (|x – u| < δ) nur x einschließt, die in dem Bereich y- ε und y+ ε (|f(x) – y| < ε) liegen.

Bildliche Darstellung:

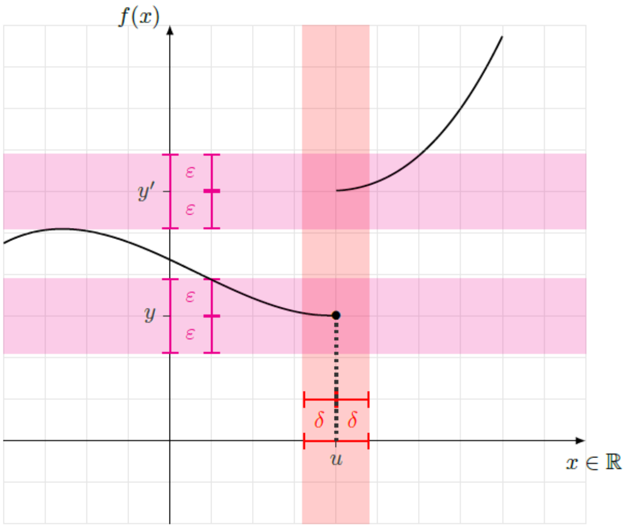
- $f(x)$ konvergiert gegen $y \in \mathbb{R}$ für $x \to u$. Für das in der ersten Abbildung gewählte ε ist das gewählte δ zu groß. In der zweiten Abbildung ist ein kleineres δ gewählt worden und die Bedingungen sind dann erfüllt.

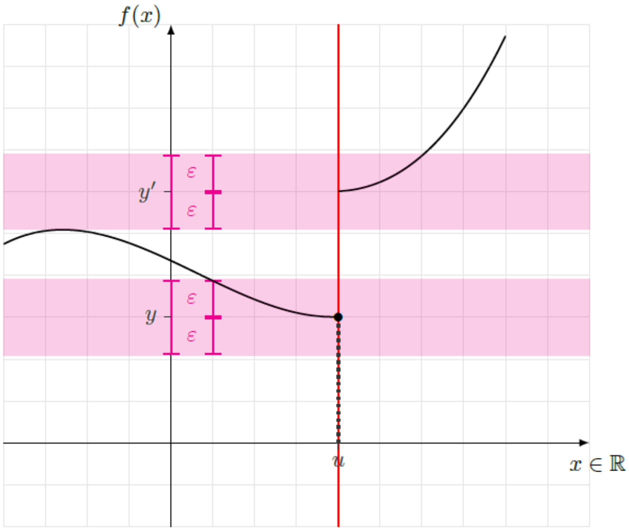


In linkem Bild wurde δ zu groß gewählt, also konnte Stetigkeit nicht gezeigt werden. Im rechten Bild wurde ein kleineres δ gewählt. Damit kann man den Punkt u als stetig nachweisen.

Nicht stetige Abbildung:

- ▶ $f(x)$ konvergiert nicht gegen ein $y \in \mathbb{R}$ für $x \to u$. In der ersten Abbildung findet man, dass für das gewählte ε das gewählte δ ebenfalls zu groß ist. Jedoch, wie in der zweiten Abbildung angedeutet, gibt es kein $\delta > 0$, so dass die Bedingung erfüllt ist.





Verknüpfungen von Funktionen:

Bemerkung 12.2.1:

Für zwei Funktionen $f, g : X \to \mathbb{R}$ ist bekanntlich $f + g : X \to \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto f(x) + g(x)$. Analog ist $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$.

Proposition 12.2.2:

Seien $f, g : X \to \mathbb{R}$ Funktionen und $u \in \mathbb{R}$. Wenn $\lim_{x\to u} f(x) = y$ und $lim_{x\to u} g(x) = z$, dann gilt

$$\lim_{x\to u} f(x) + g(x) = y + z \qquad \lim_{x\to u} f(x) \cdot g(x) = y \cdot z.$$

Proposition 12.2.3:

Sein $f : X \to Y, h : Y \to \mathbb{R}$ Funktionen und $u \in X, v \in Y, z \in \mathbb{R}$ so, dass $\lim_{x\to u} f(x) = v$ und $\lim_{y\to v} h(y) = z$. Dann gilt $\lim_{x\to u} h \circ f(x) = z$.

Stetigkeit (12.3.1):

Sei $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ und $u \in X$. Wir nennen f ***stetig*** im Punkt u, falls

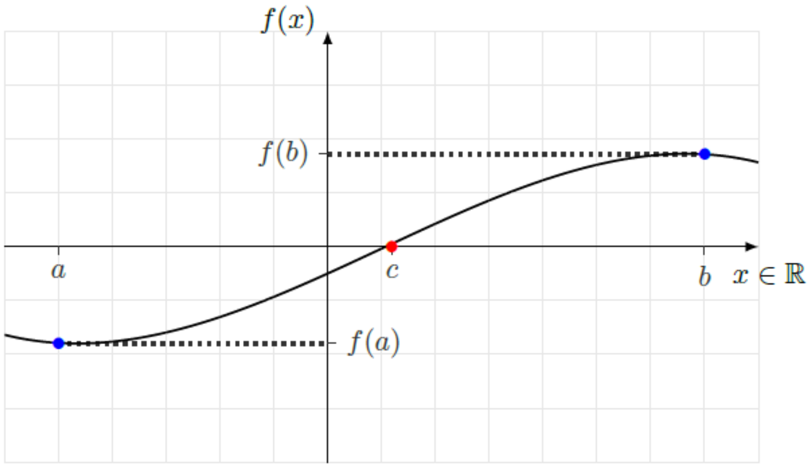
$$\lim_{x\to u} f(x) = f(u).$$

Ist ferner $S \subset X$, so heißt f stetig auf S, falls f stetig in jedem Punkt $u \in S$ ist.

Merke:
Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft, die sich zunächst einmal auf einen Punkt u bezieht. Ist eine Funktion stetig, dann muss sie auf ihrem ganzen Definitionsbereich stetig sein. Es kann aber auch nur eine Teilmenge des Definitionsbereiches einer Funktion stetig sein.

Zwischenwertsatz (12.4.1): WICHTIG!

Wenn eine stetige Funktion f in einem Inverfall mit einem negativen/positiven Wert beginnt und am Ende des Intervalls einen positiven/negativen Wert angenommen hat, dann existiert wenigstens (!) (die Nullstelle muss nicht eindeutig sein) in Punkt in dem Intervall, für den gilt: f(x) = 0



Formale Notation:
Notation:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen. Wir bezeichnen mit

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

das ***abgeschlossene Intervall*** von a bis b, mit

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

das ***offene Intervall*** von a bis b und mit

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \qquad \text{bzw.} \qquad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

die ***halb-offene Intervall*** von a bis b.

Zwischenwertsatz 12.4.2:
Seien $a < b$ reelle Zahlen und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem gesamten Intervall $[a, b]$. Wenn $f(a) < 0$ aber $f(b) > 0$, dann existiert eine Zahl $c \in (a, b)$ mit $f(c) = 0$.

