MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Matěj Michálek

Základní problémy náhodných procházek

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce:	doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D.
Studijní program:	Matematika
Studijní obor:	Obecná matematika

Praha 2019

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne .... Podpis autora

Rád bych poděkoval doc. RNDr. Danielu Hlubinkovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, převážně za jeho cenné rady a připomínky. Dále bych chtěl poděkovat mé rodině za to, že mě během celého studia podporovala.

Název práce: Základní problémy náhodných procházek

Autor: Matěj Michálek

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V této práci se budeme zabývat (jednoduchou) náhodnou procházkou v jednom, dvou a třech rozměrech. Nejprve zpracujeme některé základní problémy pro jednorozměrný případ. Budeme se věnovat pravděpodobnosti polohy na přímce v určitém čase, pravděpodobnosti návratu do počátku, otázce, zda máme návrat do počátku zaručený, a (diskrétnímu) zákonu arku-sinu. Některé z těchto výsledků zobecníme do více rozměrů. Konkrétně, ve dvou a třech dimenzích vyřešíme problém pravděpodobnosti polohy v prostoru a v čase a pro symetrickou náhodnou procházku se podíváme na návraty do počátku.

Klíčová slova: náhodná procházka, vícerozměrná náhodná procházka, pravděpodobnost polohy v prostoru a v čase, návrat do počátku, zákon arku-sinu

Title: Essential problems of random walks

Author: Matěj Michálek

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Daniel Hlubinka, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this paper, we cover some essential problems of (simple) random walks in one, two and three dimensions. At the begining, we work only in one dimension. We find the probability of a position on a line at particular time. Then we study returns to origin and examine if return to origin is certain. Also, we look into a theorem called the arc sine law. Furthermore, we generalise some of those problems into two and three dimensions. We investigate a probability of a position in time and space and returns to origin.

Keywords: random walk, more dimensional random walk, probability of a position in time and space, return to origin, return to equilibrium, arc sine law

Obsah

Úvod

Budeme se zabývat (jednoduchou) náhodnou procházkou v jednom, dvou a třech rozměrech. Nejprve pomocí zadané literatury (Feller, 1968) zpracujeme určité základní problémy pro jednorozměrnou verzi, jako je pravděpodobnost polohy $s \in \mathbb{Z}$ v čase $j \in \mathbb{N}_0$, pravděpodobnost existence návratu do počátku a (diskrétní) zákon arku-sinu. Některé důkazy uvedeme vlastní, některé doplníme o detaily a na některé se pouze odkážeme do literatury. Poté samostatně vyřešíme problém pravděpodobnosti polohy $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d$ v čase $j \in \mathbb{N}_0$ pro $d = 2$ a $d = 3$. Ve dvourozměrné verzi uvedeme dva postupy. První speciálně pro symetrickou náhodnou procházku a druhý obecně. V prvním případě jako vedlejší produkt našeho řešení přijdeme na zajímavý fakt, že existuje jakýsi vztah mezi symetrickou náhodnou procházkou v $\mathbb{Z}^2$ a dvěma nezávislými symetrickými náhodnými procházkami v $\mathbb{Z}$. Druhý případ provedeme obecně pomocí vlastností binomického a multinomického rozdělení a věty o úplné pravděpodobnosti. Na závěr se budeme věnovat otázce, zda návrat do počátku je v $\mathbb{Z}^2$ a v $\mathbb{Z}^3$ u symetrické náhodné procházky jistý či nikoliv.

1. Jednorozměrná náhodná procházka

1.1 Definice náhodné procházky

Definice (Jednoduchá náhodná procházka v $\mathbb{Z}$)**.** Nechť $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených diskrétních náhodných veličin s hodnotami v $\{\pm 1\}$, které pro každé $i \in \mathbb{N}$ splňují

$$\mathsf{P}\left(X_i = 1\right) = p \text{ a } \mathsf{P}\left(X_i = -1\right) = q,$$

kde $p,\ q \in (0,\ 1)$ a $p + q = 1$. Položme $S_0 := 0$ a pro každé $j \in \mathbb{N}$ definujme

$$S_j := \sum_{i=1}^{j} X_i.$$

Pak trojici $\left(\{S_j\}_{j=0}^{\infty},\ p,\ q\right)$ nazveme *jednoduchou náhodnou procházkou v* $\mathbb{Z}$.

Poznámka.

- Jednoduché náhodné procházce v $\mathbb{Z}$ budeme často říkat zkráceně *náhodná procházka.*
- Termínem *náhodná procházka* se obvykle myslí pouze posloupnost $\{S_j\}_{j=0}^{\infty}$. Pro naše účely se bude hodit zdůrazňovat pravděpodobnosti p a q.
- V případě, že $p = q = \frac{1}{2}$, budeme ale hovořit pouze o posloupnosti $\{S_j\}_{j=0}^{\infty}$ a nazveme ji *symetrickou náhodnou procházkou v* $\mathbb{Z}$.

Příklad. Takto definovanou náhodnou procházku si můžeme představit jako pohyb po přímce, kde začínáme v bodě 0 a každou další jednotku času provádíme (nezávisle na předchozím pohybu) s pravděpodobností p jeden krok o délce 1 doprava nebo s pravděpodobností q jeden krok o délce 1 doleva.

Poznámka. Náhodným veličinám X_i, $i \in \mathbb{N}$, budeme říkat *kroky*, indexy $j \in \mathbb{N}_0$ budou představovat *čas* a náhodné veličiny S_j *polohu* v čase j.

1.2 Poloha s v čase j

Motivace. Pro $j \in \mathbb{N}$ odvodíme, s jakou pravděpodobností se budeme nacházet v poloze $s \in \mathbb{Z}$ po j-tém kroku.

Poznámka. Tato problematika je řešena v (Feller, 1968, str. 68, 69 a 75) pomocí počtu možných cest. My to provedeme trochu jinak. Uvedeme dva vlastní důkazy. V prvním důkazu využijeme faktu, že počet jedniček ve vektoru

$$\mathbf{X} := \left(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_j\right)^{\top}$$

má *binomické rozdělení.* Druhý důkaz uděláme pomocí *charakteristických funkcí.* Některé kroky prvního důkazu ale budou podobné jako v literatuře.

Definice (Charakteristická funkce)**.** Je-li Z náhodná veličina, pak funkci

$$\varphi_Z : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ \varphi_Z(t) := \mathsf{E}\left(e^{itZ}\right),\ t \in \mathbb{R},$$

nazveme *charakteristickou funkcí* veličiny Z.

Poznámka. Dále nemusí být z (Feller, 1968, str. 68) hned jasné, jakých hodnot v $\mathbb{Z}$ může S_j vlastně nabývat. Zformulujeme tedy tvrzení a provedeme důkaz pořádně se všemi předpoklady.

Věta 1 (Pravděpodobnost polohy s v čase j v $\mathbb{Z}$)**.** *Nechť $\left(\{S_j\}_{j=0}^{\infty},\ p,\ q\right)$ je jednoduchá náhodná procházka v $\mathbb{Z}$, kde $p \in (0,\ 1)$ a $q = 1 - p$. Dále nechť $j \in \mathbb{N}_0$. Označme*

$$\mathbb{S}_j := \left\{s \in \mathbb{Z};\ |s| \leq j,\ \frac{j+s}{2} \in \mathbb{Z}\right\}, \tag{1.1}$$

tj. množinu všech $s \in \mathbb{Z}$, $|s| \leq j$, takových, že $j + s$ je sudé číslo. Pak platí

$$\mathsf{P}(S_j = s) = \begin{cases} \binom{j}{\frac{j+s}{2}} p^{\frac{j+s}{2}} q^{j-\frac{j+s}{2}} & \textit{pro } s \in \mathbb{S}_j, \\ \\ 0 & \textit{pro } s \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{S}_j. \end{cases} \tag{1.2}$$

Speciálně, je-li $\{S_j\}_{j=0}^{\infty}$ symetrická náhodná procházka v $\mathbb{Z}$, pak platí

$$\mathsf{P}(S_j = s) = \binom{j}{\frac{j+s}{2}} 2^{-j},\ s \in \mathbb{S}_j. \tag{1.3}$$

Důkaz 1.

1. Je-li $j = 0$, pak $\mathbb{S}_0 = \{0\}$ a dosazením dostaneme $\mathsf{P}(S_0 = 0) = 1$. $\mathsf{P}(S_0 = s) = 0$ pro $s \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ platí triviálně. Tedy pro $j = 0$ tvrzení platí.

2. Nechť $j \in \mathbb{N}$, tj. $j \neq 0$. Definujme si dvě nové diskrétní náhodné veličiny P_j a Q_j následujícím způsobem

   $$P_j := \sum_{i=1}^{j} \mathbb{I}[X_i = 1] \text{ a } Q_j := \sum_{i=1}^{j} \mathbb{I}[X_i = -1],$$

   kde symbol „$\mathbb{I}$“ značí $\mathbb{I}[X_i = x] = 1 \iff X_i = x$. Tedy P_j určuje počet jedniček náhodného vektoru $\mathbf{X}$ a Q_j počet mínus jedniček. Pak platí

   $$Q_j = j - P_j \text{ a } S_j = P_j - Q_j. \tag{1.4}$$

   Počet jedniček vektoru $\mathbf{X}$ má binomické rozdělení $\mathsf{Bi}(j,\ p)$, tj.

   $$\mathsf{P}(P_j = k) = \binom{j}{k} p^k q^{j-k},\ k \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ j\}. \tag{1.5}$$

   Dle (1.4) pro $k \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ j\}$ platí

   $$\mathsf{P}(P_j = k) = \mathsf{P}[P_j - Q_j = k - (j - k)] = \mathsf{P}(S_j = 2k - j). \tag{1.6}$$

Je-li $s = 2k - j$ pro $k \in \{0,\ 1,\ \ldots,\ j\}$, pak

$$k = \frac{j+s}{2} \in \mathbb{Z} \text{ a } |s| \leq j.$$

Tedy z (1.5) a (1.6) plyne tvrzení pro $s \in \mathbb{S}_j$, tj. $\mathsf{P}\left(S_j = s\right) = \mathsf{P}\left(P_j = k\right)$.
Pokud $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0,\ 1,\ \ldots,\ j\}$, tj. $s = 2k - 1 \notin \mathbb{S}_j$, z definice binomického rozdělení plyne $\mathsf{P}\left(P_j = k\right) = 0$ pro $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0,\ 1,\ \ldots,\ j\}$. Pak dle (1.6) platí $\mathsf{P}\left(S_j = s\right) = \mathsf{P}\left(P_j = k\right) = 0$.

K dokázání speciální části stačí za p a q dosadit $\frac{1}{2} = 2^{-1}$.

