Aluno: Vítor Carvalho Marx Lima

Matrícula: 118211ECP015

Cálculo Numérico

Professor Dr. Alessandro Alves Santana

Curso: Engenharia de Computação

Lista de exercícios

1 -

$t(s)$	0,0	0,6	1,6	2,5	3,1	4,8	5,9	6,6	7,9	8,5	9,9	10,0
$V(t)(m/s)$	0,00	0,04	0,74	2,50	4,24	9,56	10,88	10,14	5,94	3,5	0,021	0,00

a) $\tilde{v}(t) = \alpha_1 + \alpha_2 t \cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)$ | 4 casas decimais

$$g(x) = \alpha_1 \phi_1(x) + \alpha_2 \phi_2(x) \text{, onde } \phi_1(x) = 1 \text{, } \phi_2(x) = t\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \phi_i(x_k)\phi_j(x_k) \quad e \quad b_i = \sum_{k=1}^{m} \phi_i(x_k) f(x_k)$$

Matriz 2x2 (2 alphas), onde $a_{12} = a_{21}$ (Matriz simétrica)

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{12} \phi_1^2(x_k) = \sum_{k=1}^{12} 1 = 12$$

$$a_{12} = \sum_{k=1}^{12} \phi_1(x_k) \cdot \phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{12} 1 \cdot t \cdot \cos\left(\frac{\pi x_k}{5}\right) = 13,8351$$

$$a_{21} = a_{12} = 13,8351$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{12} \phi_2^2(x_k) = 288,7940$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^{12} \phi_1(x_k) f(x_k) = 47,5600$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^{12} \phi_2(x_k) f(x_k) = -110,4126$$

Matriz:

$$\begin{bmatrix} 12 & 13,8351 \\ 13,8351 & 288,7940 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47,5600 \\ -110,4126 \end{bmatrix}$$

$\alpha_1 = \dfrac{Det\alpha_1}{Det}$ | $\alpha_2 = \dfrac{Det\alpha_2}{Det}$

$Det = 3274,1180$ | $Det\,\alpha_1 = 15262,6120$ | $Det\,\alpha_2 = -1982,9486$

$\alpha_1 = 4,6616$ e $\alpha_2 = -0,6056$

$$g(t) = 4,6616 - 0,6056 \cdot t \cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)$$

Para $t = 3$ segundos:

a) $g(3) = 5,2230$

b) aceleração $= g'(t) = -0,6056\left[\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right) + t \cdot \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\frac{\pi}{5}\right)$

$$g'(t) = -0,6056\left(\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right) + t\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\frac{\pi}{5}\right)$$

$g'(5) = 0,6056$

c) $D(t) = \int g(t)\,dt = \int_2^8 4{,}6616 - 0{,}6056\, t \cos\left(\frac{\pi t}{5}\right) dt$

$$D(t) = \int_2^8 4{,}6616 - 0{,}6056 \int_2^8 t \cdot \cos\left(\frac{\pi t}{5}\right) dt$$

$\frac{\pi t}{5} = u \rightarrow \frac{\pi}{5} dt = du$ se $t = 2 \rightarrow u = \frac{2\pi}{5}$

$dt = \frac{5}{\pi} du$ $\quad t = 8 \rightarrow u = \frac{8\pi}{5}$

$t = \frac{5}{\pi} \cdot u$

$$\int_{\frac{2\pi}{5}}^{\frac{8\pi}{5}} \frac{5u}{\pi} \cdot \cos(u) \frac{5}{\pi} du$$

$$\frac{25}{\pi^2} \cdot \int_{\frac{2\pi}{5}}^{\frac{8\pi}{5}} u \cdot \cos(u)\, du \rightarrow \int fg' = fg - \int f'g$$

$f = u$ e $g = \operatorname{sen}(u)$

$$\underbrace{u \cdot \operatorname{sen}(u) - \int 1 \cdot \operatorname{sen}(u)\, du}_{u \operatorname{sen}(u) + \cos(u)}$$

$$D(t) = \left[4{,}6616\, t\right]_2^8 - 0{,}6056 \cdot \left[u \operatorname{sen}(u) + \cos(u)\right]_{\frac{2\pi}{5}}^{\frac{8\pi}{5}} \cdot \frac{25}{\pi^2}$$

$$D(t) = 27{,}9696 + 9{,}1667 = 37{,}1363$$

$$\boxed{c)\quad D(t) = \int_2^8 g(t)\,dt = 37{,}1363}$$

② - Obtenha uma aproximação para a integral

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx$$

Ajustando-a por uma função da forma:

$$\tilde{f}(x) = \alpha_1 \phi_1(x) + \alpha_2 \phi_2(x) + \alpha_3 \phi_3(x)$$

Com: $\phi_1(x) = 1$, $\phi_2(x) = x$ e $\phi_3(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

e $\phi_4 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

Utilizando os pontos do conjunto

$$S = \{-0{,}861136, -0{,}339981, 0{,}339981, 0{,}861136\}$$

Utilizando 6 casas decimais e MEGPP:

$$\tilde{f}(x) = 1\,\alpha_1 + \alpha_2 . x + \alpha_3 . \frac{1}{2}(3x^2 - 1) + \alpha_4 \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

x	$-0{,}861136$	$-0{,}339981$	$0{,}339981$	$0{,}861136$
$F(x)$	$0{,}476372$	$0{,}890843$	$0{,}890843$	$0{,}476372$

