Cálculo Numérico

Interpolação Polinomial

Interpolação Polinomial via Forma de Lagrange

Alessandro Alves Santana

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Fundamentos

Definição 1: Polinômio Interpolador via Forma de Lagrange

A forma de Lagrange para o polinômio que interpola uma função $f(x)$ em $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ é dado por

$$p_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + \cdots + L_n(x)f(x_n) \tag{1}$$

sendo

$$L_k(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x - x_i)}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i)}. \tag{2}$$

As funções $L_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, fornecem pesos nas avaliações de $p_n(x)$ para valores de x.

Fundamentos

Definição 1: Polinômio Interpolador via Forma de Lagrange

A forma de Lagrange para o polinômio que interpola uma função $f(x)$ em $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ é dado por

$$p_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + \cdots + L_n(x)f(x_n) \tag{1}$$

sendo

$$L_k(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n}(x - x_i)}{\prod\limits_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n}(x_k - x_i)}. \tag{2}$$

As funções $L_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$, fornecem pesos nas avaliações de $p_n(x)$ para valores de x.

Observação 1: Sobre as Funções Peso $L_k(x)$

Abrindo os polinômios $L_k(x)$, temos que

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)(x_k - x_2)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}. \tag{3}$$

Pode se notar que

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq k \\ 1 & \text{se } i = k \end{cases} \tag{4}$$

Dessa forma, temos garantia que $p_n(x_i) = f(x_i)$ em cada um dos pontos de interpolação.

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo e obtenha uma aproximação para o valor de $f(1.6)$ usando um polinômio de grau 2 utilizando interpolação polinomial via Forma de Lagrange.

x	0.5	0.9	1.7	2.5	3.0
$f(x)$	0.52	0.12	0.37	0.30	0.29

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo e obtenha uma aproximação para o valor de $f(1.6)$ usando um polinômio de grau 2 utilizando interpolação polinomial via Forma de Lagrange.

x	0.5	0.9	1.7	2.5	3.0
$f(x)$	0.52	0.12	0.37	0.30	0.29

Resolução: Para obter uma aproximação por um polinômio de grau 2, deve se considerar 3 pontos consecutivos da tabela acima de tal forma que:

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo e obtenha uma aproximação para o valor de $f(1.6)$ usando um polinômio de grau 2 utilizando interpolação polinomial via Forma de Lagrange.

x	0.5	0.9	1.7	2.5	3.0
$f(x)$	0.52	0.12	0.37	0.30	0.29

Resolução: Para obter uma aproximação por um polinômio de grau 2, deve se considerar 3 pontos consecutivos da tabela acima de tal forma que:

- O valor de x, o qual se quer estimar $f(x)$, deve estar entre os três pontos consecutivos.

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo e obtenha uma aproximação para o valor de $f(1.6)$ usando um polinômio de grau 2 utilizando interpolação polinomial via Forma de Lagrange.

x	0.5	0.9	1.7	2.5	3.0
$f(x)$	0.52	0.12	0.37	0.30	0.29

Resolução: Para obter uma aproximação por um polinômio de grau 2, deve se considerar 3 pontos consecutivos da tabela acima de tal forma que:

- O valor de x, o qual se quer estimar $f(x)$, deve estar entre os três pontos consecutivos.
- A distância entre os extremos desses 3 pontos consecutivos seja a menor possível para minimizar o erro na estimativa.

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo e obtenha uma aproximação para o valor de $f(1.6)$ usando um polinômio de grau 2 utilizando interpolação polinomial via Forma de Lagrange.

x	0.5	0.9	1.7	2.5	3.0
$f(x)$	0.52	0.12	0.37	0.30	0.29

Resolução: Para obter uma aproximação por um polinômio de grau 2, deve se considerar 3 pontos consecutivos da tabela acima de tal forma que:

- O valor de x, o qual se quer estimar $f(x)$, deve estar entre os três pontos consecutivos.
- A distância entre os extremos desses 3 pontos consecutivos seja a menor possível para minimizar o erro na estimativa.

