MATEMÁTICA

REVISÃO DE FUNÇÕES

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 REVISÃO DE FUNÇÕES

1.1 Como tomar a melhor decisão de forma fundamentada?

Quem nunca pensou em largar tudo e viajar o mundo?

Para alguns, um sonho distante. Para outros, basta vontade e coragem. Foi o que fez o casal inglês Lauren Winslow-Llewellyn, 27 anos, e Craig Hubbard, 33 anos, ambos de Brighton. Eles estão há oito anos rodando o mundo em uma van.

Lauren e Craig já percorreram mais de 120 mil quilômetros a bordo da Daphne, uma Dodge Camper Van. O casal já passou pela Austrália, Ásia, América do Sul e Central, Nova Zelândia e Europa. Agora, eles estão fazendo o caminho do Alasca até a Flórida.

Veja mais em: <https://catracalivre.com.br/geral/mundo/indicacao/casal-ingles-esta-viajando-o-mundo-ha-8-anos-em-uma-van/>.

Partindo do exemplo de Lauren e Craig, vamos iniciar a discussão desse tema com uma situação para analisarmos.

Um grupo de amigos pretende fazer uma viagem. Para isso, irão alugar um veículo de transporte (uma van).

Após uma pesquisa, o grupo de amigos obteve valores de duas empresas com ótima avaliação: a empresa VIVERTUR cobra uma taxa fixa de R$ 700,00, mais R$ 1,20 por km rodado; a empresa concorrente, ECOTUR, cobra uma taxa fixa de R$ 780,00, mais R$ 0,80 por km rodado.

A partir dessas informações, como o grupo de amigos pode saber qual empresa é a melhor, em termos financeiros, para fazer a locação? Ou até que ponto pode valer mais a pena uma empresa ou outra?

Um problema como esse pode ser investigado por meio do uso de funções matemáticas e suas representações gráficas. Interessante, não acha?

Essa é uma das propostas da matemática, perceber como é importante modelar as mais diversas situações por meio de funções, para então, a partir de uma análise ampla e fundamentada, tomar a melhor decisão.

Muito bem! Temos o problema do aluguel da van para resolver. Pense sobre ele, analise e, até o final do capítulo, você terá a resposta.

Como início, é importante ressaltar que o conceito de função é verdadeiramente fundamental em matemática. As funções basicamente desempenham o papel de, conhecendo um número, obtermos com o auxílio da função um outro número relacionado ao primeiro por meio de uma “lei”.

O índice de massa corporal (IMC) de uma pessoa pode ser calculado por meio da fórmula:

$$IMC = \frac{M}{h^2}$$

Em que **M** é a massa do indivíduo em quilogramas e **h** é a altura em metros.

IMC	CLASSIFICAÇÃO
< 18,5	Peso Baixo
18,5 - 24,9	Peso Normal
25,0 - 29,9	Sobrepeso
30,0 - 34,9	Obesidade (Grau I)
35,0 - 39,9	Obesidade Severa (Grau II)
≥ 40,0	Obesidade Mórbida (Grau III)

Quadro 1.1 – Quadro de IMC
Fonte: FIAP (2018)

Observe que o **IMC** é uma **função** de duas variáveis, pois seu valor depende das grandezas **massa** e **altura** do indivíduo:

Todo indivíduo pode obter seu IMC.

Cada indivíduo tem um único IMC.

De forma geral, são as duas características destacadas anteriormente que fazem com que um modelo matemático possa ser chamado de função.

1.2 Função do 1º grau: Contextos e aplicações

1.2.1 Custo fixo, custo unitário, custo total

"Despesas:

Os custos dentro de um negócio são necessários, tanto para a produção dos serviços ou produtos oferecidos pela empresa como para os gastos que mantêm o pleno funcionamento do negócio. Entre essas despesas estão o que chamamos de custos fixos e custos variáveis."

Vamos iniciar a discussão desse tema com um exemplo.

Uma determinada empresa que fabrica componentes para o setor automotivo possui um custo fixo mensal de R$ 180.000,00 e uma despesa de R$ 25,00 por unidade produzida. Considerando esse contexto, vamos responder a algumas questões.

Qual a despesa dessa empresa em um mês no qual foram produzidas 3.000 unidades?

Resolução

Nesse caso, basta fazermos "3000**.**(25) + 180000", o que daria uma despesa total mensal de R$ 255.000,00.

Qual a despesa para o caso de a empresa produzir um número "n" de unidades em um determinado mês?

Resolução

Vamos denotar a despesa mensal total da empresa em um determinado mês por "C".

Assim, a despesa mensal total para a produção de n unidades pode ser dada por:

$C = 25.n + 180\ 000$ ou $C(n) = 25.n + 180\ 000$

Podemos dizer que a despesa total mensal **C** depende do número **n** de peças produzidas no mês, ou seja, a despesa mensal **C** está em função do número **n** de peças produzidas.

Como C depende do n, dizemos que **C** é a variável dependente. Dizemos que **n** é a variável independente.

Observando-se a função C = 25.n + 180 000, podemos notar que ela tem a forma geral y = a.x + b.

Comparando-se a função **C = 25.n + 180000** com a forma geral **y = a.x + b**, temos:

y = C

a = 25

x = n

b = 180 000

Há inúmeras situações nas quais os modelos matemáticos obtidos possuem a forma geral y = a.x + b (ou f(x) = a.x + b). Esses modelos são chamados de funções do 1º grau.

Neste item do capítulo, vamos estudar as funções do 1º grau e suas aplicações em variados contextos, pois é isso que se espera de um profissional de excelência: a capacidade de interagir em contextos diversos, demonstrando toda a sua versatilidade.

1.2.2 Definição: Uma formalização do conceito de função do 1º grau

Vamos formalizar o conceito de função do 1º grau:

Denomina-se função polinomial do 1º grau toda função f: IR → IR da forma

y = a.x + b ou f(x) = a.x + b, com a ∈ IR* e b ∈ IR.

A notação matemática “f: IR → IR” (lê-se f é uma função de R em R) indica que os valores de x podem assumir quaisquer números reais e os valores de y podem assumir quaisquer números reais.