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{m} \phi_1(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{4} 1^2 = 4$$

$$a_{14} = \sum_{k=1}^{m} \phi_1(x_k)\phi_4(x_k) = 0$$

$$a_{12} = \sum_{k=1}^{m} \phi_1(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x = 0$$

$$a_{13} = \sum_{k=1}^{m} \phi_1(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{2}(3x^2 - 1) = 0{,}571427$$

$$a_{21} = a_{12} = 0$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{m} \phi_2^2(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x^2 = 1{,}714285$$

$$a_{23} = \sum_{k=1}^{m} \Phi_2(x_k) \cdot \Phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{4} x \, \frac{1}{2}(3x^2-1) = 0$$

$$a_{31} = a_{13} = 0{,}571427$$

$$a_{24} = \sum_{k=1}^{m} \Phi_2(x_k)\, \Phi_4(x_k) = 0{,}244895$$

$$a_{32} = a_{23} = 0$$

$$a_{33} = \sum_{k=1}^{m} \Phi_3^2(x_k) = \sum_{k=1}^{4} \left[\frac{1}{2}(3x^2-1)\right] = 0{,}963263$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^{m} \Phi_1(x_k)\, f(x_k) = 2{,}734430$$

$$a_{34} = \sum_{k=1}^{m} \Phi_3(x_k)\, \Phi_4(x_k) = 0$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^{m} \Phi_2(x_k)\, f(x_k) = 0$$

$$a_{41} = a_{14} = 0$$

$$a_{42} = a_{24} = 0{,}244895$$

$$b_3 = \sum_{k=1}^{m} \Phi_3(x_k)\, f(x_k) = 0{,}001464$$

$$a_{43} = a_{34} = 0$$

$$a_{44} = \sum_{k=1}^{m} \Phi_4^2(x_k) = 0{,}524780$$

$$b_4 = \sum_{k=1}^{m} \Phi_4(x_k)\, f(x_k) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0{,}571428 & 0 \\ 0 & 1{,}714285 & 0 & 0{,}244895 \\ 0{,}571428 & 0 & 0{,}963263 & 0 \\ 0 & 0{,}244896 & 0 & 0{,}524780 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}734430 \\ 0 \\ 0{,}001464 \\ 0 \end{bmatrix}$$

MEGPP

1°

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0{,}571427 & 0 & 2{,}73443 \\ 0 & 1{,}714285 & 0 & 0{,}244896 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}881631 & 0 & -0{,}388952 \\ 0 & 0{,}244896 & 0 & 0{,}52478 & 0 \end{array}\right]$$

$\downarrow$

2°

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0{,}571427 & 0 & 2{,}73443 \\ 0 & 1{,}714285 & 0 & 0{,}244896 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}881631 & 0 & -0{,}388992 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}489795 & 0 \end{array}\right]$$

$\alpha_1 = 0{,}746639 \mid \alpha_2 = 0 \mid \alpha_3 = -0{,}441218 \mid \alpha_4 = 0$

$$\tilde{f}(x) = 0{,}746639 - 0{,}441218 \cdot \frac{1}{2}(3x^3 - 1)$$

$$\int_{-1}^{1} \tilde{f}(x)\,dx \simeq 1{,}493278$$

③ -

$t(s)$	0,09	0,27	0,55	0,72	0,86	0,98	1,23	1,32
$s(t)(m)$	0,37	0,58	0,75	0,82	0,87	0,91	0,97	0,99
$F(x)$	-0,9943	-0,5447	-0,2876	-0,1985	-0,1393	-0,0943	-0,0305	-0,0101

Trabalhe com 4 casas decimais.

a) Ajuste a função da tabela por uma função da forma:

$$\tilde{f}(x) = a x^b \rightarrow \ln(\tilde{f}(x)) = \ln(a x^b)$$

$$\ln(\tilde{f}(x)) = F(x) = \ln(a) + \ln(x^b) = \ln(a) + b \ln(x)$$

$F(x) = \ln(a) + b.\ln(x)$ onde $F(x)$ é da forma:

$$\tilde{f}(x) = \alpha_1 . \phi_1(x) + \alpha_2 . \phi_2(x)$$

$\alpha_1 = \ln(a)$ | $\phi_1(x) = 1$

$\alpha_2 = b$ | $\phi_2(x) = \ln(x)$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \phi_i(x_k)\phi_j(x_k) \quad \text{e} \quad b_i = \sum_{k=1}^{n} \phi_i(x_k) F(x_k)$$

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{8} 1^2 = 8 \checkmark \quad \Big| \quad a_{12} = \sum_{k=1}^{8} 1.\ln(x) = -4,3300 \checkmark$$

$$a_{21} = a_{12} = -4,3300 \checkmark \quad \Big| \quad a_{22} = \sum_{k=1}^{8} [1.\ln(x)]^2 = 8,1210 \checkmark$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^{8} 1.F(x_k) = -2,2993 \checkmark \quad \Big| \quad b_2 = \sum_{k=1}^{8} \ln(x).F(x_k) = 3,3584 \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -4,3300 \\ -4,3300 & 8,1210 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,2993 \\ 3,3584 \end{bmatrix}$$

Solucionando por Cramer:

$$\alpha_1 = \frac{Det_{\alpha_1}}{Det} = -0,0893 \quad \Big| \quad \alpha_2 = \frac{Det_{\alpha_2}}{Det} = 0,3659$$