Anmerkung: Um zu beweisen, dass sich zwei stetige Funktionen f, g kreuzen, wenn die eine am Anfang größer ist als die Andere und am Ende umgekehrt, kann man den Zwischenwertsatz verwenden. Man definiert eine neue Funktion h, die die Differenz der beiden Funktionen f und g darstellt. Diese neue Funktion ist stetig, da sie aus zwei stetigen Funktionen zusammengesetzt ist und erfüllt alles Bedingen der Funktion im Zwischenwertsatz.
--> an dem Punkt an dem f den Wert f(x) = 0 ergibt kreuzen sich die beiden Funktionen (Übungsaufgabe)

Korollar 12.4.4:
Seien $a < b$ reelle Zahlen und sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf dem gesamten Intervall $[a,b]$. Für jedes $y \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$ existiert eine Zahl $c \in (a,b)$ mit $f(c) = y$.

Die Ableitung

Die Ableitung (Definition 13.1.1):
Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $u \in X$ ein Punkt, so dass es zu jedem $\delta > 0$ ein $x \in X \setminus \{u\}$ mit $|x - u| < \delta$ gibt. Wir sagen, dass die Funktion f differenzierbar ist im Punkt u, falls Folgendes gilt:

$$\text{Sei } g_u : X \setminus \{u\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x) - f(u)}{x - u}. \text{ Dann konvergiert } g_u(x) \text{ für } x \to u.$$

In diesem Fall nennen wir $\lim_{x\to u} g_u(x)$ die ***Ableitung*** von f in u.

Irgendwie eklig zu verstehen, später kam aber ne einfachere Version davon.

Erklärend zu 13.1.1:
Anschaulich gesprochen ist $\frac{f(x)-f(u)}{x-u}$ die Steigung der Geraden durch die Punkte $(x, f(x), (u, f(u)) \in \mathbb{R}^2$. Da wir den Limes $x \to u$ betrachten, können wir uns die Ableitung also als die Steigung der Funktion f im Punkt u vorstellen.

Notation: Für die Ableitung von f im Punkt u schreiben wir oft $f'(u)$ oder $\frac{df}{dx}(u)$. Wenn f auf der gesamten Menge X differenzierbar ist, können wir also f' (oder $\frac{df}{dx}$) als eine Abbildung $X \to \mathbb{R}$ auffassen.

Bsp 13.1.3 (Aber wahrscheinlich keine praktische Anwendung dafür)

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto c$. Diese Funktion ist für alle $u \in \mathbb{R}$ differenzierbar.
  Wähle dazu $u \in \mathbb{R}$ fest und betrachte
  $$g_u(x) = \frac{f(x) - f(u)}{x - u} = \frac{c - c}{x - u} = 0.$$
  Man prüft leicht nach, dass $g_u(x)$ gegen 0 konvergiert für $x \to u$.
  Es ist also $f'(u) = 0$ und allgemein $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x$. Diese Funktion ist für alle $u \in \mathbb{R}$ differenzierbar.
  Wähle dazu $u \in \mathbb{R}$ fest und betrachte
  $$g_u(x) = \frac{f(x) - f(u)}{x - u} = \frac{x - u}{x - u} = 1.$$
  Man prüft leicht nach, dass $g_u(x)$ gegen 1 konvergiert für $x \to u$.
  Es ist also $f'(u) = 1$ und allgemein $f'(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 13.1.4:

Wenn die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ im Punkt $u \in X$ differenzierbar ist, dann ist sie dort auch stetig.

Rechenregeln für Ableitungen:

Proposition 13.2.1:

Angenommen die Funktionen $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ sind im Punkt $u \in X$ differenzierbar, dann ist die Funktion $f_1 + h : X \to \mathbb{R}, x \mapsto f_1(x) + f_2(x)$ differnzierbar in u und

$$(f_1 + f_2)'(u) = f_1'(u) + f_2'(u).$$

Anmerkung: Ist die mathematische und komplizierte Version des normalen Ableitens. Exponent von der abzuleitenden Variable wird um eins verringert und mit der Variable multipliziert.

Übernommen aus Internet (Mathebibel):

Die **Potenzregel** lautet

$$f(x) = x^n \quad \to \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Produktregel (13.2.3):

Angenommen die Funktionen $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ sind im Punkt $u \in X$ differenzierbar, dann ist die Funktion $f_1 \cdot f_2 : X \to \mathbb{R}, x \mapsto f_1(x) \cdot f_2(x)$ differnzierbar in u und

$$(f_1 \cdot f_2)'(u) = f_1'(u) \cdot f_2(u) + f_1(u) \cdot f_2'(u).$$

Übernommen von Mathebibel:

Die **Produktregel** lautet

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Kettenregel (13.2.2):

Angenommen die Funktion $f_1 : X \to Y$ ist im Punkt $u \in X$ differenzierbar und die Funktion $f_2 : Y \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar im Punkt $v = f_1(u)$. Dann ist die Funktion $f_2 \circ f_1 : X \to \mathbb{R}, x \mapsto f_2(f_1(x))$ differnzierbar in u und

$$(f_2 \circ f_1)'(u) = f_2'(f_1(u)) \cdot f_1'(u).$$

Übernommen von Mathebibel:

Die **Kettenregel** lautet

$$f(x) = g(h(x)) \quad \rightarrow \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Lemma 13.2.7:

Die Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist differenzierbar. Es gilt

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Quotientenregel (13.2.8):

Angenommen die Funktionen $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ sind im Punkt $u \in X$ differenzierbar. Wenn $f_2(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, dann ist die Funktion $\frac{f_1}{f_2} : X \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ differnzierbar in u und

$$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)'(u) = \frac{f_1'(u) \cdot f_2(u) - f_1(u) \cdot f_2'(u)}{f_2(u)^2}.$$

Übernommen von Mathebibel:

Die **Quotientenregel** lautet

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

Satz zur Umkehrfunktion (13.2.4):

Sei $f : (a,b) \to (c,d)$ eine stetige bijektive Funktion, die im Punkt $u \in (a,b)$ differenzierbarist.

Dann ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ im Punkt $v = f(u)$ differenzierbar mit Ableitung

$$\frac{1}{f'(u)}.$$

Mittelwertsatz der Differenzialrechnung:

Lemma 13.3.1:

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $f([a,b]) = \{f(x) : x \in [a,b]\}$ beschränkt.

Satz von Rolle (13.3.2):

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b) = 0$. Dann gibt es ein $c \in (a,b)$ mit $f'(c) = 0$.