□

Důkaz 2. Charakteristická funkce veličiny X_1 je

$$\varphi_{X_1}(t) = \mathsf{E}\left(e^{itX_1}\right) = \sum_{k \in \{\pm 1\}} e^{itk}\ \mathsf{P}\left(X_1 = k\right) = pe^{it} + qe^{-it},\ t \in \mathbb{R}.$$

Z (Lachout, 2004, str. 86, Věta 15.13) víme, že pro charakteristickou funkci součtu $j \in \mathbb{N}$ nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin platí

$$\varphi_{S_j}(t) = \left[\varphi_{X_1}(t)\right]^j,\ t \in \mathbb{R}.$$

Tedy

$$\varphi_{S_j}(t) = \left(pe^{it} + qe^{-it}\right)^j,\ t \in \mathbb{R}.$$

Nechť $Y \sim \mathsf{Bi}(j,\ p)$, pak dle (Lachout, 2004, str. 83, Příklad 15.4) charakteristická funkce binomického rozdělení je

$$\varphi_Y(t) = \left(pe^{it} + q\right)^j,\ t \in \mathbb{R}.$$

Je-li Z náhodná veličina, pak pro lineární transformaci $Z^* = aZ + b$, kde $a,\ b \in \mathbb{R}$, platí

$$\varphi_{Z^*}(t) = \mathsf{E}e^{itZ^*} = \mathsf{E}e^{it(aZ+b)} = e^{itb}\mathsf{E}e^{it(aZ)} = e^{itb}\varphi_Z(at),\ t \in \mathbb{R}.$$

Dostaneme

$$\varphi_{2Y-j}(t) = e^{-itj}\left(pe^{2it} + q\right)^j = \left(pe^{it} + qe^{-it}\right)^j = \varphi_{S_j}(t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Protože z (Lachout, 2004, str. 84, Věta 15.9) víme, že charakteristická funkce jednoznačně určuje rozdělení, dostaneme $S_j \overset{\mathcal{D}}{=} 2Y - j$, kde symbol „$\overset{\mathcal{D}}{=}$“ značí *rovnost v distribuci*, tedy

$$\frac{j + S_j}{2} \sim \mathsf{Bi}(j,\ p).$$

Odtud již plyne tvrzení, neboť stačí nahradit výraz „$\frac{j+s}{2}$“ za „k“ v definici binomického rozdělení v (1.5).

□

Příklad. Tento výsledek můžeme využít např. v *hazardních hrách.* Hrajeme-li ruletu a sázíme na barvu (každé kolo stejnou částku), naše pravděpodobnost úspěchu je $p = \frac{18}{37}$. Dle věty 1 (pravděpodobnost polohy s v čase j v $\mathbb{Z}$) si můžeme spočítat, jaká je pravděpodobnost konkrétní hodnoty našeho kapitálu v konkrétním čase (uvažujeme-li, že máme neomezený kapitál), nebo jaká je pravděpodobnost, že překročíme či spadneme pod určitou hranici (stačí sčítat pravděpodobnosti). Situací, kdy nemáme neomezený kapitál, se zabývá tzv. *ruin problem*, který je zpracovaný v (Feller, 1968, str. 344-353).

1.3 Návrat do počátku

Motivace. V této sekci budeme zkoumat pravděpodobnost *existence návratu do počátku*, tj. pravděpodobnost, že nastane jev $[S_j = 0]$ pro nějaké $j \in \mathbb{N}$.

Definice (Návrat do počátku v $\mathbb{Z}$)**.** Nechť $\left(\{S_j\}_{j=0}^{\infty},\ p,\ q\right)$ je jednoduchá náhodná procházka v $\mathbb{Z}$, kde kde $p \in (0,\ 1)$ a $q = 1 - p$. Pak:

1. Jev $[S_{2k} = 0]$ nazveme *návrat do počátku v čase $2k$, $k \in \mathbb{N}$*;
2. Jev $[\exists k \in \mathbb{N} : S_{2k} = 0]$ nazveme *existence návratu do počátku.*

Poznámka.

- Návraty do počátku s lichými indexy nemá smysl definovat, neboť z věty 1 (pravděpodobnost polohy s v čase j v $\mathbb{Z}$) plyne, že pravděpodobnost návratu do počátku v lichém čase je nulová.
- V některých případech budeme považovat jako *návrat do počátku* i jistý jev $[S_0 = 0]$, i přesto, že se o „návrat“ v pravém slova smyslu nejedná.

Poznámka. V literatuře (Feller, 1968, str. 273, 3.11) jsou uvedeny dva vzorce pro pravděpodobnost návratu do počátku v čase $2k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Zformulujeme si tyto rovnosti jako lemma a to dokážeme (uděláme vlastní důkaz).

Lemma 2 (Návrat do počátku v $\mathbb{Z}$ v čase $2k$)**.** *Nechť $\left(\{S_j\}_{j=0}^{\infty},\ p,\ q\right)$ je jednoduchá náhodná procházka v $\mathbb{Z}$, kde $p \in (0,\ 1)$ a $q = 1 - p$. Pak pro každé $k \in \mathbb{N}_0$ platí*

$$\mathsf{P}\left(S_{2k} = 0\right) = \binom{2k}{k} p^k q^k = \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(-4pq\right)^k, \tag{1.7}$$

kde

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha\left(\alpha - 1\right)\cdots\left(\alpha - k + 1\right)}{k!} \quad \text{pro } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Důkaz. První rovnost v (1.7) plyne z věty 1 (pravděpodobnost polohy s v čase j) pro $j = 2k$ a $s = 0$. Nyní dokážeme

$$\binom{2k}{k} p^k q^k = \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(-4pq\right)^k \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0. \tag{1.8}$$

Označme si pro $k \in \mathbb{N}_0$ levou stranu (1.8) jako L_k a pravou stranu jako R_k, tj.

$$\begin{aligned} L_k &= \binom{2k}{k} p^k q^k = \frac{(2k)!}{(k!)^2} \left(pq\right)^k, \\ R_k &= \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(-4pq\right)^k = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2} - k + 1\right)}{k!} \left(-4pq\right)^k. \end{aligned}$$

Chceme tedy dokázat $L_k = R_k$. Použijeme *matematickou indukci.*

1. Nechť $k = 0$. Pak
$$L_0 = \binom{0}{0} (pq)^0 = 1$$
a pravá strana:
$$R_0 = \binom{-\frac{1}{2}}{0} (-4pq)^0 = „\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-0+1\right)}{0!}“ = \frac{1}{0!} = 1.$$
Tedy $L_0 = R_0$.

2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k \in \mathbb{N}_0$, tj. $L_k = R_k$. Chceme dokázat, že pak platí i pro $(k+1)$, tj. že platí
$$L_{k+1} = \binom{2(k+1)}{k+1} p^{k+1} q^{k+1} = \binom{-\frac{1}{2}}{k+1} (-4pq)^{k+1} = R_{k+1}. \tag{1.9}$$
Pro L_{k+1} a R_{k+1} platí
$$\begin{aligned} L_{k+1} &= \frac{[2(k+1)]!}{(k+1)!\,(k+1)!} (pq)^{k+1} = \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{(k+1)^2 (k!)^2} (pq)^{k+1} \\ &= \frac{2(2k+1)(2k)!}{(k+1)(k!)^2} (pq)^{k+1} = \frac{2(2k+1)pq}{k+1} L_k, \\ R_{k+1} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left[-\frac{1}{2}-(k+1)+1\right]}{(k+1)\,k!} (-4pq)^{k+1} \\ &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)\left(-\frac{1}{2}-k\right)}{(k+1)\,k!} (-4pq)^{k+1} \\ &= R_k \frac{\left(-\frac{1}{2}-k\right)}{(k+1)} (-4pq) = R_k \frac{-\frac{1}{2}(1+2k)}{k+1} (-4)\,pq = \frac{2(2k+1)pq}{k+1} R_k. \end{aligned}$$
Tedy dostaneme
$$L_{k+1} = R_{k+1} \Longleftrightarrow \frac{2(2k+1)pq}{k+1} L_k = \frac{2(2k+1)pq}{k+1} R_k \Longleftrightarrow L_k = R_k.$$

□

Poznámka. Pro pravděpodobnosti z (1.7) zavedeme podobné značení, které se používá v literatuře (Feller, 1968, str. 75).

Značení. Pro $k \in \mathbb{N}_0,\ p \in (0,\ 1)$ a $q = 1 - p$ označme
$$u_{2k}(p,\ q) := \binom{2k}{k} p^k q^k = \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-4pq)^k, \tag{1.10}$$
tj. pravděpodobnost návratu do počátku v čase $j = 2k$. Liché členy definujeme $u_{2k+1}(p,\ q) := 0$.

Poznámka. V literatuře se zavádí pouze u_{2k} a pravděpodobnosti p a q se vynechávají. Pokud ale $p = q = \frac{1}{2}$, pak pro $k \in \mathbb{N}_0$ budeme používat značení stejné jako v knize, tj. $u_k := u_k\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

Definice (Vytvořující funkce posloupnosti)**.** Nechť $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel a nechť existuje $\varepsilon \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\varepsilon > 0$, takové, že mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ konverguje pro všechna reálná $|s| < \varepsilon$. Pak reálnou funkci

$$A\,(s) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k,\ \ |s| < \varepsilon, \tag{1.11}$$

nazveme *vytvořující funkcí* posloupnosti $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Poznámka. V (Feller, 1968, str. 273, rovnice 3.11) je uvedena vytvořující funkce posloupnosti pravděpodobností $u_k\,(p,\ q)$, $k \in \mathbb{N}_0$, z (1.10). Autor se stručně zmiňuje, že se odvodí pomocí tzv. *Newtonovy binomiální formule*, která je popsaná v (Feller, 1968, str. 51, rovnice 8.7), tedy pomocí *Maclaurinovy řady* reálné funkce $(1+t)^{\alpha}$, $|t| < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Zformulujeme tento fakt jako lemma a provedeme důkaz s využitím této nápovědy.

Lemma 3 (Vytvořující funkce pro $u_k\,(p,\ q)$)**.** *Nechť $p \in (0,\ 1)$ a $q = 1 - p$. Pak vytvořující funkce posloupnosti $\{u_k\,(p,\ q)\}_{k=0}^{\infty}$ je*

$$U\,(s) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqs^2}},\ \ |s| < \frac{1}{2\sqrt{pq}}. \tag{1.12}$$

Důkaz. Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ známe Maclaurinovu řadu funkce

$$(1+t)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} t^k,\ \ |t| < 1. \tag{1.13}$$

Z definice vytvořující funkce, z lemmatu 2 (návrat do počátku v čase $2k$, druhá rovnost) a z (1.13) pro $|t| = |-4pqs^2| < 1$ máme

$$U\,(s) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k}\,(p,\ q)\,s^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \left(-4pqs^2\right)^k = \left(1-4pqs^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Dostáváme tedy (1.14).

□

Lemma 4 (Jednodušší tvar pro U v bodě 1)**.** *Nechť $p \in (0,\ 1)$, $q = 1-p$ a $p \neq q$. Pak vytvořující funkce posloupnosti $\{u_k\,(p,\ q)\}_{k=0}^{\infty}$ v bodě $s = 1$ je*

$$U\,(1) = \frac{1}{|p-q|}. \tag{1.14}$$

Důkaz. Pro $s = 1$ jmenovatel (1.14) je:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-4pq} &= \sqrt{1-4\,(1-q)\,q} = \sqrt{1-4q+4q^2} = \sqrt{(1-2q)^2}\\ &= \sqrt{(1-q-q)^2} = \sqrt{(p-q)^2} = |p-q|,\end{aligned}$$

kde jsme využili, že $p + q = 1$.

