MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Ján Pavlech

Hra více hráčů modelovaná vícerozměrnou náhodnou procházkou

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Vedoucí práce
Studijní program: studijní program
Studijní obor: studijní obor

Praha 2021

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval(a) samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V .... dne ....

Podpis autora

Poděkování.

Název práce: Hra více hráčů modelovaná vícerozměrnou náhodnou procházkou

Autor: Ján Pavlech

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: Vedoucí práce, katedra

Abstrakt: Abstrakt.

Klíčová slova: klíčová slova

Title: Multivariate random walk model for multiple players

Author: Ján Pavlech

Department: Name of the department

Supervisor: Vedoucí práce, department

Abstract: Abstract.

Keywords: key words

Obsah

Úvod

Táto práca sa zaoberá zobecnením náhodnej prechádzky, ktorú budeme vnímať ako súčet nezávislých náhodných veličín, ktoré ale nebudú všetky rovnako rozdelené. Zobecnenie do viacerých rozmerov je prirodzené. Motiváciou pre tento model je hra mariáš. Je to hra troch hráčov kde v každom kole hrá jeden hráč (útočník) proti dvom (obrancom), pričom to kto je útočník sa v priebehu hry mení. V zjednodušenej verzii budeme predpokladať, že v každom kole môže útočník stratiť alebo získať 2 body a každý obranca môže stratiť alebo získať 1 bod. Spočítame základné rozdelenie takého modelu a nejaké základné vlastnosti. Následne sa pokúsime model zobecniť.

1. Hra troch hráčov s pravidelným striedaním a s rovnakými pravdepodobnosťami

1.1 Reprezentácia

Chceme získať náhodný vektor, ktorý bude určovať rozdelenie hry po n kolách. Máme troch hráčov, malo by teda ísť o trojrozmerný náhodný vektor, keďže ale máme hru s nulovým súčtom stav tretieho hráča vieme vždy dopočítať zo stavov prvých dvoch hráčov. Stačí teda uvažovať dvojrozmerný vektor, ktorý budeme značiť $\boldsymbol{S_n}$. Ten budeme reprezentovať ako súčet n dvojrozmerných náhodných veličín, z ktorých každá určuje ako dopadlo jedno kolo. Tie musíme rozlíšiť podľa toho ktorý hráč je útočník:

1. hráč je útočník: $\boldsymbol{X} = \begin{cases} (2,-1)^T, & \text{s pravdepodobnosťou } p \\ (-2,1)^T, & \text{s pravdepodobnosťou } q \end{cases}$

2. hráč je útočník: $\boldsymbol{Y} = \begin{cases} (-1,2)^T, & \text{s pravdepodobnosťou } p \\ (1,-2)^T, & \text{s pravdepodobnosťou } q \end{cases}$

3. hráč je útočník: $\boldsymbol{Z} = \begin{cases} (-1,-1)^T, & \text{s pravdepodobnosťou } p \\ (1,1)^T, & \text{s pravdepodobnosťou } q \end{cases}$

$p + q = 1, p > 0, q > 0$
Keďže hráči sa pravidelne striedajú S_n bude mať tvar
$\boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{X_1} + \boldsymbol{Y_1} + \boldsymbol{Z_1} + \boldsymbol{X_2} + \dots$
Kde $\boldsymbol{X_k} \sim \boldsymbol{X}$ sú iid, $\boldsymbol{Y_l} \sim \boldsymbol{Y}$ sú iid a $\boldsymbol{Z_m} \sim \boldsymbol{Z}$ sú iid, rovnako $\boldsymbol{X_k}$,$\boldsymbol{Y_l}$ a $\boldsymbol{Z_m}$ sú medzi sebou nezávislé.
Označme n_1, n_2 a n_3 porade počet kôl keď je útočník prvý, druhý a tretí hráč. Platí že $n_1 + n_2 + n_3 = n$. Keď pre usporiadame poradie sčítancov v zápise $\boldsymbol{S_n}$ dostávame:

$$\boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{X_1} + \boldsymbol{X_2} + \dots + \boldsymbol{Y_1} + \boldsymbol{Y_2} + \dots + \boldsymbol{Z_1} + \boldsymbol{Z_2} + \dots$$

$$\boldsymbol{S_n} = \sum_{k=1}^{n_1} \boldsymbol{X_k} + \sum_{l=1}^{n_2} \boldsymbol{Y_l} + \sum_{m=1}^{n_3} \boldsymbol{Z_m}$$

Ďalej označme

$$\boldsymbol{S_{n_1,x}} = \sum_{k=1}^{n_1} \boldsymbol{X_k}$$

$$\boldsymbol{S_{n_2,y}} = \sum_{l=1}^{n_2} \boldsymbol{Y_l}$$

$$\boldsymbol{S_{n_3,z}} = \sum_{m=1}^{n_3} \boldsymbol{Z_m}$$

Dokopy: $\boldsymbol{S_n} = \boldsymbol{S_{n_1,x}} + \boldsymbol{S_{n_2,y}} + \boldsymbol{S_{n_3,z}}$
Vieme že $\boldsymbol{S_{n_1,x}} = (2k, -k)^T, \boldsymbol{S_{n_2,y}} = (l, -2l)^T, \boldsymbol{S_{n_3,z}} = (m,m)^T$ s.j.
kde
$k \in \{-n_1, -n_1 + 2, \dots n_1 - 2, n_1\}$
$l \in \{-n_2, -n_2 + 2, \dots n_2 - 2, n_2\}$
$m \in \{-n_3, -n_3 + 2, \dots n_3 - 2, n_3\}$
Tieto náhodné vektory môžeme teda previesť na jednorozmerné náhodné prechádzky a budeme ich značiť:
$\boldsymbol{S_{n_1,x}} = (2k, -k)^T = [k], \boldsymbol{S_{n_2,y}} = (l, -2l)^T = [l], \boldsymbol{S_{n_3,z}} = (m,m)^T = [m]$

