

Annexe

Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques de la série économique et sociale et de l'enseignement de spécialité de mathématiques de la série littéraire

L'enseignement des mathématiques au collège et au lycée a pour but de donner à chaque élève la culture mathématique indispensable pour sa vie de citoyen et les bases nécessaires à son projet de poursuite d'études. Le cycle terminal des séries ES et L permet l'acquisition d'un bagage mathématique qui favorise une adaptation aux différents cursus accessibles aux élèves, en développant leur sens critique vis-à-vis des informations chiffrées et, plus largement, en les formant à la pratique d'une démarche scientifique.

L'apprentissage des mathématiques cultive des compétences qui facilitent une formation tout au long de la vie et aident à mieux appréhender une société en évolution. Au-delà du cadre scolaire, il s'inscrit dans une perspective de formation de l'individu.

Objectif général

Outre l'apport de nouvelles connaissances, le programme vise le développement des compétences suivantes :

- mettre en œuvre une recherche de façon autonome ;
- mener des raisonnements ;
- avoir une attitude critique vis-à-vis des résultats obtenus ;
- communiquer à l'écrit et à l'oral.

Raisonnement et langage mathématiques

Comme en classe de seconde, les capacités d'argumentation et de logique font partie intégrante des exigences du cycle terminal.

Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique ne font pas l'objet de cours spécifiques mais prennent naturellement leur place dans tous les champs du programme.

De même, le vocabulaire et les notations mathématiques ne sont pas fixés d'emblée, mais sont introduits au cours du traitement d'une question en fonction de leur utilité.

Il convient de prévoir des temps de synthèse, l'objectif étant d'atteindre une bonne maîtrise en fin de cycle terminal.

Utilisation d'outils logiciels

L'utilisation de logiciels, d'outils de visualisation et de simulation, de calcul (formel ou scientifique) et de programmation change profondément la nature de l'enseignement en favorisant une démarche d'investigation.

En particulier lors de la résolution de problèmes, l'utilisation de logiciels de calcul formel limite le temps consacré à des calculs très techniques afin de se concentrer sur la mise en place de raisonnements.

L'utilisation de ces outils intervient selon trois modalités :

- par le professeur, en classe, avec un dispositif de visualisation collective;
- par les élèves, sous forme de travaux pratiques de mathématiques ;
- dans le cadre du travail personnel des élèves hors de la classe.

Diversité de l'activité de l'élève

Les activités proposées en classe et hors du temps scolaire prennent appui sur la résolution de problèmes essentiellement en lien avec d'autres disciplines. Elles enrichissent la culture scientifique dans différents domaines : historique, économique, artistique, etc. De nature diverse, elles doivent entraîner les élèves à :

- chercher, expérimenter, modéliser, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- choisir et appliquer des techniques de calcul;
- mettre en œuvre des algorithmes ;
- raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit.

Des éléments d'épistémologie et d'histoire des mathématiques s'insèrent naturellement dans la mise en œuvre du programme. Connaître le nom de quelques mathématiciens célèbres, la période à laquelle ils ont vécu et leur

contribution fait partie intégrante du bagage culturel de tout élève ayant une formation scientifique. La présentation de textes historiques aide à comprendre la genèse et l'évolution de certains concepts.

Fréquents, de longueur raisonnable et de nature variée, les travaux hors du temps scolaire contribuent à la formation des élèves et sont essentiels à leur progression. Ils sont conçus de façon à prendre en compte la diversité et l'hétérogénéité de leurs aptitudes.

Les modes d'évaluation prennent également des formes variées, en phase avec les objectifs poursuivis. En particulier, l'aptitude à mobiliser l'outil informatique dans le cadre de la résolution de problèmes est à évaluer.

Organisation du programme

Le programme fixe les objectifs à atteindre en termes de capacités. Il est conçu pour favoriser une acquisition progressive des notions et leur pérennisation. Son plan n'indique pas la progression à suivre.

A titre indicatif, on pourrait consacrer environ deux tiers du temps à l'analyse et le reste aux probabilités et à la statisitque.

Les capacités attendues indiquent un niveau minimal de maîtrise des contenus en fin de cycle terminal. La formation ne s'y limite pas.

