СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дискретная математика является относительно молодой наукой, высокий интерес к которой в настоящее время связан с бурно развивающимися средствами вычислительной техники и информационными технологиями, в том числе и системами автоматизированного проектирования. Дисциплина «Дискретная математика» обеспечивает фундаментализацию образования, формирование мировоззрения и развитие логического мышления.

Роль и место дискретной математики определяется тремя факторами:

- дискретную математику можно рассматривать как теоретические основы компьютерной математики;
- модели и методы дискретной математики являются хорошим средством и языком для построения и анализа моделей в различных науках, включая химию, физику, биологию, генетику, экологию, психологию и др.;
- язык дискретной математики удобен и стал фактически метаязыком всей современной математики.

Математика как наука делится на континуальную и дискретную математику. То, что явно и неявно содержит идеи теории пределов и непрерывности, относится к континуальной математике. Все остальное – дискретная математика (т.е. алгебра, арифметика, теория множеств, математическая логика, комбинаторный анализ, теория графов, теория алгоритмов и многое другое).

Необходимым и достаточным для изучения основ дискретной математики является знание школьного курса математики. Знания, полученные из этого курса, будут полезны при изучении математического анализа, алгебры, теории вероятностей, функционального анализа и всех компьютерных дисциплин.

Пособие предназначено в первую очередь для студентов специальностей «Математика», «Информатика» и полностью соответствует действующему Государственному образовательному стандарту высшего профессионального образования. Оно может быть также использовано и для подготовки студентов по другим специальностям, например, по специальности «Информационные системы и технологии». Рассматриваемые в учебном пособии понятия иллюстрируются необходимыми примерами. В конце каждого параграфа содержатся задачи и упражнения с ответами.

Надеемся, что данная учебная разработка будет способствовать приобретению студентами необходимых знаний, умений и навыков, которые помогут им не только в изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин, но и в решении многих практических задач.

1. КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика – раздел математики, посвященный способам подсчета числа элементов в конечных множествах.

Комбинаторными объектами являются системы подмножеств: размещения, перестановки, сочетания, разбиения множества, покрытия конечного множества, блок-схемы, булевы функции, системы частично упорядоченных множеств и др.

Комбинаторные числа характеризуют число объектов в данном классе и зависят от некоторых параметров.

Комбинаторика решает для конечных множеств задачи следующего типа:

- выяснить, сколько существует элементов, обладающих заданным свойством;
- составить алгоритм, перечисляющий все элементы с заданным свойством;
- отобрать наилучший по некоторому признаку среди перечисленных элементов.

Мы будем заниматься только задачами первого типа. При этом речь будет идти об отборе r элементов с заданным свойством из конечного множества X, состоящего из n элементов. Результат этого отбора называется ***выборкой***. Интересующий нас вопрос – количество выборок заданного типа.

1.1 Основные правила комбинаторики

В качестве утверждений, принимаемых без доказательства, возьмем следующие:

1. *Отрезок натурального ряда* $[1,n]$ *содержит n элементов.*
2. *Если A и B – множества и существует биективное отображение* $\varphi: A \to B$, *то* $|A| = |B|$, *где* $|A|$ *– мощность множества A.*
3. $|\varnothing| = 0$.

Вторая аксиома носит название «Основной принцип комбинаторики» и является главным рабочим инструментом комбинаторики, потому как решение комбинаторных задач есть не что иное, как определение множеств A и B и построение биективного отображения φ, реализующего основной принцип комбинаторики.

Формулировка основных правил комбинаторики – это лишь другая формулировка свойств конечных множеств. Для наглядности предлагается следующая таблица.

Правила комбинаторики	Свойства конечных множеств
1. ***Правило суммы*** Если элемент *a* может быть выбран *m* способами, а элемент *b* *другими* *k* способами, то выбор одного из этих элементов – *a* или *b* может быть сделан *m*+*k* способами.	1. ***Правило суммы*** Пусть *A* и *B* – конечные и непересекающиеся множества, тогда $\lvert A\cup B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert$.
2. ***Правило произведения*** Если элемент *a* может быть выбран *m* способами, а после этого элемент *b* выбирается *k* способами, то выбор пары элементов (*a*, *b*) в заданном порядке может быть сделан *m*·*k* способами.	2. ***Декартово произведение*** Если *A* и *B* – конечные множества, то $A\times B$ – конечное множество и $\lvert A\times B\rvert = \lvert A\rvert \cdot \lvert B\rvert$. *Замечание.* Если *A* – конечное множество, то $\lvert A\times A\times \ldots \times A\rvert = \lvert A^n\rvert = \lvert A\rvert^n$
3. ***Правило включения-исключения*** Если свойством *S* обладает *m* элементов, а свойством *P* обладает *k* элементов, то свойством *S* и *P* обладает *m*+*k*-*l* элементов, где *l* – количество элементов, обладающих одновременно и свойством *S* и свойством *P*.	3. ***Правило включения-исключения*** Если *A* и *B* – конечные множества, тогда $\lvert A\cup B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert - \lvert A\cap B\rvert$.

Принцип включения-исключения (общий случай)

Пусть $M=\{m_1,\ldots,m_n\}$ – некоторое множество, элементы которого могут удовлетворять одному из следующих свойств: $p_1,\ldots,p_k$. Введем следующие обозначения:

A_i – множество тех элементов *M*, которые удовлетворяют свойству p_i;

$$A_{i_1 i_2\ldots i_r} = A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_r}\ (r\le k);$$

$M(r)$ – число элементов, удовлетворяющих точно r свойствам.

Тогда

$$M(r)=\sum_{i_1<\ldots<i_r}\left|A_{i_1i_2\ldots i_r}\right|-C_{r+1}^r\sum_{i_1<\ldots<i_{r+1}}\left|A_{i_1i_2\ldots i_{r+1}}\right|+ \\ +C_{r+2}^r\sum_{i_1<\ldots<i_{r+2}}\left|A_{i_1i_2\ldots i_{r+2}}\right|-\ldots+(-1)^j C_{r+j}^r\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_{r+j}}\left|A_{i_1i_2\ldots i_{r+j}}\right|+\ldots \qquad (1)$$

Приведем примеры на применение основных правил комбинаторики.

Пример 1. *Правило суммы.*

В зоомагазине четыре морские свинки и два хомяка. Сколько возможностей выбрать себе животное?

► В этом примере два множества: морские свинки и хомяки, необходимо выбрать один элемент из двух множеств (хомяка *или* свинку). Одну морскую свинку можно выбрать 4 способами, одного хомяка – двумя. По правилу суммы выбрать одно животное можно 4+2=6 способами. ◄

Пример 2. *Правило произведения.*

Пару перчаток можно выбрать 5 способами, а сумку – шестью. Сколькими способами можно выбрать перчатки с сумкой?

►Из двух множеств (множество перчаток и множество сумок) выбирается пара элементов (перчатки *и* сумка), поэтому число способов определяется как 5·6=30.◄

Пример 3. *Правило произведения.*

Из города *A* в город *B* ведет три дороги, а из города *B* в город *C* – 4 дороги. Сколькими способами можно добраться из *A* в *C* через *B*?

►Под способом попасть из *A* в *C* через *B* надо понимать упорядоченную пару: дорога, по которой перемещаются из *A* в *B* – первый элемент в паре, а дорога, по которой перемещаются из *B* в город *C* – второй элемент в паре. Обозначим:

M_{AB} – множество дорог, ведущих из *A* в *B*;

M_{BC} – множество дорог, ведущих из *B* в *C*.

Тогда исходная задача сводится к нахождению числа элементов в декартовом произведении этих двух множеств, т.е. $\left|M_{AB}\times M_{BC}\right|=\left|M_{AB}\right|\cdot\left|M_{BC}\right|$=3·4=12. ◄

Пример 4. *Правило произведения.*

В микроавтобусе 10 мест, одно из которых – место водителя. Сколькими способами можно рассадить 10 человек, если место водителя могут занять только трое из них?

►Начнем с места водителя. Имеется 3 способа занять его место. Следующее место может занять любой из девяти оставшихся пассажиров, т.е. 9 способов. Далее, следующее место может занять любой из восьми оставшихся, т.е. 8 способов, и так далее. По правилу произведения получаем всего возможностей $3 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot 9!$ ◄

Пример 5. *Правило произведения.*

Назовем натуральное число «симпатичным» , если в его записи встречаются только нечетные цифры. Сколько существует 4-значных «симпатичных» чисел?

►Понятно, что однозначных «симпатичных» чисел ровно 5. К каждому однозначному «симпатичному» числу вторая нечетная цифра может быть дописана пятью различными способами. Таким образом, двузначных «симпатичных» чисел всего 5 • 5 = 25. Аналогично, трехзначных «симпатичных» чисел 5 • 5 • 5 = 125, и четырехзначных – 5 • 5 • 5 • 5 = 54 = 625. ◄

Пример 6. *Правило произведения и правило суммы.*

Из города A в город B ведет три дороги, а из города B в город C – 4 дороги; имеются также пять дорог из A в C, не проходящих через B. Сколькими способами можно добраться из A в C, используя указанные дороги?

►Множество дорог, ведущих из A в B обозначим – M_{AB}, а множество дорог из города B в город C – M_{BC}. Множество всех способов добраться из A в C разобьем на два непересекающихся подмножества: I – способы добраться из A в C через B, II – способы добраться из A в C, минуя B. Тогда по правилу суммы число способов попасть из A в C равно $|I| + |II| = |M_{AB} \times M_{BC}| + |II| = 3 \cdot 4 + 5 = 17$.◄

Пример 7. *Правило произведения и правило суммы.*

В магазине «Все для чая» продается 5 чашек, 3 блюдца и 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить два предмета с разными названиями?

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

►Возможны три разных случая: первый – покупаются чашка с блюдцем, второй – чашка с ложкой, третий – блюдце и ложка. В каждом из этих случаев легко сосчитать количество возможных вариантов (в первом – 15, во втором – 20, в третьем – 12). Складывая, получаем общее число возможных вариантов: 47. ◄

Пример 8. *Принцип включения-исключения.*

На полке стоят фотографии супругов. На десяти из них изображена супруга, на шести – супруг, на трех – они вместе. Сколько всего фотографий?

►Множество изображений жены – A, его мощность $|A| = m = 10$, мощность множества изображений мужа – $|B| = k = 6$. Пересечение этих множеств – совместные фотографии, их количество – $|A \cap B| = l = 3$. По формуле включения-исключения. Всего фотографий: $m+k-l=10+6-3=13$. ◄

Пример 9. *Принцип включения-исключения (общий случай).*

На одной из кафедр университета работают 13 человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Девять человек знают английский, восемь – немецкий, пять – французский. Пятеро знают английский и немецкий, трое – английский и французский и двое – немецкий и французский. Ответьте на следующие вопросы:

1. Сколько человек знают все три языка?
2. Сколько человек знают только английский?
3. Сколько человек знают ровно два языка?

►1. Обозначим через K множество сотрудников кафедры, через K_x – множество сотрудников, знающих язык x. Тогда

$$13 = |K_а| + |K_н| + |K_ф| - |K_{а,н}| - |K_{а,ф}| - |K_{н,ф}| + |K_{а,н,ф}| =$$
$$= 9 + 8 + 5 - 5 - 3 - 2 + |K_{а,н,ф}| = 12 + |K_{а,н,ф}|$$

Следовательно, только один человек знает все три языка.

2. Подсчитаем число людей, знающих только английский язык.

$$M(а) = |K_а| - |K_{а,н}| - |K_{а,ф}| + |K_{а,н,ф}| = 9 - 5 - 3 + 1 = 2 .$$

3. Число сотрудников знающих ровно два языка равно:

$$\left(\left|K_{а,н}\right|-\left|K_{а,н,ф}\right|\right)+\left(\left|K_{а,ф}\right|-\left|K_{а,н,ф}\right|\right)+\left(\left|K_{н,ф}\right|-\left|K_{а,н,ф}\right|\right)=4+2+1=7. \blacktriangleleft$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1. Сколькими способами можно подарить сувенир из имеющихся 6 авторучек, 7 брелоков и 3 альбомов?

   Ответ: 16.
2. В городе 4 ночных клуба, 3 ресторана и 10 кафе. Сколько вариантов для проведения досуга в субботний вечер?
3. *Ответ*: 17.
4. Сколько существует вариантов поездки в санаторий, если туда можно добраться самолетом, тремя автодорогами или по железной дороге?

   Ответ:5.
5. Староста одного класса дал следующие сведения об учениках: «В классе учатся 45 человек, в том числе 25 мальчиков; 30 учеников учатся на «хорошо» и «отлично», в том числе 16 мальчиков. Спортом занимаются 28 учеников, в том числе 18 мальчиков и 17 школьников, которые учатся на «хорошо» и «отлично». 15 мальчиков учатся на «хорошо» и «отлично» и занимаются спортом». Докажите, что в этих сведениях есть ошибка.
6. В отделе НИИ работают несколько сотрудников, знающих хотя бы один иностранный язык. Из них 6 человек знают английский, 6 – немецкий, 7 – французский, 4 – английский и немецкий, 3 – французский и немецкий, 2 – французский и английский, 1 человек знает все три языка. Сколько человек работает в НИИ? Сколько человек знает только английский язык? Сколько человек знает только один язык?

   Ответ: 11, 1, 4.

Указание. Задачи 4 и 5 решить также с помощью диаграмм Эйлера.

7. Сколько чисел среди первых 100 натуральных чисел не делятся ни на одно из чисел 2, 3, 5?

   Ответ: 74.

Указание. Количество натуральных чисел, не делящихся на m и не превосходящих p, равно целой части $\left[\frac{m}{p}\right]$ числа $\frac{m}{p}$.

8. Сколько чисел среди первых 1000 натуральных чисел, не делящихся ни на одно из чисел 3, 4, 5?

   Ответ: 400.

9. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из букв слова «студент»?

   Ответ:10.

10. Сколько существует двузначных четных чисел в десятичной системе счисления?

    Ответ: 45.

Указание. Первая цифра может быть любой, кроме нуля.

11. Сколько существует двузначных чисел в десятичной системе счисления, в которых нет одинаковых цифр?

    Ответ: 81.

12. Сколько существует нечетных трехзначных чисел?

    Ответ: 450.

13. Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну козу, если на ферме 20 овец и 24 козы? Если выбор такой уже сделан, сколькими способами можно сделать его еще раз?

    Ответ: 480, 437.

14. Сколькими способами можно выбрать по одному экземпляру каждого учебника, если имеется 3 экземпляра учебника физики, 7 учебников биологии и 10 экземпляров учебника химии?

    Ответ: 210.

15. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 20 два числа так, чтобы их сумма была нечетным числом?

    Ответ: 100.

16. Сколькими способами можно выбрать согласную и гласную буквы из слова «здание»? Из слова «кабинет»?

Ответ: 9, 12.

17. Сколькими способами можно совершить круговой рейс из A в B и обратно, если на обратном пути выбирать новую дорогу и известно, что A и B соединены семью дорогами?

    Ответ: 42.

18. У некоторых народов принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если ему дают не более трех имен, а общее число имен равно 300?

    Ответ:26820600.

1.2 Типы выборок

Выборки делятся по двум признакам:

- важен ли порядок отбора элементов;
- есть ли среди отобранных элементов одинаковые.

Количество элементов в исходном множестве X будем считать – n, а r – количество элементов в выборке.

Упорядоченный набор элементов (важен порядок), среди которых нет повторяющихся, называется ***размещением*** из n элементов по r. Количество размещений обозначается A_n^r.

Пример 10. Определить трех победителей в турнире, если участвуют двадцать человек.

►Определяя трех победителей в турнире среди 20 участников, мы составляем размещения из 20 элементов по 3, так как порядок в этом списке важен (первое, второе, третье место), и ни одна из фамилий не может появиться в нем дважды.◄

Дадим другое определение размещения, используя понятие отображения. Обозначим отрезок натурального ряда через $[1;r]_N$, т.е. это натуральные числа от 1 до r.

Размещением длины r элементов множества X называется *инъективное* отображение множества $[1;r]_N$ в множество X.

Чтобы определить ***число размещений*** A_n^r рассмотрим следующую задачу.

Сколько упорядоченных наборов $(x_1, x_2, ..., x_r)$ *можно составить из n элементов, если все элементы набора различны?*

►Первый элемент x_1 можно выбрать n способами. Если первый элемент уже выбран, то второй можно выбрать лишь n-1 способами, а если выбран $r-1$ элемент $x_1, x_2, ..., x_{r-1}$, то элемент x_r можно выбрать $n-(r-1)=n-r+1$ способами (повторение уже выбранного элемента не допускается). По правилу произведения получаем

$$A_n^r = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-r+1) \tag{2}$$

Эту формулу можно записать иначе, используя обозначение $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$. Так как

$$A_n^r \cdot (n-r)! = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-r+1) \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = n!,$$

то окончательно имеем

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \blacktriangleleft \tag{3}$$

Пример 11. Сколько может быть различных списков победителей турнира (первое, второе, третье место), если было 20 участников?

►Здесь n=20 и r=3, тогда искомое число равно

$$A_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = 20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840 . \blacktriangleleft$$

Пример 12. Имеется 15 различных книг и книжная полка, вмещающая 12 книг. Сколько способов заполнить книжную полку, используя имеющиеся книги?

►Заполнить полку – это значит сопоставить месту на полке книгу, т.е. задать отображение из множества мест во множество книг, при этом, поскольку любая

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

книга не может заполнить более одного места, отображение инъективно. Значит число способов заполнения полки равно

$$A_{15}^{12} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 4 = \frac{15!}{3!} = 217945728000. ◄$$

Пример 13. В кабину лифта 9-этажного дома вошло 3 пассажира, каждый из них может выйти на любом из 8-ми этажей. Сколько способов разгрузки лифта, при которых на каждом этаже выходит не более одного пассажира?

►Необходимо задать отображение из множества этажей на множество пассажиров. Учитывая то, что один человек не может выйти более чем на одном этаже, делаем вывод: отображение инъективно. Следовательно, количество таких способов разгрузки определяется как $A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.◄

Упорядоченный набор элементов, среди которых могут быть одинаковые, называется ***размещением с повторениями***. Количество таких выборок обозначается $\overline{A}_n^r$.

Пример 14. Сколько различных трехзначных автомобильных номеров можно составить из десяти имеющихся цифр.

►Составляя различные трехзначные автомобильные номера из десяти цифр, мы имеем дело с размещениями с повторениями из 10 по 3, так как порядок цифр имеет значение, но в номере могут встречаться одинаковые цифры. ◄

Выведем формулу ***количества размещений с повторениями***.

Определить количество всех упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ *длины r, которые можно составить из элементов множества X* ($|X| = n$), *если выбор каждого элемента* x_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ *производится из всего множества X.*

►Упорядоченный набор $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ – это элемент декартова произведения $X \times X \times \ldots \times X = X^r$, состоящего из r одинаковых множителей X. По правилу произведения количество элементов множества X^r равно $\left|X^r\right| = |X|^r = n^r$.

Таким образом, формула имеет вид

$$\overline{A}_n^r = n^r \quad ◄ \tag{4}$$

Пример 15. Сколько четырехзначных номеров можно составить, если использовать все десять цифр?

►Здесь n=10 и r=4, тогда искомое число равно $\overline{A}_{10}^4 = 10^4 = 10000$.◄

Пример 16. В НИИ работает 4 курьера. Сколько существует способов разослать 7 писем в 7 различных организаций, если доставка осуществляется только курьерами, работающими в НИИ?

►Способ доставки – это отображение из множества писем во множество курьеров, поэтому число способов доставки писем равно $\overline{A}_4^7 = 4^7 = 16384$.◄

Пример 17. В кабину лифта 9-этажного дома вошло 3 пассажира, каждый из которых может выйти на любом из 8-ми этажей. Сколькими способами можно осуществить разгрузку лифта?

►Способ разгрузки – это указание, на каком этаже выходит первый пассажир, на каком – второй, и на каком третий, т.е. множеству пассажиров сопоставляется множество этажей. Следовательно, число способов осуществления разгрузки лифта $\overline{A}_8^3 = 8^3 = 512$.◄

Пример 18. Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

►Порядок в полученных выборках важен, но при этом могут встречаться повторения, поэтому имеем дело с размещениями с повторениями. Окончательно получаем: 8.◄

Пример 19. Каждую клетку квадратной таблицы 2 × 2 можно покрасить в черный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?

