Cálculo Numérico

Ajuste de Curvas

Caso Discreto

Alessandro Alves Santana

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Fundamentos

Assim como a interpolação polinomial, a técnica de ajuste de curvas é um método de aproximação de funções. Essa técnica segue um procedimento diferente da técnica de interpolação polinomial. A metodologia do ajuste de curvas também é chamado **Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)**. Normalmente é aplicada sobre valores de uma função tabelada, com lei de formação desconhecida, sendo essa função aproximada por uma outra função a qual é escrita como uma combinação linear de outras funções cujas expressões são conhecidas, sendo uma técnica massivamente utilizada, por exemplo, em experiências laboratoriais de física para estudar fenômenos físicos cujas leis que a definem são desconhecidas.

Fundamentos

Assim como a interpolação polinomial, a técnica de ajuste de curvas é um método de aproximação de funções. Essa técnica segue um procedimento diferente da técnica de interpolação polinomial. A metodologia do ajuste de curvas também é chamado **Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)**. Normalmente é aplicada sobre valores de uma função tabelada, com lei de formação desconhecida, sendo essa função aproximada por uma outra função a qual é escrita como uma combinação linear de outras funções cujas expressões são conhecidas, sendo uma técnica massivamente utilizada, por exemplo, em experiências laboratoriais de física para estudar fenômenos físicos cujas leis que a definem são desconhecidas.

A essência do MMQ consiste é aproximar uma função com n valores tabelados

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$\cdots$	$f(x_n)$

por uma outra função $g(x)$ definida como

$$g(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x) + \alpha_3\phi_3(x) + \cdots + \alpha_m\phi_m(x) \tag{1}$$

sendo $\phi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, funções previamente escolhidas, de tal forma que

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]^2 \tag{2}$$

tenha o menor valor. Esse método recebe o nome de Método dos Mínimos Quadrados justamente por que ele busca determinar os valores de α_i de tal modo que o somatório dos quadrados dos desvios seja mínimo. **Uma vez escolhida as funções $\phi_i(x)$, o processo se resume em determinar os parâmetros α_i que minimiza $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ e que definem a função aproximadora $g(x)$.**

Fundamentos

Assim como a interpolação polinomial, a técnica de ajuste de curvas é um método de aproximação de funções. Essa técnica segue um procedimento diferente da técnica de interpolação polinomial. A metodologia do ajuste de curvas também é chamado **Método dos Mínimos Quadrados (MMQ)**. Normalmente é aplicada sobre valores de uma função tabelada, com lei de formação desconhecida, sendo essa função aproximada por uma outra função a qual é escrita como uma combinação linear de outras funções cujas expressões são conhecidas, sendo uma técnica massivamente utilizada, por exemplo, em experiências laboratoriais de física para estudar fenômenos físicos cujas leis que a definem são desconhecidas.

A essência do MMQ consiste é aproximar uma função com n valores tabelados

x	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$\cdots$	$f(x_n)$

por uma outra função $g(x)$ definida como

$$g(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x) + \alpha_3\phi_3(x) + \cdots + \alpha_m\phi_m(x) \tag{1}$$

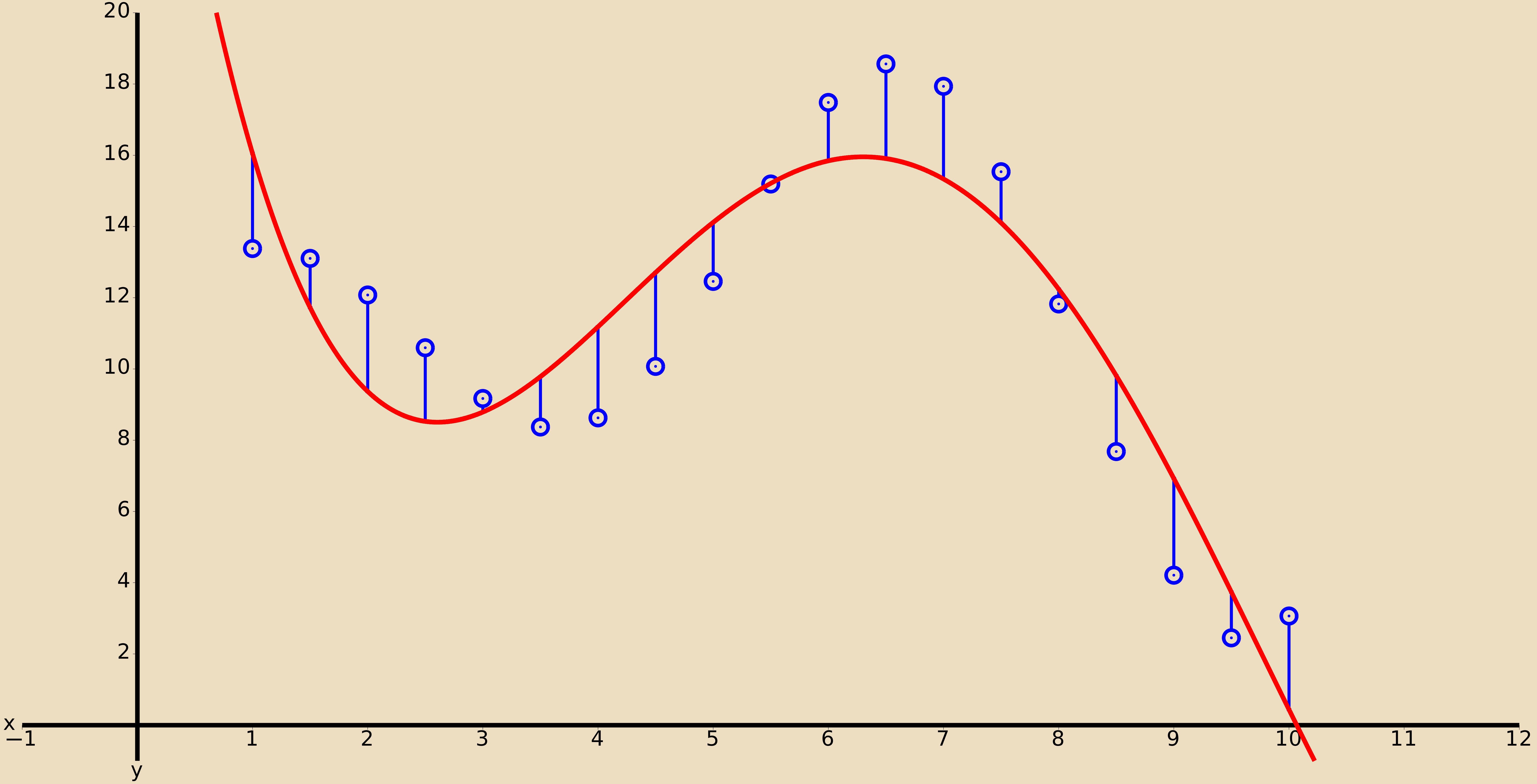
sendo $\phi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, funções previamente escolhidas, de tal forma que