□

Lemma 5 (Divergence pro symetrickou procházku v $\mathbb{Z}$)**.** *Je-li* $p = q = \frac{1}{2}$*, pak platí*

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{2k} = +\infty.$$

Důkaz. Dle Stirlingovy formule

$$k! \approx \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k, \tag{1.15}$$

kde znak $\approx$ značí, že poměr obou stran (1.15) konverguje k jedné pro $k \to \infty$. Dle (1.10) a (1.15) u_{2k} je pro $k \to \infty$ přibližně

$$\begin{aligned} u_{2k} &= \binom{2k}{k} 2^{-2k} = \frac{(2k)!}{(k!)^2} 2^{-2k} \\ &\approx \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2k} \left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}}{\left[\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k\right]^2} 2^{-2k} = \frac{2\sqrt{\pi k}\; 2^{2k} \left(\frac{k}{e}\right)^{2k}}{2\pi k \left(\frac{k}{e}\right)^{2k}} 2^{-2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}}. \end{aligned}$$

Protože víme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{1}{2}}$ diverguje, tak dle *limitního srovnávacího kritéria* diverguje i řada $\sum_{k=0}^{\infty} u_{2k}$.

□

Značení. Nechť $\left(\{S_j\}_{j=0}^{\infty}, \ p, \ q\right)$ je jednoduchá náhodná procházka v $\mathbb{Z}$, kde $p \in (0, \ 1)$ a $q = 1 - p$. Nechť $k \in \mathbb{N}$. Označme

$$f_{2k}(p, \ q) := \mathsf{P}\left(S_{2k} = 0, \ S_{2j} \neq 0 \ \forall j \in \mathbb{N}, \ j \leq k-1\right), \tag{1.16}$$

tj. *pravděpodobnost prvního návratu do počátku v čase* $2k$. Liché členy definujme $f_{2k-1}(p, \ q) := 0$ (neboť z věty 1 víme, že pravděpodobnost polohy 0 v lichém čase je nulová). Dále definujme $f_0(p, \ q) := 0$ a označme $f(p, \ q) := \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k}(p, \ q)$, tedy $f(p, \ q)$ je *pravděpodobnost existence návratu do počátku*, tj.

$$f(p, \ q) = \mathsf{P}\left(\exists k \in \mathbb{N} : S_{2k} = 0\right),$$

neboť $f_{2k}(p, \ q)$ jsou pravděpodobnosti disjunktních jevů. Pokud $p = q = \frac{1}{2}$, pak $f := f\left(\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}\right)$ a $f_k := f_k\left(\frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}\right)$ pro $k \in \mathbb{N}_0$.

Poznámka. K nalezení *pravděpodobnosti existence návratu do počátku* můžeme využít fakt, který platí obecně pro posloupnost stejně rozdělených veličin, viz. tzv. *rekurentní jevy.* Tato teorie je zpracovaná v (Feller, 1968, str. 307-316). Na straně (Feller, 1968, str. 312, Theorem 2) je dokázaná následující věta. My ji uvedeme bez důkazu, pouze ji zformulujeme trochu jiným způsobem, aby obsahovala všechny potřebné předpoklady a nevyžadovala definice pojmů uvedených na stránkách předtím. Poté ji aplikujeme na náš speciální případ náhodné procházky.

Věta 6 (Vlastnost konečných posloupností)**.** *Nechť* $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ *je posloupnost stejně rozdělených* (ne nutně nezávislých) *náhodných veličin* (mohou být i vektory). *Nechť* ε *je nějaká vlastnost konečných posloupností, ve smyslu, že jsme schopni* *rozhodnout, zda posloupnost* $\{e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n\}$ *pro libovolné* $n \in \mathbb{N}$ *tuto vlastnost* ε *má či nikoliv* (např. že součet všech prvků je nulový). *Nechť* $n \in \mathbb{N}$. *Označme*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_n := \{E_1,\ E_2,\ \ldots,\ E_n\}\,,\\
&u_n^* := \mathsf{P}\Big(\mathbf{E}_n \text{ splňuje vlastnost } \varepsilon\Big),\\
&f_n^* := \mathsf{P}\Big(\mathbf{E}_n \text{ splňuje vlastnost } \varepsilon,\ \text{ ale } \forall k \in \mathbb{N},\ k < n,\ \mathbf{E}_k \text{ nesplňuje vlastnost } \varepsilon\Big),
\end{aligned}$$

tj. pravděpodobnost, že n *je nejmenší přirozené číslo takové, pro které* $\mathbf{E}_n$ *vlastnost* ε *splňuje. Definujme* $f_0^* := 0$ *a* $u_0^* := 1$. *Dále označme*

$$f^* := \sum_{n=0}^{\infty} f_n^* \text{ a } u^* := \sum_{n=0}^{\infty} u_n^*.$$

Pak platí

$$f^* < 1 \Longleftrightarrow u^* < +\infty. \tag{1.17}$$

V takovém případě platí

$$f^* = \frac{u^* - 1}{u^*}, \tag{1.18}$$

je-li $u^* > 0$.

Důkaz. K nalezení v literatuře na (Feller, 1968, str. 312).

□

Poznámka. V našem případě náhodné procházky $\mathbf{E}_n = \{X_i\}_{i=1}^n$ a vlastnost ε, která nás zajímá, je *součet všech prvků rovný nule*, tj. do počátku se vrátíme právě tehdy, když součet kladných a záporných kroků je stejný. Máme tedy $u_n^* = u_n(p,\ q)$, $f_n^* = f_n(p,\ q)$, $u^* = U(1)$ a f^* je naše hledaná pravděpodobnost $f(p,\ q)$. Z této věty je patrné, že k nalezení pravděpodobnosti existence návratu do počátku stačí již (naše) nalezená vytvořující funkce U. Dostaneme tak následující větu.

Věta 7 (Existence návratu do počátku v $\mathbb{Z}$)**.** *Nechť* $\left(\{S_j\}_{j=0}^{\infty},\ p,\ q\right)$ *je jednoduchá náhodná procházka v* $\mathbb{Z}$*, kde* $p \in (0,\ 1)$ *a* $q = 1 - p$. *Pak platí*

$$f(p,\ q) = \mathsf{P}(\exists k \in \mathbb{N} : S_{2k} = 0) = 1 - |p - q|. \tag{1.19}$$

Důkaz.

1. Nechť $p = q = \frac{1}{2}$. Pak dle lemma 5 platí

$$(u^* =)\ \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k} = +\infty$$

a dle (1.17) $f\ (= f^*) = 1$.

2. Nechť $p \neq q$. Pak dle lemma 3 a lemma 4 platí

$$(u^* =)\ \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k}(p,\ q) = U(1) = \frac{1}{|p - q|}.$$

Z věty 6 dle rovnosti (1.18) dostaneme

$$(f^* =)\ f(p,\ q) = \frac{U(1) - 1}{U(1)} = \frac{\frac{1}{|p-q|} - 1}{\frac{1}{|p-q|}} = 1 - |p - q|. \tag{1.20}$$

□

Příklad. Z věty 7 (existence návratu do počátku v $\mathbb{Z}$) vidíme, že i pro malý rozdíl mezi pravděpodobností úspěchu a neúspěchu již nemáme zaručený návrat do nuly, tj. vrátíme-li se k našemu příkladu s ruletou, ať budeme hrát sebedéle, nemáme zaručené, že se někdy vrátíme do hodnoty kapitálu, s kterou jsme začali.

1.4 Diskrétní zákon arku-sinu

Motivace. V této části ještě zůstaneme u návratu do počátku. Budeme zkoumat, jaká je pravděpodobnost, že pokud se omezíme na konečnou posloupnost $\{S_j\}_j^n$, $n \in \mathbb{N}$, že se v konkrétním čase $j \in \mathbb{N}_0$, $j \leq n$, vrátíme do počátku naposledy, tj. od $j+1$ až do času n se již do počátku nevrátíme. Omezíme se pouze na symetrickou náhodnou procházku a dostaneme výsledek, kterému se říká *(diskrétní) zákon arku-sinu.*

Definice (Časový úsek J_n)**.** Pro $n \in \mathbb{N}_0$ označme $J_n := \{j \in \mathbb{N}_0;\ j \leq n\}$ množinu všech indexů posloupnosti $\{S_j\}_{j=0}^{\infty}$ od 0 do n. Této množině budeme říkat *časový úsek.*

Definice. Nechť $\{S_j\}_{j=0}^{\infty}$ je jednoduchá náhodná procházka v $\mathbb{Z}$. Náhodný jev

$$[S_{2k} = 0,\ S_{2j} \neq 0\ \forall j \in \mathbb{N},\ k+1 \leq j \leq n]\,,\ k,\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.21}$$

nazveme *poslední návrat do počátku v čase $2k$ na úseku J_{2n}.*

Poznámka. Pro pravděpodobnost náhodného jevu (1.21) zavedeme stejné značení jako v literatuře (Feller, 1968, str. 79).

Značení. Nechť $\{S_j\}_{j=0}^{\infty}$ je symetrická náhodná procházka v $\mathbb{Z}$. Nechť $k \in \mathbb{N}_0$ a $n \in \mathbb{N}_0$. *Pravděpodobnost posledního návratu do počátku v čase $2k$ na časovém úseku J_{2n}* označíme

$$\alpha_{2k,2n} := \mathsf{P}\left(S_{2k} = 0,\ S_{2j} \neq 0\ \forall j \in \mathbb{N},\ k+1 \leq j \leq n\right). \tag{1.22}$$

Poznámka. Nejprve (bez důkazu) zformulujeme lemma, které se v knize (Feller, 1968, str. 76) nazývá *hlavní lemma.* Toto tvrzení je v literatuře dokázané v (Feller, 1968, str. 76-77) s tím, že se autor odkazuje na větu *the ballot theorem*, která je uvedená v (Feller, 1968, str. 69).

Lemma 8 (Hlavní lemma)**.** *Nechť $\{S_j\}_{j=0}^{\infty}$ je symetrická náhodná procházka v $\mathbb{Z}$. Pak pro $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$\mathsf{P}\left(S_j \neq 0\ \forall j \in \mathbb{N},\ j \leq 2n\right) = \mathsf{P}\left(S_{2n} = 0\right). \tag{1.23}$$

Důkaz. V literatuře na (Feller, 1968, str. 76-77).

□

Poznámka. Následující tvrzení dokážeme velice podobně jako v (Feller, 1968, str. 79). Stejně tak jako v literatuře budeme vycházet z lemmatu 8, ale na rozdíl od důkazu v knize, který se částečně opírá o geometrický argument (počty cest), my využijeme *podmíněnou pravděpodobnost* a naše již dokázané lemma 2 (návrat do počátku v $\mathbb{Z}$ v čase $2k$). Myšlenka důkazu jinak zůstává totožná.