Mittelwertsatz der Differenzialrechnung (13.3.3):

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Es gibt ein $c \in [a,b]$, so dass

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Extremstellen:

Monotonie für Funktionen (13.4.1):
Wir nennen eine Funktion

- ***monoton wachsend***, falls für je zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x < y \leq b$ gilt
$$f(x) \leq f(y).$$
- ***streng monoton wachsend***, falls für je zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x < y \leq b$ gilt
$$f(x) < f(y).$$
- ***monoton fallend***, falls für je zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x < y \leq b$ gilt
$$f(x) \geq f(y).$$
- ***streng monoton fallend***, falls für je zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $a \leq x < y \leq b$ gilt
$$f(x) > f(y).$$

Korollar 13.4.3
(Mittelwertsatz schlägt Brücke zwischen Monotonie und Vorzeichen der Ableitung)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

- Wenn $f'(c) \leq 0$ für alle $c \in [a, b]$ dann ist f monoton wachsend.
- Wenn $f'(c) < 0$ für alle $c \in [a, b]$ dann ist f streng monoton wachsend.
- Wenn $f'(c) \geq 0$ für alle $c \in [a, b]$ dann ist f monoton fallend.
- Wenn $f'(c) > 0$ für alle $c \in [a, b]$ dann ist f streng monoton fallend.

Lokales Extremum (13.4.4):
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- Ein Punkt $c \in [a, b]$ heißt ***lokales Maximum*** von f, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in [a, b]$ mit $|x - c| < \varepsilon$ gilt $f(x) \leq f(c)$.
- Ein Punkt $c \in [a, b]$ heißt ***lokales Minimum*** von f, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $x \in [a, b]$ mit $|x - c| < \varepsilon$ gilt $f(x) \geq f(c)$.

Wenn c ein lokales Minimum oder Maximum ist, nennt man c ein ***lokales Extremum***.

Extremum prüft, ob Punkt c an irgendeiner Stelle im Intervall von einem anderen Punkt übertroffen wird. < ε ist wahrscheinlich nötig, damit c nicht mit sich selbst verglichen werden kann (?).

Korollar 13.4.5:
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wenn $c \in [a,b]$ ein lokales Extremum ist, gilt $f'(c) = 0$.

Differenzialrechnung im R^n (13.5)
Hoffentlich nicht relevant für Klausur, da nicht genau beschrieben und irgendwie bisschen scheiße zu verstehen.

Habe ich einfach ignoriert

Das Integral

Ziel des Integrals ist es den Flächeninhalt einer Funktion zu bestimmen

Treppenfunktion (14.1.1):
Wir nennen eine Funktion $t : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine ***Treppenfunktion***, wenn es Zahlen

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$$

und

$$c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$$

gibt, so dass

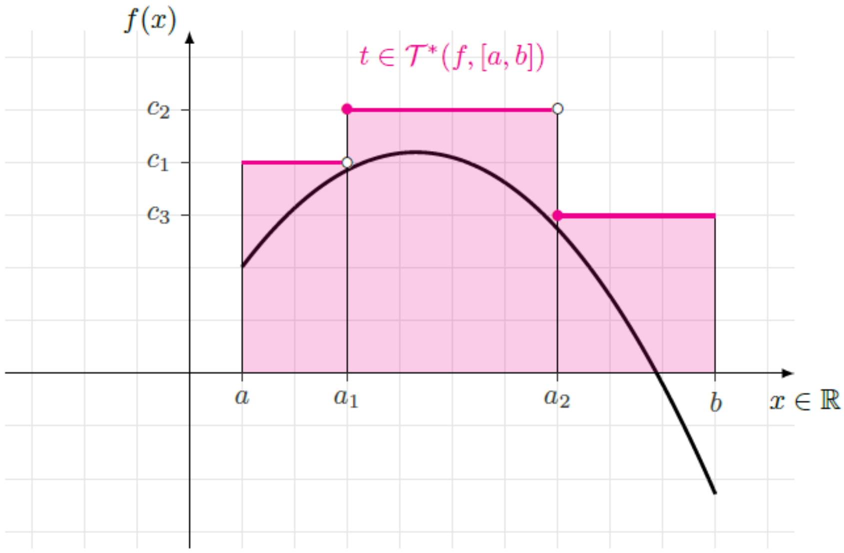
$$t(x) = c_i \qquad \text{für alle } x \in (a_{i-1}, a_i) \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Notation der Treppenfunktion (14.1.3)
Sei $t : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Dann sei

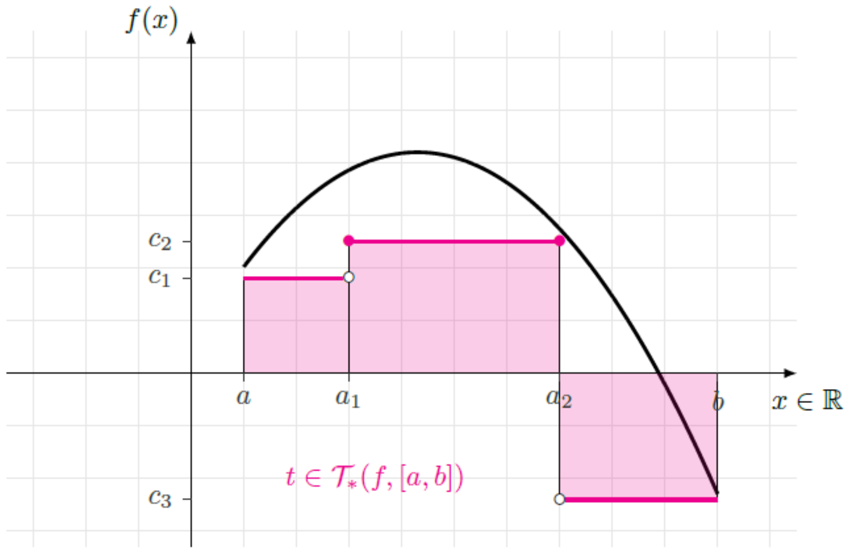
$$\int_a^b t(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} c_i(a_i - a_{i-1}).$$

Vorab nötig für Definition des Integrals (Definition 14.1.4):

- $\mathcal{T}^*(f,[a,b])$ die Menge aller Treppenfunktionen $t:[a,b]\to\mathbb{R}$, so dass $t(x)\geq f(x)$ für alle $x\in[a,b]$.



- $\mathcal{T}_*(f,[a,b])$ die Menge aller Treppenfunktionen $t:[a,b]\to\mathbb{R}$, so dass $t(x)\leq f(x)$ für alle $x\in[a,b]$.



Das Integral (14.1.5):

Wir nennen eine Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ***integrierbar*** auf $[a,b]$, falls

$$\inf\left\{\int_a^b t(x)\mathrm{d}x : t\in\mathcal{T}^*(f,[a,b])\right\} = \sup\left\{\int_a^b t(x)\mathrm{d}x : t\in\mathcal{T}_*(f,[a,b])\right\}$$

In diesem Fall definieren wir das ***Integral von f über*** $[a,b]$, als

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sup\left\{\int_a^b t(x)\mathrm{d}x : t\in\mathcal{T}_*(f,[a,b])\right\}.$$

Anmerkungen und Erklärungen zum Integral (14.1.6):

- Das Integralsymbol $\int$ ist ursprünglich ein "S" - und stand für die Summe der Integrale der einzelnen Treppenfunktionsabschnitte.
- Unter dem Integralsymbol steht die untere Intervallgrenze und oberhalb die obere Intervallgrenze.
- Das dx deutet an, dass über die Variable x integriert wird. Das ist dann besonders wichtig, wenn in der Funktion weitere Variablen auftauchen. Es streicht nochmal heraus, welche Variable die Funktionsvariable ist. Wird beispielsweise über eine Funktion integriert, deren Funktionsvariable y heißt, dann schreibt man dy hinter die zu integrierende Funktion.

$$\int_{z_1}^{z_2} 3y^2 + 2x\mathrm{d}y$$

  In diesem Fall wird die Funktion $3y^2 + 2x$ über das Intervall $[z_1, z_2]$ integriert, wobei y die Funktionsvariable ist.
- Das Integralsymbol $\int$ und dx bilden eine Klammer. Alles was zwischen diesen beiden Symbolen steht gehört zu der Funktion, über welche integriert wird.
- Die Definition ist zunächst einmal alles andere als handlich. Das Supremum wird über unendlich viele Werte gebildet und in den meisten Fällen gar nicht von einer Treppenfunktion angenommen. Wie man Integrale dennoch berechnen kann, sehen wir in Abschnitt 14.3.1.