O símbolo IR é o símbolo do Conjunto dos Números Reais.

O símbolo IR* elimina o número zero do conjunto: IR* = IR – {0}.

Dizemos que o valor de y depende do valor de x (ou seja, para calcularmos o valor de y, precisamos do valor de x) e, por isso, chamamos y de variável dependente e x de variável independente.

1.2.3 Representação gráfica das funções do 1º grau

Vamos considerar dois exemplos para falarmos sobre o gráfico de uma função do 1º grau:

1.2.3.1 Valorização de um imóvel

"Para garantir que seu imóvel tenha um bom desempenho no longo prazo, é importante que a localização tenha algum tipo de limitação da oferta. Pode ser uma limitação do zoneamento da cidade ou mesmo um limite físico.

O segundo componente para uma boa localização é que a cidade e o bairro que você escolheu tenham um dinamismo econômico que não seja dependente de uma única indústria ou de um segmento da economia."

Veja mais em: <https://www.empiricus.com.br/newsletters/imoveis/quanto-meu-imovel-vai-valorizar/>.

Um determinado apartamento custa hoje cerca de R$ 600.000,00 e, devido a sua localização, uma consultoria do ramo imobiliário projeta uma valorização anual da ordem de R$ 30.000,00. Muito bem, agora vamos obter o modelo matemático que representa essa situação e fazer sua representação gráfica.

Resolução

Após um ano, podemos estimar o valor do apartamento em:

30 000 + 600 000 = R$ 630.000,00.

Após dois anos:

30 000.(2) + 600 000 = R$ 660.000,00

Após três anos:

30 000.(3) + 600 000 = R$ 690.000,00

Após quatro anos:

30 000. (4) + 600 000 = R$ 720.000,00

Após **t** anos:

V = 30000.t + 600000,

em que **V** é o valor em reais do apartamento e **t** é o número de anos decorridos.

Também podemos representar a situação por:

V(t) = 600000 + 30000.t

Dizemos que o valor **V** do apartamento está em função do tempo **t** (número de anos decorridos) e denotamos essa situação como **V(t)**.

Representando os dados anteriores em uma tabela e utilizando o Excel, podemos visualizar o gráfico da função ***V(t) = 600000 + 30000.t***.

Tabela 1.1 – Tabela para construção do gráfico de V(t) = 600000+30000.t

t (anos)	**V**(R$)
0	600000
1	630000
2	660000
3	690000
4	720000
...	...

Fonte: FIAP (2017)

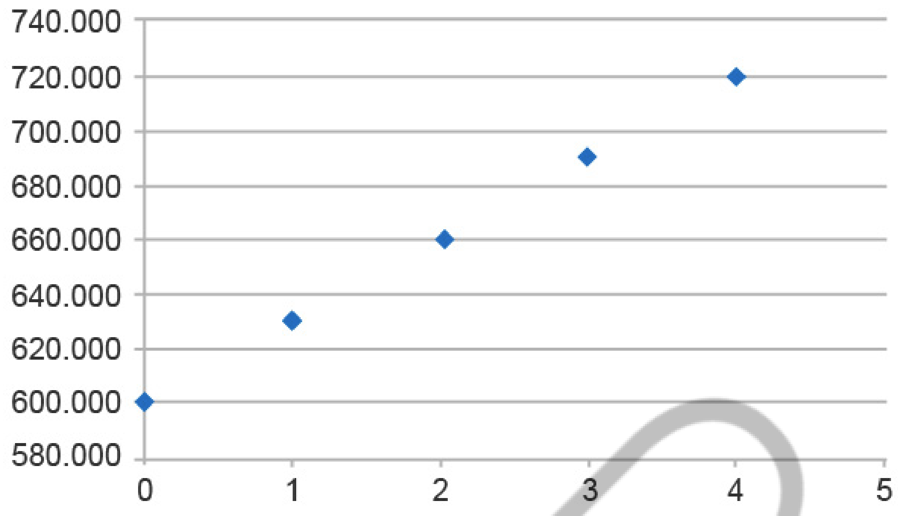


Figura 1.1 – Representação gráfica preliminar de V(t) = 600000+30000.t
Fonte: FIAP (2018)

No eixo horizontal, temos o tempo decorrido em anos e, no eixo vertical, temos o valor do imóvel em reais.

Observe que os pontos estão naturalmente alinhados. Observe também que podemos considerar tempos "decimais" (intermediários) entre 1 e 2, por exemplo, como "1,5" anos ou "1, 2" anos. Isso permite que tracemos uma linha reta para representar o gráfico.

Portanto, o exemplo que estamos discutindo possui o modelo matemático ***V(t) = 600000 + 30000.t*** como referência.

(Note que é uma função do 1º grau, com a forma geral y = a.x + b. Nesse caso: y = V; x = t; a = 30000; b = 600000.)

A representação gráfica da função V(t) = 600000 + 30000.t é:

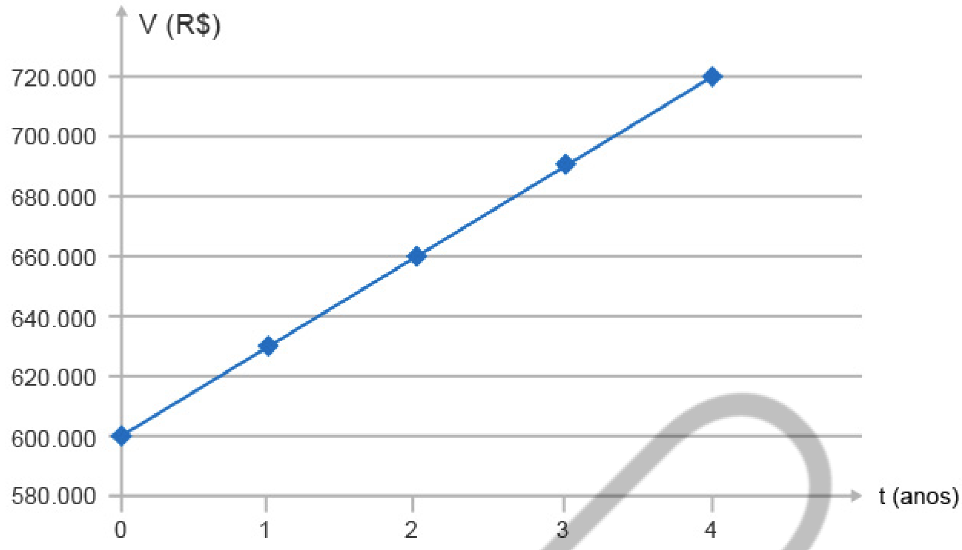


Figura 1.2 – Representação gráfica da função V(t) = 600000 + 30000.t
Fonte: FIAP (2017)

Dizemos que, nesse caso, temos uma função crescente, pois à medida que o tempo “passa” (aumenta), o valor do imóvel “aumenta” (cresce).