Věta 9 (Zákon arku-sinu pro poslední návrat do počátku na J_{2n})**.** *Nechť* $\{S_j\}_{j=0}^{\infty}$ *je symetrická náhodná procházka v* $\mathbb{Z}$*. Pak pro* $k \in \mathbb{N}_0$ *a* $n \in \mathbb{N}_0$ *platí*

$$\alpha_{2k,2n} = \binom{2n-2k}{n-k} 2^{-(2n-2k)} \binom{2k}{k} 2^{-2k}. \tag{1.24}$$

Důkaz. Označme jevy $A := [S_{2k+j} \neq 0 \ \forall j \in \mathbb{N},\ j \leq 2n-2k]\,,\ B := [S_{2k} = 0]\,.$ Zajímá nás tedy pravděpodobnost $\mathsf{P}(A \cap B)$. Z definice *podmíněné pravděpodobnosti* víme, že platí

$$\mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(A \cap B)\,. \tag{1.25}$$

Z lemma 2 (návrat do počátku v $\mathbb{Z}$ v čase $2k$) plyne, že pro symetrickou náhodnou procházku platí

$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} 2^{-2k}. \tag{1.26}$$

Nastane-li jev $[S_{2k} = 0]$, můžeme $S_{2k} = 0$ (polohu 0 v čase $2k$) uvažovat jako nový počátek a dostaneme

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(A|B) &= \mathsf{P}(S_{2k+j} \neq 0 \ \forall j \in \mathbb{N},\ j \leq 2n-2k|\ S_{2k} = 0) \\ &= \mathsf{P}(S_j \neq 0 \ \forall j \in \mathbb{N},\ j \leq 2n-2k)\,. \end{aligned}$$

Z lemmatu 8 (hlavní lemma) a z lemmatu 2 (návrat do počátku v $\mathbb{Z}$ v čase $2k$) plyne

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(A|B) &= \mathsf{P}(S_j \neq 0 \ \forall j \in \mathbb{N},\ j \leq 2n-2k) \\ &= \mathsf{P}(S_{2n-2k} = 0) = \binom{2n-2k}{n-k} 2^{-(2n-2k)}. \end{aligned}$$

Vynásobením $\mathsf{P}(A|B)$ a $\mathsf{P}(B)$ dostaneme (1.24), tvrzení je tedy dokázáno.

$\square$

Poznámka. Rozdělení dané pravděpodobnostmi v (1.24) se nazývá *diskrétní rozdělení arku-sinu (řádu n)*, neboť pro „dostatečně velká $n \in \mathbb{N}$“ je přibližně:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_0,\ k \leq xn} \alpha_{2k,2n} \text{ „}\approx\text{“ } \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x},\ x \in (0,\ 1)\,. \tag{1.27}$$

Více informací v (Feller, 1968, str. 79, 80).

Poznámka. Zákon arku-sinu se nevztahuje pouze na poslední návrat do počátku. Hodnoty $\alpha_{2k,2n}$, $k,\ n \in \mathbb{N}_0$, jsou speciální v tom, že dle (Feller, 1968, str. 82, Theorem 2) zároveň určují pravděpodobnost, že na časovém úseku J_{2n} strávíme $2k$ jednotek času na pozitivní pozici a $2n - 2k$ jednotek času na negativní pozici. Dá se ukázat, že tyto pravděpodobnosti jsou největší buď pro malé k, nebo pro velké k. Toto odporuje klasické naivní hráčské intuici, že když hrajeme férovou hru ($p = \frac{1}{2}$), že musíme přibližně půlku času strávit v pozitivních hodnotách a půlku času v negativních.

2. Vícerozměrná náhodná procházka

2.1 Definice náhodné procházky v $\mathbb{Z}^d$

Motivace. Zobecníme definici jednoduché náhodné procházky do více rozměrů. Dále odvodíme *pravděpodobnost polohy* $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d$ *v čase* $j \in \mathbb{N}_0$ pro $d \in \{2,\ 3\}$ a nakonec se podíváme na návraty do počátku v $\mathbb{Z}^2$ a v $\mathbb{Z}^3$.

Poznámka. Vícerozměrná náhodná procházka v (Feller, 1968) nijak formálně zadefinovná není. Pouze ji autor v (Feller, 1968, str. 359) popisuje jako „pohyb ve čtyřech (popř. šesti) směrech rovnoběžných s osami x a y (popř. z)“. Zformulujeme proto pořádnou matematickou definici (aby se shodovala s definicí pro jednorozměrný případ).

Značení. Nechť $d \in \mathbb{N}$ a $k \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ d\}$. Symbolem $\mathbf{e}_k$ označíme d-rozměrný vektor, který má na k-tém místě jedničku a v ostatních složkách nulu. Množinu všech těchto d-rozměrných vektorů a vektorů k nim opačným označíme symbolem $\mathbb{X}^d$, tj. $\mathbb{X}^d := \left\{\pm\mathbf{e}_k;\ k \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ d\}\right\}$.

Definice (Jednoduchá náhodná procházka v $\mathbb{Z}^d$)**.** Nechť $d \in \mathbb{N}$ a $\{\mathbf{X}_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých stejně rozdělených d-rozměrných diskrétních náhodných vektorů s hodnotami v $\mathbb{X}^d$, které pro každé $i \in \mathbb{N}$ a každé $k \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ d\}$ splňují:

$$\mathsf{P}\left(\mathbf{X}_i = \mathbf{e}_k\right) = p_k \text{ a } \mathsf{P}\left(\mathbf{X}_i = -\mathbf{e}_k\right) = q_k, \tag{2.1}$$

kde

$$\mathbf{p} = (p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_d)^\top \in (0,\ 1)^d \text{ a } \mathbf{q} = (q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_d)^\top \in (0,\ 1)^d \tag{2.2}$$

jsou takové, že

$$\sum_{k=1}^{d} p_k + \sum_{k=1}^{d} q_k = 1. \tag{2.3}$$

Položme $\mathbf{S}_0 := \mathbf{0}_d$, kde $\mathbf{0}_d$ je d-rozměrný nulový vektor, a pro každé $j \in \mathbb{N}$ definujme

$$\mathbf{S}_j := \sum_{i=1}^{j} \mathbf{X}_i.$$

Pak trojici

$$\left(\{\mathbf{S}_j\}_{j=0}^{\infty},\ \mathbf{p},\ \mathbf{q}\right) \tag{2.4}$$

nazveme *jednoduchou náhodnou procházkou v* $\mathbb{Z}^d$.

Poznámka.

- Analogicky jako v jednorozměrném případě jednoduché náhodné procházce v $\mathbb{Z}^d$ budeme někdy říkat pouze *náhodná procházka v* $\mathbb{Z}^d$ a někdy dokonce jen *procházka v* $\mathbb{Z}^d$.

- Pokud $p_k = q_k = \frac{1}{2d}$ pro všechna $k \in \{1,\ 2,\ \dots,\ d\}$, místo o trojici (2.4) budeme hovořit pouze o posloupnosti $\{\mathbf{S}_j\}_{j=0}^{\infty}$ a nazveme ji *symetrickou náhodnou procházkou v* $\mathbb{Z}^d$.

- Je-li $d = 1$, pak platí $\mathbb{X}^1 = \{\pm 1\}$ a tedy tato definice odpovídá naší původní definici pro jednoduchou náhodnou procházku v $\mathbb{Z}$, kde $p = p_1$ a $q = q_1$.

Příklad. Podobně jako jsme na jednorozměrnou náhodnou procházku nahlíželi jako na pohyb po přímce, tak na dvourozměrnou náhodnou procházku můžeme nahlížet jako na pohyb po *dvourozměrném* poli. Začneme v počátku $(0,\ 0)^T$ a budeme se pohybovat rovnoběžně s osami souřadnic x a y. Každou jednotku času učiníme nezávisle na předchozím pohybu jeden krok délky 1 buď doprava, doleva, dopředu a nebo dozadu s pravděpodobnostmi postupně p_1, q_1, p_2 a q_2. Dvourozměrný náhodný vektor $\mathbf{S}_j$ bude určovat naši polohu v $\mathbb{Z}^2$ po $j \in \mathbb{N}_0$ krocích. Trojrozměrný případ bude vypadat analogicky. Přibude nám navíc možnost jít ještě nahoru a nebo dolů s pravděpodobnostmi p_3 a q_3. Obecně v d-rozměrném prostoru, kde $d \in \mathbb{N}$, se budeme pohybovat rovnoběžně s osami souřadnic v $2d$ možných navzájem kolmých směrech s pravděpodobnostmi $p_1,\ q_1,\ p_2,\ q_2,\ \dots,\ p_d,\ q_d$.

2.2 Poloha s v čase j v $\mathbb{Z}^2$ (symetrická verze)

Motivace. V této a příští podkapitole vymyslíme, jak zobecnit tvrzení 1 do dvoudimenzionálního prostoru, tj. najdeme pravděpodobnost polohy $\mathbf{S}_j$ v čase $j \in \mathbb{N}_0$ v $\mathbb{Z}^2$. Nejprve tento problém vyřešíme pro symetrickou verzi a poté se podíváme na obecnou.

Problém. Nechť $\{\mathbf{S}_j\}_{j=0}^{\infty}$ je symetrická náhodná procházka v $\mathbb{Z}^2$. Dále nechť $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2$ a $j \in \mathbb{N}_0$. Jaká je pravděpodobnost $\mathsf{P}(\mathbf{S}_j = \mathbf{s}) = ?$

Poznámka. Připomeneme si nejprve (bez důkazu) dvě známá základní fakta z teorie pravděpodobnosti, která se nám mohou hodit.

Lemma 10 (Marginální rozdělení a nezávislost)**.** *Nechť* $(U,\ V)^\top$ *je diskrétní dvourozměrný náhodný vektor s hodnotami v* $\Gamma \times \Lambda \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. *Potom:*

1. *Marginální rozdělení veličiny* U *spočíteme jako*

$$\mathsf{P}(U = u) = \sum_{v \in \Lambda} \mathsf{P}(U = u,\ V = v),\ u \in \mathbb{N}_0. \tag{2.5}$$

2. *Veličiny* U *a* V *jsou nezávislé právě tehdy, když pro všechna* $u \in \Gamma$ *a* $v \in \Lambda$ *platí*

$$\mathsf{P}(U = u,\ V = v) = \mathsf{P}(U = u)\,\mathsf{P}(V = v). \tag{2.6}$$

Poznámka. Jako řešení problému se nabízí rozložit vektor $\mathbf{S}_j$ na složky

$$\mathbf{S}_j = \left(S_j^x,\ S_j^y\right)^\top$$

a zkoumat zvlášť polohu S_j^x na x-ové ose a polohu S_j^y na y-ové ose. Analogicky můžeme rozložit $\mathbf{X}_i = (X_i^x,\ X_i^y)^\top$ pro všechna $i \in \{1,\ 2,\ \dots,\ j\}$.

Poznámka. Náhodný vektor $\mathbf{X}_1 = \left(X_1^x,\ X_1^y\right)^\top$ nabývá hodnot z množiny

$$\mathbb{X}^2 = \left\{(1,\ 0)^\top,\ (0,\ 1)^\top,\ (-1,\ 0)^\top,\ (0,\ -1)^\top\right\}. \tag{2.7}$$

Tedy náhodné veličiny X_1^x a X_1^y oboje nabývají hodnot z množiny $\{-1,\ 0,\ 1\}$.

Pozorování 11. *Náhodné veličiny X_1^x a X_1^y nejsou nezávislé.*

Důkaz. Pokud např. nastane jev $[X_1^x = 1]$, nemůže již nastat jev $[X_1^y = 1]$. □

Poznámka. Můžeme zkusit najít nějakou transformaci těchto vektorů, aby jednotlivé složky již nezávislé byly.

Definice (Zobrazení ω)**.** Definujme si zobrazení $\omega = (\lambda,\ \mu)^\top : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které každému vektoru $\mathbf{x} = (x,\ y)^\top \in \mathbb{R}^2$ přiřadí vektor:

$$\omega(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \text{ tj. } \begin{array}{l} \lambda(x,\ y) = x - y, \\ \mu(x,\ y) = x + y. \end{array}$$

Poznámka. Zobrazení ω je lineární určené maticí:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice k matici A je:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

tedy matice A je regulární a zobrazení ω je vzájemně jednoznačné.

