Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial

Interpolação Inversa

Alessandro Alves Santana

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Fundamentos

A interpolação inversa tem por finalidade gerar um polinômio que interpola a inversa de uma função $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$. Mesmo que se tenha apenas conhecimento de valores pontuais de $f(x)$ em $n + 1$ pontos distintos, se $f(x)$ satisfizer determinadas condições, é possível obter o polinômio de grau no máximo n que interpola $f^{-1}(x)$.

Fundamentos

A interpolação inversa tem por finalidade gerar um polinômio que interpola a inversa de uma função $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$. Mesmo que se tenha apenas conhecimento de valores pontuais de $f(x)$ em $n+1$ pontos distintos, se $f(x)$ satisfizer determinadas condições, é possível obter o polinômio de grau no máximo n que interpola $f^{-1}(x)$.

Da teoria, sabe-se que uma função $f(x)$ é inversível em um intervalo $[a, b]$ se for a mesma bijetora nesse intervalo. Para obter o polinômio que interpola a inversa de uma função tabelada, basta que uma das seguintes condições sejam satisfeitas:

Fundamentos

A interpolação inversa tem por finalidade gerar um polinômio que interpola a inversa de uma função $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$. Mesmo que se tenha apenas conhecimento de valores pontuais de $f(x)$ em $n + 1$ pontos distintos, se $f(x)$ satisfizer determinadas condições, é possível obter o polinômio de grau no máximo n que interpola $f^{-1}(x)$.

Da teoria, sabe-se que uma função $f(x)$ é inversível em um intervalo $[a, b]$ se for a mesma bijetora nesse intervalo. Para obter o polinômio que interpola a inversa de uma função tabelada, basta que uma das seguintes condições sejam satisfeitas:

- $f(x_i) < f(x_{x_{i+1}})$ para $i = 0, 1, 2, ..., n-1$ (função crescente).

Fundamentos

A interpolação inversa tem por finalidade gerar um polinômio que interpola a inversa de uma função $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$. Mesmo que se tenha apenas conhecimento de valores pontuais de $f(x)$ em $n+1$ pontos distintos, se $f(x)$ satisfizer determinadas condições, é possível obter o polinômio de grau no máximo n que interpola $f^{-1}(x)$.

Da teoria, sabe-se que uma função $f(x)$ é inversível em um intervalo $[a, b]$ se for a mesma bijetora nesse intervalo. Para obter o polinômio que interpola a inversa de uma função tabelada, basta que uma das seguintes condições sejam satisfeitas:

- $f(x_i) < f(x_{x_{i+1}})$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ (função crescente).
- $f(x_i) > f(x_{x_{i+1}})$ para $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ (função decrescente).

Fundamentos

A interpolação inversa tem por finalidade gerar um polinômio que interpola a inversa de uma função $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$. Mesmo que se tenha apenas conhecimento de valores pontuais de $f(x)$ em $n+1$ pontos distintos, se $f(x)$ satisfizer determinadas condições, é possível obter o polinômio de grau no máximo n que interpola $f^{-1}(x)$.

Da teoria, sabe-se que uma função $f(x)$ é inversível em um intervalo $[a, b]$ se for a mesma bijetora nesse intervalo. Para obter o polinômio que interpola a inversa de uma função tabelada, basta que uma das seguintes condições sejam satisfeitas:

- $f(x_i) < f(x_{x_{i+1}})$ para $i = 0, 1, 2, ..., n-1$ (função crescente).
- $f(x_i) > f(x_{x_{i+1}})$ para $i = 0, 1, 2, ..., n-1$ (função decrescente).

E, sob essas condições, pode se obter o polinômio que interpola a inversa de uma função tanto via Forma de Lagrange como Forma de Newton.

Fundamentos

A interpolação inversa tem por finalidade gerar um polinômio que interpola a inversa de uma função $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$. Mesmo que se tenha apenas conhecimento de valores pontuais de $f(x)$ em $n+1$ pontos distintos, se $f(x)$ satisfizer determinadas condições, é possível obter o polinômio de grau no máximo n que interpola $f^{-1}(x)$.