As funções do 1º grau y = a.x + b, com a > 0, são funções crescentes.

No caso, a função V(t) = 30000.t + 600000 possui a = 30000: como 30000 > 0, podemos afirmar, antes mesmo de visualizar o gráfico, que se trata de uma função do 1º grau crescente.

1.2.3.2 Depreciação linear de um equipamento industrial

“Sobre o cálculo de depreciação

Como você planeja, na sua empresa, a compra de um equipamento novo? Um computador, um móvel, uma máquina?

- Espera quebrar, danificar ou queimar?
- Só troca ou compra outro quando não tem mais condições de uso?

Se for assim, pode estar perdendo dinheiro, pois esses itens vão se deteriorando, perdendo valor, pelo uso e pelo tempo. E podem:

- aumentar custos de manutenção;
- reduzir produtividade;

- perder a capacidade de operar com eficiência e ficar inadequados.

Principalmente na indústria, em que máquinas têm desgastes maiores, se essa parte não for organizada, perde-se dinheiro, com alto custo de manutenção e, principalmente, com paradas na produção.”

Veja mais em: <https://muitomaisdigital.com.br/taxa-de-depreciacao-de-maquinas-e-equipamentos-voce-calcula-confira-dicas/>

Um determinado maquinário industrial custa hoje cerca de R$ 300.000,00 e, devido ao constante avanço da tecnologia, uma seguradora estima uma depreciação (desvalorização) anual de aproximadamente R$ 25.000,00. Agora é sua vez, obtenha o modelo matemático que representa essa situação e faça sua representação gráfica.

Resolução

Após um ano, podemos estimar o valor do maquinário em

300000 – 25000 = R$ 275.000,00

Após dois anos:

300000 – 25000.(2) = R$ 250.000,00

Após três anos:

300000 – 25000.(3) = R$ 225.000,00

Após quatro anos:

300000 – 25000.(4) = R$ 200.000,00

Após t anos:

V = 300000 – 25000.t,

em que V é o valor em reais do maquinário e t é o número de anos decorridos.

Também podemos representar a situação por

V(t) = 300000 – 25000.t

Representando os dados anteriores em uma tabela, obtemos:

Tabela 1.2 – Tabela para construção do gráfico de V(t) = 300000 - 25000.t

t (anos)	**V**(R$)
0	300000
1	275000
2	250000
3	225000
4	200000
...	...

Fonte: FIAP (2017)

Podemos utilizar o Excel para visualizar o gráfico:

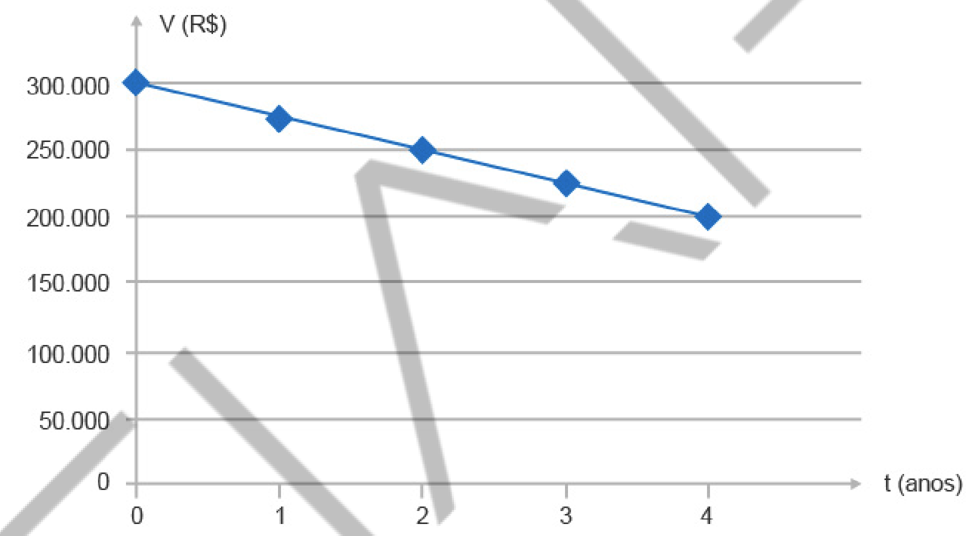


Figura 1.3 – Representação gráfica de V(t) = 300000 – 25000.t
Fonte: FIAP (2017)

Dizemos que, nesse caso, temos uma função decrescente, pois à medida que o tempo "passa" (aumenta) o valor do maquinário "diminui" (decresce). Podemos afirmar, nesse contexto, que temos uma depreciação linear.

As funções do 1º grau y = a.x + b, com a < 1º 0, são funções decrescentes.

No caso, a função

V(t) = 300000 – 25000.t ou V(t) = – 25000.t + 300000

possui a = – 25000.

Como – 25000 < 0, podemos afirmar, antes mesmo de visualizar o gráfico, que se trata de uma função do 1º grau decrescente.

1.2.4 Utilizando duas funções de 1º grau para a tomada de decisão (Determinação do Ponto de Equilíbrio)

Vamos resolver o problema proposto na introdução deste capítulo?

Lembre-se de que um grupo de amigos pretende fazer uma viagem. Para isso, irão alugar um veículo de transporte (uma van).