Poznámka. Když zobrazení ω aplikujeme na vektory z množiny $\mathbb{X}^2$, dostaneme:

$$\begin{aligned}
\omega(\ \ 1,\ \ 0) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (\ \ 1,\ \ 1)^\top, \\
\omega(\ \ 0,\ \ 1) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1,\ \ 1)^\top, \\
\omega(-1,\ \ 0) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1, -1)^\top, \\
\omega(\ \ 0, -1) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (\ \ 1, -1)^\top.
\end{aligned}$$

Transformovaný náhodný vektor $\omega(\mathbf{X}_1)$ tedy nabývá hodnot z množiny:

$$\omega\left(\mathbb{X}^2\right) = \{\pm 1\}^2. \tag{2.8}$$

Otázka. Jsou jednotlivé složky transformovaného vektoru $\omega(\mathbf{X}_1)$ nezávislé?

Tvrzení 12 (i. i. d. po transformaci)**.** *Nechť $i \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{X}_i = (X_i^x,\ X_i^y)^\top$ je i-tý krok jednoduché symetrické náhodné procházky v $\mathbb{Z}^2$. Označme*

$$U_i := X_i^x - X_i^y,$$
$$V_i := X_i^x + X_i^y.$$

Pak U_i a V_i jsou nezávislé a stejně rozdělené náhodné veličiny splňující

$$\mathsf{P}(U_i = 1) = \mathsf{P}(U_i = -1) = \mathsf{P}(V_i = 1) = \mathsf{P}(V_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

Důkaz. Bez úhony na obecnosti předpokládejme $i = 1$ (vektory $\mathbf{X}_i$ jsou nezávislé a stejně rozdělené pro všechna $i \in \mathbb{N}$). Nejprve ukážeme stejné rozdělení. Nechť $\mathbf{x} = (x,\ y)^\top \in \mathbb{X}^2$. Pak z definice zobrazení ω je:

$$\omega(\mathbf{x}) = (x - y,\ x + y)^\top \in \omega\left(\mathbb{X}^2\right) = \{\pm 1\}^2$$

a pro tento vektor platí

$$\mathsf{P}[\omega(\mathbf{X}_1) = \omega(\mathbf{x})] = \mathsf{P}(\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}) = \frac{1}{4},$$

kde v první rovnosti jsme využili toho, že ω je vzájemně jednoznačné zobrazení a druhá rovnost plyne z faktu, že pracujeme se symetrickou verzí náhodné procházky. Pro všechny čtyři vektory $(u,\ v)^\top = (x - y,\ x + y)^\top$ z množiny $\{\pm 1\}^2$ tedy platí

$$\mathsf{P}\left[(U_1,\ V_1)^\top = (u,\ v)^\top\right] = \mathsf{P}(U_1 = u,\ V_1 = v) = \frac{1}{4}. \tag{2.9}$$

Z (2.8) víme, že náhodné veličiny U_1 a V_1 nabývají hodnot z $\{\pm 1\}$. Dle (2.5) spočítáme marginální rozdělení veličiny U_1

$$\mathsf{P}(U_1 = 1) = \sum_{v \in \{\pm 1\}} \mathsf{P}(U_1 = 1,\ V_1 = v) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$
$$\mathsf{P}(U_1 = -1) = \sum_{v \in \{\pm 1\}} \mathsf{P}(U_1 = -1,\ V_1 = v) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Analogicky spočítáme marginální rozdělení veličiny V_1 a dostaneme opět

$$\mathsf{P}(V_1 = 1) = \mathsf{P}(V_1 = -1) = \frac{1}{2}. \tag{2.10}$$

Oboje veličiny tedy nabývají hodnot z $\{\pm 1\}$, každé s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Jsou tedy stejně rozdělené. Z (2.6) dostaneme, že veličiny U_1 a V_1 jsou nezávislé, neboť pro všechna $u,\ v \in \{\pm 1\}$ platí

$$\mathsf{P}(U_1 = u)\,\mathsf{P}(V_1 = v) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \mathsf{P}(U_1 = u,\ V_1 = v).$$

$\square$

Značení. Položíme $S_0 := 0$ a $T_0 := 0$ a pro každé $j \in \mathbb{N}$ označíme

$$S_j := \sum_{i=1}^{j} U_i \text{ a } T_j := \sum_{i=1}^{j} V_i,$$

kde veličiny U_i a V_i, $i \in \mathbb{N}$, $i \leq j$, jsou specifikované v tvrzení 12 (i. i. d. po transformaci).

Poznámka. Z tvrzení 12 a z definice jednorozměrné náhodné procházky plyne, že posloupnosti $\{S_j\}_{j=0}^{\infty}$ a $\{T_j\}_{j=0}^{\infty}$ jsou dvě navzájem nezávislé jednoduché symetrické náhodné procházky v $\mathbb{Z}$. Dostaneme dokonce následující tvrzení.

Tvrzení 13 (Vztah symetrických náhodných procházek v $\mathbb{Z}$ a v $\mathbb{Z}^2$)**.** *Nechť $\{\mathbf{S}_j\}_{j=0}^{\infty}$ je symetrická náhodná procházka v $\mathbb{Z}^2$ a nechť $\{S_j\}_{j=0}^{\infty}$ a $\{T_j\}_{j=0}^{\infty}$ jsou dvě nezávislé symetrické náhodné procházky v $\mathbb{Z}$. Pak pro každé $j \in \mathbb{N}_0$ platí*

$$(S_j,\ T_j)^\top \stackrel{\mathcal{D}}{=} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{S}_j.$$

Důkaz. Pro $j = 0$ tvrzení platí triviálně. Nechť $j \in \mathbb{N}$ a $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2$. Pak

$$\omega(\mathbf{s}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{s}$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} \mathsf{P}[\mathbf{S}_j = \mathbf{s}] &= \mathsf{P}\left[\sum_{i=1}^{j} \mathbf{X}_i = \mathbf{s}\right] = \mathsf{P}\left[\omega\left(\sum_{i=1}^{j} \mathbf{X}_i\right) = \omega(\mathbf{s})\right] \\ &= \mathsf{P}\left[\sum_{i=1}^{j} \omega(\mathbf{X}_i) = \omega(\mathbf{s})\right] = \mathsf{P}\left[\sum_{i=1}^{j} (U_i,\ V_i)^T = \omega(\mathbf{s})\right] \\ &= \mathsf{P}\left[\left(\sum_{i=1}^{j} U_i,\ \sum_{i=1}^{j} V_i\right)^T = \omega(\mathbf{s})\right] \\ &= \mathsf{P}\left[(S_j,\ T_j)^T = \omega(\mathbf{s})\right], \end{aligned}$$

kde jsme v druhém řádku v první rovnosti využili linearity zobrazení ω (tj. můžeme „zaměnit“ sumu a ω).

□

Důsledek 14 (Součin pravděpodobností)**.** *Nechť $\mathbf{s} = (s,\ t)^\top \in \mathbb{Z}^2$ a $j \in \mathbb{N}_0$. Pak*

$$\mathsf{P}\left[\mathbf{S}_j = (s,\ t)^\top\right] = \mathsf{P}(S_j = s - t)\,\mathsf{P}(T_j = s + t). \tag{2.11}$$

Důkaz. Z tvrzení 13 (vztah symetrických náhodných procházek v $\mathbb{Z}$ a v $\mathbb{Z}^2$) a z definice zobrazení ω plyne

$$\mathsf{P}[\mathbf{S}_j = \mathbf{s}] = \mathsf{P}\left[(S_j,\ T_j)^\top = (s - t,\ s + t)^\top\right].$$

Dle tvrzení 12 (i. i. d. po transformaci) jsou pro každé $i \in \mathbb{N}$ náhodné veličiny U_i a V_i nezávislé. Tedy i náhodné veličiny S_j a T_j jsou nezávislé a z (2.6) dostaneme

$$\mathsf{P}\left[(S_j,\ T_j)^\top = (s - t,\ s + t)^\top\right] = \mathsf{P}(S_j = s - t)\,\mathsf{P}(T_j = s + t).$$

□

Poznámka. Můžeme tedy použít větu 1 (pravděpodobnost polohy s v čase j v $\mathbb{Z}$, speciální část) a dostaneme následující výsledek.

Věta 15 (Pravděpodobnost polohy $\mathbf{s}$ v čase j pro symetrickou procházku v $\mathbb{Z}^2$)**.** *Nechť $\{\mathbf{S}_j\}_{j=0}^{\infty}$ je symetrická jednoduchá náhodná procházka v $\mathbb{Z}^2$. Nechť $j \in \mathbb{N}_0$. Označme množinu*

$$\mathbb{T}_j := \left\{(s,\ t)^\top \in \mathbb{Z}^2;\ (s-t,\ s+t)^\top \in \mathbb{S}_j \times \mathbb{S}_j\right\},$$

tj. množinu všech $(s,\ t)^\top \in \mathbb{Z}^2$ takových, že $j+s-t$ a $j+s+t$ jsou sudá čísla splňující $|s-t| \leq j$ a $|s+t| \leq j$. Pak platí

$$\mathsf{P}\left[\boldsymbol{S}_j = (s,\ t)^\top\right] = \begin{cases} \binom{j}{\frac{j+s-t}{2}} 2^{-j} \binom{j}{\frac{j+s+t}{2}} 2^{-j} & \textit{pro } (s,\ t)^\top \in \mathbb{T}_j, \\ 0 & \textit{pro } (s,\ t)^\top \notin \mathbb{T}_j. \end{cases}$$

Důkaz. Plyne z důsledku 14 (součin pravděpodobností) a ze speciální části ve větě 1 (pravděpodobnost polohy s v čase j v $\mathbb{Z}$). Množinu $\mathbb{T}_j$ jsme odvodili z množiny $\mathbb{S}_j$, která je specifikovaná v (1.1). Aby pravděpodobnost pro polohu $(s,\ t)^\top$ byla nenulová, musí dle věty 1 a rovnosti (2.11) oboje hodnoty $s-t$ a $s+t$ zároveň ležet v $\mathbb{S}_j$.

$\square$

2.3 Poloha s v čase j v $\mathbb{Z}^2$ (obecná verze)

Poznámka. Nyní předvedeme druhý způsob řešení našeho problému. V tomto případě se již nebudeme omezovat na symetrickou verzi.

Problém. Nechť

$$\left(\{\mathbf{S}_j\}_{j=0}^{\infty},\ (p_1,\ p_2)^\top,\ (q_1,\ q_2)^\top\right)$$

je jednoduchá náhodná procházka v $\mathbb{Z}^2$, kde $p_1,\ p_2,\ q_1,\ q_2 \in (0,\ 1)$ splňují

$$p_1 + p_2 + q_1 + q_2 = 1.$$

Nechť $j \in \mathbb{N}_0$ a $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2$. Jaká je pravděpodobnost $\mathsf{P}(\mathbf{S}_j = \mathbf{s})$?

Značení. Nechť $j \in \mathbb{N}_0$. Náhodný vektor $\mathbf{S}_j$ si opět rozložíme na složky jako $\mathbf{S}_j = \left(S_j^x,\ S_j^y\right)^\top$. Je-li $j > 0$, jednotlivé kroky si rozložíme jako $\mathbf{X}_i = (X_i^x,\ X_i^y)^\top$ pro všechna $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ j\}$.

Poznámka. Z definice dvourozměrné náhodné procházky víme, že náhodné veličiny X_i^x a X_i^y, $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ j\}$, nabývají hodnot z $\{-1,\ 0,\ 1\}$. Tedy náhodné veličiny S_j^x a S_j^y jsou součty mínus jedniček, nul a jedniček.

