Matrizes e Vetores

Vicente G. Cancho
garibay@icmc.usp.br

Um vetor é um arranjo unidimensional : $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix}_{s\times 1}$

Uma matriz é um arranjo bidimensional :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}_{n\times p} = \{a_{ij}\}_{n\times p}$$

A ordem de uma matriz se refere ao número de linhas e colunas:

- a ordem $\boldsymbol{v}$ é s por 1;
- a ordem $\boldsymbol{A}$ é n por p

Posto de uma matriz

O posto de $\boldsymbol{A}$ é o número de linhas/colunas linearmente independentes

- o posto coluna de $\boldsymbol{A}$ é o número de colunas linearmente independentes.
- o posto linha de $\boldsymbol{A}$ é o número de linhass linearmente independentes.

Dizemos que $\boldsymbol{A}$ é de posto completo se $rank(A) = \min(n, p)$

- Se $n < p$, posto completo implica posto linha completa, ou seja $rank(A) = n$
- Se $n > p$, posto completo implica posto coluna completa, ou seja $rank(A) = p$.

Exemplo–1

A matriz $\boldsymbol{A}$ não é posto completo

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$$

porque temos $3\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_2$, onde $\boldsymbol{a}_j$ denota a $j-$ésima coluna de $\boldsymbol{A}$.
Em contraste, a matriz $\boldsymbol{A}$ é de posto completo

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$$

porque não podemos escrever $\sum_{j=1}^{2} c_j \boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a menos que definamos

$c_j = 0 \ \forall j$

Transposta de uma matriz

A transposta de um vetor transforma um vetor coluna em um vetor linha

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix}_{s\times 1} \iff \boldsymbol{v}^\top = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_s \end{pmatrix}_{1\times s}$$

A transposta de uma matriz troca linhas e colunas, como

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}_{n\times p} \iff \boldsymbol{A}^\top \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}_{p\times n}$$

Exemplo-2

A transposta do vetor $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ é dado por $\boldsymbol{v}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$. A transposta da matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$ é dado por $\boldsymbol{A}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 15 \end{pmatrix}$

Transposta de uma matriz: Propriedades

Algumas propriedades úteis de transposição de matriz incluem:

- $(\boldsymbol{A}^\top)^\top = \boldsymbol{A}$;
- $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^\top = \boldsymbol{A}^\top + \boldsymbol{B}^\top$ (onde $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ soma de matrizes);
- $(c\boldsymbol{A})^\top = c\boldsymbol{A}^\top$ (onde $c\boldsymbol{A}$ é o produto de um escalar e uma matriz).
- $(\boldsymbol{AB})^\top = \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top$ (onde $\boldsymbol{AB}$ é o produto de matrizes);
- $(\boldsymbol{A}^{-1})^\top = (\boldsymbol{A}^\top)^{-1}$ (onde $\boldsymbol{A}^{-1}$ é a matriz inversa $\boldsymbol{A}$).

Traço de uma matriz

O traço de uma matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}_{p \times p}$ é

$$tr(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{p} a_{jj}$$

que é a soma dos elementos diagonais.

Exemplo 3

O traço da matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 13 \\ 2 & 8 & 11 & 2 \\ 7 & 2 & 6 & 9 \\ 5 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ é

$$tr(\boldsymbol{A}) = 1 + 8 + 6 + 3 = 18$$

Traço de uma matriz: Propriedades

Algumas propriedades úteis de transposição de matriz incluem:

- $tr(\boldsymbol{A}) = tr(\boldsymbol{A}^\top)$;
- $tr(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = tr(\boldsymbol{A}) + tr(\boldsymbol{B})$;
- $tr(b\boldsymbol{A}) = b\, tr(\boldsymbol{A})$
- $tr(\boldsymbol{AB}) = tr(\boldsymbol{BA})$ se ambos produtos são bem definidos;
- Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz simétrica, então $tr(\boldsymbol{A}_{p\times p}) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$, ondo λ_j é o j-ésimo autovalor da matriz $\boldsymbol{A}$.

Matriz simétrica

Uma matriz simétrica é quadrada e simétrica ao longo da diagonal principal:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}_{p\times p}$$

com $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i \neq j$

Observe que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\top$ para todas as matrizes simétricas (por definição)

Matriz simétrica: Exemplo–4

A matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ é simétrica e é de ordem 4×4. A

matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & \color{red}{4} \\ 0 & 2 & 5 & 6 \\ 4 & \color{red}{1} & 6 & 8 \end{pmatrix}$ não é simétrica e é de ordem 4×4.

