Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial

Fundamentos da Interpolação Polinomial

Alessandro Alves Santana

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Fundamentos

A interpolação polinomial é uma técnica numérica para aproximação de funções. Tais funções podem ter lei de formação desconhecida ou não. Na prática é utilizada para aproximar valores de funções a partir de outros valores discretos associados a essas funções. Na teoria é mais costumeiramente utilizada no desenvolvimento de outros métodos de resolução numérica.

Fundamentos

A interpolação polinomial é uma técnica numérica para aproximação de funções. Tais funções podem ter lei de formação desconhecida ou não. Na prática é utilizada para aproximar valores de funções a partir de outros valores discretos associados a essas funções. Na teoria é mais costumeiramente utilizada no desenvolvimento de outros métodos de resolução numérica.

A interpolação polinomial tem por base a aproximação de funções por meio de polinômios. E a ideia para o seu entendimento é bem simples. Um polinômio de grau n tem a forma geral

Fundamentos

A interpolação polinomial é uma técnica numérica para aproximação de funções. Tais funções podem ter lei de formação desconhecida ou não. Na prática é utilizada para aproximar valores de funções a partir de outros valores discretos associados a essas funções. Na teoria é mais costumeiramente utilizada no desenvolvimento de outros métodos de resolução numérica.

A interpolação polinomial tem por base a aproximação de funções por meio de polinômios. E a ideia para o seu entendimento é bem simples. Um polinômio de grau n tem a forma geral

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \cdots + \alpha_n x^n. \tag{1}$$

Fundamentos

A interpolação polinomial é uma técnica numérica para aproximação de funções. Tais funções podem ter lei de formação desconhecida ou não. Na prática é utilizada para aproximar valores de funções a partir de outros valores discretos associados a essas funções. Na teoria é mais costumeiramente utilizada no desenvolvimento de outros métodos de resolução numérica.

A interpolação polinomial tem por base a aproximação de funções por meio de polinômios. E a ideia para o seu entendimento é bem simples. Um polinômio de grau n tem a forma geral

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \cdots + \alpha_n x^n. \tag{1}$$

Note que o que determina esse polinômio de grau n são os seus coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Logo, para um polinômio de um dado grau n existem infinitos polinômios, sendo cada um determinado por tais coeficientes. Perceba que se tivermos valores discretos, em pontos distintos, de uma função $f(x)$ **em uma quantidade suficiente** de tal forma que os valores desse polinômio $p_n(x)$ coincidam com os valores discretos da função $f(x)$ nos pontos dados, então poderemos determinar os coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Como o que define um polinômio de grau n são $n+1$ coeficientes, então para obter esse polinômio precisamos de informações da função $f(x)$ em $n+1$ pontos distintos em um intervalo $[a, b]$, sendo $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$. Para obter esses coeficiente, basta resolver um sistema linear com $n+1$ equações e $n+1$ incógnitas, como apresentado a seguir.

Fundamentos

A interpolação polinomial é uma técnica numérica para aproximação de funções. Tais funções podem ter lei de formação desconhecida ou não. Na prática é utilizada para aproximar valores de funções a partir de outros valores discretos associados a essas funções. Na teoria é mais costumeiramente utilizada no desenvolvimento de outros métodos de resolução numérica.

A interpolação polinomial tem por base a aproximação de funções por meio de polinômios. E a ideia para o seu entendimento é bem simples. Um polinômio de grau n tem a forma geral

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \cdots + \alpha_n x^n. \tag{1}$$

Note que o que determina esse polinômio de grau n são os seus coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Logo, para um polinômio de um dado grau n existem infinitos polinômios, sendo cada um determinado por tais coeficientes. Perceba que se tivermos valores discretos, em pontos distintos, de uma função $f(x)$ **em uma quantidade suficiente** de tal forma que os valores desse polinômio $p_n(x)$ coincidam com os valores discretos da função $f(x)$ nos pontos dados, então poderemos determinar os coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Como o que define um polinômio de grau n são $n+1$ coeficientes, então para obter esse polinômio precisamos de informações da função $f(x)$ em $n+1$ pontos distintos em um intervalo $[a, b]$, sendo $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$. Para obter esses coeficiente, basta resolver um sistema linear com $n+1$ equações e $n+1$ incógnitas, como apresentado a seguir.

(2)

Fundamentos

A interpolação polinomial é uma técnica numérica para aproximação de funções. Tais funções podem ter lei de formação desconhecida ou não. Na prática é utilizada para aproximar valores de funções a partir de outros valores discretos associados a essas funções. Na teoria é mais costumeiramente utilizada no desenvolvimento de outros métodos de resolução numérica.

