Développement : circuits eulériens, algorithme de Fleury (leçons 8 et 13)

Considérons un graphe non-dirigé G caractérisé par un ensemble d'arêtes de la forme $\{u, v\}$ (notées uv ou vu). Un graphe est dit semi-eulérien s'il possède un chemin C empruntant une et une seule fois chaque arête de G. Il est dit eulérien s'il possède un chemin eulérien fermé (autrement dit un circuit).

On montre le théorème suivant (Euler, 1736) :

> Un graphe connexe non orienté G est eulérien si et seulement si chacun de ses sommets st de degré pair.

Démonstration :

$\Rightarrow$ Supposons qu'il existe un circuit eulérien C dans G. Chaque passage de C par un sommet u contribue de 2 au degré de ce sommet. Comme toutes les arêtes de G sont empruntées exactement une fois par C, le degré de chaque sommet de G est pair.

$\Leftarrow$ La preuve se fait par récurrence sur le nombre d'arêtes de G. Soit u un sommet quelconque. Partant de u, on peut former un circuit C revenant à u (sans emprunter deux fois la même arête). En effet, comme G est connexe et tout sommet a un degré supérieur ou égal à 2, quand on arrive à un nouveau sommet v différent de u, il existe forcément une arête non empruntée. Si C contient toutes les arêtes de G, la preuve est terminée. Sinon, par hypothèse de récurrence chaque composante connexe restante possède un circuit eulérien. On peut alors construire un circuit eulérien pour le graphe entier en fusionnant de manière appropriée C avec chacun de ces circuits. //

Voici un algorithme permettant de construire un circuit eulérien, appelé algorithme de Fleury :

1. Choisir un sommet quelconque u.
2. Choisir une arête sortante uv quelconque, en privilégiant une arête qui n'est pas un *pont* (c'est à dire dont la suppression ne déconnecte pas le graphe). Si aucune arête sortante n'existe, l'algorithme se termine.
3. Ajouter l'arête au résultat, et la supprimer de G (en éliminant les éventuels sommets isolés).
4. Continuer le parcours à partir du sommet v.

Preuve de correction :

Il suffit de montrer que si G est eulérien, l'algorithme n'est jamais bloqué avant d'avoir retiré la dernière arête du graphe G. En effet, il est facile de voir que le chemin qui est construit n'emprunte qu'une seule fois chaque arête. Si toutes les arêtes du graphe ont été supprimées, on a donc bien construit un circuit eulérien.

Supposons qu'on ait atteint le sommet v, et appelons H le sous-graphe de G formé des arêtes restantes. - Si $v \neq u$, H est connexe et contient uniquement deux sommets de degré impair, u et v. Il faut montrer que la prochaine arête choisie ne déconnecte pas H, autrement dit que v n'est incident qu'à un pont au plus. Supposons que ce ne soit pas le cas et qu'il existe au moins deux ponts depuis v. Il existe alors forcément un pont vw dont la suppression sépare $H - vw$ en deux composantes connexes, l'une contenant u et l'autre contenant w (sinon il existerait un autre chemin de u à w, et vw ne serait pas un pont). Appelons K la composante contenant w, le sommet w a un degré impair dans K. Or, un graphe ne peut pas avoir qu'un seul sommet de degré impair ("*lemme des poignées de mains*"), donc K a forcément un autre sommet de degré impair, qui n'est ni u ni v, ce qui contredit l'affirmation précédente que u et v sont les seuls sommets de degré impair dans H. - Si $u = v$, deux cas se présentent. Si u n'a plus d'arête adjacente, c'est que toutes les arêtes de G ont été retirées (sinon, c'est que le retrait d'une arête précédente a déconnecté le graphe). Sinon, on peut montrer que u ne peut être incident à un pont. En effet, si un tel pont uv existait, v appartiendrait à une composante connexe ne contenant pas u, et dans cette composante v aurait un degré impair, donc nécessairement il existerait un autre sommet de degré impair dans le graphe. //