Matriz diagonal

Uma matriz diagonal é uma matriz quadrada que tem zeros fora das diagonais

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_p \end{pmatrix}_{p \times p}$$

Muitas vezes escrevemos $\boldsymbol{D} = diag(d_1, ..., d_p)$ para definir uma matriz diagonal

Matriz Identidade

A matriz identidade de ordem p é uma matriz $p \times p$ que tem uns ao longo do diagonal principal e zeros fora das diagonais

$$\boldsymbol{I}_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{p \times p}$$

Note que $\boldsymbol{I}_p$ é um caso especial de uma matriz diagonal.

Um vetor ou matriz de zeros será denotado por

$$\boldsymbol{o}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n\times 1} \qquad \boldsymbol{O}_{n\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{n\times p}$$

Um vetor ou matriz de uns será denotado por

$$\mathbf{1}_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{n\times 1} \qquad \mathbf{1}_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}_{n\times p}$$

Soma e diferença de matriz: definição

- Dado duas matrices da mesma ordem $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n \times p}$ e $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n \times p}$ a soma $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ resulta a matriz $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{n \times p}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- Dado duas matrices da mesma ordem $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n \times p}$ e $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n \times p}$ a diferença $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ resulta a matriz $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{n \times p}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Nota: adição e diferença de matriz são definidas apenas para duas matrizes da mesma ordem.

Soma e diferença de matriz: definição

Dado $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 13 \\ 2 & 8 & 11 & 2 \\ 7 & 2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ temos

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1+5 & 4+6 & 8+1 & 13+7 \\ 2+1 & 8+3 & 11+0 & 2+2 \\ 7+2 & 2+5 & 6+3 & 9+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 9 & 20 \\ 3 & 11 & 11 & 4 \\ 9 & 7 & 9 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1-5 & 4-6 & 8-1 & 13-7 \\ 2-1 & 8-3 & 11-0 & 2-2 \\ 7-2 & 2-5 & 6-3 & 9-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 7 & 6 \\ 1 & 5 & 11 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Produto interno entre dois vetores

Sejam $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{s\times 1}$ e $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_{s\times 1}$. Define-se o produto interno de dois vetores como

$$\boldsymbol{v}^\top \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \ldots & v_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_s \end{pmatrix} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_s w_s \ \in \mathbb{R}.$$

note que os $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ são da mesma ordem.

Produto externo entre dois vetores

Sejam $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{m\times 1}$ e $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_{n\times 1}$. Define-se o produto externo de dois vetores como

$$\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}^{\top} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & \dots & v_1 w_n \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & \dots & v_2 w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_m w_1 & v_m w_2 & \dots & v_m w_n \end{pmatrix}_{m\times n}$$

note que os $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ têm diferente ordens.

Produto de Matriz-escalar

Seja $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_{n \times m}$ uma matriz de ordem $n \times m$ e $c \in \mathbb{R}$ um escalar. Define-se o produto de uma matriz por um escalar como

$$c\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}c \begin{pmatrix} c\ a_{11} & c\ a_{12} & \dots & c\ a_{1m} \\ c\ a_{21} & c\ a_{22} & \dots & c\ a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c\ a_{n1} & c\ a_{n2} & \dots & c\ a_{nm} \end{pmatrix}_{n \times m}$$

que é uma matriz $\boldsymbol{C} = \{c_{ij}\}_{n \times m}$ tal que $c_{ij} = ca_{ij}$.

Produto de duas matrizes

Sejam $A = \{a_{ij}\}_{n \times m}$ e $\boldsymbol{B} = \{b_{jk}\}_{m \times p}$ duas matrizes. O produto AB é uma matriz $n \times p$ em que

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} a_{1i} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^{m} a_{1i} b_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ni} b_{i1} & \dots & \sum_{i=1}^{m} a_{ni} b_{ip} \end{pmatrix}_{n \times p} \tag{1}$$

Observe que o número de linhas de $\boldsymbol{B}$ deve corresponder ao número de colunas de $\boldsymbol{A}$ (ou seja, m), e observe que $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ mesmo se ambos os produtos forem definidos.