Proposition 14.1.7:

Sei $f : S \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann entspricht für alle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $[a, b] \subset S$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

dem (orientierten) Flächeninhalt, den f auf dem Intervall $[a, b]$ mit der x-Achse einschließt.

Wann ist eine Funktion integrierbar?:

Stückweise Stetigkeit (14.1.8):

Wir nennen eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ***stückweise stetig***, wenn es Zahlen $c > 0$ und

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$$

gibt, so dass f auf jedem Intervall (a_{i-1}, a_i) stetig ist für $i = 1, \ldots, k$ und $|f(x)| \leq c$ für alle $x \in [a, b]$.

Proposition 14.1.9:

Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig ist, ist f integrierbar auf $[a, b]$.

Rechenregeln für integrierbare Funktionen (14.1.11):

Seien $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen. Sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen $f_1 + f_2$ und $c \cdot f_1$ integrierbar und

$$\int_a^b (f_1 + f_2)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x, \qquad \int_a^b (c \cdot f_1)(x)\mathrm{d}x = c \cdot \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x.$$

Wenn ferner $f_1(x) \leq f_2(x)$ für alle $x \in (a, b)$, dann gilt

$$\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x.$$

Beobachtungen + eine Definition zu integrierbaren Funktionen (14.1.12):

Definition 14.1.13. Wenn f auf $[a, b]$ integrierbar ist, dann ist

$$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Wenn f auf $[a, b]$ integrierbar ist gitl für alle $c \in [a, b]$, dass

$$\int_c^c f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Wenn $a \leq b \leq c$ reelle Zahlen sind und f auf $[a, c]$ integrierbar ist, dann gilt

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x.$$

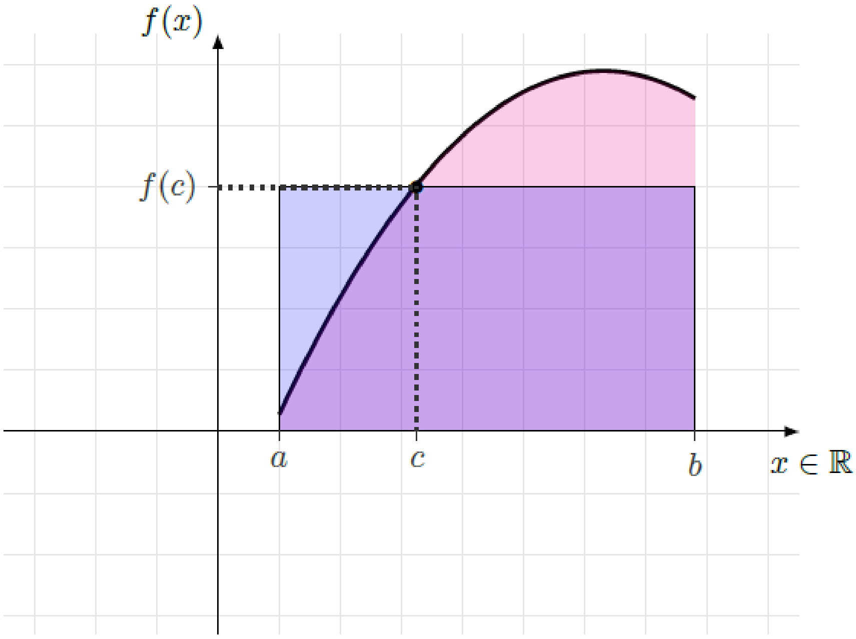
Mittelwertsatz der Integralrechnung (14.2.1):

Wenn f auf $[a, b]$ stetig, gibt es ein $c \in [a, b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b - a) \cdot f(c).$$

Bedeutung: Der Betrag es Integrals entspricht der Intervalllänge des Integrals (b – a) multipliziert mit f(c) (Berechnung des Volumens eines Rechtecks). f(c) gibt hierbei das Vorzeichen des Volumens an.

Geometrische Darstellung:



Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (wahrscheinlich Wichtig?)

Stammfunktionen (14.3.1):

Sei $S \subset \mathbb{R}$ und $f : S \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Funktion $F : S \to \mathbb{R}$, die auf S differenzierbar ist, heißt ***Stammfunktion*** von f, falls

$$f(x) = F'(x) \qquad \text{für alle } x \in S.$$

Beispiel für Stammfunktionen:

Sei $f : [0,5] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto c$.

Die Funktion $F_1 : [0,5] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto c \cdot x$ ist auf $[0,5]$ differenzierbar und es ist $F_1'(x) = c = f(x)$ für alle $x \in [0,5]$. Sie ist also eine Stammfunktion auf f.

Allerdings ist auch die Funktion $F_2 : [0,5] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto c \cdot x + 13$ auf $[0,5]$ differenzierbar und es ist $F_2'(x) = c = f(x)$ für alle $x \in [0,5]$. Sie ist also auch eine Stammfunktion auf f.

Beliebige Funktionen F können Stammfunktionen auf f sein, solange sie differenzierbar sind und f(x) = F´(x) erfüllen.

Proposition 14.3.3:

Sei $S \subset \mathbb{R}$ und $f : S \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Angenommen F_1, F_2 sind Stammfunktionen von f. Dann gibt es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, so dass

$$F_1(x) = F_2(x) + c \qquad \text{für alle } x \in S.$$

Beweis zu 14.3.3:

Beweis. Die Funktion $F_1 - F_2$ hat die Ableitung

$$(F_1 - F_2)'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Nach Korollar 13.4.3 ist $F_1 - F_2$ also sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend, also konstant. Das bedeutet, dass es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $F_1(x) - F_2(x) = c$ für alle $x \in S$. □

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (14.3.4):

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist

$$F : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \int_a^x f(y)\mathrm{d}y$$

eine Stammfunktion von f.

