Mathe für die Informatik I – WiSe 2017
Dr. Samuel Hetterich

Blatt 9 — Abgabe: Mo 08.01.2018, 10:00 Uhr

▶ In der Vorlesung wird Ihnen der Gebrauch der freien Software Sage zur Lösung mathematischer Probleme nahegebracht. Diese Software lässt sich hier `www.sagemath.org/download` kostenlos herunterladen. Auf den folgenden Übungsblättern befindet sich nun jeweils eine Sage-Aufgabe. Diese Aufgabe lösen Sie indem Sie Ihren Programmcode und Ihre Berechnungen ausdrucken und an Ihre Abgabe heften.
▶ Auf diesem Übungsblatt haben Sie die Möglichkeit Zusatzpunkte zu sammeln. Diese Zusatzpunkte sind eine Hilfe für Sie, möglichst viele Punkte zu sammeln. Sie werden Ihnen angerechnet, aber nicht auf die zu erreichende Gesamtpunktzahl dazugezählt.

Aufgabe 9.1 Gruppen und Matrizen — **5 Punkte + 3 Zusatzpunkte**

a) Die Menge der Permutationen auf drei Elementen $S_3 = \{[123], [213], [321], [132], [312], [231]\}$ zusammen mit der Verknüpfung $\circ$, die Hintereinanderausführung der Permutationen, bildet eine Gruppe.

- ▶ Stellen Sie die Verknüpfungstabelle von $(S_3, \circ)$ auf.
- ▶ Geben Sie zu allen Gruppenelementen die inversen Elemente an.

b) Geben Sie eine abelsche Gruppe an, die mehr als ein Element enthält und dessen Elemente keine reelle Zahlen sind und beweisen Sie, dass es sich um eine Gruppe handelt.

c) Sei G_1 die Menge aller ganzzahligen 2×2 Matrizen A, für welche

- ▶ ganzzahlige inverse Matrizen A^{-1} existieren und
- ▶ gilt, dass $\det A > 0$.

Zeigen Sie, dass G_1 zusammen mit der Matrix-Multiplikation eine Gruppe bildet.

d) Sei G_2 die Menge aller ganzzahligen 2×2 Matrizen A mit $\det A = 1$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $G_1 = G_2$ gilt.

Aufgabe 9.2 Lineare Abbildungen — **5 Punkte + 3 Zusatzpunkte**

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Drehung um den Winkel $\pi/2$ gegen den Uhrzeigersinn. Geben Sie die Abbildungsmatrix M_f an.

b) Sei f eine lineare Abbildung, b ein Element des Bildraumes von f, sowie x eine Lösung der Gleichung $f(x) = b$. Finden Sie eine alternative Beschreibung der Menge aller y aus dem Definitionsbereich von f, für welche $f(x + y) = b$ gilt.

c) Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 20 \\ 0 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 14 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie den Kern von A. Welche Dimension hat das Bild von A?

d) Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung f zwischen zwei Vektorräumen über $\mathbb{R}$ mit der selben Dimension genau dann invertierbar ist, wenn die Spalten ihrer Abbildungsmatrix M_f linear unabhängig sind.

Aufgabe 9.3 Vektorräume — **5 Punkte + 3 Zusatzpunkte**

a) Sind die Vektoren $a_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -25 \\ -21 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

b) Bestimmen Sie die Dimension des von den Vektoren $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 39 \\ 12 \end{pmatrix}$ aufgespannten Vektorraums.

c) Bildet die Menge $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0 \right\}$ einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$?

d) Für welche $a \in \mathbb{R}$ bilden die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ -a \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 9.4 Determinante **5 Punkte + 3 Zusatzpunkte**

a) Welches Vorzeichen hat die Permutation [31524]?

b) Geben Sie die Determinanten der folgenden Matrizen an:

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 4 & 5 \\ 3 & 17 & 8 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 5 & 4 & 11 \\ 7 & 38 & -5 \end{pmatrix}$$

c) Entwickeln Sie die Determinante der Matrix $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 0 & 10 & 0 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ nach der zweiten Zeile.

d) Für welche Belegungen von $a \in R$ ist die Matrix $D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & a \end{pmatrix}$ invertierbar? Berechnen Sie für $a = 4$ die inverse Matrix von D.

Aufgabe 9.5 Sage **4 Punkte**

In dieser Aufgabe soll es darum gehen, die unterschiedlichen Laufzeiten von Algorithmen zur Determinantenberechnung zu beobachten.
Implementieren Sie dazu in Sage eine eigene Determinantenfunktion, welche eine Matrix `A` als Eingabe hat und die Determinante det `A` zurückgibt. Diese Funktion soll die Determinante von `A` durch rekursive Zeilen- oder Spaltenentwicklung berechnen.
Bestimmen Sie anschließend experimentell, wie groß die Matrizen sein können, deren Determinante Sie mittels ihrer Funktion bestimmen können und vergleichen sie das mit der Größe von Matrizen, mit der die eingebaute Funktion `A.det()` noch in annehmbarer Zeit eine Lösung zurückgibt. Zum Erstellen einer zufälligen $n \times n$-Matrix `A` über $\mathbb{Q}$ können Sie den Befehl

```
A = matrix.random(QQ,n)
```

verwenden.
Hinweis: Die in der Zeilen-/Spaltenentwicklung benötigte Streichungsmatrix $\mathtt{A}^{\cancel{i,j}}$ können Sie in Sage durch den Befehl

```
A.delete_rows([i]).delete_columns([j])
```

bestimmen.