1.2 Rozdelenie $\boldsymbol{S_n}$

Keďže $\boldsymbol{S_{n_1,x}}$, $\boldsymbol{S_{n_2,y}}$ a $\boldsymbol{S_{n_3,z}}$ môžeme reprezentovať ako jednorozmerné náhodné prechádzky, platí pre ne:
$\mathsf{P}\left(\boldsymbol{S_{n_1,x}} = [k]\right) = \binom{n_1}{\frac{n_1+k}{2}} p^{\frac{n_1+k}{2}} q^{\frac{n_1-k}{2}}$
$\mathsf{P}\left(\boldsymbol{S_{n_2,y}} = [l]\right) = \binom{n_2}{\frac{n+l}{2}} p^{\frac{n_2-l}{2}} q^{\frac{n_2+l}{2}}$
$\mathsf{P}\left(\boldsymbol{S_{n_3,z}} = [m]\right) = \binom{n_3}{\frac{n_3+m}{2}} p^{\frac{n_3-m}{2}} q^{\frac{n_3+m}{2}}$
TODO zdroj?
Kombinačné čísla berieme ako nulové pokiaľ obsahujú neceločíselné alebo záporné hodnoty, taktiež v prípade ak je vrchné číslo menšie ako spodné.
Z vety o úplnej pravdepodobnosti spočítame aké má $\boldsymbol{S_n}$ roudelenie .

$$\mathsf{P}\left(\boldsymbol{S_n} = (u,v)^T\right) = \sum_{\substack{2k+l+m=u \\ k-2l+m=v \\ k,l,m \in \mathbb{Z}}} \mathsf{P}\left(\boldsymbol{S_{n_1,x}} = [k]\right) \mathsf{P}\left(\boldsymbol{S_{n_2,y}} = [l]\right) \mathsf{P}\left(\boldsymbol{S_{n_3,z}} = [m]\right)$$

Z výrazov
$2k + l + m = u$
$-k - 2l + m = v$
získame
$a := k + l = (u - v)/3$ pre pevné k máme už jednoznačne určené l.
$b := k + m = (u + v + a)/2 = (2u + v)/3$ teda pre pevné k je aj m jednoznačne určené.
Môžeme začať upravovať

$$\mathsf{P}\left(\boldsymbol{S_n} = (u,v)^T\right)$$

$$= \sum_{k=-n_1}^{n_1} \binom{n_1}{\frac{n_1+k}{2}} p^{\frac{n_1+k}{2}} q^{\frac{n_1-k}{2}} \binom{n_2}{\frac{n_2+a-k}{2}} p^{\frac{n_2-a+k}{2}} q^{\frac{n_2+a-k}{2}} \binom{n_3}{\frac{n_3+b-k}{2}} p^{\frac{n_3-b+k}{2}} q^{\frac{n_3+b-k}{2}}$$

$$= \sum_{j=0}^{2n_1} \binom{n_1}{\frac{j}{2}} p^{\frac{j}{2}} q^{\frac{2n_1-j}{2}} \binom{n_2}{\frac{n_1+n_2+a-j}{2}} p^{\frac{n_2-n_1-a+j}{2}} q^{\frac{n_1+n_2+a-j}{2}}$$

$$\binom{n_3}{\frac{n_1+n_3+b-j}{2}} p^{\frac{n_3-n_1-b+j}{2}} q^{\frac{n_1+n_2+b-j}{2}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k} p^k q^{n_1-k} \binom{n_2}{\frac{n_1+n_2+a}{2} - k} p^{\frac{n_2-n_1-a}{2}+k} q^{\frac{n_1+n_2+a}{2}-k}$$

$$\binom{n_3}{\frac{n_1+n_3+b}{2} - k} p^{\frac{n_3-n_1-b}{2}+k} q^{\frac{n_1+n_3+b}{2}-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{\frac{n_1+n_2+a}{2} - k} \binom{n_3}{\frac{n_1+n_3+b}{2} - k} p^{\frac{-2n_1+n_2+n_3-a-b}{2}+3k} q^{\frac{4n_1+n_2+n_3+a+b}{2}-3k}$$

kde $a := (u - v)/3$, $b := (2u + v)/3$ a $a + b = u$.

V prvej rovnosti dosadíme a a b, v druhej zameníme index sumy $j = k + n_1$. V tretej rovnosti využívame toho, že v prvom binomickom čísle sa nachádza $j/2$, stačí sa obmedziť sa na $j = 2k$.
Hráči sa pravidelne striedajú teda môžu nastať len tri situácie pre hodnoty n_1, n_2 a n_3. Postupne ich rozoberieme.