Integrale berechnen:

Korollar 14.3.5:

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei F eine Stammfunktion von f. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Beweis zu 14.3.5:

Beweis. Sei $G(y) = \int_a^y f(x)\mathrm{d}x$. Nach Satz 14.3.4 ist G eine Stammfunktion von f. Nach Proposition 14.3.3 existiert also eine Zahl $c \in \mathbb{R}$, so dass $F(x) = G(x) + c$ für alle $x \in [a, b]$. Daraus folgt, dass

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^a f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - 0 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

wie behauptet. □

Beispiel zur Integralrechnung (14.3.6):

In Beispiel 14.1.10 haben wir ausgerechnet, dass $\int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

Mit Korollar 14.3.5 können wir dieses Integral einfacher ausrechnen. Denn die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ hat die Stammfunktion $F : [0, 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2} \cdot x^2$. Also erhalten wir

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{1}{2}.$$

Anmerkung: Da man eine Stammfunktion F zu einer Funktion f finden will um ein Integral zu berechnen ist es möglich die Funktion f einfach „aufzuleiten“. Dann ist die Ableitung F´ automatisch f
Wurde in der Vorlesung irgendwie nicht besprochen, aber kennt man vielleicht aus der Schule.

Stetige Differenzierbarkeit (14.3.7):

Eine Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ heißt ***stetig differenzierbar***, falls f auf S differenzierbar ist und die Ableitung $f' : S \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.

Partielle Integration (14.3.8):

Seien $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f_1'(x) f_2(x) \mathrm{d}x = f_1(b) f_2(b) - f_1(a) f_2(a) - \int_a^b f_1(x) f_2'(x) \mathrm{d}x.$$

Beispiel zu Rechnung mit 14.3.8:

Für das Beispiel setzen wir voraus, dass $\sin(x)$ und $\cos(x)$ stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ sind und dass $\frac{d}{\mathrm{d}x} sin(x) = cos(x)$ ist. Außerdem prüft man leicht nach, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x$ stetig differenzierbar ist.

Man kann mit Hilfe der Partiellen Integration für je zwei Zahlen a und b das folgende Integral über $[a,b]$ berechnen

$$\int_a^b \cos(x) \cdot x \mathrm{d}x.$$

Setze dazu

$$f_1(x) = \sin(x) \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = x.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sin(x) & f_2(x) &= x \\ f_1'(x) &= \cos(x) & f_2'(x) &= 1. \end{aligned}$$

und

$$\int_a^b \cos(x) \cdot x \mathrm{d}x = \int_a^b f_1'(x) f_2(x) \mathrm{d}x.$$

Nach Korollar 14.3.8 gilt also

$$\begin{aligned} \int_a^b \cos(x) \cdot x \mathrm{d}x &= f_1(b) f_2(b) - f_1(a) f_2(a) - \int_a^b f_1(x) f_2'(x) \mathrm{d}x \\ &= \sin(b) \cdot b - \sin(a) \cdot a - \int_a^b \sin(x) \cdot 1 \mathrm{d}x \\ &= \sin(b) \cdot b - \sin(a) \cdot a - \int_a^b \sin(x) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Substitutionsregel (14.3.10):

Sei $f_1 : [c, d] \to \mathbb{R}$ stetig und $f_2 : [a, b] \to [c, d]$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f_1(f_2(x)) f_2'(x) \mathrm{d}x = \int_{f_2(a)}^{f_2(b)} f_1(x) \mathrm{d}x.$$

Beispiel zu Rechnung mit 14.3.10:

Das Integral

$$\int_a^b \sin(-7x + 3) \mathrm{d}x$$

kann mit Hilfe der Substitutionsregel berechnet werden. Dazu setzt man

$$f_1(x) = \sin(x) \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = -7x + 3.$$

Dann ist

$$f_2'(x) = -7.$$

Also findet man

$$\begin{aligned} \int_a^b \sin(-7x + 3) \mathrm{d}x &= \frac{1}{-7} \cdot \int_a^b \sin(-7x + 3) \cdot (-7) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{-7} \cdot \int_a^b f_1(f_2(x)) f_2'(x) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Nach Korollar $\boxed{14.3.10}$ gilt also

$$\begin{aligned} \int_a^b \sin(-7x + 3) \mathrm{d}x &= \int_{f_2(a)}^{f_2(b)} f_1(x) \mathrm{d}x \\ &= \int_{-7 \cdot a + 3}^{-7 \cdot b + 3} \sin(x) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

<u>**Komplexe Zahlen**</u>

Imaginäre Einheit (15.2.1):

Wir definieren eine Zahl i (genannt die imaginäre Einheit) so, dass $i^2 = -1$ gilt.

Potenzen von imaginären Einheit i:

Aus der Regel $i^2 = -1$ lässt sich folgern, dass sich Potenzen von i wieder als ± 1 oder $\pm i$ schreiben lassen:

k	0	1	2	3	4	
i^k	i^0	i^1	i^2	i^3	i^4	$\dots$
Wert	1	i	-1	$-i$	1	$\dots$
	$\cdot i$	$\cdot i$	$\cdot i$	$\cdot i$	$\cdot i$	

Merke:

Warum Sprung von $i^3 = -i$ zu $i^4 = 1$ (warum ist $-i * i = 1$?)?

Antwort: $i^4 = i^2 * i^2 = -1 * -1 = 1$

Komplexe Zahl (15.2.2):

Eine Komplexe Zahl z hat die Form $z = a + i \cdot b$ dabei sind $a, b \in \mathbb{R}$ und i ist die *imaginäre Einheit*.

Für $z = a + i \cdot b$ ist $\mathrm{Re}(z) := a$ der *Realteil* von z und $\mathrm{Im}(z) := b$ der *Imaginärteil* von z.

Die Menge aller Komplexen Zahlen kürzt man ab mit $\mathbb{C} := \{a + i \cdot b \; : \; a, b \in \mathbb{R}\}$

Bemerkung:

Typischer Fehler:

Der Imaginärteil von $z = a + i \cdot b$ ist die **reelle** Zahl b und **nicht i** $\cdot$ b.

Satz 12.2.4

Für das Polynom $x^2 + px + q$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ sei $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$.

Dann hat die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die komplexen Lösungen

$$z_1 := -\frac{p}{2} + i \cdot \sqrt{\left|\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right|} \quad \text{und} \quad z_2 = \overline{z}_1 := -\frac{p}{2} - i \cdot \sqrt{\left|\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right|}$$

Erklärung: Da definiert ist, dass $(p/2)^2 - q$ negativ ist kann man schreiben

Wurzel($(p/2)^2 - q$)
= Wurzel(-1 * $|(p/2)^2 - q|$)
= Wurzel(-1) * Wurzel($|(p/2)^2 - q|$)
= Wurzel(i^2) * Wurzel ($|(p/2)^2 - q|$)
= ± i * Wurzel($|(p/2)^2 - q|$)

Beispiel und Bemerkung:

Gesucht sind die Lösungen von $x^2 + 2x + 10 = 0$ mit der p-q-Formel ergibt sich:

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 10} = -1 \pm \sqrt{(-1) \cdot 9} = -1 \pm 3 \cdot \sqrt{-1}.$$

In reellen Zahlen gibt es hier keine Lösung, in komplexen Zahlen lauten die Lösungen $x_{1/2} = -1 \pm 3 \cdot i$.

