Cálculo Numérico

Ajuste de Curvas

Caso Não Linear

Alessandro Alves Santana

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Fundamentos

Quando se ajusta uma curva via MMQ uma função $f(x)$ com valores tabelados por uma função

$$g(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x) + \alpha_3\phi_3(x) + \cdots + \alpha_m\phi_m(x)$$

dizemos estamos lidando com um caso linear pois os parâmetros α_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, a serem estimados aparecem linearmente na expressão de $g(x)$ e $\phi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, só depende da variável independente x. Agora, quando o $\phi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, depende também do parâmetro a ser estimado, dizemos que o caso é não-linear.

Por exemplo, se os dados de uma função $f(x)$ tabelada é melhor ajustada por uma função da forma

$$g(x) = \alpha_1\phi_1(\alpha_2 x) + \alpha_3\phi_2(\alpha_4 x)$$

estamos diante de um caso não linear pois $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$ dependem, respectivamente, dos parâmetros α_2 e α_4 que precisam serem estimados. Nessa situação, para aplicar o MMQ é necessário antes linearizar a função de ajuste.

Processo de Linearização

A linearlização é um processo baseado em manipulação analítica da expressão da função que se tem interesse em utilizar para fazer o ajuste dos dados da tabela. **Existem funções em que é possível fazer a linearilização e existem outras que não**. O que será apresentado a seguir é um conjunto de exemplos para ajudar a orientá-los no processo de linearização. Uma vez que a função tenha sido linearizada, isto é, transformado em uma expressão da forma

$$g(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x) + \alpha_3\phi_3(x) + \cdots + \alpha_m\phi_m(x)$$

o resto processo para obtenção dos parâmetros α_i, $i = 1, \ldots, m$, é o mesmo processo que foi utilizado no caso discreto. **Mas lembre-se sempre de no final voltar aos parâmetros originais, aqueles que eram o alvo do processo de ajuste.**

1º Exemplo: $f(x) = ae^{bx}$:

1º Exemplo: $f(x) = ae^{bx}$:

$$f(x) = ae^{bx}$$

1º Exemplo: $f(x) = ae^{bx}$:

$$f(x) = ae^{bx} \Rightarrow$$

1º Exemplo: $f(x) = ae^{bx}$:

$$f(x) = ae^{bx} \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln\left(ae^{bx}\right)$$

1º Exemplo: $f(x) = ae^{bx}$:

$$f(x) = ae^{bx} \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln\left(ae^{bx}\right) \Rightarrow$$

1º Exemplo: $f(x) = ae^{bx}$:

$$f(x) = ae^{bx} \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln\left(ae^{bx}\right) \Rightarrow \overbrace{\ln[f(x)]}^{F(x)} = \overbrace{\ln(a)}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

1º Exemplo: $f(x) = ae^{bx}$:

$$f(x) = ae^{bx} \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln\left(ae^{bx}\right) \Rightarrow \overbrace{\ln[f(x)]}^{F(x)} = \overbrace{\ln(a)}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)}$$

1º Exemplo: $f(x) = ae^{bx}$:

$$f(x) = ae^{bx} \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln\left(ae^{bx}\right) \Rightarrow \overbrace{\ln[f(x)]}^{F(x)} = \overbrace{\ln(a)}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)} \text{ onde}$$

1º Exemplo: $f(x) = ae^{bx}$:

$$f(x) = ae^{bx} \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln\left(ae^{bx}\right) \Rightarrow \overbrace{\ln[f(x)]}^{F(x)} = \overbrace{\ln(a)}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)} \text{ onde } \boxed{\begin{array}{ll} F(x) = \ln[f(x)] & \\ \alpha_1 = \ln(a) & \phi_1(x) = 1 \\ \alpha_2 = b & \phi_2(x) = x \end{array}}$$

2º Exemplo: $f(x) = ab^x$:

1º Exemplo: $f(x) = ae^{bx}$:

$$f(x) = ae^{bx} \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln\left(ae^{bx}\right) \Rightarrow \overbrace{\ln[f(x)]}^{F(x)} = \overbrace{\ln(a)}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)} \text{ onde } \boxed{\begin{array}{ll} F(x) = \ln[f(x)] & \\ \alpha_1 = \ln(a) & \phi_1(x) = 1 \\ \alpha_2 = b & \phi_2(x) = x \end{array}}$$

2º Exemplo: $f(x) = ab^x$:

$$f(x) = ab^x$$

1º Exemplo: $f(x) = ae^{bx}$:

$$f(x) = ae^{bx} \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln\left(ae^{bx}\right) \Rightarrow \overbrace{\ln[f(x)]}^{F(x)} = \overbrace{\ln(a)}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)} \text{ onde } \boxed{\begin{array}{ll} F(x) = \ln[f(x)] & \\ \alpha_1 = \ln(a) & \phi_1(x) = 1 \\ \alpha_2 = b & \phi_2(x) = x \end{array}}$$

2º Exemplo: $f(x) = ab^x$:

$$f(x) = ab^x \Rightarrow$$

1º Exemplo: $f(x) = ae^{bx}$:

$$f(x) = ae^{bx} \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln\left(ae^{bx}\right) \Rightarrow \overbrace{\ln[f(x)]}^{F(x)} = \overbrace{\ln(a)}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)} \text{ onde } \boxed{\begin{array}{ll} F(x) = \ln[f(x)] & \\ \alpha_1 = \ln(a) & \phi_1(x) = 1 \\ \alpha_2 = b & \phi_2(x) = x \end{array}}$$

2º Exemplo: $f(x) = ab^x$:

$$f(x) = ab^x \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln\left(ab^x\right)$$

1º Exemplo: $f(x) = ae^{bx}$:

$$f(x) = ae^{bx} \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln\left(ae^{bx}\right) \Rightarrow \overbrace{\ln[f(x)]}^{F(x)} = \overbrace{\ln(a)}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)} \text{ onde } \boxed{\begin{array}{ll} F(x) = \ln[f(x)] & \\ \alpha_1 = \ln(a) & \phi_1(x) = 1 \\ \alpha_2 = b & \phi_2(x) = x \end{array}}$$

2º Exemplo: $f(x) = ab^{x}$:

$$f(x) = ab^{x} \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln\left(ab^{x}\right) \Rightarrow$$

1º Exemplo: $f(x) = ae^{bx}$:

$$f(x) = ae^{bx} \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln\left(ae^{bx}\right) \Rightarrow \overbrace{\ln[f(x)]}^{F(x)} = \overbrace{\ln(a)}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)} \text{ onde } \boxed{\begin{array}{ll} F(x) = \ln[f(x)] & \\ \alpha_1 = \ln(a) & \phi_1(x) = 1 \\ \alpha_2 = b & \phi_2(x) = x \end{array}}$$

2º Exemplo: $f(x) = ab^x$:

$$f(x) = ab^x \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln\left(ab^x\right) \Rightarrow \overbrace{\ln[f(x)]}^{F(x)} = \overbrace{\ln(a)}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{\ln(b)}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

1º Exemplo: $f(x) = ae^{bx}$:

$$f(x) = ae^{bx} \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln\left(ae^{bx}\right) \Rightarrow \overbrace{\ln[f(x)]}^{F(x)} = \overbrace{\ln(a)}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)} \text{ onde } \boxed{\begin{array}{ll} F(x) = \ln[f(x)] & \\ \alpha_1 = \ln(a) & \phi_1(x) = 1 \\ \alpha_2 = b & \phi_2(x) = x \end{array}}$$

2º Exemplo: $f(x) = ab^x$:

$$f(x) = ab^x \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln\left(ab^x\right) \Rightarrow \overbrace{\ln[f(x)]}^{F(x)} = \overbrace{\ln(a)}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{\ln(b)}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)}$$

1º Exemplo: $f(x) = ae^{bx}$:

$$f(x) = ae^{bx} \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln\left(ae^{bx}\right) \Rightarrow \overbrace{\ln[f(x)]}^{F(x)} = \overbrace{\ln(a)}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)} \text{ onde } \boxed{\begin{array}{ll} F(x) = \ln[f(x)] & \\ \alpha_1 = \ln(a) & \phi_1(x) = 1 \\ \alpha_2 = b & \phi_2(x) = x \end{array}}$$

2º Exemplo: $f(x) = ab^x$:

$$f(x) = ab^x \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln\left(ab^x\right) \Rightarrow \overbrace{\ln[f(x)]}^{F(x)} = \overbrace{\ln(a)}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{\ln(b)}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)} \text{ onde}$$

1º Exemplo: $f(x) = ae^{bx}$:

$$f(x) = ae^{bx} \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln\left(ae^{bx}\right) \Rightarrow \overbrace{\ln[f(x)]}^{F(x)} = \overbrace{\ln(a)}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)} \text{ onde } \boxed{\begin{array}{ll} F(x) = \ln[f(x)] & \\ \alpha_1 = \ln(a) & \phi_1(x) = 1 \\ \alpha_2 = b & \phi_2(x) = x \end{array}}$$

2º Exemplo: $f(x) = ab^{x}$:

$$f(x) = ab^{x} \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln\left(ab^{x}\right) \Rightarrow \overbrace{\ln[f(x)]}^{F(x)} = \overbrace{\ln(a)}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{\ln(b)}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)} \text{ onde } \boxed{\begin{array}{ll} F(x) = \ln[f(x)] & \\ \alpha_1 = \ln(a) & \phi_1(x) = 1 \\ \alpha_2 = \ln(b) & \phi_2(x) = x \end{array}}$$