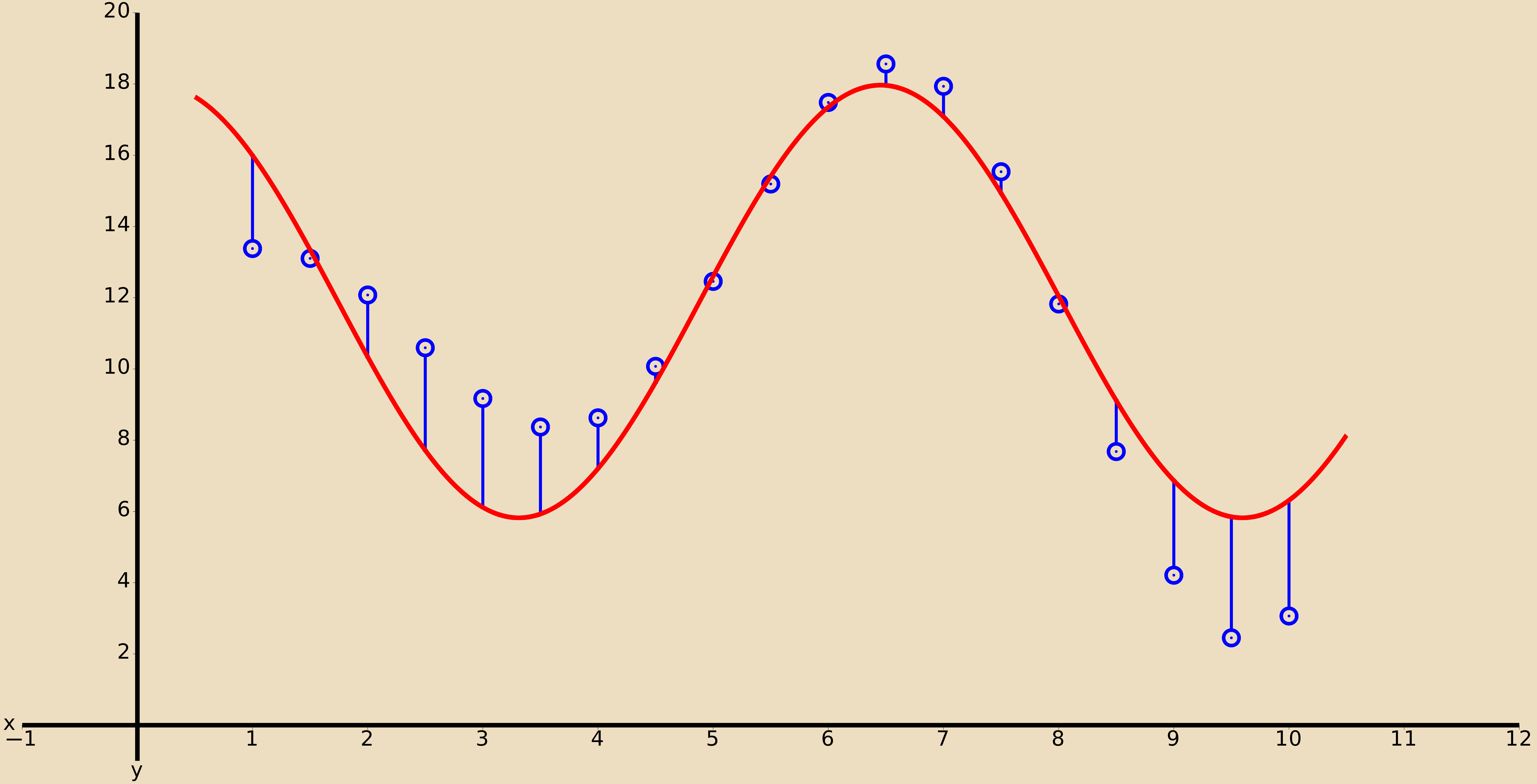
$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]^2 \tag{2}$$