Da teoria, sabe-se que uma função $f(x)$ é inversível em um intervalo $[a, b]$ se for a mesma bijetora nesse intervalo. Para obter o polinômio que interpola a inversa de uma função tabelada, basta que uma das seguintes condições sejam satisfeitas:

- $f(x_i) < f(x_{x_{i+1}})$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ (função crescente).
- $f(x_i) > f(x_{x_{i+1}})$ para $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ (função decrescente).

E, sob essas condições, pode se obter o polinômio que interpola a inversa de uma função tanto via Forma de Lagrange como Forma de Newton.

Definição 1: Interpolação Inversa via Forma de Lagrange

A forma de Lagrange para o polinômio que interpola a inversa $f^{-1}(x)$ de uma função $f(x)$ em $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ é dado por

$$p_n(y) = x_0 L_0(y) + x_1 L_1(y) + x_2 L_2(y) + \cdots + x_n L_n(y) \tag{1}$$

sendo

$$L_k(y) = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (y - y_i)}{\displaystyle\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (y_k - y_i)}. \tag{2}$$

Definição 2: Interpolação Inversa via Forma de Newton

A forma de Newton para o polinômio que interpola a inversa $f^{-1}(x)$ de uma função $f(x)$ em $n+1$ pontos distintos x_i, com $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, sendo $x_i < x_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, é dado por

$$\begin{aligned} p_n(y) = f[y_0] + f[y_0, y_1](y - x_0) + f[y_0, y_1, y_2](y - y_0)(y - y_1) + \\ f[y_0, y_1, y_2, y_3](y - y_0)(y - y_1)(y - y_2) + \cdots + \\ f[y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n](y - y_0)(y - y_1)(y - y_2)\cdots(y - y_{n-1}) \end{aligned} \quad (3)$$

sendo $f[y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k]$, a qual é definida por

$$f[y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k] = \frac{f[y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k] - f[y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}]}{y_k - y_0} \quad (4)$$

chamada **diferença dividida de ordem** k.

TABELA DE DIFERENÇAS DIVIDIDAS

y	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2	$\cdots$	ORDEM n
y_0	$\boldsymbol{x_0}$				
		$\boldsymbol{f[y_0, y_1]}$			
y_1	x_1		$\boldsymbol{f[y_0, y_1, y_2]}$		
		$f[y_1, y_2]$			
y_2	x_2		$f[y_1, y_2, y_3]$		
		$f[y_2, y_3]$			
y_3	x_3		$f[y_2, y_3, y_4]$		$\boldsymbol{f[y_0, y_1, \ldots, y_n]}$
		$f[y_3, y_4]$			
y_4	x_4		$\vdots$		
		$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$		$f[y_{n-2}, y_{n-1}, y_n]$		
		$f[y_{n-1}, y_n]$			
y_n	x_n				

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo, a qual apresenta valores de uma função estritamente decrescente no intervalo $[0.5, 1.5]$, e determine $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = 1.1$ usando interpolação inversa mediante um polinômio de grau 2. Trabalhe com 4 casas decimais.

x	0.50	0.81	0.84	1.09	1.50
$f(x)$	1.7199	1.1126	1.0458	0.4527	-0.5764

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo, a qual apresenta valores de uma função estritamente decrescente no intervalo $[0.5, 1.5]$, e determine $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = 1.1$ usando interpolação inversa mediante um polinômio de grau 2. Trabalhe com 4 casas decimais.

x	0.50	0.81	0.84	1.09	1.50
$f(x)$	1.7199	1.1126	1.0458	0.4527	-0.5764

Resolução: Para obter um polinômio de grau 2 que interpola a inversa de $f(x)$, devemos considerar 3 pontos de tal forma que o comprimento do intervalo $[y_0, y_2]$ seja o menor possível e que $f(\overline{x}) = 1.1$ esteja dentro desse intervalo. Observando a tabela, pode-se notar que $1.0458 < f(\overline{x}) < 1.1126$. Logo, temos duas subtabelas para analisar:

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo, a qual apresenta valores de uma função estritamente decrescente no intervalo $[0.5, 1.5]$, e determine $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = 1.1$ usando interpolação inversa mediante um polinômio de grau 2. Trabalhe com 4 casas decimais.

x	0.50	0.81	0.84	1.09	1.50
$f(x)$	1.7199	1.1126	1.0458	0.4527	-0.5764

Resolução: Para obter um polinômio de grau 2 que interpola a inversa de $f(x)$, devemos considerar 3 pontos de tal forma que o comprimento do intervalo $[y_0, y_2]$ seja o menor possível e que $f(\overline{x}) = 1.1$ esteja dentro desse intervalo. Observando a tabela, pode-se notar que $1.0458 < f(\overline{x}) < 1.1126$. Logo, temos duas subtabelas para analisar:

x	0.50	0.81	0.84
$f(x)$	1.7199	1.1126	1.0458

x	0.81	0.84	1.09
$f(x)$	1.1126	1.0458	0.4527

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo, a qual apresenta valores de uma função estritamente decrescente no intervalo $[0.5, 1.5]$, e determine $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = 1.1$ usando interpolação inversa mediante um polinômio de grau 2. Trabalhe com 4 casas decimais.

x	0.50	0.81	0.84	1.09	1.50
$f(x)$	1.7199	1.1126	1.0458	0.4527	-0.5764

Resolução: Para obter um polinômio de grau 2 que interpola a inversa de $f(x)$, devemos considerar 3 pontos de tal forma que o comprimento do intervalo $[y_0, y_2]$ seja o menor possível e que $f(\overline{x}) = 1.1$ esteja dentro desse intervalo. Observando a tabela, pode-se notar que $1.0458 < f(\overline{x}) < 1.1126$. Logo, temos duas subtabelas para analisar:

x	0.50	0.81	0.84
$f(x)$	1.7199	1.1126	1.0458

x	0.81	0.84	1.09
$f(x)$	1.1126	1.0458	0.4527

Note que na primeira subtabela acima à esquerda, o comprimento do intervalo $[1.0458, 1.7199]$ é 0.6741. Na segunda subtabela, o intervalo $[0.4527, 1.1126]$ é 0.6599. Como $0.6599 < 0.6741$, vamos trabalhar com a segunda subtabela.

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo, a qual apresenta valores de uma função estritamente decrescente no intervalo $[0.5, 1.5]$, e determine $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = 1.1$ usando interpolação inversa mediante um polinômio de grau 2. Trabalhe com 4 casas decimais.

x	0.50	0.81	0.84	1.09	1.50
$f(x)$	1.7199	1.1126	1.0458	0.4527	-0.5764

Resolução: Para obter um polinômio de grau 2 que interpola a inversa de $f(x)$, devemos considerar 3 pontos de tal forma que o comprimento do intervalo $[y_0, y_2]$ seja o menor possível e que $f(\overline{x}) = 1.1$ esteja dentro desse intervalo. Observando a tabela, pode-se notar que $1.0458 < f(\overline{x}) < 1.1126$. Logo, temos duas subtabelas para analisar:

x	0.50	0.81	0.84
$f(x)$	1.7199	1.1126	1.0458

x	0.81	0.84	1.09
$f(x)$	1.1126	1.0458	0.4527

Note que na primeira subtabela acima à esquerda, o comprimento do intervalo $[1.0458, 1.7199]$ é 0.6741. Na segunda subtabela, o intervalo $[0.4527, 1.1126]$ é 0.6599. Como $0.6599 < 0.6741$, vamos trabalhar com a segunda subtabela.

y	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2
0.4527	**1.09**	**-0.4215**	**-0.0418**
1.0458	0.84	-0.4491	
1.1126	0.81		