►Необходимо, используя две краска, раскрасить четыре клетки, то есть множество, из которого составляются четырехэлементные выборки, состоит из 2-х элементов. Очевидно то, что будут повторения, следовательно, это размещения с повторениями. Ответ: 2^4. ◄

Пример 20. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более, чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?

►Посчитаем отдельно количество одно-, двух-, трех- и четырехбуквенных слов. Из трех букв однобуквенных слов можно составить только три слова. Количество двухбуквенных слов определяем как количество размещений с повторениями - 3^2. Аналогично рассуждая, трехбуквенных слов будет - 3^3, и четырехбуквенных - 3^4. Итого, в сумме получим количество слов в алфавите Мумбо-Юмбо 120 слов. ◄

Рассмотрим частный случай размещения без повторений. Если $n = r$, то в размещении участвуют все элементы множества X.

Выборки, имеющие одинаковый состав и отличающиеся друг от друга только порядком элементов, называются ***перестановками без повторений***. Количество таких выборок обозначается через P_n.

Количество перестановок из n элементов вычисляется по формуле:

$$P_n = A_n^n = n! \tag{5}$$

Дадим еще одно определение перестановкам, применяя аппарат отображений.

Перестановками элементов конечного непустого множества X называется *биективное* отображение множества $[1;n]_N$ в X.

Пример 21. Сколькими способами можно выстроить очередь в кассу, если билеты хотят купить 6 человек?

►Количество таких способов равно $P_6 = 6! = 720$.◄

Пусть множество X состоит из k различных элементов: $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$.

> ***Перестановкой с повторениями*** состава $(r_1, r_2, ... r_k)$ называется упорядоченный набор длины $n = r_1 + r_2 + ... r_k$, в котором элемент x_i встречается r_i раз ($i = 1,2,...,k$). Количество таких перестановок обозначается $P_n(r_1, r_2, ..., r_k)$.

Пример 22. Из букв $\{a, b, c\}$ записать перестановку с повторением состава $(2, 2, 1)$. ►Длина ее равна n=2+2+1=5, буква a входит 2 раза, b – 2 раза, c – один раз. Такой перестановкой будет, например, (a, b, a, b, c) или (b, c, a, a, b).◄

Выведем формулу ***количества перестановок с повторениями***.

►Занумеруем все одинаковые элементы, входящие в перестановку, различными индексами, т.е. вместо перестановки (a, b, a, b, c) получим (a_1, b_1, a_2, b_2, c). Теперь все элементы перестановки различны, а количество таких перестановок равно $n! = (r_1 + r_2 + ... + r_k)!$. Первый элемент встречается в выборке r_1 раз. Уберем индексы у первого элемента (в нашем примере получим перестановку (a, b_1, a, b_2, c)), при этом число различных перестановок уменьшится в $r_1!$ Раз, т.к. при изменении порядка одинаковых элементов наша выборка не изменится. Уберем индексы у второго элемента – число перестановок уменьшится в $r_2!$ раз. И так далее, до элемента с номером k – число перестановок уменьшится в $r_k!$ раз. Получаем формулу

$$P_n(r_1, r_2, ..., r_k) = \frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot ... \cdot r_k!}. \blacktriangleleft \qquad (6)$$

Пример 23. Сколько различных «слов» можно получить, переставляя буквы слова «университет»?

►В этом слове буквы «и», «е» и «т» встречаются два раза., остальные по одному разу, значит речь идет о перестановке с повторениями состава (2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1) длины n=2+2+2+1+1+1+1+1=11. Количество таких перестановок равно

$$P_{11}(2,2,2,1,1,1,1,1) = \frac{11!}{2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 4989600. \blacktriangleleft$$

Пример 24. Сколькими способами можно расположить в ряд 5 черных, 4 белых и 3 красных фишки?

►Имеются фишки трех различных видов: черных r_1=5, белых $r_2=4$ и красных $r_3=3$. Всего фишек n=12. Следовательно, по формуле (6) имеем $P_{12}(5,4,3)=\frac{12!}{5!\cdot 4!\cdot 3!}=27720$.◄

Пример 25. Семь девушек водят хоровод. Сколькими способами они могут встать в круг?

►Если бы девушки стояли на месте, то получилось бы 7! способов перестановок в ряду. Но они кружатся и их положение относительно окружающих предметов несущественно. Важно только их положение относительно друг друга, поэтому перестановки, переходящие друг в друга при кружении (циклическом сдвиге), надо считать одинаковыми. При циклическом сдвиге из каждой перестановки можно получить шесть новых, но тогда количество интересующих нас перестановок равно $\frac{7!}{7}=6!$. Обобщая эту задачу на случай n элементов, расположенных по кругу, то число различных перестановок (n-1)!. ◄

Неупорядоченный набор элементов, среди которых нет повторяющихся, называется ***сочетанием без повторений*** из n элементов по r. Количество сочетаний обозначается C_n^r.

Пример 26. Из 25 студентов надо выбрать 7 на уборку территории.

►Здесь порядок не важен, и одному студенту две метлы не взять, следовательно, мы имеем дело с сочетанием из 25 по 8. ◄

Теперь дадим определение сочетаниям на языке теории множеств, тем самым, в очередной раз, подчеркивая неразрывную связь комбинаторики с этим разделом математики.

Сочетаниями без повторений длины r из элементов множества X называются r-элементные подмножества множества X.

Для определения ***количества сочетаний без повторений*** рассмотрим следующую задачу.

Сколько различных множеств из r элементов можно составить из множества, содержащего n элементов?

►Будем составлять сначала упорядоченные наборы по r элементов в каждом – это размещения из n элементов по r Количество таких наборов равно $A_n^r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$. Теперь учитывая, что порядок записи элементов не имеет значения, получаем из $r!$ различных размещений, отличающихся только порядком, одно сочетание. Например, два различных размещения $(a,\ b)$ и $(b,\ a)$ из двух элементов соответствуют одному сочетанию $\{a,\ b\}$. Таким образом, число сочетаний C_n^r в $r!$ раз меньше числа размещений A_n^r:

$$\frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!} \quad ◄ \tag{7}$$

Пример 27. В студенческой группе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать из них трех человек для участия в профсоюзной конференции факультета?

►Представители, выбранные на конференцию, - трехэлементное подмножество множества студентов группы, поэтому число способов выбора определяется как $C_{25}^3 = \dfrac{25!}{3! \cdot 22!} = \dfrac{23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2300$.◄

Пример 28. Сколькими способами можно выбрать три различные краски из имеющихся пяти?

►Необходимо подсчитать трехэлементные выборки из пяти элементов. При этом среди выбранных элементов не должно быть одинаковых и порядок их расположения не существенен. Следовательно, надо найти число неупорядоченных выборок, т.е. сочетаний без повторений из 5 по 3.

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = 10 .◄$$

Неупорядоченный набор элементов, среди которых встречаются одинаковые, называется ***сочетанием с повторениями***. Обозначение количества таких выборок – $\overline{C}_n^r$.

Пример 30. 65 студентов необходимо разместить по 4 аудиториям.

►Выдадим каждому студенту жетон с номером аудитории, получим выборку: 1,2,1,2,2,3,4,4,4,…,1,3. В выборке 65 элементов ($r=65$), а значений – номеров аудиторий – четыре (n=4). Чтобы определить, важен ли порядок, поменяем местами двух человек. Выборка не изменилась, потому что количество человек в каждой аудитории осталось прежним. Следовательно, порядок не важен. Разберемся с повторениями: номера аудиторий могут повторяться. Таким образом, мы имеем дело с сочетанием с повторениями. ◄

Выведем формула для подсчета ***количества сочетаний с повторениями***.

►Рассмотрим вывод формулы на следующем примере: с трех различных негативов (n=3) надо напечатать пять фотографий (r=5). Здесь порядок печати не важен, а в полученном наборе обязательно найдутся одинаковые фотографии – это сочетания с повторениями из трех элементов по пять. Нужно составить набор из 5 фотографий. Такие наборы будут отличаться только своим составом, а не порядком фотографий. Например, разными будут наборы состава (3,1,1) и (1,0,4) – первый содержит три фотографии с первого негатива и по одной со второго и третьего, а другой состав – одну с первого и четыре с третьего (рис.1а, 1б). Разложим эти наборы, разделяя фотографии с разных негативов кругами. Кругов понадобится n-1 штук. В нашем примере с фотографиями – два.

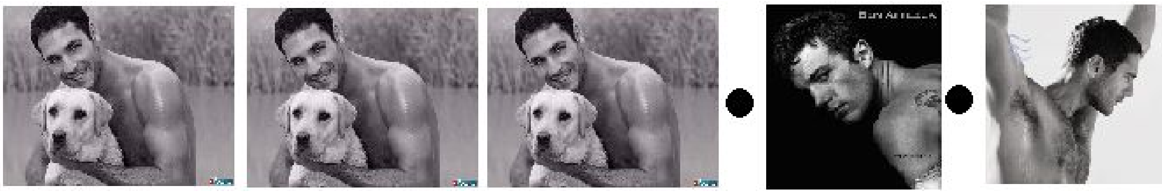


Рис. 1а. Состав (3,1,1)

Рис. 1б. Состав (1,0,4)

Таким образом, получаем различные сочетания с повторениями, переставляя между собой (n-1)+r=5+2=7 предметов, т.е. $\overline{C}_n^r = P_{n-1+r}(n-1,r)$ число сочетаний с повторениями из n предметов по r равно числу перестановок с повторениями длины (n-1)+r состава (n-1,r). В нашем примере

$\overline{C}_3^5 = P_{3-1+5}(3-1,5) = P_7(2,5) = \dfrac{7!}{2!\cdot 5!} = 21$.◄

Иначе, формула для подсчета сочетаний с повторениями выглядит так:

$$\overline{C}_n^r = \frac{(n-1+r)!}{r!\cdot(n-1)!} = C_{n-1+r}^r. \tag{8}$$

Пример 31. В кондитерской продаются пирожные 5-ти видов (бисквитные, корзиночки, буше, эклеры и трубочки). Сколькими способами можно купить 12 пирожных?

► Покупка определяется набором числе $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, где x_i – количество приобретенных пирожных i-го вида ($x_i = 0$ означает, что пирожное i-го вида не купили). Тогда задача равносильна задаче о числе решений уравнения

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12, \tag{9}$$

где x_i – целое неотрицательное число.

Введем замену переменной $y_i = x_i + 1$, тогда получим уравнение

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 17 \tag{10}$$

где y_i – натуральное число.

Отметим на прямой 17 точек. Каждому решению уравнения (10) сопоставим картинку из отмеченных точек и разделяющих черт, которая строится следующим образом. Если $(y_1^0, y_2^0, y_3^0, y_4^0, y_5^0)$ – решение уравнения (10), т.е. набор из пяти натуральных чисел, сумма которых равна 17 (например, (1,2,7,1,6)), то отсчитаем слева направо y_1^0 отмеченных точек и за последней отсчитанной точкой ставим вертикальную разделяющую черту. Затем отсчитываем от полученной черты y_2^0 точек и опять ставим черту и т.д. Какое бы решение уравнения (10) мы не брали, последняя (пятая) черта будет стоять за последней (семнадцатой) отмеченной точкой. Последнюю черту не будем рисовать (рис.2).

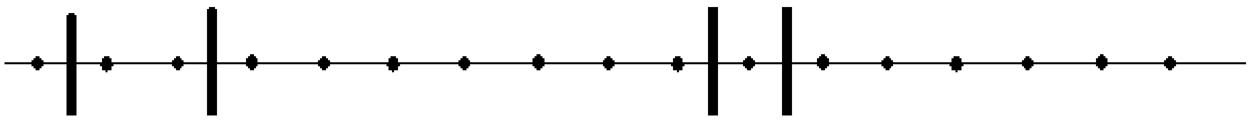


Рис. 2. Решение (1,2,7,1,6)

Соответствие между картинками и решениями биективное. Подсчитаем количество картинок. Каждая картинка взаимнооднозначно определяется набором из четырех промежутков между точками, в которых проставлены черточки. Число выбора четырех промежутков из имеющихся 16 равно C_{16}^4. Таким образом, число способов покупки 12 пирожных, если имеются 5 видов, равно $C_{16}^4 = C_{12+5-1}^{5-1} = \dfrac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1820$.◄

В общем случае число сочетаний с повторениями длины *r* из *n* видов равно

$$\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^{n-1} \qquad (11)$$

Формулы (8) и (11) эквивалентны.

Часто при выборе нужной формулы бывает полезной блок-диаграмма (табл. 1).

Таблица 1. Выбор формулы

<table>
<tr><td colspan="6">Определить n и r</td></tr>
<tr><td colspan="6">Порядок важен</td></tr>
<tr><td colspan="2">нет</td><td colspan="4">да</td></tr>
<tr><td colspan="2">Повторения есть</td><td colspan="4">Выбираем все n элементов</td></tr>
<tr><td>Нет</td><td>да</td><td colspan="2">нет</td><td colspan="2">да</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Сочетания
$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$</td><td rowspan="3">Сочетания с повторениями
$\overline{C}_n^r = C_{n-1+r}^r$
или
$\overline{C}_n^r = C_{n+r-1}^{n-1}$</td><td colspan="2">Повторения есть</td><td colspan="2">Повторения есть</td></tr>
<tr><td>нет</td><td>да</td><td>нет</td><td>да</td></tr>
<tr><td>Размещения без повторений
$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$</td><td>Размещения с повторениями
$\overline{A}_n^r = n^r$</td><td>Перестановки без повторений
$P_n = n!$</td><td>Перестановки с повторениями
$P_n(r_1, r_2, \ldots, r_k) =$
$= \frac{n!}{r_1! r_2! \ldots r_k!}$</td></tr>
</table>

На нескольких примерах покажем, как можно пользоваться предложенной таблицей.

Пример 32. В профком избрано 9 человек. Из них надо выбрать председателя, его заместителя и казначея. Сколькими способами это можно сделать?

►Составим список в порядке: председатель, заместитель, казначей. Выбираем из 9 человек трех, значит n=9, r=3. Порядок важен? Да, выбираем правую часть блок-диаграммы. Следующий вопрос: выбираем все n? Нет. Повторения есть? Нет. Следовательно, наша выборка – размещение без повторений и количество таких выборок $A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$.◄

Пример 33. Сколькими способами можно рассадить 40 человек в три автобуса, если способы различаются только количеством человек в каждом автобусе?

►Выстроим 40 человек в очередь и раздадим каждому билет с номером автобуса. Получим выборку, например, такую: 1,1,2,2,3,1,…,2,1. В этой выборке 40 элементов (r=40), а значений – номеров автобусов – три (n=3). Порядок важен? Нет, так как если поменять местами пассажиров количество человек в каждом автобусе останется прежним. Есть ли повторения? Да, так как номер автобуса может встретиться несколько раз. Следовательно, выбирая левую часть блок-диаграммы, останавливаемся на сочетании с повторениями из n=3 по r=40 элементов $\overline{C}_3^{40} = \dfrac{(3-1+40)!}{40!\cdot(3-1)!} = \dfrac{42!}{40!\cdot 2!} = 41\cdot 21 = 861$.◄

! При решении комбинаторных задач **следует помнить**, что:

- успех в решении зависит от того, насколько верно понято условие;
- почти не существует «чистых примеров», т.е. таких в которых срабатывает «готовая» формула.

Теперь рассмотрим задачи, которые не являются «чистыми примерами».

Пример 34. В купе с 8 сидячими местами (по 4 на каждом диване) вошло 6 пассажиров, один из которых (A) согласен сидеть только у окна, двое (B и C) – только рядом, один (D) – по ходу поезда, а двум (M и N) безразлично, где сидеть. Сколькими способами можно рассадить пассажиров с учетом их пожеланий?

►Множество всех способов разобьем на два непересекающихся подмножества X и Y, отнеся к X те способы, когда A сидит у окна по ходу поезда, а к Y – остальные. Ясно, что ответ задачи

$$|X| + |Y| \tag{12}$$

Разобьем множество X на непересекающиеся подмножества I, II, III, IV, V в зависимости от того, какие два места занимают B и C. Очевидно, что

$$|A| = |I| + |II| + |III| + |IV| + |V| \tag{13}$$

Места B и C можно занять двумя способами. В случаях I и II пассажир D занимает единственное свободное место на диване рядом с B и C, M занимает любое место из оставшихся 4-х на противоположном диване, а N – любое из оставшихся 3-х мест на том же диване, что и M (рис. 3). Тогда

$$|I| = |II| = 2\cdot 4\cdot 3 = 24 \tag{14}$$

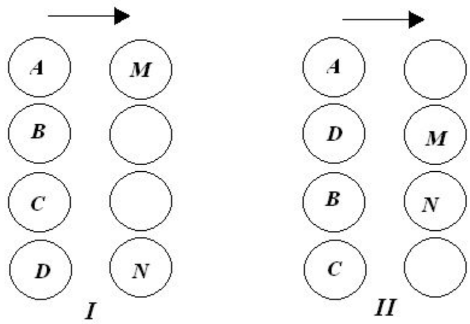


Рис. 3. Случаи *I* и *II*.

В случаях *III, IV, V* пассажир *D* занимает любое из 3-х свободных мест на диване, где сидит *A*, *M* – любое из оставшихся 4-х мест, *N* – любое из оставшихся 3-х свободных мест (рис. 4). Тогда

$$|III| = |IV| = |V| = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 72 \qquad (15)$$

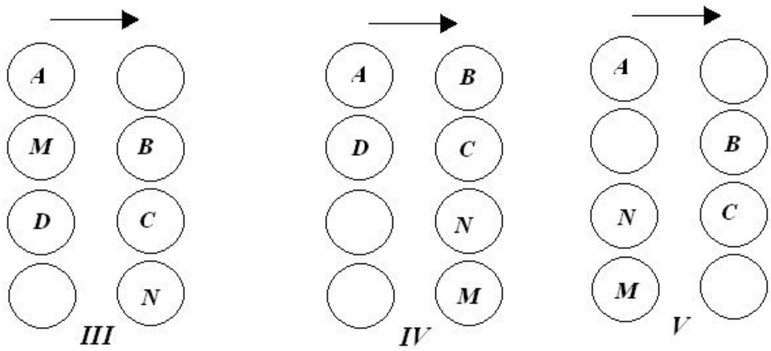


Рис. 4. Случаи *III, IV, V*.

Из (13), (14) и (15) получаем $|A| = 24 + 24 + 72 + 72 + 72 = 264$.

Аналогично для множества *B*:

$$|VI| = |VII| = |VIII| = 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 = 48,$$
$$|IX| = |X| = 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 = 96,$$
$$|B| = 3 \cdot 48 + 2 \cdot 96 = 192 + 144 = 336.$$

Из (12) получаем ответ задачи 264+336=600 способов. ◄

Пример 35. На собрании должны выступать ораторы *A, B, C, D*. Сколькими способами можно составить список выступающих так, чтобы *C* выступал позже, чем *B*, но не сразу после него?

►Если не учитывать все ограничения то количество списков выступающих равно числу перестановок длины 4, т.е. $P_4 = 4! = 24$. Разобьем множество списков так, что второй список получается из первого путем перемены мест ораторов *B* и *C*, например, *ABDC* и *ACDB*. Количество пар равно 24:2=12. В каждой такой паре один список, где *B* выступает позже *C*, а другой – где *C* позже *B*. Значит, списков где *C* выступает позже, чем *B*, столько же, сколько и получившихся пар – 12.

Определим количество списков, в которых *C* выступает сразу после *B* (обозначим их количество *BC*):

$$12 - |BC| \tag{16}$$

Подсчитаем $|BC|$. Для этого будем считать *BC* как одного оратора и рассмотрим, сколько списков можно составить, имея трех ораторов: *A, BC, D*. Количество списков равно

$$P_3 = 3! = 6 \tag{17}$$

Окончательно получаем ответ задачи, учитывая (16) и (17): 12-6=6 способов.

Запишем допустимые списки *ABDC, BADC, BACD, BDCA, BDAC, DBAC.* ◄

1.3 Задачи с ограничениями

Рассмотрим сначала задачи с ***ограничениями на порядок элементов***, когда на порядок элементов накладываются некоторые дополнительные условия. В таких задачах удобно применять ***метод объединения нескольких одинаковых элементов в блоки.***

Пример 36. Имеются предметы k видов: n_1 предметов одного вида, n_2 предметов второго вида, …, n_k предметов k-го вида. Все предметы одного вида различны друг от друга. Найти число перестановок этих предметов, в которых предметы одного вида стоят рядом.