A interpolação polinomial tem por base a aproximação de funções por meio de polinômios. E a ideia para o seu entendimento é bem simples. Um polinômio de grau n tem a forma geral

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \cdots + \alpha_n x^n. \tag{1}$$

Note que o que determina esse polinômio de grau n são os seus coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Logo, para um polinômio de um dado grau n existem infinitos polinômios, sendo cada um determinado por tais coeficientes. Perceba que se tivermos valores discretos, em pontos distintos, de uma função $f(x)$ **em uma quantidade suficiente** de tal forma que os valores desse polinômio $p_n(x)$ coincidam com os valores discretos da função $f(x)$ nos pontos dados, então poderemos determinar os coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Como o que define um polinômio de grau n são $n+1$ coeficientes, então para obter esse polinômio precisamos de informações da função $f(x)$ em $n+1$ pontos distintos em um intervalo $[a, b]$, sendo $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$. Para obter esses coeficiente, basta resolver um sistema linear com $n+1$ equações e $n+1$ incógnitas, como apresentado a seguir.

$$\begin{cases} p_n(x_0) &= f(x_0) \\ p_n(x_1) &= f(x_1) \\ p_n(x_2) &= f(x_2) \\ p_n(x_3) &= f(x_3) \\ \quad\vdots & \quad\vdots \quad \vdots \\ p_n(x_n) &= f(x_n) \end{cases} \tag{2}$$

Fundamentos

A interpolação polinomial é uma técnica numérica para aproximação de funções. Tais funções podem ter lei de formação desconhecida ou não. Na prática é utilizada para aproximar valores de funções a partir de outros valores discretos associados a essas funções. Na teoria é mais costumeiramente utilizada no desenvolvimento de outros métodos de resolução numérica.

A interpolação polinomial tem por base a aproximação de funções por meio de polinômios. E a ideia para o seu entendimento é bem simples. Um polinômio de grau n tem a forma geral

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \cdots + \alpha_n x^n. \tag{1}$$

Note que o que determina esse polinômio de grau n são os seus coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Logo, para um polinômio de um dado grau n existem infinitos polinômios, sendo cada um determinado por tais coeficientes. Perceba que se tivermos valores discretos, em pontos distintos, de uma função $f(x)$ **em uma quantidade suficiente** de tal forma que os valores desse polinômio $p_n(x)$ coincidam com os valores discretos da função $f(x)$ nos pontos dados, então poderemos determinar os coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Como o que define um polinômio de grau n são $n+1$ coeficientes, então para obter esse polinômio precisamos de informações da função $f(x)$ em $n+1$ pontos distintos em um intervalo $[a, b]$, sendo $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$. Para obter esses coeficiente, basta resolver um sistema linear com $n+1$ equações e $n+1$ incógnitas, como apresentado a seguir.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} p_n(x_0) & = & f(x_0) \\ p_n(x_1) & = & f(x_1) \\ p_n(x_2) & = & f(x_2) \\ p_n(x_3) & = & f(x_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_n(x_n) & = & f(x_n) \end{array} \right. \Rightarrow \tag{2}$$

Fundamentos

A interpolação polinomial é uma técnica numérica para aproximação de funções. Tais funções podem ter lei de formação desconhecida ou não. Na prática é utilizada para aproximar valores de funções a partir de outros valores discretos associados a essas funções. Na teoria é mais costumeiramente utilizada no desenvolvimento de outros métodos de resolução numérica.

A interpolação polinomial tem por base a aproximação de funções por meio de polinômios. E a ideia para o seu entendimento é bem simples. Um polinômio de grau n tem a forma geral

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \cdots + \alpha_n x^n. \tag{1}$$

Note que o que determina esse polinômio de grau n são os seus coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Logo, para um polinômio de um dado grau n existem infinitos polinômios, sendo cada um determinado por tais coeficientes. Perceba que se tivermos valores discretos, em pontos distintos, de uma função $f(x)$ **em uma quantidade suficiente** de tal forma que os valores desse polinômio $p_n(x)$ coincidam com os valores discretos da função $f(x)$ nos pontos dados, então poderemos determinar os coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Como o que define um polinômio de grau n são $n+1$ coeficientes, então para obter esse polinômio precisamos de informações da função $f(x)$ em $n+1$ pontos distintos em um intervalo $[a, b]$, sendo $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$. Para obter esses coeficiente, basta resolver um sistema linear com $n+1$ equações e $n+1$ incógnitas, como apresentado a seguir.

$$\left\{\begin{array}{lcl} p_n(x_0) & = & f(x_0) \\ p_n(x_1) & = & f(x_1) \\ p_n(x_2) & = & f(x_2) \\ p_n(x_3) & = & f(x_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_n(x_n) & = & f(x_n) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \alpha_0 + \alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_0^2 + \alpha_3 x_0^3 + \cdots + \alpha_n x_0^n & = & f(x_0) \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \alpha_3 x_1^3 + \cdots + \alpha_n x_1^n & = & f(x_1) \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_2^3 + \cdots + \alpha_n x_2^n & = & f(x_2) \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_3^2 + \alpha_3 x_3^3 + \cdots + \alpha_n x_3^n & = & f(x_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_n + \alpha_2 x_n^2 + \alpha_3 x_n^3 + \cdots + \alpha_n x_n^n & = & f(x_n) \end{array}\right. \tag{2}$$

Fundamentos

A interpolação polinomial é uma técnica numérica para aproximação de funções. Tais funções podem ter lei de formação desconhecida ou não. Na prática é utilizada para aproximar valores de funções a partir de outros valores discretos associados a essas funções. Na teoria é mais costumeiramente utilizada no desenvolvimento de outros métodos de resolução numérica.

