Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial

Interpolação Polinomial via Forma de Newton

Alessandro Alves Santana

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Fundamentos

Obter o polinômio que interpola um conjunto de n+1 pontos distintos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ em um intervalo $[a, b]$ via **Forma de Newton** é talvez o método mais prático de obtenção do referido polinômio.

Fundamentos

Obter o polinômio que interpola um conjunto de n+1 pontos distintos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ em um intervalo $[a, b]$ via **Forma de Newton** é talvez o método mais prático de obtenção do referido polinômio.

Definição 1: Polinômio Interpolador via Forma de Newton

A forma de Newton para o polinômio que interpola $n+1$ pontos distintos x_i, com $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, sendo $x_i < x_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, é dado por

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1}) \quad (1)$$

sendo $f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k]$, a qual é definida por

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \quad (2)$$

chamada **diferença dividida de ordem** k.

Fundamentos

Obter o polinômio que interpola um conjunto de n+1 pontos distintos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ em um intervalo $[a, b]$ via **Forma de Newton** é talvez o método mais prático de obtenção do referido polinômio.

Definição 1: Polinômio Interpolador via Forma de Newton

A forma de Newton para o polinômio que interpola $n+1$ pontos distintos x_i, com $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, sendo $x_i < x_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, é dado por

$$\begin{aligned} p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \cdots + \\ f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{1}$$

sendo $f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k]$, a qual é definida por

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \tag{2}$$

chamada **diferença dividida de ordem** k.

As **Diferenças Divididas (DD)** podem ser calculadas de modo bem prático por meio da chamada **Tabela de Diferenças Divididas (TDD)**. A exemplificação dessa tabela é feita na página seguinte, para o caso de uma tabela de 4 pontos associada a uma função $f(x)$

x	x_0	x_1	x_2	x_3
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$

e que permitirá obter um polinômio, de grau no máximo 3, que interpola essa função nesses pontos.

Tabela de Diferenças Divididas (TDD)

x	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2	ORDEM 3
x_0	f$[x_0]$	$f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_1	f$[x_1]$	$f[x_1,x_2]=\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
x_2	f$[x_2]$	$f[x_2,x_3]=\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		
x_3	f$[x_3]$			

Tabela 1: Tabela de Diferenças Divididas.

Tabela de Diferenças Divididas (TDD)

x	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2	ORDEM 3
x_0	f$[x_0]$	$f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_1	f$[x_1]$	$f[x_1,x_2]=\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
x_2	f$[x_2]$	$f[x_2,x_3]=\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		
x_3	f$[x_3]$			

Tabela 1: Tabela de Diferenças Divididas.

Uma observação importante é que a coluna com título ORDEM 0, onde tem-se $f[x_i]$, $i=0,\ldots,3$, nada mais é do que os valores da função na tabela da página anterior, isto é, $f[x_i]=f(x_i)$, $i=0,\ldots,3$. E para obter polinômios interpoladores de uma função usando mais pontos, basta acrescentá-los e seguir o mesmo procedimento apresentado na TDD.

Tabela de Diferenças Divididas (TDD)

x	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2	ORDEM 3
x_0	f$[x_0]$	$f[x_0,x_1]=\dfrac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	$f[x_0,x_1,x_2]=\dfrac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$
x_1	f$[x_1]$	$f[x_1,x_2]=\dfrac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	$f[x_1,x_2,x_3]=\dfrac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$	
x_2	f$[x_2]$	$f[x_2,x_3]=\dfrac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$		
x_3	f$[x_3]$			

Tabela 1: Tabela de Diferenças Divididas.

Uma observação importante é que a coluna com título ORDEM 0, onde tem-se $f[x_i]$, $i=0,\ldots,3$, nada mais é do que os valores da função na tabela da página anterior, isto é, $f[x_i]=f(x_i)$, $i=0,\ldots,3$. E para obter polinômios interpoladores de uma função usando mais pontos, basta acrescentá-los e seguir o mesmo procedimento apresentado na TDD.

Teorema 1

Se $f\in C^n[a,b]$ e $x_0,x_1,\ldots,x_n$ são $n+1$ números distintos em $[a,b]$, então existe $\xi\in(a,b)$ tal que

$$f[x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Esse teorema estabelece a relação que existe entre as DD de ordem n e a derivada dessa mesma ordem no intervalo $[a,b]$.

Exemplo 1

Obtenha uma aproximação para $f(2.9)$ utilizando um polinômio de grau 3. Obtenha o polinômio interpolador via Forma de Newton e trabalhe com 5 casas decimais em todo o processo.

x	1.49	1.9	2.4	2.69	2.84	2.88	3.43	3.46	3.59	3.76
$f(x)$	0.15256	-0.15374	0.98091	0.18329	-0.20218	-0.25018	0.22096	0.17412	-0.17267	-0.74170

Exemplo 1

Obtenha uma aproximação para $f(2.9)$ utilizando um polinômio de grau 3. Obtenha o polinômio interpolador via Forma de Newton e trabalhe com 5 casas decimais em todo o processo.

x	1.49	1.9	2.4	2.69	2.84	2.88	3.43	3.46	3.59	3.76
$f(x)$	0.15256	-0.15374	0.98091	0.18329	-0.20218	-0.25018	0.22096	0.17412	-0.17267	-0.74170

Resolução: Para obter um polinômio de grau 3 temos que considerar 4 pontos da tabela mas de tal forma que $x = 2.9$ esteja entre os mesmos. Temos 3 intervalos a considerar: $[2.69, 3, 43]$, $[2.84, 3.46]$ e $[2.88, 3.59]$. Para minimizar o erro, desses três intervalos temos que pegar aquele com menor comprimento, que no caso é o intervalo $[2.84, 3.46]$. Vamos extrair da tabela maior uma subtabela com os dados necessários.