$Det = 46,2191$ | $Det_{\alpha_1} = -4,1314$ | $Det_{\alpha_2} = 16,9101$

$$F(x) = -0,0893 \cdot 1 + 0,3659 \cdot \ln(x)$$

$\alpha_1 = \ln(a)$ e $\alpha_2 = b$

$e^{\alpha_1} = e^{-0,0893} = a = 0,9146$

a) $\tilde{f}(x) = 0,9146 \cdot x^{0,3659}$

b) $\tilde{f}(1) = 0,9146 \cdot 1^{0,3659} \cong 0,9146$ metros

c) $v(t) = \tilde{f}'(t) = (0,9146)(0,3659) \cdot x^{-0,6341}$

Para $t = 0,2 \rightarrow v(0,2) \cong 0,9286 \ \frac{m}{s}$

d) $a(t) = v'(t) = (0,9146) \cdot (0,3659) \cdot (-0,6341) \cdot x^{-1,6341}$

Para $t = 0,6 \rightarrow a(0,6) \cong -0,4890 \ m/s^2$

e) Ajuste a função da tabela por uma função da forma

$$S_2(t) = \arctan(a x^b) = f(x)$$

$$\tan(f(x)) = a x^b \rightarrow \underbrace{\ln(\tan(f(x)))}_{F(x)} = \ln(a) + b \ln(x)$$

$$F(x) = \ln(a) + b \ln(x) \rightarrow \alpha_1 = \ln(a) \quad | \quad \phi_1(x) = 1$$
$$\alpha_2 = b \quad | \quad \phi_2(x) = \ln(x)$$

Reescrevendo a tabela:

$t(s)$	0,09	0,27	0,55	0,72	0,86	0,98	1,23	1,32
$F(x)$	-0,8471	-0,4228	-0,0709	0,0693	0,1700	0,2518	0,3799	0,4211

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \phi_i(x_k)\,\phi_j(x_k) \quad | \quad b_i = \sum_{k=1}^{m} \phi_i(x_k)\,F(x_k)$$

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{8} 1^2 = 8 \quad | \quad a_{12} = \sum_{k=1}^{8} 1 \cdot \ln(x) = -4,3300$$

$$a_{21} = a_{12} = -4,3300 \quad | \quad a_{22} = \sum_{k=1}^{8} [\ln(x)]^2 = 8,1210$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^{8} 1 \cdot F(x) = -0,1506 \quad | \quad b_2 = \sum_{k=1}^{8} \ln(x) \cdot F(x_k) = 3,0182$$

$\rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 8 & -4{,}3300 \\ -4{,}3300 & 8{,}1210 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}1506 \\ 3{,}0182 \end{bmatrix}$$

$$Det = 46{,}2191$$

$$\begin{bmatrix} -0{,}1506 & -4{,}3300 \\ 3{,}0182 & 8{,}1210 \end{bmatrix} \rightarrow Det\alpha_1 = 11{,}8458$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -0{,}1506 \\ -4{,}3300 & 3{,}0182 \end{bmatrix} \rightarrow Det\alpha_2 = 23{,}4935$$

$$\alpha_1 = \frac{Det\alpha_1}{Det} = 0{,}2563 \quad \Big| \quad \alpha_2 = \frac{Det\alpha_2}{Det} = 0{,}5083$$

$$F(x) = 0{,}2563 + 0{,}5083 \cdot \ln(x)$$

$$\alpha_1 = \ln(a) \rightarrow a = e^{\alpha_1} = e^{0{,}2563} = 1{,}2921$$

e) $\tilde{f}(x) = \arctan(1{,}2921 \cdot x^{0{,}5083})$

f) $\tilde{f}(1) = 1{,}2921 \cdot 1^{0{,}5083} = 0{,}9122$ metros

g) $v(t) = \tilde{f}'(t) = \dfrac{1}{1 + (1{,}2921 \cdot x^{0{,}5083})^2} \cdot (1{,}2921)(0{,}5083) \cdot x^{0{,}4917}$

em $t = 0{,}2 = 1{,}0936 \ \dfrac{m}{s}$

h) $a(t) = v'(t) \rightarrow \quad f(x) = \dfrac{1}{1+(1{,}2921 \cdot x^{0{,}5083})^2}$

$$g(x) = (1{,}2921) \cdot (0{,}5083) \cdot x^{-0{,}4917}$$

$$f'(x) = \frac{0 - 1 \cdot 2(1{,}2921 \cdot x^{0{,}5083}) \cdot (1{,}2921) \cdot (0{,}5083) \cdot x^{-0{,}4917}}{(1+(1{,}2921 \cdot x^{0{,}5083})^4}$$

$$g'(x) = (1{,}2921) \cdot (0{,}5083) \cdot (-0{,}4917) \cdot x^{-1{,}4917}$$

$$a(t) = \frac{-2(1{,}2921 \cdot x^{0{,}5083}) \cdot (1{,}2921)(0{,}5083) \cdot x^{-0{,}4917}}{(1+(1{,}2921) \cdot x^{0{,}5083})^4} \cdot (1{,}2921) \cdot (0{,}5083) \cdot x^{-0{,}4917}$$

$$+ \frac{1}{1+(1{,}2921 \cdot x^{0{,}5083})^2} \cdot (1{,}2921) \cdot (0{,}5083) \cdot (-0{,}4917) \cdot x^{-1{,}4917}$$

$$\boxed{a(0{,}6) \cong -0{,}7048}$$

i) Tabela para Resíduo:

t	0,09	0,27	0,55	0,72	0,86	0,98	1,23	1,32
$S(t)$	0,37	0,58	0,75	0,82	0,87	0,91	0,97	0,99
$S_1(t)$	0,3789	0,5664	0,7348	0,8654	0,8654	0,9078	0,9865	1,0123
$S_2(t)$	0,3631	0,5862	0,7616	0,8747	0,8747	0,9072	0,9623	0,9795

$$r_1 = \sum_{k=1}^{n} [S(t_k) - S_1(t_k)]^2 = 0{,}01374$$

$$r_2 = \sum_{k=1}^{n} [S(t_k) - S_2(t_k)]^2 = 0{,}000529$$

Como o resíduo de S_2 é menor, ela é uma função de aproximação melhor.

