

1 Luarea deciziilor în condiții de incertitudine și risc. Arborele decizional.

1.1 Noțiuni generale.

În activitatea economică zi de zi se iau decizii, scopul cărora este de a majora profitul, de a minimiza cheltuielile, de a preveni situații de pierderi majore și altele. În multe situații decidentul are la dispoziție informația necesară despre factorii, ce determină decizia luată. Astfel de situații se numesc de certitudine. De exemplu, la determinarea planului de producție a firmei se știe câte strunguri sunt și care este capacitatea lor de producere. Dar unele situații de activitate economică, decidentul activează în condiții de incertitudine. Această incertitudine poate fi creată atât de activitatea conștientă a concurenților, cât și de factorii necunoscuți care influențează asupra eficacității deciziei. Situația în care eficacitatea deciziei depinde de activitatea conștientă a concurenților poartă denumirea de “situație de conflict”. Aceste situații se analizează în teoria jocurilor (cap. 7) În cazul când incertitudinea nu este determinată de comportamentul concurenților se spune că sunt “jocuri cu natură”. În problemele economice în calitate de “natură” poate fi considerată cererea pe piață. Natura este definită prin „stările naturii” numite și evenimente posibile, care sunt rezultatul unei influențe, ”forțe” necunoscute, necontrolabile. Stările naturii formează un sistem complet de evenimente. “Jocurile cu natura” sunt situațiile care pot fi soluționate cu ajutorul metodelor propuse.

Se evidențiază următoarele două aspecte:

- se cunosc stările naturii – se spune că se iau decizii în condiții de incertitudine;
- se cunosc stările naturii și probabilitățile de apariție a fiecărei stări – deciziile se iau în condiții de risc.

Fie că sunt definite n stări ale naturii: S_1, S_2, \dots, S_n . decidentul are la dispoziție m decizii admisibile: D_1, D_2, \dots, D_m . Câștigul decidentului este dat de matricea consecințelor $A = \{a_{ij}\}$, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, unde a_{ij} este profitul (utilitatea) decidentului, dacă a fost aleasă decizia D_i și are loc starea naturii S_j .

	S_1	S_2	...	S_n
D_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
D_2	a_{21}	a_{12}	...	a_{12}
...
D_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

1.2 Luarea deciziilor în condiții de incertitudine.

Pentru luarea deciziilor în condiții de incertitudine sunt utilizate următoarele criterii:

1. *Criteriul maxi-max (criteriul optimistului).*

- pentru fiecare decizie D_i (în fiecare linie) se alege valoarea maximă a rezultatului: $a_i = \max_j a_{ij}, i = \overline{1, m}$
- din aceste maxime se alege valoarea maximă: $a^* = \max_i a_i$ sau $a^* = \max_i (\max_j a_{ij})$

a^* prezintă profitul maxim pe care speră să-l obțină decidentul, iar linia pentru care se realizează acest maximum corespunde deciziei optime.

2. *Criteriul Wald (maxi-min: criteriul pesimistului).*

- pentru fiecare decizie se alege valoarea minimă a rezultatului:
 $a_i = \min_j a_{ij}, i = \overline{1, m}$
- din aceste valori se alege valoarea maximă:
 $a^* = \max_i a_i$ sau $a^* = \max_i (\min_j a_{ij})$

3. *Criteriul Hurwicz.*

Este o combinație a celor două criterii. Se atribuie așa numitul coeficient de optimism persoanei de decizie: $\alpha \in [0, 1]$, astfel că $(1 - \alpha)$ este înclinația spre pesimism.

- pentru fiecare decizie se determină:

$$a_i = \alpha \max_j a_{ij} + (1 - \alpha) \min_j a_{ij}, i = \overline{1, m}$$

- se alege valoarea maximă:

$$a^* = \max_i a_i$$

4. *Criteriul lui Laplace (criteriul șanselor egale).*

Se acordă șanse egale de apariție fiecărei stări a naturii. Astfel, dacă avem n stări a naturii, probabilitatea de apariție a fiecărei stări va fi $\frac{1}{n}$.