►Из данных k видов (блоков) можно сделать $P_k = k!$ перестановок. Внутри блоков можно переставить предметы $n_1!,\ n_2!,\ldots,\ n_k!$ способами. Тогда по правилу произведения число всех возможных перестановок будет равно

$n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!\cdot k!$.◄

Пример 37. Сколькими способами можно переставить буквы слова «перемет» так, чтобы три буквы «е» не шли подряд?

►Объединим все буквы «е» в блок «еее». Число перестановок , в которых все три буквы «у» идут подряд, равно числу перестановок из 5-ти объектов: «еее», «п», «р», «м», «т», т.е. $P_5 = 5!$. Всего перестановок с повторениями из букв данного слова с повторениями можно составить $P(3,1,1,1,1) = 840$. Значит, число перестановок, где три буквы «е» не будут стоять рядом равно 840-120=720 способов. ◄

Пример 38. Сколькими способами можно расставить m нулей и n единиц так, чтобы никакие две единицы не стояли вместе?

►Расположим в ряд сначала m нулей. Для единиц есть m+1 место (одно вначале перед нулями, m-1 в промежутках между нулями, и одно после всех нулей). На любое из этих мест можно поставить одну из n единиц, т.е. число таких перестановок равно C_{m+1}^{n}, причем $n \le m+1$.◄

Теперь рассмотрим задачи на разбиения, где требуется разделить элементы на две и более группу в соответствии с некоторыми условиями, и требуется найти число всевозможных различных способов разделения. При этом учитывается, существенен ли порядок элементов в группах, различаем ли мы элементы, входящие в группы, и сами группы и т.д. При решении подобных задач обычно элементы располагаются в ряд, и применяется ***метод перегородок.***

Пример 39. На полке стоят 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг так, чтобы никакие две из них не стояли рядом?

►Зашифруем каждый выбор книг последовательностью из нулей и единиц следующим образом: оставленная на полке книга – 0, взятая книга – 1. Получим последовательность из 7 нулей и 5 единиц, в которой не будет подряд идущих единиц. Получили неупорядоченную 5-элементную выборку из 8 элементов (предыдущий пример). Следовательно, количество способов равно $C_8^5 = 56$.◄

Пример 40. Найти число способов разбиения n одинаковых предметов по m урнам.

►Расставим урны и пронумеруем их. Между ними будет m-1 промежутков. Поставим в соответствие каждому разбиению предметов по урнам последовательность из нулей и единиц следующим образом: сначала последовательность имеет группу из нулей, число которых равно числу предметов в первой урне, затем ставим 1 (перегородку); далее – столько нулей , сколько предметов во второй урне и опять ставим единицу, затем столько нулей, сколько в третьей урне и т.д. Заканчивается последовательность группой нулей, в которой их столько, сколько в последней урне предметов. Таким образом, в последовательности будет n нулей и m-1 единиц. Всего n+m-1 цифр. Тогда всего способов разбиения будет равно C_{n+m-1}^{m-1}.◄

Пример 41. Сколькими способами можно расставить в шеренгу 5 львов и 4 тигра так, чтобы никакие два тигра не шли друг за другом?

►Расставим сначала всех львов, оставив между каждыми двумя львами промежуток. Это можно сделать P_5 способами. Для расстановки тигров имеется 6 мест (одно перед всеми львами, одно после всех львов, четыре между ними). Порядок тигров имеет значение, потому, что все тигры разные, следовательно, количество способов из размещения равно A_6^4. Общее число способов расстановки хищников получается по правилу произведения $P_5 \cdot A_6^4 = 43200$. ◄

Пример 42. Комиссия состоит из 9 человек. Документы хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, сколько ключей для них надо изготовить и как распределить между членами комиссии, чтобы доступ к сейфу был возможен тогда и только тогда, когда соберутся вместе не менее 6 человек комиссии?

►Какие бы 5 членов комиссии не собрались, должен найтись замок, который они не могут открыть, но ключ от этого замка имеется у каждого из 4 остальных членов комиссии (появление кого-то из них дает возможность открыть сейф). Следовательно, замков должно быть $C_9^5 = 126$, а ключей $4 \cdot C_9^5 = 504$. ◄

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

Замечание. В общем случае при n членов комиссии и m наименьшем числе членов, при которых возможен доступ к сейфу, при условии $m \leq n+1$, замков должно быть C_n^{m-1}, а ключей к этим замкам $(n-m+1)\cdot C_n^{m-1}$.

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1. Из ящика с 70 разными шарами вынимают 5 шаров. Какого типа 5-элементная выборка? Ответ обосновать.
2. Какого типа 7-элементная выборка при покупке семи пирожных, если в магазине имеется четыре сорта?
3. На шахматной доске расставлены: а) 8 одинаковых фигур; б) 8 различных фигур. К какому типу выборок относятся 8-элементные выборки в предложенных случаях?
4. Какого типа 4-элементные выборки, если выбираются из 10 претендентов:
   a. Четыре кандидата на конференцию?
   b. Президент, вице-президент, казначей и ученый секретарь научного общества?
5. Переставляя буквы слов: а) «март»; б) «мама». Сколько получится различных перестановок? Перечислите их. К какому типу выборок можно отнести полученные комбинации букв?
6. Из множества цифр $\{0,1,2,\ldots,9\}$ составляются различные наборы чисел по пять цифр в каждом. Какого типа выборки представляют собой пятизначные числа?
7. Составляются слова длины 4 из 32 букв русского алфавита так, что две соседние буквы этих слов различны. Какого типа эти выборки? Какого количество таких наборов слов?
8. Сколько можно составить слов длины k из 32 букв русского алфавита? Рассмотреть случай k=2,3,4.
9. Из множества $A=\{a, b, c, d\}$ составить:
   a. упорядоченные 2-элементные выборки без повторений;
   b. неупорядоченные 2-элементные выборки без повторений.

   Сколько их всего может быть?

10. Сколькими способами можно заполнить одну карточку в лотерее «Спорт-прогноз»? (В этой лотерее нужно предсказать итог тринадцати спортивных матчей. Итог каждого матча – победа одной из команд либо ничья; счет роли не играет).

    Ответ: 3^{13}.

11. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал пяти различных цветов, причем среди полос одна должна быть обязательно красной?

    Ответ: 36.

12. Сколькими способами можно поставить в ряд 5 человек для фотоснимка?

    Ответ: 120.

13. В одной из первых поколений ЭВМ «Стрела» ОЗУ имело 2048 ячеек, каждая ячейка состояла из 43 разрядов. Какое максимальное количество различных чисел в двоичной системе счисления можно было поместить в ОЗУ?

    Ответ: 2^{88064}.

14. В забеге участвуют 5 человек. Сколькими способами могут распределиться 2 первых места?

    Ответ: 31.

15. Сколькими способами могут встать в очередь 7 человек?

    Ответ: 7!.

16. Сколькими различными способами 2 друга могут одновременно посетить кого-либо из своих общих трех знакомых?

    Ответ: 9.

17. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

    Ответ: 3136.

18. Сколько существует различных наборов длины 10 из нулей и единиц?

    Ответ: 1024.

19. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и черного королей так, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция?

Ответ: 3612

20. В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова наибольшая численность этого государства?

Ответ: 2^{32}.

21. Абитуриенту необходимо сдать 4 экзамена за 10 дней. Сколькими способами можно составить ему расписание, если в один день можно сдавать только один экзамен?

Ответ: 5040.

22. Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых цифры 1, 2, 3 встречаются ровно по одному разу?

Ответ: 3!

23. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им оценки, если известно, что никто не получил оценки «неудовлетворительно»?

Ответ: 81.

24. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было выполнять переводы с любого из пяти языков на любой другой из этих пяти языков? На сколько больше словарей надо издать, если число различных языков равно 10?

Ответ: 20; 70.

25. Слово – любая конечная последовательность букв русского алфавита. Выясните, сколько различных слов можно составить из слов

а) «ВЕКТОР»;

б) «ЛИНИЯ»;

в) «ПАРАБОЛА»;

г) «БИССЕКТРИСА»;

д) «МАТЕМАТИКА».

Ответ: а) 6!; б) 60; в) 8!/3; г)11!/(2! • 3!); д) 10!/(3! • 2! • 2!).

26. Сколько существует различных пятизначных четных чисел, которые начинаются с «2», а оканчиваются – «4», если используются цифры 1,2,3,4,5?

Ответ: 6.

27. Сколько диагоналей в выпуклом n-угольнике?

Ответ: $n(n-3)/2$.

28. Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1,2,3,4,5?

Ответ: 125.

29. В комнате общежития живут трое студентов. У них есть 4 разные чашки, 5 разных блюдец и 6 разных чайных ложек. Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый студент получает одну чашку, одно блюдце и одну ложку)?

Ответ: 172800.

30. Сколькими способами можно из 20 студентов назначить 5 дежурных.

Ответ: 15504.

31. Сколькими способами можно составить бригаду из четырех плотников, если имеется 10 рабочих?

Ответ: 210.

32. Сколькими способами могут разбиться пять девушек и трое парней на две команды по четыре человека в каждой, если в команде должен быть хотя бы один юноша?

Ответ: 30.

33. Сколькими способами можно расселить 9 студентов в комнаты, каждая из которых рассчитана на трех человек?

Ответ:81.

34. Сколькими способами можно составить набор из 8 пирожных, если имеется 4 сорта пирожных?

Ответ:165.

35. Сколькими способами из трех спортивных обществ, насчитывающих соответственно 40, 40 и 60 человек можно выбрать команды по 5 человек для участия в соревнованиях?

Ответ: $C_{40}^{5}\cdot C_{40}^{5}\cdot C_{60}^{5}$.

36. Сколько различных подмножеств из трех элементов имеет множество

а) A={1.2.3.4.5}; б) B={*,»,0,1}?

Ответ: 10;4.

37. Из группы в 20 человек каждую ночь выделяется наряд из трех человек. Сколько существует вариантов составления наряда?

Ответ: 1040.

38. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, надо выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Сколькими способами это можно сделать?

Ответ: 371.

39. Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17, если двое указанных из этих 17-ти, не могут быть выбраны вместе?

Ответ: 3185.

40. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, ферзя и короля) на первой линии шахматной доски?

Ответ: 5040.

41. Четыре автора должны написать книгу из 17 глав, причем первый и третий должны написать по 5 глав, второй – 4 главы, а четвертый – 3 главы книги. Сколькими способами можно распределить главы между авторами?

Ответ: $\dfrac{17!}{5!\cdot 5!\cdot 4!\cdot 3!}$.

42. Сколько существует перестановок элементов $1,2,\ldots,n$, в которой элемент 1 находится не на своем месте?

Ответ: $(n-1)(n-1)!$.

43. Бусы – это кольцо, на которое нанизаны бусины. Бусы можно поворачивать, но не переворачивать. Сколько различных бус можно сделать из 13 разноцветных бусин?

Ответ: $13!/13 = 12!$.

44. Предположим теперь, что бусы можно и переворачивать. Сколько тогда различных бус можно сделать из 13 разноцветных бусин?

Ответ: $12!/2$.

45. Сколько ожерелий можно составить из семи разных бусин?

Ответ: 300.

46. Сколько различных браслетов можно сделать из четырех одинаковых рубинов, пяти одинаковых сапфиров и шести одинаковых изумрудов, если в браслете должны быть все 15 камней? Сколькими способами можно из этих камней выбрать три камня для кольца?

Ответ: 21021; 10.

47. На танцплощадке собрались N юношей и N девушек. Сколькими способами они могут разбиться на пары для участия в очередном танце?

Ответ: $n!$.

48. У мамы два яблока, три груши и четыре апельсина. Каждый день в течение девяти дней подряд она дает сыну один из оставшихся фруктов. Сколькими способами это может быть сделано?

Ответ: 9!/2!3!4!.

49. Сколькими способами можно разбить $(n+m+p)$ предметов на три группы так, чтобы в одной было n, в другой m, а в третье p предметов?

Ответ: $\dfrac{(n+m+p)!}{n!\cdot m!\cdot p!}$.

50. Сколькими способами можно переставить буквы в слове а) «космос»; б) «тартар»?

Ответ: 180; 90.

1.4 Бином Ньютона. Свойства биномиальных коэффициентов

Из школьной программы известны формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Бином Ньютона позволяет продолжить этот ряд формул. Раскроем скобки, приведем подобные и расположим слагаемые по убывающим степеням a в выражении $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)...(a+b)}_{n\ раз}$.

Общий член суммы будет иметь вид Ca^kb^{n-k}, где коэффициент C равен количеству способов, которыми можно получить слагаемое a^kb^{n-k} (т.е.

количеству способов, которыми можно выбрать k скобок с множителем a, а из остальных n-k скобок взять множитель b). Например, если n=5, k=2, то слагаемое a^2b^3 можно получить, выбрав множитель a из первой и пятой скобки. Определяем тип выборки: порядок перечисления не важен, так как выбираем сначала первую, а затем пятую скобки, или, наоборот, сначала пятую, затем первую – не существенно; повторяющихся элементов (одинаковых номеров скобок) в выборке нет. Значит, это сочетание без повторений. Количество таких выборок равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Таким образом, формула бинома для произвольного натурального n имеет вид:

$$(a+b)^n = C_n^0 b^n + C_n^1 ab^{n-1} + C_n^2 a^2 b^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1} a^{n-1} b + C_n^n a^n$$

Или

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \tag{18}$$

Строгое доказательство бинома Ньютона проводится методом математической индукции.

Величины $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ называются ***биномиальными коэффициентами***, которые выражают число сочетаний из n по k.

Эти величины обладают следующими **свойствами**:

1. ***Свойство симметрии***

$$C_n^k = C_n^{n-k} \tag{19}$$

В формуле бинома это означает, что коэффициенты, стоящие на одинаковых местах от левого и правого концов формулы, равны. Действительно, C_n^k – это количество подмножеств, содержащих k элементов множества, содержащего n элементов. А C_n^{n-k} – количество дополнений к этим множествам. Сколько подмножеств, столько и дополнений.

2. ***Свойство Паскаля***

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} \qquad (20)$$

Пусть $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Число C_n^k – количество подмножеств из k элементов множества X. Разделим все подмножества на два класса:

a. подмножества, не содержащие элемент x_1, их количество C_{n-1}^k;

b. подмножества, содержащие элемент x_1, их количество C_{n-1}^{k-1}.

Так как эти классы не пересекаются, то по правилу суммы количество всех k-элементных подмножеств множества X будет равно $C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

На этом свойстве основано построение треугольника Паскаля (рис. 5), в n-ой строке которого стоят коэффициенты разложения бинома $(a+b)^n$.

$$\begin{array}{llllllllll}
n=0 & & & & & 1 & & & & \\
n=1 & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\ldots\ldots & & & & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & &
\end{array}$$

Рис. 5. Треугольник Паскаля.

3. ***Свойство суммы***

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n \qquad (21)$$

В формуле бинома Ньютона примем за a=1 и b=1, тогда $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$. С точки зрения теории множеств сумма $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$ выражает количество всех подмножеств n-элементного множества. По теореме о мощности булеана это количество равно 2^n.

4. ***Свойство разности***

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 \ldots + (-1)^n C_n^n = 0 \qquad (22)$$

Положим в формуле бинома Ньютона a=1 и b=−1. Получим в левой части $(1-1)^n = 0$, а в правой биномиальные коэффициенты с чередующимися знаками, что и доказывает свойство. Перенеся все коэффициенты с отрицательными знаками в левую часть, это свойство можно записать так

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots \qquad (23)$$

Или: сумма биномиальных коэффициентов с нечетными номерами равна сумме коэффициентов с четными номерами.

5. ***Свойство максимума***

Если степень бинома n − четное число, то среди биномиальных коэффициентов есть максимальный при $k=\dfrac{n}{2}$.

Если степень бинома нечетное число, то максимальное значение достигается для двух биномиальных коэффициентов при $k_1 = \dfrac{n-1}{2}$ и $k_2 = \dfrac{n+1}{2}$.

Например, при n=4 максимальным является коэффициент $C_4^2 = 6$, а при n=3 максимальное значение равно $C_3^1 = C_3^2 = 3$ (проверить можно по рис. 5).

Пример 43. Найти член разложения бинома $\left(x + \dfrac{1}{x^4}\right)^n$, не содержащий x, если сумма биномиальных коэффициентов с нечетными номерами равна 512.

►По свойству разности сумма биномиальных коэффициентов с четными номерами также равна 512, значит, сумма всех коэффициентов равна 512+512=1024. А по свойству суммы это число равно $2^n = 2^{10} = 1024$. Поэтому n=10. Запишем общий член разложения и преобразуем его:

$$C_n^k x^k \left(\frac{1}{x^4}\right)^{n-k} = C_n^k x^{k-4n+4k},$$

при n=10 получим $C_{10}^{k}x^{5k-40}$. Так как общий член не содержит x, то $5k$-40=0, т.е. k=8. Следовательно, девятый член разложения не содержит x и равен $C_{10}^{8}=\dfrac{10!}{8!(10-8)!}=45$. ◄

Пример 44. Найти натуральное число n, удовлетворяющее уравнению $C_{n}^{5}=2C_{n-1}^{5}$.

►Преобразуем левую часть по свойству Паскаля

$$C_{n-1}^{5}+C_{n-1}^{4}=2C_{n-1}^{5}.$$

Приведем подобные и получим

$$C_{n-1}^{4}=C_{n-1}^{5}.$$

По свойству симметрии преобразуем левую часть

$$C_{n-1}^{4}=C_{n-1}^{(n-1)-4}=C_{n-1}^{n-5}=C_{n-1}^{5},$$

откуда находим n=10. ◄

В соответствии с их комбинаторной интерпретацией индексы n и k ограничены неотрицательными целыми числами, так как множества не могут иметь отрицательное или дробное число элементов. Однако биномиальные коэффициенты полезны не только своей комбинаторной трактовкой, поэтому от некоторых ограничений можно избавиться. Рассмотрим другие ограничения для индексов n и k, введя для новое n обозначение – r (тем самым подчеркнув то, что поле этого индекса расширено до действительных чисел), тогда новые условия будут выглядеть так:

$$n\in R,\ k\in Z \tag{24}$$

Следовательно, формальное определение биномиальных коэффициентов принимает следующий вид:

$$C_{r}^{k}=\begin{cases}\dfrac{r(r-1)...(r-k+1)}{k!}, & \textit{целое } k\geq 0\\ 0, \ \textit{целое } k<0\end{cases} \tag{25}$$

Это определение обладает рядом особенностей:

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

1. Биномиальные коэффициенты сохраняют смысл и тогда, когда в качестве нижнего индекса оказывается любое вещественное число. Так, $C_{-1}^{3} = \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!} = -1$.

2. C_r^k можно рассматривать как многочлен k-й степени относительно r.

Замечание. C_n^n равен 1 только при целом $n \geq 0$; если же $n < 0$, то $C_n^n = 0$.

При рассматриваемых ограничениях коэффициентов (24):

a) свойство симметрии не выполняется. Но при n –целое неотрицательное, а k – произвольное целое число свойство симметрии имеет смысл.

b) правило внесения под знак биномиального коэффициента выполняется:

$$C_r^k = \frac{r}{k} C_{r-1}^{k-1}, \text{ целое } k \neq 0 \tag{26}$$

Если умножить обе части (26) на k, то получим правило внесения, которое выполняется даже при k= 0:

$$kC_r^k = rC_{r-1}^{k-1} \text{ или } (r-k)C_r^k = rC_{r-1}^k, \text{ при } k - \text{ целое} \tag{27}$$

c) свойство Паскаля выполняется.

Для отрицательных и положительных r существует связь. При целом k выполняется общее правило:

$$C_r^k = (-1)^k C_{k-r-1}^k \tag{28}$$

Формула (28) называется ***верхним обращением***.

Для облегчения запоминания этой формулы, можно воспользоваться следующим мнемоническим правилом: *верхнее обращение начинается с записи* $(-1)^k$*, где* k *– верхний индекс. Затем записываем* k *дважды: как верхний и нижний индексов. Потом обращается исходный нижний индекс путем его вычитания из нового нижнего индекса. В завершение, в нижнем индексе вычитается еще*

Еще одно удобное правило, которое часто помогает упростить произведение двух биномиальных коэффициентов:

$$C_r^m \cdot C_m^k = C_r^k \cdot C_{r-k}^{m-k}, \ m,k - \text{ целые} \tag{29}$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

6. *Полиномиальная теорема*

Справедливо следующее равенство многочленов

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_k=n} \frac{n!}{\alpha_1!\ldots\alpha_2!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_k^{\alpha_k} \qquad (30)$$

где $n, \alpha_i \geq 0$.