tenha o menor valor. Esse método recebe o nome de Método dos Mínimos Quadrados justamente por que ele busca determinar os valores de α_i de tal modo que o somatório dos quadrados dos desvios seja mínimo. **Uma vez escolhida as funções $\boldsymbol{\phi_i(x)}$, o processo se resume em determinar os parâmetros $\boldsymbol{\alpha_i}$ que minimiza $\boldsymbol{F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)}$ e que definem a função aproximadora $\boldsymbol{g(x)}$.**

Observação 1

O processo de ajuste de curvas via método dos mínimos quadrados pode envolver a resolução de sistemas lineares com o número equações e incógnitas iguais como mais equações do que incógnitas.


20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
x
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
y



20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
x
y
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Determinação dos Coeficientes de Ajuste

Para obter α_i na função de ajuste

Determinação dos Coeficientes de Ajuste

Para obter α_i na função de ajuste

$$g(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x) + \alpha_3\phi_3(x) + \cdots + \alpha_m\phi_m(x) \tag{3}$$

Determinação dos Coeficientes de Ajuste

Para obter α_i na função de ajuste

$$g(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x) + \alpha_3\phi_3(x) + \cdots + \alpha_m\phi_m(x) \tag{3}$$

precisamos minimizar a função

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]^2 \tag{4}$$

derivando-a em relação a cada α_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, e igualando a zero cada uma dessas derivadas. Isso irá gerar no final um sistema linear cujas incógnitas são os parâmetros a serem determinados. Prosseguindo,

Determinação dos Coeficientes de Ajuste

Para obter α_i na função de ajuste

$$g(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x) + \alpha_3\phi_3(x) + \cdots + \alpha_m\phi_m(x) \tag{3}$$

precisamos minimizar a função

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]^2 \tag{4}$$

derivando-a em relação a cada α_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, e igualando a zero cada uma dessas derivadas. Isso irá gerar no final um sistema linear cujas incógnitas são os parâmetros a serem determinados. Prosseguindo,

Determinação dos Coeficientes de Ajuste

Para obter α_i na função de ajuste

$$g(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x) + \alpha_3\phi_3(x) + \cdots + \alpha_m\phi_m(x) \tag{3}$$

precisamos minimizar a função

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]^2 \tag{4}$$

derivando-a em relação a cada α_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, e igualando a zero cada uma dessas derivadas. Isso irá gerar no final um sistema linear cujas incógnitas são os parâmetros a serem determinados. Prosseguindo,

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) \;=\; \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]^2$$

Determinação dos Coeficientes de Ajuste

Para obter α_i na função de ajuste

$$g(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x) + \alpha_3\phi_3(x) + \cdots + \alpha_m\phi_m(x) \tag{3}$$

precisamos minimizar a função

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]^2 \tag{4}$$

derivando-a em relação a cada α_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, e igualando a zero cada uma dessas derivadas. Isso irá gerar no final um sistema linear cujas incógnitas são os parâmetros a serem determinados. Prosseguindo,

$$\begin{aligned} F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) &= \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]^2 \\ F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) &= \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - \alpha_1\phi_1(x_k) - \alpha_2\phi_2(x_k) - \alpha_3\phi_3(x_k) - \cdots - \alpha_m\phi_m(x_k)]^2 \end{aligned}$$

Determinação dos Coeficientes de Ajuste

Para obter α_i na função de ajuste

$$g(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x) + \alpha_3\phi_3(x) + \cdots + \alpha_m\phi_m(x) \tag{3}$$

precisamos minimizar a função

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]^2 \tag{4}$$

derivando-a em relação a cada α_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, e igualando a zero cada uma dessas derivadas. Isso irá gerar no final um sistema linear cujas incógnitas são os parâmetros a serem determinados. Prosseguindo,

$$\begin{aligned}
F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) &= \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]^2 \\
F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) &= \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - \alpha_1\phi_1(x_k) - \alpha_2\phi_2(x_k) - \alpha_3\phi_3(x_k) - \cdots - \alpha_m\phi_m(x_k)]^2 \\
F_{\alpha_i} &= -2\sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - \alpha_1\phi_1(x_k) - \alpha_2\phi_2(x_k) - \alpha_3\phi_3(x_k) - \cdots - \alpha_m\phi_m(x_k)]\,\phi_i(x_k)
\end{aligned}$$