Analisando a tabela dada, devemos considerar os seguintes pontos com seus respectivos valores:

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo e obtenha uma aproximação para o valor de $f(1.6)$ usando um polinômio de grau 2 utilizando interpolação polinomial via Forma de Lagrange.

x	0.5	0.9	1.7	2.5	3.0
$f(x)$	0.52	0.12	0.37	0.30	0.29

Resolução: Para obter uma aproximação por um polinômio de grau 2, deve se considerar 3 pontos consecutivos da tabela acima de tal forma que:

- O valor de x, o qual se quer estimar $f(x)$, deve estar entre os três pontos consecutivos.
- A distância entre os extremos desses 3 pontos consecutivos seja a menor possível para minimizar o erro na estimativa.

Analisando a tabela dada, devemos considerar os seguintes pontos com seus respectivos valores:

x	0.5	0.9	1.7
$f(x)$	0.52	0.12	0.37

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo e obtenha uma aproximação para o valor de $f(1.6)$ usando um polinômio de grau 2 utilizando interpolação polinomial via Forma de Lagrange.

x	0.5	0.9	1.7	2.5	3.0
$f(x)$	0.52	0.12	0.37	0.30	0.29

Resolução: Para obter uma aproximação por um polinômio de grau 2, deve se considerar 3 pontos consecutivos da tabela acima de tal forma que:

- O valor de x, o qual se quer estimar $f(x)$, deve estar entre os três pontos consecutivos.
- A distância entre os extremos desses 3 pontos consecutivos seja a menor possível para minimizar o erro na estimativa.

Analisando a tabela dada, devemos considerar os seguintes pontos com seus respectivos valores:

x	0.5	0.9	1.7
$f(x)$	0.52	0.12	0.37

Calculando os polinômios $L_k(x)$:

$$\left\{ \right.$$

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo e obtenha uma aproximação para o valor de $f(1.6)$ usando um polinômio de grau 2 utilizando interpolação polinomial via Forma de Lagrange.

x	0.5	0.9	1.7	2.5	3.0
$f(x)$	0.52	0.12	0.37	0.30	0.29

Resolução: Para obter uma aproximação por um polinômio de grau 2, deve se considerar 3 pontos consecutivos da tabela acima de tal forma que:

- O valor de x, o qual se quer estimar $f(x)$, deve estar entre os três pontos consecutivos.
- A distância entre os extremos desses 3 pontos consecutivos seja a menor possível para minimizar o erro na estimativa.

Analisando a tabela dada, devemos considerar os seguintes pontos com seus respectivos valores:

x	0.5	0.9	1.7
$f(x)$	0.52	0.12	0.37

Calculando os polinômios $L_k(x)$:

$$\begin{cases} L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \end{cases}$$

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo e obtenha uma aproximação para o valor de $f(1.6)$ usando um polinômio de grau 2 utilizando interpolação polinomial via Forma de Lagrange.

x	0.5	0.9	1.7	2.5	3.0
$f(x)$	0.52	0.12	0.37	0.30	0.29

Resolução: Para obter uma aproximação por um polinômio de grau 2, deve se considerar 3 pontos consecutivos da tabela acima de tal forma que:

- O valor de x, o qual se quer estimar $f(x)$, deve estar entre os três pontos consecutivos.
- A distância entre os extremos desses 3 pontos consecutivos seja a menor possível para minimizar o erro na estimativa.

Analisando a tabela dada, devemos considerar os seguintes pontos com seus respectivos valores:

x	0.5	0.9	1.7
$f(x)$	0.52	0.12	0.37

Calculando os polinômios $L_k(x)$:

$$\begin{cases} L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \xrightarrow{x=1.6} \end{cases}$$

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo e obtenha uma aproximação para o valor de $f(1.6)$ usando um polinômio de grau 2 utilizando interpolação polinomial via Forma de Lagrange.

x	0.5	0.9	1.7	2.5	3.0
$f(x)$	0.52	0.12	0.37	0.30	0.29

Resolução: Para obter uma aproximação por um polinômio de grau 2, deve se considerar 3 pontos consecutivos da tabela acima de tal forma que:

- O valor de x, o qual se quer estimar $f(x)$, deve estar entre os três pontos consecutivos.
- A distância entre os extremos desses 3 pontos consecutivos seja a menor possível para minimizar o erro na estimativa.

