Площ на двумерни и тримерни триъгълници и многоъгълници

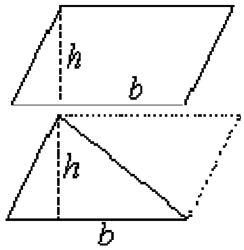
Изчисляването на площта на равнинен многоъгълник е основно в геометрията. Има няколко различни методи за това изчисляване в зависимост от известните данни.

Триъгълници

Класическата формула казва, че площта на успоредника (включително правоъгълник и квадрат) е равна на произведението на основата по височината към нея. Тъй като два еднакви триъгълника могат да се комбинират до успоредник, лицето му се изчислява като половината от произведението на основата му *b* и височината към нея *h*:

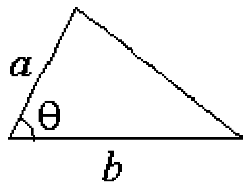
Успоредник: $A(\square) = bh$

Триъгълик: $A(\Delta) = \frac{1}{2} bh$



Все пак, освен в особените случаи (като правоъгълника например), намирането на височината към основата при каква да е ориентация на успоредника или триъгълника води до намирането на разстояние от точка до права (от върха до правата на избраната основа). Ако знаем дължините на две от страните на триъгълник, например (да ги означим с *a* и *b*), и ъгъла θ между тях, триъгълникът е определен до еднаквост (I признак) и би трябвало да можем да намерим лицето му. Като използваме тригонометрични функции, можем да намерим височината чрез $h = a \sin \theta$, и да получим формулата:

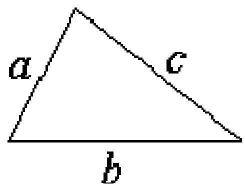
$$A(\Delta) = \frac{1}{2} ab \sin \theta$$



Често се използва и определеността до еднаквост по трети признак (три страни), за която лицето се изчислява с известната Херонова формула:

$$A(\Delta) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

където $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$



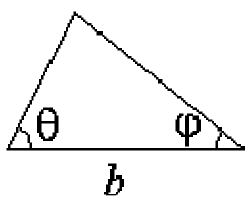
Тук *a*, *b* и *c* са дължините на страните, а *s* е полупериметъра. Има интересни алгебрични варианти на тази формула, като например:

$$A(\Delta) = \frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2 - \left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2},$$

която може да спести кореноването при намиране на дължините на страните, ако са дадени координатите на върховете.

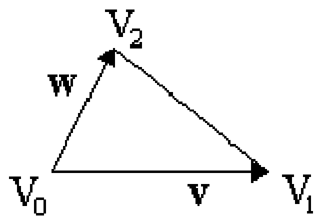
Последният признак за еднаквост (втори) води до необходимостта от още една формула за лицето – по страна и два прилежащи ъгъла. Нека са дадени ъглите θ и φ, прилежащи на основата *b*. Площта се задава като:

$$A(\Delta) = \frac{b^2}{2(\cot \theta + \cot \varphi)}$$



Линейната алгебра дава нови прости формули за изчисляването на лицето на успоредник (и триъгълник) даже в *тримерното пространство* (3D). Площта на успоредник се определя като модула на векторното произведение на двата определящи вектора (означавано със знак ×). Причината е, че $|\mathbf{v}\times\mathbf{w}| = |\mathbf{v}||\mathbf{w}||\sin\theta|$, където θ е ъгълът между двата вектора **v** и **w**. Така за 3D-триъгълник с върхове $V_0V_1V_2$, като определим $\mathbf{v}=V_1-V_0$ и $\mathbf{w}=V_2-V_0$, получаваме:

$$A(\Delta) = \tfrac{1}{2}\left|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\left(V_1-V_0\right)\times\left(V_2-V_0\right)\right|$$