Definice (Horizontální a vertikální krok)**.** Nechť $i \in \mathbb{N}$. Jev $[X_i^x \neq 0]$ nazveme *horizontální krok* a jev $[X_i^y \neq 0]$ nazveme *vertikální krok*.

Pozorování 16. *Pro $i \in \mathbb{N}$ jevy $[X_i^x \neq 0]$ a $[X_i^y \neq 0]$ jsou disjunktní.*

Důkaz. Plyne z definice vícerozměrné náhodné procházky, neboť vždy v právě jedné složce dostaneme nulu a v druhé plus nebo mínus jedničku.

□

Značení. Nechť $j \in \mathbb{N}$. Označme

$$K_j := \sum_{i=1}^{j} \mathbb{I}\left[X_i^x \neq 0\right]$$

počet plus a mínus jedniček ve vektoru $\left(X_1^x,\ X_2^x,\ \ldots, X_j^x\right)^\top$, tedy počet uskutečněných horizontálních kroků.

Pozorování 17. *Pro $j \in \mathbb{N}$ platí*

$$j - K_j = \sum_{i=1}^{j} \mathbb{I}\left[X_i^y \neq 0\right].$$

Důkaz. Víme, že vždy v jedné ze složek dostaneme nulu. Tedy, pokud mezi j kroky máme K_j nenulových x-ových složek, pak nutně musíme mít $j - K_j$ nenulových y-ových složek.

□

Poznámka. Pokud bychom znali hodnotu $K_j = k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq j$, tj. věděli bychom přesný počet horizontálních kroků (doprava nebo doleva), tedy k, a přesně počet kroků vertikálních (nahoru nebo dolů), tedy $j - k$, pak podobně jako v důkazu věty 1, by veličina S_j^x závisela na počtu kroků doprava mezi všemi k horizontálními kroky a veličina S_j^y na počtu kroků nahoru mezi všemi $j - k$ svislými kroky.

Příklad. Pokud $j = 5$ a $k = 3$, pak do bodu $(1,\ 0)^\top$ se dostaneme právě tehdy, když učiníme dva kroky doprava, jeden doleva, jeden nahoru a jeden dolů (v libovolném pořadí). Pokud ale k neznáme, pak do bodu $(1,\ 0)^\top$ se v čase $j = 5$ můžeme dostat více způsoby, např. také třemi kroky doprava a dvěma doleva.

Poznámka. Obecně je K_j náhodné. Budeme nejprve zkoumat jev

$$\left[S_j^x = s,\ S_j^y = t \middle|\ K_j = k\right]$$

pro $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq j$, a $s,\ t \in \mathbb{Z}$ splňující $s \in \mathbb{S}_k$ a $t \in \mathbb{S}_{j-k}$ (množina $\mathbb{S}_j$ je specifikovaná ve větě 1).

Značení. Označme

$$r_\xi := \frac{p_\xi}{p_\xi + q_\xi} \text{ a } h_\xi := 1 - r_\xi \text{ pro } \xi \in \mathbb{N}.$$

Poznámka. r_1 je pravděpodobnost kladného kroku za podmínky, že se pohybujeme po x-ové ose, a h_1 je pravděpodobnost záporného kroku za stejné podmínky. Analogicky pro r_2 a h_2.

Lemma 18 (Poloha **s** v čase j v $\mathbb{Z}^2$ za podmínky $K_j = k$)**.** *Nechť $j \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq j$, $s \in \mathbb{Z}$ a $t \in \mathbb{Z}$.*

1. *Pokud $s \in \mathbb{S}_k$ a $t \in \mathbb{S}_{j-k}$, tj. $s+k$ a $t+j-k$ jsou sudá čísla a $|s| \leq k$, $|t| \leq j-k$, pak platí*

$$\mathsf{P}\left(S_j^x = s,\ S_j^y = t \middle|\ K_j = k\right) = \binom{k}{\frac{k+s}{2}} r_1^{\frac{k+s}{2}} h_1^{k-\frac{k+s}{2}} \binom{j-k}{\frac{j-k+t}{2}} r_2^{\frac{j-k+t}{2}} h_2^{j-k-\frac{j-k+t}{2}}.$$

2. *Pokud $s \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{S}_k$ nebo $t \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{S}_{j-k}$, pak platí*

$$\mathsf{P}\left(S_j^x = s,\ S_j^y = t \middle|\ K_j = k\right) = 0.$$

Důkaz. Nechť nejprve $s \in \mathbb{S}_k$ a $t \in \mathbb{S}_{j-k}$. Označme

$$P_j^x := \sum_{i=1}^{j} \mathbb{I}\left[X_i^x = 1\right]$$

počet kroků doprava mezi všemi horizontálními kroky a

$$P_j^y := \sum_{i=1}^{j} \mathbb{I}\left[X_i^y = 1\right]$$

počet kroků nahoru mezi všemi vertikálními kroky. Můžeme si uvědomit, že pro pevné k jsou tyto dvě veličiny nezávislé (máme přesně daný počet k horizontálních a $j-k$ vertikálních kroků, jednotlivé kroky jsou dle definice nezávislé, tedy i počet kroků doprava mezi všemi horizontálními je nezávislý s počtem kroků nahoru mezi všemi vertikálními). Podobně jako v důkazu věty 1 (pravděpodobnost polohy s v čase j v $\mathbb{Z}$) mají obě tyto veličiny pro pevné $K_j = k$ binomické rozdělení, tj.

$$P_j^x \Big| K_j \sim \mathsf{Bi}\left(K_j,\ r_1\right) \text{ a } P_j^y \Big| K_j \sim \mathsf{Bi}\left(j - K_j,\ r_2\right), \tag{2.12}$$

myšleno ve smyslu rozdělení P_j^x a P_j^y podmíněné jevem $[K_j = k]$. Podobně jako v důkazu věty 1 dojdeme k platnosti

$$\left(S_j^x \Big| K_j\right) = 2\left(P_j^x \Big| K_j\right) - K_j \text{ a } \left(S_j^y \Big| K_j\right) = 2\left(P_j^y \Big| K_j\right) - (j - K_j). \tag{2.13}$$

Z (2.12) a z (2.13) dostaneme podobně jako v důkazu věty 1

$$\mathsf{P}\left(S_j^x = s \middle| K_j = k\right) = \mathsf{P}\left(P_j^x = \frac{s+k}{2} \middle| K_j = k\right) = \binom{k}{\frac{k+s}{2}} r_1^{\frac{k+s}{2}} h_1^{\frac{k-s}{2}},$$
$$\mathsf{P}\left(S_j^y = t \middle| K_j = k\right) = \mathsf{P}\left(P_j^y = \frac{t+j-k}{2} \middle| K_j = k\right) = \binom{j-k}{\frac{j-k+t}{2}} r_2^{\frac{j-k+t}{2}} h_2^{\frac{j-k-t}{2}},$$

kde jsme v exponentu nad h_1 a h_2 využili

$$k - \frac{k+s}{2} = \frac{k-s}{2},\ j-k-\frac{j-k+t}{2} = \frac{j-k-t}{2}.$$

Protože $P_j^x | K_j$ a $P_j^y | K_j$ jsou nezávislé, pak i $S_j^x | K_j$ a $S_j^y | K_j$ jsou nezávislé (závisí na stejných krocích), tedy výsledek je součin výše uvedených pravděpodobností a první část tvrzení je dokázaná. Je-li $s \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{S}_k$ nebo $t \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{S}_{j-k}$, pak podobně jako ve větě 1 dojdeme k závěru, že alespoň jedna z výše uvedených pravděpodobností je nulová a tedy i celkový součin je nulový.

$\square$

Lemma 19 (Počet horizontálních kroků)**.** *Nechť $j \in \mathbb{N}$ a $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq j$. Pak platí*

$$\mathsf{P}\left(K_j = k\right) = \binom{j}{k} \left(p_1 + q_1\right)^k \left(p_2 + q_2\right)^{j-k}.$$

Důkaz. Pro $i \in \mathbb{N}$ jev $[X_i^x \neq 0]$ dle definice vícerozměrné náhodné procházky nastane s pravděpodobností $p_1 + q_1$, tj. s pravděpodobností $p_1 + q_1$ učiníme horizontální krok. Pak náhodná veličina $\mathbb{I}\left[X_i^x \neq 0\right]$ má alternativní rozdělení s parametrem $p_1 + q_1$ a

$$K_j = \sum_{i=1}^{j} \mathbb{I}\left[X_i^x \neq 0\right]$$

má binomické rozdělení $\mathsf{Bi}\left(j,\ p_1 + q_1\right)$.

$\square$

Poznámka. Protože náhodné jevy $[K_j = k]$ a $[K_j = l]$ jsou disjunktní pro $k \neq l$, kde $k,\ l \in \mathbb{N}_0$, $k,\ l \leq j$, a mají všechny kladnou pravděpodobnost, pak pravděpodobnost $\mathsf{P}\left(S_j^x = s,\ S_j^y = t\right)$, kde $s - t \in \mathbb{S}_j$, $s + t \in \mathbb{S}_j$, můžeme získat pomocí věty *o úplné pravděpodobnosti* jako

$$\mathsf{P}\left(S_j^x = s,\ S_j^y = t\right) = \sum_{k=0}^{j} \mathsf{P}\left(S_j^x = s,\ S_j^y = t \middle|\ K_j = k\right) \mathsf{P}\left(K_j = k\right). \tag{2.14}$$

Podmínku „$s - t \in \mathbb{S}_j,\ s + t \in \mathbb{S}_j$“ jsme si „vypůjčili“ z věty 15, neboť již víme, že do jiných bodů se „nemůžeme dostat“. Protože spousta výše uvedených pravděpodobností za sumou vyjde nulových, tak si také odvodíme novou množinu, přes kterou budeme sčítat čísla k. Dostaneme následující výsledek.