④ - Considerando a tabela:

x	-1,53	-1,08	-0,96	-0,49	0,45	0,72	1,10	1,90
$f(x)$	0,74	0,45	0,37	0,11	0,10	0,23	0,46	0,95

$F(x)$

Por uma função da forma:

$$f(x) = \frac{ax^2}{b+x^2}$$

E obtenha a aproximação para a integral:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

Trabalhando com 4 casas decimais.

$$f(x) = \frac{ax^2}{b+x^2} \rightarrow (b+x^2)\,f(x) = a \cdot x^2$$

$$b \cdot f(x) + x^2 f(x) = a \cdot x^2 \rightarrow \underbrace{x^2 f(x)}_{F(x)} = \underbrace{ax^2}_{\alpha_1 \cdot \phi_1(x)} - \underbrace{b f(x)}_{\alpha_2 \phi_2(x)}$$

$$F(x) = a x^2 - b f(x)$$

onde:

$\alpha_1 = a$ | $\phi_1(x) = x^2$

$\alpha_2 = -b$ | $\phi_2(x) = f(x)$ $\longrightarrow$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \phi_i(x_k)\,\phi_j(x_k) \quad \Big| \quad b_i = \sum_{k=1}^{m} \phi_i(x_k) \cdot F(x_k)$$

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{8} (x^2)^2 = 22{,}5532 \quad \Big| \quad a_{12} = \sum_{k=1}^{8} x^2 \cdot f(x) = 6{,}7501$$

$$a_{21} = a_{12} = 6{,}7501 \quad \Big| \quad a_{22} = \sum_{k=1}^{8} [f(x)]^2 = 2{,}0761$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^{8} x^2 F(x_k) = 18{,}1079 \quad \Big| \quad b_2 = \sum_{k=1}^{8} f(x) \cdot F(x_k) = 5{,}1907$$

$F(x) =$ 1,7323 | 0,5249 | 0,3410 | 0,0264 | 0,0203 | 0,1192 | 0,3566 |
3,4295

$$\begin{bmatrix} 22{,}5532 & 6{,}7501 \\ 6{,}7501 & 2{,}0761 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18{,}1079 \\ 5{,}1907 \end{bmatrix}$$

$Det = 1{,}2589$

$$\begin{bmatrix} 18{,}1079 & 6{,}7501 \\ 5{,}1907 & 2{,}0761 \end{bmatrix} \rightarrow Det\,\alpha_1 = 2{,}5561$$

$$\begin{bmatrix} 22{,}5532 & 18{,}1079 \\ 6{,}7501 & 5{,}1907 \end{bmatrix} \rightarrow Det\,\alpha_2 = -5{,}1632$$

$$\alpha_1 = \frac{\text{Det}\,\alpha_1}{\text{Det}} = 2{,}0304 \quad \Big| \quad \alpha_2 = \frac{\text{Det}\,\alpha_2}{\text{Det}} = -4{,}1014$$

$$F(x) = 2{,}0304\,x^2 - 4{,}1014\,f(x)$$

$$f(x) = \frac{2{,}0304\,x^2}{+4{,}1014 + x^2}$$

Agora realizando a integral

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2{,}0304 \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{4{,}1014 + x^2}\,dx$$

Considerando $2{,}0304 = K$ e $4{,}1014 = P$

$$\rightarrow K \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{P + x^2}\,dx \rightarrow K \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{x^2+P}{x^2+P}}_{1} - \frac{P}{x^2+P}\,dx$$

$$\rightarrow K\left(\int_{-1}^{1} 1\,dx - \int_{-1}^{1} \frac{P}{x^2+P}\,dx\right) \rightarrow K\left(x\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{P}{x^2+P}\,dx\right)$$

$x^2 = u^2 P$

$u = \frac{x}{\sqrt{P}}$

$du\sqrt{P} = dx$

$$\rightarrow K\left(2 - \int_{-\frac{1}{\sqrt{P}}}^{\frac{1}{\sqrt{P}}} \frac{P\sqrt{P}\,du}{P(u^2+1)}\right)$$

$$\rightarrow K\left(2 - \sqrt{P}\int_{-1/\sqrt{P}}^{1/\sqrt{P}} \frac{1}{u^2+1}\,du\right) = K\left(2 - \sqrt{P}\arctan(u)\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{P}}}^{\frac{1}{\sqrt{P}}}\right) \rightarrow$$

$$K\left(2-\sqrt{p}\,\arctan(u)\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{p}}}^{\frac{1}{\sqrt{p}}}\right)$$

Substituindo, temos:

$$2{,}0304\left(2-\sqrt{4{,}1014}\,\arctan(u)\Big|_{-1/\sqrt{4{,}1014}}^{1/\sqrt{4{,}1014}}\right)\cong 0{,}28883$$

Assim:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \cong 0{,}28883}$$

5 -

$t(s)$	0	0,59	2,47	2,63	4,22	5,13	6,49	7,58	8,76	10
$v(t)(m/s)$	0	0,20	12,12	14,22	39,72	51,21	51,59	36,00	12,63	0

1,75 2,5

a) Obter uma aproximação para $v(t)$ em $t=3$ com um polinômio de grau 2, com 4 casas decimais.