В частности,

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{r} C_r^k x^k y^{r-k}, \text{ где целое } r \geq 0 \text{ или } |x/y| < 1 \qquad (31)$$

– классическая формула бинома Ньютона. При целом неотрицательном *r* – это конечная сумма, поскольку все ее члены равны нулю, за исключением членов с $0 \leq k \leq r$. С другой стороны, биномиальная теорема верна и при отрицательном произвольном вещественном *r*. В таких случаях, данная сумма бесконечна и требуется, чтобы $|x/y| < 1$ для гарантии абсолютной сходимости суммы, тогда можно воспользоваться теоремой Тейлора из анализа. Все семь самых главных тождеств с биномиальными коэффициентами представлены в таблице 2.

Таблица 2. Тождества биномиальных коэффициентов.

$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, целые $n \geq k \geq 0$	***Факториальное представление***
$C_n^k = C_n^{n-k}$, целое $n \geq 0$, k – целое	***Симметрия***
$C_r^k = \dfrac{r}{k} C_{r-1}^{k-1}$, целое $k \neq 0$	***Внесение***
$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.	***Свойство Паскаля***
$C_r^k = (-1)^k C_{k-r-1}^k$, k – целое	***Верхнее обращение***
$C_r^m \cdot C_m^k = C_r^k \cdot C_{r-k}^{m-k}$, m, k – целые	***Триномиальный вариант***
$(x+y)^r = \sum_{k=0}^{r} C_r^k x^k y^{r-k}$, при целом $r \geq 0$ или $\lvert x/y \rvert < 1$	***Полиномиальная теорема***

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Доказать равенства:

1. $C_n^k \cdot C_{n-k}^{m-k} = C_m^k \cdot C_n^m$.

2. $\sum\limits_{k=1}^{n} C_n^k \cdot k = n \cdot 2^{n-1}$.

3. $C_{r+l}^m = \sum\limits_{k=0}^{m} C_r^k C_l^{m-k}$.

Указание. Рассмотреть тождество $(1+x)^r(1+x)^l = (1+x)^{r+l}$.

4. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 9^k = 10^n$.

5. $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{C_n^k}{k+1} = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Найти коэффициенты при x^k в разложении:

6. $(x+2)^{10}$, $k=3$. *Ответ*: $15 \cdot 2^{10}$.

7. $(1-2x)^7$, $k=4$. *Ответ*: 560.

8. $\left(\sqrt{x} - \dfrac{2}{x}\right)^8$, $k=-5$. *Ответ*: 1792.

9. $\left(3\sqrt[3]{x^2} - x\sqrt{x}\right)^9$, $k=11$. *Ответ*: 2268.

10. Найдите максимальный числовой коэффициент в разложении бинома $(1+x)^8$. *Ответ*: 70.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

2. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

При решении многих комбинаторных задач часто пользуются методом сведения данной задачи к задаче, касающейся меньшего числа предметов. **Метод сведения к аналогичной задаче для меньшего числа предметов называется *методом рекуррентных соотношений***. Пользуясь рекуррентностями, можно свести задачу об n предметах к задаче об $n-1$ предметах, потом к задаче об $n-2$ предметах и т.д. Последовательно уменьшая число предметов, доходим до задачи, которую уже легко решить.

2.1 Задачи, приводящие к рекуррентным соотношениям

Числа Фибоначчи

Итальянский математик Фибоначчи привел следующую задачу: пара кроликов приносит раз в месяц приплод из двух крольчат (самки и самца), причем новорожденные крольчата через два месяца после рождения уже приносят приплод. Сколько кроликов появится через год, если в начале года была одна пара кроликов?

Из условия задачи следует, что через месяц будет две пары кроликов. Через два месяца приплод даст только первая пара кроликов, и получится 3 пары. А еще через месяц приплод дадут и исходная пара, и пара кроликов, появившаяся два месяца тому назад. Поэтому всего будет 5 пар кроликов.

Обозначим через $f(n)$ количество пар кроликов по истечении n месяцев сначала года. Мы видим, что через $n+1$ месяцев будет $f(n)$ и еще столько новорожденных пар кроликов, сколько было в конце месяца $n-1$, то есть еще $f(n-1)$ пар кроликов. Иными словами, имеет место ***рекуррентное соотношение***

$$f(n+1) = f(n) + f(n-1) \qquad (32)$$

Так как по условию $f(0)=1$ и $f(1)=2$, то последовательно находим $f(2)=3$, $f(3)=5$, $f(4)=8$ и т.д.Числа $f(n)$ называются ***числами Фибоначчи***.

Задача о Ханойской башне

Рассмотрим головоломку под названием *ханойская башня*, которую придумал французский математик Эдуард Люка в 1883 г. Башня представляет собой восемь дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков (рис.6):

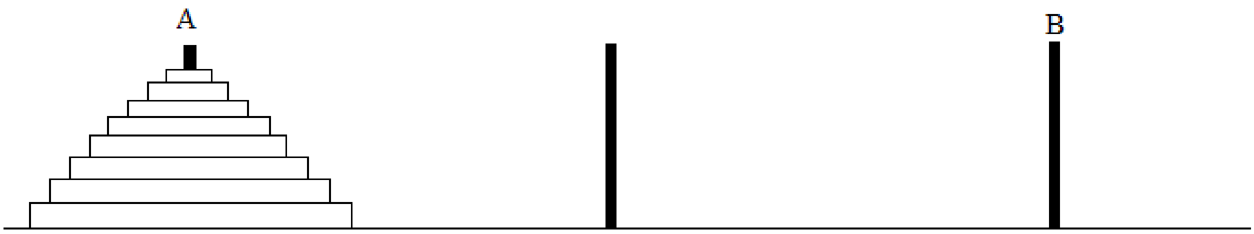


Рис. 6. Ханойская башня.

Задача состоит в том, чтобы переместить всю башню на один из других колышков, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший.

Пусть $f(n)$ - минимальное число перекладываний n дисков с одного колышка на другой по правилу Люка. Очевидно, что $f(0)=0$, $f(1)=1$, а $f(2)=3$.

В случае трех дисков, два верхних диска переносятся на один из колышков, затем переносится третий диск и на него помещаются два других. Таким образом, общее правило перемещений заключается в следующем.

Сначала перемещаются $n-1$ меньших дисков на один из колышков – это $f(n-1)$ перекладываний. Затем перекладывают самый большой диск – это одно перекладывание, и, наконец, $n-1$ меньших дисков переносятся на самый большой диск – это еще $f(n-1)$ перекладываний. Получается, что n ($n > 0$) дисков можно за $2f(n-1)+1$ перекладываний.

Вместе с тривиальным решением при n=0, получаем два равенства:

$$f(0)=0$$

$$f(n)=2f(n-1)+1 \text{ при } n>0. \qquad (33)$$

Совокупность равенств такого типа называется ***рекуррентностью*** (также в литературе встречаются термины ***возвратное соотношение*** или ***рекурсивная***

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

зависимость). Полностью задать рекуррентное соотношение – значит задать начальные условия и зависимость общего члена от предыдущих.

Задача о разрезании пиццы

Задача имеет геометрический характер: сколько кусков пиццы можно получить, делая *n* прямолинейных разрезов ножом? Или: каково максимальное число $f(n)$ областей, на которые плоскость делится *n* прямыми? Впервые эта задача была решена в 1826 г. швейцарским математиком Якобом Штейнером.

Плоскость без прямых ($n = 0$) – это одна плоскость – $f(0) = 1$.

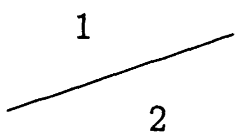


Рис. 7

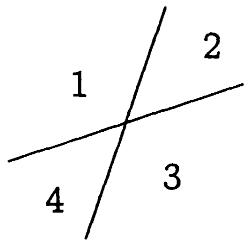


Рис. 8

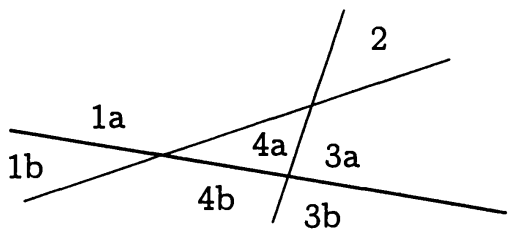


Рис. 9

Плоскость с одной прямой ($n = 1$) – две области – $f(1) = 2$ (рис.7).

Плоскость с двумя прямыми ($n = 2$)– четыре области – $f(2) = 4$ (рис.8).

Когда добавляется третья прямая (рис.9), то она может рассекать самое большее три старые области вне зависимости от того, как расположены первые две прямые. Таким образом, $f(3) = 4 + 3 = 7$ - самое большое, что можно сделать.

Очередная *k*-я прямая (при *n* > 0) увеличивает число областей на *к*, при этом она рассекает *к* предыдущих областей, пересекая прежние прямые в *к*-1 различных точках. Две прямые могут пересекаться не более чем в одной точке. Поэтому *n*-я прямая может пересекать *n*-1 предыдущих прямых не более чем в *n*-1 различных точках. Следовательно, должно выполняться неравенство $k \le n$. Получаем верхнюю границу

$$f(n) \le f(n-1) + n \qquad \text{при } n > 0$$

Равенство достигается, если провести *n*-ю прямую так, чтобы она не была параллельна никакой другой прямой (т.е. пересекала бы каждую из них), и чтобы она не проходила ни через одну из имеющихся точек пересечения (т.е. пересекает каждую из прямых в различных точках).

Учитывая тривиальное решение при n=0, получаем полное задание рекуррентного соотношения

$$f(0) = 1$$

$$f(n) = f(n-1) + n \qquad \text{при } n > 0 \tag{34}$$

Задача Иосифа Флавия

Иосиф Флавий – известный историк первого века. По легенде он выжил благодаря своей математической одаренности. В составе отряда из 41 иудейского воина он был загнан римлянами в пещеру. Предпочитая самоубийство плену, воины выстроились в круг и решили последовательно убивать каждого третьего, пока в живых не останется ни одного человека. Иосиф, наряду со своими единомышленниками посчитал такой конец бессмысленным и вычислил безопасные места в порочном круге для себя и своих товарищей.

Разберем эту задачу, начиная с 10 человек, расположенных в круг. Будем исключать каждого второго до тех пор, пока не останется только один человек (рис.10).

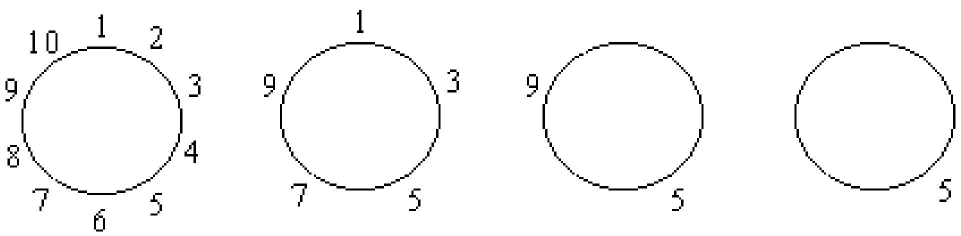


Рис. 10. Случай для 10 человек.

В результате номер уцелевшего $J(10)=5$.

Обобщим случай для любого четного количества человек. Пусть первоначально имеется $2n$ людей. После первого прохода круга остаются нечетные номера, и следующий проход начинается с номера 3, причем, количество людей в круге становится в 2 раза меньше. Это равносильно тому, что в круге присутствуют n

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

человек, с той лишь разницей, что номер каждого присутствующего удваивается и уменьшается на 1. Следовательно, для четного случая получаем равенство

$$J(2n)=2J(n)-1 \qquad \text{при } n \geq 1 \tag{35}$$

В нечетном случае человек с номером 1 исключается сразу после номера $2n$, и получаем ситуацию с n людьми, но в этот раз номера оставшихся удваиваются и увеличиваются на 1. Таким образом, получаем равенство для нечетного количества человек

$$J(2n+1)=2J(n)+1 \qquad \text{при } n \geq 1 \tag{36}$$

Объединяя два равенства и учитывая начальное условие $J(1)=1$, составляем рекуррентное соотношение

$$\begin{gathered} J(1)=1 \\ J(2n)=2J(n)-1 \qquad \text{при } n \geq 1 \\ J(2n+1)=2J(n)+1 \qquad \text{при } n \geq 1 \end{gathered} \tag{37}$$

Составим таблицу для разных значений n (количество человек, стоящих в круге).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3	5	7	9

Проверим: $J(20) = 2J(10) - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$.

Для того чтобы решить соотношение (37) сгруппируем значения n по степеням 2 (таблица ниже), то в каждой группе $J(n)$ всегда будет начинаться с 1, а затем увеличиваться на 2.

Степень 2	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
n	1	2 3	4 5 6 7	8 9 10 11 12 13 14 15	16 17 18 19 20 21 22 ...
$J(n)$	1	1 3	1 3 5 7	1 3 5 7 9 11 13 15	1 3 5 7 9 11 13 ...

Таким образом, записывая количество человек в виде $n = 2^m + l$, где 2^m - наибольшая степень 2, не превосходящая n, а l – остаток. То решение задачи будет выглядеть следующим образом

$$J(2^m + l) = 2l + 1, \quad m \geq 0, \quad 0 \leq l < 2^m \tag{38}$$

Замечание. Если $2^m \le n < 2^{m+1}$, то остаток $l = n - 2^m$ удовлетворяет неравенству $0 \le l < 2^{m+1} - 2^m = 2^m$.

Доказательство равенства (38) осуществляется методом математической индукции по m.

► При $m = 0$, $l = 0$ база индукции для решения (38) сводится к $J(1) = 1$, это равенство очевидно.

При $m > 0$ рассмотрим $J(2n)$, т.е. $2n = 2^m + l$ – четное, следовательно, l – четное. Выразим из этого равенства $n = 2^{m-1} + \frac{l}{2}$, тогда

$$J(2n) = J(2^m + l) \overset{(35)}{=} 2J(n) - 1 = 2J\left(2^{m-1} + \frac{l}{2}\right) - 1 \overset{(38)}{=} 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{l}{2} + 1\right) - 1 = 2l + 1.$$

Для четного случая доказали.

Проведем доказательство для нечетного случая.

При $m > 0$ рассмотрим $J(2n+1)$, т.е. $2n + 1 = 2^m + l$ – нечетное, следовательно, l – нечетное. Выразим из этого равенства $n = 2^{m-1} + \frac{l}{2} - \frac{1}{2}$, тогда

$$J(2n+1) = J(2^m + l) \overset{(36)}{=} 2J(n) + 1 = 2J\left(2^{m-1} + \frac{l}{2} - \frac{1}{2}\right) + 1 \overset{(38)}{=}$$

$$\overset{(38)}{=} 2 \cdot \left(2 \cdot \left(\frac{l}{2} - \frac{1}{2}\right) + 1\right) + 1 = 2l + 1$$

Таким образом, соотношение (38) – решение для (37) в нечетном случае. ◄

Рассмотрим случай, когда в рекуррентности (37) стоят произвольные константы, т.е. рекуррентность общего вида

$$\begin{aligned} &f(1) = \alpha \\ &f(2n) = 2f(n) + \beta \\ &f(2n+1) = 2f(n) + \gamma \end{aligned} \qquad (39)$$

В первоначальном случае $\alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = 1$.

Начиная с $f(1) = \alpha$ вычисли $f(2), f(3), \ldots$ и т.д.

$$f(2) = 2f(1) + \beta = 2\alpha + \beta$$
$$f(3) = 2f(1) + \gamma = 2\alpha + \gamma$$
$$f(4) = 2f(2) + \beta = 4\alpha + 3\beta$$
$$f(5) = 2f(2) + \gamma = 4\alpha + 2\beta + \gamma$$
$$f(6) = 2f(3) + \beta = 4\alpha + \beta + 2\gamma$$
$$f(7) = 2f(3) + \gamma = 4\alpha + 3\gamma$$
$$f(8) = 2f(4) + \beta = 8\alpha + 7\beta$$
$$f(9) = 2f(4) + \gamma = 8\alpha + 6\beta + \gamma$$

……………………………………….

Занесем полученные результаты в таблицу:

n	*f(n)*
1	α
2 3	$2\alpha + \beta$ $2\alpha + \quad + \gamma$
4 5 6 7	$4\alpha + 3\beta$ $4\alpha + 2\beta + \gamma$ $4\alpha + \beta + 2\gamma$ $4\alpha + \quad + 3\gamma$
8 9 …	$8\alpha + 7\beta$ $8\alpha + 6\beta + \gamma$ ……………….

Выявляется следующая закономерность: ***коэффициенты при*** α ***равны наибольшим степеням 2, не превосходящим n. В каждой степени двойки коэффициенты при*** β ***уменьшаются на 1 до 0, а при*** γ ***− увеличиваются на 1, начиная с 0.***

Решение рекуррентности (39) имеет вид:

$$f(n) = A(n)\alpha + B(n)\beta + C(n)\gamma\,, \qquad (40)$$

где $A(n) = 2^m$, $B(n) = 2^m - 1 - l$, $C(n) = l$, причем $n = 2^m + l$ и $0 \le l < 2^m$ при $n \ge 1$.

Докажем справедливость того, что равенство (40) является решением рекуррентного соотношения (39). Доказательство проведем путем рассмотрения и комбинирования частных случаев.

► 1. Рассмотрим частный случай, когда $\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$, тогда функция $f(n) = A(n)$.

Рекуррентное соотношение (39) сводится к соотношению:

$$\begin{aligned} &A(1) = 1 \\ &A(2n) = 2A(n) \\ &A(2n+1) = 2A(n) \end{aligned} \tag{41}$$

Доказательством по индукции по m придем к тому, что решением данной рекуррентности будет

$$A(n) = 2^m \tag{42}$$

(доказательство предлагается провести самостоятельно).

2. Возьмем постоянную функцию $f(n) = 1$ и проверим, есть ли определяющие ее константы (α, β, γ). Подставим $f(n) = 1$ в (39) и получим следующие равенства:

$$\begin{aligned} &1 = \alpha \\ &1 = 2 \cdot 1 + \beta \\ &1 = 2 \cdot 1 + \gamma \end{aligned} \tag{43}$$

Значения $\alpha = 1, \beta = -1, \gamma = -1$ удовлетворяют равенствам (43). Подставим их в решение (40):

$$A(n) - B(n) - C(n) = f(n) = 1 \tag{44}$$

3. Рассмотрим функцию $f(n) = n$ и подобным образом подставим ее в рекуррентное соотношение (39):

$$\begin{aligned} &1 = \alpha \\ &2n = 2 \cdot n + \beta \\ &2n + 1 = 2 \cdot n + \gamma \end{aligned} \tag{45}$$

Удовлетворять этим равенствам будут значения $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1$, при подстановке которых в (40) получим:

$$A(n) + C(n) = f(n) = n \tag{46}$$

Итак, функции $A(n), B(n), C(n)$, определяющие решение (40) в общем случае, должны удовлетворять уравнениям (42), (44) и (46). Решаем систему этих уравнений, где $n = 2^m + l$ и $0 \le l < 2^m$:

$$\begin{cases} A(n) = 2^m \\ A(n) - B(n) - C(n) = 1 \\ A(n) + C(n) = n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(n) = 2^m \\ 2^m - B(n) - C(n) = 1 \\ 2^m + C(n) = 2^m + l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(n) = 2^m \\ B(n) = 2^m - l - 1 \\ C(n) = l \end{cases}$$

Такой подход к решению рекуррентных соотношений носит название ***репертуарного метода***. При решении этим методом сначала подбираются величины общих параметров, для которых есть решение (это обеспечивает репертуар разрешимых частных решений), затем, комбинируя частные решения, получают общее. Количество независимых частных решений определяется количеством независимых параметров (в нашем примере их три – α, β, γ).

2.2 Решение рекуррентных соотношений

Будем считать, что рекуррентное соотношение имеет порядок *k*, если оно выражает $f(n+k)$ через $f(n), f(n+1), \ldots, f(n+k-1)$.

Например, $f(n+2) = f(n)f(n+1) + f^2(n+1) + 1$ – рекуррентное соотношение второго порядка,

$f(n+3) = 5f(n) + 2f(n+2) + f(n+1)$ – рекуррентное соотношение третьего порядка.