Exemplo 1

Obtenha uma aproximação para $f(2.9)$ utilizando um polinômio de grau 3. Obtenha o polinômio interpolador via Forma de Newton e trabalhe com 5 casas decimais em todo o processo.

x	1.49	1.9	2.4	2.69	2.84	2.88	3.43	3.46	3.59	3.76
$f(x)$	0.15256	-0.15374	0.98091	0.18329	-0.20218	-0.25018	0.22096	0.17412	-0.17267	-0.74170

Resolução: Para obter um polinômio de grau 3 temos que considerar 4 pontos da tabela mas de tal forma que $x = 2.9$ esteja entre os mesmos. Temos 3 intervalos a considerar: $[2.69, 3, 43]$, $[2.84, 3.46]$ e $[2.88, 3.59]$. Para minimizar o erro, desses três intervalos temos que pegar aquele com menor comprimento, que no caso é o intervalo $[2.84, 3.46]$. Vamos extrair da tabela maior uma subtabela com os dados necessários.

x	2.84	2.88	3.43	3.46
$f(x)$	-0.20218	-0.25018	0.22096	0.17412

Exemplo 1

Obtenha uma aproximação para $f(2.9)$ utilizando um polinômio de grau 3. Obtenha o polinômio interpolador via Forma de Newton e trabalhe com 5 casas decimais em todo o processo.

x	1.49	1.9	2.4	2.69	2.84	2.88	3.43	3.46	3.59	3.76
$f(x)$	0.15256	-0.15374	0.98091	0.18329	-0.20218	-0.25018	0.22096	0.17412	-0.17267	-0.74170

Resolução: Para obter um polinômio de grau 3 temos que considerar 4 pontos da tabela mas de tal forma que $x = 2.9$ esteja entre os mesmos. Temos 3 intervalos a considerar: $[2.69, 3, 43]$, $[2.84, 3.46]$ e $[2.88, 3.59]$. Para minimizar o erro, desses três intervalos temos que pegar aquele com menor comprimento, que no caso é o intervalo $[2.84, 3.46]$. Vamos extrair da tabela maior uma subtabela com os dados necessários.

x	2.84	2.88	3.43	3.46
$f(x)$	-0.20218	-0.25018	0.22096	0.17412

Montando agora a TDD,

x	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2	ORDEM 3
2.84	**-0.20218**	**-1.20000**	**3.48580**	**-12.34626**
2.88	-0.25018	0.85662	-4.16888	
3.43	0.22096	-1.56133		
3.46	0.17412			

Exemplo 1

Obtenha uma aproximação para $f(2.9)$ utilizando um polinômio de grau 3. Obtenha o polinômio interpolador via Forma de Newton e trabalhe com 5 casas decimais em todo o processo.

x	1.49	1.9	2.4	2.69	2.84	2.88	3.43	3.46	3.59	3.76
$f(x)$	0.15256	-0.15374	0.98091	0.18329	-0.20218	-0.25018	0.22096	0.17412	-0.17267	-0.74170

Resolução: Para obter um polinômio de grau 3 temos que considerar 4 pontos da tabela mas de tal forma que $x = 2.9$ esteja entre os mesmos. Temos 3 intervalos a considerar: $[2.69, 3, 43]$, $[2.84, 3.46]$ e $[2.88, 3.59]$. Para minimizar o erro, desses três intervalos temos que pegar aquele com menor comprimento, que no caso é o intervalo $[2.84, 3.46]$. Vamos extrair da tabela maior uma subtabela com os dados necessários.

x	2.84	2.88	3.43	3.46
$f(x)$	-0.20218	-0.25018	0.22096	0.17412

Montando agora a TDD,

x	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2	ORDEM 3
2.84	**-0.20218**	**-1.20000**	**3.48580**	**-12.34626**
2.88	-0.25018	0.85662	-4.16888	
3.43	0.22096	-1.56133		
3.46	0.17412			

Portanto,

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= -0.20218 - 1.2(x-2.84) + 3.48580(x-2.84)(x-2.88) - 12.34626(x-2.84)(x-2.88)(x-3.43)\\
p_3(2.9) &= -0.20218 - 1.2(2.9-2.84) + 3.48580(2.9-2.84)(2.9-2.88) - 12.34626(2.9-2.84)(2.9-2.88)(2.9-3.43)\\
p_3(2.9) &= -0.26214.
\end{aligned}
$$

Logo, $f(2.9) \approx -0.26214$.