- $a_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij} \quad i = \overline{1, m}$
- $a^* = \max_i a_i$

5. *Criteriul mini-max a regretelor (criteriul Savage)*

Savage a introdus noțiunea de “regret”, o măsură a pierderii datorată nealegerii celei mai bune variante. Regretul este măsurat prin diferența dintre rezultatul cel mai bun pe care l-ar fi putut realiza decidentul dacă ar fi știut ce stare a naturii urma să apară. Dacă în exemplul cercetat este aleasă decizia D_1 , dar are loc “starea naturii” 2 atunci “regretul” că n-a fost aleasă cea mai bună variantă va fi 0,5 ($3-2,5=0,5$). Astfel pentru a construi matricea regretelor R din elementul maxim pentru fiecare coloană a matricei consecințelor se scade rezultatul curent :

- $r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$
- se aplică criteriul mini-max matricei regretelor:

$$r^* = \min_i \max_j r_{ij}$$

1.3 **Luarea deciziilor în condiții de risc.**

Din lipsa totală de informații referitor la apariția stărilor naturii, criteriile de decizie în condiții de incertitudine nu furnizează un răspuns concludent referitor la decizia ce trebuie luată. În cazul în care pe lângă deciziile admisibile și stările naturii, se mai cunosc și probabilitățile de apariție a acestora, decizia poate fi mai corectă. De obicei se folosesc date statistice din trecut, dacă ne referim la vânzări, se testează piața dacă este vorba de lansarea unui produs nou, pentru condițiile climaterice se poate folosi prognoza meteo.

Probabilitatea unui eveniment, bazată pe date statistice și pe situații care rezultă printr-o experiență – definită clasic prin raportul dintre numărul cazurilor favorabile și numărul cazurilor posibile – poate fi numită probabilitate obiectivă.

Estimarea probabilităților de apariție a stărilor naturii poate avea loc însă un caracter subiectiv, deoarece depinde de decident, deci de factori psihologici, de intuiție, de experiență, precum și de informațiile cantitative și calitative posibile de obținut. O astfel de probabilitate numită probabilitate subiectivă, reflectă gradul de verosimilitate al apariției unei anumite stări a naturii. De exemplu, se consideră că există șansa de 40% ($p=0,4$) de a încheia un contract; este clar că această valoare nu poate fi obținută ca în cazul clasic, printr-o experiență sau un test.

Se vor nota prin p_1, p_2, \dots, p_n probabilitățile de apariție a stărilor naturii. Pentru determinarea deciziei optime în condiții de risc cel mai des sunt utilizate următoarele două criterii:

1. *Criteriul maximizării profitului scontat (așteptat).*

- pentru fiecare decizie se calculează profitul scontat:

$$V_i = \sum_{j=1}^n p_j a_{ij} \quad i = \overline{1, n}$$

- din toate deciziile se alege decizia care aduce un profit scontat maxim:

$$V^* = \max_i V_i$$

2. *Criteriul minimizării pierderilor așteptate.*

- în baza matricei regretelor se calculează pentru fiecare decizie pierderile medii așteptate:

$$R_i = \sum_{j=1}^n p_j r_{ij}$$

- se determină decizia care aduce o pierdere minimă:

$$R^* = \min_i R_i$$

1.4 **Arborele decizional.**

Criteriile cercetate mai sus se utilizează atunci când din mai multe decizii admisibile se alege decizia optimă o singură dată. Însă când există o ierarhie de decizii, adică o decizie depinde de decizia anterioară sau o ierarhie de consecințe, criteriile de mai sus nu pot fi utilizate. Arborele decizional se utilizează atunci când se iau câteva decizii la rând și când decizia curentă depinde de decizia precedentă sau consecința curentă depinde de o consecință anterioară.

Se desenează arborele decizional de la stânga spre dreapta. Conține noduri și ramuri.

Nodurile sunt de două tipuri:

1) Noduri de decizie figurate prin pătrate, pe care le vom numerota prin cifre. Din aceste noduri pleacă ramuri - linii întrerupte - ce reprezintă deciziile admisibile. Pe fiecare ramură se notează ce se va cheltui în caz dacă e aleasă decizia respectivă.

2) Noduri de consecințe reprezentate prin cercuri și marcate prin litere. Din aceste noduri pleacă consecințele reprezentate prin linii continue. Pe fiecare ramură de consecință se indică probabilitatea de apariție a consecinței respective.

De obicei, nodurile de decizie sunt urmate de cele de consecințe, dar nu e obligatoriu. La sfârșitul fiecărei consecutivități de ramuri de decizii și consecințe se va indica venitul.

Decizia optimă este aleasă prin cercetarea arborelui construit de la dreapta spre stânga. În nodurile de consecințe se va calcula profitul mediu sperat, iar în nodurile de decizie se va alege decizia optimă, comparând valorile medii ale rezultatelor, lăsând ramurile care corespund profitului mediu maxim și excluzând celelalte ramuri.