Matriz ortogonal e idempotente

- Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ é chamada ortogonal se $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.
- Uma matriz quadrada $\boldsymbol{A}$ é chamada idempotente se $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

Exemplo

As seguintes matrizes aparecem frequentemente em análise multivariada

- Uma matriz de rotação $R = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$ é ortogonal.
- A matriz de centralização $C = \boldsymbol{I}_n + \frac{1}{n}\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^\top$ e a matriz de projeção $P_A = A(A^\top A)^{-1}A^\top$ são idempotentes.

Determinante de uma matriz

O determinante é um conceito importante de álgebra matricial. Para uma matriz quadrada $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_{p \times p}$, é definido como

$$det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = \sum (-1)^{|\tau|} a_{1\tau(1)} \dots a_{p\tau(p)},$$

a soma é sobre todas as permutações τ de $\{1, 2, ..., p\}$ e $|\tau| = 0$ se a permutação pode ser escrita como um produto de um número par de transposições e $|\tau| = 1$ caso contrário.

Exemplo

No caso que $p = 2$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ podemos permutar os dígitos "1" e "2" uma vez ou não. Então

$$det(\boldsymbol{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

1. Para matrizes $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ e $b \in R$, $\det(b\boldsymbol{A}) = b^n \det(\boldsymbol{A})$
2. Para matrizes $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ e $B_{n\times n} \Rightarrow \det(\boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$.
3. Para matrizes $\boldsymbol{A}_{p\times q}$ e $B_{q\times p} \Rightarrow \det(\boldsymbol{I}_p - \boldsymbol{AB}) = \det(\boldsymbol{I}_q - \boldsymbol{BA})$
4. Se $\boldsymbol{A}_{p\times p}$ é ortogonal então $\det(\boldsymbol{A}) = \pm 1$.
5. $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{A}$ é não singular.

Matriz inversa

Se $\boldsymbol{A}_{p\times p}$ é não singular existe a matriz inversa da matriz, denotado por $\boldsymbol{A}^{-1}$ que satisfaz $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}_p$

Algumas propriedades

1. $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. $A_{n\times n}$ e $B_{n\times n}$ não singulares $\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. $A_{n\times n}$ não singular e $k \neq 0$ um escalar $\Rightarrow (kA)^{-1} = (1/k)A^{-1}$.
4. Se A é uma matriz ortogonal $A^{-1} = A^{\top}$.

Autovetores e Autovalores de uma Matriz

Dada a matriz $\boldsymbol{A}_{p\times p}$ considere a transformação linear: $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ onde $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{w}$ são vetores de um espaço $p-$dimensional.

Definição

Um vetor $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ é dito ser autovetor da matriz $\boldsymbol{A}_{p\times p}$ se a transformação linear deste vetor é colinear a este vetor. Ou seja, se $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$. O escalar λ é chamado de autovalor da matriz $\boldsymbol{A}$ correspondente ao autovetor $\boldsymbol{u}$.

Autovetores e Autovalores de uma Matriz

Dada a matriz $\boldsymbol{A}_{p\times p}$ considere a transformação linear: $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$ onde $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{w}$ são vetores de um espaço $p-$dimensional.

Definição

Um vetor $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ é dito ser autovetor da matriz $\boldsymbol{A}_{p\times p}$ se a transformação linear deste vetor é colinear a este vetor. Ou seja, se $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$. O escalar λ é chamado de autovalor da matriz $\boldsymbol{A}$ correspondente ao autovetor $\boldsymbol{u}$.

- Note que $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}_p)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, a equação tem solução diferente da nula ($\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$) se e somente se, seu determinante é zero.
- $\det(\boldsymbol{A} - \lambda I_p) = 0$, é chamada equação característica e o polinômio em λ definido por ela se chama polinômio característico.
- As raízes deste polinômio são os autovalores da matriz $\boldsymbol{A}$
- Cada autovalor λ_j determina um autovetor e é solução das equações: $(\boldsymbol{A} - \lambda_j\boldsymbol{I}_p)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

Autovetores e Autovalores de uma Matriz:Exemplo

Encontre os autovetores e autovalores da matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Primeiro devemos encontrar os autovalores solução do polinômio característico: $\det(\boldsymbol{A} - \lambda I_2) = 0$

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \iff (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \iff \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = 3.$$

Dados os autovalores, os autovetores devem ser encontrados subtituindo cada autovalor na equação: $(\boldsymbol{A} - \lambda_j \boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

Para $\lambda_1 = 1$ segue $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff u_1 + u_2 = 0$ ou $u_1 = -u_2$ onde $u_1 = c \neq 0$ é uma constante arbitrária. O autovetor $\boldsymbol{u}_1$ correspondente a λ_1 é $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ se $c = 1$

Autovetores e Autovalores de uma Matriz:Exemplo

Para $\lambda_1 = 3$ segue $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff u_1 - u_2 = 0$ ou $u_1 = u_2$ onde $u_1 = c \neq 0$ é uma constante arbitrária. O autovetor $\boldsymbol{u}_2$ correspondente a λ_2 é $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ se $c = 1$.