Após uma pesquisa, o grupo de amigos obteve valores de duas empresas com ótima avaliação: a empresa VIVERTUR cobra uma taxa fixa de R$ 700,00, mais R$ 1,20 por km rodado; a empresa concorrente ECOTUR, cobra uma taxa fixa de R$ 780,00, mais R$ 0,80 por km rodado.

A partir dessas informações, como o grupo de amigos pode saber qual empresa é a melhor, em termos financeiros, para fazer a locação? Ou até que ponto pode valer mais a pena uma empresa ou outra?

Resolução

Com base nos exemplos anteriores, podemos organizar a seguinte resolução:

1º) Para a locação de uma van da empresa VIVERTUR, o grupo de amigos teria uma despesa

$$D = 700 + 1{,}20.x \qquad (\text{ou } D(x) = 700 + 1{,}20.x)$$

Em que **D** representa a despesa total e **x** o número de quilômetros rodados.

2º) Para a locação de uma van da empresa ECOTUR, o grupo de amigos teria uma despesa:

$$D = 780 + 0{,}80.x \qquad (\text{ou } D(x) = 780 + 0{,}80.x)$$

Em que **D** representa a despesa total e **x** o número de quilômetros rodados.

3º) Organizamos uma tabela no Excel com alguns possíveis valores de quilometragem rodada, para visualizarmos o gráfico:

Tabela 1.3 – Tabela para construção do gráfico de duas funções

x (km)	**D** (R$, VIVERTUR)	**D** (R$, ECOTUR)
Nº de km rodados	***D = 700 + 1,20.x***	***D = 780 + 0,80.x***
0	700,00	780,00
50	760,00	820,00
100	820,00	860,00
150	880,00	900,00
200	940,00	940,00
250	1000,00	980,00
300	1060,00	1020,00

Fonte: FIAP (2017)

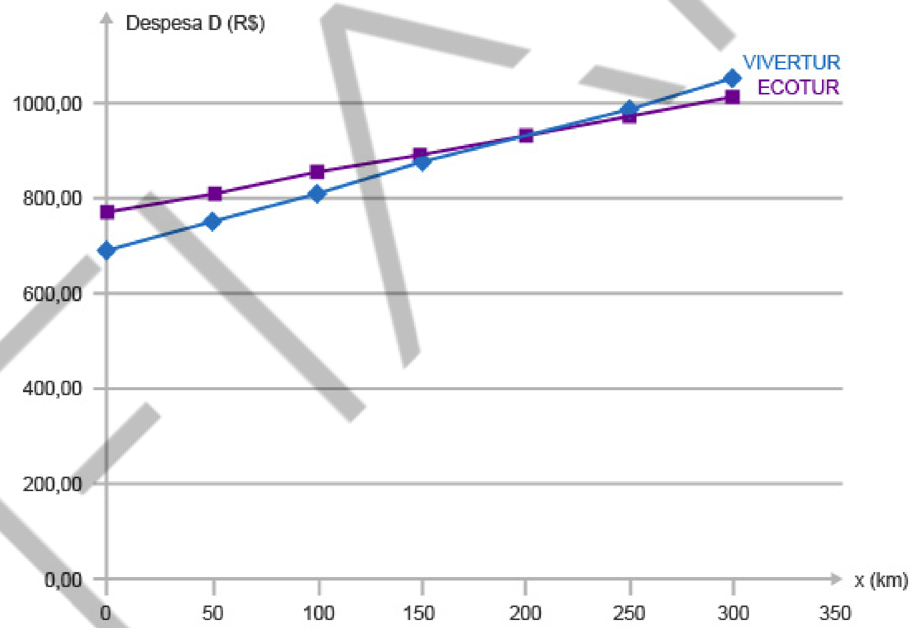


Figura 1.4 – Representação gráfica de duas funções: Ponto de Equilíbrio
Fonte: FIAP (2018)

4º) Observando a tabela e o gráfico, podemos notar que 200 km é uma quilometragem na qual as despesas nas duas empresas são iguais a R$ 940,00. Chamamos o ponto (200; 940) de Ponto de Equilíbrio.

Obtivemos o ponto de equilíbrio por meio da observação do gráfico. Entretanto, podemos obter o ponto de equilíbrio igualando os dois modelos matemáticos em estudo.

Temos ***D = 700 + 1,20.x*** (VIVERTUR) e ***D = 780 + 0,80.x*** (ECOTUR).

Igualando-se as funções, vamos obter a quilometragem x, que faz com que a despesa na empresa VIVERTUR seja igual à despesa na empresa ECOTUR.

$$700 + 1{,}20.x = 780 + 0{,}80.x$$

Agora, vamos resolver a equação:

$$1{,}20.x - 0{,}80.x = 780 - 700 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}40.x = 80 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = 80/0{,}40 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = 200 \text{ km}$$

Substituindo ***x = 200 km*** na função ***D(x) = 700 + 1,20.x***, obtemos:

$$D(x) = 700 + 1{,}20.(200) \Rightarrow D = 700 + 240 \Rightarrow D = R\$\ 940{,}00$$

ou

Substituindo ***x = 200 km*** na função ***D(x) = 780 + 0,80.x***, obtemos:

$$D(x) = 780 + 0{,}80.(200) \Rightarrow D = 780 + 160 \Rightarrow D = R\$\ 940{,}00$$

Conclusão:

- Para uma viagem com quilometragem inferior a 200 km, a empresa VIVERTUR é a mais indicada.
- Para uma viagem com quilometragem superior a 200 km, a empresa ECOTUR oferece o melhor preço.
- Para uma viagem com quilometragem igual a 200 km, as duas empresas cobram o mesmo valor.

Como podemos observar nesse problema, estudamos a aplicação de duas funções do 1º grau (crescentes) na resolução de uma determinada situação, complementando a discussão a partir de um gráfico que pode ser feito com apoio do Excel.

1.2.5 Comparação entre crescimento e decrescimento (linear) de empresas

A seguir, vamos resolver uma situação na qual comparamos duas empresas.