3º Exemplo: $f(x) = \sqrt{a + bx}$:

3º Exemplo: $f(x) = \sqrt{a+bx}$:

$$f(x) = \sqrt{a+bx}$$

3º Exemplo: $f(x) = \sqrt{a + bx}$:

$$f(x) = \sqrt{a + bx} \Rightarrow$$

3º Exemplo: $f(x) = \sqrt{a + bx}$:

$$f(x) = \sqrt{a + bx} \Rightarrow [f(x)]^2 = a + bx$$

3º Exemplo: $f(x) = \sqrt{a + bx}$:

$$f(x) = \sqrt{a + bx} \Rightarrow [f(x)]^2 = a + bx \Rightarrow$$

3º Exemplo: $f(x) = \sqrt{a + bx}$:

$$f(x) = \sqrt{a+bx} \Rightarrow [f(x)]^2 = a + bx \Rightarrow \overbrace{[f(x)]^2}^{F(x)} = \overbrace{a}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

3º Exemplo: $f(x) = \sqrt{a+bx}$:

$$f(x) = \sqrt{a+bx} \Rightarrow [f(x)]^2 = a + bx \Rightarrow \overbrace{[f(x)]^2}^{F(x)} = \overbrace{a}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1 \phi_1(x) + \alpha_2 \phi_2(x)}$$

3º Exemplo: $f(x) = \sqrt{a+bx}$:

$$f(x) = \sqrt{a+bx} \Rightarrow [f(x)]^2 = a + bx \Rightarrow \overbrace{[f(x)]^2}^{F(x)} = \overbrace{a}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)} \text{ onde}$$

3º Exemplo: $f(x) = \sqrt{a+bx}$:

$$f(x) = \sqrt{a+bx} \Rightarrow [f(x)]^2 = a + bx \Rightarrow \overbrace{[f(x)]^2}^{F(x)} = \overbrace{a}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)} \text{ onde } \boxed{\begin{array}{ll} F(x) = [f(x)]^2 & \\ \alpha_1 = a & \phi_1(x) = 1 \\ \alpha_2 = b & \phi_2(x) = x \end{array}}$$

4º Exemplo: $f(x) = \dfrac{a+bx}{c+x^2}$:

3º Exemplo: $f(x) = \sqrt{a + bx}$:

$$f(x) = \sqrt{a + bx} \Rightarrow [f(x)]^2 = a + bx \Rightarrow \overbrace{[f(x)]^2}^{F(x)} = \overbrace{a}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)} \text{ onde } \boxed{\begin{array}{ll} F(x) = [f(x)]^2 & \\ \alpha_1 = a & \phi_1(x) = 1 \\ \alpha_2 = b & \phi_2(x) = x \end{array}}$$

4º Exemplo: $f(x) = \dfrac{a + bx}{c + x^2}$:

$$f(x) = \frac{a + bx}{c + x^2}$$

3º Exemplo: $f(x) = \sqrt{a+bx}$:

$$f(x) = \sqrt{a+bx} \Rightarrow [f(x)]^2 = a + bx \Rightarrow \overbrace{[f(x)]^2}^{F(x)} = \overbrace{a}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)} \text{ onde } \boxed{\begin{array}{ll} F(x) = [f(x)]^2 & \\ \alpha_1 = a & \phi_1(x) = 1 \\ \alpha_2 = b & \phi_2(x) = x \end{array}}$$

4º Exemplo: $f(x) = \dfrac{a+bx}{c+x^2}$:

$$f(x) = \frac{a+bx}{c+x^2} \Rightarrow$$

3º Exemplo: $f(x) = \sqrt{a+bx}$:

$$f(x) = \sqrt{a+bx} \Rightarrow [f(x)]^2 = a + bx \Rightarrow \overbrace{[f(x)]^2}^{F(x)} = \overbrace{a}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)} \text{ onde } \boxed{\begin{array}{ll} F(x) = [f(x)]^2 & \\ \alpha_1 = a & \phi_1(x) = 1 \\ \alpha_2 = b & \phi_2(x) = x \end{array}}$$

4º Exemplo: $f(x) = \dfrac{a+bx}{c+x^2}$:

$$f(x) = \frac{a+bx}{c+x^2} \Rightarrow cf(x) + x^2 f(x) = a + bx$$

3º Exemplo: $f(x) = \sqrt{a+bx}$:

$$f(x) = \sqrt{a+bx} \Rightarrow [f(x)]^2 = a + bx \Rightarrow \overbrace{[f(x)]^2}^{F(x)} = \overbrace{a}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)} \text{ onde } \boxed{\begin{array}{ll} F(x) = [f(x)]^2 & \\ \alpha_1 = a & \phi_1(x) = 1 \\ \alpha_2 = b & \phi_2(x) = x \end{array}}$$

4º Exemplo: $f(x) = \dfrac{a+bx}{c+x^2}$:

$$f(x) = \frac{a+bx}{c+x^2} \Rightarrow cf(x) + x^2 f(x) = a + bx \Rightarrow$$

3º Exemplo: $f(x) = \sqrt{a+bx}$:

$$f(x) = \sqrt{a+bx} \Rightarrow [f(x)]^2 = a + bx \Rightarrow \overbrace{[f(x)]^2}^{F(x)} = \overbrace{a}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)} \text{ onde } \boxed{\begin{array}{ll} F(x) = [f(x)]^2 & \\ \alpha_1 = a & \phi_1(x) = 1 \\ \alpha_2 = b & \phi_2(x) = x \end{array}}$$

4º Exemplo: $f(x) = \dfrac{a+bx}{c+x^2}$:

$$f(x) = \frac{a+bx}{c+x^2} \Rightarrow cf(x) + x^2 f(x) = a + bx \Rightarrow \overbrace{x^2 f(x)}^{F(x)} = \overbrace{a}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)} + \overbrace{(-c)}^{\alpha_3} \cdot \overbrace{f(x)}^{\phi_3(x)}$$

3º Exemplo: $f(x) = \sqrt{a+bx}$:

$$f(x) = \sqrt{a+bx} \Rightarrow [f(x)]^2 = a + bx \Rightarrow \overbrace{[f(x)]^2}^{F(x)} = \overbrace{a}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)} \text{ onde } \boxed{\begin{array}{ll} F(x) = [f(x)]^2 & \\ \alpha_1 = a & \phi_1(x) = 1 \\ \alpha_2 = b & \phi_2(x) = x \end{array}}$$

4º Exemplo: $f(x) = \dfrac{a+bx}{c+x^2}$:

$$f(x) = \frac{a+bx}{c+x^2} \Rightarrow cf(x) + x^2 f(x) = a + bx \Rightarrow \overbrace{x^2 f(x)}^{F(x)} = \overbrace{a}^{\alpha_1} \cdot \overbrace{1}^{\phi_1(x)} + \overbrace{b}^{\alpha_2} \cdot \overbrace{x}^{\phi_2(x)} + \overbrace{(-c)}^{\alpha_3} \cdot \overbrace{f(x)}^{\phi_3(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x) + \alpha_3\phi_3(x)} \text{ onde } \boxed{\begin{array}{ll} F(x) = x^2 f(x) & \\ \alpha_1 = a & \phi_1(x) = 1 \\ \alpha_2 = b & \phi_2(x) = x^2 \\ \alpha_3 = -c & \phi_3(x) = f(x) \end{array}}$$

Observação 1

- Dependendo da função, pode ser que exista mais de uma forma de linearização, mas os parâmetros da função original no final são os mesmos.
- Tome cuidado!!! Após obter os parâmetros da função linearizada, deve se voltar aos parâmetros da função original. Para ilustrar isso, no exemplo 1, depois de obter α_1 e α_2, deve se obter a e b da função original. Naquele exemplo, temos que $a = e^{\alpha_1}$ e $b = \alpha_2$.

Exemplo 1

Ajuste os dados da tabela abaixo

x	0.15	0.55	0.66	0.70	0.79	1.26	3.24	4.82
$f(x)$	0.34611	0.65147	0.70619	0.72289	0.75454	0.81391	0.55051	0.39790

por uma função da forma

$$f(x) = \frac{a + x}{1 + bx^2}.$$

Resolução: É um caso não linear e portanto é necessário antes linearizar para aplicar o MMQ. Linearizando, temos que

Observação 1

- Dependendo da função, pode ser que exista mais de uma forma de linearização, mas os parâmetros da função original no final são os mesmos.
- Tome cuidado!!! Após obter os parâmetros da função linearizada, deve se voltar aos parâmetros da função original. Para ilustrar isso, no exemplo 1, depois de obter α_1 e α_2, deve se obter a e b da função original. Naquele exemplo, temos que $a = e^{\alpha_1}$ e $b = \alpha_2$.