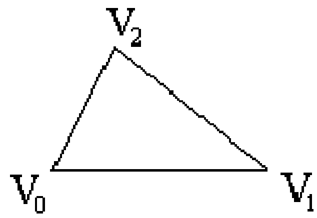


В *двумерното пространство* (2D) всеки вектор може да бъде разглеждан като 3D-вектор с трета координата нула. Това дава възможност да образуваме векторно произведение и на двумерни вектори, а оттам да изчисляваме и лицето им по същия начин. Ако имаме триъгълник с върхове $V_i=(x_i,y_i)=(x_i,y_i,0)$ за i=0...2, получаваме, че:

$$\left(V_1-V_0\right)\times\left(V_2-V_0\right) = \left(0, 0, \begin{vmatrix}(x_1-x_0) & (x_2-x_0)\\ (y_1-y_0) & (y_2-y_0)\end{vmatrix}\right)$$

Така абсолютната стойност на третата (z) компонента на получения вектор е колкото два пъти лицето на триъгълника. По-удачно е обаче да не вземаме абсолютната стойност, а да припишем на лицето "знак", който се оказва много полезен.

$$2A(\Delta) = \begin{vmatrix}(x_1-x_0) & (x_2-x_0)\\ (y_1-y_0) & (y_2-y_0)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x_0 & y_0 & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}$$
$$= (x_1-x_0)(y_2-y_0)-(x_2-x_0)(y_1-y_0)$$
където $\quad V_i = (x_i, y_i)$



Тази формула за площта се оказва много ефективно изчисление: няма коренуване, нито тригонометрични функции – само две умножения и пет сумирания (еветнуално и едно деление на 2, което често е несъществено). Сега ще отбележим, че полученото "лице" е *положително*, ако $V_0V_1V_2$ са ориентирани в посока, обратна на часовниковата стрелка (положителна в тригонометрията) и *отрицателно* в противен случай, което много често се оказва важна характеристика на точките. Аналогично е на проверка дали V_2 е отляво (положителен резултат) или отдясно (отрицателен) на ориентираната права V_0V_1 .

Четириъгълници

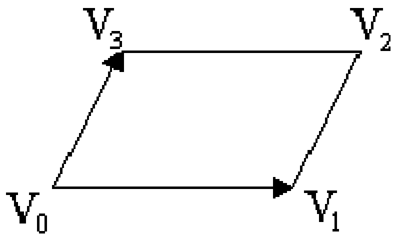
Успоредниците (и техните по-частни случаи като квадрати, правоъгълници и ромбове), както и трапеците, образуват по-специален клас четириъгълници. Сега търсим по-обща формула за изчисляване на лицето на какъв да е четириъгълник.
Оказва се, че Хероновата формула може да бъде разширена за намиране на лицето на ***вписан*** четириъгълник. Ако с **Θ** означим един такъв, дължините на страните му с *a*, *b*, *c* и *d*, а полупериметърът – с s=(a+b+c+d)/2, то за площта на **Θ** се получава:

$$A(\Theta) = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Ако положим едната страна, да речем, d=0, ще получим триъгълник (винаги вписан, естествено) и – Хероновата формула!

От съвременната ленейна алгебра е известно също, че лицето на равнинен успоредник се дава с модула на векторното произведение на двата съседни вектора, които го определят. Така за всеки тримерен равнинен успоредник $V_0V_1V_2V_3$ имаме:

$$A\left(V_0V_1V_2V_3\right)=\left|\left(V_1-V_0\right)\times\left(V_3-V_0\right)\right|$$

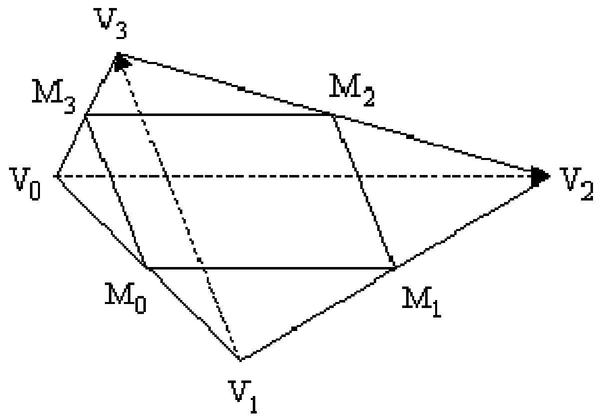


В двумерния случай, при върхове $V_i=(x_i,y_i)=(x_i,y_i,0)$ за i=0...3, получаваме:

$$\begin{aligned}A(\square)&=\begin{vmatrix}(x_1-x_0) & (y_1-y_0)\\(x_3-x_0) & (y_3-y_0)\end{vmatrix}\\&=(x_1-x_0)(y_3-y_0)-(x_3-x_0)(y_1-y_0)\end{aligned}$$

Това отново е площта със знак, както беше при триъгълниците.

За лицето на ***произволен четириъгълник*** може да се използва успоредника, открит от Пиер Вариньон (Pierre Varignon) през 1731 г. Учудващо е, че древните гърци не са го открили. Ако имаме произволен четириъгълник, можем да си построим успоредника, чиито върхове са средите на страните му. Площта му, както може да се докаже, е точно половината от площта на дадения четириъгълник. Нека за четириъгълника $\mathbf{\Theta}=V_0V_1V_2V_3$ наречем тези точки $M_0M_1M_2M_3$:



Известно е, че координатите на средата на отсечка се получават като полусбор на съответните координати на краищата на отсечката, така че лицето на $\mathbf{\Theta}$ може да се изчисли така:

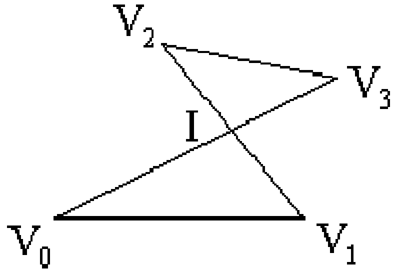
$$\begin{aligned}A(\Theta)&=2A\left(M_0M_1M_2M_3\right)\\&=2\left|\left(M_1-M_0\right)\times\left(M_3-M_0\right)\right|\\&=2\left|\left(\frac{V_1+V_2}{2}-\frac{V_0+V_1}{2}\right)\times\left(\frac{V_3+V_0}{2}-\frac{V_0+V_1}{2}\right)\right|\\&=\frac{1}{2}\left|\left(V_2-V_0\right)\times\left(V_3-V_1\right)\right|\end{aligned}$$

Вижда се, че това е половината от модула на векторното произведение на диагоналите на четириъгълника. Формулата остава в сила за тримерния случай. В двумерния ($V_i=(x_i,y_i)$) това се превръща във формула за *ориентираното лице на произволен четириъгълник*:

$$\begin{aligned}2A(\Theta)&=\begin{vmatrix}(x_2-x_0) & (y_2-y_0)\\(x_3-x_1) & (y_3-y_1)\end{vmatrix}\\&=(x_2-x_0)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_0)\end{aligned}$$

Тази формула за произволен четириъгълник е точно толкова ефективна, както и за тригъгълника: две умножения и пет събирания. За прости (несамопресичащи се) четириъгълници, площта е положителна отново ако върховете са разположени в посока, обратна на часовниковата стрелка и отрицателна в обратния случай. Въпреки това, формулата остава в сила и за самопресичащи се четириъгълници, само че е равна на разликата между площите на двете части, определени от самопресичането. По-долу с I е означена точката на самопресичане и за лицето на четириъгълника $\mathbf{\Theta}=V_0V_1V_2V_3$ имаме:

$$
\begin{aligned}
A(\Theta) &= A(\Delta V_0 V_1 I) + A(\Delta I V_2 V_3) \\
&= A(\Delta V_0 V_1 I) - A(\Delta I V_3 V_2)
\end{aligned}
$$