Если задано рекуррентное соотношение *k*-го порядка, то ему может удовлетворять бесконечное множество последовательностей, так как между первыми k элементами последовательности нет никаких соотношений и их можно задать совершенно произвольно. Если же первые k элементов заданы, то все остальные элементы определяются через предыдущие элементы ***однозначно***. Например, элемент $f(k+1)$ однозначно выражается рекуррентным соотношением через $f(1), \ldots, f(k)$, а элемент $f(k+2)$ – через элементы $f(2), \ldots, f(k+1)$ и т.д.

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Пользуясь рекуррентным соотношением и начальными членами, можно один за другим выписывать члены последовательности, причем рано или поздно мы получим любой ее член. Однако при этом нам придется выписать и все предыдущие члены — ведь не узнав их, мы не узнаем и последующих членов. Но во многих случаях мы хотим узнать только один определенный член последовательности, а остальные члены нам не нужны. В этих случаях удобнее иметь явную формулу для n - го члена последовательности.

> Последовательность является ***решением*** рекуррентного соотношения, если при подстановке этой последовательности соотношение тождественно выполняется.

Пример 1. Показать, что последовательность

$$2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$$

является одним из решений рекуррентного соотношения

$$f(n+2) = 3f(n+1) - 2f(n).$$

►Общий член последовательности $f(n) = 2^n$, тогда $f(n+2) = 2^{n+2}$ и $f(n+1) = 2^{n+1}$. Рассмотрим равенство $f(n+2) = 3f(n+1) - 2f(n)$ или $2^{n+2} = 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n = 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2}$ – это тождество выполняется при любом n, поэтому 2^n является решением указанного соотношения. ◄

Пример 2. Показать, что в задаче о Ханойской башне решение рекуррентного соотношения имеет вид

$$f(n) = 2^n - 1, \quad n \geq 0$$

►Последовательно вычисляя

$$f(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7,$$
$$f(4) = 2 \cdot 7 + 1 = 15, \; f(5) = 2 \cdot 15 + 1 = 31, \; f(6) = 2 \cdot 31 + 1 = 63$$

можно заметить закономерность вычисления каждого последующего члена последовательности, и сделать предположение, что общий вид решения будет иметь вид

$$f(n) = 2^n - 1$$

Доказательство справедливости предложенной формулы можно осуществить двумя способами.

1. Метод математической индукции.

База индукции $f(0) = 2^0 - 1 = 0$ и считая, что формула справедлива при $n-1$, получаем

$$f(n) = 2f(n-1) + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1.$$

2. Прибавим 1 к обеим частям соотношений:

$$f(0) = 0$$

$$f(n) = 2f(n-1) + 1 \qquad \text{при } n > 0$$

и получим новую рекуррентность:

$$f(0) + 1 = 1$$

$$f(n) + 1 = 2f(n-1) + 2 \quad \text{при } n > 0$$

Положим $F(n) = f(n) + 1$, тогда

$$F(0) = 1$$
$$F(n) = 2F(n-1), \quad n > 0$$

Решением этой рекуррентности является $F(n) = 2^n$, следовательно, $f(n) = 2^n - 1$. ◄

Пример 3. Решить рекуррентность из задачи о разрезании пиццы.

►Подход, предложенный в задаче о Ханойской башне, в этом случае не приемлем. Числа 1, 2, 4, 7, 11, 16,… не выявляют никакой закономерности. Поэтому мы «разворачиваем» данное рекуррентное соотношение.

$$f(n) = f(n-1) + n = f(n-2) + (n-1) + n = f(n-3) + (n-2) + (n-1) + n = \ldots =$$
$$= f(0) + 1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n = 1 + S(n)$$

где $S(n) = 1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n = \dfrac{n \cdot (1+n)}{2}$ – сумма n первых членов арифметической прогрессии. Тогда искомое решение имеет вид $f(n)=\dfrac{n\cdot(1+n)}{2}+1,\;\; n\ge 0$. ◄

Решение рекуррентного соотношения k- го порядка называется ***общим***, если оно зависит от k произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_k$ и путем подбора этих постоянных можно получить любое решение данного соотношения.

Пример 4. Доказать, что для соотношения

$$f(n+2)=5f(n+1)-6f(n) \tag{47}$$

общим решением будет

$$f(n)=C_1 2^n + C_2 3^n \tag{48}$$

► $f(n+2)=5f(n+1)-6f(n)=5(C_1 2^{n+1}+C_2 3^{n+1})-6(C_1 2^n + C_2 3^n)=$

$$=C_1 2^n(5\cdot 2-6)+C_2 3^n(5\cdot 3-6)=C_1 2^{n+2}+C_2 3^{n+2}. \text{ ◄}$$

Докажем, что любое решение данного соотношения можно представить в виде (48).

►Любое решение соотношения (47) однозначно определяется значениями $f(1)$ и $f(2)$. Пусть $f(1)=a$, $f(2)=b$, тогда надо доказать, что для любых чисел a и b найдутся такие C_1 и C_2, что $2C_1+3C_2=a$ и $2^2C_1+3^2C_2=b$.

При любых a и b система уравнений

$$\begin{cases} 2C_1+3C_2=a \\ 4C_1+9C_2=b \end{cases}$$

имеет единственное решение, т.к. определитель системы

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 6 \ne 0,$$

следовательно, (48) является общим решением соотношения (47).

2.3 Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

Общих правил для решения рекуррентных соотношений не существует, но есть класс соотношений, которые решаются единообразным методом. Это – рекуррентные соотношения вида

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \ldots + a_k f(n) \qquad (49)$$

где $a_1, a_2, \ldots a_k -$ некоторые числа. Такие соотношения носят название ***однородные линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами порядка*** k.

Выражение (49) позволяет вычислить очередной член последовательности $\{f(n)\}$ по предыдущим k членам. Задав начальные значения $f(0), f(1), \ldots, f(k-1)$, можно последовательно определить все члены последовательности.

Характеристическим уравнением для рекуррентной последовательности порядка k, заданной соотношением (49), называется равенство вида

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \ldots - a_{k-1} x - a_k = (x-\alpha_1)^{e_1}(x-\alpha_2)^{e_2} \ldots (x-\alpha_k)^{e_k} = 0,$$

$$\text{где } \sum_{i=1}^{k} e_i = k. \qquad (50)$$

Рассмотрим частный случай линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами.

Линейные рекуррентные соотношения второго порядка

Из соотношения (49) при $k=2$, получаем

$$f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n) \qquad (51)$$

Квадратное уравнение

$$x^2 = a_1 x + a_2 \qquad (52)$$

является характеристическим уравнением для рекуррентного соотношения (51).

При решении рекуррентностей вида (51) справедливы:

Утверждение 1. Если $f_1(n)$ и $f_2(n)$ являются решениями рекуррентного соотношения (51), то для любых чисел A и B последовательность

$$f(n) = Af_1(n) + Bf_2(n) \qquad (**)$$

также является решением этого соотношения.

►Так как $f_1(n)$ и $f_2(n)$ являются решениями рекуррентного соотношения (51), то имеют место тождества

$$f_1(n+2) = a_1 f_1(n+1) + a_2 f_1(n)$$

и

$$f_2(n+2) = a_1 f_2(n+1) + a_2 f_2(n).$$

Умножим соответственно оба равенства на A и B, затем сложим полученные равенства. Получим:

$$Af_1(n+2) + Bf_2(n+2) = a_1\left(Af_1(n+1) + Bf_2(n+1)\right) + a_2\left(Af_1(n) + Bf_2(n)\right)$$

То есть, $f(n) = Af_1(n) + Bf_2(n)$ – решение данного соотношения. ◄

Утверждение 2. Если число x_1 является корнем квадратного уравнения

$$x^2 = a_1 x + a_2,$$

то последовательность

$$\left\{x_1^{n-1}\right\} = 1, x_1, x_1^2, \ldots, x_1^{n-1}, \ldots$$

является решением рекуррентного соотношения

$$f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n).$$

Утверждение 3. Любая последовательность вида $f(n) = x_1^{n+m}$ $(n = 1,2....)$ также является решением соотношения (**).

При нахождении корней характеристического уравнения (52) возможны следующие случаи:

I. ***Корни*** x_1 ***и*** x_2 ***– различные и действительные***.

Тогда общее решение рекуррентного соотношения имеет вид

$$f(n)=C_1x_1^{n-1}+C_2x_2^{n-1},\ \ C_1,C_2\in R. \tag{53}$$

►Так как x_1 и x_2 – корни характеристического уравнения (53), то по утверждению (2) $f_1(n)=x_1^{n-1}$ и $f_2(n)=x_2^{n-1}$ являются решениями данного соотношения. А по утверждению (1) решением данного соотношения является и $f(n)=C_1x_1^n+C_2x_2^n$. Покажем, что любое решение рекуррентного соотношения можно представить в таком виде. Так как любое решение линейного рекуррентного соотношения второго порядка однозначно определяется значениями $f(1)$ и $f(2)$, поэтому система

$$\begin{cases} C_1+C_2=a \\ C_1x_1+C_2x_2=b \end{cases} \tag{54}$$

имеет решение при любых a и b. Решая систему относительно неизвестных C_1 и C_2, получаем что

$$C_1=\frac{b-ax_2}{x_1-x_2},\qquad C_2=\frac{ax_1-b}{x_1-x_2}. \blacktriangleleft \tag{55}$$

Для чисел Фибоначчи рекуррентное соотношение имеет вид

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2).$$

Его характеристическое уравнение имеет вид $x^2=x+1$.

Корнями этого уравнения являются числа

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\qquad x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Тогда общее решение рекуррентного соотношения Фибоначчи имеет вид

$$f(n)=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

но в силу первого утверждения общее решение можно записать в виде

$$f(n)=C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \tag{56}$$

Часто бывает более удобно к последовательности чисел Фибоначчи

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

добавить вначале числа 0 и 1, то есть рассматривать последовательность

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

Эта последовательность удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению и начальным условиям $f(0)=0, f(1)=1$. Полагая в формуле (13) $n=0$ и $n=1$, получаем систему уравнений для C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{2}(C_1 - C_2) = 1 \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, откуда общее решение имеет вид

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

II. ***Корни*** x_1 ***и*** x_2 ***– действительные и совпадают.***

Общее решение будет выглядеть следующим образом

$$f(n) = C_1 x_1^{n-1} + C_2 n x_1^{n-1} = x_1^{n-1}(C_1 + C_2 n). \tag{57}$$

Вторым решением, отличным от $f_1(n) = x_1^{n-1}$, является $f_2(n) = n x_1^{n-1}$.

►Если квадратное уравнение $x^2 = a_1 x + a_2$ имеет равные корни x_1 и x_2, то по теореме Виета $a_1 = 2x_1$, $a_2 = -x_1^2$. Исходя из этого, запишем уравнение следующим образом $x^2 = 2x_1 x - x_1^2$.

Соответственно, рекуррентное соотношение будет иметь вид

$$f(n+2) = 2x_1 f(n+1) - x_1^2 f(n) \tag{58}$$

Проверим, является ли $f_2(n) = n x_1^{n-1}$ решением соотношения (57).

$$f_2(n+2) = (n+2)x_1^{n+1}$$

$$f_2(n+1) = (n+1)x_1^{n}$$

Подставляя эти равенства в соотношение (57), получим очевидное тождество

$$(n+2)x_1^{n+1} = 2x_1(n+1)x_1^n - x_1^2 n x_1^{n-1} = 2(n+1)x_1^{n+1} - n x_1^{n+1} = (n+2)x_1^{n+1}$$

Значит nx_1^{n-1} - решение данного соотношения. ◄

Правило решения линейных рекуррентных соотношений с постоянными коэффициентами

Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами порядка большего двух, решаются таким же способом. Для рекуррентного соотношения k - го порядка

$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \ldots + a_k f(n)$$

составляем характеристическое уравнение

$$x^k - a_1 x^{k-1} - a_2 x^{k-2} - \ldots - a_{k-1}x - a_k = 0$$

Если все корни $x_1, x_2, \ldots, x_k$ этого уравнения k - й степени различны, то общее решение соотношения имеет вид

$$f(n) = C_1 x_1^n + C_2 x_2^n + \ldots + C_k x_k^n \,. \qquad (59)$$

Если среди корней имеются равные, например, $x_1 = x_2 = \ldots = x_s$, то в общем решении этим корням будут соответствовать слагаемое

$$x_1^n \left(C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \ldots + C_s n^{s-1}\right). \qquad (60)$$

Пример 5. Решить рекуррентное соотношение

$$f(n+2) = 2f(n+1) - f(n)$$

►Составим характеристическое уравнение

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Его корень $x = 1 -$ корень кратности 2, следовательно, общее решение будет иметь вид $f(n) = 1^n (C_1 + C_2 n) = C_1 + C_2 n$ ◄

Пример 6. Решить рекуррентное соотношение

$$f(n+4) = 5f(n+3) - 6f(n+2) - 4f(n+1) + 8f(n)$$

►Характеристическое уравнение имеет вид

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0\,.$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Его корни $x_1 = x_2 = x_3 = 2,\ x_4 = -1$, следовательно, общее решение данного соотношения выглядит следующим образом $f(n) = 2^n(C_1 + C_2 n + C_3 n^2) + C_4(-1)^n$ ◄

2.4 Примеры решения задач

Задача 1. *Написать первые пять членов решения рекуррентного соотношения* $f(n+2) = 2f(n+1) - 3f(n)$, *удовлетворяющего начальным условиям*

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(2) = 8 \end{cases}.$$

►Первые два члена последовательности, являющейся решением данной рекуррентности берем из начальных условий: 2, 8.

Находим последующие три:

$$f(3) = 2\cdot f(2) - 3\cdot f(1) = 2\cdot 8 - 3\cdot 2 = 10$$

$$f(4) = 2\cdot f(3) - 3\cdot f(2) = 2\cdot 10 - 3\cdot 8 = -4$$

$$f(5) = 2\cdot f(4) - 3\cdot f(3) = 2\cdot(-4) - 3\cdot 10 = -38.$$

Таким образом, первые члены решения: 2,8,10,-4,-38. ◄

Задача 2. *Проверить являются ли функции* $f_1(n) = 5\cdot 3^n - 1,\ f_2(n) = 2n,\ f_3(n) = 7$ *решениями рекуррентного соотношения* $f(n+2) = 4f(n+1) - 3f(n)$.

►1. Распишем для $f_1(n)$:

$$f(n+2) = 5\cdot 3^{n+2} - 1,$$

$$f(n+1) = 5\cdot 3^{n+1} - 1.$$

Подставляем в рекуррентность $f(n+2) = 4f(n+1) - 3f(n)$:

$$5\cdot 3^{n+2} - 1 = 20\cdot 3^{n+1} - 15\cdot 3^n - 1 = 3^n(60-15) - 1 = 5\cdot 3^2\cdot 3^n - 1 = 5\cdot 3^{n+2} - 1.$$

Следовательно, $f_1(n) = 5\cdot 3^n - 1$ – решение данной рекуррентности.

2. $f_2(n)$:

$$f(n+2) = 2(n+2),$$

$$f(n+1) = 2(n+1).$$

Подставляем в рекуррентность $f(n+2) = 4f(n+1) - 3f(n)$:

$$8(n+1) - 6n = 2(n+4) \neq 2(n+2).$$

Значит, $f_2(n) = 2n$ не является решением.

3. Для $f_3(n)$ получаем:

$$f(n+2) = 7,$$

$$f(n+1) = 7.$$

Подставляем в рекуррентность $f(n+2) = 4f(n+1) - 3f(n)$:

$$4 \cdot 7 - 3 \cdot 7 = 7 = f(n+2).$$

Следовательно, $f_3(n) = 7$ - решение. ◄

Задача 3. *Найти общее решение рекуррентного соотношения*

$$f(n+2) - 7f(n+1) + 12f(n) = 0.$$

►Составляем характеристическое уравнение для данного соотношения

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Находим корни: $x_1 = 3,\ x_2 = 4$. Корни различные, следовательно, по формуле (53) общее решение будет иметь вид

$$f(n) = C_1 \cdot 3^{n-1} + C_2 \cdot 4^{n-1}$$

или, принимая во внимание утверждение (2), общим решением данной рекуррентности является

$$f(n) = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 4^n,$$

при условии, что последовательности $\{3^n\}$ и $\{4^n\}$ являются решениями рекуррентного соотношения $f(n+2) - 7f(n+1) + 12f(n) = 0$. Проверим это.

Обозначим через $f_1(n) = 3^n$ и $f_2(n) = 4^n$.

Для $f_1(n) = 3^n$ получаем:

$$f(n+2) = 3^{n+2},$$
$$f(n+1) = 3^{n+1},$$
$$f(n) = 3^n$$

Тогда $f(n+2)-7f(n+1)+12f(n)=0$ примет вид:

$$3^{n+2}-7\cdot 3^{n+1}+12\cdot 3^{n}=3^{n}(9-7\cdot 3+12)=0.$$

Получили тождество. Аналогично проверяется, является ли решением данной рекуррентности $f_2(n)=4^n$. Тогда по утверждению (**2**) $f(n)=C_1\cdot 3^n+C_2\cdot 4^n$ – общее решение заданного рекуррентного соотношения. ◄

Задача 4. *Найти* $f(n)$, *зная рекуррентное соотношение и начальные члены:*

$$f(n+2)-5f(n+1)+6f(n)=0,\quad f(1)=1,\ f(2)=-7.$$

►Составим характеристическое уравнение: $x^2-5x+6=0$.

Его корни: $x_1=2,\ x_2=3$. Общее решение будет иметь вид:

$$f(n)=C_1\cdot 2^n+C_2\cdot 3^n.$$

Подставляя начальные значения, получим систему:

$$\begin{cases}2C_1+3C_2=1\\ 4C_1+9C_2=-7\end{cases},$$

Решая которую относительно неизвестных C_1 и C_2, получаем: C_1=5, C_2= −3. Подставляем значения постоянных в общее решение, тем самым получим искомое решение данной рекуррентности с заданными начальными условиями:

$f(n)=5\cdot 2^n-3^{n+1}$. ◄

Задача 5. *То, что все лошади одной масти, можно доказать индукцией по числу лошадей в определенном табуне. Вот так:*

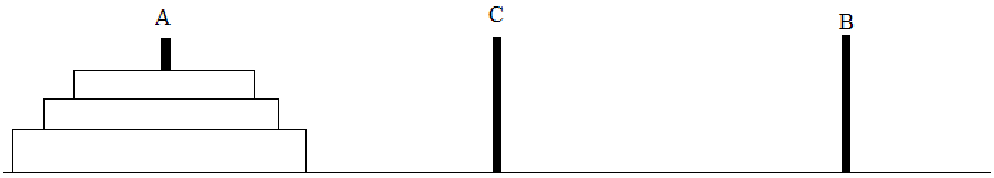
«Если существует только одна лошадь, то она своей масти, так что база индукции тривиальна. Для индуктивного перехода предположим, что существует n лошадей (с номерами от 1 до n). По индуктивному предположению лошади с номерами от 1 до n−1 одинаковой масти, и, аналогично, лошади с номерами от 2 до n имеют одинаковую масть. Но лошади посередине с номерами от 2 до n−1 не могут изменять масть в зависимости от того, как они сгруппированы, - это лошади, а не хамелеоны. Поэтому в силу транзитивности лошади с номерами от 1 до n также должны быть

одинаковой масти. Таким образом, все n лошадей одинаковой масти. Что и требовалось доказать».

Есть ли ошибка в приведенном рассуждении и, какая именно?

►Ошибка данного рассуждения заключается в доказательстве по индуктивному предположению. При доказательстве того, что n лошадей имеют одну и ту же масть, используется пересечение двух множеств от 1 до $n-1$ и от 2 до n, но для $n = 2$ этого пересечения нет. Следовательно, если есть две лошади, имеющие разную масть, то утверждение является неверным. В случае, когда любые две лошади имеют одну и ту же масть, доказательство верно при любом n. ◄

Задача 6. *Найдите кратчайшую последовательность перекладываний, перемещающих башню из n дисков с левого колышка A на правый колышек B, если прямой обмен между A и B запрещен. (Правило: каждое перекладывание должно производиться через средний колышек C, больший диск нельзя класть на меньший.)*



►Пусть $F(n)$ - минимальное число перекладываний, необходимых для перемещения n дисков с одного колышка на другой через колышек C.