Determinação dos Coeficientes de Ajuste

Para obter α_i na função de ajuste

$$g(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x) + \alpha_3\phi_3(x) + \cdots + \alpha_m\phi_m(x) \tag{3}$$

precisamos minimizar a função

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]^2 \tag{4}$$

derivando-a em relação a cada α_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, e igualando a zero cada uma dessas derivadas. Isso irá gerar no final um sistema linear cujas incógnitas são os parâmetros a serem determinados. Prosseguindo,

$$\begin{aligned}
F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) &= \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]^2 \\
F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) &= \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - \alpha_1\phi_1(x_k) - \alpha_2\phi_2(x_k) - \alpha_3\phi_3(x_k) - \cdots - \alpha_m\phi_m(x_k)]^2 \\
F_{\alpha_i} &= -2\sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - \alpha_1\phi_1(x_k) - \alpha_2\phi_2(x_k) - \alpha_3\phi_3(x_k) - \cdots - \alpha_m\phi_m(x_k)]\,\phi_i(x_k)
\end{aligned}$$

Abrindo o somatório,

Determinação dos Coeficientes de Ajuste

Para obter α_i na função de ajuste

$$g(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x) + \alpha_3\phi_3(x) + \cdots + \alpha_m\phi_m(x) \tag{3}$$

precisamos minimizar a função

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]^2 \tag{4}$$

derivando-a em relação a cada α_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, e igualando a zero cada uma dessas derivadas. Isso irá gerar no final um sistema linear cujas incógnitas são os parâmetros a serem determinados. Prosseguindo,

$$\begin{aligned}
F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) &= \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]^2 \\
F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) &= \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - \alpha_1\phi_1(x_k) - \alpha_2\phi_2(x_k) - \alpha_3\phi_3(x_k) - \cdots - \alpha_m\phi_m(x_k)]^2 \\
F_{\alpha_i} &= -2\sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - \alpha_1\phi_1(x_k) - \alpha_2\phi_2(x_k) - \alpha_3\phi_3(x_k) - \cdots - \alpha_m\phi_m(x_k)]\,\phi_i(x_k)
\end{aligned}$$

Abrindo o somatório,

$$F_{\alpha_i} = -2\left\{\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\phi_i(x_k) - \left[\sum_{k=1}^{n}\phi_1(x_k)\phi_i(x_k)\right]\alpha_1 - \left[\sum_{k=1}^{n}\phi_2(x_k)\phi_i(x_k)\right]\alpha_2 - \left[\sum_{k=1}^{n}\phi_3(x_k)\phi_i(x_k)\right]\alpha_3 - \cdots - \left[\sum_{k=1}^{n}\phi_m(x_k)\phi_i(x_k)\right]\alpha_m\right\}$$

Determinação dos Coeficientes de Ajuste

Para obter α_i na função de ajuste

$$g(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x) + \alpha_3\phi_3(x) + \cdots + \alpha_m\phi_m(x) \tag{3}$$

precisamos minimizar a função

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]^2 \tag{4}$$

derivando-a em relação a cada α_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, e igualando a zero cada uma dessas derivadas. Isso irá gerar no final um sistema linear cujas incógnitas são os parâmetros a serem determinados. Prosseguindo,

$$\begin{aligned}
F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) &= \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - g(x_k)]^2 \\
F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m) &= \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - \alpha_1\phi_1(x_k) - \alpha_2\phi_2(x_k) - \alpha_3\phi_3(x_k) - \cdots - \alpha_m\phi_m(x_k)]^2 \\
F_{\alpha_i} &= -2\sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - \alpha_1\phi_1(x_k) - \alpha_2\phi_2(x_k) - \alpha_3\phi_3(x_k) - \cdots - \alpha_m\phi_m(x_k)]\, \phi_i(x_k)
\end{aligned}$$

Abrindo o somatório,

$$F_{\alpha_i} = -2\left\{\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\phi_i(x_k) - \left[\sum_{k=1}^{n}\phi_1(x_k)\phi_i(x_k)\right]\alpha_1 - \left[\sum_{k=1}^{n}\phi_2(x_k)\phi_i(x_k)\right]\alpha_2 - \left[\sum_{k=1}^{n}\phi_3(x_k)\phi_i(x_k)\right]\alpha_3 - \cdots - \left[\sum_{k=1}^{n}\phi_m(x_k)\phi_i(x_k)\right]\alpha_m\right\}$$

Fazendo $F_{\alpha_i} = 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, m$ iremos montar um sistema linear onde cada equação linear tem a seguinte forma geral

$$\left[\sum_{k=1}^{n}\phi_1(x_k)\phi_i(x_k)\right]\alpha_1 + \left[\sum_{k=1}^{n}\phi_2(x_k)\phi_i(x_k)\right]\alpha_2 + \left[\sum_{k=1}^{n}\phi_3(x_k)\phi_i(x_k)\right]\alpha_3 + \cdots + \left[\sum_{k=1}^{n}\phi_m(x_k)\phi_i(x_k)\right]\alpha_m = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\phi_i(x_k).$$

Fazendo $i = 1, 2, ..., m$ o resultado será um sistema linear $A\alpha = b$ com apresentado a seguir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \phi_i(x_k)\phi_j(x_k)$$

$$b_i = \sum_{k=1}^{n} \phi_i(x_k)f(x_k)$$

Note que a matriz dos coeficientes A é uma matriz simétrica, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$. Isso facilita a montagem da matriz dos coeficientes. As equações $A\alpha = b$ são chamadas **Equações Normais**. O sistema linear pode ser resolvido por MEGPP. Mas deve-se ficar atento. Existem situações onde a matriz dos coeficientes do sistema linear são mal-condicionadas, ficando muito sensível aos erros de arredondamento. Nesses caso, aconselha-se a utilizar outros métodos numéricos menos sensíveis a esses erros. Um método estável nesse sentido são os métodos baseados em transformações ortogonais, sendo as Transformações de Householder bastante utilizadas para resolver sistemas lineares com essas características.