Wichtig: i ≠ Wurzel(-1), i hat kein Vorzeichen

Typischer Fehler: i ist *nicht* "$\sqrt{-1}$"

Obwohl es verführerisch aussieht, ist es **nie richtig "$i = \sqrt{-1}$"** zu schreiben. In Beispiel $\boxed{15.2.5}$ *sieht es zwar so aus* als *hätte* man "$\sqrt{-1}$" durch i ersetzt, *trotzdem* ***gilt nicht*** "$i = \sqrt{-1}$".

Die Wurzelfunktion $\sqrt{x}$ liefert für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ das *nicht-negative* y, für dass $y^2 = x$ gilt. Wegen der Einschränkung "*nicht-negativ*" funktioniert die Wurzelfunktion nicht bei -1:

- Die Lösungen für $y^2 = 16$ sind zum Beispiel 4 und -4,
  die Wurzelfunktion liefert aber nur die postive Lösung $\sqrt{16} = 4$.
- Die Lösungen für $y^2 = -1$ sind i und $-i$,
  aber hier ist (und bleibt!) unklar, wer "die positive" Lösung ist.

Sowohl i als auch $-i$ sind *weder* positiv *noch* negativ!

Negativbeispiel:

($\star$) Annahme: Es gelte $i = \sqrt{-1}$.

($\star\star$) Dann gilt die Wurzelrechenregel $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ auch für $a = b = -1$.

Es gilt dann also:

$$\begin{array}{lccl} 1) & & 1 = & \sqrt{(-1) \cdot (-1)} \\ 2) & \overset{\star\star}{\Leftrightarrow} & 1 = & \sqrt{(-1)} \cdot \sqrt{(-1)} \\ 3) & \overset{\star}{\Leftrightarrow} & 1 = & i \cdot i \\ 4) & \Leftrightarrow & 1 = & -1 \end{array}$$

Während hier 1) unstrittig wahr ist, ist 4) unstrittig falsch, d.h. die Annahme $i = \sqrt{-1}$ führt zu einem Widerspruch (und zwar durch ($\star\star$), das direkt aus $i = \sqrt{-1}$ folgt).

Rechenregeln für Komplexe Zahlen (15.2.2):

Addition in $\mathbb{C}$	Addition von Polynomen
$$\begin{array}{rll} & a+ & b\cdot i \\ + & c+ & d\cdot i \\ \hline = & \multicolumn{2}{l}{(a+c)+(b+d)\cdot i} \end{array}$$	$$\begin{array}{rll} & a+ & b\cdot x \\ + & c+ & d\cdot x \\ \hline = & \multicolumn{2}{l}{(a+c)+(b+d)\cdot x} \end{array}$$

Multiplikation in $\mathbb{C}$	Multiplikation von Polynomen
$$\begin{array}{rl} & (a+b\cdot i)\cdot(c+d\cdot i) \\ \hline = & a\cdot c+(a\cdot d+c\cdot b)\,i+ b\cdot d\cdot \underbrace{i^2}_{=-1} \\ = & a\cdot c- b\cdot d+(a\cdot d+c\cdot b)\,i \end{array}$$	$$\begin{array}{rl} & (a+b\cdot x)\cdot(c+d\cdot x) \\ \hline = & a\cdot c+(a\cdot d+c\cdot b)\,x+b\cdot d\cdot x^2 \end{array}$$

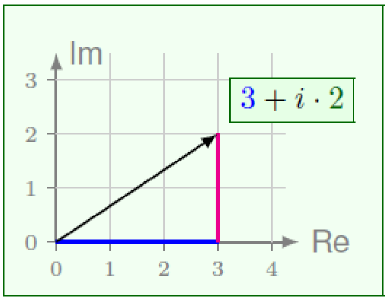
Komplexe Zahlen als kartesische Vektoren:

Definition 15.3.1:

Der *Betrag* einer komplexen Zahl $z=a+b\cdot i$ ist die Länge des Vektors $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, es gilt $|z|:=\sqrt{a^2+b^2}$.

Das Argument $\arg(z)\in[0,2\pi)$ einer komplexen Zahl $z\in\mathbb{C}$ ist der Winkel, der zwischen der Re-Achse und der Strecke von 0 nach z eingeschlossen wird.

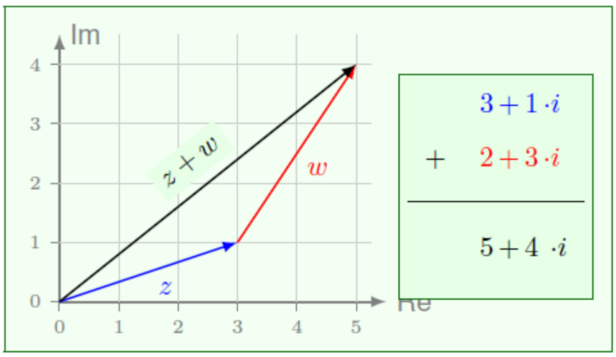
Bsp1:



Bsp2:

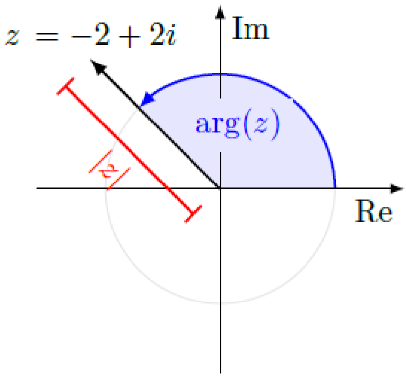
Addition in $\mathbb{C}$
$$\begin{array}{rll} & a+ & b\cdot i \\ + & c+ & d\cdot i \\ \hline = & \multicolumn{2}{l}{(a+c)+(b+d)\cdot i} \end{array}$$

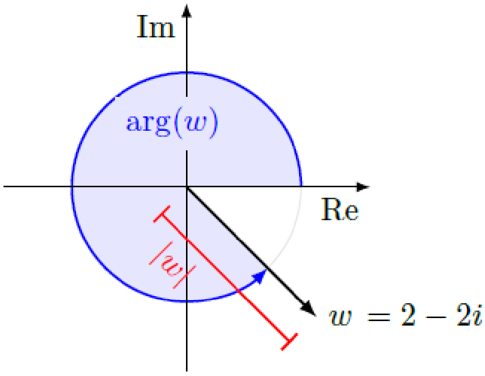
Addition von Vektoren
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$



Bsp3 (15.3.2):

- Für die Zahl $z = -2 + 2i$ ist $|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2 \cdot \sqrt{2}$ und $\arg(z) = \frac{3}{4}\pi$.
- Für die Zahl $w = \ 2 - 2i$ ist $|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2 \cdot \sqrt{2}$ und $\arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$.





Winkel vs. Argument (15.3.3)

Achtung: Winkel vs. Argument

Man beachte, dass nach obiger Definition für $\arg(z)$ stets $0 \leq \arg(z) < 2\pi$ gilt.

Gibt man jedoch Winkel an, so sind zwei Winkel äquivalent, wenn sie sich nur um ein Vielfaches von 2π unterscheiden.