Крайние случаи:

$F(0)=0$

$F(1)=2$ (рис. 11)

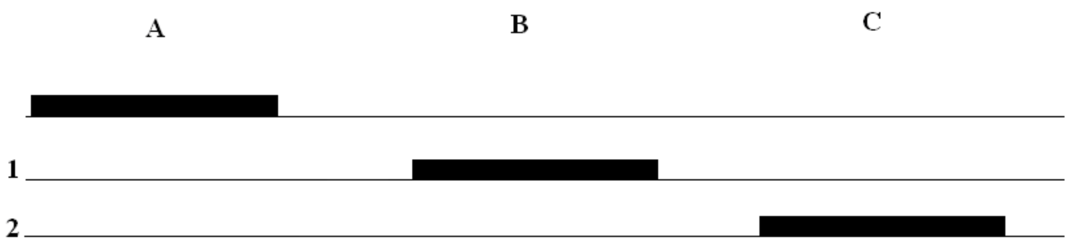


Рис. 11. Случай с одним диском.

$F(2)=8$ (рис. 12)

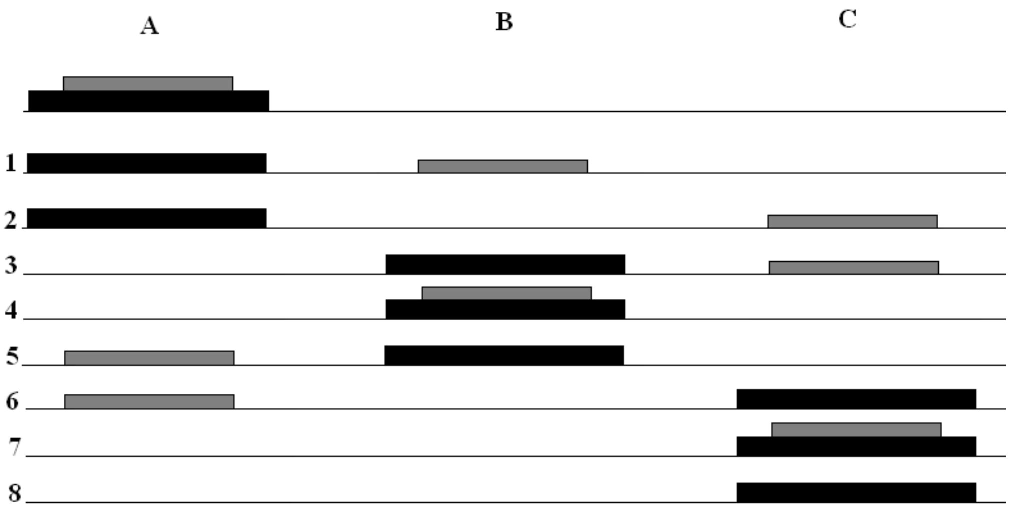


Рис. 12. Случай с двумя дисками.

Эксперимент с тремя дисками (рис. 13) дает ключ к общему правилу перемещения n дисков: мы сначала перемещаем $(n-1)$ меньших дисков на колышек B ($F(n-1)$ перекладываний), затем перекладываем самый большой диск на колышек C (одно перекладывание), перемещаем $(n-1)$ меньших дисков на колышек A ($F(n-1)$ перекладываний), затем самый большой диск на колышек B (одно перекладывание), наконец, помещаем $(n-1)$ меньших дисков на колышек B ($F(n-1)$ перекладываний).

Таким образом, n дисков (при $n>0$) можно переместить самое большое за $3F(n-1)+2$ перекладываний: $F(n) \leq 3F(n-1)+2$.

Покажем, что необходимо не менее $3F(n-1)+2$ перекладываний.

На обоих этапах мы должны переместить самый большой диск. При этом $(n-1)$ меньших дисков должны находиться на одном колышке (A или B), но чтобы собрать их вместе, потребуется, как минимум, $F(n-1)$ перекладываний. Самый большой диск можно перекладывать и более одного раза. Получается, что $F(n) \geq 3F(n-1)+2$. Объединение этих двух неравенств приводят к равенству, а вместе с тривиальным решением при $n=0$ получаем рекуррентное соотношение:

$$F(0)=0$$

$$F(n)=3F(n-1)+2. \text{ при } n>0$$

Решим это соотношение.

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

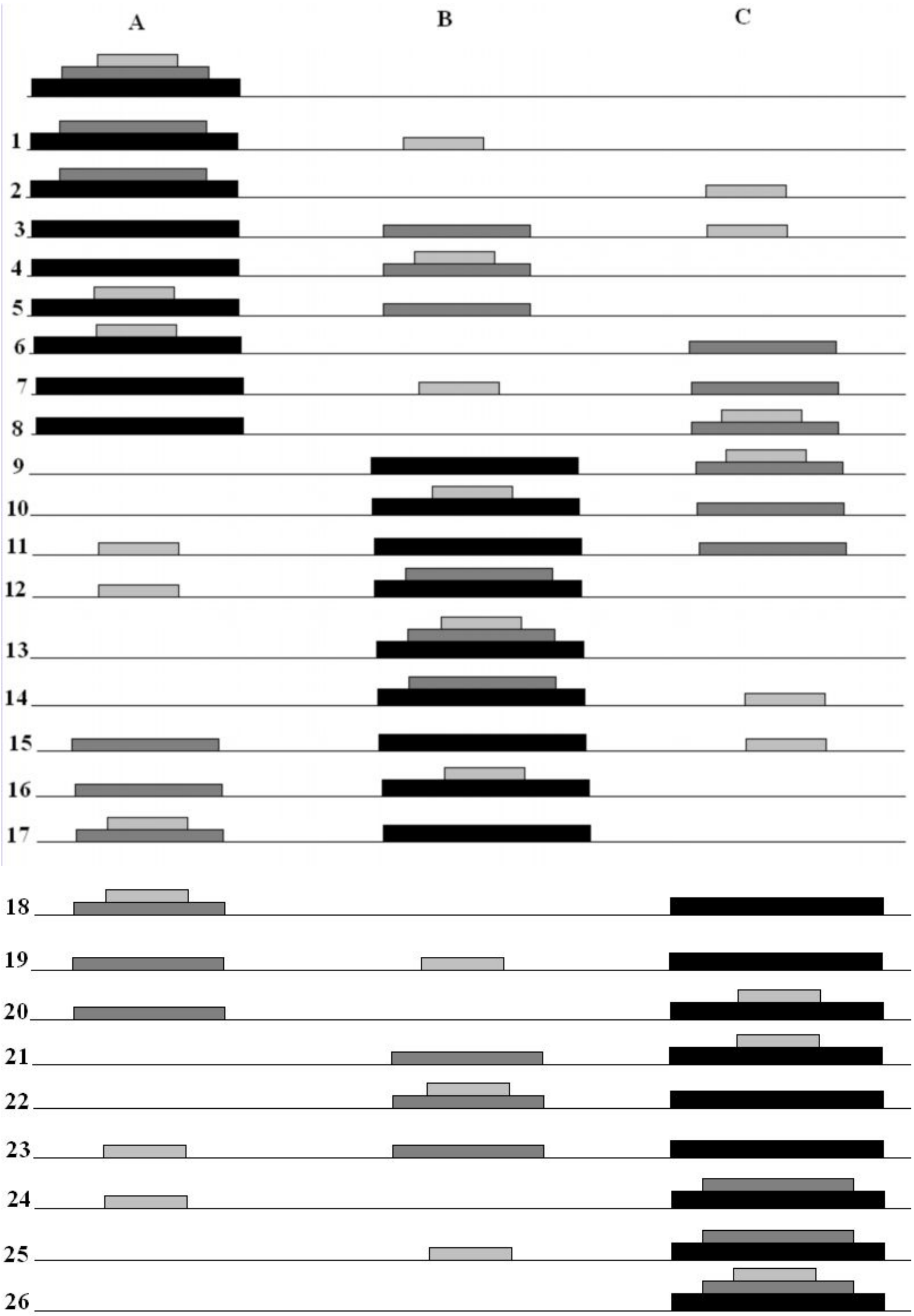


Рис. 13. Случай с тремя дисками.

Первый способ решения. «Угадывание» правильного решения с последующим доказательством того, что догадка верна.

Вычисляем:

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$F(1)=2,\ F(2)=9-1=8,\ F(3)=3\cdot 8+2=27-1=26,\ F(4)=3\cdot 26+2=81-1=80$

Из этого можно сделать предположение, что

$$F(n)=3^n-1,\ \ n\geq 0\,.$$

Докажем методом математической индукции по числу n:

1. База: $n=0$, $F(n)=3^0-1=0$ (верно);
2. Индуктивный переход: пусть доказано для всех чисел $t\leq(n-1)$
3. Докажем для $t=n$: $F(n)=3F(n-1)+2=3(3^{n-1}-1)+2=3^n-1$.

Из пунктов 1 и 2 следует: при $n\geq 0$ $F(n)=3^n-1,\ n\geq 0$. ◄

Второй способ решения. С помощью тождественных преобразований сводим рекуррентность к более простой, решение которой очевидно.

►Прибавим к обеим частям соотношения 1:

$$F(0)+1 = 1,$$

$$F(n)+1 = 3\,F(n-1)+3 \quad \text{при } n>0.$$

Обозначим $U(n)=F(n)+1$, тогда получим:

$$U(0)=1,$$

$$U(n)=3F(n-1)+3=3(U(n-1)-1)+3=3U(n-1) \quad \text{при } n>0.$$

Решением этой рекурсии есть $U(n)=3^n$; следовательно, $F(n)=3^n-1,\ n\geq 0$. ◄

Задача 7. *Покажите, что в процессе перемещения башни при ограничениях из предыдущего упражнения нам встретятся все допустимые варианты размещения n дисков на трех колышках.*

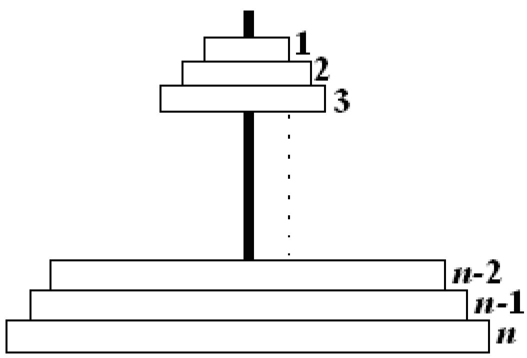


Рис. 14. Башня с занумерованными n дисками.

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

►Занумеруем диски (рис.14). Существует (в соответствии с условиями задачи) только три возможных расположения каждого диска на одном из колышков: либо на первом колышке (A), либо на втором колышке (B), либо на третьем колышке (C). Это будут перестановки длины n из трех элементов. Например,

$$\begin{pmatrix} \overset{1}{1} & \overset{2}{1} & \overset{3}{2} & \overset{4}{3} \ldots & \overset{n-1}{2} & \overset{n}{3} \end{pmatrix}.$$

Число перестановок длины k из n элементов: $P_n^k = n^k$. Следовательно, для нашего случая $P_3^n = 3^n$, т.е. 3^n – это все возможные различные расположения n дисков на трех колышках.

Замечание. В предыдущей задаче было показано, что наименьшее число перекладываний с колышка A на колышек B через колышек C равно $3^n - 1$. Таким образом, каждый раз перекладывая диск с одного колышка на другой, мы получаем все допустимые расположения n дисков на трех колышках (т.к. мы не перекладываем один диск с одного колышка на другой по несколько раз). ◄

Задача 8. *Имеются ли какие-нибудь начальная и конечная конфигурации из n дисков на трех колышках, которые требуют более чем $2^n - 1$ перекладываний, чтобы получить одну из другой по исходным правилам Люка?*

►Докажем методом математической индукции, что любая начальная и конечная конфигурации из n дисков на трех колышках требуют не более чем $2^n - 1$ перекладываний, чтобы получить одну из другой по исходным правилам Люка.

1. База: если n=1, то требуется одно перекладывание, тогда $1 \le 2^0 - 1$ (верно);
2. Индуктивный переход: пусть для любой начальной и конечной конфигурации из $n-1$ дисков на трех колышках требуется не более чем $2^{n-1} - 1$ перекладываний.
3. Докажем для n дисков:
   - если начальная и конечная конфигурации не предполагают перекладывание самого большого нижнего диска, тогда мы перекладываем только $n-1$ верхних дисков, а по индуктивному предположению для этого потребуется не более чем $2^{n-1} - 1$ перекладываний;

- если начальная и конечная конфигурации предполагают перекладывание самого большого нижнего диска, тогда мы перекладываем n−1 верхних дисков, а по индуктивному предположению для этого будет достаточно $2^{n-1}-1$ перекладываний (т.е. n−1 верхних дисков разместили на одном колышке), затем перекладываем самый большой диск (одно перекладывание), и снова перекладываем n−1 верхних дисков, как требует конечная конфигурация (достаточно $2^{n-1}-1$ перекладываний). Таким образом, получили, что потребуется не более чем $2^{n-1}-1+1+2^{n-1}-1=2^n-1$ перекладываний.

Из всего этого следует, что *не существует* начальной и конечной конфигурации из *n* дисков на трех колышках требующей более чем 2^n-1 перекладываний, чтобы получить одну из другой по исходным правилам Люка. ◄

Задача 9. *Диаграмма Венна с тремя пересекающимися окружностями часто приводится для иллюстрации восьми возможных подмножеств, связанных с тремя заданными множествами (рис. 15):*

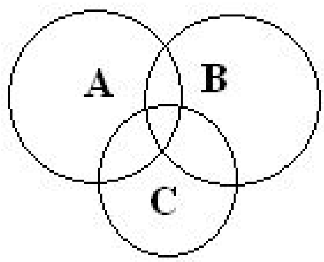


Рис. 15. Диаграмма Венна для трех множеств.

Можно ли проиллюстрировать четырьмя пересекающимися окружностями шестнадцать подмножеств, которые возникают в связи с четырьмя заданными множествами?

►Так как три пересекающиеся окружности иллюстрируют восемь различных подмножеств, то для того чтобы получить шестнадцать возможных подмножеств надо, чтобы четвертая окружность пересекала все восемь множеств. Но такого быть *не может*. Две произвольные окружности могут иметь не более двух точек пересечения, поэтому, проводя четвертую окружность, мы сможем получить максимум шесть дополнительных подмножеств. Так как возможно только два расположения четвертой окружности относительно трех данных окружностей:

Четвертая окружность пересекает внешнее подмножество (рис. 16);

Если добавленная окружность пересекает внешнее множество, то она не пересекает минимум два внутренних множества (зависит от радиуса окружности).

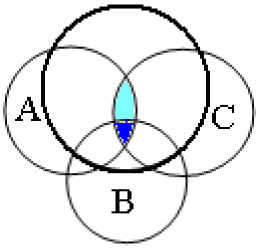


Рис. 16

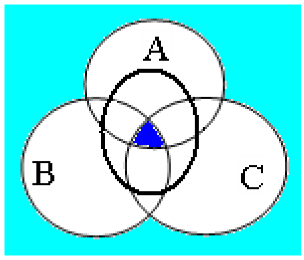


Рис. 17

Четвертая окружность лежит внутри трех пересекающихся окружностей (рис.17).

Если добавленная окружность лежит внутри трех пересекающихся окружностей, то она не пересекает внешнее множество и минимум одно внутреннее множество.

Таким образом, получили, что четырьмя окружностями можно проиллюстрировать максимум 14 (8+6=14) возможных подмножеств. ◄

Задача 10. *Некоторые из областей, очерчиваемых n прямыми на плоскости, бесконечны, в то время как другие конечны. Какое максимально возможное число конечных областей?*

►Пусть V_n - максимальное число возможных конечных областей, очерчиваемых n прямыми.

Рассмотрим частные случаи (рис.18), при условии, что n-я прямая не параллельна никакой другой прямой (следовательно, она пересекает каждую из них), и не проходит ни через одну из имеющихся точек пересечения (следовательно, она пересекает каждую из прямых в различных местах):

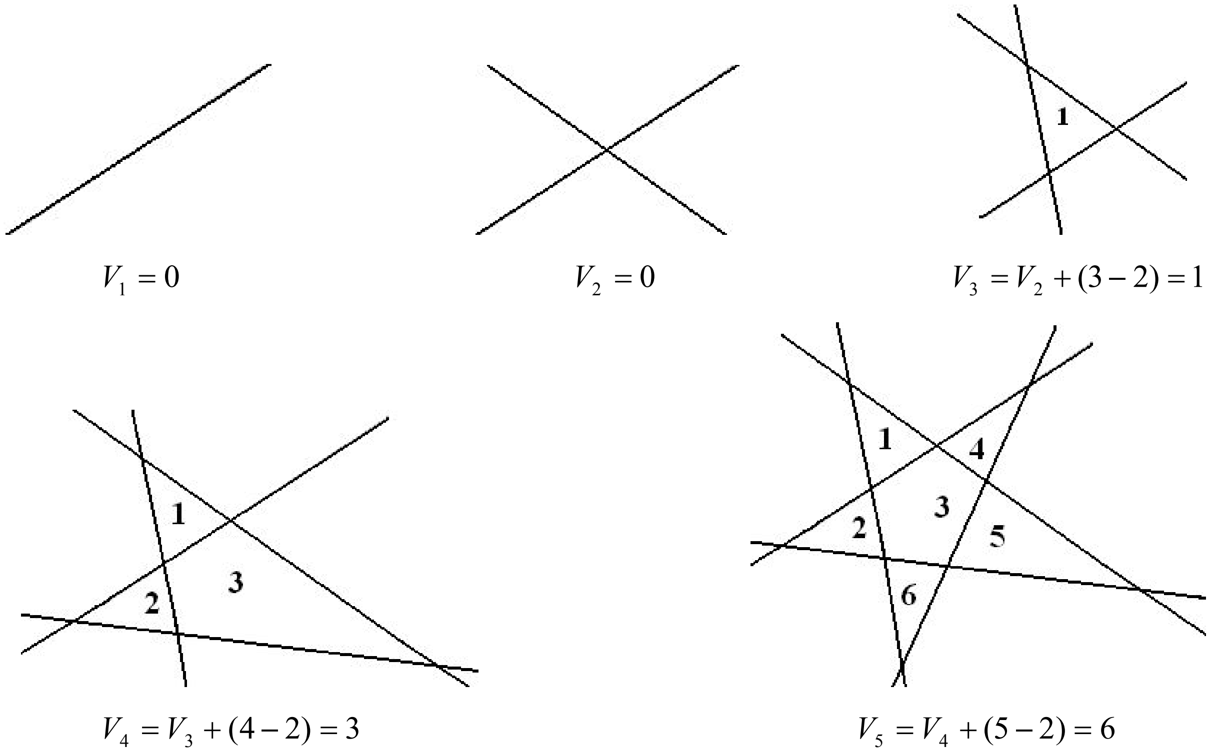


Рис. 18. Частные случаи для одной, двух, трех, четырех и пяти прямых.

Обобщая, приходим к следующему выводу: новая n-я прямая (при $n \geq 3$) пересекает $n-1$ старых прямых в $n-1$ различных точках, следовательно, получаем n областей и две крайние из которых бесконечны. Таким образом, получили следующее рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned} &V_0 = V_1 = V_2 = 0 \\ &V_n = V_{n-1} + (n-2) \end{aligned} \quad \text{при } n \geq 3$$

Решим данное соотношение.

$$V_n = V_{n-1} + (n-2) = V_{n-2} + (n-3) + (n-2) = \ldots = 0 + 0 + 1 + 2 + \ldots + (n-4) +$$

$$+ (n-3) + (n-2) = \frac{(1+(n-2)) \cdot (n-2)}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{n(n+1) + 2 - 4n}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + 1 - 2n = L_n - 2n$$

то есть

$$V_n = L_n - 2n, \textit{ при } \; n \geq 0$$

(Здесь $L_n = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$ - максимальное число областей, на которые плоскость делится n прямыми).

Докажем полученное равенство методом математической индукции по n:

1. База: n=0, $V_0 = L_0 - 2 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$ (верно);

2. Индуктивный переход: пусть доказано для всех чисел $t \le (n–1)$. Докажем для t=n:

$$V_n = V_{n-1} + (n-2) \overset{(И.П)}{=} L_{n-1} - 2(n-1) + (n-2) = L_{n-1} - n =$$

$$= \frac{(n-1)n}{2} + 1 - n = \frac{n^2 - 3n}{2} + 1 = \frac{n^2 + n - 4n}{2} + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + 1 - 2n = L_n - 2n$$

Из пунктов 1 и 2 следует: при $n \ge 0$ $V_n = L_n - 2n$. ◄

Задача 11. *Пусть $H(n) = J(n+1)-J(n)$. В силу рекуррентности* (5):

$$H(2n) = J(2n+1) - J(2n) \overset{(5)}{=} (2J(n)+1) - (2J(n)-1) = 2,$$

$$H(2n+1) = J(2n+2)-J(2n+1) = (2J(n+1)-1)-(2J(n)+1)=2H(n)-2 \text{ при всех } n\ge 1.$$

Поэтому представляется возможным доказать индукцией по n, что $H(n)$=2 при всех n. Что в рассуждении не верно?