Fazendo $i = 1, 2, ..., m$ o resultado será um sistema linear $A\alpha = b$ com apresentado a seguir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \phi_i(x_k)\phi_j(x_k)$$

$$b_i = \sum_{k=1}^{n} \phi_i(x_k) f(x_k)$$

Note que a matriz dos coeficientes A é uma matriz simétrica, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$. Isso facilita a montagem da matriz dos coeficientes. As equações $A\alpha = b$ são chamadas **Equações Normais**. O sistema linear pode ser resolvido por MEGPP. Mas deve-se ficar atento. Existem situações onde a matriz dos coeficientes do sistema linear são mal-condicionadas, ficando muito sensível aos erros de arredondamento. Nesses caso, aconselha-se a utilizar outros métodos numéricos menos sensíveis a esses erros. Um método estável nesse sentido são os métodos baseados em transformações ortogonais, sendo as Transformações de Householder bastante utilizadas para resolver sistemas lineares com essas características.

Exemplo 1

Ajuste os dados da tabela

x	1.0	1.3	1.6	1.9	2.2	2.5	2.8	3.1	3.4	3.7	4.0
$f(x)$	0.659	1.273	2.715	3.659	3.092	1.672	1.045	1.938	3.390	4.050	3.858

por uma função da forma

$$g(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 \cos(2.1x) + \alpha_3 \operatorname{sen}(3.9x)$$

utilizando o Método dos Mínimos Quadrados. Trabalhe com 5 casas decimais em todo o processo.

Fazendo $i = 1, 2, \ldots, m$ o resultado será um sistema linear $A\alpha = b$ com apresentado a seguir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \phi_i(x_k)\phi_j(x_k)$$

$$b_i = \sum_{k=1}^{n} \phi_i(x_k) f(x_k)$$

Note que a matriz dos coeficientes A é uma matriz simétrica, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$. Isso facilita a montagem da matriz dos coeficientes. As equações $A\alpha = b$ são chamadas **Equações Normais**. O sistema linear pode ser resolvido por MEGPP. Mas deve-se ficar atento. Existem situações onde a matriz dos coeficientes do sistema linear são mal-condicionadas, ficando muito sensível aos erros de arredondamento. Nesses caso, aconselha-se a utilizar outros métodos numéricos menos sensíveis a esses erros. Um método estável nesse sentido são os métodos baseados em transformações ortogonais, sendo as Transformações de Householder bastante utilizadas para resolver sistemas lineares com essas características.

Exemplo 1

Ajuste os dados da tabela

x	1.0	1.3	1.6	1.9	2.2	2.5	2.8	3.1	3.4	3.7	4.0
$f(x)$	0.659	1.273	2.715	3.659	3.092	1.672	1.045	1.938	3.390	4.050	3.858

por uma função da forma

$$g(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 \cos(2.1x) + \alpha_3 \operatorname{sen}(3.9x)$$

utilizando o Método dos Mínimos Quadrados. Trabalhe com 5 casas decimais em todo o processo.

Resolução: Analisando os dados do problema, temos que obter três parâmetros, a saber, α_1, α_2 e α_3, sendo as funções que tem esses coeficientes $\phi_1(x) = x$, $\phi_2(x) = \cos(2.1x)$ e $\phi_3(x) = \cos(3.9x)$. Logo, o sistema linear terá 3 equações com o mesmo número de incógnitas, que são os coeficiente a serem determinados. Outra informação é a tabela que tem $n = 11$ pontos. Com esses dados podemos dar início a montagem do sistema linear.

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_1(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k^2 \qquad a_{12} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k \cos(2.1x_k) \qquad a_{13} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k \mathrm{sen}(3.9x_k)$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{11} \phi_2(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos^2(2.1x_k) \qquad a_{23} = \sum_{k=1}^{11} \phi_2(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos(2.1x_k)\mathrm{sen}(3.9x_k) \qquad a_{33} = \sum_{k=1}^{11} \phi_3(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \mathrm{sen}^2(3.9x_k)$$

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_1(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k^2 \qquad a_{12} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k \cos(2.1x_k) \qquad a_{13} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k \mathrm{sen}(3.9x_k)$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{11} \phi_2(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos^2(2.1x_k) \qquad a_{23} = \sum_{k=1}^{11} \phi_2(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos(2.1x_k)\mathrm{sen}(3.9x_k) \qquad a_{33} = \sum_{k=1}^{11} \phi_3(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \mathrm{sen}^2(3.9x_k)$$