A interpolação polinomial tem por base a aproximação de funções por meio de polinômios. E a ideia para o seu entendimento é bem simples. Um polinômio de grau n tem a forma geral

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \cdots + \alpha_n x^n. \tag{1}$$

Note que o que determina esse polinômio de grau n são os seus coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Logo, para um polinômio de um dado grau n existem infinitos polinômios, sendo cada um determinado por tais coeficientes. Perceba que se tivermos valores discretos, em pontos distintos, de uma função $f(x)$ **em uma quantidade suficiente** de tal forma que os valores desse polinômio $p_n(x)$ coincidam com os valores discretos da função $f(x)$ nos pontos dados, então poderemos determinar os coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Como o que define um polinômio de grau n são $n+1$ coeficientes, então para obter esse polinômio precisamos de informações da função $f(x)$ em $n+1$ pontos distintos em um intervalo $[a, b]$, sendo $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$. Para obter esses coeficiente, basta resolver um sistema linear com $n+1$ equações e $n+1$ incógnitas, como apresentado a seguir.

$$\left\{\begin{array}{lcl} p_n(x_0) & = & f(x_0) \\ p_n(x_1) & = & f(x_1) \\ p_n(x_2) & = & f(x_2) \\ p_n(x_3) & = & f(x_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_n(x_n) & = & f(x_n) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \alpha_0 + \alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_0^2 + \alpha_3 x_0^3 + \cdots + \alpha_n x_0^n & = & f(x_0) \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \alpha_3 x_1^3 + \cdots + \alpha_n x_1^n & = & f(x_1) \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_2^3 + \cdots + \alpha_n x_2^n & = & f(x_2) \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_3^2 + \alpha_3 x_3^3 + \cdots + \alpha_n x_3^n & = & f(x_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_n + \alpha_2 x_n^2 + \alpha_3 x_n^3 + \cdots + \alpha_n x_n^n & = & f(x_n) \end{array}\right. \Rightarrow \tag{2}$$

Fundamentos

A interpolação polinomial é uma técnica numérica para aproximação de funções. Tais funções podem ter lei de formação desconhecida ou não. Na prática é utilizada para aproximar valores de funções a partir de outros valores discretos associados a essas funções. Na teoria é mais costumeiramente utilizada no desenvolvimento de outros métodos de resolução numérica.

A interpolação polinomial tem por base a aproximação de funções por meio de polinômios. E a ideia para o seu entendimento é bem simples. Um polinômio de grau n tem a forma geral

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \cdots + \alpha_n x^n. \tag{1}$$

Note que o que determina esse polinômio de grau n são os seus coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Logo, para um polinômio de um dado grau n existem infinitos polinômios, sendo cada um determinado por tais coeficientes. Perceba que se tivermos valores discretos, em pontos distintos, de uma função $f(x)$ **em uma quantidade suficiente** de tal forma que os valores desse polinômio $p_n(x)$ coincidam com os valores discretos da função $f(x)$ nos pontos dados, então poderemos determinar os coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Como o que define um polinômio de grau n são $n+1$ coeficientes, então para obter esse polinômio precisamos de informações da função $f(x)$ em $n+1$ pontos distintos em um intervalo $[a, b]$, sendo $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$. Para obter esses coeficiente, basta resolver um sistema linear com $n+1$ equações e $n+1$ incógnitas, como apresentado a seguir.

$$\left\{\begin{array}{rcl} p_n(x_0) & = & f(x_0) \\ p_n(x_1) & = & f(x_1) \\ p_n(x_2) & = & f(x_2) \\ p_n(x_3) & = & f(x_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_n(x_n) & = & f(x_n) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_0 + \alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_0^2 + \alpha_3 x_0^3 + \cdots + \alpha_n x_0^n & = & f(x_0) \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \alpha_3 x_1^3 + \cdots + \alpha_n x_1^n & = & f(x_1) \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_2^3 + \cdots + \alpha_n x_2^n & = & f(x_2) \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_3^2 + \alpha_3 x_3^3 + \cdots + \alpha_n x_3^n & = & f(x_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_n + \alpha_2 x_n^2 + \alpha_3 x_n^3 + \cdots + \alpha_n x_n^n & = & f(x_n) \end{array}\right. \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \ldots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \ldots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{\alpha} = \underbrace{\begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}}_{f} \tag{2}$$

Fundamentos

A interpolação polinomial é uma técnica numérica para aproximação de funções. Tais funções podem ter lei de formação desconhecida ou não. Na prática é utilizada para aproximar valores de funções a partir de outros valores discretos associados a essas funções. Na teoria é mais costumeiramente utilizada no desenvolvimento de outros métodos de resolução numérica.