Analisando a tabela dada, devemos considerar os seguintes pontos com seus respectivos valores:

x	0.5	0.9	1.7
$f(x)$	0.52	0.12	0.37

Calculando os polinômios $L_k(x)$:

$$\left\{ L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \xrightarrow{x=1.6} L_0(1.6) = \frac{(1.6-0.9)(1.6-1.7)}{(0.5-0.9)(0.5-1.7)} \right.$$

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo e obtenha uma aproximação para o valor de $f(1.6)$ usando um polinômio de grau 2 utilizando interpolação polinomial via Forma de Lagrange.

x	0.5	0.9	1.7	2.5	3.0
$f(x)$	0.52	0.12	0.37	0.30	0.29

Resolução: Para obter uma aproximação por um polinômio de grau 2, deve se considerar 3 pontos consecutivos da tabela acima de tal forma que:

- O valor de x, o qual se quer estimar $f(x)$, deve estar entre os três pontos consecutivos.
- A distância entre os extremos desses 3 pontos consecutivos seja a menor possível para minimizar o erro na estimativa.

Analisando a tabela dada, devemos considerar os seguintes pontos com seus respectivos valores:

x	0.5	0.9	1.7
$f(x)$	0.52	0.12	0.37

Calculando os polinômios $L_k(x)$:

$$\begin{cases} L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \xrightarrow{x=1.6} L_0(1.6) = \dfrac{(1.6-0.9)(1.6-1.7)}{(0.5-0.9)(0.5-1.7)} \Rightarrow \end{cases}$$

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo e obtenha uma aproximação para o valor de $f(1.6)$ usando um polinômio de grau 2 utilizando interpolação polinomial via Forma de Lagrange.

x	0.5	0.9	1.7	2.5	3.0
$f(x)$	0.52	0.12	0.37	0.30	0.29

Resolução: Para obter uma aproximação por um polinômio de grau 2, deve se considerar 3 pontos consecutivos da tabela acima de tal forma que:

- O valor de x, o qual se quer estimar $f(x)$, deve estar entre os três pontos consecutivos.
- A distância entre os extremos desses 3 pontos consecutivos seja a menor possível para minimizar o erro na estimativa.

Analisando a tabela dada, devemos considerar os seguintes pontos com seus respectivos valores:

x	0.5	0.9	1.7
$f(x)$	0.52	0.12	0.37

Calculando os polinômios $L_k(x)$:

$$\left\{ L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \xrightarrow{x=1.6} L_0(1.6) = \frac{(1.6-0.9)(1.6-1.7)}{(0.5-0.9)(0.5-1.7)} \Rightarrow L_0(1.6) = -0.14583 \right.$$

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo e obtenha uma aproximação para o valor de $f(1.6)$ usando um polinômio de grau 2 utilizando interpolação polinomial via Forma de Lagrange.

x	0.5	0.9	1.7	2.5	3.0
$f(x)$	0.52	0.12	0.37	0.30	0.29

Resolução: Para obter uma aproximação por um polinômio de grau 2, deve se considerar 3 pontos consecutivos da tabela acima de tal forma que:

- O valor de x, o qual se quer estimar $f(x)$, deve estar entre os três pontos consecutivos.
- A distância entre os extremos desses 3 pontos consecutivos seja a menor possível para minimizar o erro na estimativa.

Analisando a tabela dada, devemos considerar os seguintes pontos com seus respectivos valores:

x	0.5	0.9	1.7
$f(x)$	0.52	0.12	0.37

Calculando os polinômios $L_k(x)$:

$$\begin{cases} L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \xrightarrow{x=1.6} L_0(1.6) = \dfrac{(1.6-0.9)(1.6-1.7)}{(0.5-0.9)(0.5-1.7)} \Rightarrow L_0(1.6) = -0.14583 \\ L_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \end{cases}$$

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo e obtenha uma aproximação para o valor de $f(1.6)$ usando um polinômio de grau 2 utilizando interpolação polinomial via Forma de Lagrange.

x	0.5	0.9	1.7	2.5	3.0
$f(x)$	0.52	0.12	0.37	0.30	0.29

Resolução: Para obter uma aproximação por um polinômio de grau 2, deve se considerar 3 pontos consecutivos da tabela acima de tal forma que:

- O valor de x, o qual se quer estimar $f(x)$, deve estar entre os três pontos consecutivos.
- A distância entre os extremos desses 3 pontos consecutivos seja a menor possível para minimizar o erro na estimativa.