1. $n \; mod \; 3 = 0$ (ekvivalentne $n_1 = n_2 = n_3$)

$$\mathsf{P}\left(\boldsymbol{S_n} = (u,v)^T\right) = 0$$

$$= \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k} \binom{n_1}{\frac{2n_1+a}{2} - k} \binom{n_1}{\frac{2n_1+b}{2} - k} p^{-\frac{a+b}{2}+3k} q^{\frac{a+b}{2}+3n_1-3k}$$

2. $n \; mod \; 3 = 1$ (ekvivalentne $n_1 = n_2 + 1 = n_3 + 1$)

$$= \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k} \binom{n_1 - 1}{\frac{2n_1-1+a}{2} - k} \binom{n_1 - 1}{\frac{2n_1-1+b}{2} - k} p^{-\frac{a+b+2}{2}+3k} q^{\frac{a+b-2}{2}+3n_1-3k}$$

3. $n \; mod \; 3 = 0$ (ekvivalentne $n_1 = n_2 = n_3 + 1$)

$$= \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k} \binom{n_1}{\frac{2n_1+a}{2} - k} \binom{n_1 - 1}{\frac{2n_1-1+b}{2} - k} p^{-\frac{a+b+1}{2}+3k} q^{\frac{a+b-1}{2}+3n_1-3k}$$

kde $a := (u - v)/3$, $b := (2u + v)/3$ a $a + b = u$.

2. Hra troch hráčov s pravidelným striedaním a s rôznymi pravdepodobnosťami

2.1 Reprezentácia a rozdelenie $\boldsymbol{S_n}$

Opäť budeme vnímať stav hry v n-tom kroku ako súčet nezávislých náhodných vektorov. Tentokrát ale nebudeme mať pre všetkých hráčov rovnaké pravdepodobnosti výhry p,q ale každý bude mať vlastné:

1. hráč je útočník: $\boldsymbol{X} = \begin{cases} (2,-1)^T, & \text{s pravdepodobnosťou } p_x \\ (-2,1)^T, & \text{s pravdepodobnosťou } q_x \end{cases}$

2. hráč je útočník: $\boldsymbol{Y} = \begin{cases} (-1,2)^T, & \text{s pravdepodobnosťou } p_y \\ (1,-2)^T, & \text{s pravdepodobnosťou } q_y \end{cases}$

3. hráč je útočník: $\boldsymbol{Z} = \begin{cases} (-1,-1)^T, & \text{s pravdepodobnosťou } p_z \\ (1,1)^T, & \text{s pravdepodobnosťou } q_z \end{cases}$

Zobecníme vzorec pre rozdelenie $\boldsymbol{S_n}$.

$$\mathsf{P}\left(\boldsymbol{S_n} = (u,v)^T\right)$$

$$= \sum_{k=-n_1}^{n_1} \binom{n_1}{\frac{n_1+k}{2}} p_x^{\frac{n_1+k}{2}} q_x^{\frac{n_1-k}{2}} \binom{n_2}{\frac{n_2+a-k}{2}} p_y^{\frac{n_2-a+k}{2}} q_y^{\frac{n_2+a-k}{2}} \binom{n_3}{\frac{n_3+b-k}{2}} p_z^{\frac{n_3-b+k}{2}} q_z^{\frac{n_3+b-k}{2}}$$

$$= \sum_{j=0}^{2n_1} \binom{n_1}{\frac{j}{2}} p_x^{\frac{j}{2}} q_x^{\frac{2n_1-j}{2}} \binom{n_2}{\frac{n_1+n_2+a-j}{2}} p_y^{\frac{n_2-n_1-a+j}{2}} q_y^{\frac{n_1+n_2+a-j}{2}}$$

$$\binom{n_3}{\frac{n_1+n_3+b-j}{2}} p_z^{\frac{n_3-n_1-b+j}{2}} q_z^{\frac{n_1+n_2+b-j}{2}}$$

$$= \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k} p_x^k q_x^{n_1-k} \binom{n_2}{\frac{n_1+n_2+a}{2} - k} p_y^{\frac{n_2-n_1-a}{2}+k} q_y^{\frac{n_1+n_2+a}{2}-k}$$

$$\binom{n_3}{\frac{n_1+n_3+b}{2} - k} p_z^{\frac{n_3-n_1-b}{2}+k} q_z^{\frac{n_1+n_3+b}{2}-k}$$

Úpravy sú analogické úpravam v prvej kapitole.
Označme výsledný výraz ako funkciu premenných n_1,n_2,n_3 a $(u,v)^T$.

$$f(n_1,n_2,n_3,(u,v)^T) =$$

$$\sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k} p_x^k q_x^{n_1-k} \binom{n_2}{\frac{n_1+n_2+a}{2}-k} p_y^{\frac{n_2-n_1-a}{2}+k} q_y^{\frac{n_1+n_2+a}{2}-k}$$

$$\binom{n_3}{\frac{n_1+n_3+b}{2}-k} p_z^{\frac{n_3-n_1-b}{2}+k} q_z^{\frac{n_1+n_3+b}{2}-k}$$

Skúsime výpočet cez charakteritické funkcie, pripomeňme reprezentáciu $\boldsymbol{S_n}$.

$$\boldsymbol{S_n} = \sum_{k=1}^{n_1} \boldsymbol{X_k} + \sum_{l=1}^{n_2} \boldsymbol{Y_l} + \sum_{m=1}^{n_3} \boldsymbol{Z_m}$$

Keďže ide o konvolúciu nezávislých náhodných vektorov, pre určenie charakteristickej funkcie $\boldsymbol{S_n}$ nám bude stačiť určiť charakteristické funkcie $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ a $\boldsymbol{Z}$ budeme ich porade označovať ϕ_X, ϕ_Y a ϕ_Z.

$$\phi_X(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{Z}^2} \mathsf{P}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) e^{\langle i\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}\rangle}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2$$