É importante lembrar aqui que a matriz dos coeficientes é simétrica, e portanto temos que $a_{ij} = a_{ji}$. Prosseguindo, as componentes do vetor dos termos independentes são calculadas pelas expressões abaixo.

$$a_{11}=\sum_{k=1}^{11}\phi_1(x_k)\phi_1(x_k)=\sum_{k=1}^{11}x_k^2 \qquad a_{12}=\sum_{k=1}^{11}\phi_1(x_k)\phi_2(x_k)=\sum_{k=1}^{11}x_k\cos(2.1x_k) \qquad a_{13}=\sum_{k=1}^{11}\phi_1(x_k)\phi_3(x_k)=\sum_{k=1}^{11}x_k\text{sen}(3.9x_k)$$

$$a_{22}=\sum_{k=1}^{11}\phi_2(x_k)\phi_2(x_k)=\sum_{k=1}^{11}\cos^2(2.1x_k) \qquad a_{23}=\sum_{k=1}^{11}\phi_2(x_k)\phi_3(x_k)=\sum_{k=1}^{11}\cos(2.1x_k)\text{sen}(3.9x_k) \qquad a_{33}=\sum_{k=1}^{11}\phi_3(x_k)\phi_3(x_k)=\sum_{k=1}^{11}\text{sen}^2(3.9x_k)$$

É importante lembrar aqui que a matriz dos coeficientes é simétrica, e portanto temos que $a_{ij}=a_{ji}$. Prosseguindo, as componentes do vetor dos termos independentes são calculadas pelas expressões abaixo.

$$b_1=\sum_{k=1}^{11}\phi_1(x_k)f(x_k)=\sum_{k=1}^{11}x_kf(x_k) \qquad b_2=\sum_{k=1}^{11}\phi_2(x_k)f(x_k)=\sum_{k=1}^{11}\cos(2.1x_k)f(x_k) \qquad b_3=\sum_{k=1}^{11}\phi_3(x_k)f(x_k)=\sum_{k=1}^{11}\cos(3.9x_k)f(x_k)$$

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_1(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k^2 \qquad a_{12} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k \cos(2.1x_k) \qquad a_{13} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k \mathrm{sen}(3.9x_k)$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{11} \phi_2(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos^2(2.1x_k) \qquad a_{23} = \sum_{k=1}^{11} \phi_2(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos(2.1x_k)\mathrm{sen}(3.9x_k) \qquad a_{33} = \sum_{k=1}^{11} \phi_3(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \mathrm{sen}^2(3.9x_k)$$

É importante lembrar aqui que a matriz dos coeficientes é simétrica, e portanto temos que $a_{ij} = a_{ji}$. Prosseguindo, as componentes do vetor dos termos independentes são calculadas pelas expressões abaixo.

$$b_1 = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k) f(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k f(x_k) \qquad b_2 = \sum_{k=1}^{11} \phi_2(x_k) f(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos(2.1x_k) f(x_k) \qquad b_3 = \sum_{k=1}^{11} \phi_3(x_k) f(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos(3.9x_k) f(x_k)$$

Os cálculos dos somatório acima irão gerar os valores apresentados no sistema linear a seguir.

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_1(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k^2 \qquad a_{12} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k \cos(2.1x_k) \qquad a_{13} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k \text{sen}(3.9x_k)$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{11} \phi_2(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos^2(2.1x_k) \qquad a_{23} = \sum_{k=1}^{11} \phi_2(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos(2.1x_k)\text{sen}(3.9x_k) \qquad a_{33} = \sum_{k=1}^{11} \phi_3(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \text{sen}^2(3.9x_k)$$

É importante lembrar aqui que a matriz dos coeficientes é simétrica, e portanto temos que $a_{ij} = a_{ji}$. Prosseguindo, as componentes do vetor dos termos independentes são calculadas pelas expressões abaixo.

$$b_1 = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)f(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k f(x_k) \qquad b_2 = \sum_{k=1}^{11} \phi_2(x_k)f(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos(2.1x_k) f(x_k) \qquad b_3 = \sum_{k=1}^{11} \phi_3(x_k)f(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos(3.9x_k) f(x_k)$$

Os cálculos dos somatório acima irão gerar os valores apresentados no sistema linear a seguir.

$$\begin{bmatrix} 78.65000 & 2.61854 & 2.52125 \\ 2.61854 & 5.25679 & -0.50282 \\ 2.52125 & -0.50282 & 5.37081 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75.46772 \\ -2.59244 \\ 7.84796 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95916 \\ -0.88210 \\ 0.92862 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_1(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k^2 \qquad a_{12} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k \cos(2.1x_k) \qquad a_{13} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k \text{sen}(3.9x_k)$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{11} \phi_2(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos^2(2.1x_k) \qquad a_{23} = \sum_{k=1}^{11} \phi_2(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos(2.1x_k)\text{sen}(3.9x_k) \qquad a_{33} = \sum_{k=1}^{11} \phi_3(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \text{sen}^2(3.9x_k)$$

É importante lembrar aqui que a matriz dos coeficientes é simétrica, e portanto temos que $a_{ij} = a_{ji}$. Prosseguindo, as componentes do vetor dos termos independentes são calculadas pelas expressões abaixo.