Analisando a tabela dada, devemos considerar os seguintes pontos com seus respectivos valores:

x	0.5	0.9	1.7
$f(x)$	0.52	0.12	0.37

Calculando os polinômios $L_k(x)$:

$$\begin{cases} L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \xrightarrow{x=1.6} L_0(1.6) = \dfrac{(1.6-0.9)(1.6-1.7)}{(0.5-0.9)(0.5-1.7)} \Rightarrow L_0(1.6) = -0.14583 \\ L_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \xrightarrow{x=1.6} \end{cases}$$

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo e obtenha uma aproximação para o valor de $f(1.6)$ usando um polinômio de grau 2 utilizando interpolação polinomial via Forma de Lagrange.

x	0.5	0.9	1.7	2.5	3.0
$f(x)$	0.52	0.12	0.37	0.30	0.29

Resolução: Para obter uma aproximação por um polinômio de grau 2, deve se considerar 3 pontos consecutivos da tabela acima de tal forma que:

- O valor de x, o qual se quer estimar $f(x)$, deve estar entre os três pontos consecutivos.
- A distância entre os extremos desses 3 pontos consecutivos seja a menor possível para minimizar o erro na estimativa.

Analisando a tabela dada, devemos considerar os seguintes pontos com seus respectivos valores:

x	0.5	0.9	1.7
$f(x)$	0.52	0.12	0.37

Calculando os polinômios $L_k(x)$:

$$\begin{cases} L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \xrightarrow{x=1.6} L_0(1.6) = \dfrac{(1.6-0.9)(1.6-1.7)}{(0.5-0.9)(0.5-1.7)} \Rightarrow L_0(1.6) = -0.14583 \\ L_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \xrightarrow{x=1.6} L_1(1.6) = \dfrac{(1.6-0.5)(1.6-1.7)}{(0.9-0.5)(0.9-1.7)} \end{cases}$$

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo e obtenha uma aproximação para o valor de $f(1.6)$ usando um polinômio de grau 2 utilizando interpolação polinomial via Forma de Lagrange.

x	0.5	0.9	1.7	2.5	3.0
$f(x)$	0.52	0.12	0.37	0.30	0.29

Resolução: Para obter uma aproximação por um polinômio de grau 2, deve se considerar 3 pontos consecutivos da tabela acima de tal forma que:

- O valor de x, o qual se quer estimar $f(x)$, deve estar entre os três pontos consecutivos.
- A distância entre os extremos desses 3 pontos consecutivos seja a menor possível para minimizar o erro na estimativa.

Analisando a tabela dada, devemos considerar os seguintes pontos com seus respectivos valores:

x	0.5	0.9	1.7
$f(x)$	0.52	0.12	0.37

Calculando os polinômios $L_k(x)$:

$$\begin{cases} L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \xrightarrow{x=1.6} L_0(1.6) = \dfrac{(1.6-0.9)(1.6-1.7)}{(0.5-0.9)(0.5-1.7)} \Rightarrow L_0(1.6) = -0.14583 \\ L_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \xrightarrow{x=1.6} L_1(1.6) = \dfrac{(1.6-0.5)(1.6-1.7)}{(0.9-0.5)(0.9-1.7)} \Rightarrow L_1(1.6) = 0.34375 \\ \end{cases}$$

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo e obtenha uma aproximação para o valor de $f(1.6)$ usando um polinômio de grau 2 utilizando interpolação polinomial via Forma de Lagrange.

x	0.5	0.9	1.7	2.5	3.0
$f(x)$	0.52	0.12	0.37	0.30	0.29

Resolução: Para obter uma aproximação por um polinômio de grau 2, deve se considerar 3 pontos consecutivos da tabela acima de tal forma que:

- O valor de x, o qual se quer estimar $f(x)$, deve estar entre os três pontos consecutivos.
- A distância entre os extremos desses 3 pontos consecutivos seja a menor possível para minimizar o erro na estimativa.