A interpolação polinomial tem por base a aproximação de funções por meio de polinômios. E a ideia para o seu entendimento é bem simples. Um polinômio de grau n tem a forma geral

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \cdots + \alpha_n x^n. \tag{1}$$

Note que o que determina esse polinômio de grau n são os seus coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Logo, para um polinômio de um dado grau n existem infinitos polinômios, sendo cada um determinado por tais coeficientes. Perceba que se tivermos valores discretos, em pontos distintos, de uma função $f(x)$ **em uma quantidade suficiente** de tal forma que os valores desse polinômio $p_n(x)$ coincidam com os valores discretos da função $f(x)$ nos pontos dados, então poderemos determinar os coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Como o que define um polinômio de grau n são $n+1$ coeficientes, então para obter esse polinômio precisamos de informações da função $f(x)$ em $n+1$ pontos distintos em um intervalo $[a, b]$, sendo $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$. Para obter esses coeficiente, basta resolver um sistema linear com $n+1$ equações e $n+1$ incógnitas, como apresentado a seguir.

$$\left\{\begin{array}{lcl} p_n(x_0) & = & f(x_0) \\ p_n(x_1) & = & f(x_1) \\ p_n(x_2) & = & f(x_2) \\ p_n(x_3) & = & f(x_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_n(x_n) & = & f(x_n) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \alpha_0 + \alpha_1 x_0 + \alpha_2 x_0^2 + \alpha_3 x_0^3 + \cdots + \alpha_n x_0^n & = & f(x_0) \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_1^2 + \alpha_3 x_1^3 + \cdots + \alpha_n x_1^n & = & f(x_1) \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_2^3 + \cdots + \alpha_n x_2^n & = & f(x_2) \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_3 + \alpha_2 x_3^2 + \alpha_3 x_3^3 + \cdots + \alpha_n x_3^n & = & f(x_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_0 + \alpha_1 x_n + \alpha_2 x_n^2 + \alpha_3 x_n^3 + \cdots + \alpha_n x_n^n & = & f(x_n) \end{array}\right. \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \ldots & x_2^n \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \ldots & x_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}}_{\alpha} = \underbrace{\begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}}_{f} \tag{2}$$

A solução desse sistema linear irá fornecer os coeficientes do polinômio $p_n(x)$, o qual servirá como uma função aproximadora para $f(x)$.

Existência e Unicidade do Polinômio Interpolador

O polinômio obtido pelo processo apresentado na seção anterior é chamado **polinômio interpolador**. A principal questão que surge no processo de obtenção desse polinômio interpolador, como apresentado na forma da resolução de um sistema linear, é se ele é único. **A resposta é sim**. Uma vez definidos os $n+1$ pontos distintos, com os valores de uma função sobre os mesmos, o polinômio interpolador é único. O que vai justificar isso é a matriz dos coeficientes em (2). Note que os $n+1$ pontos $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$ são distintos. Perceba ainda que essa matriz dos coeficientes é uma **Matriz de Vandermonde**, um tipo de matriz cujo determinante, para a matriz A em (2), é calculado pela fórmula

Existência e Unicidade do Polinômio Interpolador

O polinômio obtido pelo processo apresentado na seção anterior é chamado **polinômio interpolador**. A principal questão que surge no processo de obtenção desse polinômio interpolador, como apresentado na forma da resolução de um sistema linear, é se ele é único. **A resposta é sim**. Uma vez definidos os $n+1$ pontos distintos, com os valores de uma função sobre os mesmos, o polinômio interpolador é único. O que vai justificar isso é a matriz dos coeficientes em (2). Note que os $n+1$ pontos $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$ são distintos. Perceba ainda que essa matriz dos coeficientes é uma **Matriz de Vandermonde**, um tipo de matriz cujo determinante, para a matriz A em (2), é calculado pela fórmula

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \tag{3}$$

Existência e Unicidade do Polinômio Interpolador

O polinômio obtido pelo processo apresentado na seção anterior é chamado **polinômio interpolador**. A principal questão que surge no processo de obtenção desse polinômio interpolador, como apresentado na forma da resolução de um sistema linear, é se ele é único. **A resposta é sim**. Uma vez definidos os $n+1$ pontos distintos, com os valores de uma função sobre os mesmos, o polinômio interpolador é único. O que vai justificar isso é a matriz dos coeficientes em (2). Note que os $n+1$ pontos $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$ são distintos. Perceba ainda que essa matriz dos coeficientes é uma **Matriz de Vandermonde**, um tipo de matriz cujo determinante, para a matriz A em (2), é calculado pela fórmula

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \tag{3}$$

Como os pontos x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ são distintos, segue que esse determinante $\det(A) \neq 0$, o que implica que o sistema linear que permite obter os coeficientes do polinômio interpolador é possível e determinado. Logo, tem uma única solução. **Portanto, o polinômio que interpola uma função em $n+1$ pontos distintos existe e é unico**. Agora, é importante uma definição geral para o polinômio interpolador.

Existência e Unicidade do Polinômio Interpolador

O polinômio obtido pelo processo apresentado na seção anterior é chamado **polinômio interpolador**. A principal questão que surge no processo de obtenção desse polinômio interpolador, como apresentado na forma da resolução de um sistema linear, é se ele é único. **A resposta é sim**. Uma vez definidos os $n+1$ pontos distintos, com os valores de uma função sobre os mesmos, o polinômio interpolador é único. O que vai justificar isso é a matriz dos coeficientes em (2). Note que os $n+1$ pontos $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$ são distintos. Perceba ainda que essa matriz dos coeficientes é uma **Matriz de Vandermonde**, um tipo de matriz cujo determinante, para a matriz A em (2), é calculado pela fórmula

$$\det(A) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \tag{3}$$

Como os pontos x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ são distintos, segue que esse determinante $\det(A) \neq 0$, o que implica que o sistema linear que permite obter os coeficientes do polinômio interpolador é possível e determinado. Logo, tem uma única solução. **Portanto, o polinômio que interpola uma função em $n+1$ pontos distintos existe e é unico**. Agora, é importante uma definição geral para o polinômio interpolador.