Inițial, se va cerceta un exemplu pentru care se poate crea matricea consecințelor și determina decizia optimă cu ajutorul metodelor deja cunoscute. Pentru aceeași situație se va construi arborele decizional și de asemenea se va determina decizia optimă, care, evident, va coincide cu cea obținută anterior. Apoi se va complica problema în așa fel încât să fie posibil de a fi soluționată doar cu ajutorul arborelui decizional.

Exemplul 1.3. Un client se adresează la o bancă pentru a obține un împrumut de 15000 lei pentru un an cu 15%. Însă banca va risca deoarece din experiența anilor trecuți se știe că doar 96% din clienți întorc banii. Ar fi mai sigur dacă acești bani ar fi investiți în obligații pentru care ar obține 9% cu o siguranță de 100%. Care este decizia optimă în așa situație.

Rezolvare. Inițial se va construi matricea consecințelor. Pentru început să vor determina care sunt deciziile admisibile și stările naturii.

D_1 – împrumută clientului S_1 – clientul întoarce banii
 D_2 – cumpără obligații. S_2 – clientul nu întoarce banii

Dacă se ia D_1 și are loc S_1 , cea ce înseamnă că banca împrumută clientului și clientul întoarce banii, atunci profitul băncii va fi de $1500 \cdot 0,15 = 2250$. Dar dacă se ia D_1 , dar are loc S_2 , cea ce înseamnă că banca împrumută clientului, dar clientul nu întoarce banii, atunci peste un an nu se vor întoarce nici cele 15000 lei.

Dacă se ia D_2 indiferent de starea naturii banca va avea un profit de $15000 \cdot 0,09 = 1350$

	S_1	S_2
D_1	2250	-15000
D_2	1350	1350

Se cunosc probabilitățile de realizare a stărilor naturii: $p_1 = 0,96$, $p_2 = 0,04$, deci pentru a determina decizia optimă se va utiliza criteriul maximizării profitului scontat.

$$V_1 = 2250 \cdot 0,96 + (-15000) \cdot 0,04 = 1560$$

$$V_2 = 1350 \cdot 0,96 + 1350 \cdot 0,04 = 1350$$

Decizia optimă este de a împrumuta clientului banii și în acest caz în mediu banca va avea un profit mai mare decât dacă ar cumpăra obligații.

Această problemă poate fi soluționată și cu ajutorul unui arbore decizional. Pentru dezvoltarea unui arbore decizional se consideră decizia care trebuie luată și se reprezintă printr-un pătrat (nod al arborelui), în partea stângă a unei reprezentări grafice. Din acest punct de start se trasează spre dreapta atâtea linii întrerupte (ramuri ale arborelui) egale cu numărul de alternative posibile pentru stabilirea deciziei precizându-se alternativa în dreptul fiecărei linii. În cazul problemei date sunt două ramuri (Figura 1.1), ce vor reprezenta cele două decizii admisibile:

a) Să împrumute clientului banii.

b) Să cumpere obligații.

În caz dacă se ia decizia de a împrumuta banii, sunt posibile două consecințe:

a) Clientul întoarce banii.

b) Clientul nu întoarce banii.

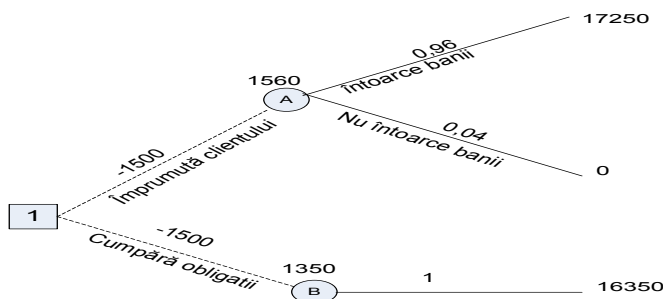


Figura 1.1 Arborele decizional pentru exemplul 1.3

În caz dacă se ia decizia de a cumpăra obligații, atunci poate avea loc doar o singură consecință: peste un an banca își va întoarce banii și cele 9%.

Atunci când se împrumută clientului sau se cumpără obligații trebuie să se cheltuiască 15000 lei, de aceea pe cele două ramuri de decizie se indică -15000.

Probabilitatea de apariție a consecinței “întoarce banii” e de 0,96, iar a consecinței “nu întoarce banii” e de 0,04. În nodul B este o singură consecință care are probabilitatea 1. Aceste probabilități sunt indicate pe ramurile respective.