$$b_1 = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)f(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k f(x_k) \qquad b_2 = \sum_{k=1}^{11} \phi_2(x_k)f(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos(2.1x_k)f(x_k) \qquad b_3 = \sum_{k=1}^{11} \phi_3(x_k)f(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos(3.9x_k)f(x_k)$$

Os cálculos dos somatório acima irão gerar os valores apresentados no sistema linear a seguir.

$$\begin{bmatrix} 78.65000 & 2.61854 & 2.52125 \\ 2.61854 & 5.25679 & -0.50282 \\ 2.52125 & -0.50282 & 5.37081 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75.46772 \\ -2.59244 \\ 7.84796 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95916 \\ -0.88210 \\ 0.92862 \end{bmatrix}$$

Portanto, a função de ajuste $g(x)$ é dada por

$$g(x) = 0.95916\,x - 0.88210\,\cos(2.1\,x) + 0.92862\,\cos(3.9\,x).$$

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_1(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k^2 \qquad a_{12} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k \cos(2.1x_k) \qquad a_{13} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k \mathrm{sen}(3.9x_k)$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{11} \phi_2(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos^2(2.1x_k) \qquad a_{23} = \sum_{k=1}^{11} \phi_2(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos(2.1x_k)\mathrm{sen}(3.9x_k) \qquad a_{33} = \sum_{k=1}^{11} \phi_3(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \mathrm{sen}^2(3.9x_k)$$

É importante lembrar aqui que a matriz dos coeficientes é simétrica, e portanto temos que $a_{ij} = a_{ji}$. Prosseguindo, as componentes do vetor dos termos independentes são calculadas pelas expressões abaixo.

$$b_1 = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)f(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k f(x_k) \qquad b_2 = \sum_{k=1}^{11} \phi_2(x_k)f(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos(2.1x_k)f(x_k) \qquad b_3 = \sum_{k=1}^{11} \phi_3(x_k)f(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos(3.9x_k)f(x_k)$$

Os cálculos dos somatório acima irão gerar os valores apresentados no sistema linear a seguir.

$$\begin{bmatrix} 78.65000 & 2.61854 & 2.52125 \\ 2.61854 & 5.25679 & -0.50282 \\ 2.52125 & -0.50282 & 5.37081 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75.46772 \\ -2.59244 \\ 7.84796 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95916 \\ -0.88210 \\ 0.92862 \end{bmatrix}$$

Portanto, a função de ajuste $g(x)$ é dada por

$$g(x) = 0.95916\,x - 0.88210\,\cos(2.1\,x) + 0.92862\,\cos(3.9\,x).$$

Agora para fazer um ajuste dos dados da tabela por um polinômio de grau 5

$$g(x) = \alpha_1 + \alpha_2\,x + \alpha_3\,x^2 + \alpha_4\,x^3 + +\alpha_5\,x^4 + \alpha_6\,x^5$$

é necessário resolver um sistema linear com 6 equações e 6 incógnitas para determinar α_i, $i = 1, \ldots, 6$, sendo que $\phi_i(x) = x^{i-1}$, também para $i = 1, \ldots, 6$. Nesse caso, o polinômio de ajuste é dado por

$$g(x) = 54.69888 - 155.80818x + 164.73037x^2 - 79.16936x^3 + 17.60145x^4 - 1.467332x^5.$$

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_1(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k^2 \qquad a_{12} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k \cos(2.1x_k) \qquad a_{13} = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k \text{sen}(3.9x_k)$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{11} \phi_2(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos^2(2.1x_k) \qquad a_{23} = \sum_{k=1}^{11} \phi_2(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos(2.1x_k)\text{sen}(3.9x_k) \qquad a_{33} = \sum_{k=1}^{11} \phi_3(x_k)\phi_3(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \text{sen}^2(3.9x_k)$$

É importante lembrar aqui que a matriz dos coeficientes é simétrica, e portanto temos que $a_{ij} = a_{ji}$. Prosseguindo, as componentes do vetor dos termos independentes são calculadas pelas expressões abaixo.

$$b_1 = \sum_{k=1}^{11} \phi_1(x_k)f(x_k) = \sum_{k=1}^{11} x_k f(x_k) \qquad b_2 = \sum_{k=1}^{11} \phi_2(x_k)f(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos(2.1x_k)f(x_k) \qquad b_3 = \sum_{k=1}^{11} \phi_3(x_k)f(x_k) = \sum_{k=1}^{11} \cos(3.9x_k)f(x_k)$$

Os cálculos dos somatório acima irão gerar os valores apresentados no sistema linear a seguir.

$$\begin{bmatrix} 78.65000 & 2.61854 & 2.52125 \\ 2.61854 & 5.25679 & -0.50282 \\ 2.52125 & -0.50282 & 5.37081 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75.46772 \\ -2.59244 \\ 7.84796 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.95916 \\ -0.88210 \\ 0.92862 \end{bmatrix}$$

Portanto, a função de ajuste $g(x)$ é dada por

$$g(x) = 0.95916\, x - 0.88210\, \cos(2.1\, x) + 0.92862\, \cos(3.9\, x).$$

Agora para fazer um ajuste dos dados da tabela por um polinômio de grau 5

$$g(x) = \alpha_1 + \alpha_2\, x + \alpha_3\, x^2 + \alpha_4\, x^3 + +\alpha_5\, x^4 + \alpha_6\, x^5$$

é necessário resolver um sistema linear com 6 equações e 6 incógnitas para determinar α_i, $i = 1, \dots, 6$, sendo que $\phi_i(x) = x^{i-1}$, também para $i = 1, \dots, 6$. Nesse caso, o polinômio de ajuste é dado por

$$g(x) = 54.69888 - 155.80818x + 164.73037x^2 - 79.16936x^3 + 17.60145x^4 - 1.467332x^5.$$

A página seguinte são apresentados os gráficos dessas duas funções de ajuste juntamente com os pontos da tabela.