►Рекуррентность (5) имеет вид:

$$J(1)=1$$

$$J(2n)=2J(n)-1 \text{ при } n \ge 1$$

$$J(2n+1)=2J(n)+1 \text{ при } n \ge 1.$$

Данное равенство $H(n)$=2 выполняется для чисел вида $2n$ и $2n$+1, т.к. любое натуральное число можно представить в таком виде.

Ошибка заключается в том, что в данном рассуждении не проверили базу индукции (т.е. когда n принимает свое наименьшее значение: n = 1).

$H(1) = J(2) - J(1) = 2J(1) -1 - J(1) = 2\cdot 1-1-1 = 0 \Rightarrow H(1) \ne 2 \Rightarrow$ база индукции не выполняется, следовательно равенство $H(n)$=2 верно не при всех n. ◄

Задача 12. *Решите рекуррентное соотношение, считая, что $Q_n \ne 0$ при всех $n \ge 0$.*

$$Q_0 = \alpha, Q_1 = \beta,\ Q_n = \frac{1+Q_{n-1}}{Q_{n-2}} \quad \text{при } n>1.$$

► $Q_2 = \frac{1+Q_1}{Q_0} = \frac{1+\beta}{\alpha}$;

$$Q_3 = \frac{1+Q_2}{Q_1} = \frac{1+\frac{1+\beta}{\alpha}}{\beta} = \frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\cdot\beta};$$

$$Q_4 = \frac{1+Q_3}{Q_2} = \frac{1+\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\cdot\beta}}{\frac{1+\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha(\alpha\cdot\beta+\alpha+\beta+1)}{\alpha\cdot\beta\cdot(1+\beta)} = \frac{1+\alpha}{\beta};$$

$$Q_5 = \frac{1+Q_4}{Q_3} = \frac{1+\frac{1+\alpha}{\beta}}{\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\cdot\beta}} = \frac{\alpha\cdot\beta\cdot(1+\alpha+\beta)}{\beta\cdot(1+\alpha+\beta)} = \alpha;$$

$$Q_6 = \frac{1+Q_5}{Q_4} = \beta;$$

$$Q_7 = \frac{1+Q_6}{Q_5} = \frac{1+\beta}{\alpha};$$

$$Q_8 = \frac{1+Q_7}{Q_6} = \frac{1+\frac{1+\beta}{\alpha}}{\beta} = \frac{\alpha+\beta+1}{\alpha\cdot\beta};$$

$$Q_9 = \frac{1+Q_8}{Q_7} = \frac{1+\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\cdot\beta}}{\frac{1+\beta}{\alpha}} = \frac{1+\alpha}{\beta}.$$

Получили: $Q_0 = Q_5 = \alpha$; $Q_1 = Q_6 = \beta$; $Q_2 = Q_7 = \frac{1+\beta}{\alpha}$; $Q_3 = Q_8 = \frac{1+\alpha+\beta}{\alpha\cdot\beta}$;

$Q_4 = Q_9 = \frac{1+\alpha}{\beta}$.

Обобщая, приходим к выводу, что данная последовательность периодическая: если $n = 5k+r$ ($r = \overline{0...4}$), тогда $Q_n = Q_{(5k+r)} = Q_r$ (для $n \geq 5$)

Докажем методом математической индукции:

1. База:

n=5 $Q_5 = Q_{5\cdot1+0} = Q_0$ (верно, показано выше);

n=6 $Q_6 = Q_{5\cdot1+1} = Q_1$ (верно, показано выше);

n=7 $Q_7 = Q_{5\cdot1+2} = Q_2$ (верно, показано выше);

n=8 $Q_8 = Q_{5\cdot1+3} = Q_3$ (верно, показано выше);

n=9 $Q_9 = Q_{5\cdot1+4} = Q_4$ (верно, показано выше);

2. Индуктивный переход: пусть верно для всех чисел $t \le (n-1)$.

3. Докажем для $t=n$:

$$n = 5k + 0, \text{ тогда } Q_{5k+0} = Q_n = \frac{1+Q_{n-1}}{Q_{n-2}} \overset{(И.П.)}{=} \frac{1+Q_4}{Q_3} = Q_5 = Q_0;$$

$$n = 5k + 1, \text{ тогда } Q_{5k+1} = Q_n = \frac{1+Q_{n-1}}{Q_{n-2}} \overset{(И.П.)}{=} \frac{1+Q_0}{Q_4} = Q_6 = Q_1;$$

$$n = 5k + 2, \text{ тогда } Q_{5k+2} = Q_n = \frac{1+Q_{n-1}}{Q_{n-2}} \overset{(И.П.)}{=} \frac{1+Q_1}{Q_0} = Q_2;$$

$$n = 5k + 3, \text{ тогда } Q_{5k+3} = Q_n = \frac{1+Q_{n-1}}{Q_{n-2}} \overset{(И.П.)}{=} \frac{1+Q_2}{Q_1} = Q_3;$$

$$n = 5k + 4, \text{ тогда } Q_{5k+4} = Q_n = \frac{1+Q_{n-1}}{Q_{n-2}} \overset{(И.П.)}{=} \frac{1+Q_3}{Q_2} = Q_4.$$

4. Из пунктов 1 и 2 следует: для $n \ge 5$ $Q_n = Q_{(5k+r)} = Q_r$.

Ответ: $Q_n = Q_{(5k+r)} = Q_r$ при всех $n \ge 0$ и $k,\ r \in Z_+$. ◄

Иногда возможно использование «обратной индукции», т.е. доказательства от n к $n-1$, а не наоборот.

Задача 13. *Утверждение*

$$P(n): \quad x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \le \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^n, \quad \text{если } x_1, x_2, \ldots x_n \ge 0$$

справедливо для n=2, так как

$$x_1 \cdot x_2 \le \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \text{ и } (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2 \ge 0.$$

1. *Пользуясь «обратной индукцией», полагая* $x_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}$, *докажите, что P(n) влечет P(n−1) при любом n>1.*

2. *Покажите, что P(n) и P(2) влекут P(2n).*

3. *Объясните, почему отсюда следует справедливость P(n) при всех n.*

► **1**. Подставим x_n в *P(n)*

$$P(n):$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} \right) \le \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \dfrac{x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}}{n} \right)^n .$$

Преобразуем правую скобку

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + \dfrac{x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}}{n} \right)^n =$$

$$= \left(\frac{x_1(n-1) + x_2(n-1) + \ldots + x_{n-1}(n-1) + x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n(n-1)} \right)^n = \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} \right)^n .$$

Получили

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} \right) \le \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} \right)^n .$$

Разделим левую и правую части неравенства на $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} \right)$ (случай, когда все $x_i = 0$ – тривиальный, поэтому мы его не рассматриваем), получим

$$P(n-1):\ x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1} \le \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} \right)^{n-1} .$$

Следовательно, при $x_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}$ $P(n)$ влечет $P(n-1)$ при всяком $n>1$.

2. Запишем $P(n)$ для двух конечных последовательностей чисел.

$$P(n):\; x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \;\le\; \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^n \quad \text{(для } n \text{ первых членов),}$$

$$x_{n+1} \cdot x_{n+2} \cdot \ldots \cdot x_{2n} \le \left(\frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{2n}}{n}\right)^n \quad \text{(для } n \text{ членов начиная с } x_{n+1}\text{).}$$

Перемножим эти два неравенства, используя свойство неравенств: если $0<a<b$ и $0<c<d$, то $ac<bd$.

Получим

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1} \cdot \ldots \cdot x_{2n} \le \left(\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \cdot \left(\frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{2n}}{n}\right)\right)^n.$$

Преобразуем правую скобку неравенства, используя утверждение $P(2)$

$$P(2): \qquad x_1 \cdot x_2 \le \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \cdot \left(\frac{x_{n+1} + \ldots + x_{2n}}{n}\right) \le \left(\frac{\dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n} + \dfrac{x_{n+1} + \ldots + x_{2n}}{n}}{2}\right)^2.$$

Возведем левую и правую части неравенства в n-ую степень, получим

$$\left(\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \cdot \left(\frac{x_{n+1} + \ldots + x_{2n}}{n}\right)\right)^n \le \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{2n}}{2n}\right)^{2n}.$$

Таким образом, получили

$$P(2n):\; x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1} \cdot \ldots \cdot x_{2n} \;\le\; \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{2n}}{2n}\right)^{2n}.$$

Следовательно, $P(n)$ и $P(2)$ влекут $P(2n)$.

4. Выше было показано, что из $P(n)$ следует $P(n-1)$, а из $P(n)$ и $P(2)$ следует $P(2n)$. Следовательно, мы можем утверждать, что $P(n)$ выполняется для любого $n > 1$, т.к. P (от нечетного числа n) следует из P (от четного числа $(n-1)$), а P (от четного числа) следует из $P(2)$ и P (от четного или нечетного числа) и т.д. В конечном итоге, приходим к $P(2)$, а оно выполняется. Например, $P(9)$ следует из

$P(8)$, а $P(8)$ следует из $P(2)$ и $P(4)$, $P(4)$ следует из $P(2)$ и $P(2)$, а $P(2)$ выполняется. ◄

Задача 14. *Пусть Q_n - минимальное число перекладываний, необходимых для перемещения башни из n дисков с колышка A на колышек B, если все перекладывания осуществляются по часовой стрелке – т.е. с A на B, или с B на другой колышек, и с другого колышка на A (рис.19). Кроме того, пусть R_n – минимальное число перекладываний, необходимых для перемещения башни с B обратно на A при том же ограничении. Докажите, что*

$$Q_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 2R_{n-1} + 1, & n > 0 \end{cases} \qquad (61)$$

$$R_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ Q_n + Q_{n-1} + 1, & n > 0 \end{cases} \qquad (62)$$

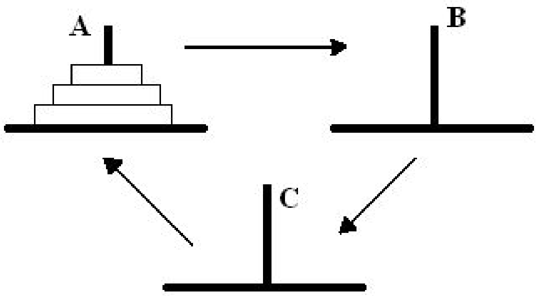
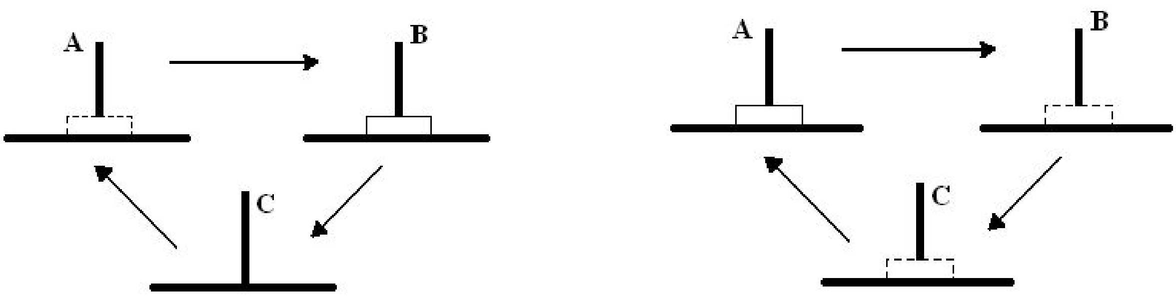


Рис. 19. Правило перекладываний дисков.

►Рассмотрим частные случаи:

$Q_0 = 0,\ R_0 = 0;\ Q_1 = 1,\ R_1 = 2$ (рис. 20)



$Q_1 = 1$ $R_1 = 2$

Рис. 20. Случай для одного диска.

ABBYY PDF Transformer 2.0
Click here to buy
www.ABBYY.com

$Q_2 = 5,\ R_2 = 7$ (рис. 21, рис. 22)

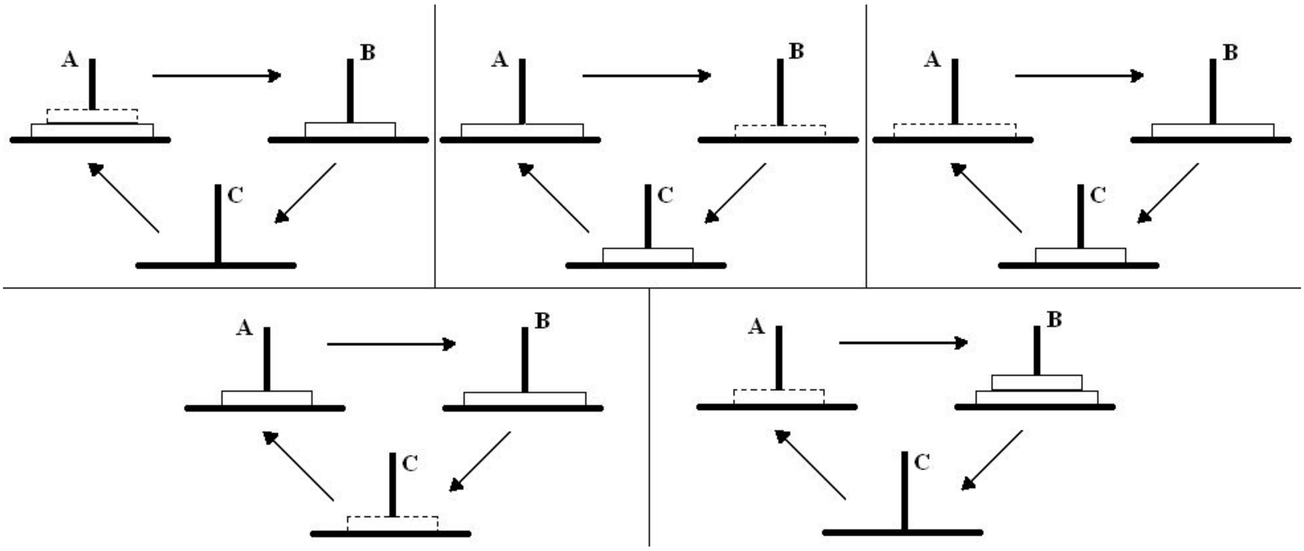


Рис. 21. $Q_2 = 5$.

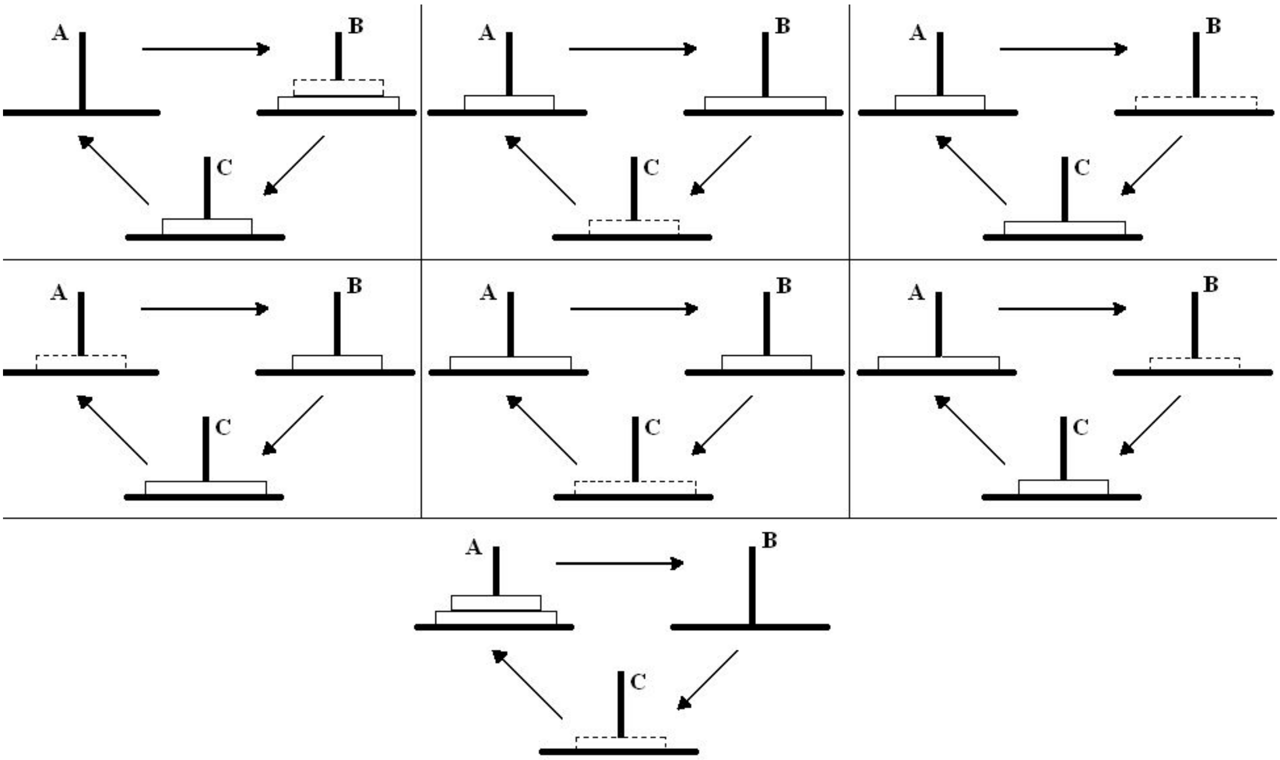


Рис. 22. $R_2 = 7$.

$Q_3 = 15 = R_2 + 1 + R_2,\ R_3 = 21 = Q_3 + 1 + Q_2$ (предлагается самостоятельно проверить). Эксперимент с тремя дисками дает ключ к общему правилу перемещения n дисков с колышка A на колышек B по часовой стрелке: сначала мы перемещаем (n−1) меньших дисков с колышка A на C, через колышек B (для этого потребуется R_{n-1} перекладываний, т.к. это тоже самое если бы мы перекладывали диски с колышка В на колышек А через колышек С), затем перекладываем самый большой диск с колышка А на колышек В (одно перекладывание), потом помещаем ($n-1$) меньших дисков с колышка С на В (что требует R_{n-1} перекладываний, по тем же соображениям). Таким образом, n дисков (при $n>0$) с колышка А на колышек В можно переместить за $Q_n = 2R_{n-1} + 1$ перекладываний. Получили соотношение (61).

Эксперимент с тремя дисками дает ключ и к общему правилу перемещения n дисков с колышка В на колышек А по часовой стрелке: сначала мы перемещаем ($n-1$) меньших дисков с колышка В на А (что требует R_{n-1} перекладываний), затем перекладываем самый большой диск с колышка В на колышек С (одно перекладывание), потом помещаем ($n-1$) меньших дисков с колышка А на В (что требует Q_{n-1} перекладываний), затем перекладываем самый большой диск с колышек С на колышек А (одно перекладывание), и, наконец, помещаем ($n-1$) меньших дисков с колышка В на колышек А (еще R_{n-1} перекладываний). Таким образом, n дисков (при $n>0$) с колышка В на колышек А можно переместить за $R_n = R_{n-1} + 1 + Q_{n-1} + 1 + R_{n-1} = 2R_{n-1} + Q_{n-1} + 2$ перекладываний. Получили соотношение:

$$R_0 = 0$$
$$R_n = 2R_{n-1} + Q_{n-1} + 2$$

Вместо $2R_{n-1}$ подставляем $Q_n - 1$ (из соотношения 61) и получаем нужную нам систему (62). Таким образом, системы (61) и (62) справедливы. ◄

Задача 15. *На какое максимально возможное число областей плоскость делится n зигзагообразными линиями, каждая из которых состоит из двух параллельных полубесконечных прямых, соединенных прямолинейным отрезком?*

►Пусть N_n - это максимальное число областей, на которые плоскость делится n зигзагообразными линиями. Рассмотрим частные случаи:

$N_0 = 1$.

