

Линейные рекуррентные соотношения.

1. Для каждого из следующих линейных рекуррентных соотношений найдите общее решение:

а) $a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0$;

б) $a_{n+2} + 9a_n = 0$;

в) $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$.

2. Найдите формулу для a_n , где последовательность $\{a_k\}$ удовлетворяет начальным условиям $a_1 = 2$, $a_2 = a_3 = 3$ и рекуррентному соотношению $a_k = 4a_{k-3} - 3a_{k-1}$.

3. Сколько существует строк из 20 нулей и единиц в которых никакие два нуля не стоят рядом?

4. Сколькими способами можно выложить $2 \times 2 \times n$ колонну кирпичами размера $2 \times 1 \times 1$?

5. Докажите, что последовательность с общим членом $a_n = n^{k-1}$ удовлетворяет соотношению

$$a_{n+k} - C_k^1 a_{n+k-1} + C_k^2 a_{n+k-2} + \dots + (-1)^k C_k^k a_n = 0.$$

6. Найдите такую последовательность $\{a_n\}$, что $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 2^n$.

Производящие функции

7. Пусть $s(n)$ обозначает количество всех подмножеств A множества $\{1, 2, \dots, n\}$, таких, что для любых двух $a, b \in A$ выполнено неравенство $|a - b| \geq 2$. Найдите производящую функцию для $s(n)$.

8. Вычислите $\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k \left(\frac{1}{17}\right)^k$.

9. Докажите тождества

а) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$;

б) $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} C_n^k = \frac{n}{n+1}$;

в) $n! = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k k^n$.

10. Докажите, что число неупорядоченных разбиений n на нечетные слагаемые равно числу неупорядоченных разбиений n на попарно различные слагаемые.

Числа Каталана и Фибоначчи

11. Найдите число сбалансированных скобочных последовательностей длины $2n$. Например, последовательность $((()())())$ сбалансирована, в отличие от последовательностей $()()()$ и $()(())()$.

12. Билеты стоят 50 рублей, и $2n$ покупателей стоят в очереди в кассу. Половина имеет 100 рублей (одной бумажкой), половина — 50. Kassир начинает продажу билетов, не имея денег. Сколько существует различных порядков в очереди, таких, что кассир всегда может дать сдачу?