Задачи по геометрия

Задача 1 По дадени неколинеарни точки A, B и C да се намери центърът S на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Отговор: $S = \frac{1}{2}(A+B) + \frac{1}{2}\frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}}\overrightarrow{AB}^{\perp}$.

Забележки. (1) Знаменателят в горния израз е удвоеното лице на $\triangle ABC$. (2) Дробта е равна на $\operatorname{ctg}\sphericalangle C$. (3) Резултатът може да се запише и другояче – симетрично относно A, B и C, но в показания вид съдържа по-малко пресмятания.

Упътване. Търсената точка е пресечната на симетралите на AB и AC. Напишете параметрични уравнения на тези две прави, приравнете получените изрази и умножете резултата скаларно например с $\overrightarrow{AC}$.

Задача 2 По дадени неколинеарни точки A, B и C да се намери центърът I на вписаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Отговор: $I = A + \frac{1}{2\,p}(AC\cdot\overrightarrow{AB} + AB\cdot\overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2\,p}(BC\cdot\overrightarrow{A} + CA\cdot\overrightarrow{B} + AB\cdot\overrightarrow{C})$, където p е полупериметърът на $\triangle ABC$.

Забележка. Във втората форма резултатът е симетричен относно A, B и C, но съдържа повече пресмятания.

Решение. Изразяваме $\overrightarrow{AI}$ като линейна комбинация на $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ и в полученото заместваме $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AI}\times\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$ с изрази за удвоените лица на $\triangle ABI$, $\triangle AIC$ и $\triangle ABC$, в които участват AB, AC, p и радиусът на вписаната окръжност.

Задача 3 По дадени точка P, неколинеарни вектори $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ и $r > 0$ да се намери центърът C на окръжност с радиус r, вписана между лъчите с общо начало P и посоки – тези на $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$, а също допирните точки A и B на окръжността с лъчите.

Отговор: Ако $\mathbf{u}\times\mathbf{v} > 0$, $C = P + \frac{r}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\,(|\mathbf{v}|\mathbf{u} + |\mathbf{u}|\mathbf{v})$, $A = C - r\,\frac{\mathbf{u}^{\perp}}{|\mathbf{u}|}$ и $B = C + r\,\frac{\mathbf{v}^{\perp}}{|\mathbf{v}|}$. Ако $\mathbf{u}\times\mathbf{v} < 0$ в посочените изрази се разменят местата на $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

Решение. Изразяваме $\overrightarrow{PC}$ като линейна комбинация на $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ и в полученото заместваме $\mathbf{u}\times\overrightarrow{PC}$ и $\overrightarrow{PC}\times\mathbf{v}$ с изрази за удвоените лица на $\triangle PAC$ и $\triangle PCB$, в които участват $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ и r. След това намираме $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ като колинеарни съответно с $\mathbf{u}^{\perp}$ и с $\mathbf{v}^{\perp}$ и с дължина r.

Задача 4 По дадени точка P, неколинеарни вектори $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ и точка M да се намери образът P' на P при симетрия по посока $\mathbf{v}$ относно права през M, успоредна на $\mathbf{u}$.

Отговор: $P' = M + \frac{1}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}\,((\overrightarrow{MP}\times\mathbf{v})\mathbf{u} + (\overrightarrow{MP}\times\mathbf{u})\mathbf{v})$.

Решение. Нека N е такава, че $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MP'}$ (N е четвъртият връх в успоредника с върхове M, P и P'). Изразяваме $\overrightarrow{MN}$ като линейна комбинация на $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ и използваме, че $(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MP'})\times\mathbf{u} = \overrightarrow{MN}\times\mathbf{u} = 0$ и $(\overrightarrow{MP'} - \overrightarrow{MP})\times\mathbf{v} = \overrightarrow{PP'}\times\mathbf{v} = 0$, откъдето изразяваме $\overrightarrow{MP'}\times\mathbf{u}$ чрез $\overrightarrow{MP}\times\mathbf{u}$ и $\overrightarrow{MP'}\times\mathbf{v}$ чрез $\overrightarrow{MP}\times\mathbf{v}$.

Обща забележка по задачи 2, 3 и 4: използва се общата формула за разлагане на вектор по два други

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}((\mathbf{p}\times\mathbf{v})\mathbf{u} + (\mathbf{u}\times\mathbf{p})\mathbf{v}),$$

изведена на занятието.