În caz de consecutivitate “împrumută clientului” și clientul “întoarce banii”, peste un an în bancă se vor întoarce $15000 \cdot 1,15 = 17250$ lei. În caz dacă clientul

nu întoarce banii peste un an, banca va primi 0 lei. Și dacă se vor cumpăra obligații, atunci peste un an banca va avea un venit de $15000 \cdot 1,09 = 16350$.

Pentru a determina decizia optimă se începe cu calculul venitului mediu sperat, apoi a profitului mediu sperat în nodurile A și B.

Venitul mediu sperat în nodul A:

$$V(A) = 0,96 \cdot 17250 + 0,04 \cdot 0 = 16560$$

Profitul mediu sperat se va calcula prin scăderea din venit a cheltuielilor:

$$P(A) = 16560 - 15000 = 1560$$

Această cifră se indică asupra nodului A. (Figura 1.2)

Calcule asemănătoare se efectuează și pentru nodul B:

$$V(B) = 1 \cdot 16350$$

$$P(B) = 16350 - 15000 = 1350$$

Alegerea deciziei se începe din nodul decizional 1. E evident că se va lua o decizie care în mediu aduce un profit mai mare. Astfel decizia optimă este cea care duce spre nodul A. Cealaltă se lichidează (Figura 1.2). S-a obținut că banca va împrumuta clientului banii.

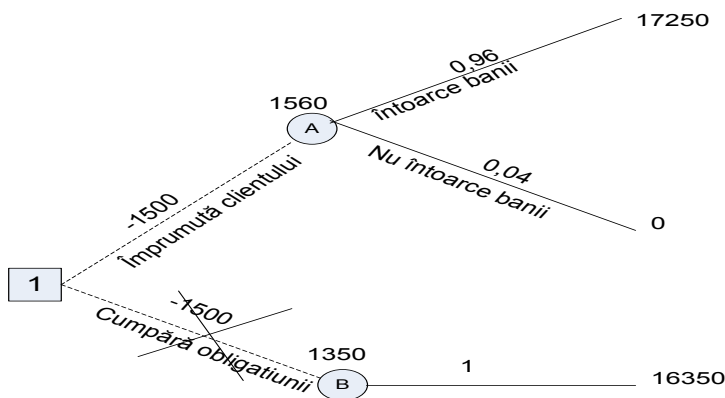


Figura 1.2 Luarea deciziei pe arborele decizional

1.5 Probe de control

1.1 Administrația unui teatru trebuie să comande pliante pentru un spectacol. Comanda costă 100 lei și pentru fiecare bucată comandată se mai plătește 4 lei. În rezultatul vânzării pliantelor teatrul obține un profit de 200 lei de la reclamă. Fiecare bucată este vândută cu 5 lei. Se știe că la un spectacol pot fi vândute de la 300 la 500 bilete. Însă doar 60% din spectatori procură pliante. Informația culeasă de la 40 de spectacole au arătat situația:

Numărul de spectatori	300	350	400	450	500
Numărul de spectacole	4	8	12	8	8

Determinați câte pliante trebuie să comande administrația teatrului ($\alpha=0,6$).

1.2 O firmă lansează un produs nou și este necesar să fie determinat prețul acestui produs. Secția de marketing, cercetând piața, a determinat volumul de vânzări pentru patru prețuri diferite: 10 lei, 11 lei, 12 lei, 13 lei în dependență de trei tipuri de cerere pe piață. Informația este structurată în tabelul de mai jos:

prețul	Cererea		
	mică	medie	mare
10 lei	90	100	110
11 lei	85	90	105
12 lei	70	80	100
13 lei	60	70	90

Datele din tabel trebuie înțelese astfel: dacă prețul va fi de 10 lei și cererea la produs va fi mică atunci se vor vinde 90 de unități, dacă va fi medie, atunci se vor vinde 100 unități ș. a. m. Costul unitar de producție este de 4 lei.

Să se determine prețul optim la produsul nou, dacă se ia decizie în condiții:

- de incertitudine ($\alpha=0,5$)
- de risc, dacă aceiași secție de marketing a apreciat că cererea poate fi mică cu probabilitatea 0,4, medie - 0,3, mare - 0,3

1.3 O firmă a cumpărat un teren pentru a construi un complex de vile. Prețurile de construcție ale acestora în funcție de numărul de camere. În urma studiilor efectuate au fost realizate trei proiecte de dimensiuni diferite: 6 vile cu 10 camere, 12 vile cu 20 de camere și 18 vile cu 30 de camere. Factorul cheie în selectarea uneia din cele trei alternative este evaluarea corectă de către managementul firmei a cererii viitoare. Cu toate că piața poate fi influențată prin publicitate, prețurile de cazare relativ mari fac ca cererea să depindă de o varietate de factori asupra cărora managementul nu are control

Managementul firmei crede că există două posibilități:

- acceptarea proiectului de către piață, astfel o cerere mare;
- cerere redusă.