Věta 20 (Poloha $\mathbf{s}$ v čase j v $\mathbb{Z}^2$ - obecná verze)**.** *Nechť*

$$\left(\left\{\mathbf{S}_j\right\}_{j=0}^{\infty},\ \left(p_1,\ p_2\right)^\top,\ \left(q_1,\ q_2\right)^\top\right)$$

je jednoduchá náhodná procházka v $\mathbb{Z}^2$, kde $p_1,\ p_2,\ q_1,\ q_2 \in (0,\ 1)$ splňují

$$p_1 + p_2 + q_1 + q_2 = 1.$$

Nechť $j \in \mathbb{N}_0$ a $(s,\ t)^\top \in \mathbb{Z}^2$. Pokud $s - t \in \mathbb{S}_j$ a $s + t \in \mathbb{S}_j$, pak pravděpodobnost

$$\mathsf{P}\left[\boldsymbol{S}_j = (s,\ t)^\top\right]$$

je rovna výrazu

$$\sum_{k \,\in\, \mathbb{K}_j(s,\,t)} \binom{k}{\frac{k+s}{2}} r_1^{\frac{k+s}{2}} h_1^{k-\frac{k+s}{2}} \binom{j-k}{\frac{j-k+t}{2}} r_2^{\frac{j-k+t}{2}} h_2^{j-k-\frac{j-k+t}{2}} \binom{j}{k} \left(p_1 + q_1\right)^k \left(p_2 + q_2\right)^{j-k},$$

kde

$$\mathbb{K}_j\left(s,\ t\right) := \left\{k \in \mathbb{N}_0;\ |k| \leq j,\ \frac{s+k}{2} \in \mathbb{Z},\ |s| \leq k,\ \frac{t+j-k}{2} \in \mathbb{Z},\ |t| \leq j-k\right\}.$$

Důkaz. Pro $j \in \mathbb{N}$ plyne z lemmatu 18 (poloha $\mathbf{s}$ v čase j v $\mathbb{Z}^2$ za podmínky $K_j = k$), lemmatu 19 (počet horizontálních kroků) a z (2.14). Množina $\mathbb{K}_j\,(s,\ t)$ je množina takových $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq j$, pro která platí $s \in \mathbb{S}_k$ a $t \in \mathbb{S}_{j-k}$, tj. $s + k$ a $t + j - k$ jsou sudá čísla a $|s| \leq k$, $|t| \leq j - k$, neboť právě pro tyto trojice k, s a t jsou pravděpodobnosti z lemmatu 18 nenulové. Nechť $j = 0$. Pak z definice víme, že pravděpodobnost polohy $\mathbf{0}_2$ v čase 0 je 1 a pravděpodobnost nenulové polohy v čase 0 je nulová. Pro $s = t = 0$ dostaneme $\mathbb{K}_0\,(0,\ 0) = \{0\}$ a dosadíme-li do sumy výše $k = j = s = t = 0$, dostaneme 1. Pro $s \neq 0$ nebo $t \neq 0$ je $\mathbb{K}_0\,(s,\ t)$ prázdná množina, tedy triviálně „nasčítáme“ nulu.

□

2.4 Poloha s v čase j v $\mathbb{Z}^3$

Poznámka. Zobecníme předchozí výsledek do $\mathbb{Z}^3$. Princip odvození bude totožný jako v $\mathbb{Z}^2$, budeme tedy postupovat velice stručně. Zajímá nás pravděpodobnost polohy $(s,\ t,\ u)^\top \in \mathbb{Z}^3$ v čase $j \in \mathbb{N}_0$ pro jednoduchou náhodnou procházku v $\mathbb{Z}^3$. Značení S_j^x a S_j^y bude analogické jako v předchozí sekci. Přibude nám navíc třetí složka S_j^z. Opět si označíme K_j počet všech horizontálních kroků, tj. kroků po ose x. Dále si označíme L_j počet všech vertikálních kroků, tj. kroků po ose y. Pak $M_j := j - K_j - L_j$ je počet všech kroků po ose z. Podobnou úvahou jako v $\mathbb{Z}^2$ dojdeme k následujícím výsledkům.

Lemma 21 (Poloha $\mathbf{s}$ v čase j v $\mathbb{Z}^3$ za podmínky $K_j = k$ a $L_j = l$)**.** *Nechť $j \in \mathbb{N}$, $k,\ l \in \mathbb{N}_0$, $k + l \leq j$ a $s,\ t,\ u \in \mathbb{Z}$. Je-li $s \in \mathbb{S}_k$, $t \in \mathbb{S}_l$ a $u \in \mathbb{S}_{1-l-k}$, pak pravděpodobnost*

$$\mathsf{P}\left(S_j^x = s,\ S_j^y = t,\ S_j^z = u \middle|\ K_j = k,\ L_j = l\right)$$

je rovna výrazu

$$\binom{k}{\frac{k+s}{2}} r_1^{\frac{k+s}{2}} h_1^{k-\frac{k+s}{2}} \binom{l}{\frac{l+t}{2}} r_2^{\frac{l+t}{2}} h_2^{l-\frac{l+t}{2}} \binom{j-k-l}{\frac{j-k-l+u}{2}} r_3^{\frac{j-k-l+u}{2}} h_3^{j-k-l-\frac{j-k-l+u}{2}}.$$

Důkaz. Dokáže se podobně jako lemma 18 (poloha $\mathbf{s}$ v čase j v $\mathbb{Z}^2$ za podmínky $K_j = k$).

□

Lemma 22 (Pravděpodobnost podmínky $K_j = k$ a $L_j = l$)**.** *Nechť $j \in \mathbb{N}$, $k,\ l \in \mathbb{N}_0$ a $k + l \leq j$. Pak platí*

$$\mathsf{P}\Big(K_j = k,\ L_j = l\Big) = \frac{j!}{k!\ l!\ (j-k-l)!} (p_1 + q_1)^k (p_2 + q_2)^l (p_3 + q_3)^{j-k-l}.$$

Důkaz. Podobně jako v $\mathbb{Z}^2$ náhodná veličina K_j měla binomické rozdělení, má náhodný vektor $(K_j,\ L_j,\ M_j)^\top$ *multinomické* rozdělení s paremetrem j a vektorem pravděpodobností $(p_1 + q_1,\ p_2 + q_2,\ p_3 + q_3)^\top$.

□

Věta 23 (Poloha $\mathbf{s}$ v čase j v $\mathbb{Z}^3$)**.** *Nechť*

$$\left(\{\mathbf{S}_j\}_{j=0}^{\infty},\ (p_1,\ p_2,\ p_3)^\top,\ (q_1,\ q_2,\ q_3)^\top\right)$$

je jednoduchá náhodná procházka v $\mathbb{Z}^3$*, kde* $p_1,\ p_2,\ q_1,\ q_2,\ p_3,\ q_3 \in (0,\ 1)$ *splňují* $p_1 + p_2 + q_1 + q_2 + p_3 + q_3 = 1$*. Nechť* $j \in \mathbb{N}_0$ *a* $(s,\ t,\ u)^\top \in \mathbb{Z}^3$*. Pak platí*

$$\mathsf{P}\left[\mathbf{S}_j = (s,\ t,\ u)^\top\right] = \sum_{(k,\, l)^\top \in \mathbb{L}} a(k,\ l)\ b(k,\ l),$$

kde

$$a(k,\ l) := \binom{k}{\frac{k+s}{2}} r_1^{\frac{k+s}{2}} h_1^{k-\frac{k+s}{2}} \binom{l}{\frac{l+t}{2}} r_2^{\frac{l+t}{2}} h_2^{l-\frac{l+t}{2}} \binom{j-k-l}{\frac{j-k-l+u}{2}} r_3^{\frac{j-k-l+u}{2}} h_3^{j-k-l-\frac{j-k-l+u}{2}},$$

$$b(k,\ l) := \frac{j!}{k!\ l!\ (j-k-l)!} (p_1+q_1)^k (p_2+q_2)^l (p_3+q_3)^{j-k-l}$$

pro $(k,\ l)^\top$ *z množiny* $\mathbb{L}$*, která je daná předpisem*

$$\mathbb{L} := \left\{ (k,\ l)^\top \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0;\ k + l \leq j,\ s \in \mathbb{S}_k,\ t \in \mathbb{S}_l,\ u \in \mathbb{S}_{j-l-k} \right\}.$$

Důkaz. Plyne z lemmatu 21 (poloha $\mathbf{s}$ v čase j v $\mathbb{Z}^3$ za podmínky $K_j = k$ a $L_j = l$), lemmatu 22 (pravděpodobnost podmínky $K_j = k$ a $L_j = l$) a z věty *o úplné pravděpodobnosti.* Množina $\mathbb{L}$ je odvozena z lemmatu 21 z podmínky pro nenulovou pravděpodobnost.

□

2.5 Návrat do počátku v $\mathbb{Z}^2$ a v $\mathbb{Z}^3$

Motivace. V této sekci se podíváme na *existenci návratu do počátku v* $\mathbb{Z}^2$ *a v* $\mathbb{Z}^3$, tj. zda je pravděpodobnost 1, že se do počátku někdy vrátíme.

Poznámka. Podobně jako v jednorozměrném případě využijeme větu 6 (vlastnost konečných posloupností). Najdeme tedy pravděpodobnost návratu do počátku v konkrétním čase $2m$, $m \in \mathbb{N}_0$, a podíváme se, zda součet všech těchto pravděpodobností konverguje nebo diverguje.

Lemma 24 (Návrat do počátku v $\mathbb{Z}^2$ v čase $2m$)**.** *Nechť*

$$\left(\{\mathbf{S}_j\}_{j=0}^{\infty},\ (p_1,\ p_2)^\top,\ (q_1,\ q_2)^\top\right)$$

je jednoduchá náhodná procházka v $\mathbb{Z}^2$*, kde* $p_1,\ p_2,\ q_1,\ q_2 \in (0,\ 1)$ *splňují*

$$p_1 + p_2 + q_1 + q_2 = 1.$$

Dále nechť $m \in \mathbb{N}$*. Pak pravděpodobnost* $\mathsf{P}(\mathbf{S}_{2m} = \mathbf{0}_2)$ *je rovna výrazu*

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{2k}{k} r_1^k h_1^k \binom{2m-2k}{m-k} r_2^{m-k} h_2^{m-k} \binom{2m}{2k} (p_1+q_1)^{2k} (p_2+q_2)^{2m-2k}.$$

Speciálně, pro symetrickou verzi platí

$$\mathsf{P}(\mathbf{S}_{2m} = \mathbf{0}_2) = \binom{2m}{m}^2 2^{-4m}.$$

Důkaz. Obecná verze je přímým důsledkem věty 20 (poloha $\mathbf{s}$ v čase j v $\mathbb{Z}^2$ - obecná verze). Stačí dosadit $s = t = 0$, $j = 2m$ a „$k \mapsto 2k$“. Množina $\mathbb{K}_{2m}(0,\ 0)$ je množina všech sudých čísel od 0 do $2m$, tedy sčítáme přes $2k$, $k \in \mathbb{N}_0$, $2k \leq 2m$ (v sumě můžeme „zredukovat“ na sčítání přes $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq m$). Symetrická verze je důsledkem věty 15 (pravděpodobnost polohy $\mathbf{s}$ v čase j pro symetrickou procházku v $\mathbb{Z}^2$) pro stejná $s = t = 0$ a $j = 2m$.