Kde $\langle i\boldsymbol{x},\boldsymbol{\theta}\rangle$ značí klasický skalárny súčet.
Označme $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\theta_2)^T$. V našom pírpade $\boldsymbol{X}$ nadobúda len dve hodnoty preto sa výpočet zjednodušuje na nasledovný výraz.

$$\phi_X((\theta_1,\theta_2)^T) = p_x e^{\langle i(2,-1)^T,(\theta_1,\theta_2)^T\rangle} + q_x e^{\langle i(-2,1)^T,(\theta_1,\theta_2)^T\rangle}$$

$$= p_x e^{i(2\theta_1-\theta_2)} + q_x e^{i(-2\theta_1+\theta_2)}$$

Obdobne spočítame ϕ_Y a ϕ_Z.

$$\phi_Y((\theta_1,\theta_2)^T) = p_y e^{i(-\theta_1+2\theta_2)} + q_y e^{i(\theta_1-2\theta_2)}$$
$$\phi_Z((\theta_1,\theta_2)^T) = p_z e^{i(-\theta_1-\theta_2)} + q_z e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Charakteristickú funkciu $\boldsymbol{S_n}$ budeme značiť ϕ. Zo vzťahu konvolúcie nezávislých náhodných vektorov a charakteristických funkcii ju môžeme vyjadriť následovne.

$$\phi = \phi_X^{n_1} \phi_Y^{n_2} \phi_Z^{n_3}$$

Pre výpočet rozdelenia $\boldsymbol{S_n}$ použijeme inverzný vzorec.

$$\mathsf{P}\left(\boldsymbol{S_n} = (u,v)^T\right) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(u\theta_1+v\theta_2)} \phi((\theta_1,\theta_2)^T)\, d\theta_1\, d\theta_2$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(u\theta_1+v\theta_2)} (p_x e^{i(2\theta_1-\theta_2)} + q_x e^{i(-2\theta_1+\theta_2)})^{n_1}$$

$$(p_y e^{i(-\theta_1+2\theta_2)} + q_y e^{i(\theta_1-2\theta_2)})^{n_2} (p_z e^{i(-\theta_1-\theta_2)} + q_z e^{i(\theta_1+\theta_2)})^{n_3} \, d\theta_1 \, d\theta_2$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(u\theta_1+v\theta_2)} \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k} (p_x e^{i(2\theta_1-\theta_2)})^k (q_x e^{i(-2\theta_1+\theta_2)})^{n_1-k}$$

$$\sum_{l=0}^{n_2} \binom{n_2}{l} (p_y e^{i(-\theta_1+2\theta_2)})^l (q_y e^{i(\theta_1-2\theta_2)})^{n_2-l}$$

$$\sum_{m=0}^{n_3} \binom{n_3}{m} (p_z e^{i(-\theta_1-\theta_2)})^m (q_z e^{i(\theta_1+\theta_2)})^{n_3-m} \, d\theta_1 \, d\theta_2$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{l=0}^{n_2} \sum_{m=0}^{n_3} \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{l} \binom{n_3}{m} p_x^k q_x^{n_1-k} p_y^l q_y^{n_2-l} p_z^m q_z^{n_3-m}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta_1(-u-2n_1+4k+n_2-2l+n_3-2m)} e^{i\theta_2(-v+n_1-2k-2n_2+4l+n_3-2m)} \, d\theta_1 \, d\theta_2$$

V druhej rovnosti sme dosadili charakteristické funkcie, v tretej sme použili binomickú vetu. Následne sme vytkli pred integrál všetko čo nezávisí na $\boldsymbol{\theta}$.
Dvojitý integrál na konci výrazu je vďaka $2\pi i$ periodicite exponenciály nulový kedykoľvek nie sú obe exponenciály rovné jednej. V prípade ak sú exponenty oboch exponenciál rovné nule, sú exponenciály rovné jednej a výsledný integrál má hodnotu $(2\pi)^2$. Spočítame kedy táto situácia nastane.

$$-u - 2n_1 + 4k + n_2 - 2l + n_3 - 2m = 0$$
$$-v + n_1 - 2k - 2n_2 + 4l + n_3 - 2m = 0$$

Elementárnimy úpravami odvodíme podmienky pre parametre k, l, a m.

$$u - v = -3n_1 + 3n_2 + 2(3k - 3l)$$

$$\frac{u-v}{3} = -n_1 + n_2 + 2k - 2l$$

$$\frac{u-v}{6} + \frac{n_1 - n_2}{2} = k - l$$

Výraz na ľavej strane je konštanta, ktorá nezávisí na neznámych hodnotách označíme ju $\tilde{a}$.

$$\tilde{a} = \frac{u-v}{6} + \frac{n_1 - n_2}{2}$$

Potom $l = k - \tilde{a}$, pre pevne dané k vieme jednoznačne určiť hodnotu l.
Ďalej upravujme.

$$2u + v = -3n_1 + 3n_3 + 6k - 6m$$
$$\frac{2u+v}{6} + \frac{n_1 - n_3}{2} = k - m$$

Konštantu na ľavej strane označíme $\tilde{b}$.

$$\tilde{b} = \frac{2u+v}{6} + \frac{n_1 - n_3}{2}$$

Pre pevne dané k vieme určiť aj l.
Dosadením do pôvodného vzorca sa tým výraz podstatne zjednoduší.

$$\mathsf{P}\left(\boldsymbol{S_n} = (u,v)^T\right) = \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k} \binom{n_2}{k-\tilde{a}} \binom{n_3}{k-\tilde{b}} p_x^k q_x^{n_1-k} p_y^{k-\tilde{a}} q_y^{n_2-k+\tilde{a}} p_z^{k-\tilde{b}} q_z^{n_3-k+\tilde{b}}$$

Kde
$\tilde{a} = (u-v)/6 + (n_1 - n_2)/2$
$\tilde{b} = (2u+v)/6 + (n_1 - n_3)/2.$

Po dosadení konštant $\tilde{a}$ a $\tilde{b}$, môžeme nahliadnúť, že vzorec je ekvivalentý predtým odvodenému výrazu $f(n_1,n_2,n_3,(u,v)^T)$.