Exemplo 1

Ajuste os dados da tabela abaixo

x	0.15	0.55	0.66	0.70	0.79	1.26	3.24	4.82
$f(x)$	0.34611	0.65147	0.70619	0.72289	0.75454	0.81391	0.55051	0.39790

por uma função da forma

$$f(x) = \frac{a + x}{1 + bx^2}.$$

Resolução: É um caso não linear e portanto é necessário antes linearizar para aplicar o MMQ. Linearizando, temos que

$$f(x) = \frac{a + x}{1 + bx^2}$$

Observação 1

- Dependendo da função, pode ser que exista mais de uma forma de linearização, mas os parâmetros da função original no final são os mesmos.
- Tome cuidado!!! Após obter os parâmetros da função linearizada, deve se voltar aos parâmetros da função original. Para ilustrar isso, no exemplo 1, depois de obter α_1 e α_2, deve se obter a e b da função original. Naquele exemplo, temos que $a = e^{\alpha_1}$ e $b = \alpha_2$.

Exemplo 1

Ajuste os dados da tabela abaixo

x	0.15	0.55	0.66	0.70	0.79	1.26	3.24	4.82
$f(x)$	0.34611	0.65147	0.70619	0.72289	0.75454	0.81391	0.55051	0.39790

por uma função da forma

$$f(x) = \frac{a+x}{1+bx^2}.$$

Resolução: É um caso não linear e portanto é necessário antes linearizar para aplicar o MMQ. Linearizando, temos que

$$f(x) = \frac{a+x}{1+bx^2} \Rightarrow$$

Observação 1

- Dependendo da função, pode ser que exista mais de uma forma de linearização, mas os parâmetros da função original no final são os mesmos.
- Tome cuidado!!! Após obter os parâmetros da função linearizada, deve se voltar aos parâmetros da função original. Para ilustrar isso, no exemplo 1, depois de obter α_1 e α_2, deve se obter a e b da função original. Naquele exemplo, temos que $a = e^{\alpha_1}$ e $b = \alpha_2$.

Exemplo 1

Ajuste os dados da tabela abaixo

x	0.15	0.55	0.66	0.70	0.79	1.26	3.24	4.82
$f(x)$	0.34611	0.65147	0.70619	0.72289	0.75454	0.81391	0.55051	0.39790

por uma função da forma

$$f(x) = \frac{a + x}{1 + bx^2}.$$

Resolução: É um caso não linear e portanto é necessário antes linearizar para aplicar o MMQ. Linearizando, temos que

$$f(x) = \frac{a + x}{1 + bx^2} \Rightarrow f(x) + bx^2 f(x) = a + x$$

Observação 1

- Dependendo da função, pode ser que exista mais de uma forma de linearização, mas os parâmetros da função original no final são os mesmos.
- Tome cuidado!!! Após obter os parâmetros da função linearizada, deve se voltar aos parâmetros da função original. Para ilustrar isso, no exemplo 1, depois de obter α_1 e α_2, deve se obter a e b da função original. Naquele exemplo, temos que $a = e^{\alpha_1}$ e $b = \alpha_2$.

Exemplo 1

Ajuste os dados da tabela abaixo

x	0.15	0.55	0.66	0.70	0.79	1.26	3.24	4.82
$f(x)$	0.34611	0.65147	0.70619	0.72289	0.75454	0.81391	0.55051	0.39790

por uma função da forma

$$f(x) = \frac{a+x}{1+bx^2}.$$

Resolução: É um caso não linear e portanto é necessário antes linearizar para aplicar o MMQ. Linearizando, temos que

$$f(x) = \frac{a+x}{1+bx^2} \Rightarrow f(x) + bx^2 f(x) = a + x \Rightarrow$$

Observação 1

- Dependendo da função, pode ser que exista mais de uma forma de linearização, mas os parâmetros da função original no final são os mesmos.
- Tome cuidado!!! Após obter os parâmetros da função linearizada, deve se voltar aos parâmetros da função original. Para ilustrar isso, no exemplo 1, depois de obter α_1 e α_2, deve se obter a e b da função original. Naquele exemplo, temos que $a = e^{\alpha_1}$ e $b = \alpha_2$.

Exemplo 1

Ajuste os dados da tabela abaixo

x	0.15	0.55	0.66	0.70	0.79	1.26	3.24	4.82
$f(x)$	0.34611	0.65147	0.70619	0.72289	0.75454	0.81391	0.55051	0.39790

por uma função da forma

$$f(x) = \frac{a+x}{1+bx^2}.$$

Resolução: É um caso não linear e portanto é necessário antes linearizar para aplicar o MMQ. Linearizando, temos que

$$f(x) = \frac{a+x}{1+bx^2} \Rightarrow f(x) + bx^2 f(x) = a + x \Rightarrow \underbrace{f(x) - x}_{F(x)} = \underbrace{a}_{\alpha_1} \cdot \underbrace{1}_{\phi_1(x)} + \underbrace{(-b)}_{\alpha_2}\underbrace{x^2 f(x)}_{\phi_2(x)}$$

Observação 1

- Dependendo da função, pode ser que exista mais de uma forma de linearização, mas os parâmetros da função original no final são os mesmos.
- Tome cuidado!!! Após obter os parâmetros da função linearizada, deve se voltar aos parâmetros da função original. Para ilustrar isso, no exemplo 1, depois de obter α_1 e α_2, deve se obter a e b da função original. Naquele exemplo, temos que $a = e^{\alpha_1}$ e $b = \alpha_2$.

Exemplo 1

Ajuste os dados da tabela abaixo

x	0.15	0.55	0.66	0.70	0.79	1.26	3.24	4.82
$f(x)$	0.34611	0.65147	0.70619	0.72289	0.75454	0.81391	0.55051	0.39790

por uma função da forma

$$f(x) = \frac{a + x}{1 + bx^2}.$$

Resolução: É um caso não linear e portanto é necessário antes linearizar para aplicar o MMQ. Linearizando, temos que

$$f(x) = \frac{a + x}{1 + bx^2} \Rightarrow f(x) + bx^2 f(x) = a + x \Rightarrow \underbrace{f(x) - x}_{F(x)} = \underbrace{a}_{\alpha_1} \cdot \underbrace{1}_{\phi_1(x)} + \underbrace{(-b)}_{\alpha_2} \underbrace{x^2 f(x)}_{\phi_2(x)} \Rightarrow$$

Observação 1

- Dependendo da função, pode ser que exista mais de uma forma de linearização, mas os parâmetros da função original no final são os mesmos.
- Tome cuidado!!! Após obter os parâmetros da função linearizada, deve se voltar aos parâmetros da função original. Para ilustrar isso, no exemplo 1, depois de obter α_1 e α_2, deve se obter a e b da função original. Naquele exemplo, temos que $a = e^{\alpha_1}$ e $b = \alpha_2$.

Exemplo 1

Ajuste os dados da tabela abaixo

x	0.15	0.55	0.66	0.70	0.79	1.26	3.24	4.82
$f(x)$	0.34611	0.65147	0.70619	0.72289	0.75454	0.81391	0.55051	0.39790

por uma função da forma

$$f(x) = \frac{a+x}{1+bx^2}.$$

Resolução: É um caso não linear e portanto é necessário antes linearizar para aplicar o MMQ. Linearizando, temos que

$$f(x) = \frac{a+x}{1+bx^2} \Rightarrow f(x) + bx^2 f(x) = a + x \Rightarrow \underbrace{f(x) - x}_{F(x)} = \underbrace{a}_{\alpha_1} \cdot \underbrace{1}_{\phi_1(x)} + \underbrace{(-b)}_{\alpha_2} \underbrace{x^2 f(x)}_{\phi_2(x)} \Rightarrow F(x) = \alpha_1 \phi_1(x) + \alpha_2 \phi_2(x)$$

Observação 1

- Dependendo da função, pode ser que exista mais de uma forma de linearização, mas os parâmetros da função original no final são os mesmos.
- Tome cuidado!!! Após obter os parâmetros da função linearizada, deve se voltar aos parâmetros da função original. Para ilustrar isso, no exemplo 1, depois de obter α_1 e α_2, deve se obter a e b da função original. Naquele exemplo, temos que $a = e^{\alpha_1}$ e $b = \alpha_2$.

Exemplo 1

Ajuste os dados da tabela abaixo

x	0.15	0.55	0.66	0.70	0.79	1.26	3.24	4.82
$f(x)$	0.34611	0.65147	0.70619	0.72289	0.75454	0.81391	0.55051	0.39790

por uma função da forma

$$f(x) = \frac{a+x}{1+bx^2}.$$

Resolução: É um caso não linear e portanto é necessário antes linearizar para aplicar o MMQ. Linearizando, temos que

$$f(x) = \frac{a+x}{1+bx^2} \Rightarrow f(x) + bx^2 f(x) = a + x \Rightarrow \underbrace{f(x) - x}_{F(x)} = \underbrace{a}_{\alpha_1} \cdot \underbrace{1}_{\phi_1(x)} + \underbrace{(-b)}_{\alpha_2}\underbrace{x^2 f(x)}_{\phi_2(x)} \Rightarrow F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x) \Rightarrow$$

Observação 1

- Dependendo da função, pode ser que exista mais de uma forma de linearização, mas os parâmetros da função original no final são os mesmos.
- Tome cuidado!!! Após obter os parâmetros da função linearizada, deve se voltar aos parâmetros da função original. Para ilustrar isso, no exemplo 1, depois de obter α_1 e α_2, deve se obter a e b da função original. Naquele exemplo, temos que $a = e^{\alpha_1}$ e $b = \alpha_2$.