□

Lemma 25 (Návrat do počátku v $\mathbb{Z}^3$ v čase $2m$)**.** *Nechť*

$$\left(\{\mathbf{S}_j\}_{j=0}^{\infty},\ (p_1,\ p_2,\ p_3)^\top,\ (q_1,\ q_2,\ q_3)^\top\right)$$

je jednoduchá náhodná procházka v $\mathbb{Z}^3$*, kde* $p_1,\ p_2,\ q_1,\ q_2,\ p_3,\ q_3 \in (0,\ 1)$ *splňují* $p_1 + p_2 + q_1 + q_2 + p_3 + q_3 = 1$. *Nechť* $m \in \mathbb{N}$. *Pak platí*

$$\mathsf{P}\left(\mathbf{S}_{2m} = \mathbf{0}_3\right) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{m} \mathbb{I}\left[k + l \leq m\right]\ a\left(2k,\ 2l\right)\ b\left(2k,\ 2l\right), \tag{2.15}$$

kde

$$a\left(2k,\ 2l\right) = \binom{2k}{k} r_1^k h_1^k \binom{2l}{l} r_2^l h_2^l \binom{2m-2k-2l}{m-k-l} r_3^{m-k-l} h_3^{m-k-l},$$

$$b\left(2k,\ 2l\right) = \frac{(2m)!}{(2k)!\ (2l)!\ (2m-2k-2l)!}\left(p_1 + q_1\right)^{2k}\left(p_2 + q_2\right)^{2l}\left(p_3 + q_3\right)^{2m-2k-2l}$$

pro $k,\ l \in \mathbb{N}_0$, $k + l \leq m$, *a symbol „*$\mathbb{I}$*“ značí*

$$\mathbb{I}\left[k + l \leq m\right] = 1 \Longleftrightarrow k + l \leq m.$$

Speciálně, v symetrickém případě platí

$$\mathsf{P}\left(\mathbf{S}_{2m} = \mathbf{0}_3\right) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{m} \frac{\mathbb{I}\left[k + l \leq m\right](2m)!}{6^{2m}\left[k!\, l!\ (m-k-l)!\right]^2}. \tag{2.16}$$

Důkaz. Obecná verze tvrzení plyne z věty 23 (poloha $\mathbf{s}$ v čase j v $\mathbb{Z}^3$). Dosadíme $s = t = u = 0$, $j = 2m$, „$k \mapsto 2k$“ a „$l \mapsto 2l$“. Pro $s = t = u = 0$ je $\mathbb{L}$ množina všech vektorů $(2k,\ 2l)^\top$, $k,\ l \in \mathbb{N}_0$, $2k + 2l \leq 2m$. Tedy sčítáme přes $k,\ l \in \mathbb{N}_0$, $k + l \leq m$. Pro symetrickou procházku v $\mathbb{Z}^3$ již nemáme odvozen žádný „hezčí“ vztah bez sumy jako to bylo v $\mathbb{Z}^2$. Dosadíme tedy do (2.15) hodnoty

$$r_1 = r_2 = r_3 = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{2} \text{ a } h_1 = h_2 = h_3 = \frac{1}{2},$$

tj. $p_1 = q_1 = p_2 = q_2 = p_3 = q_3 = \frac{1}{6}$. Pak pro $k,\ l \in \mathbb{N}_0$, $k + l \leq m$, dostaneme

$$a\left(2k,\ 2l\right) = \frac{(2k)!}{(k)^2}\frac{(2l)!}{(l)^2}\frac{(2m-2k-2l)!}{(m-k-l)^2}\frac{1}{2^{2m}}, \tag{2.17}$$

$$b\left(2k,\ 2l\right) = \frac{(2m)!}{(2k)!\ (2l)!\ (2m-2k-2l)!}\frac{1}{3^{2m}}. \tag{2.18}$$

Vynásobením rovností (2.17) a (2.18) dostaneme výraz za sumou v (2.16).

□

Poznámka. Z ekvivalence (1.17) ve větě 6 (vlastnost konečných posloupností) podobně jako v důkazu věty 7 (existence návratu do počátku v $\mathbb{Z}$) víme, že platí

$$(f^* =)\, \mathsf{P}\left(\exists m \in \mathbb{N} : \mathbf{S}_{2m} = \mathbf{0}_d\right) = 1 \Longleftrightarrow (u^* =) \sum_{m=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\mathbf{S}_{2m} = \mathbf{0}_d\right) = +\infty, \quad (2.19)$$

kde $d = 2$ nebo $d = 3$. Zkoumat konvergenci řady $\sum_{m=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\mathbf{S}_{2m} = \mathbf{0}_d\right)$ pro *nesymetrickou* náhodnou procházku by bylo složité. Problém *existence návratu do počátku v* $\mathbb{Z}^2$ *a v* $\mathbb{Z}^3$ budeme tedy nadále řešit pouze pro *symetrickou* náhodnou procházku. Důkaz následující věty je uveden v literatuře (Feller, 1968, str. 360, 361). Budeme postupovat obdobně.

Věta 26. *Nechť* $d \in \{2,\ 3\}$ *a* $\{\mathbf{S}_j\}_{j=0}^{\infty}$ *je jednoduchá symetrická náhodná procházka v* $\mathbb{Z}^d$*.*

1. *Je-li* $d = 2$*, pak* $\mathsf{P}\left(\exists m \in \mathbb{N} : \mathbf{S}_{2m} = \mathbf{0}_d\right) = 1$.
2. *Je-li* $d = 3$*, pak* $\mathsf{P}\left(\exists m \in \mathbb{N} : \mathbf{S}_{2m} = \mathbf{0}_d\right) < 1$.

Důkaz.

1. Nechť $d = 2$. Pak dle lemma 24 (návrat do počátku v $\mathbb{Z}^2$ v čase $2m$) platí

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\mathbf{S}_{2m} = \mathbf{0}_2\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \binom{2m}{m}^2 2^{-4m}.$$

   Podobně jako v důkazu lemmatu 5 (divergence pro symetrickou procházku v $\mathbb{Z}$) dostaneme ze *Stirlingovy formule* pro $m \to \infty$ přibližně

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}\left(\mathbf{S}_{2m} = \mathbf{0}_2\right) &= \left[\binom{2m}{m} 2^{-2m}\right]^2 = \left[\frac{(2m)!}{(m!)^2} 2^{-2m}\right]^2 \\
&\approx \left[\frac{\sqrt{2\pi \cdot 2m}\left(\frac{2m}{e}\right)^{2m}}{\left[\sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^{m}\right]^2} 2^{-2m}\right]^2 = \left[\frac{2\sqrt{\pi m}\; 2^{2m}\left(\frac{m}{e}\right)^{2m}}{2\pi m \left(\frac{m}{e}\right)^{2m}} 2^{-2m}\right]^2 \\
&= \frac{1}{\pi m}.
\end{aligned}$$

   Protože víme, že řada $\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1}$ diverguje, pak ze *srovnávacího limitního kritéria* plyne

$$(u^* =) \sum_{m=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\mathbf{S}_{2m} = \mathbf{0}_2\right) = +\infty.$$

   Z (2.19) dostaneme, že

$$(f^* =) \sum_{m=1}^{\infty} \mathsf{P}\left(\exists m \in \mathbb{N} : \mathbf{S}_{2m} = \mathbf{0}_2\right) = 1.$$

2. Nechť $d = 3$. Dle lemma 25 (návrat do počátku v $\mathbb{Z}^3$ v čase $2m$) a (2.19) potřebujeme vyšetřit konvergenci řady

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{m} \frac{\mathbb{I}\left[k + l \leq m\right](2m)!}{6^{2m}\left[k!\, l!\, (m-k-l)!\right]^2}. \quad (2.20)$$

Výraz uvnitř řady (2.20) pro $m \in \mathbb{N}$, $k,\ l \in \mathbb{N}_0$, $k + l \leq m$, se rovná

$$\frac{\mathbb{I}\left[k + l \leq m\right](2m)!}{6^{2m}\left[k!\, l!\ (m-k-l)!\right]^2} = \frac{(2m)!}{2^{2m}\,(m!)^2}\left[\frac{m!}{3^m\, k!\, l!\ (m-k-l)!}\right]^2.$$

Pro $m \in \mathbb{N}$, $k,\ l \in \mathbb{N}_0$, $k + l \leq m$, označme

$$\gamma\,(k,\ l, m) := \frac{m!}{3^m\, k!\, l!\ (m-k-l)!}.$$

Poznámka: Výše uvedené hodnoty odpovídají pravděpodobnostem v lemmatu 22 (pravděpodobnost podmínky $K_j = k$ a $L_j = l$) pro symetrickou náhodnou procházku s $p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = p_3 + q_3 = 3^{-1}$, tedy určijí pravděpodobnostní rozdělení a vysčítají se na jedničku.

Nyní se odkážeme na literaturu. Dle (Feller, 1968, str. 361) pro $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} \mathbb{I}\left[k + l \leq m\right]\left[\gamma\,(k,\ l, m)\right]^2 \leq \max_{k,\, l\, \in\, \mathbb{N}_0,\, k+l \leq m}\left\{\gamma\,(k,\ l,\ m)\right\} \approx \frac{1}{m},$$

kde „≈“ opět značí, že poměr obou stran konverguje k jedné pro $m \to \infty$. Dále ze Stirlinovy formule pro $m \to \infty$ dostaneme

$$\frac{(2m)!}{2^{2m}\,(m!)^2} \approx \frac{\sqrt{2\pi}\sqrt{2m}\frac{(2m)^{2m}}{e^{2m}}}{2\pi m\frac{m^{2m}}{e^{2m}}2^{2m}} = \frac{1}{\sqrt{\pi m}}.$$

Tedy dohromady máme

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} \mathbb{I}\left[k + l \leq m\right]\frac{(2m)!}{2^{2m}\,(m!)^2}\left[\gamma\,(k,\ l, m)\right]^2 \approx \frac{1}{m}\frac{1}{\sqrt{2m}}.$$

Protože víme, že řada

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}\right)^{\frac{3}{2}}$$

konverguje, tak dle limitního srovnávacího kritéria konverguje i řada (2.20), tj. řada pravděpodobností návratů do počátku v časech $2m$, $m \in \mathbb{N}$. Z (2.19) tedy dostaneme $\mathsf{P}\left(\exists m \in \mathbb{N} : \mathbf{S}_{2m} = \mathbf{0}_3\right) < 1$.

$\square$

Závěr

V první kapitole jsme zavedli definici (obecné) jednoduché náhodné procházky v $\mathbb{Z}$. Poté jsme dvěma způsoby odvodili pravděpodobnost polohy $s \in \mathbb{Z}$ v čase $j \in \mathbb{N}_0$ a ukázali jsme, že náhodná veličina S_j má „v jistém smyslu“ binomické rozdělení. Dále jsme pomocí lemmat a tvrzení z literatury spočítali pravděpodobnost existence návratu do počátku a vyšla nám hodnota $1 - |p - q|$. Zjistili jsme tedy, že návrat do počátku máme zaručený pouze v symetrickém případě. Na konec první kapitoly jsme pomocí lemmatu z literatury dokázali (diskrétní) zákon arku-sinu, tj. našli jsme pravděpodobnost posledního návratu do počátku v konkrétním čase na konečném časovém úseku.

Ve druhé kapitole jsme zavedli definici (obecné) jednoduché náhodné procházky v $\mathbb{Z}^d$ pro $d \in \mathbb{N}$. Odvodili jsme pravděpodobnost polohy $\mathbf{s}$ v $\mathbb{Z}^2$ a $\mathbb{Z}^3$ v čase $j \in \mathbb{N}_0$. Vymysleli jsme dva způsoby řešení tohoto problému. První způsob byl pouze pro symetrický případ v $\mathbb{Z}^2$. Našli jsme vztah mezi symetrickou jednoduchou náhodnou procházkou v $\mathbb{Z}^2$ a dvěma nezávislými jednoduchými náhodnými procházkami v $\mathbb{Z}$. Pomocí tohoto vztahu, a naší již dokázané věty pro jednorozměrný případ jsme dostali výsledek. Druhý způsob byl pomocí podmíněných pravděpodobností a binomického a multinomického rozdělení. Na závěr jsme zpracovali návraty do počátku v $\mathbb{Z}^2$ a $\mathbb{Z}^3$ pro symetrickou jednoduchou náhodnou procházku a zodpověděli jsme na otázku, zda je návrat do počátku v těchto rozměrech jistý či nikoliv. Došli jsme k zajímavému výsledku, že ve dvou rozměrech je pravděpodobnost existence návratu do počátku 1, ale ve třech již ne.

Seznam použité literatury

Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Third Edition - Revised Printing. John Wiley and Sons, Inc., USA. ISBN 0-471-25708-7.

Lachout, P. (2004). *Teorie pravděpodobnosti.* První vydání. Nakladatelství Karolinum, Univerzita Karlova v Praze. ISBN 80-246-0872-3.