2.2 Stredná hodnota a rozptylová matica

Strednú hodnotu môžeme spočítať priamo z linearity:

$$\mathsf{E}\ \boldsymbol{S_n} = \mathsf{E}\ \boldsymbol{S_{n_1,x}} + \mathsf{E}\ \boldsymbol{S_{n_2,y}} + \mathsf{E}\ \boldsymbol{S_{n_3,z}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n_1} \mathsf{E}\ \boldsymbol{X_k} + \sum_{l=1}^{n_2} \mathsf{E}\ \boldsymbol{Y_l} + \sum_{m=1}^{n_3} \mathsf{E}\ \boldsymbol{Z_m}$$

$$\begin{aligned} &= n_1\Big(p_x(2,-1)^T + q_x(-2,1)^T\Big) \\ &+ n_2\Big(p_y(-1,2)^T + q_y(1,-2)^T\Big) \\ &+ n_3\Big(p_z(-1,-1)^T + q_z(1,1)^T\Big) \end{aligned}$$

Pre výpočet rozptylovej matice, zavedieme nasledujúce značenie.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S_n} &= (\boldsymbol{U},\boldsymbol{V})^T \\ \boldsymbol{X} &= (\boldsymbol{U_x},\boldsymbol{V_x})^T \\ \boldsymbol{Y} &= (\boldsymbol{U_y},\boldsymbol{V_y})^T \\ \boldsymbol{Z} &= (\boldsymbol{U_z},\boldsymbol{V_z})^T \end{aligned}$$

Spočítame rozptyly $\boldsymbol{U_x},\boldsymbol{U_y},\boldsymbol{U_z},\boldsymbol{V_x},\boldsymbol{V_y},\boldsymbol{V_z}$. Využijeme toho, že ich vieme reprezentovať ako lineránu transformáciu alternatívneho rozdelenia.
$\mathrm{var}(\boldsymbol{U_x}) = 16 p_x q_x$

$\mathrm{var}(\boldsymbol{V_x}) = 4p_xq_x$
$\mathrm{var}(\boldsymbol{U_y}) = 4p_yq_y$
$\mathrm{var}(\boldsymbol{V_y}) = 16p_yq_y$
$\mathrm{var}(\boldsymbol{U_z}) = 4p_zq_z$
$\mathrm{var}(\boldsymbol{V_z}) = 4p_zq_z$

Teraz môžeme spočítať rozptyly $\boldsymbol{U}$ a $\boldsymbol{V}$, využijeme nezávislosť.

$\mathrm{var}(\boldsymbol{U}) = \mathrm{var}(\sum_{k=1}^{n_1} \boldsymbol{U_{x,k}} + \sum_{l=1}^{n_2} \boldsymbol{U_{y,l}} + \sum_{m=1}^{n_3} \boldsymbol{U_{z,m}}) =$

$n_1 \,\mathrm{var}(\boldsymbol{U_x}) + n_2 \,\mathrm{var}(\boldsymbol{U_y}) + n_3 \,\mathrm{var}(\boldsymbol{U_z}) =$

$16n_1p_xq_x + 4n_2p_yq_y + 4n_3p_zq_z$

$\mathrm{var}(\boldsymbol{V}) = \mathrm{var}(\sum_{k=1}^{n_1} \boldsymbol{V_{x,k}} + \sum_{l=1}^{n_2} \boldsymbol{V_{y,l}} + \sum_{m=1}^{n_3} \boldsymbol{V_{z,m}}) =$

$n_1 \,\mathrm{var}(\boldsymbol{V_x}) + n_2 \,\mathrm{var}(\boldsymbol{V_y}) + n_3 \,\mathrm{var}(\boldsymbol{V_z}) =$

$4n_1p_xq_x + 16n_2p_yq_y + 4n_3p_zq_z$

Pre zostavenie rozptylovej matice potrebujeme ešte kovarianciu, využijeme linearitu.
$cov(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) =$

$cov(\sum_{i=1}^{n_1} \boldsymbol{U_{x,i}}, \sum_{i=1}^{n_1} \boldsymbol{V_{x,i}}) + cov(\sum_{i=1}^{n_1} \boldsymbol{U_{x,i}}, \sum_{i=1}^{n_2} \boldsymbol{V_{y,i}}) + cov(\sum_{i=1}^{n_1} \boldsymbol{U_{x,i}}, \sum_{i=1}^{n_3} \boldsymbol{V_{z,i}}) +$
$cov(\sum_{i=1}^{n_2} \boldsymbol{U_{x,i}}, \sum_{i=1}^{n_1} \boldsymbol{V_{x,i}}) + cov(\sum_{i=1}^{n_2} \boldsymbol{U_{x,i}}, \sum_{i=1}^{n_2} \boldsymbol{V_{y,i}}) + cov(\sum_{i=1}^{n_2} \boldsymbol{U_{x,i}}, \sum_{i=1}^{n_3} \boldsymbol{V_{z,i}}) +$
$cov(\sum_{i=1}^{n_3} \boldsymbol{U_{x,i}}, \sum_{i=1}^{n_1} \boldsymbol{V_{x,i}}) + cov(\sum_{i=1}^{n_3} \boldsymbol{U_{x,i}}, \sum_{i=1}^{n_2} \boldsymbol{V_{y,i}}) + cov(\sum_{i=1}^{n_3} \boldsymbol{U_{x,i}}, \sum_{i=1}^{n_3} \boldsymbol{V_{z,i}}) =$