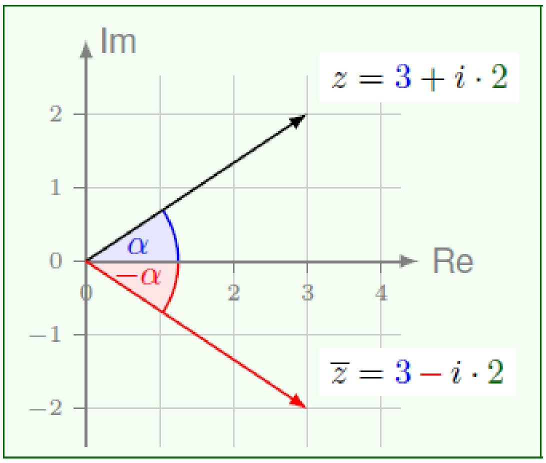
Das Bogenmaß ordnet dem vollen Kreis den Wert 2π zu, weil der Kreisumfang des Einheitskreises (der Kreis mit Radius $r = 1$) Umfang $2\pi r = 2\pi$ hat.

Die konjugiert Komplexe Zahl und Konjugation:

Konjugiert Komplexe Zahl (15.4.1):

Für eine komplexe Zahl $z = a + b \cdot i$, bezeichnet man mit $\overline{z} = a - b \cdot i$ die zu z *konjugiert komplexe Zahl*, die aus z durch Spiegelung an der reellen Achse hervorgeht.

z und $\overline{z}$ sind gleich lang aber haben entgegengesetzte Winkel:



Es gilt:

$$|\overline{z}| = |z| \qquad \text{und} \qquad \arg(\overline{z}) = 2\pi - \arg(z).$$

Konjugieren und rechnen ist bei komplexen Zahlen vertauschbar. Es gilt:

$$\overline{(z + w)} = \overline{z} + \overline{w} \qquad \text{und} \qquad \overline{(z \cdot w)} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

Mittels binomischer Formel kann man eine komplexe Zahl in eine reelle Zahl überführen:

$$z \cdot \overline{z} = (a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i) = a^2 - (i \cdot b)^2 = a^2 + b^2$$

$a^2 - (i * b)^2 = a^2 - i^2 * b^2 = a^2 - (-1) * b^2 = a^2 + b^2$

Bei Brüchen mit komplexen Zahlen im Nenner kann so durch Erweiterung des Bruches mit der konjugierten komplexen Zahl ein reeller Nenner erzeugt werden.

Bsp:

Für $z = 4 + 3i$ und $w = 1 + i$ gilt:

$$\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{(1+i) \cdot (4 - 3 \cdot i)}{(4 + 3 \cdot i) \cdot (4 - 3 \cdot i)} = \frac{7+i}{4^2 + 3^2} = \frac{7}{25} + \frac{1}{25} \cdot i$$

Lemma 15.4.3:

Für $z = a + b \cdot i$ und $w = c + d \cdot i$ gelten:

$$\frac{w}{z} = \frac{ca + db}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} \cdot i$$

Das Ergebnis der Division $\frac{w}{z}$ ist also stets wieder eine komplexe Zahl.

Da:

$$\frac{w}{z} = \frac{w \cdot \overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{(c + d \cdot i) \cdot (a - b \cdot i)}{(a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i)} = \frac{ca + db}{a^2 + b^2} + \frac{ad - bc}{a^2 + b^2} \cdot i.$$

Offizielles Lemma zu Real und Imaginärteil (15.4.4):

Für $z = a + ib$ gelten:

$$\mathrm{Re}(z) = a, \qquad \mathrm{Im}(z) = b \quad \text{und} \quad |z| = = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Da:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{(a + i \cdot b) + (a - i \cdot b)}{2} = \frac{2a}{2} = a$$

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{(a + i \cdot b) - (a - i \cdot b)}{2i} = \frac{2bi}{2i} = b$$

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{(a + i \cdot b) \cdot (a - i \cdot b)} = \sqrt{a^2 - (i \cdot b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Polardarstellung (15.5.1):

Die *Polarkoordinaten* einer komplexen Zahl $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bestehen aus dem Paar $(r, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ mit

- Länge $r \geq 0$, d.h. $r := |z|$ und
- Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ so dass α äquivalent zu $\arg(z)$ ist, d.h. $\alpha = \arg(z) + k \cdot 2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Für $z = 0$ sind die Polarkoordinaten von der Form $(0, \alpha)$, dabei ist der Winkel α beliebig.

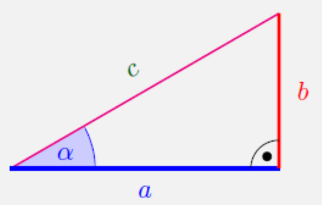
Umrechnen von Polarkoordinate in kartesische Koordinate (15.5.3):

Liegt z in Polarkoordinaten $z \mathrel{\widehat{=}} (r, \alpha)$ vor, so gilt $z = r \cdot \cos(\alpha) + r \cdot \sin(\alpha) \cdot i$, d.h.

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(z) &= r \cdot \cos(\alpha) \\ \mathrm{Im}(z) &= r \cdot \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Da Geometrie:

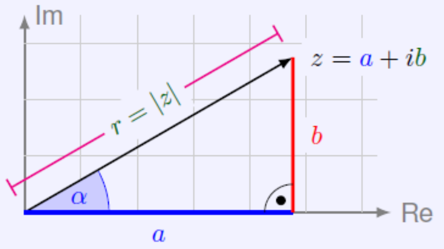
Schulwissen: rechtwinkliges Dreieck



$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad a = c \cdot \cos(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{b}{c} \quad \Rightarrow \quad b = c \cdot \sin(\alpha)$$

Komplexe Zahlen



$$\mathrm{Re}(z) = \quad a = r \cdot \cos(\alpha)$$

$$\mathrm{Im}(z) = \quad b = r \cdot \sin(\alpha)$$

Umrechnen von Polarkoordinate in kartesische Koordinate 2 (15.5.3):

Sind die kartesischen Koordinaten $z = a + b \cdot i \neq 0$ bekannt, so können die zugehörigen Polarkoordinaten (r, α) wie folgt berechnet werden:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \alpha = \begin{cases} \arccos\left(\frac{a}{r}\right) & \text{falls } b \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{a}{r}\right) & \text{falls } b < 0 \end{cases}$$

dabei ist $\arccos(x)$ die Umkehrfunktion des Cosinus.

