Линейные рекуррентные соотношения

Задача 30.1. Найдите формулу n-го члена последовательности $\{a_n\}$, если $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$. Вычислите первые пять членов этой последовательности с помощью этой формулы.

Задача 30.2. Пусть квадратное уравнение $x^2 = Mx + N$ имеет два различных корня q_1 и q_2. Докажите, что для любой последовательности $\{a_n\}$, удовлетворяющей рекуррентному соотношению $a_{n+2} = Ma_{n+1} + Na_n$, найдутся такие C_1 и C_2, что $a_n = C_1q_1^{n-1} + C_2q_2^{n-1}$.

Задача 30.3. Пусть квадратное уравнение $x^2 = Mx + N$ имеет два совпавших корня $q_1 = q_2$. **а)** Докажите, что в данном случае существует единственная геометрическая прогрессия, удовлетворяющая рекуррентному соотношению $a_{n+2} = Ma_{n+1} + Na_n$. **б)** Докажите, что последовательность чисел $\{nq_1^{n-1}\}$ также удовлетворяет данному соотношению.

Задача 30.4. Задайте аналитически последовательность $\{a_n\}$, заданную рекуррентно: $a_1 = 3, a_2 = 15, a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$.

Задача 30.5. Укажите общий вид аналитической формулы для задания всех последовательностей, удовлетворяющих рекуррентному соотношению $a_{n+2} = Ma_{n+1} + Na_n$ в случае, если квадратное уравнение $x^2 = Mx + N$ имеет два совпавших корня $q_1 = q_2$. Докажите, что любую такую последовательность можно задать такой формулой.

Задача 30.6. Задайте аналитически последовательность $\{a_n\}$, заданную рекуррентно:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 8,\ a_{n+3} = 6a_{n+2} - 12a_{n+1} + 8a_n.$$

Задача 30.7. Задайте аналитически последовательность $\{a_n\}$, заданную рекуррентно:

$$a_1 = 0,\ a_2 = 8,\ a_3 = 42,\ a_{n+3} = 7a_{n+2} - 16a_{n+1} + 12a_n.$$

Задача 30.8. Задайте аналитически последовательность $\{a_n\}$, заданную рекуррентно:

$$a_1 = 4,\ a_2 = 3,\ a_3 = 31,\ a_4 = 101,\ a_{n+4} = 5a_{n+3} - 6a_{n+2} - 4a_{n+1} + 8a_n.$$

Задача 30.9. Задайте рекуррентно последовательность **а)** $a_n = n^2$; **б)** $a_n = n^3 + n - 1$.

Критерии оценок

«5»	«4»	«3»	«2»
8 задач	6 задач	4 задач	2 задач