Uma empresa **A** possui, atualmente, uma carteira composta de 5150 clientes. Entretanto, essa empresa vem perdendo espaço de mercado na ordem de 150 clientes mês. A empresa **B**, em questão, possui no momento uma carteira com 2000 clientes e vem ampliando seu espaço no mercado, angariando cerca de 200 clientes mês.

a) Obtenha as funções que determinam mensalmente o número de clientes de cada uma das empresas.

b) Após quantos meses a empresa **B** irá superar a carteira de clientes da empresa **A**? Represente graficamente, no plano cartesiano, a situação em análise.

Resolução

1º) Vamos representar o número de clientes da empresa A como $\mathbf{N_A}$ e o número de meses decorridos como **t**. Assim, a função que estima o número de clientes da empresa A para os próximos t meses é dada por:

$$N_A = 5150 - 150.t \qquad (\text{ou } N_A(t) = 5150 - 150.t)$$

2º) Vamos representar o número de clientes da empresa B como $\mathbf{N_B}$ e o número de meses decorridos como **t**. Assim, a função que estima o número de clientes da empresa B para os próximos t meses é dada por:

$$N_B = 2000 + 200.t \qquad (\text{ou } N_B(t) = 2000 + 200.t)$$

3) Agora vamos obter o instante t (o número de meses) no qual as duas empresas terão o mesmo número de clientes. Para isso, faremos $N_A = N_B$.

$$5150 - 150.t = 2000 + 200.t$$

Resolvemos a equação:

$$5150 - 2000 = 200.t + 150.t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3150 = 350.t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t = 3150/350 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t = 9 \text{ meses}$$

Substituindo ***t* = 9 meses** na função ***N_A(t) = 5150 – 150.t***, obtemos:

$$N_A(9) = 5150 - 150.(9) \Rightarrow N_A(9) = 5150 - 1350 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_A(9) = 3800 \text{ clientes}$$

O número de clientes da empresa A após 9 meses é igual a 3800.

Ou:

Substituindo ***t* = 9 meses** na função ***N_B(t) = 2000 + 200.t***, obtemos:

$$N_B(9) = 2000 + 200.(9) \Rightarrow N_B(9) = 2000 + 1800 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N_B(9) = 3800 \text{ clientes}$$

O número de clientes da empresa B após 9 meses é igual a 3800.

Como foi visto em um exemplo anterior, dizemos que o ponto (9 meses; 3800 clientes) é o ponto de equilíbrio, certo?

Para visualizarmos o gráfico, vamos utilizar uma tabela como apoio:

Tabela 1.4 – Tabela para construção do gráfico de duas funções

t	**$N_A(t)$**	**$N_B(t)$**
Nº de meses decorridos	***Nº de clientes da empresa após t meses***	***Nº de clientes da empresa B após t meses***
	$N_A(t) = 5150 – 150.t$	**$N_B(t) = 2000 + 150.t$**
0	5150	2000
9	3800	3800

Fonte: FIAP (2017)

Utilizando o Excel, podemos obter o gráfico:

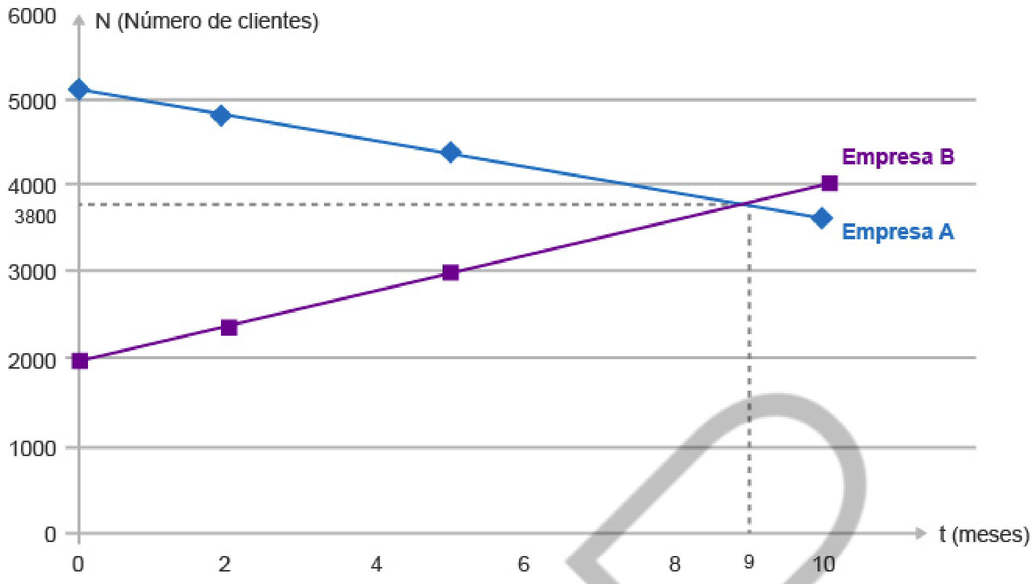


Figura 1.5 – Representação gráfica de duas funções: Ponto de Equilíbrio
Fonte: FIAP (2018)

Conclusão:

- A empresa A tem seu número de clientes para os próximos t meses estimado pelo modelo matemático $N_A(t) = 5150 – 150.t$.
- A empresa B tem seu número de clientes para os próximos t meses estimado pelo modelo matemático $N_A(t) = 2000 + 200.t$.
- Para um período de tempo inferior a nove meses, notamos que a empresa A, apesar de estar em queda, possui mais clientes que a empresa B.
- No nono mês após o início das análises, estima-se que as duas empresas terão o mesmo número de clientes.
- Após nove meses, projeta-se que a empresa B superará a carteira de clientes da empresa A.

Veja que interessante: são análises como essa que permitem que empresas possam se reorganizar, se planejar, estabelecer metas de curto, médio e longo prazo: ou seja, a modelagem matemática é uma ferramenta utilizada para a tomada de decisões de forma fundamentada.

1.2.6 Obtendo funções de 1º grau a partir de dois pares de valores: Desvalorização de um veículo

“A **depreciação de veículos** é o valor anual que um carro perde conforme o tempo passa. Como é de se esperar, carro que sai da concessionária já não é mais zero quilômetro e, logicamente, não poderá ser revendido pelo mesmo preço fixado enquanto não estava emplacado.