Multiplizieren und addieren in Polarkoordinaten:

Allgemein gilt:

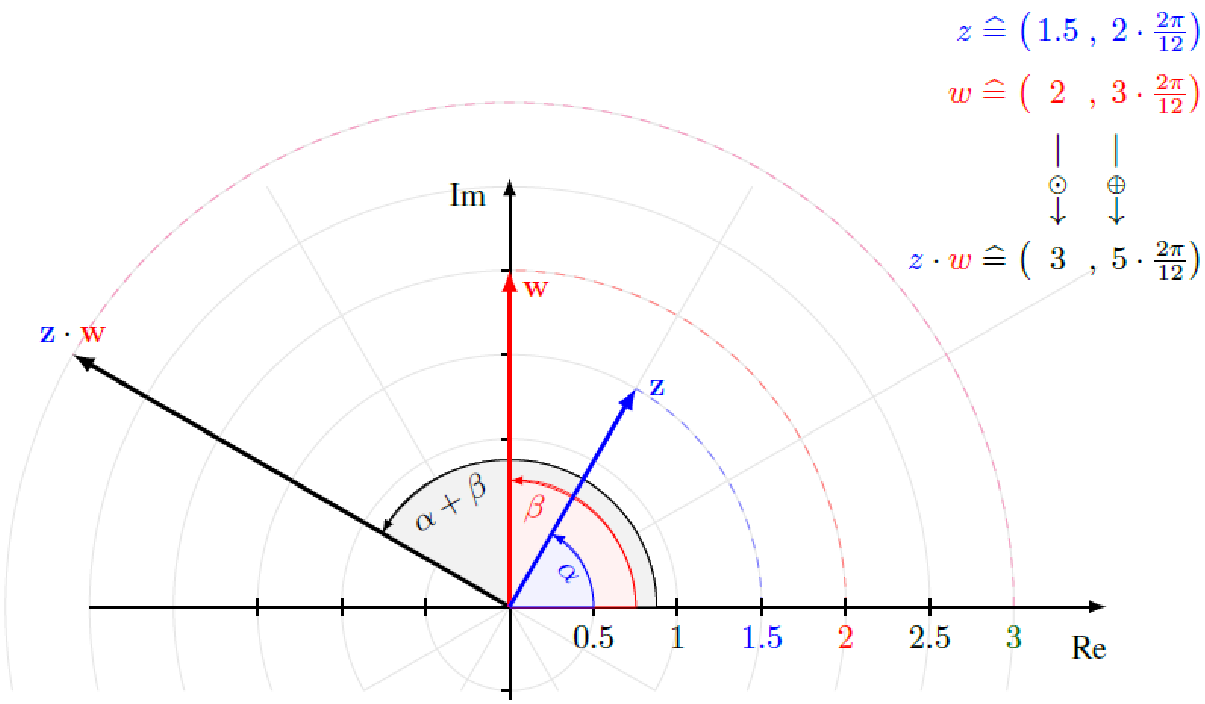
Längen werden multipliziert und Winkel werden addiert.

Daher Lemma 15.5.5:

Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z \mathrel{\widehat{=}} (r, \alpha)$ und $w \mathrel{\widehat{=}} (R, \beta)$. Dann gilt für das Produkt und den Quotienten:

$$z \cdot w \mathrel{\widehat{=}} (r \cdot R\ ,\ \alpha + \beta) \qquad \text{und} \qquad \frac{w}{z} \mathrel{\widehat{=}} \left(\frac{R}{r}\ ,\ \beta - \alpha \right)$$

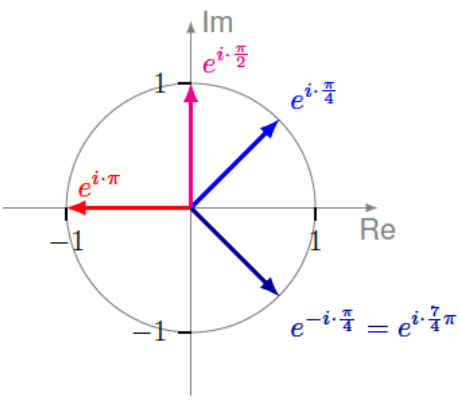
Geometrisch:

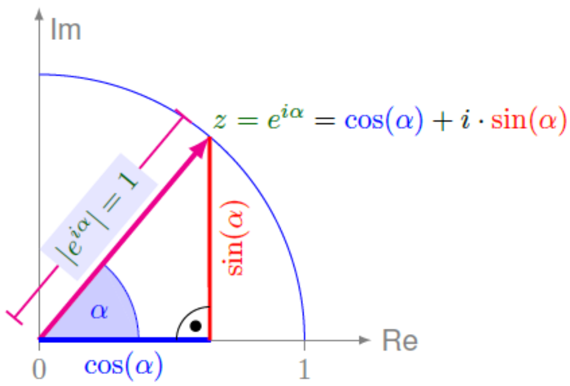


Lemma 15.5.7:

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt stets $e^{i \cdot \alpha} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$. Insbesondere gelten: $e^{i \cdot \pi} = -1$ und $e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = i$

Die Zahl $e^{i\alpha}$ ist die Zahl auf dem Einheitskreis mit Winkel α:





Eulerdarstellung 15.5.8:

Für eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit Polarkoordinaten $z \mathrel{\widehat{=}} (r, \alpha)$ gilt: $z = r \cdot e^{i \cdot \alpha}$

Umgekehrt gilt $r \cdot e^{i \cdot \alpha} \mathrel{\widehat{=}} (r, \alpha)$, d.h. $r \cdot e^{i \cdot \alpha}$ hat die Länge r und den Winkel α.

<u>Taylorentwicklung:</u>

Letzte 4 Seiten
Unbekannt ob relevant, aber keinen Bock mehr weiter zusammenzufassen.

Sage Info:

Sage-Box (Vektor).

```
sage: x = vector([0, -4, -1])
(0, -4, -1)
```

Sage-Box (Rechnen mit Vektoren).

```
sage: a = vector([1, 2, 3])
sage: b = vector([4, 5, 6])
sage: s = 2
sage: a + b
(5, 7, 9)
sage: s * a
(2, 4, 6)
```

Sage-Box (Matrix).

▶ Alternative I

```
sage: A = Matrix([[1,2,3],[3,2,1]])
sage: A
[1 2 3]
[3 2 1]
```

▶ Alternative II

```
sage: M = MatrixSpace(QQ,2,3)
sage: # MatrixSpace - Menge von Matrizen - Erstes Argument: Die den
Einträgen der Matrix zugrundeliegende Menge - Zweites Argument: Anzahl
der Zeilen - Drittes Argument: Anzahl der Spalten
sage: A = M([1,2,3,3,2,1])
[1 2 3]
[3 2 1]
```

Sage-Box (Rechnen mit Matrizen - Addition).

```
sage: A = Matrix([[0,6],[2, 8],[4,10]])
sage: B = Matrix([[1,7],[3, 9],[5,11]])
sage: C = A + B
sage: C
[1 13]
[5 17]
[9 21]
```

Sage-Box (Rechnen mit Matrizen - Multiplikation mit Skalaren).

```
sage: A = Matrix([[1,2,3],[4,5,6]])
sage: 5 * A
[ 5 10 15]
[20 25 30]
```

Sage-Box (Rechnen mit Matrizen - Transposition).

```
sage: A = Matrix([[1,2,3],[4,5,6]])
sage: transpose(A)
[1 4]
[2 5]
[3 6]
```

Sage-Box (Rechnen mit Matrizen - Matrix-Vektor-Multiplikation).

```
sage: A = Matrix([[9,7,5],[8,6,4]])
sage: v = vector([1,2,3])
sage: A * v
(38,32)
```