Exemplo 1

Ajuste os dados da tabela abaixo

x	0.15	0.55	0.66	0.70	0.79	1.26	3.24	4.82
$f(x)$	0.34611	0.65147	0.70619	0.72289	0.75454	0.81391	0.55051	0.39790

por uma função da forma

$$f(x) = \frac{a+x}{1+bx^2}.$$

Resolução: É um caso não linear e portanto é necessário antes linearizar para aplicar o MMQ. Linearizando, temos que

$$f(x) = \frac{a+x}{1+bx^2} \Rightarrow f(x) + bx^2 f(x) = a + x \Rightarrow \underbrace{f(x) - x}_{F(x)} = \underbrace{a}_{\alpha_1} \cdot \underbrace{1}_{\phi_1(x)} + \underbrace{(-b)}_{\alpha_2}\underbrace{x^2 f(x)}_{\phi_2(x)} \Rightarrow F(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x) \Rightarrow \begin{cases} F(x) = f(x) - x \\ \phi_1(x) = 1 \\ \phi_2(x) = x^2 f(x) \\ \alpha_1 = a \\ \alpha_2 = -b \end{cases}.$$

É um problema com dois parâmetros para serem estimados e portanto o sistema linear a ser montando para obter esses parâmetros é um sistema com duas equações e duas incógnitas. Esse sistema linear pode ser obtido via **Regra de Cramer**, como apresentado a seguir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} \\ \\ \alpha_2 = \dfrac{b_2 a_{11} - b_1 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} \\ \\ \alpha_2 = \dfrac{b_2 a_{11} - b_1 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} \end{cases}$$

Da tabela pode se observar que o número de pontos é igual a $n = 8$. Prosseguindo no cálculo dos termos do sistema linear, temos que:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \\ \\ \alpha_2 = \dfrac{b_2 a_{11} - b_1 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \end{cases}$$

Da tabela pode se observar que o número de pontos é igual a $n = 8$. Prosseguindo no cálculo dos termos do sistema linear, temos que:

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{8} \phi_1(x_k)\phi_1(x_k) = \sum_{k=1}^{8} 1 = 8$$

$$a_{12} = \sum_{k=1}^{8} \phi_1(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{8} x_k^2 f(x_k) = 17.65296$$

$$a_{21} = a_{12} = 17.65296$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{8} \phi_2(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{8} \left[x_k^2 f(x_k)\right]^2 = 121.00236$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^{8} \phi_1(x_k)F(x_k) = \sum_{k=1}^{8} [f(x_k) - x_k] = -7.22647$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^{8} \phi_2(x_k)F(x_k) = \sum_{k=1}^{8} x_k^2 f(x_k)[f(x_k) - x_k] = -56.97059$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \\ \\ \alpha_2 = \dfrac{b_2 a_{11} - b_1 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \end{cases}$$

Da tabela pode se observar que o número de pontos é igual a $n = 8$. Prosseguindo no cálculo dos termos do sistema linear, temos que:

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{8} \phi_1(x_k)\phi_1(x_k) = \sum_{k=1}^{8} 1 = 8$$

$$a_{12} = \sum_{k=1}^{8} \phi_1(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{8} x_k^2 f(x_k) = 17.65296$$

$$a_{21} = a_{12} = 17.65296$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{8} \phi_2(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{8} \left[x_k^2 f(x_k)\right]^2 = 121.00236$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^{8} \phi_1(x_k)F(x_k) = \sum_{k=1}^{8} [f(x_k) - x_k] = -7.22647$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^{8} \phi_2(x_k)F(x_k) = \sum_{k=1}^{8} x_k^2 f(x_k)[f(x_k) - x_k] = -56.97059$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \\ \\ \alpha_2 = \dfrac{b_2 a_{11} - b_1 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \end{cases}$$

Da tabela pode se observar que o número de pontos é igual a $n = 8$. Prosseguindo no cálculo dos termos do sistema linear, temos que:

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{8} \phi_1(x_k)\phi_1(x_k) = \sum_{k=1}^{8} 1 = 8$$

$$a_{12} = \sum_{k=1}^{8} \phi_1(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{8} x_k^2 f(x_k) = 17.65296$$

$$a_{21} = a_{12} = 17.65296$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{8} \phi_2(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{8} \left[x_k^2 f(x_k)\right]^2 = 121.00236$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^{8} \phi_1(x_k)F(x_k) = \sum_{k=1}^{8} [f(x_k) - x_k] = -7.22647$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^{8} \phi_2(x_k)F(x_k) = \sum_{k=1}^{8} x_k^2 f(x_k)[f(x_k) - x_k] = -56.97059$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 17.65296 \\ 17.65296 & 121.00236 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.22647 \\ -56.97059 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \\ \\ \alpha_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \end{cases}$$

Da tabela pode se observar que o número de pontos é igual a $n = 8$. Prosseguindo no cálculo dos termos do sistema linear, temos que:

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{8} \phi_1(x_k)\phi_1(x_k) = \sum_{k=1}^{8} 1 = 8$$

$$a_{12} = \sum_{k=1}^{8} \phi_1(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{8} x_k^2 f(x_k) = 17.65296$$

$$a_{21} = a_{12} = 17.65296$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{8} \phi_2(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{8} \left[x_k^2 f(x_k)\right]^2 = 121.00236$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^{8} \phi_1(x_k)F(x_k) = \sum_{k=1}^{8} [f(x_k) - x_k] = -7.22647$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^{8} \phi_2(x_k)F(x_k) = \sum_{k=1}^{8} x_k^2 f(x_k)[f(x_k) - x_k] = -56.97059$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 17.65296 \\ 17.65296 & 121.00236 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.22647 \\ -56.97059 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \\ \\ \alpha_2 = \dfrac{b_2 a_{11} - b_1 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \end{cases}$$

Da tabela pode se observar que o número de pontos é igual a $n = 8$. Prosseguindo no cálculo dos termos do sistema linear, temos que:

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{8} \phi_1(x_k)\phi_1(x_k) = \sum_{k=1}^{8} 1 = 8$$

$$a_{12} = \sum_{k=1}^{8} \phi_1(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{8} x_k^2 f(x_k) = 17.65296$$

$$a_{21} = a_{12} = 17.65296$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{8} \phi_2(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{8} \left[x_k^2 f(x_k)\right]^2 = 121.00236$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^{8} \phi_1(x_k)F(x_k) = \sum_{k=1}^{8} [f(x_k) - x_k] = -7.22647$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^{8} \phi_2(x_k)F(x_k) = \sum_{k=1}^{8} x_k^2 f(x_k)[f(x_k) - x_k] = -56.97059$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 17.65296 \\ 17.65296 & 121.00236 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.22647 \\ -56.97059 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{(-7.22647)(121.00236) - (-56.97059)(17.65296)}{656.391944} = 0.20000 \\ \\ \alpha_2 = \dfrac{(-56.97059)(8) - (-7.22647)(17.65296)}{656.391944} = -0.50000 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \\[2ex] \alpha_2 = \dfrac{b_2 a_{11} - b_1 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \end{cases}$$

Da tabela pode se observar que o número de pontos é igual a $n = 8$. Prosseguindo no cálculo dos termos do sistema linear, temos que:

$$a_{11} = \sum_{k=1}^{8} \phi_1(x_k)\phi_1(x_k) = \sum_{k=1}^{8} 1 = 8$$

$$a_{12} = \sum_{k=1}^{8} \phi_1(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{8} x_k^2 f(x_k) = 17.65296$$

$$a_{21} = a_{12} = 17.65296$$

$$a_{22} = \sum_{k=1}^{8} \phi_2(x_k)\phi_2(x_k) = \sum_{k=1}^{8} \left[x_k^2 f(x_k)\right]^2 = 121.00236$$

$$b_1 = \sum_{k=1}^{8} \phi_1(x_k)F(x_k) = \sum_{k=1}^{8} [f(x_k) - x_k] = -7.22647$$

$$b_2 = \sum_{k=1}^{8} \phi_2(x_k)F(x_k) = \sum_{k=1}^{8} x_k^2 f(x_k)[f(x_k) - x_k] = -56.97059$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 17.65296 \\ 17.65296 & 121.00236 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.22647 \\ -56.97059 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{(-7.22647)(121.00236) - (-56.97059)(17.65296)}{656.391944} = 0.20000 \\[2ex] \alpha_2 = \dfrac{(-56.97059)(8) - (-7.22647)(17.65296)}{656.391944} = -0.50000 \end{cases}$$

Como $\alpha_1 = a \Rightarrow a = 0.2$ e $\alpha_2 = -b \Rightarrow b = 0.5$. Logo, a função de ajuste para os dados tabelados é $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{0.2 + x}{1 + 0.5x^2}}$.

Regra de Cramer para Sistemas Lineares 3×3

Se o sistema linear no processo de ajuste envolver 3 equações e 3 incógnitas, a aplicação da Regra de Cramer é dada pelo processo a seguir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}}_{\alpha} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{b} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \qquad \alpha_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \qquad \alpha_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

Regra de Cramer para Sistemas Lineares 3×3

Se o sistema linear no processo de ajuste envolver 3 equações e 3 incógnitas, a aplicação da Regra de Cramer é dada pelo processo a seguir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}}_{\alpha} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{b} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \qquad \alpha_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \qquad \alpha_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

Nesse processo é necessário calcular os determinantes de 4 matrizes para obter as componentes do vetor solução do sistema linear. Para obter a solução é necessário ter cuidados nos calculos. Deve-se ficar atento na montagem das matrizes A_1, A_2 e A_3, bem como no cálculo dos determinantes dessas matrizes e da matriz dos coeficientes.