Definição 1: Definição de Polinômio Interpolador

Seja $f(x)$ uma função, com lei de formação conhecida ou não, com valores conhecidos em $(n+1)$ pontos distintos x_i com $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, sendo $x_i < x_{i+1}$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. O polinômio que interpola $f(x)$ nesses $n+1$ pontos distintos é um polinômio de grau no máximo n tal que $p_n(x_i) = f(x_i)$, com $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$, sendo

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots + \alpha_n x^n.$$

Existência e Unicidade do Polinômio Interpolador

O polinômio obtido pelo processo apresentado na seção anterior é chamado **polinômio interpolador**. A principal questão que surge no processo de obtenção desse polinômio interpolador, como apresentado na forma da resolução de um sistema linear, é se ele é único. **A resposta é sim**. Uma vez definidos os $n+1$ pontos distintos, com os valores de uma função sobre os mesmos, o polinômio interpolador é único. O que vai justificar isso é a matriz dos coeficientes em (2). Note que os $n+1$ pontos $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$ são distintos. Perceba ainda que essa matriz dos coeficientes é uma **Matriz de Vandermonde**, um tipo de matriz cujo determinante, para a matriz A em (2), é calculado pela fórmula

$$\det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \tag{3}$$

Como os pontos x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ são distintos, segue que esse determinante $\det(A) \neq 0$, o que implica que o sistema linear que permite obter os coeficientes do polinômio interpolador é possível e determinado. Logo, tem uma única solução. **Portanto, o polinômio que interpola uma função em $n+1$ pontos distintos existe e é unico**. Agora, é importante uma definição geral para o polinômio interpolador.

Definição 1: Definição de Polinômio Interpolador

Seja $f(x)$ uma função, com lei de formação conhecida ou não, com valores conhecidos em $(n+1)$ pontos distintos x_i com $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, sendo $x_i < x_{i+1}$, para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. O polinômio que interpola $f(x)$ nesses $n+1$ pontos distintos é um polinômio de grau no máximo n tal que $p_n(x_i) = f(x_i)$, com $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$, sendo

$$p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots + \alpha_n x^n.$$

Observe bem a definição. O grau máximo do polinômio interpolador é n. Isso significa que ao obter o polinômio interpolador, o grau deste pode ser menor que n.

Exemplo 1

Obtenha o polinômio que interpola a função dada na tabela abaixo:

x	0.11	0.56	1.22	1.49	1.90
$f(x)$	0.703	1.600	0.732	0.950	0.528

Exemplo 1

Obtenha o polinômio que interpola a função dada na tabela abaixo:

x	0.11	0.56	1.22	1.49	1.90
$f(x)$	0.703	1.600	0.732	0.950	0.528

Resolução: Como são $n+1=5$ pontos, segue que o grau máximo do polinômio interpolador é $n=4$, o qual terá a forma

$$p_4(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\alpha_4 x^4.$$

Exemplo 1

Obtenha o polinômio que interpola a função dada na tabela abaixo:

x	0.11	0.56	1.22	1.49	1.90
$f(x)$	0.703	1.600	0.732	0.950	0.528

Resolução: Como são $n+1=5$ pontos, segue que o grau máximo do polinômio interpolador é $n=4$, o qual terá a forma

$$p_4(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\alpha_4 x^4.$$

Montando o sistema linear e resolvendo, segue que

Exemplo 1

Obtenha o polinômio que interpola a função dada na tabela abaixo:

x	0.11	0.56	1.22	1.49	1.90
$f(x)$	0.703	1.600	0.732	0.950	0.528

Resolução: Como são $n+1=5$ pontos, segue que o grau máximo do polinômio interpolador é $n=4$, o qual terá a forma

$$p_4(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\alpha_4 x^4.$$

Montando o sistema linear e resolvendo, segue que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.11 & 0.0121 & 0.00133 & 0.00015 \\ 1 & 0.56 & 0.3136 & 0.17562 & 0.09834 \\ 1 & 1.22 & 1.4884 & 1.81585 & 2.21533 \\ 1 & 1.49 & 2.2201 & 3.30795 & 4.92884 \\ 1 & 1.9 & 3.61 & 6.859 & 13.0321 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.703 \\ 1.6 \\ 0.732 \\ 0.95 \\ 0.528 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.45744 \\ 13.1673 \\ -25.7311 \\ 18.0319 \\ -4.20685 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Exemplo 1

Obtenha o polinômio que interpola a função dada na tabela abaixo:

x	0.11	0.56	1.22	1.49	1.90
$f(x)$	0.703	1.600	0.732	0.950	0.528

Resolução: Como são $n+1=5$ pontos, segue que o grau máximo do polinômio interpolador é $n=4$, o qual terá a forma

$$p_4(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\alpha_3 x^3+\alpha_4 x^4.$$