Autovetores e Autovalores de uma Matriz:Propriedades

Suponha que a matriz $\boldsymbol{A}$ tenha os autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Seja $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$. Então

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{\Lambda}| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

$$tr(\boldsymbol{A}) = tr(\boldsymbol{\Lambda}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz idempotente, então

$$tr(\boldsymbol{A}) = rank(\boldsymbol{A}) = \text{ número de autovalores } \neq 0$$

Se $\boldsymbol{A}$ for simétrico, então seus autovalores são todos reais

Descomposição de matrizes

- Uma decomposição de matriz decompõe (ou seja, separa) uma determinada matriz em uma multiplicação de matriz de duas (ou mais) matrizes mais simples.
- As decomposições de matriz são úteis:
  - Resolução de sistemas de equações;
  - Encontrar características importantes dos dados.
- Discutiremos brevemente quatro decomposições de matriz:
  - Descomposição espectral
  - Decomposição de Cholesky
  - Decomposição QR
  - Decomposição em valor singular (singular value decomposition,SVD)

A decomposição espectral (DE) decompõe uma matriz simétrica $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_{n\times n}$ em um produto de três matrizes:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Gamma}^\top$$

tal que

- $\boldsymbol{\Gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)_{n\times n}$ onde γ_1 é j-ésimo autovetor;
- $\boldsymbol{\Lambda} = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, onde λ_j é o j-ésimo autovalor.
- os autovalores são ordenados $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots, \lambda_n$

Note que $\boldsymbol{\Gamma}$ é uma matriz ortogonal, ou seja $\boldsymbol{\Gamma}^\top\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\Gamma}^\top = \boldsymbol{I}_n$

Decomposição espectral

A DE da matriz A simétrica tem-se

$$A = \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Gamma}^\top = \lambda_1\gamma_1\gamma_1^\top + \ldots + \lambda_k\gamma_k\gamma_k^\top = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\gamma_i\gamma_i^\top$$

onde $\Gamma = (\gamma_1 \ldots \gamma_k)$.
Note que

- $A^{-1} = \mathbf{\Gamma}\Lambda^{-1}\mathbf{\Gamma}^\top = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\lambda_i}\gamma_i\gamma_i^\top$, já que

$$(\mathbf{\Gamma}\Lambda\mathbf{\Gamma}^\top)(\mathbf{\Gamma}\Lambda^{-1}\mathbf{\Gamma}^\top) = \mathbf{\Gamma}\Lambda\mathbf{\Gamma}^\top\mathbf{\Gamma}\Lambda^{-1}\mathbf{\Gamma}^\top = I.$$

Decomposição espectral

Definição

A raiz quadrada de A é denotada por $A^{1/2}$ *e pode ser escrita na forma* $A^{1/2} = \sum_{i=1}^{k} \sqrt{\lambda_i}\gamma_i\gamma_i^\top$ *e tem as*

Propriedades

1. $(A^{1/2})^\top = A^{1/2}$ (simétrica),
2. $A^{1/2}A^{1/2} = A$,
3. $(A^{1/2})^{-1} = \Gamma\Lambda^{-1/2}\Gamma^\top$,
4. $A^{1/2}(A^{1/2})^{-1} = I$,
5. $A^{-1/2}A^{-1/2} = A^{-1}$ em que $A^{-1/2} = (A^{1/2})^{-1}$.