Abaixo é apresentado, **na cor vermelha**, a função $g(x) = 0.95916\,x - 0.88210\cos(2.1\,x) + 0.92862\,\mathrm{sen}(3.9\,x)$. sendo **na cor verde** a função $g(x) = 54.69888 - 155.80818x + 164.73037x^2 - 79.16936x^3 + 17.60145x^4 - 1.467332x^5.$ Os dados da tabela são os círculos **na cor azul**.

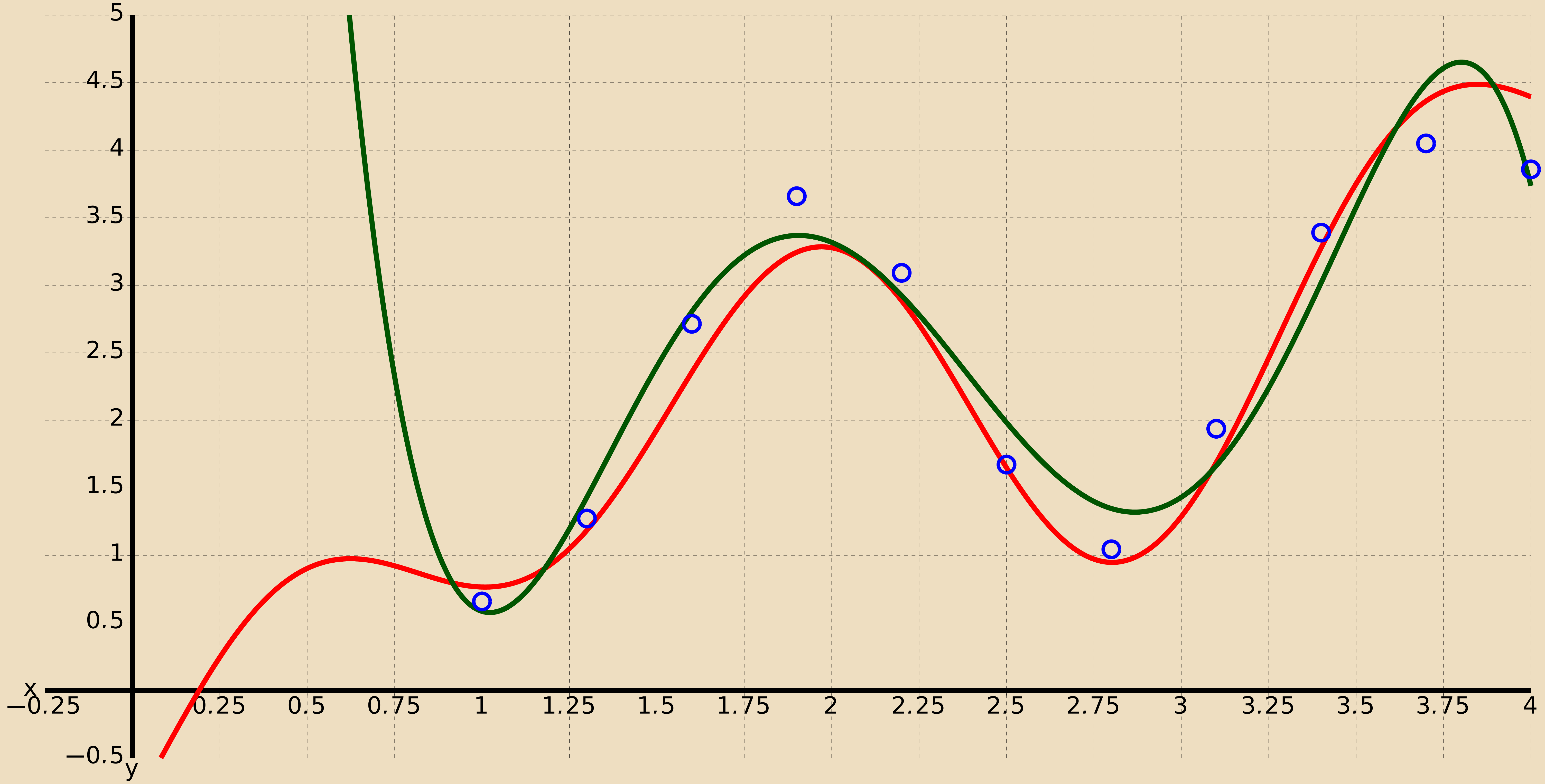


Figura 1: Gráficos das funções de ajuste com os pontos da tabela.