Montando o sistema linear e resolvendo, segue que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.11 & 0.0121 & 0.00133 & 0.00015 \\ 1 & 0.56 & 0.3136 & 0.17562 & 0.09834 \\ 1 & 1.22 & 1.4884 & 1.81585 & 2.21533 \\ 1 & 1.49 & 2.2201 & 3.30795 & 4.92884 \\ 1 & 1.9 & 3.61 & 6.859 & 13.0321 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.703 \\ 1.6 \\ 0.732 \\ 0.95 \\ 0.528 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.45744 \\ 13.1673 \\ -25.7311 \\ 18.0319 \\ -4.20685 \end{bmatrix} \tag{4}$$

gerando o polinômio

$$p_4(x)=-0.45744+13.1673x-25.7311x^2+18.0319x^3-4.20685x^4.$$

Exemplo 1

Obtenha o polinômio que interpola a função dada na tabela abaixo:

x	0.11	0.56	1.22	1.49	1.90
$f(x)$	0.703	1.600	0.732	0.950	0.528

Resolução: Como são $n+1=5$ pontos, segue que o grau máximo do polinômio interpolador é $n=4$, o qual terá a forma

$$p_4(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4.$$

Montando o sistema linear e resolvendo, segue que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.11 & 0.0121 & 0.00133 & 0.00015 \\ 1 & 0.56 & 0.3136 & 0.17562 & 0.09834 \\ 1 & 1.22 & 1.4884 & 1.81585 & 2.21533 \\ 1 & 1.49 & 2.2201 & 3.30795 & 4.92884 \\ 1 & 1.9 & 3.61 & 6.859 & 13.0321 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.703 \\ 1.6 \\ 0.732 \\ 0.95 \\ 0.528 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.45744 \\ 13.1673 \\ -25.7311 \\ 18.0319 \\ -4.20685 \end{bmatrix} \tag{4}$$

gerando o polinômio

$$p_4(x) = -0.45744 + 13.1673x - 25.7311x^2 + 18.0319x^3 - 4.20685x^4.$$

Observação 1

Os dados da tabela foram obtidos da função $f(x) = 2e^{-x}\text{sen}^2(\pi x) + 0.5$. Na **Figura 1** foram plotados os gráficos das funções $f(x)$, $p_4(x)$ e os dados da tabela. Pode se observar que o polinômio,**em cor vermelha**, passa sobre os pontos da tabela, **círculos de cor azul**, como deve acontecer com os polinômios interpoladores. Entre os pontos tabelados, pode se notar a diferença que existe entre a função $f(x)$, **em cor verde**, e o polinômio interpolador $p_4(x)$. Assim sendo, ao utilizar o polinômio para obter aproximações para $f(x)$ haverá um erro, o qual irá variar de acordo com a posição do valor x no domínio.