Les capacités attendues dans le domaine de l'algorithmique d'une part et du raisonnement d'autre part sont rappelées en fin de programme. Elles doivent être exercées à l'intérieur de chaque champ du programme. Les exigences doivent être modestes et conformes à l'esprit des filières concernées.



1. Analyse

Un des objectifs de ce programme, comme en classe de première, est de doter les élèves d'outils mathématiques permettant de traiter des problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus ou discrets.

On poursuit l'étude des suites géométriques pour lesquelles on aborde la notion de limite, ce qui peut conduire à différents types de questionnement, notamment philosophique ou économique.

On consolide l'ensemble des fonctions mobilisables, enrichi des fonctions exponentielles et de la fonction logarithme népérien. Les fonctions exponentielles sont l'occasion d'évoquer le passage d'une situation discrète à une situation continue.

La notion de convexité est introduite et étudiée essentiellement dans un cadre graphique. Elle est largement utilisée en économie, en particulier pour des problèmes de coût ou de rendement croissant et décroissant.

Enfin, s'ajoute le nouveau concept d'intégration qui, bien que modestement abordé et développé, demeure un concept fondamental de l'analyse.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Suites		
Suites géométriques.	 Reconnaître et exploiter une suite géométrique dans une situation donnée. Connaître la formule donnant 1+q++qⁿ avec q≠1. 	
Limite de la suite (q^n) , q étant un nombre réel strictement positif.	 Déterminer la limite d'une suite géométrique de raison strictement positive. Étant donné une suite (qⁿ) avec 0 < q < 1, mettre en œuvre un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel qⁿ est inférieur à un réel a positif donné. 	Le tableur, les logiciels de géométrie dynamique et de calcul sont des outils adaptés à l'étude des suites, en particulier pour une approche expérimentale de la notion de limite. On détermine, sans soulever de difficulté, la limite de la somme $1+q+\ldots+q^n$ quand $0 < q < 1$. Le comportement lorsque n tend vers $+\infty$ de la somme des n premiers termes de certaines suites géométriques fournit un exemple de suite croissante n'ayant pas pour limite $+\infty$. On évoque les aspects historiques et philosophiques de cette question en présentant quelques paradoxes classiques.
Suites arithmético- géométriques.	• Traduire une situation donnée à l'aide d'une suite arithmético-géométrique.	Toute indication doit être donnée dans l'étude des suites arithmético-géométriques.
Notion de continuité sur un intervalle		On se limite à une approche intuitive et on admet que les fonctions usuelles sont continues par intervalle.
	 Exploiter le tableau de variation pour déterminer : le nombre de solutions d'une équation du type f(x) = k; le signe d'une fonction. 	La propriété des valeurs intermédiaires est présentée graphiquement ; on convient que les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.
		On admet qu'une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.



Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonctions exponentielles		
Fonction $x \mapsto q^x$ avec $q > 0$. Relation fonctionnelle.	• Connaître l'allure de la représentation graphique de la fonction $x \mapsto q^x$ selon les valeurs de q .	Ces fonctions sont présentées comme un prolongement continu des suites géométriques. On admet que ces fonctions sont dérivables sur R et transforment les sommes en produits.
Fonction exponentielle $x \mapsto e^x$.	 Connaître la dérivée, les variations et la représentation graphique de la fonction exponentielle. Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. 	On fait observer à l'aide d'un logiciel qu'entre toutes les fonctions exponentielles, une seule semble avoir 1 pour nombre dérivé en 0. L'existence et l'unicité de cette fonction sont admises. Le nombre e est l'image de 1 par cette fonction.
Dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$ où u est une fonction dérivable.	• Calculer la dérivée d'une fonction de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$.	On étudie des exemples de fonctions de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$ notamment avec $u(x) = -kx$ ou $u(x) = -kx^2$ ($k > 0$), qui sont utilisés dans des domaines variés. La notion générale de composée est hors programme.
Fonction logarithme népérien Relation fonctionnelle.	 Connaître la dérivée, les variations et la représentation graphique de la fonction logarithme népérien. Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. Résoudre une équation de la forme xⁿ = k sur]0;+∞[avec k ∈]0;+∞[et n ∈ N. 	Pour tout réel $x > 0$, le réel $\ln x$ est l'unique solution de l'équation $e^y = x$, d'inconnue y . On définit ainsi la fonction logarithme népérien.
Convexité Fonction convexe, fonction concave sur un intervalle.	Reconnaître graphiquement des fonctions convexes, concaves.	Une fonction dérivable sur un intervalle I est dite convexe sur cet intervalle si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes. On met en évidence ces notions sur les fonctions de référence : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln x$.
Convexité et sens de variation de la dérivée.	Utiliser le lien entre convexité et sens de variation de la dérivée.	Le lien entre convexité et sens de variation de la dérivée est conjecturé puis admis. On peut utiliser le signe de la dérivée seconde.