$cov(\sum_{i=1}^{n_1} \boldsymbol{U_{x,i}}, \sum_{i=1}^{n_1} \boldsymbol{V_{x,i}}) + cov(\sum_{i=1}^{n_2} \boldsymbol{U_{x,i}}, \sum_{i=1}^{n_2} \boldsymbol{V_{y,i}}) + cov(\sum_{i=1}^{n_3} \boldsymbol{U_{x,i}}, \sum_{i=1}^{n_3} \boldsymbol{V_{z,i}}) =$

$n_1cov(\boldsymbol{U_x},\boldsymbol{V_x}) + n_2cov(\boldsymbol{U_y},\boldsymbol{V_y}) + n_3cov(\boldsymbol{U_z},\boldsymbol{V_z})$

V poslednej a predposlednej rovnosti využívame nezávislosť. Potrebujeme dopočítať ešte jednotlivé kovariancie.

$cov(\boldsymbol{U_x},\boldsymbol{V_x}) = -2 + 2(p_x - q_x)^2$
$cov(\boldsymbol{U_y},\boldsymbol{V_y}) = -2 + 2(p_y - q_y)^2$
$cov(\boldsymbol{U_z},\boldsymbol{V_z}) = 1 - (p_z - q_z)^2$

Dokopy získavame kovarianciu.
$cov(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = n_1(-2 + 2(p_x - q_x)^2) + n_2(-2 + 2(p_y - q_y)^2) + n_3(1 - (p_z - q_z)^2)$

Môžeme zostaviť rozptylovú maticu.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{var}(\boldsymbol{U}) & cov(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) \\ cov(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) & var(\boldsymbol{V}) \end{pmatrix}$$

2.3 Špeciálne prípady

Spočítame za akej situácie bude hra spravodlivá, respektíve kedy bude stredná hodnota rovná nule. Uvažujme rovnaký počet kôl pre každého hráča v pozícii útočníka, teda $n_1 = n_2 = n_3$.

$$\begin{aligned}(0,0)^T = n_1\Big(p_x(2,-1)^T + q_x(-2,1)^T\Big)\\ +n_2\Big(p_y(-1,2)^T + q_y(1,-2)^T\Big)\\ +n_3\Big(p_z(-1,-1)^T + q_z(1,1)^T\Big)\end{aligned}$$

$$= n_1\Big((2(2p_x-1),1-2p_x)^T + (1-2p_y,2(2p_y-1)^T + (1-2p_z,1-2p_z)^T\Big)$$

To vedie na homogénnu sústavu 2 rovníc s troma neznámymi p_x, p_y, p_z.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Tá má nasledujúce riešenie.

$$k(1,1,1)^T, k \in \mathbb{R}$$

Keďže p_x, p_y, $p_z \in (0,1)$ zísakavame nutnú a zároveň postačujúcu podmienku.

$$\mathsf{E}\ \boldsymbol{S_n} = (0,0)^T \Leftrightarrow p_x = p_y = p_z$$

Výsledok možno interpretovať tak, že hráči musia byť rovnako dobrí aby pri rovnakom počte útočných kôl bola hra vyrovnaná.
Spočítame pravdepodobnosť návratu do počiatočného stavu. V prípade ak sa hráči pravidelne striedajú a sú rovnako dobrí teda $n_1 = n_2 = n_3$, $p_x = p_y = p_z = p$ a $q = (1-p)$.

$$\mathsf{P}\left(\boldsymbol{S_n} = (0,0)^T\right) = \sum_{k=0}^{n_1} (\binom{n_1}{k} p^k q^{n_1-k})^3$$

Zvoľme $p = q = 1/2$ potom

$$\mathsf{P}\left(\boldsymbol{S_n} = (0,0)^T\right) = 2^{-3n_1} \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k}^3$$

Spočítame rozptylovú maticu pre prípad, keď majú všetci hráči pravdepodobnosť výhry v pozícii útočníka rovnú 1/2.

Primpomeňme.
$\mathrm{var}(\boldsymbol{U}) = 16n_1p_xq_x + 4n_2p_yq_y + 4n_3p_zq_z$
$\mathrm{var}(\boldsymbol{V}) = 4n_1p_xq_x + 16n_2p_yq_y + 4n_3p_zq_z$
$cov(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = n_1(-2 + 2(p_x - q_x)^2) + n_2(-2 + 2(p_y - q_y)^2) + n_3(1 - (p_z - q_z)^2)$

V našom prípade sa hodnoty výrazne zjednodušia.
$\mathrm{var}(\boldsymbol{U}) = 6n_1$
$\mathrm{var}(\boldsymbol{V}) = 6n_1$
$cov(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = -3n_1$

Môžeme zostaviť rozptylovú maticu.