Decomposição de Cholesky

A decomposição de Cholesky (DC) decompõe uma matriz definida positiva $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_{n\times n}$ em um produto de duas matrizes:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^\top$$

onde

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

é uma matriz triangular inferior (esquerda)

Decomposição QR

A decomposição QR (DQR) decompõe qualquer matriz (ou seja, $n \geq p$) $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_{n \times p}$ em um produto de duas matrizes:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{QR} \\ & (\boldsymbol{Q}_1, \boldsymbol{Q}_2) \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \boldsymbol{0}_{(n-p)\times p} \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{R}_1 \end{aligned}$$

tal que

- $\boldsymbol{Q}$ é uma matriz não singular
- $\boldsymbol{R}_1 = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1p} \\ 0 & r_{22} & \dots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{pp} \end{pmatrix}_{p \times p}$ é a matriz triangular superior (direita)

Decomposição em valor singular

A decomposição em valor singular (DVS) decompõe qualquer matriz $\boldsymbol{A} = \{a_{ij}\}_{n \times p}$ em um produto de três matrizes

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{V}^\top$$

onde $\boldsymbol{U}_{n \times r}$ e $\boldsymbol{V}_{p \times r}$ e ambos $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$ são colunas ortonormais, $\boldsymbol{V}^\top \boldsymbol{V} = \boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{U} = \boldsymbol{I}_r$ e $\boldsymbol{\Lambda} = diag(\lambda_1^{1/2}, \ldots, \lambda_r^{1/2})$ e $\lambda_j > 0$. Os valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ são os autovalores diferentes de zero das matrizes $\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top$. $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{V}$ consistem nos r autovetores correspondentes a essas matrizes.

Classificação de matrizes

Uma forma quadrática $Q(\boldsymbol{x})$ é construída a partir de uma matriz simétrica $\boldsymbol{A}_{p\times p}$ e um vetor $\boldsymbol{x} \in R^p$.

$$Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_ix_j$$

A matriz simétrica $\boldsymbol{A}_{p\times p}$ pode ser

1. positiva definida, se $Q(\boldsymbol{x}) > 0 \; \forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$
2. positiva semidefinida, se $Q(\boldsymbol{x}) \geq 0$ para todo $\boldsymbol{x} \neq 0$
3. negativa definida, se $Q(\boldsymbol{x}) < 0 \; \forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$
4. negativa semidefinida, se $Q(\boldsymbol{x}) \leq 0$ para todo $\boldsymbol{x} \neq 0$

Note que $Q(\boldsymbol{x}) > 0$ para algum $\boldsymbol{x}$ e $Q(\boldsymbol{x}) < 0$ outro $\boldsymbol{x}$ então a matriz $\boldsymbol{A}$ é dito matriz indefinida.

Classificação de matrizes: Exemplo

A matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ é positiva definida

$$\begin{aligned} Q(x_1, x_2) &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + (x_1 - x_2)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

a igualdade vale quando $x_1 = x_2 = 0$.

Classificação de matrizes:Propriedades

Seja λ_j o j-ésimo autovalor de $\boldsymbol{A}$ para $j \in \{1, ..., n\}$

1. Se $\boldsymbol{A}$ for positiva definida, então $\lambda_j > \forall j$
2. Se $\boldsymbol{A}$ for positivo semi-definido, então $\lambda_j \geq 0 \ \forall j$
3. Se $\boldsymbol{A}$ for negativa definida, então $\lambda_j < 0 \ \forall j$
4. Se $\boldsymbol{A}$ for negativa semidefinida , então $\lambda_j \leq 0 \ \forall j$
5. Se $\boldsymbol{A}$ for indefinido, então $\lambda_i > 0$ e $\lambda_j < 0$ para algum $i \neq j$

Produto de Kronecker

- Sejam $A_{m\times n} = (a_{ij})$ e $B_{p\times q} = (b_{ij})$.
- O produto de Kronecker entre A e B é definido por

$$(A \otimes B)_{mp\times nq} = (a_{ij}B).$$

Propriedades do produto de Kronecker

1. $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$
2. $(A + B) \otimes C = (A \otimes C) + (B \otimes C)$
3. $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$
4. $aA \otimes bB = ab(A \otimes B)$, com $a, b \in \mathbb{R}$
5. $(AB) \otimes (CD) = (A \otimes C)(B \otimes D)$
6. $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ se A^{-1} e B^{-1} existirem
7. $(A \otimes B)^\top = A^\top \otimes B^\top$
8. $(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = I$
9. $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$.

Operador *vec*

O operador *vec* cria um vetor coluna a partir de uma matriz $\boldsymbol{A}$, empilhando os vetores coluna de $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, assim

$$vec(\boldsymbol{A}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \cdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

Propriedades

- $vec(\boldsymbol{AXB}) = (\boldsymbol{B}^\top \otimes \boldsymbol{A}) vec(\boldsymbol{X})$
- $tr(AB) = vec(\boldsymbol{A}^\top)^\top vec(\boldsymbol{B})$.
- $vec(\boldsymbol{aa}^\top) = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{a}$.