- 3 pontos com o valor 3 incluso no intervalo.

utilizamos os pontos $\{2,47 \mid 2,63 \mid 4,22\}$ pois os extremos estão mais próximos, o que ajuda em um menor erro.

$$L_k(x) = \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{m} (x - x_i)}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{m} (x_k - x_i)}$$

Para um polinômio da forma:

$$P_n(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) \ldots$$

$x_0 = 2,47$
$x_1 = 2,63$
$x_2 = 4,22$

Com $x = 3$, temos:

$$L_0 = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1) - (x_0 - x_2)} = \frac{(3 - 2,63) \cdot (3 - 4,22)}{(2,47 - 2,63) \cdot (2,47 - 4,22)}$$

$L_0 = -1,6121$

$$L_1 = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(3 - 2,47) \cdot (3 - 4,22)}{(2,63 - 2,47)(2,63 - 4,22)}$$

$L_1 = 2,5417$

$$L_2 = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(3 - 2{,}47) \cdot (3 - 2{,}63)}{(4{,}22 - 2{,}47) \cdot (4{,}22 - 2{,}63)}$$

$L_2 = 0{,}0705$

Assim:

$L_0 = -1{,}6121 \mid L_1 = 2{,}5417 \mid L_2 = 0{,}0705$

Calculando $V(3)$ por $P_n(3)$

$$P_n(3) \cong L_0(3) \cdot f(2{,}47) + L_1(3) f(2{,}63) + L_2(3) f(4{,}22)$$

$$P_n(3) \cong (-19{,}5387) + 36{,}1430 + 2{,}8003$$

a) $P_n(3) \cong 19{,}4047$ m/s

b) $a(t) = v'(t) \cong P'_n(t)$

Calculando os pesos L_0, L_1 e L_2 em função de x:

$$L_0(x) = 3{,}5714x^2 - 24{,}4643x + 39{,}6379$$

$$L_1(x) = -3{,}9308x^2 + 26{,}2972x - 40{,}9725$$

$$L_2(x) = 0{,}3594x^2 - 1{,}8329x + 2{,}3346$$

$$P_n(x) = 1{,}6648x^2 + 4{,}6361x - 9{,}4873$$

$P_n'(x) = 2 \cdot 1{,}6648\,x + 4{,}6361$

Para $t = 4$, temos

b) $P_n'(4) \cong 17{,}9545\ m/s^2$

c) Para a interpolação usando a forma de Newton, temos:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1}).$$

Sendo:

$$f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

Usando a TDD (Tabela de diferenças Divididas):

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
x_0	$f[x_0]$	$\frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$	$\frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$	$\frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$
x_1	$f[x_1]$	$\frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	$\frac{f[x_3, x_2] - f[x_2, x_1]}{x_3 - x_1}$	
x_2	$f[x_2]$	$\frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$		
x_3	$f[x_3]$			

Para a tabela do exercício, com o intervalo [3,5], vamos escolher os pontos [2,47, 5,13]

Tabela: t(s)	2,47	2,63	4,22	5,13
$V(t)\left(\frac{m}{s}\right)$	12,12	14,22	39,72	51,21

TDD

X	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
2,47	12,12	13,125	1,6644	-1,1387
2,63	14,22	16,0377	-1,3645	
4,22	39,72	12,6264		
5,13	51,21			

Montando o polinômio, temos:

$$P_n(x) = 12,12 + 13,125(x-2,47) + 1,6644(x-2,47)(x-2,63)$$
$$- 1,1530(x-2,47)(x-2,63)(x-4,22)$$

$$P_n(x) = -1,1387x^3 + 12,2771x^2 - 27,2677x + 21,7292$$

c) $\int_3^5 P_n(x)\,dx \cong 71,5055$ metros

d) Para obter o instante em que a aceleração do corpo zerou e em seguida inverteu, vamos utilizar o intervalo [4,22, 7,58], pois é o com menor distância entre os extremos e que contem o ponto desejado.

Tabela:

t	4,22	5,13	6,49	7,58
$V(t)$	39,72	51,21	51,69	36,00

Tabela de Diferenças Divididas (TDD)

X	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
4.22	39,72	12,6264	-5,4068	-0,1823
5,13	51,21	0,3529	-6,0194	
6,49	51,69	-14,3945		
7,58	36,00			

$$P_n(x) = 39,72 + 12,6264(x-4,22) - 5,4068(x-4,22)(x-5,13)$$
$$- 0,1823(x-4,22)(x-5,13)(x-6,49)$$

$$P_n(x) = -0,1823x^3 - 2,5192x^2 + 48,1712x - 105,0000$$

$Pn'(x) = -0{,}5469x^2 - 5{,}0383x + 48{,}1712$

Para a aceleração zero, $a(t) = 0 = Pn'(t)$

$t_1 \cong 5{,}8483$ e $\underbrace{t_2 \cong -15{,}0609}_{\text{Descartado}}$

Assim, o tempo aproximado onde a aceleração zero é $t = 5{,}8483$ segundos

d) Para o instante $t = 5{,}8483$

$Pn(5{,}8483) \cong 54{,}0915 \ m/s$

6- Deseja-se obter $f(x) = e^{-x^2}$, para $x \in [-0{,}5, 1{,}5]$, com duas casas decimais corretas ($\varepsilon < 10^{-2}$), através de interpolação linear usando uma tabela de pontos igualmente espaçados e com tamanho h. Quantos valores deve ter essa tabela?

$$n=1 \mid \quad L_n = \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{4(n+1)} < \varepsilon \rightarrow \frac{h^2 M_2}{4 \cdot 2} = \frac{h^2 M_2}{8} < 10^{-2}$$

$$M_2 = \max_{-0{,}5 \leq x \leq 1{,}5} |f^2(x)|$$, Sendo assim:

$$f(x) = e^{-x^2} \quad \Big| \quad f'(x) = -2x e^{-x^2}$$

$$f''(x) = -2 \cdot e^{-x^2} + (-2x) \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$$

$$f'''(x) = -2x e^{-x^2} \cdot 4x^2 + e^{-x^2} \cdot 8x + 4x \cdot e^{-x^2}$$

$$f'''(x) = 4e^{-x^2}(-2x^3 + 3x)$$

Para obter os pontos críticos de M_2, resolvemos $f^3(x) = 0$, assim, como $4e^{-x^2}$ nunca será, obtemos:

$$-2x^3 + 3x = 0 \rightarrow x(-2x^2 + 3) = 0$$

ou seja, $x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x_3 = 0$

Prosseguindo $\longrightarrow$

Os candidatos a máximo no intervalo são:

$[-0{,}5, 1{,}5]$

$$M_2 = \max\left\{ |f^2(-0{,}5)|, |f^2(0)|, |f^2(\sqrt{\tfrac{3}{2}})|, |f^2(1{,}5)| \right\}$$

Calculando esses valores, temos:

$$f^2(x) = f''(x) = e^{-x^2}(4x^2-2)$$

$$M_2 = \max\{0{,}7788,\ 2,\ 0{,}8925,\ 0{,}7378\}$$

$$\boxed{M_2 = 2}$$

Assim, temos que:

$$\frac{h^2 M_2}{8} < 10^{-2} \rightarrow h < \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-2}}{M_2}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-2}}{2}}$$

$$h < \sqrt{4 \cdot 10^{-2}} \cong 0{,}2$$

Como $h = \dfrac{b-a}{N} \rightarrow N \geq \dfrac{(1{,}5)-(-0{,}5)}{0{,}2} = \dfrac{2}{0{,}2} = 10$

$N \geq 10$, Logo, a tabela deve possuir 11 subdivisões

Assim, a tabela deve possuir

$N = 11$ subdivisões

ou seja, 12 pontos!

7 - Deseja-se obter $f(x) = e^{\arctan(x)}$, para $x \in [1,2]$, com 3 casas decimais corretas ($\varepsilon < 10^{-3}$), através de interpolação linear ($n=1$), usando uma tabela de pontos igualmente espaçados com tamanho h. Quantos valores (N) deve ter essa tabela?

$$\mathcal{L}_n = \frac{h^{n+1} \cdot M_{n+1}}{4(n+1)} \rightarrow \frac{h^2 M_2}{4 \cdot 2} = \frac{h^2 M_2}{8} < \varepsilon$$

$$h = \frac{(b-a)}{N} \quad e \quad \frac{h^2 M_2}{8} < 10^{-3}$$

$$M^2 = \max_{1 \leq x \leq 2} |f^2(x)|$$, Assim, Calculando até $f^3(x)$

$$f(x) = e^{\arctan(x)} \quad \Big| \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot e^{\arctan(x)}$$

$$f''(x) = \frac{\left(\frac{1}{\cancel{1+x^2}}\right) \cdot e^{\arctan(x)} \cdot \cancel{(1+x^2)} - e^{\arctan(x)} \cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = e^{\arctan(x)} \frac{(1-2x)}{(1+x^2)^2}$$

Prosseguindo $\longrightarrow$

$$f''(x) = e^{\arctan(x)} \cdot \frac{(1-2x)}{(1+x^2)^2} \rightarrow h(x) = e^{\arctan(x)}(1-2x)$$

$$g(x) = (1+x^2)^2$$

$$f'''(x) = \frac{h'(x) \cdot g(x) - h(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$h'(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right) \cdot e^{\arctan(x)} - \left[\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \cdot e^{\arctan(x)} \cdot (2x) + e^{\arctan(x)} \cdot 2\right]$$

$$h'(x) = e^{\arctan(x)}\left[\left(\frac{1}{1+x^2}\right) - \left(\frac{1}{1+x^2}\right)(2x) + 2\right]$$

$$g'(x) = 2(1+x^2)(2x)$$

$$g'(x) = 4x(1+x^2)$$

$$f'''(x) = \frac{\left[e^{\arctan(x)}\left[\left(\frac{1}{1+x^2}\right) - \left(\frac{1}{1+x^2}\right)(2x) - 2\right] \cdot (1+x^2)^2\right] - \left[e^{\arctan(x)}(1-2x) \cdot 4x(1+x^2)\right]}{(1+x^2)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{e^{\arctan(x)}(1+x^2)\left(\left[1 - 2x - 2(1+x^2)\right] - \left[4x(1-2x)\right]\right)}{(1+x^2)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{e^{\arctan(x)}\left[(-2x^2 - 2x - 1) - (-8x^2 + 4x)\right]}{(1+x^2)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{e^{\arctan(x)}\left[6x^2 - 6x - 1\right]}{(1+x^2)^3}$$

Para que possamos achar M_2, devemos achar os pontos críticos de $f^2(x)$, quando $f^3(x) = 0$, assim, quando

$$6x^2 - 6x - 1 = 0 \rightarrow 6\left(x^2 - x - \frac{1}{6}\right) = 0$$

$$x^2 - x - \frac{1}{6} = 0 \rightarrow \Delta = \sqrt{\frac{5}{3}}$$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{\frac{5}{3}}}{2} \quad e \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{\frac{5}{3}}}{2}$$

fora do intervalo, menor que 1 (desconsiderar)

$$M_2 = \max\left\{|f^2(1)|, \left|f^2\left(\frac{1+\sqrt{\frac{5}{3}}}{2}\right)\right|, \left|f^2\left(\frac{1-\sqrt{\frac{5}{3}}}{2}\right)\right|, |f^2(2)|\right\}$$

Calculando para $f''(x) = e^{\arctan(x)} \dfrac{(1-2x)}{(1+x^2)^2}$

$$M_2 = \max\{0{,}5483,\ 0{,}5667,\ 0{,}3630\}$$

$M_2 = 0{,}5667$, Assim:

$$h < \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-3}}{0{,}5667}} \rightarrow h < 0{,}1188$$