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo, a qual apresenta valores de uma função estritamente decrescente no intervalo $[0.5, 1.5]$, e determine $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = 1.1$ usando interpolação inversa mediante um polinômio de grau 2. Trabalhe com 4 casas decimais.

x	0.50	0.81	0.84	1.09	1.50
$f(x)$	1.7199	1.1126	1.0458	0.4527	-0.5764

Resolução: Para obter um polinômio de grau 2 que interpola a inversa de $f(x)$, devemos considerar 3 pontos de tal forma que o comprimento do intervalo $[y_0, y_2]$ seja o menor possível e que $f(\overline{x}) = 1.1$ esteja dentro desse intervalo. Observando a tabela, pode-se notar que $1.0458 < f(\overline{x}) < 1.1126$. Logo, temos duas subtabelas para analisar:

x	0.50	0.81	0.84
$f(x)$	1.7199	1.1126	1.0458

x	0.81	0.84	1.09
$f(x)$	1.1126	1.0458	0.4527

Note que na primeira subtabela acima à esquerda, o comprimento do intervalo $[1.0458, 1.7199]$ é 0.6741. Na segunda subtabela, o intervalo $[0.4527, 1.1126]$ é 0.6599. Como $0.6599 < 0.6741$, vamos trabalhar com a segunda subtabela.

y	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2
0.4527	**1.09**	**-0.4215**	**-0.0418**
1.0458	0.84	-0.4491	
1.1126	0.81		

Basta agora fazer o cálculo do valor de $\overline{x}$ usando o polinômio que interpola a inversa.

$$\overline{x} \approx p_2(y) = 1.09 - 0.4215(y - 0.4527) - 0.0418(y - 0.4527)(y - 1.0458)$$
$$\overline{x} \approx p_2(1.1) = 1.09 - 0.4215(1.1 - 0.4527) - 0.0418(1.1 - 0.4527)(1.1 - 1.0458)$$
$$\overline{x} \approx 0.8157.$$

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo, a qual apresenta valores de uma função estritamente decrescente no intervalo $[0.5, 1.5]$, e determine $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = 1.1$ usando interpolação inversa mediante um polinômio de grau 2. Trabalhe com 4 casas decimais.

x	0.50	0.81	0.84	1.09	1.50
$f(x)$	1.7199	1.1126	1.0458	0.4527	-0.5764

Resolução: Para obter um polinômio de grau 2 que interpola a inversa de $f(x)$, devemos considerar 3 pontos de tal forma que o comprimento do intervalo $[y_0, y_2]$ seja o menor possível e que $f(\overline{x}) = 1.1$ esteja dentro desse intervalo. Observando a tabela, pode-se notar que $1.0458 < f(\overline{x}) < 1.1126$. Logo, temos duas subtabelas para analisar:

x	0.50	0.81	0.84
$f(x)$	1.7199	1.1126	1.0458

x	0.81	0.84	1.09
$f(x)$	1.1126	1.0458	0.4527

Note que na primeira subtabela acima à esquerda, o comprimento do intervalo $[1.0458, 1.7199]$ é 0.6741. Na segunda subtabela, o intervalo $[0.4527, 1.1126]$ é 0.6599. Como $0.6599 < 0.6741$, vamos trabalhar com a segunda subtabela.

y	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2
0.4527	**1.09**	**-0.4215**	**-0.0418**
1.0458	0.84	-0.4491	
1.1126	0.81		

Basta agora fazer o cálculo do valor de $\overline{x}$ usando o polinômio que interpola a inversa.

$$\overline{x} \approx p_2(y) = 1.09 - 0.4215(y - 0.4527) - 0.0418(y - 0.4527)(y - 1.0458)$$
$$\overline{x} \approx p_2(1.1) = 1.09 - 0.4215(1.1 - 0.4527) - 0.0418(1.1 - 0.4527)(1.1 - 1.0458)$$
$$\overline{x} \approx 0.8157.$$

Portanto, $\boldsymbol{\overline{x} \approx 0.8157}$.