B.O. Bulletin office	ciel spécial n° 8 du 13 octobre 2011	
Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Point d'inflexion.	Reconnaître graphiquement un point d'inflexion.	Un point d'inflexion est un point où la représentation graphique traverse sa tangente. On met en évidence cette notion sur la fonction $x \mapsto x^3$.
Positions relatives des courbes représentatives des		
fonctions $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x$.		
Intégration		
Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a,b]$ comme aire sous la courbe.		On s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège et sur les propriétés d'additivité et d'invariance par translation et symétrie.
Notation $\int_a^b f(x) dx$.		
Théorème : si f est continue et positive sur $[a,b]$, la		
fonction F définie sur $[a,b]$		
par $F(x) = \int_{a}^{x} f(t) dt$ est		
dérivable sur $[a,b]$ et a pour dérivée f .		
Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.		Une primitive F de la fonction continue et positive f étant connue, on a : $\int_{a}^{b} f(x) dx = F(b) - F(a).$
Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.	• Déterminer des primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées.	On fait prendre conscience aux élèves que certaines fonctions comme $x \mapsto e^{-x^2}$ n'ont pas de primitive « explicite ».
	• Connaître et utiliser une primitive de $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.	
Intégrale d'une fonction de signe quelconque.	Calculer une intégrale.	La formule $\int_{a}^{b} f(x) dx = F(b) - F(a)$,
		est étendue aux fonctions continues de signe quelconque.
Linéarité, positivité, relation de Chasles.	• Calculer l'aire du domaine délimité par les courbes représentatives de deux fonctions positives.	
Valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle.		Les notions d'aire et de moyenne sont illustrées par des exemples issus des sciences économiques.



2. Probabilités et statistique

On approfondit le travail en probabilités et statistique mené les années précédentes.

Afin de traiter les champs de problèmes associés aux données continues, on introduit les lois de probabilité à densité. La loi normale permet d'initier les élèves à la statistique inférentielle par la détermination d'un intervalle de confiance pour une proportion à un niveau de confiance de 95 %.

Cette partie se prête particulièrement à l'étude de problèmes issus d'autres disciplines, notamment des sciences économiques et sociales.