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{2-1}{N} = \frac{1}{N} \rightarrow N > \frac{1}{h} = \frac{1}{0{,}1188} = 8{,}4165$$

ou seja, $N = 9$ subdivisões $\longrightarrow$

Como $N = 9$ subdivisões, o número de pontos é $N+1 = 10$ pontos na tabela

(8) - Desejo-se obter $f(x) = e^{\cos(x)}$, para $x \in [1,4]$, com dois casos decimais corretos, através de interpolação linear usando uma tabela de pontos igualmente espaçados, com tamanho h. Quantos valores deve ter essa tabela?

$$\varepsilon < 10^{-2}, \quad n = 1, \quad L_n = \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{4(n+1)} < \varepsilon$$

$$\frac{h^2 M_2}{8} < 10^{-2}, \quad \text{com } M_2 = \max_{1 \le x \le 4} (|f^2(x)|)$$

$$f(x) = e^{\cos(x)} \quad \Big| \quad f'(x) = -\operatorname{sen}(x) \cdot e^{\cos(x)}$$

$$f''(x) = -\cos(x) \cdot e^{\cos(x)} + (-\operatorname{sen}(x)) \cdot (-\operatorname{sen}(x) \cdot e^{\cos(x)})$$

$$f''(x) = e^{\cos(x)} \left[\operatorname{sen}^2(x) - \cos(x) \right]$$

$$f'''(x) = -\operatorname{sen}(x) \cdot e^{\cos(x)} \cdot \operatorname{sen}^2(x) + e^{\cos(x)} \cdot 2\operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)$$
$$- \left[-\operatorname{sen}(x) \cdot e^{\cos(x)} \cdot \cos(x) + e^{\cos(x)} \cdot (-\operatorname{sen}(x)) \right]$$

$$f'''(x) = e^{\cos(x)} \left[(2\operatorname{sen}(x)\cos(x) - \operatorname{sen}^3(x)) + (\operatorname{sen}(x)\cos(x) + \operatorname{sen}(x)) \right]$$

Prosseguindo $\longrightarrow$

$$f^3(x) = e^{\cos(x)}\left[\left(2\operatorname{sen}(x)\cos(x) - \operatorname{sen}^3(x)\right) + \left(\operatorname{sen}(x)(\cos(x)+1)\right)\right]$$

Para calcular os pontos críticos de $f^2(x)$, temos:

$f^3(x) = 0$, como $e^{\cos(x)}$ nunca zero, temos que:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}\left(2\operatorname{sen}(x)\cos(x) - \operatorname{sen}^3(x) + \operatorname{sen}(x)(\cos(x)+1) = 0\right)$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{\cos(x)}\left(2\cos(x) - \operatorname{sen}^2(x) + \cos(x) + 1 = 0\right)$$

$$\hookrightarrow \left(2 - \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{\cos(x)} + 1 + \frac{1}{\cos(x)} = 0\right).$$

$$\hookrightarrow \left(\frac{1}{\cos(x)} - \frac{(1-\cos^2(x))}{\cos(x)} + 3 = 0\right)\cos(x)$$

$$\left(\underbrace{\cancel{1} - \cancel{1}}_{0} + \cos^2(x) + 3\cos(x) = 0\right)$$

$$\cos^2(x) + 3\cos(x) = 0$$

$$\underbrace{\cos^2(x)}_{\text{tem que ser } 0}\left(\underbrace{\cos(x) + 3}_{\text{sem solução}}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos(x) = 0 \\ x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

ou se $\operatorname{sen}(x) = 0$

$\boxed{x_3 = \pi, \; x_4 = 0}$

$x_1 = \frac{\pi}{2}$ e $x_2 = \frac{3\pi}{2}$, $x_3 = \pi$, $x_4 = 0$

Porem, somente x_1 e $x_4 \in [1, 4]$

$x_1 = \frac{\pi}{2} \cong 1{,}5708$ e $x_3 = \pi$

Assim: $M_2 = \max\{|f''(1)|, |f''(\frac{\pi}{2})|, |f''(\pi)|, |f''(4)|\}$

$M_2 = \max\{0{,}2879, 1, 0{,}3678, 0{,}6379\}$

$M_2 = 1$ Assim:

$$h < \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 1}} = 0{,}2828$$

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{4-1}{N} = \frac{3}{N} \rightarrow N > \frac{3}{h} = \frac{3}{0{,}2828}$$

$N > 10{,}60661 \rightarrow N = 11$

Logo, serão $N + 1 = 12$ pontos na tabela

9 - Deseja-se obter $f(x) = \arctan(\operatorname{sen}(x))$, para $x \in [2,3]$, com 2 casas decimais corretas, através de interpolação linear usando uma tabela de pontos igualmente espaçados com tamanho h. Quantos valores deve ter essa tabela?

$$\varepsilon < 10^{-2} \mid n=1 \mid \alpha_n = \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{4(n+1)} < \varepsilon$$

$$\frac{h^2 M_2}{8} < 10^{-2} \rightarrow h < \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-2}}{M_2}}$$

$$f(x) = \arctan(\operatorname{sen}(x)) \mid f'(x) = \frac{\cos(x)}{1 + \operatorname{sen}^2(x)}$$

$$f''(x) = \frac{-\operatorname{sen}(x)\,(1\operatorname{sen}^2(x) + 2\cos^2(x) + 1)}{(\operatorname{sen}^2(x) + 1)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{\cos(x)\,(5\operatorname{sen}^4(x) + (6\cos^2(x) + 4)\operatorname{sen}^2(x) - 2\cos^2(x) - 1)}{(\operatorname{sen}^2(x) + 1)^3}$$