$$\Sigma = 3n_1 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ďalší prípad uvážme $n_1 = n_2 = n_3$ a $p_x = p_y = p_z = p$. Ale tentokrát $p \neq 1/2$.
$\mathrm{var}(\boldsymbol{U}) = 24n_1p(1-p)$
$\mathrm{var}(\boldsymbol{V}) = 24n_1p(1-p)$
$cov(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = -3n_1 + 3n_1(2p-1)^2 = 3n_1(4p^2 - 4p) = -12n_1p(1-p)$

$$\Sigma = 12n_1p(1-p) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ďalej zoberieme prípad keď $n_1 = n_2 = n_3$ a $p_x = p_y = p$ ale $p \neq p_z = 1/2$.
$\mathrm{var}(\boldsymbol{U}) = 20n_1p(1-p) + n_1$
$\mathrm{var}(\boldsymbol{V}) = 20n_1p(1-p) + n_1$
$cov(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = -3n_1 + 4n_1(2p-1)^2$

$$\Sigma = n_1 \begin{pmatrix} 20p(1-p)+1 & -3+4(2p-1)^2 \\ -3+4(2p-1)^2 & 20p(1-p)+1 \end{pmatrix}$$

Nakoniec zoberieme prípad keď $n_1 = n_2 = n_3$ a $p_x = p_y = p$ ale $p \neq p_z$.
$\mathrm{var}(\boldsymbol{U}) = 20n_1p(1-p) + 4n_1p_z(1-p_z)$
$\mathrm{var}(\boldsymbol{V}) = 20n_1p(1-p) + 4n_1p_z(1-p_z)$
$cov(\boldsymbol{U},\boldsymbol{V}) = -3n_1 + 4n_1(2p-1)^2 - n_1(2p_z-1)^2$

$$\Sigma = n_1 \begin{pmatrix} 20p(1-p) + 4p_z(1-p_z) & -3+4(2p-1)^2 - (2p_z-1)^2 \\ -3+4(2p-1)^2 - (2p_z-1)^2 & 20p(1-p) + 4p_z(1-p_z) \end{pmatrix}$$

3. Hra troch hráčov s náhodným striedaním

V tomto prípade sa hráči nestriedajú pravidelne ale náhodne, zavedieme náhodnú veličinu $\boldsymbol{M} \sim Mult(\boldsymbol{p},n)$, $\boldsymbol{p} = (p_1,p_2,p_3)$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$
p_1 pravdepodobnosť, že útočník bude prvý hráč
p_2 pravdepodobnosť, že útočník bude druhý hráč
p_3 pravdepodobnosť, že útočník bude tretí hráč

Z vety o úplnej pravdepodobnosti spočítame pravdepodobnosť, že v n-tom kole bude hra v stave $(u,v)^T$

$$\mathsf{P}\left(\boldsymbol{S_n} = (u,v)^T\right) = \sum_{n_1+n_2+n_3} \mathsf{P}\left(\boldsymbol{M} = (n_1,n_2,n_3)^T\right) f(n_1,n_2,n_3,(u,v)^T)$$

Pre výpočty odvodíme priamejší tvar.

$$\mathsf{P}\left(\boldsymbol{S_n} = (u,v)^T\right)$$

$$= \sum_{n_1=0}^{n} \sum_{n_2=0}^{n-n_1} \frac{n!}{n_1!n_2!(n-n_1-n_2)!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n-n_1-n_2} f(n_1,n_2,n_3,(u,v)^T)$$

Rovnako môžeme hru reprezentovať ako súčet nezávislých rovnako rozdelených náhodných veličín.

$$\boldsymbol{W} = \begin{cases} (2,-1)^T, & \text{s pravdepodobnosťou } p_1 p_x \\ (-2,1)^T, & \text{s pravdepodobnosťou } p_1 q_x \\ (-1,2)^T, & \text{s pravdepodobnosťou } p_2 p_y \\ (1,-2)^T, & \text{s pravdepodobnosťou } p_2 q_y \\ (-1,-1)^T, & \text{s pravdepodobnosťou } p_3 p_z \\ (1,1)^T, & \text{s pravdepodobnosťou } p_3 q_z \end{cases}$$

Potom $\boldsymbol{S_n}$ môžeme zapísať v nasledujúcom tvare.

$$\boldsymbol{S_n} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{W_k}$$

Pre výpočet rozdelenia použijeme charakteristické funkcie a inverzný vzorec, rovnako ako v druhej kapitole.

$$\phi_W((\theta_1,\theta_2)^T) = p_1 p_x e^{i(2\theta_1-\theta_2)} + p_1 q_x e^{i(-2\theta_1+\theta_2)}$$

$$+ p_2 p_y e^{i(-\theta_1+2\theta_2)} + p_2 q_y e^{i(\theta_1-2\theta_2)}$$

$$+ p_3 p_z e^{i(-\theta_1-\theta_2)} + p_3 q_z e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

Spočítame rozdelenie z inverzného vzorca.