Teste de Alinhamento

O teste do alinhamento é uma estratégia para verificar se a função de ajuste $f(x)$ escolhida é a melhor escolha. Esse teste consiste em, uma vez feito a linearização da forma escolhida para $f(x)$, montar o gráfico de dispersão $(x_k, F(x_k))$, $k = 1, 2, \ldots, n$, onde $F(x)$ é obtida no processo de linearização. Quanto mais alinhado estiver os pontos do gráfico de dispersão melhor é a escolha. Por exemplo, considere a seguinte função $f(x)$ na tabela a seguir.

Regra de Cramer para Sistemas Lineares 3×3

Se o sistema linear no processo de ajuste envolver 3 equações e 3 incógnitas, a aplicação da Regra de Cramer é dada pelo processo a seguir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}}_{\alpha} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_{b} \qquad A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \qquad \alpha_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \qquad \alpha_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

Nesse processo é necessário calcular os determinantes de 4 matrizes para obter as componentes do vetor solução do sistema linear. Para obter a solução é necessário ter cuidados nos calculos. Deve-se ficar atento na montagem das matrizes A_1, A_2 e A_3, bem como no cálculo dos determinantes dessas matrizes e da matriz dos coeficientes.

Teste de Alinhamento

O teste do alinhamento é uma estratégia para verificar se a função de ajuste $f(x)$ escolhida é a melhor escolha. Esse teste consiste em, uma vez feito a linearização da forma escolhida para $f(x)$, montar o gráfico de dispersão $(x_k, F(x_k))$, $k = 1, 2, \ldots, n$, onde $F(x)$ é obtida no processo de linearização. Quanto mais alinhado estiver os pontos do gráfico de dispersão melhor é a escolha. Por exemplo, considere a seguinte função $f(x)$ na tabela a seguir.

x	1.19	2.01	4.62	6.76	6.79	7.62	8.25	9.75
$f(x)$	1.0285	0.8737	0.4244	0.2808	0.2384	0.2302	0.1596	0.1434

x	1.19	2.01	4.62	6.76	6.79	7.62	8.25	9.75
$f(x)$	1.0285	0.8737	0.4244	0.2808	0.2384	0.2302	0.1596	0.1434

Considere a pergunta: Entre

$$f_1(x) = ae^{-bx} \qquad e \qquad f_2(x) = \frac{1}{a+bx},$$

qual é melhor a melhor escolha para ajustar os dados da tabela ?

x	1.19	2.01	4.62	6.76	6.79	7.62	8.25	9.75
$f(x)$	1.0285	0.8737	0.4244	0.2808	0.2384	0.2302	0.1596	0.1434

Considere a pergunta: Entre

$$f_1(x) = ae^{-bx} \qquad e \qquad f_2(x) = \frac{1}{a+bx},$$

qual é melhor a melhor escolha para ajustar os dados da tabela ?

Fazendo a linearização para $f_1(x)$, tem-se que

$$F_1(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)$$

onde $F_1(x) = \ln[f(x)]$, $\alpha_1 = \ln(a)$, $\phi_1(x) = 1$, $\alpha_2 = b$ e $\phi_2(x) = -x$. Para a outra função $f_2(x)$, tem-se que

$$F_2(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)$$

onde $F_2(x) = \frac{1}{f(x)}$, $\alpha_1 = a$, $\phi_1(x) = 1$, $\alpha_2 = b$ e $\phi_2(x) = x$. Fazendo os ajustes via MMQ como já anteriormente foi apresentado temos que $F_1(x) = 0.335236 - 0.247853x$ e $F_2(x) = 0.357795 + 0.477078x$. Construindo agora uma tabela de valores para essas funções.

x	1.19	2.01	4.62	6.76	6.79	7.62	8.25	9.75
$f(x)$	1.0285	0.8737	0.4244	0.2808	0.2384	0.2302	0.1596	0.1434

Considere a pergunta: Entre

$$f_1(x) = ae^{-bx} \qquad e \qquad f_2(x) = \frac{1}{a+bx},$$

qual é melhor a melhor escolha para ajustar os dados da tabela ?

Fazendo a linearização para $f_1(x)$, tem-se que

$$F_1(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)$$

onde $F_1(x) = \ln[f(x)]$, $\alpha_1 = \ln(a)$, $\phi_1(x) = 1$, $\alpha_2 = b$ e $\phi_2(x) = -x$. Para a outra função $f_2(x)$, tem-se que

$$F_2(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)$$

onde $F_2(x) = \frac{1}{f(x)}$, $\alpha_1 = a$, $\phi_1(x) = 1$, $\alpha_2 = b$ e $\phi_2(x) = x$. Fazendo os ajustes via MMQ como já anteriormente foi apresentado temos que $F_1(x) = 0.335236 - 0.247853x$ e $F_2(x) = 0.357795 + 0.477078x$. Construindo agora uma tabela de valores para essas funções.

x	$f_{\text{tab}}(x)$	$F_1(x)$	$F_2(x)$
1.19	1.0285	0.028101	0.972290
2.01	0.8737	-0.135018	1.144558
4.62	0.4244	-0.857079	2.356268
6.76	0.2808	-1.270113	3.561254
6.79	0.2384	-1.433805	4.194631
7.62	0.2302	-1.468807	4.344049
8.25	0.1596	-1.835085	6.265664
9.75	0.1434	-1.942117	6.973501

x	1.19	2.01	4.62	6.76	6.79	7.62	8.25	9.75
$f(x)$	1.0285	0.8737	0.4244	0.2808	0.2384	0.2302	0.1596	0.1434

Considere a pergunta: Entre

$$f_1(x) = ae^{-bx} \qquad e \qquad f_2(x) = \frac{1}{a+bx},$$

qual é melhor a melhor escolha para ajustar os dados da tabela ?

Fazendo a linearização para $f_1(x)$, tem-se que

$$F_1(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)$$

onde $F_1(x) = \ln[f(x)]$, $\alpha_1 = \ln(a)$, $\phi_1(x) = 1$, $\alpha_2 = b$ e $\phi_2(x) = -x$. Para a outra função $f_2(x)$, tem-se que

$$F_2(x) = \alpha_1\phi_1(x) + \alpha_2\phi_2(x)$$

onde $F_2(x) = \frac{1}{f(x)}$, $\alpha_1 = a$, $\phi_1(x) = 1$, $\alpha_2 = b$ e $\phi_2(x) = x$. Fazendo os ajustes via MMQ como já anteriormente foi apresentado temos que $F_1(x) = 0.335236 - 0.247853x$ e $F_2(x) = 0.357795 + 0.477078x$. Construindo agora uma tabela de valores para essas funções.

x	$f_{\text{tab}}(x)$	$F_1(x)$	$F_2(x)$
1.19	1.0285	0.028101	0.972290
2.01	0.8737	-0.135018	1.144558
4.62	0.4244	-0.857079	2.356268
6.76	0.2808	-1.270113	3.561254
6.79	0.2384	-1.433805	4.194631
7.62	0.2302	-1.468807	4.344049
8.25	0.1596	-1.835085	6.265664
9.75	0.1434	-1.942117	6.973501

Note que o gráfico de dispersão para $F_1(x)$ (**Figura 1**) os pontos estão mais alinhados do que $F_2(x)$ (**Figura 2**). Assim sendo, a melhor escolha é $f_1(x) = ae^{-bx}$.