și trei alternative:

- D1 – proiectul de dimensiune mică
- D2 – proiectul de dimensiune medie
- D3 – proiectul de dimensiune mare

Utilizând informația disponibilă, agentul decizional trebuie să evalueze pentru fiecare alternativă și stare a naturii profitul ce va fi obținut. În tabel sunt prezentate profiturile evaluate pentru problema analizată (în termeni de milioane de dolari)

Alternativă	Stări ale naturii	
	S1 (Cerere mare)	S2 (Cerere redusă)
D1 (Proiect de dimensiune mică)	8	7
D2 (Proiect de dimensiune medie)	14	5
D3 (Proiect de dimensiune mare)	20	9

Să se determine decizia optimă în condiții de incertitudine ($\alpha=0,6$) și în condiții de risc, dacă $p_1=0,8$ și $p_2=0,2$

1.4 O firmă produce o soluție chimică, care are termenul de valabilitate de o lună. Din cauza termenului de expirare mic, soluția nu poate fi produsă în cantități mari pentru depozitare, dar e nevoie de a produce atât cât se vinde. Volumul de soluție care va fi produs se planifică la începutul lunii pentru care se procură materia primă. Cererea la această soluție variază de la lună la lună, însă ea poate fi divizată în mică, medie și mare. Se cunosc probabilitățile celor trei stări.

Cerere	mică	medie	mare
Cantitatea	5 t	10 t	15 t
Probabilitatea	0,3	0,6	0,1

Costul de producție a unei tone de soluție este de 15000 lei. Prețul de vânzare este 24000 lei. Determinați decizia, care aduce venit mai mare utilizând arborele decizional.

1.5 Sunt două variante de a investi 10000 de lei pentru doi ani: A și B.

Varianta A constă în a depune acești bani la bancă cu 10% anual. Dobânda se capitalizează, adică dobânda din primul an va rămâne la bancă pentru al doilea an.

Varianta B propune de a da banii unei companii de investire, care are posibilitate de a investi acești bani la 9%, 10% sau 12%. În primul an șansele de investire la cele trei tipuri de procente sunt egale. Dacă banii în primul an au fost la 9%, acesta nu înseamnă că în al doilea an vor fi tot la 9%. Șansele pentru al doilea an de investire sunt date în tabelul de mai jos.

Primul an de investire	Al doilea an de investire		
	9%	10%	12%
9%	0,6	0,1	0,3
10%	0,1	0,8	0,1
12%	0,2	0,1	0,7

Care este varianta ce va aduce un profit mai mare?

1.6 O firmă își propune problema lansării pe piață a unui produs nou. Succesul va depinde de existența pe piață a unui produs competitiv, estimat la 70%, adică probabilitatea $p=0,7$, precum și de prețurile date de firmă și de concurenți acestui produs.

Se cunosc beneficiile pe care le poate realiza firma, pentru fiecare domeniu al prețului pe care îl poate fixa, în corelație cu prețurile posibile ale concurenței, date în tabel.

Prețul firmei	Beneficiul dacă prețul concurenței este			Beneficiu dacă nu este concurență
	scăzut	mediu	ridicat	
Scăzut	25	40	45	55
Mediu	35	45	50	75
Ridicat	15	25	54	90

Dacă nu lansează produsul, firma poate obține 20 u.m. prin vânzarea utilajului inutil.

Firma trebuie să-și fixeze prețul, deoarece produsul său va apare pe piață și apoi concurența va reacționa la prețul fixat de firmă. În tabelul de mai jos se dau estimări ale probabilităților privind prețurile concurentului față de cele ale firmei. De exemplu, probabilitatea ca prețul firmei să fie scăzut, iar cel al concurentului să fie mediu este 0,15.

Prețul firmei	Probabilitatea că prețul concurenței este		
	scăzut	mediu	ridicat
Scăzut	0,75	0,15	0,1
Mediu	0,2	0,7	0,1
Ridicat	0,1	0,3	0,6

Cu ajutorul arborelui de decizie determinați recomandarea care trebuie făcută firmei.