Operações com matrizes em blocos

Sejam A, B, C, ... matrizes com dimensões adequadas em cada caso.

1. $$\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^\star & B^\star & C^\star \\ D^\star & E^\star & F^\star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + A^\star & B + B^\star & C + C^\star \\ D + D^\star & E + E^\star & F + F^\star \end{bmatrix},$$
   desde que as somas sejam possíveis.

Operações com matrizes em blocos

Sejam A, B, C, ... matrizes com dimensões adequadas em cada caso.

1. $$\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A^\star & B^\star & C^\star \\ D^\star & E^\star & F^\star \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+A^\star & B+B^\star & C+C^\star \\ D+D^\star & E+E^\star & F+F^\star \end{bmatrix},$$
   desde que as somas sejam possíveis.

2. $$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PE+QG \\ RE+SG \end{bmatrix},$$
   desde que os produtos sejam possíveis.

Operações com matrizes em blocos

Sejam A, B, C, ... matrizes com dimensões adequadas em cada caso.

1. $$\left[\begin{array}{ccc} A & B & C \\ D & E & F \end{array}\right] + \left[\begin{array}{ccc} A^\star & B^\star & C^\star \\ D^\star & E^\star & F^\star \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} A+A^\star & B+B^\star & C+C^\star \\ D+D^\star & E+E^\star & F+F^\star \end{array}\right],$$
   desde que as somas sejam possíveis.

2. $$\left[\begin{array}{cc} P & Q \\ R & S \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} E \\ G \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} PE+QG \\ RE+SG \end{array}\right],$$
   desde que os produtos sejam possíveis.

3. $H = \left[\begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array}\right]_{m\times n} \Rightarrow H^\top = \left[\begin{array}{cc} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{array}\right]_{n\times m}$

Inversas de matrizes em blocos

Seja B uma matriz particionada em blocos,

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

em que B_{11} e B_{22} são matrizes quadradas não-singulares.
Então

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} (B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21})^{-1} & -B_{11}^{-1}B_{12}(B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1} \\ -B_{22}^{-1}B_{21}(B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21})^{-1} & (B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12})^{-1} \end{bmatrix}$$

e

$$|B| = |B_{22}||B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21}| = |B_{11}||B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12}|$$

Inversas de matrizes em blocos

Seja B uma matriz bloco diagonal

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{bmatrix}$$

em que B_{11}, B_{22} e B_{33} são matrizes quadradas não-singulares.

Então $$B^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & B_{22}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & B_{33}^{-1} \end{bmatrix}$$

e $$|B| = |B_{11}||B_{22}||B_{33}|.$$

O resultado vale para matrizes bloco diagonal de maior dimensão.

```
(x<-1:12)
[1]  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12
> (A<- matrix(x,nrow=3,ncol=4))
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    4    7   10
[2,]    2    5    8   11
[3,]    3    6    9   12

> (b=10)
[1] 10
> (b*x)
[1]  10  20  30  40  50  60  70  80  90 100 110 120
> (b*A)
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]   10   40   70  100
[2,]   20   50   80  110
[3,]   30   60   90  120
```

- Lembre-se: a multiplicação escalar é realizada usando: $*$
- Em contraste, a multiplicação da matriz é realizada usando: $\% * \%$

```
>  x = 1:9
>  y = 9:1
>  X = matrix(x,3,3)
>  Y = matrix(y,3,3)
>  X
[,1] [,2] [,3]
[1,]    1    4    7
[2,]    2    5    8
[3,]    3    6    9
> Y
[,1] [,2] [,3]
[1,]    9    6    3
[2,]    8    5    2
[3,]    7    4    1
```

```
> X*Y
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    9   24   21
[2,]   16   25   16
[3,]   21   24    9
> X%*%Y
     [,1] [,2] [,3]
[1,]   90   54   18
[2,]  114   69   24
[3,]  138   84   30
```

```
> x = 1:6
>  y = 6:1
>  X = matrix(x,2,3)
> Y = matrix(y,3,2)
>  X
[,1] [,2] [,3]
[1,]    1    3    5
[2,]    2    4    6
> Y
[,1] [,2]
[1,]    6    3
[2,]    5    2
[3,]    4    1
```

```
> X*Y
Error in X * Y :
 arrays de dimensão não compatível

> X%*%Y
      [,1] [,2]
[1,]    41   14
[2,]    56   20
```