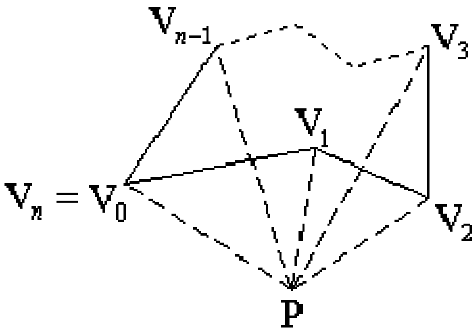
Многоъгълници

Двумерни многоъгълници

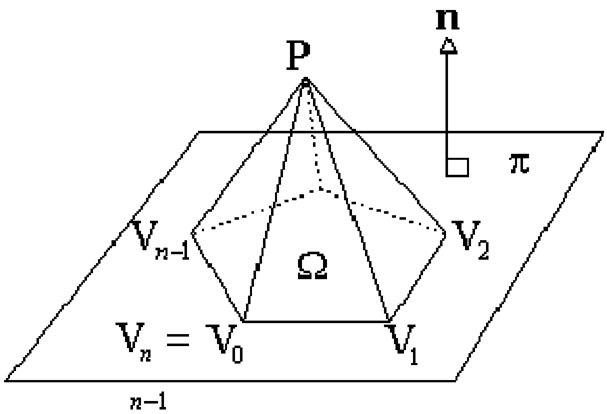
Двумерният многоъгълник може да бъде разбит на тригъглници. За изчисляване на площта на прости (несамопресичащи се) многоъгълници има много лесен метод на разбиване. Нека многоъгълникът $\mathbf{\Omega}$ да е дефиниран чрез множеството на върховете си $V_i=(x_i,y_i)$ за $i=0,1, ..., n$, като $V_n=V_0$. Нека още P е произволна точка в равнината. За всяка страна V_iV_{i+1} на $\mathbf{\Omega}$ да образуваме триъгълник $\Delta_i=\Delta PV_iV_{i+1}$. Площта на $\mathbf{\Omega}$ тогава е равна на сбора от ***ориентираните*** лица на всички Δ_i:

$$A(\Omega) = \sum_{i=0}^{n-1} A(\Delta_i)$$

където $\Delta_i = \Delta \mathbf{P} \mathbf{V}_i\, \mathbf{V}_{i+1}$

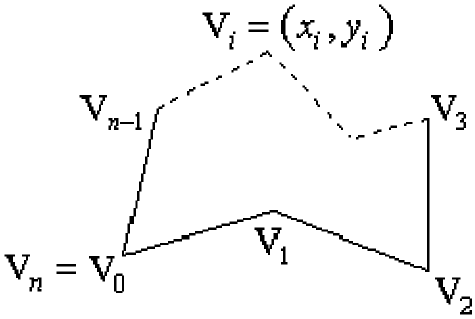


Ориентираните лица на триъгълниците наистина позволяват площите, външни за многоъгълника, да бъдат извадени и да остане точно лицето на $\mathbf{\Omega}$. Тази формула може да стане по-проста чрез избор на специалната точка P=(0,0) и разписване на площта на триъгълниците. Това довежда до:



$$
\begin{aligned}
2A(\Omega) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \left(x_i + x_{i+1}\right)\left(y_{i+1} - y_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \left(y_{i+1} - y_{i-1}\right)
\end{aligned}
$$

където $\mathbf{V}_i = (x_i, y_i)$, за $i \pmod{n}$



Второто и третото сумиране са еквивалентни на първото. За многоъгълник с n върха, първото сумиране използва $2n$ умножения и $(2n-1)$ събирания, второто - n умножения и $(3n-1)$ събирания, а третото - само n умножения и $(2n-1)$ събирания.
За предпочитане е третото, а за избягване на модула на всяка стъпка ($i(\mathrm{mod}\ n)$) се "разширява" многоъгълника чрез нов връх $V_{n+1}=V_1$.
Това изчисление дава ориентираното лице на многоъгълника, както беше при триъгълника. Има обаче и други, по-ефективни алгоритми за определяне на ориентацията на многоъгълник. Какви?