Le recours aux représentations graphiques et aux simulations est indispensable.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Conditionnement		
Conditionnement par un événement de probabilité non nulle. Notation $P_A(B)$.	 Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée. Exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités. Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers. 	On représente une situation à l'aide d'un arbre pondéré ou d'un tableau. On énonce et on justifie les règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés. Un arbre pondéré correctement construit constitue une preuve. Le vocabulaire lié à la formule des probabilités totales n'est pas un attendu du programme, mais la mise en œuvre de cette formule doit être maîtrisée. Cette partie du programme se prête
		particulièrement à l'étude de situations concrètes.
Notion de loi à densité à partir d'exemples		Les exemples étudiés s'appuient sur une expérience aléatoire et un univers associé Ω, muni d'une probabilité. On définit alors
Loi à densité sur un intervalle.		une variable aléatoire X , fonction de Ω dans \mathbf{R} , qui associe à chaque issue un nombre réel d'un intervalle I de \mathbf{R} . On admet que X satisfait aux conditions qui permettent de définir la probabilité de l'événement $\{X \in J\}$ comme aire du domaine : $\{M(x,y): x \in J \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ où f désigne la fonction de densité de la loi et J un intervalle inclus dans I .
		Toute théorie générale des lois à densité et des intégrales sur un intervalle non borné est exclue.
Loi uniforme sur [a, b]. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme.	• Connaître la fonction de densité de la loi uniforme sur [a, b].	L'instruction « nombre aléatoire » d'un logiciel ou d'une calculatrice permet d'introduire la loi uniforme sur $[0,1]$. La notion d'espérance d'une variable aléatoire à densité sur $[a,b]$ est introduite à cette occasion par $\int_a^b t f(t) dt$. On note que
		cette définition constitue un prolongement dans le cadre continu de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.	 Connaître la fonction de densité de la loi normale N(0,1) et sa représentation graphique. Connaître une valeur approchée de la probabilité de l'événement { X ∈ [-1,96;1,96] } lorsque X suit la loi normale N(0,1). 	Pour introduire la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, on s'appuie sur l'observation des représentations graphiques de la loi de la variable aléatoire $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ où X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et cela pour de grandes valeurs de n et une valeur de p fixée entre 0 et 1 .
Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ d'espérance μ et d'écart-type σ .	 Utiliser une calculatrice ou un tableur pour obtenir une probabilité dans le cadre d'une loi normale N(μ,σ²). Connaître une valeur approchée de la probabilité des événements suivants : {X ∈ [μ − σ, μ + σ]}, {X ∈ [μ − 2σ, μ + 2σ]} et {X ∈ [μ − 3σ, μ + 3σ]}, lorsque X suit la loi normale N(μ,σ²). 	À ce propos, on peut faire référence aux travaux de Moivre et de Laplace en les situant dans une perspective historique. Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ si $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On se limite à une approche intuitive de la notion d'espérance. On exploite les outils logiciels pour faire percevoir l'information apportée par la valeur de l'écart-type. La connaissance d'une expression algébrique de la fonction de densité de cette loi n'est pas un attendu du programme. On illustre ces notions par des exemples issus des sciences économiques ou des sciences humaines et sociales.
Intervalle de fluctuation	• Connaître, pour n assez grand, l'intervalle de fluctuation asymptotique (*) au seuil de 95 %: $\left[p-1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p+1.96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ où p désigne la proportion dans la population.	La variable aléatoire F_n qui, à tout échantillon de taille n , associe la fréquence, prend ses valeurs dans l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % avec une probabilité qui s'approche de 0,95 quand n devient grand. On admet le résultat ci-contre, qui est conforté grâce à la simulation. Avec les exigences usuelles de précision, on pratique cette approximation dès que $n \ge 30$, $np \ge 5$ et $n(1-p) \ge 5$. En majorant $1,96\sqrt{p(1-p)}$, on retrouve l'intervalle de fluctuation présenté en classe de seconde. La problématique de prise de décision, déjà rencontrée, est travaillée à nouveau.

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95(*). Niveau de confiance.	 Estimer une proportion inconnue à partir d'un échantillon. Déterminer une taille d'échantillon suffisante pour obtenir, avec une précision donnée, une estimation d'une proportion au niveau de confiance 0,95. 	Les attendus de ce paragraphe sont modestes et sont à exploiter en lien avec les autres disciplines. On énonce que p est élément de l'intervalle $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}},f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ avec un niveau de confiance de plus de 95 %, où f désigne la fréquence observée sur un échantillon de taille n . Avec les exigences usuelles de précision, on utilise cet intervalle dès que $n \ge 30$, $np \ge 5$ et $n(1-p) \ge 5$. La simulation de sondages sur tableur permet de sensibiliser aux fourchettes de sondage. Il est important de noter que, dans d'autres champs, on utilise l'intervalle $\left[f-1.96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}},f+1.96\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\right]$ qu'il n'est pas possible de justifier dans ce programme.

(*) Avec les notations précédentes :

Un intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F_n au seuil 0,95 est un intervalle déterminé à partir de p et de n et qui contient F_n avec une probabilité d'autant plus proche de 0,95 que n est grand.