$N_1 = 2 = L_3 - 5$ (рис. 23)

$N_2 = 12 = L_6 - 5 \cdot 2$ (рис. 24)

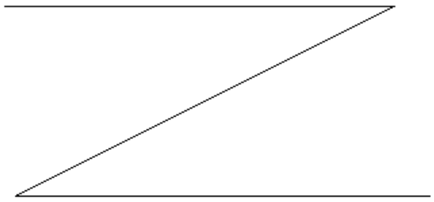


Рис. 23. Случай для одного зигзага.

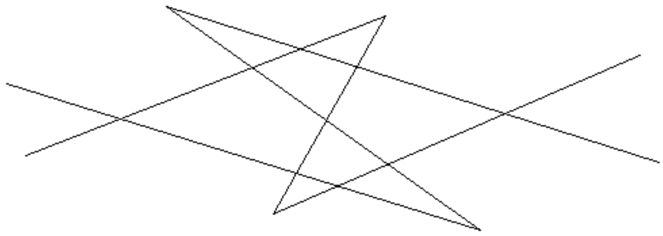


Рис. 24. Случай для двух зигзагов.

(Здесь $Ln = \dfrac{n(n+1)}{2} + 1$ - максимальное число областей, на которые плоскость делится n прямыми). Из этих частных случаев можно видеть, что зигзагообразная линия подобна трем прямым с тем лишь отличием, что области сливаются, если «три» прямые не продолжать после их пересечения (рис.25):

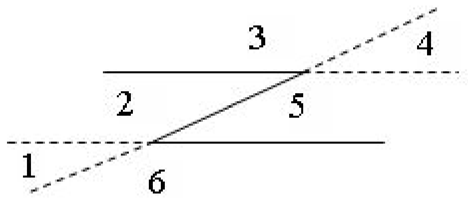


Рис. 25. Рассмотрение зигзага как пересечение трех прямых.

Области 1, 2, 6 и 3, 4, 5, которые были бы разделены при наличии трех прямых, превращаются в единую область в случае одной зигзагообразной линии, т.е. мы теряем четыре области. Так же у нас имеется две параллельные прямые, следовательно, мы теряем еще одну область. Таким образом, если привести все в надлежащий порядок, то все зигзагообразные линии должны пересекаться между собой и точки изломов должны лежать «по ту сторону» пересечений с другими линиями, и мы теряем только пять областей на одну линию. Таким образом,

$$N_n = L_{3n} - 5n = \frac{3n(3n+1)}{2} + 1 - 5n = \frac{9n^2 + 3n - 10n}{2} + 1 = \frac{9n^2}{2} - \frac{7n}{2} + 1.$$

Данную задачу можно решить и по другому, если заметить, что зигзаг можно рассматривать как «прямую», и отрезок, соединяющий две полупрямые, может быть сколь угодно длинным. Тогда данная задача аналогична задаче о нахождении максимального числа Ln областей, на которые плоскость делится n прямыми (две прямые имеют одну точку пересечения). В нашем случае две зигзагообразные линии имеют девять точек пересечения.

С другой стороны, две зигзагообразные линии подобны шести прямым с тем лишь отличием, что области сливаются, если «шесть» прямых не продолжать после их пересечения (рис. 26):

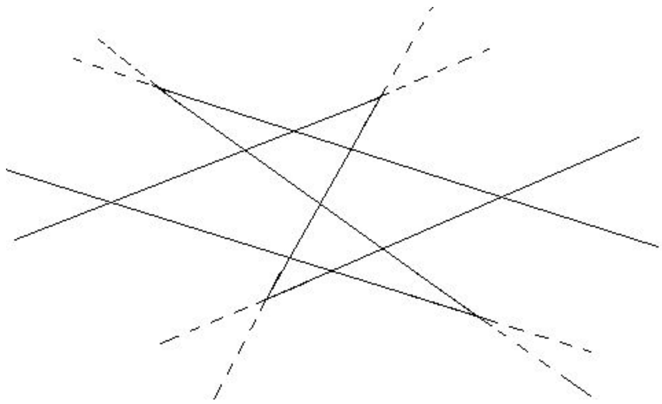


Рис. 26. Рассмотрение двух зигзагов как пересечение шести прямых.

Эти шесть прямых образуют 20 областей, следовательно, при пересечении двух зигзагообразных линий мы теряем восемь областей.

Таким образом, получаем рекуррентное соотношение:

$$N_0 = 1$$
$$N_n = N_{n-1} + 9n - 8, \; n > 0$$

Решим данное соотношение.

$$N_n = N_{n-1} + 9n - 8 = N_{n-2} + 9(n-1) - 8 + 9n - 8 =$$

$$N_{n-3} + 9(n-2) - 8 + 9(n-1) - 8 + 9n - 8 = \ldots = 1 + 9 \cdot 1 - 8 + 9 \cdot 2 - 8 + \ldots +$$

$$+9 \cdot (n-1) - 8 + 9n - 8 = 1 + 9(1 + 2 + \ldots + (n-1) + n) - 8n = 1 + 9\frac{(1+n)n}{2} - 8n =$$

$$= \frac{9n^2}{2} - \frac{7n}{2} + 1 \Rightarrow N_n = \frac{9n^2}{2} - \frac{7n}{2} + 1 \text{ при } n \geq 0.$$

Докажем полученное равенство методом математической индукции.

1. База: n=0, $N_0 = \frac{9 \cdot 0^2}{2} - \frac{7 \cdot 0}{2} + 1 = 1$ (верно);

2. Индуктивный переход: пусть верно для всех чисел $t \le (n–1)$.

3. Докажем для $t=n$:

$$N_n = N_{n-1} + 9n - 8 \overset{(И.П)}{=} \frac{9(n-1)^2}{2} - \frac{7(n-1)}{2} + 1 + 9n - 8 =$$

$$\frac{9n^2 - 18n + 9 - 7n + 7}{2} + 9n - 7 = \frac{9n^2}{2} - \frac{7n}{2} + 1.$$

4. Из базы и индуктивного перехода следует: при $n > 0$ $N_n = \frac{9n^2}{2} - \frac{7n}{2} + 1$. ◄

Задача 16. *На какое максимальное число частей можно разделить головку сыра с помощью пяти плоских разрезов? (Головка сыра должна оставаться в исходном положении, пока вы ее режете, и каждому разрезу должна соответствовать некоторая плоскость в трехмерном пространстве.) Найдите рекуррентное соотношение для P_n - максимального числа трехмерных областей, на которое может быть разбито пространство n произвольно расположенными плоскостями.*

►Сначала найдем рекуррентное соотношение для P_n, а потом с помощью этого соотношения определим, на сколько частей можно разделить головку сыра с помощью пяти плоских разрезов (головка сыра является ограниченным пространством).

Итак, рассмотрим частные случаи: $P_1=2$, $P_2=4$, $P_3=4+4=8$, $P_4=8+7=15$. Эксперимент показывает, что данная задача аналогична задаче о нахождении максимального числа L_n областей, на которые плоскость делится n прямыми ($L_n=L_{n-1}+n$), но только с тем отличием, что дело обстоит в пространстве. Две произвольные плоскости пересекаются по единственной прямой. Для того, чтобы получить максимальное число трехмерных областей надо, чтобы каждая новая проведенная плоскость не была параллельна никакой другой плоскости (следовательно, она пересекает каждую из них), и не проходила ни через одну из имеющихся прямых пересечения (следовательно, она пересекает каждую из плоскостей по различным прямым). Таким образом, проводя новую n-ую плоскость, мы к старым P_{n-1} областям добавляем столько трехмерных областей, сколько образуется областей на n-ой плоскости образованных $n-1$ прямой пересечения этой плоскости со всеми остальными плоскостями. Поэтому рекуррентное соотношение имеет вид:

$$P_0 = 0$$
$$P_n = P_{n-1} + L_{n-1}$$

$$P_5 = P_4 + L_4 = 15 + \frac{4 \cdot 5}{2} + 1 = 26.$$

Следовательно, головку сыра можно разделить с помощью пяти плоских разрезов не более чем на 26 частей. ◄

Задача 17. *Доказать, что решением задачи Иосифа Флавия является соотношение* $F(n) = \begin{cases} J(2^m + k) + 2^{m-1}, \ 0 \le k < 2^{m-1} \\ J(2^m + k) - 2^m, \ 2^{m-1} \le k < 2^m \end{cases}$, где $n = 2^m + k$.

►Из задачи Флавия имеем рекуррентное соотношение, которое определяет $F(n)$:

$$F(2n) = 2 \cdot F(n) - 1 \qquad \text{при } n \ge 1$$
$$F(2n+1) = 2 \cdot F(n) + 1 \qquad \text{при } n \ge 1 \qquad (63)$$

Решим данное рекуррентное соотношение. Составим таблицу первых значений $F(n)$ и $J(n)$ (здесь $J(n)$ - номер последнего уцелевшего, когда из круга исключается каждый второй). Пусть n имеет вид: $n=2^m+k$, где 2^m – наибольшая степень 2, не превосходящая n ($m > 0$), а k – то, что остается ($0 \le k < 2^m$):

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$F(n)$	–	2	1	3	5	1	3	5	7	9	11	1	3	5	7	9	11	13
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1	3	5

$F(n)=J(n)+2^1$ $\quad F(n)=J(n)-2^2$ $\quad F(n)=J(n)+2^2$ $\quad F(n)=J(n)-2^3$

2^1 $\quad 2^2$ $\quad 2^3$

Если сгруппировать значения n по степеням двойки (в таблице эти группы отделены сплошными вертикальными линиями), то в каждой группе $F(n)$ имеются еще две группы (см. таблицу). Поэтому решение рекуррентного соотношения должно иметь вид для $n > 1$:

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

$$F(2^m+k)=\begin{cases} J(n)+2^{m-1} & \text{если } \; 0\le k<2^{m-1} \\ J(n)-2^m & \text{если } \; 2^{m-1}\le k<2^m \end{cases}$$

Докажем полученное соотношение методом математической индукции по числу m:

1. База: $n=2$, тогда m=1, $k=0$

   F(21+0) = J(2) + 20= 1 + 1 = 2 (верно);

2. Индуктивный переход: пусть верно для всех чисел $t \le (m-1)$.

3. Докажем для t=m:

если $m > 0$ и $2m+k = 2n$, то k – четное и

$$F(2m+k)=F(2\cdot(2m-1+\frac{k}{2}))\overset{(63)}{=}2\cdot F(2m-1+\frac{k}{2})-1\overset{(И.П.)}{=}\begin{cases} 2\cdot(J(2^{m-1}+\frac{k}{2})+2^{m-2})-1 \\ 2\cdot(J(2^{m-1}+\frac{k}{2})-2^{m-1})-1 \end{cases}=$$

$$=\begin{cases} (2\cdot J(2^{m-1}+\frac{k}{2})-1)+2^{m-1} & \text{если } \; 0\le k<2^{m-1} \\ (2\cdot J(2^{m-1}+\frac{k}{2})-1)-2^m & \text{если } \; 2^{m-1}\le k<2^m \end{cases}$$

$$\overset{(7)}{=}\begin{cases} J(2(2^{m-1}+\frac{k}{2}))+2^{m-1} \\ J(2(2^{m-1}+\frac{k}{2}))-2^m \end{cases}=$$

$$=\begin{cases} J(2^m+k)+2^{m-1} & \text{если } \; 0\le k<2^{m-1} \\ J(2^m+k)-2^m & \text{если } \; 2^{m-1}\le k<2^m \end{cases}$$

если $m > 0$ и $2m+k=2n+1$, то k – нечетно (т.е. $k=2t+1$) и

$$F(2m+k) = F(2m+(2t+1)) = F(2(2m-1+t)+1)\overset{(63)}{=}2\cdot F(2m\text{-}1+t)+1\overset{(И.П.)}{=}$$

$$=\begin{cases} 2\cdot(J(2^{m-1}+t)+2^{m-2})+1, & 0\le k<2^{m-1} \\ 2\cdot(J(2^{m-1}+t)-2^{m-1})+1, & 2^{m-1}\le k<2^m \end{cases}=\begin{cases} (2\cdot J(2^{m-1}+t)+1)+2^{m-1} \\ (2\cdot J(2^{m-1}+t)+1)-2^m \end{cases}\overset{(37)}{=}$$

$$=\begin{cases} J(2(2^{m-1}+t)+1)+2^{m-1} \\ J(2(2^{m-1}+t)+1)-2^m \end{cases}=\begin{cases} J(2^m+2t+1)+2^{m-1} \\ J(2^m+2t+1)-2^m \end{cases}=$$

$$=\begin{cases} J(2^m+k)+2^{m-1}, \; 0\le k<2^{m-1} \\ J(2^m+k)-2^m, \; 2^{m-1}\le k<2^m \end{cases}$$

ABBYY PDF Transformer 2.0 Click here to buy www.ABBYY.com

Из базы и индуктивного перехода следует верность доказываемого равенства. ◄

Задача 18. *Обозначим через W_n наименьшее число перекладываний, необходимых для перемещения башни из n дисков с одного колышка на другой, когда имеется не три, а четыре колышка. Покажите, что*

$$W_{\frac{n(n+1)}{2}} \le 2W_{\frac{n(n-1)}{2}} + T_n \qquad \textit{при } n>0$$

(Здесь T_n = 2n −1 - число перекладываний в обычном случае трех колышков.)

► Числа $\frac{n(n+1)}{2}$ и $\frac{n(n-1)}{2}$ отличаются на n, т.к. $\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n$. Поэтому, чтобы переложить $\frac{n(n+1)}{2}$ дисков с одного колышка на другой, имея в распоряжении четыре колышка, надо: сначала переместить $\frac{n(n-1)}{2}$ меньших дисков на любой из колышков, используя все четыре колышка (что требует $W_{\frac{n(n-1)}{2}}$ перекладываний), затем перекладываем n нижних, самых больших дисков, используя только три колышка, т.к. больший диск нельзя помещать на меньший диск (потребуется T_n перекладываний) и, наконец, помещаем $\frac{n(n-1)}{2}$ меньших дисков обратно на самые большие диски, используя снова четыре колышка (еще $W_{\frac{n(n-1)}{2}}$ перекладываний). Таким образом, для перемещения $\frac{n(n+1)}{2}$ дисков (при n>0) достаточно следующее число перекладываний: $W_{\frac{n(n+1)}{2}} \le 2W_{\frac{n(n-1)}{2}} + T_n$. ◄

Задача 19. *Допустим, что в круг поставлено 2n человек, первые n из которых – «славные ребята», а n последних – «гадкие парни». Покажите, что всегда найдется целое m (зависящее от n), такое, что если, двигаясь по кругу, мы наказываем каждого m-го, то первыми будут наказаны все гадкие парни. (К примеру, при n=3 можно взять m=5, а при n=4 взять m=30.)*

►Двигаясь по кругу, мы должны наказать всех «гадких парней», поэтому должны вычеркивать номера от n+1 до 2n. Если мы вычеркнем в первый раз номер 2n, то в круге останется 2n−1 человек, и следующий круг начнем с номера 1 (для того, чтобы вычеркнуть номер 2n мы должны обойти целое число кругов).

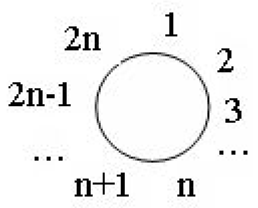


Рис. 27. Случай четного количество людей.

Если во второй раз мы вычеркнем номер 2n−1, то в круге останется 2n−2 человек, и снова, следующий круг будем начинать с номера 1 (для того, чтобы вычеркнуть номер 2n−1 мы снова должны обойти целое число кругов). И так далее, будем поочередно вычеркивать номера 2n−2, 2n−3, …, n+1 (а для этого мы должны каждый раз между вычеркивания «гадких парней» проходить целое число кругов) и каждый раз после вычеркивания количество человек уменьшается на единицу, и новый круг будем начинать с номера 1. Поэтому надо взять такое число m, которое делилось бы на 2n, 2n−1, …, n+1. Например, можно взять m - наименьшее общее кратное этих чисел. ◄

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

1. Написать первые пять членов решения рекуррентного соотношения $f(n+2) = 2f(n+1) - 3f(n)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям:

a) $\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} f(1) = 3 \\ f(2) = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) = 1 \end{cases}$

2. Проверить являются ли функции $f_1(n) = 5 \cdot 2^n$, $f_2(n) = 2n + 1$, $f_3(n) = 3$ решениями рекуррентного соотношения $f(n+2) = 2f(n+1) - f(n)$.

3. Найти общее решение рекуррентных соотношений:

a) $f(n+2)+3f(n+1)-10f(n)=0$
b) $f(n+2)-4f(n+1)+13f(n)=0$
c) $f(n+2)+9f(n)=0$
d) $f(n+2)+4f(n+1)+4f(n)=0$
e) $f(n+3)-9f(n+2)+26f(n+1)-24f(n)=0$
f) $f(n+3)+3f(n+2)+3f(n+1)+f(n)=0$
g) $f(n+4)+4f(n)=0$

4. Найти $f(n)$, зная рекуррентное соотношение и начальные члены:

a) $f(n+2)-4f(n+1)+4f(n)=0,\ \ f(1)=2,\ f(2)=4$
b) $f(n+2)+f(n+1)+f(n)=0,\ \ f(1)=-\frac{1}{4},\ f(2)=-\frac{1}{2}$
c) $f(n+2)=2f(n+1)-f(n),\ \ f(1)=2,\ f(2)=4$
d) $f(n+2)=4f(n+1)+5f(n),\ \ f(1)=1,\ f(2)=5$
e) $f(n+2)=6f(n+1)-9f(n),\ \ f(1)=0,\ f(2)=3$
f) $f(n+2)=2f(n)-f(n+1),\ \ f(1)=1,\ f(2)=2$
g) $f(n+2)=8f(n+1),\ \ f(1)=1$

5. Привести пример линейного рекуррентного соотношения второго порядка, среди решений которого имеются следующие функции:

a) $f(n)=3^n$
b) $f(n)=2^n-1$
c) $f(n)=3\cdot 2^n-5^n$
d) $f(n)=n-17$

6. Найти такую последовательность, что $f(1)=\cos\alpha$, $f(2)=\cos 2\alpha$ и $f(n+2)-2\cos\alpha\cdot f(n+1)+f(n)=0$.

7. Найти последовательность такую, что $f(n+2)+2f(n+1)-8f(n)=2^n$.

8. Проанализировать рекуррентное соотношение $f(n+2)=a_1 f(n+1)+a_2 f(n)$, если известно, что один из корней характеристического уравнения $x^2=a_1x+a_2$ равен нулю. Каков порядок этого рекуррентного соотношения? Доказать, что его общее решение в данном случае имеет вид: $f(n,C)=C_1a_1^n$. Что можно сказать о решении рекуррентного соотношения (3), если оба корня характеристического уравнения равны нулю?

9. Последовательность Фибоначчи задается следующим рекуррентным соотношением: $f(n+2)=f(n+1)+f(n)$ и начальными условиями $f(1)=f(2)=1$. Найти общий член этой последовательности. Выписать первые 10 чисел Фибоначчи. Доказать, что для любых натуральных m и n справедливы соотношения:

$$f(n+m)=f(n-1)f(m)+f(n)f(m+1)$$
$$f(1)+f(3)+\ldots+f(2n+1)=f(2n+2)$$
$$1+f(2)+f(4)+\ldots+f(2n)=f(2n+1)$$

Указание: применить метод математической индукции.

10. Двойная ханойская башня состоит из $2n$ дисков n различных размеров – по два диска каждого размера. Как и в случае обычной башни, за один раз разрешается перекладывать только один диск и нельзя класть больший диск на меньший.

a. Сколько перекладываний необходимо для перемещения двойной башни с одного колышка на другой, если диски одинаковых размеров неотличимы друг от друга?

b. Что если в окончательном расположении дисков требуется воспроизвести исходный порядок всех одинаковых дисков сверху донизу?

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков И.Н., Федотенко Г.Ф. Дискретная математика. Элементы теории. Задачи и упражнения. – Воронеж: ВГУ, 2004. – 62 с.
2. Виленкин Н. Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969 г., 323 с.
3. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики: Пер. с англ. – М.: Мир, 1998. —703 с.
4. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. – М.: Вузовская книга, 2000. – 280 с.
5. Мальцев Ю.Н., Петров Е.П. Введение в дискретную математику (элементы комбинаторики, теории графов и теории кодирования). – Барнаул: Алтайский государственный университет, 1997. 135 с.
6. Эвнин А.Ю. Задачник по дискретной математике. – Челябинск: ЮУрГУ, 2002. 164 с.
7. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986. 384с.