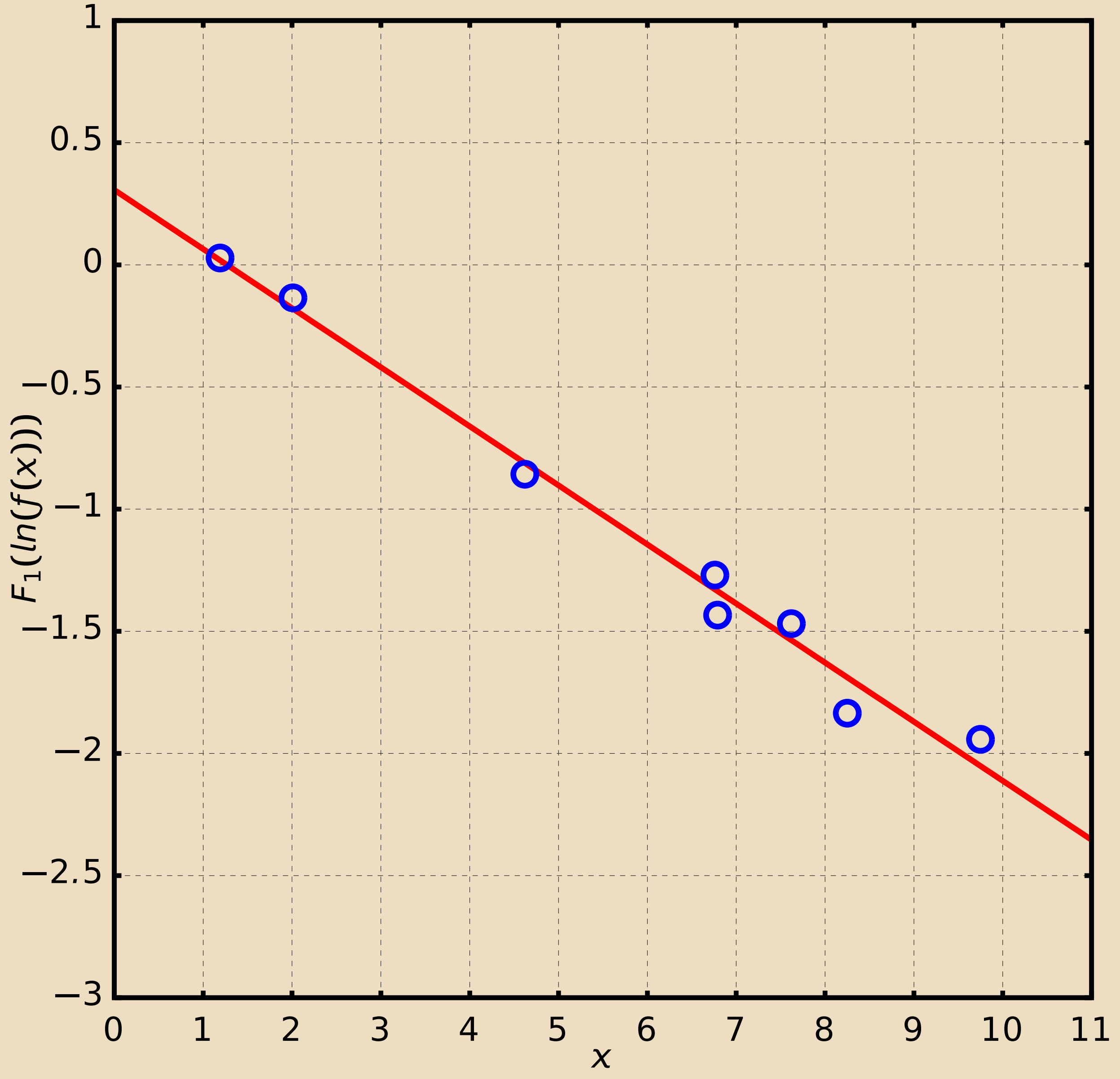

Figura 1: Teste de alinhamento - função $f_1(x) = ae^{-bx}$.

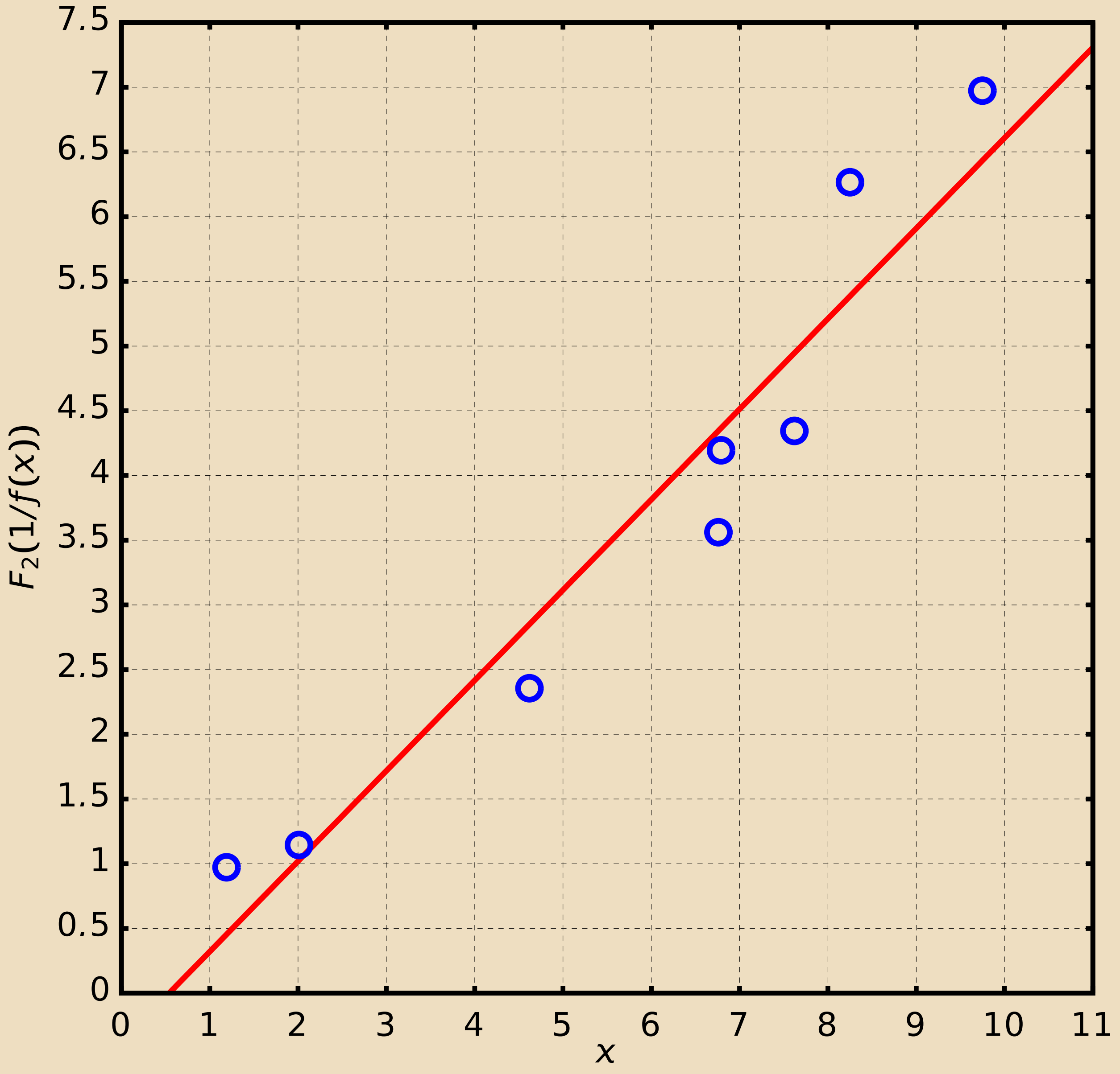

Figura 2: Teste de alinhamento - função $f_2(x) = \frac{1}{a+bx}$.

Note que o gráfico de dispersão para $F_1(x)$ (**Figura 1**) os pontos estão mais alinhados do que $F_2(x)$ (**Figura 2**). Assim sendo, a melhor escolha é $f_1(x) = ae^{-bx}$.

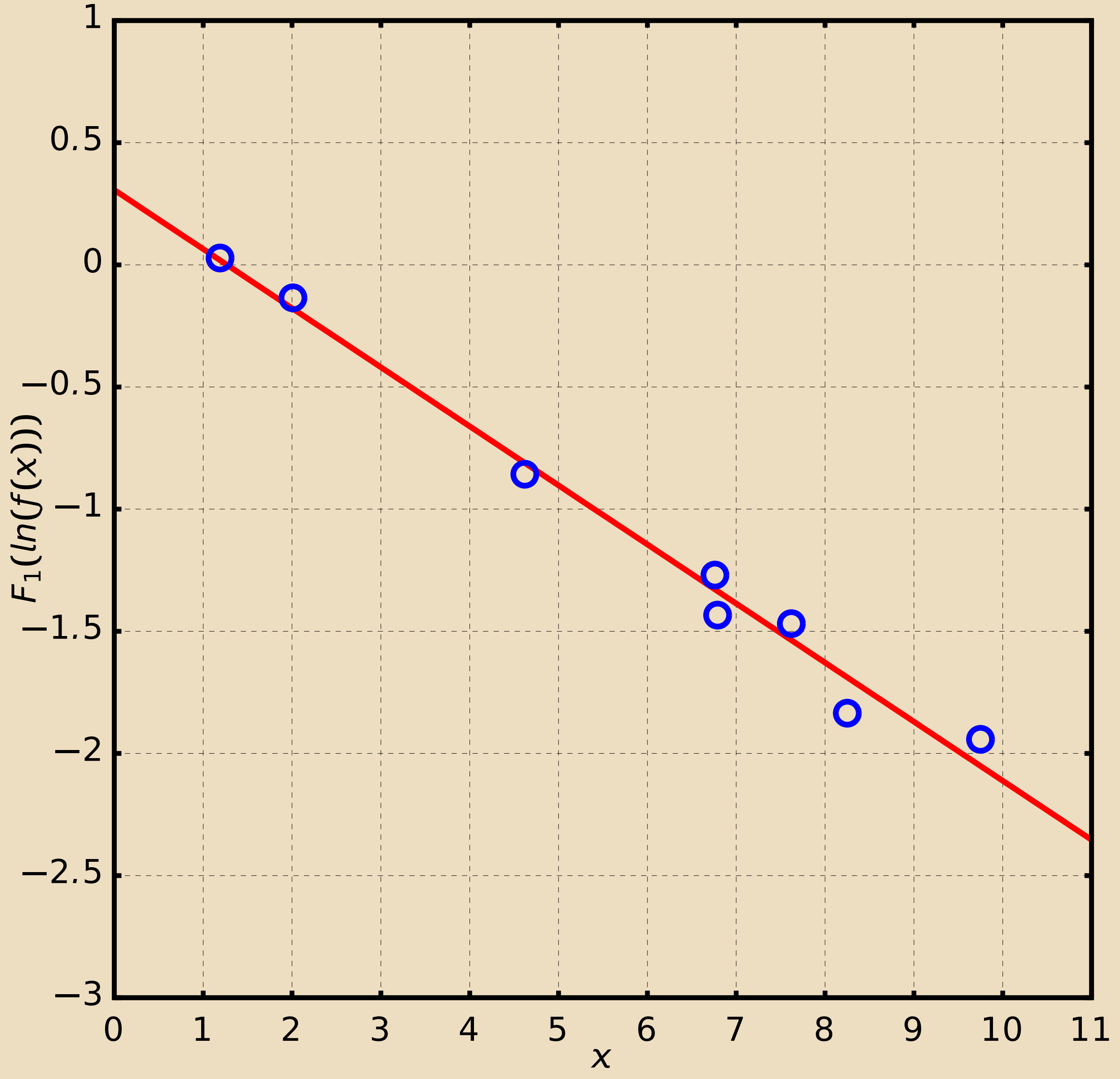

Figura 1: Teste de alinhamento - função $f_1(x) = ae^{-bx}$.