Embora possa vir a parecer calculada sem um critério claro, existe, sim, uma forma estabelecida por lei para determinar o quanto um veículo perde valor com o passar dos anos. Aliás, essa divisão é feita, inclusive segmentada, por categoria, através de uma IN (Instrução Normativa) da Receita Federal datada de 1998.”

Veja mais em: <https://hintigo.com.br/depreciacao-de-veiculos/>.

A seguir, vamos verificar como podemos obter funções do 1º grau a partir de dois pares de valores fornecidos pelo contexto que estamos investigando.

O valor de um veículo com dois anos de uso é de US$ 25,500.00 e, com seis anos de uso, é de US$ 20,500.00. Supondo que o preço caia com o tempo, segundo uma linha reta, ou seja, tratando-se de uma depreciação linear, determine:

a) o modelo matemático que projeta o valor do veículo após t anos;

b) após quantos anos o valor do veículo será de cerca de US$ 13,000.00.

Resolução

a) o modelo matemático

1º) De acordo com o problema, temos uma **depreciação linear**, ou seja, temos uma **função do primeiro grau decrescente**, pois, nesse caso, o veículo perde valor de mercado com o passar do tempo.

Como já visto, a **forma geral de uma função do 1º grau é y = a.x + b**. Podemos, opcionalmente, fazer uma pequena modificação nessa forma geral, adaptando-a ao contexto que estamos investigando. Por exemplo, podemos dizer que a forma geral da função será ***V = a.t + b***, em que **V** indica o valor do veículo (em dólares) após **t** anos.

Temos dois pares de valores fornecidos: (2; 25500) e (6; 20500).

(2; 25500): de acordo com o problema, com dois anos de uso o veículo vale US$ 25,500.00. Temos V = 25500 quando t = 2. Assim:

$$V = a.t + b \Rightarrow 25500 = a.2 + b \Rightarrow 2.a + b = 25500 \quad (I)$$

(6; 20500): o enunciado do problema nos informa que, com seis anos de uso, o veículo vale US$ 20,500.00. Temos V = 20500 quando t = 6. Assim:

$$V = a.t + b \Rightarrow 20500 = a.6 + b \Rightarrow 6.a + b = 20500 \quad (II)$$

2º) As equações I e II, obtidas na etapa anterior, formam um sistema de equações que pode ser resolvido de diversas maneiras. Vamos ver uma dessas maneiras.

$$\begin{cases} 2.a + b = 25500 \\ 6.a + b = 20500 \end{cases}$$

Utilizando o "**Método da Substituição**", devemos escolher uma das equações, isolar uma das incógnitas e, então, substituir na outra equação. Observe:

Vamos escolher a primeira equação (poderíamos ter escolhido a segunda equação, tanto faz) e isolar a incógnita **b** (poderíamos isolar a incógnita "**a**"):

$2.a + b = 25500 \Rightarrow b = 25500 – 2.a$

Agora, vamos substituir "b = 25500 – 2.a" na outra equação:

$6.a + \mathbf{b} = 20500 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6.a + \mathbf{25500 – 2.a} = 20500$

Pronto! Basta resolver a equação:

$6.a + \mathbf{25500 – 2.a} = 20500 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4.a = 20500 – 25500 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4.a = – 5000 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = – 5000/4 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ a = – 1250

Neste momento, escolhemos uma das equações do sistema e substituímos o valor de **a** para obtermos o valor de **b**.

$$\begin{cases} 2.a + b = 25500 \\ 6.a + b = 20500 \end{cases}$$

Por exemplo, vamos utilizar a equação 2.a + b = 25500.

Como temos a = – 1250, vem:

2.a + b = 25500 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2.(–1250) + b = 25500 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ – 2500 + b = 25500 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ b = 25500 + 2500 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ b = 28000

Note que, após essas etapas, temos os seguintes dados:

- estabelecemos que a função tem a forma geral ***V = a.t + b***
- temos ***a = – 1250***
- temos ***b = 28000***

Substituindo a = – 1250 e b = 28000 em V = a.t + b, obtemos:

V = – 1250.t + 28000 ou, se preferirmos,

V(t) = 28000 – 1250.t (Modelo de Depreciação Linear do problema)

Ao observarmos a função ***V(t) = 28000 – 1250.t***, dizemos que o veículo tem seu valor inicial de mercado em US$ 28,000.00 (pois quando t = 0, o valor é 28000) e desvaloriza US$ 1,250.00 por ano.

b) após quantos anos o valor do veículo será de cerca de US$ 13,000.00?

Vamos utilizar a função obtida no item a: V(t) = 28000 –1250.t.

Substituindo V por 13000, vamos obter o valor de t (número de anos) correspondente:

V = 28000 – 1250.t ⇒

⇒ 13000 = 28000 – 1250.t

⇒ 1250.t = 28000 – 13000

⇒ 1250.t = 15000

⇒ t = 15000 / 1250 ⇒ t = 12

Portanto, estima-se que após 12 anos o valor do veículo será de US$ 13,000.00.