Analisando a tabela dada, devemos considerar os seguintes pontos com seus respectivos valores:

x	0.5	0.9	1.7
$f(x)$	0.52	0.12	0.37

Calculando os polinômios $L_k(x)$:

$$\begin{cases} L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \xrightarrow{x=1.6} L_0(1.6) = \dfrac{(1.6-0.9)(1.6-1.7)}{(0.5-0.9)(0.5-1.7)} \Rightarrow L_0(1.6) = -0.14583 \\ L_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \xrightarrow{x=1.6} L_1(1.6) = \dfrac{(1.6-0.5)(1.6-1.7)}{(0.9-0.5)(0.9-1.7)} \Rightarrow L_1(1.6) = 0.34375 \\ L_2(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \end{cases}$$

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo e obtenha uma aproximação para o valor de $f(1.6)$ usando um polinômio de grau 2 utilizando interpolação polinomial via Forma de Lagrange.

x	0.5	0.9	1.7	2.5	3.0
$f(x)$	0.52	0.12	0.37	0.30	0.29

Resolução: Para obter uma aproximação por um polinômio de grau 2, deve se considerar 3 pontos consecutivos da tabela acima de tal forma que:

- O valor de x, o qual se quer estimar $f(x)$, deve estar entre os três pontos consecutivos.
- A distância entre os extremos desses 3 pontos consecutivos seja a menor possível para minimizar o erro na estimativa.

Analisando a tabela dada, devemos considerar os seguintes pontos com seus respectivos valores:

x	0.5	0.9	1.7
$f(x)$	0.52	0.12	0.37

Calculando os polinômios $L_k(x)$:

$$\begin{cases} L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \xrightarrow{x=1.6} L_0(1.6) = \dfrac{(1.6-0.9)(1.6-1.7)}{(0.5-0.9)(0.5-1.7)} \Rightarrow L_0(1.6) = -0.14583 \\ L_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \xrightarrow{x=1.6} L_1(1.6) = \dfrac{(1.6-0.5)(1.6-1.7)}{(0.9-0.5)(0.9-1.7)} \Rightarrow L_1(1.6) = 0.34375 \\ L_2(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \xrightarrow{x=1.6} \end{cases}$$

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo e obtenha uma aproximação para o valor de $f(1.6)$ usando um polinômio de grau 2 utilizando interpolação polinomial via Forma de Lagrange.

x	0.5	0.9	1.7	2.5	3.0
$f(x)$	0.52	0.12	0.37	0.30	0.29

Resolução: Para obter uma aproximação por um polinômio de grau 2, deve se considerar 3 pontos consecutivos da tabela acima de tal forma que:

- O valor de x, o qual se quer estimar $f(x)$, deve estar entre os três pontos consecutivos.
- A distância entre os extremos desses 3 pontos consecutivos seja a menor possível para minimizar o erro na estimativa.

Analisando a tabela dada, devemos considerar os seguintes pontos com seus respectivos valores:

x	0.5	0.9	1.7
$f(x)$	0.52	0.12	0.37

Calculando os polinômios $L_k(x)$:

$$\begin{cases} L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \xrightarrow{x=1.6} L_0(1.6) = \dfrac{(1.6-0.9)(1.6-1.7)}{(0.5-0.9)(0.5-1.7)} \Rightarrow L_0(1.6) = -0.14583 \\ L_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \xrightarrow{x=1.6} L_1(1.6) = \dfrac{(1.6-0.5)(1.6-1.7)}{(0.9-0.5)(0.9-1.7)} \Rightarrow L_1(1.6) = 0.34375 \\ L_2(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \xrightarrow{x=1.6} L_2(1.6) = \dfrac{(1.6-0.5)(1.6-0.9)}{(1.7-0.5)(1.7-0.9)} \end{cases}$$

Exemplo 1

Considere a tabela abaixo e obtenha uma aproximação para o valor de $f(1.6)$ usando um polinômio de grau 2 utilizando interpolação polinomial via Forma de Lagrange.

x	0.5	0.9	1.7	2.5	3.0
$f(x)$	0.52	0.12	0.37	0.30	0.29

Resolução: Para obter uma aproximação por um polinômio de grau 2, deve se considerar 3 pontos consecutivos da tabela acima de tal forma que:

- O valor de x, o qual se quer estimar $f(x)$, deve estar entre os três pontos consecutivos.
- A distância entre os extremos desses 3 pontos consecutivos seja a menor possível para minimizar o erro na estimativa.