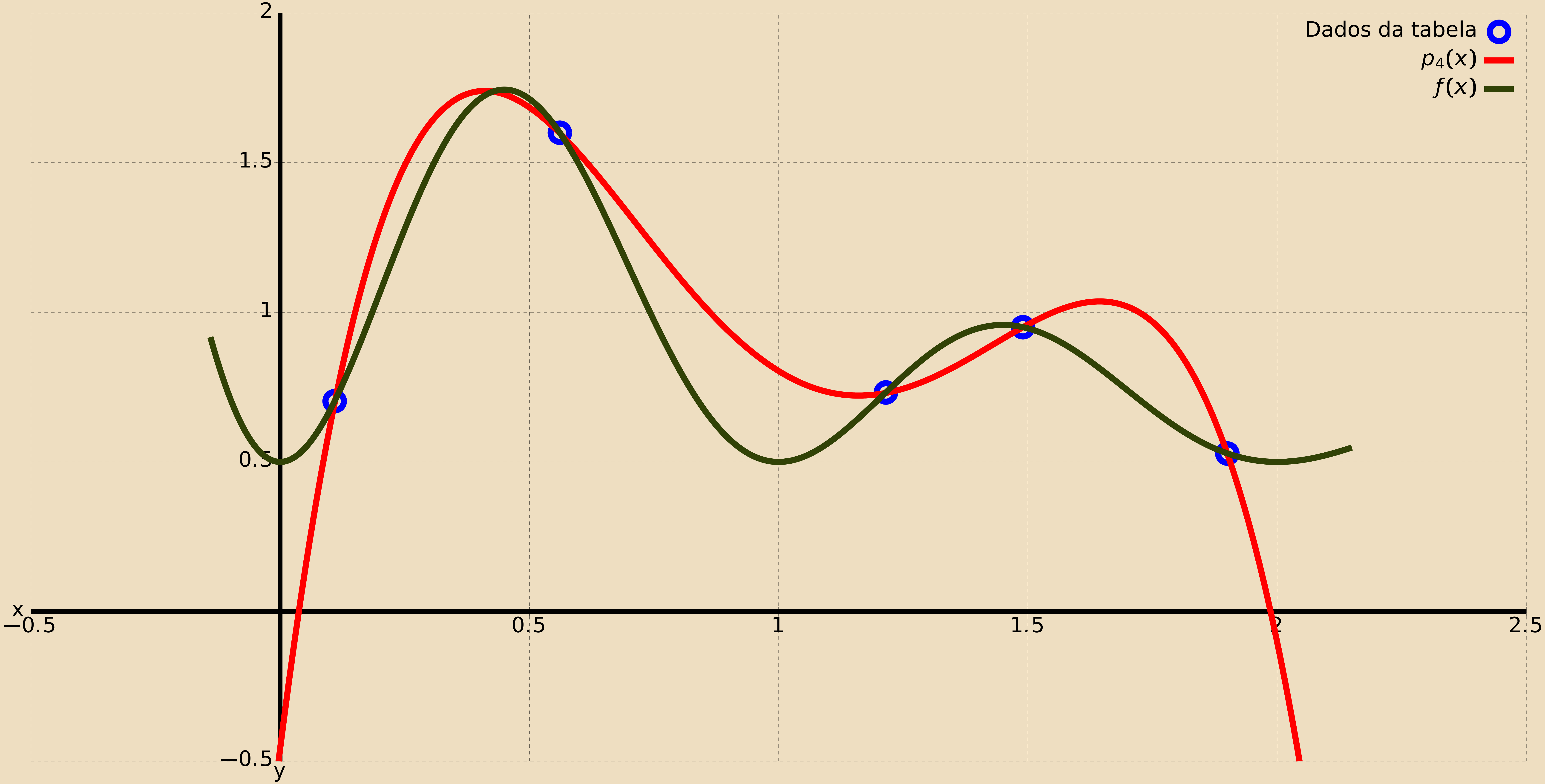

Figura 1: Gráficos de $p_4(x)$ junto com os pontos de interpolação.

Sobre as técnicas de interpolação

Observação 2

Existe mais de uma forma de obter o polinômio interpolador, mas independente da forma, o polinômio é sempre o mesmo. O que varia de uma técnica ou outra é a nível de complexidade para obter o polinômio interpolador. A técnica de obtenção do polinômio interpolador via resolução de sistemas lineares não é muito considerada, tendo mais valor como forma de provar a existência e unicidade do polinômio interpolador. Como método prático não é viável pois a matriz dos coeficientes tende a não ser bem condicionada.

Sobre as técnicas de interpolação

Observação 2

Existe mais de uma forma de obter o polinômio interpolador, mas independente da forma, o polinômio é sempre o mesmo. O que varia de uma técnica ou outra é a nível de complexidade para obter o polinômio interpolador. A técnica de obtenção do polinômio interpolador via resolução de sistemas lineares não é muito considerada, tendo mais valor como forma de provar a existência e unicidade do polinômio interpolador. Como método prático não é viável pois a matriz dos coeficientes tende a não ser bem condicionada.

Os técnicas de obtenção do polinômio interpolador que serão abordadas são:

Sobre as técnicas de interpolação

Observação 2

Existe mais de uma forma de obter o polinômio interpolador, mas independente da forma, o polinômio é sempre o mesmo. O que varia de uma técnica ou outra é a nível de complexidade para obter o polinômio interpolador. A técnica de obtenção do polinômio interpolador via resolução de sistemas lineares não é muito considerada, tendo mais valor como forma de provar a existência e unicidade do polinômio interpolador. Como método prático não é viável pois a matriz dos coeficientes tende a não ser bem condicionada.

Os técnicas de obtenção do polinômio interpolador que serão abordadas são:

- **Forma de Lagrange:** Essa técnica tem grande valor, do ponto de vista teórico, como o método base para obter fórmulas para integração numérica, assunto que será visto em outro tópico da disciplina.

Sobre as técnicas de interpolação

Observação 2

Existe mais de uma forma de obter o polinômio interpolador, mas independente da forma, o polinômio é sempre o mesmo. O que varia de uma técnica ou outra é a nível de complexidade para obter o polinômio interpolador. A técnica de obtenção do polinômio interpolador via resolução de sistemas lineares não é muito considerada, tendo mais valor como forma de provar a existência e unicidade do polinômio interpolador. Como método prático não é viável pois a matriz dos coeficientes tende a não ser bem condicionada.

Os técnicas de obtenção do polinômio interpolador que serão abordadas são:

- **Forma de Lagrange:** Essa técnica tem grande valor, do ponto de vista teórico, como o método base para obter fórmulas para integração numérica, assunto que será visto em outro tópico da disciplina.
- **Forma de Newton:** É talvez o método mais prático para obtenção do polinômio interpolador, exigindo poucas operações obter o mesmo.

Sobre as técnicas de interpolação

Observação 2

Existe mais de uma forma de obter o polinômio interpolador, mas independente da forma, o polinômio é sempre o mesmo. O que varia de uma técnica ou outra é a nível de complexidade para obter o polinômio interpolador. A técnica de obtenção do polinômio interpolador via resolução de sistemas lineares não é muito considerada, tendo mais valor como forma de provar a existência e unicidade do polinômio interpolador. Como método prático não é viável pois a matriz dos coeficientes tende a não ser bem condicionada.