Pour une valeur de p fixée, l'intervalle aléatoire $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient, pour n assez grand, la proportion p à

estimer avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Un intervalle de confiance pour une proportion p au niveau de confiance 0,95 est la réalisation, à partir d'un échantillon, d'un intervalle aléatoire contenant la proportion p avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95, intervalle aléatoire déterminé à partir de la variable aléatoire F_n qui, à tout échantillon de taille n, associe la fréquence.

Les intervalles de confiance considérés ici sont centrés en la fréquence observée f.



Algorithmique

En seconde, les élèves ont conçu et mis en œuvre quelques algorithmes. Cette formation se poursuit tout au long du cycle terminal.

Dans le cadre de cette activité algorithmique, les élèves sont entraînés à :

- décrire certains algorithmes en langage naturel ou dans un langage symbolique ;
- en réaliser quelques-uns à l'aide d'un tableur ou d'un programme sur calculatrice ou avec un logiciel adapté ;
- interpréter des algorithmes plus complexes.

Aucun langage, aucun logiciel n'est imposé.

L'algorithmique a une place naturelle dans tous les champs des mathématiques et les problèmes posés doivent être en relation avec les autres parties du programme (algèbre et analyse, statistiques et probabilités, logique), mais aussi avec les autres disciplines ou le traitement de problèmes concrets.

À l'occasion de l'écriture d'algorithmes et de programmes, il convient de donner aux élèves de bonnes habitudes de rigueur et de les entraîner aux pratiques systématiques de vérification et de contrôle.

Instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie)

Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables :

- d'écrire une formule permettant un calcul ;
- d'écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction, ainsi que les instructions d'entrées et sorties nécessaires au traitement.

Boucle et itérateur, instruction conditionnelle

Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables de :

- programmer un calcul itératif, le nombre d'itérations étant donné ;
- programmer une instruction conditionnelle, un calcul itératif, avec une fin de boucle conditionnelle.

Notations et raisonnement mathématiques

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondants : \in , \subset , \cup , \cap ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités A.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés sur des exemples à :

- utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles ∀, ∃ ne sont pas exigibles) et repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles;
- distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation;
- utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante »;
- formuler la négation d'une proposition ;
- utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.



Enseignement de spécialité, série ES

L'enseignement de spécialité prend appui sur la résolution de problèmes. Cette approche permet une introduction motivée des notions mentionnées dans le programme. Plusieurs exemples de problèmes sont donnés à titre indicatif.

L'étude de telles situations conduit à un travail de modélisation et place les élèves en position de recherche.

Les thèmes abordés sont particulièrement propices à l'utilisation des outils informatiques (logiciels de calcul, tableur) et à la mise en œuvre d'algorithmes.

Les graphes probabilistes permettent d'étudier des phénomènes d'évolution simples et de faire un lien avec les suites. Les matrices sont présentées comme des tableaux de nombres. Au même titre que les graphes, elles apparaissent comme des outils pour résoudre des problèmes.

Le niveau d'approfondissement des notions est guidé par les besoins rencontrés dans la résolution des problèmes traités. Les thèmes abordés ne doivent pas faire l'objet d'un développement théorique.

Exemples de problèmes	Contenus
Recherche de courbes polynomiales passant par un ensemble donné de points. Gestion de flux, problèmes simples de partitionnement de graphes sous contraintes : problème du voyageur de commerce, gestion de trafic routier ou aérien, planning de tournois sportifs, etc. Modélisation d'échanges inter-industriels (matrices de Léontief).	 Matrice carrée, matrice colonne : opérations. Matrice inverse d'une matrice carrée. Graphes : sommets, sommets adjacents, arêtes, degré d'un sommet, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe complet, graphe connexe, chaîne eulérienne, matrice d'adjacence associée à un graphe. Recherche du plus court chemin sur un graphe pondéré
Codage par un graphe étiqueté, applications à l'accès à un réseau informatique, reconnaissance de codes. Minimisation d'une grandeur (coût, longueur, durée, etc.). Phénomènes évolutifs (variation d'une population, propagation d'une rumeur ou d'un virus, etc.).	 Graphe probabiliste à deux ou trois sommets : matrice de transition, état stable d'un graphe probabiliste.