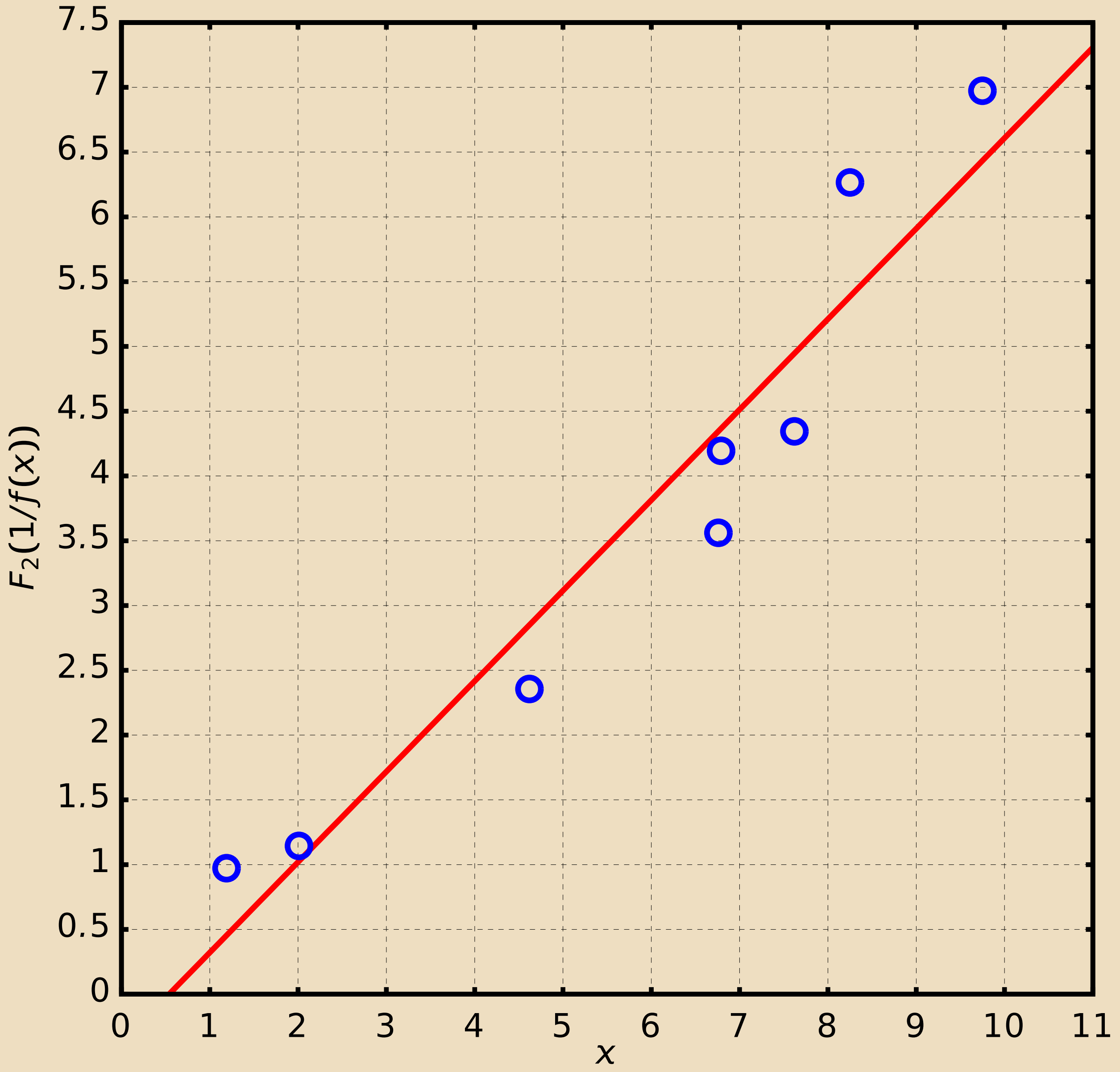

Figura 2: Teste de alinhamento - função $f_2(x) = \frac{1}{a+bx}$.

Um outro modo de verificar que $f_1(x)$ é a melhor ajuste, basta calcular o resíduo. O cálculo do resíduo

$$r = \sum_{k=1}^{n} [f_{\text{tab}}(x_k) - f(x_k)]^2$$

Note que o gráfico de dispersão para $F_1(x)$ (**Figura 1**) os pontos estão mais alinhados do que $F_2(x)$ (**Figura 2**). Assim sendo, a melhor escolha é $f_1(x) = ae^{-bx}$.

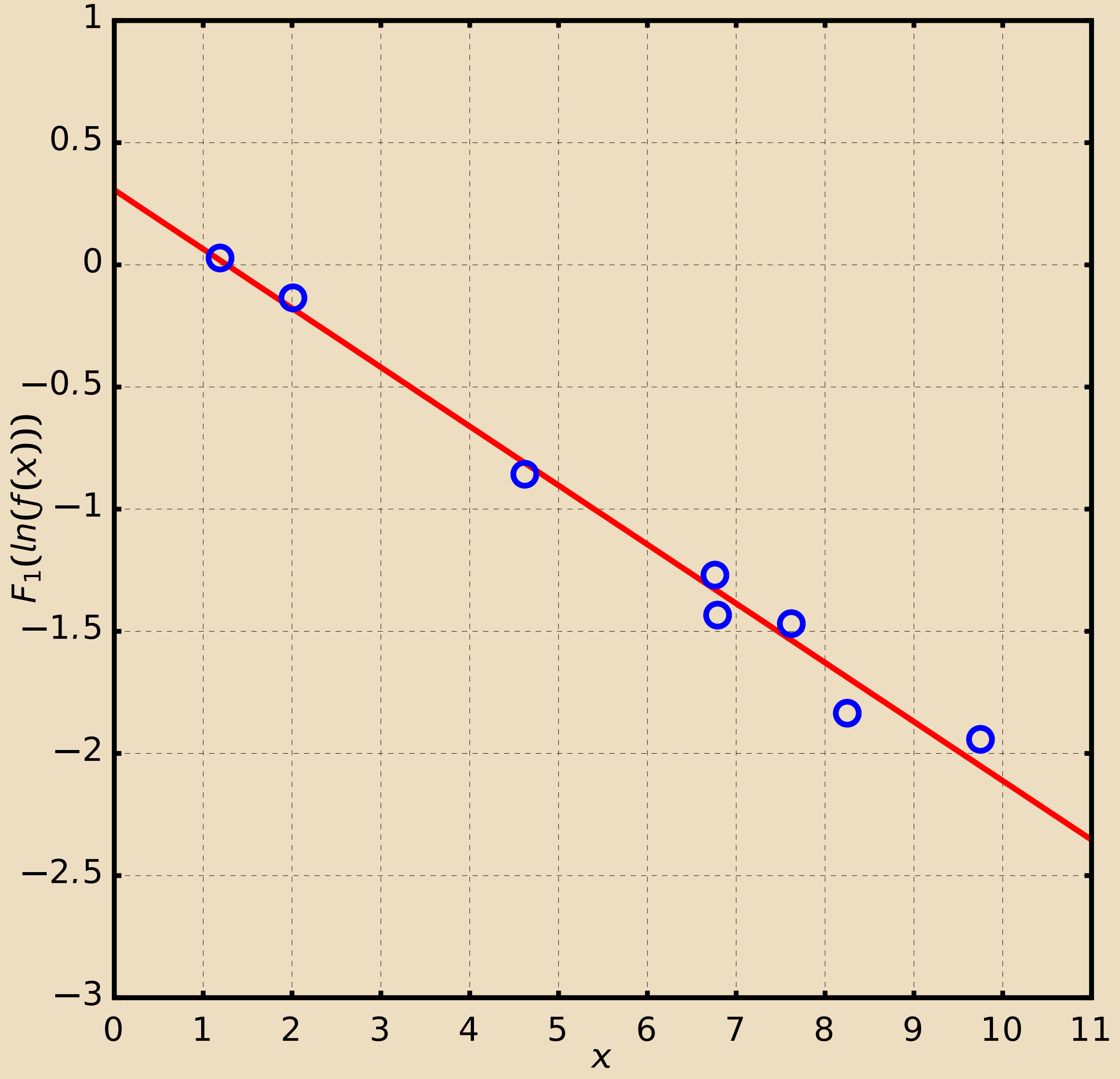

Figura 1: Teste de alinhamento - função $f_1(x) = ae^{-bx}$.