Os técnicas de obtenção do polinômio interpolador que serão abordadas são:

- **Forma de Lagrange:** Essa técnica tem grande valor, do ponto de vista teórico, como o método base para obter fórmulas para integração numérica, assunto que será visto em outro tópico da disciplina.
- **Forma de Newton:** É talvez o método mais prático para obtenção do polinômio interpolador, exigindo poucas operações obter o mesmo.

Sobre as técnicas de interpolação

Observação 2

Existe mais de uma forma de obter o polinômio interpolador, mas independente da forma, o polinômio é sempre o mesmo. O que varia de uma técnica ou outra é a nível de complexidade para obter o polinômio interpolador. A técnica de obtenção do polinômio interpolador via resolução de sistemas lineares não é muito considerada, tendo mais valor como forma de provar a existência e unicidade do polinômio interpolador. Como método prático não é viável pois a matriz dos coeficientes tende a não ser bem condicionada.

Os técnicas de obtenção do polinômio interpolador que serão abordadas são:

- **Forma de Lagrange:** Essa técnica tem grande valor, do ponto de vista teórico, como o método base para obter fórmulas para integração numérica, assunto que será visto em outro tópico da disciplina.
- **Forma de Newton:** É talvez o método mais prático para obtenção do polinômio interpolador, exigindo poucas operações obter o mesmo.

Além disso, pontos importantes no que tange aos métodos de interpolação serão abordados.

Sobre as técnicas de interpolação

Observação 2

Existe mais de uma forma de obter o polinômio interpolador, mas independente da forma, o polinômio é sempre o mesmo. O que varia de uma técnica ou outra é a nível de complexidade para obter o polinômio interpolador. A técnica de obtenção do polinômio interpolador via resolução de sistemas lineares não é muito considerada, tendo mais valor como forma de provar a existência e unicidade do polinômio interpolador. Como método prático não é viável pois a matriz dos coeficientes tende a não ser bem condicionada.

Os técnicas de obtenção do polinômio interpolador que serão abordadas são:

- **Forma de Lagrange:** Essa técnica tem grande valor, do ponto de vista teórico, como o método base para obter fórmulas para integração numérica, assunto que será visto em outro tópico da disciplina.
- **Forma de Newton:** É talvez o método mais prático para obtenção do polinômio interpolador, exigindo poucas operações obter o mesmo.

Além disso, pontos importantes no que tange aos métodos de interpolação serão abordados.

- **Interpolação Inversa:** Essa técnica permite obter aproximações para a inversa de uma função.

Sobre as técnicas de interpolação

Observação 2

Existe mais de uma forma de obter o polinômio interpolador, mas independente da forma, o polinômio é sempre o mesmo. O que varia de uma técnica ou outra é a nível de complexidade para obter o polinômio interpolador. A técnica de obtenção do polinômio interpolador via resolução de sistemas lineares não é muito considerada, tendo mais valor como forma de provar a existência e unicidade do polinômio interpolador. Como método prático não é viável pois a matriz dos coeficientes tende a não ser bem condicionada.

Os técnicas de obtenção do polinômio interpolador que serão abordadas são:

- **Forma de Lagrange:** Essa técnica tem grande valor, do ponto de vista teórico, como o método base para obter fórmulas para integração numérica, assunto que será visto em outro tópico da disciplina.
- **Forma de Newton:** É talvez o método mais prático para obtenção do polinômio interpolador, exigindo poucas operações obter o mesmo.

Além disso, pontos importantes no que tange aos métodos de interpolação serão abordados.

- **Interpolação Inversa:** Essa técnica permite obter aproximações para a inversa de uma função.
- **Estudo do erro na interpolação polinomial:** Métodos de interpolação apresentam erros. Expressões para esses erros serão apresentados nessa parte, envolvendo cálculo de limitantes os mesmos.

Sobre as técnicas de interpolação

Observação 2

Existe mais de uma forma de obter o polinômio interpolador, mas independente da forma, o polinômio é sempre o mesmo. O que varia de uma técnica ou outra é a nível de complexidade para obter o polinômio interpolador. A técnica de obtenção do polinômio interpolador via resolução de sistemas lineares não é muito considerada, tendo mais valor como forma de provar a existência e unicidade do polinômio interpolador. Como método prático não é viável pois a matriz dos coeficientes tende a não ser bem condicionada.

Os técnicas de obtenção do polinômio interpolador que serão abordadas são:

- **Forma de Lagrange:** Essa técnica tem grande valor, do ponto de vista teórico, como o método base para obter fórmulas para integração numérica, assunto que será visto em outro tópico da disciplina.
- **Forma de Newton:** É talvez o método mais prático para obtenção do polinômio interpolador, exigindo poucas operações obter o mesmo.

Além disso, pontos importantes no que tange aos métodos de interpolação serão abordados.

- **Interpolação Inversa:** Essa técnica permite obter aproximações para a inversa de uma função.
- **Estudo do erro na interpolação polinomial:** Métodos de interpolação apresentam erros. Expressões para esses erros serão apresentados nessa parte, envolvendo cálculo de limitantes os mesmos.