Mathe für die Informatik I – WiSe 2017

Dr. Samuel Hetterich

Blatt 12 Abgabe: Mo 29.01.2018, 10:00 Uhr

▶ In der Vorlesung wird Ihnen der Gebrauch der freien Software Sage zur Lösung mathematischer Probleme nahegebracht. Diese Software lässt sich hier `www.sagemath.org/download` kostenlos herunterladen. Auf den folgenden Übungsblättern befindet sich nun jeweils eine Sage-Aufgabe. Diese Aufgabe lösen Sie indem Sie Ihren Programmcode und Ihre Berechnungen ausdrucken und an Ihre Abgabe heften.
▶ Die Gesamtpunktzahl der Hausaufgabenpunkte steht nun fest: Es sind 228.

Aufgabe 12.1 **4 Punkte + 2 Zusatzpunkte**

a) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge deren Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch a_n konvergiert und das zusätzlich gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht gilt ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert).

c) Zeigen Sie, dass eine beschränkte Folge unendlich viele konvergente Teilfolgen besitzt.

Aufgabe 12.2 **4 Punkte + 2 Zusatzpunkte**

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c < d$.

a) Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $c \in (a, b)$ mit $f(c) = g(c)$ gibt.

b) Es sei $f : [a, b] \to [c, d]$ eine streng monoton wachsende stetige Funktion mit $f(a) = c$ und $f(b) = d$. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

c) Zeigen Sie, dass der Mittelwertsatz der Differentialrechnung nicht allgemein für stetige (möglicherweise nicht in jedem Punkt differenzierbare) Funktionen gilt. Das heißt, dass es eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gibt, so dass kein $c \in [a, b]$ existiert, für welches f differenzierbar ist und zusätzlich

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Aufgabe 12.3 **4 Punkte + 2 Zusatzpunkte**

a) Für welche Punkte $u \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Funktionen (nicht) stetig? Begründen Sie ihre Antwort.

   i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|$

   ii) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{für } x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

b) Gegeben seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \begin{cases} |x| \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   i) Skizzieren Sie den Verlauf beider Funktionen im Intervall $[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}] \subset \mathbb{R}$.

   ii) Sind diese Funktionen *stetig* im Punkt $x = 0$? Geben Sie eine Begründung an!

Aufgabe 12.4 **2 Punkte**

Berechnen Sie die folgenden Ableitungen:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 + (2x^4 + 3x + 2)^2$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3}{x - 4}$

Aufgabe 12.5 **4 Punkte**

Konstruieren Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, die in keinem Eintrag eine 0 stehen hat und welche die vier Eigenwerte $2, 0, 1, 8$ besitzt.
Hinweis: Sie können für diese Aufgabe Sage verwenden. Der Befehl zum Bestimmen der Eigenwerte einer Matrix `A` ist `A.eigenvalues()`. Ebenso steht Ihnen der Befehl `A.inverse()` zum Invertieren von `A` zur Verfügung. Erinnern Sie sich noch an die letzte Aufgabe des vergangenen Jahres?