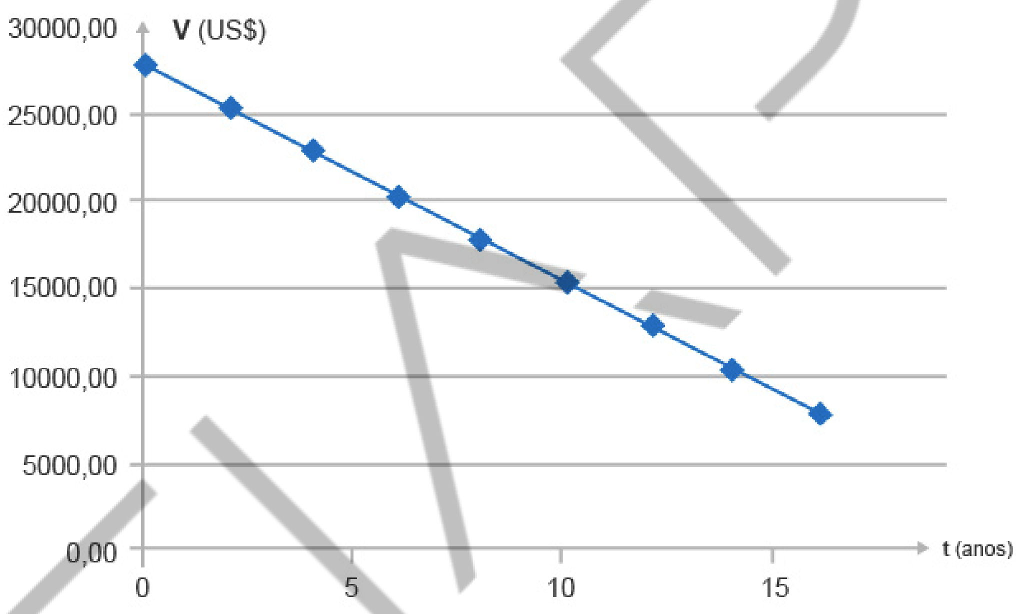


Figura 1.6 – Representação gráfica da Depreciação Linear de um veículo
Fonte: FIAP (2018)

1.2.7 Custo, Receita, Lucro e o *Break Even Point* em uma *Startup*

"GESTÃO FINANCEIRA

Ponto de equilíbrio

O ponto de equilíbrio é um indicador de segurança do negócio, pois mostra o quanto é necessário vender para que as receitas se igualem às despesas e aos custos.

O ponto de equilíbrio é um indicador de segurança do negócio, pois mostra o quanto é necessário vender para que as receitas se igualem aos custos. Ele indica em que momento, a partir das projeções de vendas do empreendedor, a empresa estará igualando suas receitas e seus custos. Com isso, é eliminada a possibilidade de prejuízo em sua operação."

Veja mais em: <http://www.sebrae.com.br/sites/PortalSebrae/artigos/ponto-de-equilibrio,67ca5415e6433410VgnVCM1000003b74010aRCRD>.

Vamos estudar um caso envolvendo custo, receita e lucro de uma determinada empresa, com o apoio de funções do 1º grau, para compreendermos o que é o chamado *Break Even Point*.

Uma *start up* fabrica componentes eletrônicos para computadores e seu custo fixo mensal é da ordem de R$ 162.000,00. O custo por unidade produzida é de R$ 54,00. Cada unidade produzida é vendida pela empresa ao preço de R$ 67,50.

a) Obtenha as funções Custo, Receita e Lucro.

b) Obtenha o ponto de equilíbrio (*Break Even Point*) Receita x Despesas e faça o esboço do gráfico das funções Custo, Receita e Lucro em um mesmo plano cartesiano.

Resolução

1º) Função Custo

Se adotarmos que a empresa produz **n** unidades por mês, possui um custo fixo mensal de R$ 162.000,00 e tem um custo de R$ 54,00 para a fabricação de cada uma das **n** unidades produzidas, então podemos dizer que o custo total mensal **C** para a fabricação de **n** unidades em um determinado mês é dado por:

C = 162000 + 54.n ou ***C(n) = 162000 + 54.n***

Dessa forma, dizemos que a despesa mensal (na linguagem contábil, as "saídas", os "gastos") da empresa pode ser projetada pela função C(n) = 162000 + 54.n.

Por exemplo, para um determinado mês, no qual foram produzidas 2000 unidades, a empresa teria uma despesa mensal total de:

C = 162000 + 54.(2000) ⇒ C = R$ 270.000,00 (observe que é apenas um exemplo).

2º) Função Receita

De forma geral, dizemos que a receita representa a arrecadação (na linguagem contábil, as “entradas”) que a empresa obtém com a venda de seus produtos e/ou serviços. Podemos dizer que a receita é o “faturamento bruto” da empresa, antes de serem descontadas as despesas.

No caso, a empresa vende cada uma das **n** unidades produzidas por R$ 67,50. Assim, com a venda de **n** unidades em um determinado mês, a empresa arrecada “**(67,50).n**” reais.

Portanto, a função receita é dada por:

$\boldsymbol{R = (67{,}50).n}$ ou $\boldsymbol{R(n) = (67{,}50).n}$

Por exemplo, caso a empresa vendesse 3000 unidades em um determinado mês, arrecadaria:

$R = (67{,}50).(3000) \Rightarrow R =$ R$ 202.500,00 (faturamento bruto da empresa com a venda de 3000 unidades)

3º) Função Lucro

De maneira geral, dizemos que o **lucro mensal** de uma empresa é a **diferença entre a receita mensal** (faturamento bruto, arrecadação, “entradas”) e o **custo mensal** (despesas, gastos, “saídas”, “retiradas”).

Podemos representar assim: $\boldsymbol{L = R - C}$, em que L é o lucro mensal, R é a receita mensal e C é o custo total mensal.

Portanto, podemos utilizar os modelos matemáticos que projetam a despesa mensal e a receita mensal de uma empresa para obtermos um modelo que projeta o lucro da empresa.

Temos: $C(n) = 162000 + 54.n \rightarrow$ função custo

e $R(n) = 67{,}50.n \rightarrow$ função receita

Como $L = R - C$, obtemos:

$L = 67{,}50.n - (162000 + 54.n) \Rightarrow$

$\Rightarrow L = 67{,}50.n - 162000 - 54.n) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{L = 13{,}50.n - 162000}$ ou $\boldsymbol{L(n) = 13{,}50.n - 162000}$

Por exemplo, em um mês no qual a empresa fechou com 4000 unidades vendidas, qual foi seu “lucro”?

Por meio da função lucro obtida, temos:

L = 13,50.n – 162000 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L = 13,50.(4000) – 162000 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L = **–** R$ 108.000,00

Ou seja, com esse nível de venda mensal, a empresa fecharia o mês no “vermelho”, com um prejuízo de R$ 108.000,00.

Temos aí uma ótima questão: afinal de contas, qual a quantidade mínima de unidades que precisa ser vendida no mês para que a empresa possa ter lucro?