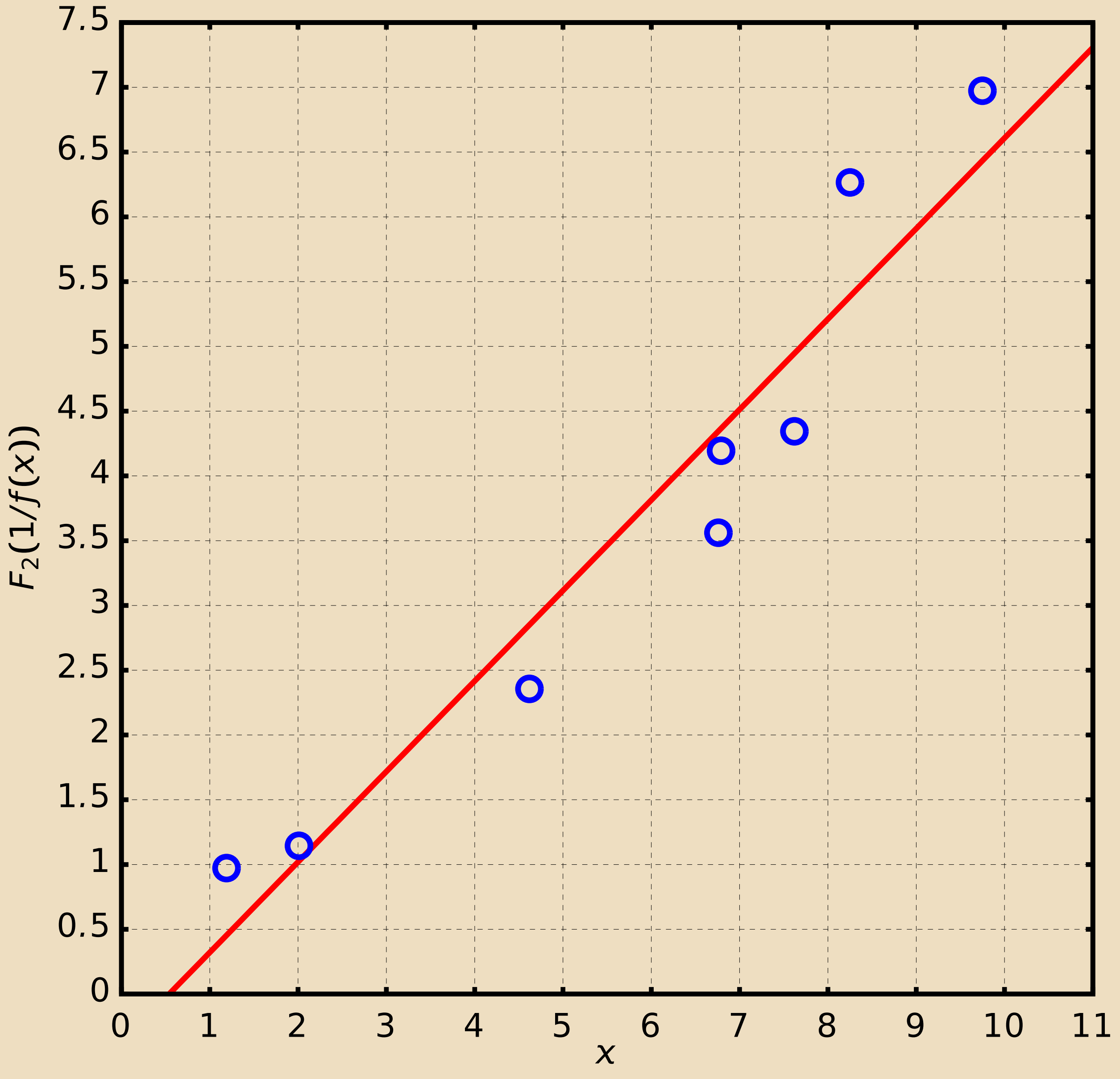

Figura 2: Teste de alinhamento - função $f_2(x) = \frac{1}{a+bx}$.

Um outro modo de verificar que $f_1(x)$ é a melhor ajuste, basta calcular o resíduo. O cálculo do resíduo

$$r = \sum_{k=1}^{n} [f_{\text{tab}}(x_k) - f(x_k)]^2$$

pode mostrar que de fato o ajuste usando $f_1(x) = ae^{-bx}$ é melhor que usando $f_2(x) = \frac{1}{a+bx}$. No caso em questão, o ajuste dos dados da tabela produz $f_1(x) = 1.39827\mathrm{e}^{-0.247853x}$ e $f_2(x) = (0.357804 + 0.477072x)^{-1}$. Calculando o resíduo para usando $f_1(x)$, temos que $r_1 = 0.0031327$ e usando $f_2(x)$ temos o resíduo é $r_2 = 0.0274268$. Pode-se notar que $r_1 < r_2$, confirmando o que o teste de alinhamento mostrou com relação a melhor função para o ajuste.

O gráfico abaixo mostra as funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ juntamente com os pontos da tabela. Pode se notar, pelo grau de proximidade entre a função de ajuste e os pontos, que $f_1(x)$ é a melhor função de ajuste para a função tabelada.

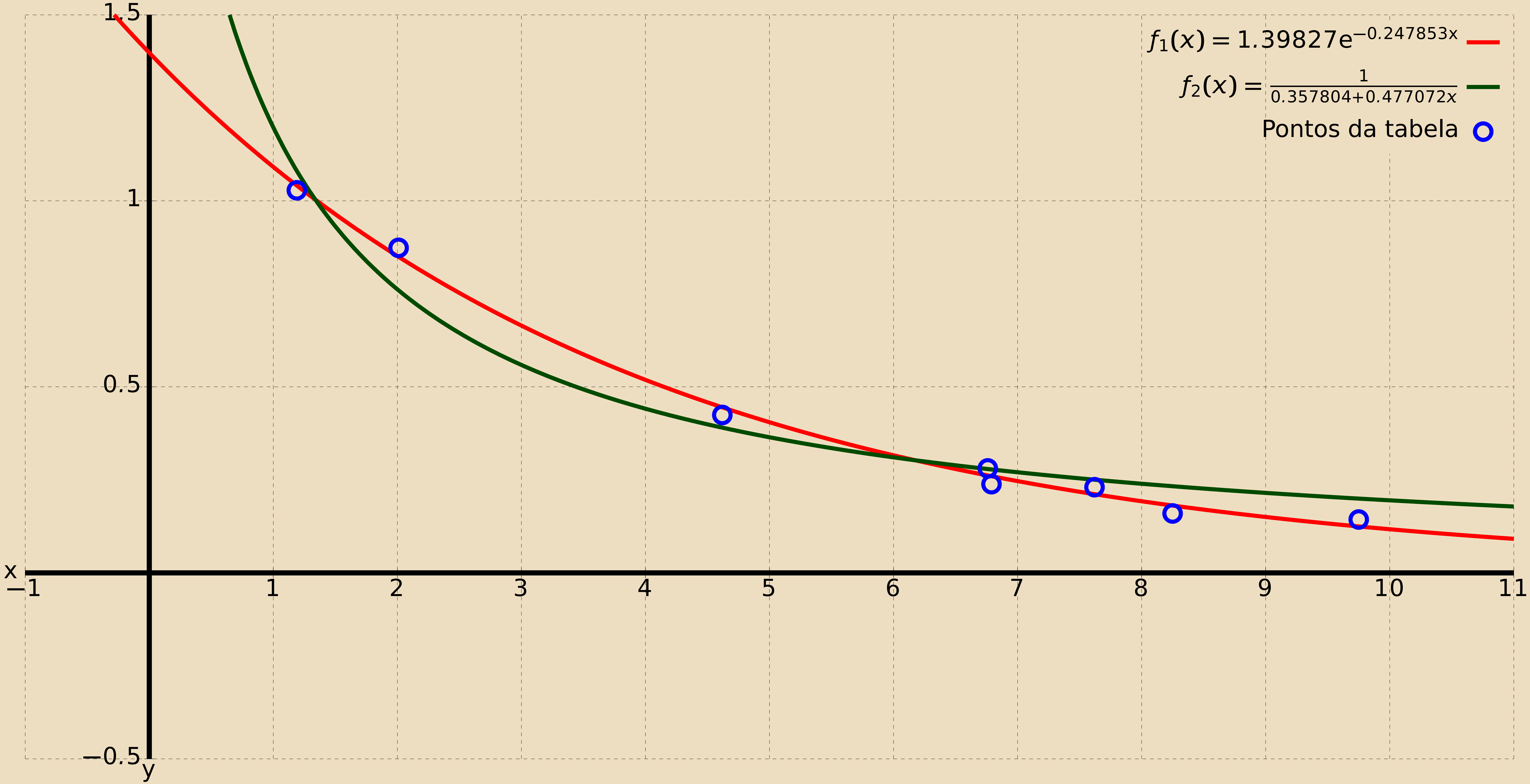

Figura 3: Gráficos das funções de ajuste $f_1(x)$ e $f_2(x)$.