Função transposta

Para obter a transposta de uma matriz em R, usamos a função t.

```
> X = matrix(1:6,2,3)
> X
      [,1] [,2] [,3]
 [1,]    1    3    5
 [2,]    2    4    6

> t(X)
     [,1] [,2]
[1,]    1    2
[2,]    3    4
[3,]    5    6
```

Função dimensão

Para obter a dimensão de uma matriz em R, usamos a função *dim*.

```
> X = matrix(1:6,2,3)
> X
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    3    5
[2,]    2    4    6
> dim(X)
[1] 2 3
> dim(t(X))
[1] 3 2
```

Função produto cruzado

Dado $\boldsymbol{X} = \{x_{ij}\}_{n\times p}$ e $\boldsymbol{Y} = \{y_{ij}\}_{n\times p}$ pode-se obter o produto cruzado $\boldsymbol{X}^\top\boldsymbol{Y}$ usando a função: *crossprod*

```
> X = matrix(1:6,3,2)
> Y = matrix(1:9,3,3)
> crossprod(X,Y)
  [,1] [,2] [,3]
[1,]   14   32   50
[2,]   32   77  122

> t(X)%*%Y
      [,1] [,2] [,3]
[1,]   14   32   50
[2,]   32   77  122
```

- Observe que *crossprod* produz o mesmo resultado que usar transposta e símbolo de multiplicação de matriz.
- No entanto, é preferível *crossprod* porque é mais rápido

Função produto cruzado-transposto

Dado $\boldsymbol{X} = \{x_{ij}\}_{n\times p}$ e $\boldsymbol{Y} = \{y_{ij}\}_{n\times p}$ pode-se obter o produto cruzado transposto $\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^\top$ usando a função: *tcrossprod*

```
>  X = matrix(1:6,2,3)
>  Y = matrix(1:9,3,3)
> tcrossprod(X,Y)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]   48   57   66
[2,]   60   72   84

> X %*% t(Y)
        [,1] [,2] [,3]
[1,]   48   57   66
[2,]   60   72   84
```

- Observe que *tcrossprod* produz o mesmo resultado que usar transposta e símbolo de multiplicação de matriz.
- No entanto, é preferível *tcrossprod* porque é mais rápido

Funções de soma de linha e coluna

Podemos obter somas de linha e coluna usando o funções *rowSums* e *colSums*

```
> X = matrix(1:6,2,3)
> X
[,1] [,2] [,3]
[1,]    1    3    5
[2,]    2    4    6
> rowSums(X)
[1]  9 12
> colSums(X)
[1]  3  7 11
```

Funções média de linha e coluna

Podemos obter médias de linha e coluna usando o funções *rowMeans* e *colMeans*

```
> X = matrix(1:6,2,3)
> X
[,1] [,2] [,3]
[1,]    1    3    5
[2,]    2    4    6
> rowMeans(X)
[1] 3 4
> colMeans(X)
[1] 1.5 3.5 5.5
```

Traço de uma matriz

```
> X <- matrix(data = 1:9, ncol = 3)
> X
   [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    4    7
[2,]    2    5    8
[3,]    3    6    9
> sum(diag(X))
[1] 15
> X <- matrix(data = 1:6, ncol = 3)
> X
[,1] [,2] [,3]
[1,]    1    3    5
[2,]    2    4    6
> sum(diag(X))
[1] 5
```

Função diagonal

A função *diag* tem múltiplos propósitos :

- Se você inserir uma matriz quadrada, *diag* retorna os elementos diagonais
- Se você inserir um vetor, *diag* cria uma matriz diagonal
- Se você inserir um escalar, o *diag* criará uma matriz de identidade

```
> X = matrix(1:4,2,2)
>  X
[,1] [,2]
[1,]    1    3
[2,]    2    4
>
> diag(X)
[1] 1 4
```

```
> diag(1:3)
      [,1] [,2] [,3]
[1,]     1    0    0
[2,]     0    2    0
[3,]     0    0    3

> diag(3)
      [,1] [,2] [,3]
[1,]     1    0    0
[2,]     0    1    0
[3,]     0    0    1
```

Funções para decomposições de matrizes

R tem funções integradas para decomposições de matrizes:

- Descomposição espectral: *eigen*
- Decomposição de Cholesky *: chol*
- Decomposição QR: *: qr*
- Decomposição em valor singular (singular value decomposition,SVD): *svd*

```
> X = matrix(1:9,3,3)
> X = crossprod(X)
>  xeig = eigen(X,symmetric=TRUE)
>  xeig$val
[1] 2.838586e+02 1.141413e+00 6.308738e-15
> xeig$vectors
           [,1]       [,2]       [,3]
[1,] -0.2148372  0.8872307  0.4082483
[2,] -0.5205874  0.2496440 -0.8164966
[3,] -0.8263375 -0.3879428  0.4082483
> Xhat = xeig$vec %*% diag(xeig$val) %*% t(xeig$vec)

> sum( (X - Xhat)^2 )
[1] 1.178874e-26
```

Descomposição Cholesky

```
> set.seed(11)
> X = matrix(runif(9),3,3)
> X = crossprod(X)
> xchol = chol(X)
> t(xchol)
          [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 0.5810238 0.0000000 0.0000000
[2,] 0.8458902 0.4478715 0.0000000
[3,] 0.8154978 0.3819997 0.2371446
> Xhat = crossprod(xchol)
>  sum( (X - Xhat)^2 )
[1] 0
```

Descomposição QR

```
> X = matrix(1:6,3,2)
> xqr = qr(X)
> Q = qr.Q(xqr)
> Q
[,1]          [,2]
[1,] -0.2672612  0.8728716
[2,] -0.5345225  0.2182179
[3,] -0.8017837 -0.4364358

> R = qr.R(xqr)
> R
          [,1]      [,2]
[1,] -3.741657 -8.552360
[2,]  0.000000  1.963961
> Xhat = Q %*% R[,sort(xqr$pivot,index=TRUE)$ix]
> sum( (X - Xhat)^2 )
[1] 1.343529e-30
```

Descomposição em valor singular

```
> X = matrix(1:6,3,2)
> xsvd = svd(X)
> xsvd
$d
[1] 9.5080320 0.7728696

$u
[,1]        [,2]
[1,] -0.4286671  0.8059639
[2,] -0.5663069  0.1123824
[3,] -0.7039467 -0.5811991

$v
[,1]        [,2]
[1,] -0.3863177 -0.9223658
[2,] -0.9223658  0.3863177
```

```
> Xhat = xsvd$u %*% diag(xsvd$d)
          %*% t(xsvd$v)
> Xhat
        [,1] [,2]
[1,]     1    4
[2,]     2    5
[3,]     3    6
> sum( (X - Xhat)^2 )
[1] 1.212874e-29
```

Posto de uma matriz quadrada

```
>library(matrixcalc)
> A <- diag( seq( 1, 4, 1 ) )
> A
[,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    0    0    0
[2,]    0    2    0    0
[3,]    0    0    3    0
[4,]    0    0    0    4
> matrix.rank( A )
[1] 4
> B=matrix(c(1,2,3,6),2)
> B
[,1] [,2]
[1,]    1    3
[2,]    2    6
> matrix.rank(B, method ="qr")
[1] 1
```

Produto de Kronecker

```
> B = matrix(1:6,3,2)
> B
     [,1] [,2]
[1,]    1    4
[2,]    2    5
[3,]    3    6
> C=diag(2)
> C
     [,1] [,2]
[1,]    1    0
[2,]    0    1
```

```
> kronecker(C,B)
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    4    0    0
[2,]    2    5    0    0
[3,]    3    6    0    0
[4,]    0    0    1    4
[5,]    0    0    2    5
[6,]    0    0    3    6

kronecker(B,C)
     [,1] [,2] [,3] [,4]
[1,]    1    0    4    0
[2,]    0    1    0    4
[3,]    2    0    5    0
[4,]    0    2    0    5
[5,]    3    0    6    0
[6,]    0    3    0    6
```

```
> library(matrixcalc)
> set.seed(2)
> D=matrix(rnorm(6),3,2)
> D
          [,1]        [,2]
[1,] -0.8969145 -1.13037567
[2,]  0.1848492 -0.08025176
[3,]  1.5878453  0.13242028
> vec(D)
[,1]
[1,] -0.89691455
[2,]  0.18484918
[3,]  1.58784533
[4,] -1.13037567
[5,] -0.08025176
[6,]  0.13242028
```