$$\mathsf{P}\left(\boldsymbol{S_n} = (u,v)^T\right) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(u\theta_1+v\theta_2)} \phi_W^n((\theta_1,\theta_2)^T)\, d\theta_1\, d\theta_2$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(u\theta_1+v\theta_2)} \Big(p_1 p_x e^{i(2\theta_1-\theta_2)} + p_1 q_x e^{i(-2\theta_1+\theta_2)}$$
$$+ p_2 p_y e^{i(-\theta_1+2\theta_2)} + p_2 q_y e^{i(-\theta_1+2\theta_2)}$$
$$+ p_3 p_z e^{i(-\theta_1-\theta_2)} + p_3 q_z e^{i(\theta_1+\theta_2)} \Big)^n \, d\theta_1 \, d\theta_2$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6=n} \binom{n}{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6} e^{-i(u\theta_1+v\theta_2)}$$

$$(p_1 p_x)^{k_1} e^{ik_1(2\theta_1-\theta_2)} (p_1 q_x)^{k_2} e^{ik_2(-2\theta_1+\theta_2)}$$
$$(p_2 p_y)^{k_3} e^{ik_3(-\theta_1+2\theta_2)} (p_2 q_y)^{k_4} e^{ik_4(-\theta_1+2\theta_2)}$$
$$(p_3 p_z)^{k_5} e^{ik_5(-\theta_1-\theta_2)} (p_3 q_z)^{k_6} e^{ik_6(\theta_1+\theta_2)} \, d\theta_1 \, d\theta_2$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k_1+k_2+k_3+k_4+k_5+k_6=n} \binom{n}{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6}$$
$$(p_1 p_x)^{k_1} (p_1 q_x)^{k_2} (p_2 p_y)^{k_3} (p_2 q_y)^{k_4} (p_3 p_z)^{k_5} (p_3 q_z)^{k_6}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta_1(-u+2k_1-2k_2-k_3+k_4-k_5+k_6)} e^{i\theta_2(-v-k_1+k_2+2k_3-2k_4-k_5+k_6)} \, d\theta_1 \, d\theta_2$$

$$= \binom{n}{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6}$$
$$(p_1 p_x)^{k_1} (p_1 q_x)^{k_2} (p_2 p_y)^{k_3} (p_2 q_y)^{k_4} (p_3 p_z)^{k_5} (p_3 q_z)^{k_6}$$
$$\mathbb{1}[u = 2k_1 - 2k_2 - k_3 + k_4 - k_5 + k_6] \mathbb{1}[v = -k_1 + k_2 + 2k_3 - 2k_4 - k_5 + k_6]$$

V prvej rovnosti používame inverzný vzorec. V druhej dosadzujeme predtým spočítanú charakteristickú funkciu.V tretej rovnosti používame multinomickú vetu. V poslednej rovnosti využívame toho že integrál je rovný $(2\pi)^2$ práve vtedy keď sú exponenciály rovné jednej a nulový inak. To nastáva práve vtedy keď sú oba exponenty rovné nule.

4. Formát PDF/A

Opatření rektora č. 13/2017 určuje, že elektronická podoba závěrečných prací musí být odevzdávána ve formátu PDF/A úrovně 1a nebo 2u. To jsou profily formátu PDF určující, jaké vlastnosti PDF je povoleno používat, aby byly dokumenty vhodné k dlouhodobé archivaci a dalšímu automatickému zpracování. Dále se budeme zabývat úrovní 2u, kterou sázíme TEXem.

Mezi nejdůležitější požadavky PDF/A-2u patří:

- Všechny fonty musí být zabudovány uvnitř dokumentu. Nejsou přípustné odkazy na externí fonty (ani na „systémové“, jako je Helvetica nebo Times).
- Fonty musí obsahovat tabulku ToUnicode, která definuje převod z kódování znaků použitého uvnitř fontu to Unicode. Díky tomu je možné z dokumentu spolehlivě extrahovat text.
- Dokument musí obsahovat metadata ve formátu XMP a je-li barevný, pak také formální specifikaci barevného prostoru.

Tato šablona používá balíček `pdfx`, který umí LaTeX nastavit tak, aby požadavky PDF/A splňoval. Metadata v XMP se generují automaticky podle informací v souboru `prace.xmpdata` (na vygenerovaný soubor se můžete podívat v `pdfa.xmpi`).

Validitu PDF/A můžete zkontrolovat pomocí nástroje VeraPDF, který je k dispozici na `http://verapdf.org/`.

Pokud soubor nebude validní, mezi obvyklé příčiny patří používání méně obvyklých fontů (které se vkládají pouze v bitmapové podobě a/nebo bez unicodových tabulek) a vkládání obrázků v PDF, které samy o sobě standard PDF/A nesplňují.

Další postřehy o práci s PDF/A najdete na `http://mj.ucw.cz/vyuka/bc/pdfaq.html`.

Závěr

Seznam použité literatury

ANDĚL, J. (1998). *Statistické metody.* Druhé přepracované vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-85863-27-8.

ANDĚL, J. (2007). *Základy matematické statistiky.* Druhé opravené vydání. Matfyzpress, Praha. ISBN 80-7378-001-1.

COX, D. R. (1972). Regression models and life-tables (with Discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **34**(2), 187–220.

DEMPSTER, A. P., LAIRD, N. M. a RUBIN, D. B. (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **39**(1), 1–38.

GENBERG, B. L., KULICH, M., KAWICHAI, S., MODIBA, P., CHINGONO, A., KILONZO, G. P., RICHTER, L., PETTIFOR, A., SWEAT, M. a CELENTANO, D. D. (2008). HIV risk behaviors in sub-Saharan Africa and Northern Thailand: Baseline behavioral data from project Accept. *Journal of Acquired Immune Deficiency Syndrome*, **49**, 309–319.

KAPLAN, E. L. a MEIER, P. (1958). Nonparametric estimation from incomplete observations. *Journal of the American Statistical Association*, **53**(282), 457–481.

LEHMANN, E. L. a CASELLA, G. (1998). *Theory of Point Estimation.* Second Edition. Springer-Verlag, New York. ISBN 0-387-98502-6.

STUDENT (1908). On the probable error of the mean. *Biometrika*, **6**, 1–25.

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam použitých zkratek

A. Přílohy

A.1 První příloha