Analisando a tabela dada, devemos considerar os seguintes pontos com seus respectivos valores:

x	0.5	0.9	1.7
$f(x)$	0.52	0.12	0.37

Calculando os polinômios $L_k(x)$:

$$\begin{cases} L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \xrightarrow{x=1.6} L_0(1.6) = \dfrac{(1.6-0.9)(1.6-1.7)}{(0.5-0.9)(0.5-1.7)} \Rightarrow L_0(1.6) = -0.14583 \\ L_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \xrightarrow{x=1.6} L_1(1.6) = \dfrac{(1.6-0.5)(1.6-1.7)}{(0.9-0.5)(0.9-1.7)} \Rightarrow L_1(1.6) = 0.34375 \\ L_2(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \xrightarrow{x=1.6} L_2(1.6) = \dfrac{(1.6-0.5)(1.6-0.9)}{(1.7-0.5)(1.7-0.9)} \Rightarrow L_2(1.6) = 0.80208 \end{cases}$$

Avaliando agora o polinômio,

Avaliando agora o polinômio,

$$\begin{aligned} p_2(1.6) &= L_0(1.6)f(0.5) + L_1(1.6)f(0.9) + L_2(1.6)f(1.7) \\ p_2(1.6) &= (-0.14583)(0.52) + (0.34375)(0.12) + (0.80208)(0.37) \\ p_2(1.6) &= 0.26219 \end{aligned}$$

Portanto, temos que $\boldsymbol{f(1.6) \approx p_2(1.6) = 0.26219}$.

Avaliando agora o polinômio,

$$
\begin{aligned}
p_2(1.6) &= L_0(1.6)f(0.5) + L_1(1.6)f(0.9) + L_2(1.6)f(1.7) \\
p_2(1.6) &= (-0.14583)(0.52) + (0.34375)(0.12) + (0.80208)(0.37) \\
p_2(1.6) &= 0.26219
\end{aligned}
$$

Portanto, temos que $\boldsymbol{f(1.6) \approx p_2(1.6) = 0.26219}$.

Exemplo 2

Obtenha o polinômio de grau 2 que interpola a função $f(x) = \sqrt{x+1}$ nos pontos $x_0 = 0$, $x_1 = 0.6$ e $x_2 = 0.9$ via Forma de Lagrange e obtenha uma aproximação para $f(0.4)$ e $f(0.7)$ utilizando esse polinômio. Faça o gráfico do polinômio obtido, dos pontos dados $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, 2$ e da função $f(x)$. Trabalhe com 5 casas decimais.

Avaliando agora o polinômio,

$$\begin{aligned} p_2(1.6) &= L_0(1.6)f(0.5) + L_1(1.6)f(0.9) + L_2(1.6)f(1.7) \\ p_2(1.6) &= (-0.14583)(0.52) + (0.34375)(0.12) + (0.80208)(0.37) \\ p_2(1.6) &= 0.26219 \end{aligned}$$

Portanto, temos que $\boldsymbol{f(1.6) \approx p_2(1.6) = 0.26219}$.

Exemplo 2

Obtenha o polinômio de grau 2 que interpola a função $f(x) = \sqrt{x+1}$ nos pontos $x_0 = 0$, $x_1 = 0.6$ e $x_2 = 0.9$ via Forma de Lagrange e obtenha uma aproximação para $f(0.4)$ e $f(0.7)$ utilizando esse polinômio. Faça o gráfico do polinômio obtido, dos pontos dados $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, 2$ e da função $f(x)$. Trabalhe com 5 casas decimais.

Resolução: Montando a tabela de valores, segue que

x	0.0	0.6	0.9
$f(x)$	1.00000	1.26491	1.37840

Como são três pontos, o grau máximo do polinômio interpolador é 2. Para obter esse polinômio, via Forma de Lagrange, temos que

$$\begin{aligned} p_2(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \\ p_2(x) &= L_0(x) + 1.26491L_1(x) + 1.37840L_2(x) \end{aligned} . \qquad (5)$$

Calculando, $L_0(x)$, $L_1(x)$ e $L_2(x)$, segue que

$$\begin{cases} L_0(x) = \dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = 1.85185x^2 - 2.77778x + 1 \\ L_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = -5.55556x^2 + 5x \\ L_2(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = 3.70370x^2 - 2.22222x \end{cases} \qquad (6)$$

Substituindo (6) em (5),

$$p_2(x) = -0.07023x^2 + 0.48366x + 1. \qquad (7)$$

Para $x = 0.4$, temos que $f(0.4) \approx p_2(0.4)$, o que implica em $f(0.4) \approx 1.18223$ e $f(0.7) \approx p_2(0.7)$ leva a $f(0.7) \approx 1.30415$.