Prosseguindo $\longrightarrow$

$$\cos(x)\left(5\operatorname{sen}^4(x)+(6\cos^2(x)+4)\operatorname{sen}^2(x)-2\cos^2(x)-1\right)=0$$

Si $\cos(x)=0 \rightarrow \underbrace{x=\frac{\pi}{2} \text{ y } x=\frac{3\pi}{2}}_{\text{fora de intervalo}}$

$$5\operatorname{sen}^4(x)+(6\cos^2(x)+4)\operatorname{sen}^2(x)-2\cos^2(x)-1=0$$

$$5\operatorname{sen}^4(x)+(6-6\operatorname{sen}^2(x)+4)\operatorname{sen}^2(x)-2+2\operatorname{sen}^2(x)-1=0$$

$$5\operatorname{sen}^4(x)+10\operatorname{sen}^2(x)-6\operatorname{sen}^4(x)-2+2\operatorname{sen}^2(x)-1=0$$

$$-\operatorname{sen}^4(x)+12\operatorname{sen}^2(x)-3=0$$

$K=\operatorname{sen}^2(x)$

$$-K^2+12K-3=0$$

$X=6-\sqrt{33}=0{,}2554$

Descartado $\rightarrow X=6+\sqrt{33}=11{,}7446$

$\operatorname{sen}(x)=\pm\sqrt{0{,}2554}$

$X=\operatorname{arcsen}(\pm\sqrt{0{,}2554})$

$X_1=n\pi+0{,}5298 \mid X_2=n\pi-0{,}5298$

Para $n=1$

Vemos $X_2=2{,}6117\in[2,3]$

$$M_2 = \max\{|f''(2)|, |f''(2{,}6117)|, |f''(3)|\}$$

$$M_2 = \max\{0{,}5921, 0{,}8800, 0{,}4042\}$$

$$M_2 = 0{,}88 \rightarrow h \leq \sqrt{\frac{8 \cdot 10^{-2}}{0{,}88}} = 0{,}3015$$

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{3-2}{N} = \frac{1}{N} \rightarrow N > \frac{1}{0{,}3015} = 3{,}3166$$

$$N > 3{,}3166 \Leftrightarrow N = 4$$

$N+1 = 5$ pontos

10 -

a) Para a tabela com $f(\bar{x}) = 0{,}25$, o intervalo com a menor distância entre os extremos será

x	0,27	0,45	0,76	0,89
$f(x)$	0,43	0,32	0,06	-0,05

$$X(y) = \frac{(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)(y_0-y_3)} \cdot x_0 + \frac{(y-y_0)(y-y_2)(y-y_3)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)(y_1-y_3)} \cdot x_1$$

$$+ \frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_3)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)(y_2-y_3)} \cdot x_2 + \frac{(y-y_0)(y-y_1)(y-y_2)}{(y_3-y_0)(y_3-y_1)(y_3-y_2)} \cdot x_3$$

$$X(0{,}25) = \frac{(0{,}25-0{,}32)(0{,}25-0{,}06)(0{,}25+0{,}05)}{(0{,}43-0{,}32)(0{,}43-0{,}06)(0{,}43+0{,}05)} \cdot 0{,}27$$

$$+ \frac{(0{,}25-0{,}43)(0{,}25-0{,}06)(0{,}25+0{,}05)}{(0{,}32-0{,}43)(0{,}32-0{,}06)(0{,}32+0{,}05)} \cdot 0{,}45$$

$$+ \frac{(0{,}25-0{,}43)(0{,}25-0{,}32)(0{,}25+0{,}05)}{(0{,}06-0{,}43)(0{,}06-0{,}32)(0{,}06+0{,}05)} \cdot 0{,}76$$

$$+ \frac{(0{,}25-0{,}43)(0{,}25-0{,}32)(0{,}25-0{,}06)}{(-0{,}05-0{,}43)(-0{,}05-0{,}32)(-0{,}05-0{,}06)} \cdot 0{,}89$$

Prosseguindo →

$$X(0{,}25) = (-0{,}2042) \cdot 0{,}27 + (0{,}9696) \cdot 0{,}45 + (0{,}3572) \cdot 0{,}76$$

$$+ (-0{,}1225) \cdot 0{,}89$$

$$X(0{,}25) \cong 0{,}5436$$

Então, para $\bar{X} = 0{,}5436$

$$f(\bar{x}) = 0{,}25$$

(10) -

x	0,03	0,27	0,45	0,76	0,89	1,13	1,29	1,48
$f(x)$	0,50	0,43	0,32	0,06	-0,05	-0,22	-0,31	-0,39

b) Melhor intervalo é de $\boxed{[0,76, 1,29] \quad b-a = 0,53}$

Para obter um polinômio de grau 3, são necessários 4 pontos, de tal forma que o erro seja minimizado e o valor $f(\bar{x}) = 0$, esteja contido no intervalo.

x	0,76	0,89	1,13	1,29
$f(x)$	0,06	-0,05	-0,22	-0,31

$f(x)$	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
-0,31	1,29 ✓	-1,7779 ✓	1,4081 ✓	-1,5857 ✓
-0,22	1,13 ✓	-1,4118 ✓	0,8214 ✓	
-0,05	0,89 ✓	-1,1818 ✓		
0,06	0,76 ✓			

$$f(y) = 1,29 + (-1,7779)(y+0,31) + (+1,4081)(y+0,31)(y+0,22)$$
$$+ (-1,5857)(y+0,31)(y+0,22)(y+0,05)$$

$$f(y) = -1,5857y^3 + 0,4884y^2 - 1,1818y + 0,8294$$

Agora, $P(0) = 0{,}8295$

portanto:

$$\bar{X} \cong 0{,}8295$$