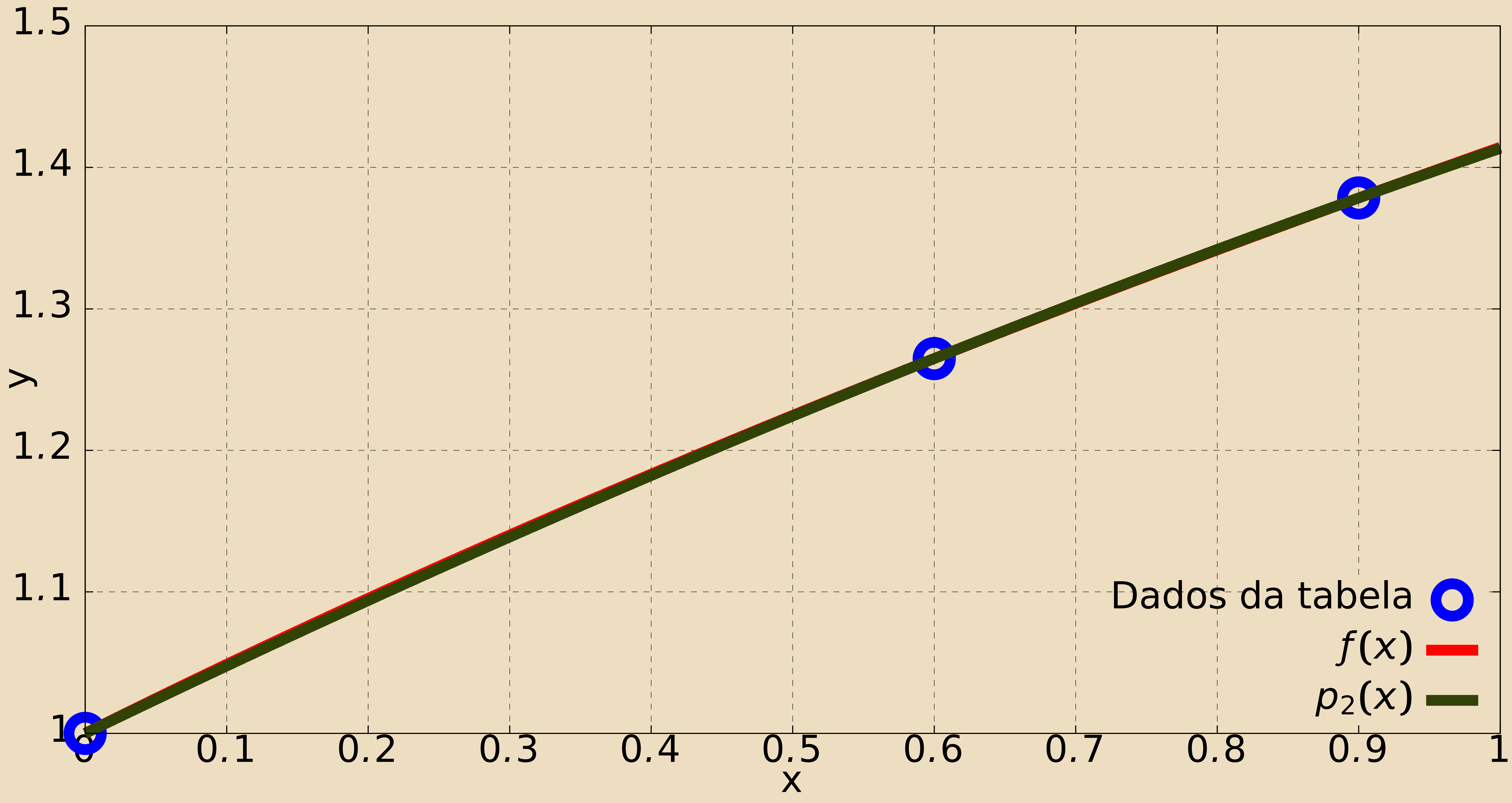

Figura 1: Gráficos de $f(x) = \sqrt{x+1}$, $p_2(x) = -0.07023x^2 + 0.48366x + 1$ com os pontos de interpolação.