Há dois modos de resolvermos esse problema.

1º modo: Igualando a função receita com a função custo (**R = C**)

Ao resolvermos a equação R = C, iremos determinar o número de unidades produzidas que fazem com que o valor arrecadado (“entradas”) coincida com as despesas (“saídas”), momento no qual o lucro da empresa é nulo (zero).

Temos: ***R(n) = 67,50.n*** e ***C(n) = 162000 + 54.n***

Fazendo-se ***R = C***, obtemos:

67,50.n = 162000 + 54.n $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 67,50.n – 54.n = 162000 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 13,50.n = 162000 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ n = 162000/ 13,50 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ **n = 12000** unidades

Observe que, se substituirmos n = 12000 na função receita, obtemos:

R = 67,50.n $\Rightarrow$ R = 67,50.(12000) $\Rightarrow$ R = R$ 810.000,00 de faturamento bruto

Se substituirmos n = 12000 na função custo, obtemos:

C = 162000 + 54.n $\Rightarrow$ C = 162000 + 54.(12000) $\Rightarrow$ C = 810.000,00

Dizemos então que, quando a empresa produz 12000 unidades, sua receita mensal se equipara a seus custos mensais, o que implica em lucro zero: esse momento é chamado de **Ponto de Equilíbrio entre Receita e Despesas** ou ***Break Even Point***, isto é, um ponto estratégico para avaliações e tomadas de decisões.

Para visualizarmos os gráficos dessas funções (custo, receita e lucro), podemos organizar uma tabela e, em seguida, utilizar o Excel como apoio.

Tabela 1.5 – Tabela para construção do gráfico de três funções

n	C(n)	R(n)	R(n)
Nº de unidades vendidas por mês	***Custo mensal total (R$)***	***Receita Mensal (R$)***	***Lucro Mensal (R$)***
	C(n) = 162000+54.n	**R(n) = 67,50.n**	**L(n) = 13,50.n - 162000**
0	162000,00	0,00	-162000,00
12000	810000,00	810000,00	0,00

Fonte: FIAP (2017)

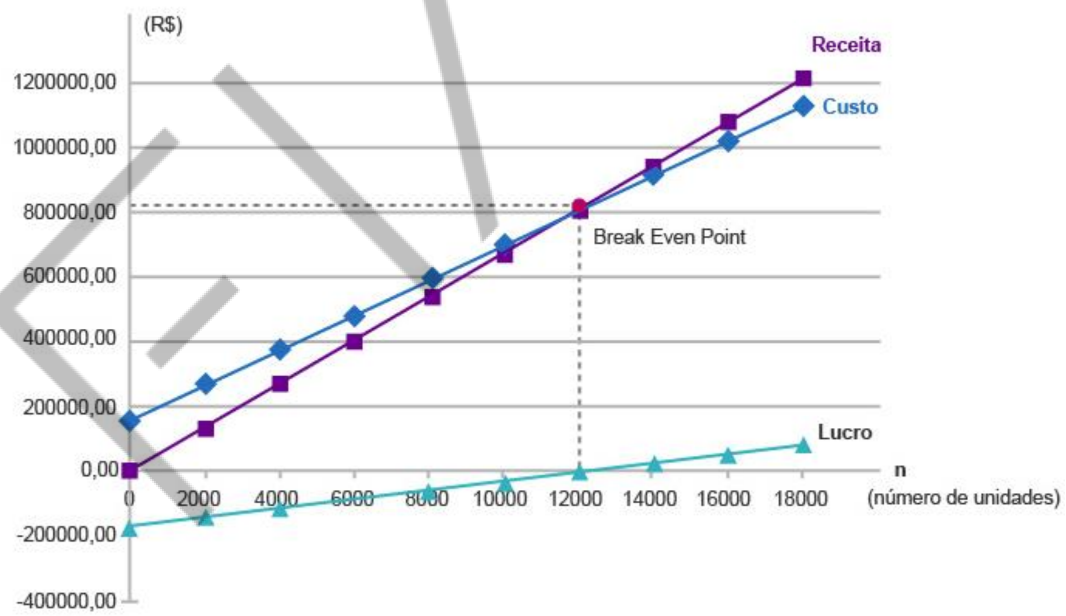


Figura 1.7 – Custo, Receita e Lucro: *Break Even Point*
Fonte: FIAP (2018)

Conclusão

- Função Custo: ***C(n) = 162000 + 54.n***

Custo mensal total = custo fixo mensal + (custo unitário)**.**(número de unidades produzidas)

- *Função Receita:* ***R(n) = 67,50.n***

Receita mensal = (preço de venda de cada unidade)**.**(número de unidades vendidas)

- *Função Lucro:* ***L(n) = 13,50.n – 162000***

Lucro mensal = Receita mensal – Custo mensal total

- O ponto de equilíbrio (*Break Even Point*) ocorre no nível de produção de 12000 unidades: essa é a quantidade mínima de unidades vendidas para que a empresa não tenha prejuízo. Nesse momento, a empresa arrecada tanto quanto gasta.
- A análise do gráfico nos permite concluir que, para um nível de produção abaixo de 12000 unidades mensais, a empresa tem custos superiores a suas receitas, gerando "lucro negativo", ou seja, prejuízo.

Para um nível de produção acima de 12000 unidades mensais, a empresa apresenta receitas superiores aos custos, o que implica lucro.

1.2.8 Problemas envolvendo funções do 1º grau

1.2.8.1 Corrida de Táxi

O preço de uma corrida de táxi inclui uma parte fixa (bandeirada) mais um valor variável que depende da quantidade de quilômetros rodados e do tempo de "hora parada" no trânsito.

Tabela 1.6 – Tabela com valores para cálculo do preço de uma corrida de táxi

Bandeirada	Valor (em reais)
Bandeirada	3,80
Km bandeira 1	1,54
Km bandeira 2	1,83
Hora parada (incluída no taxímetro)	18,99

Fonte: FIAP (2017)

a) Indicando por **q** a quantidade de quilômetros rodados, **h** o número de horas paradas e por **P** o preço a pagar, **determine a função na bandeira 1**.

Resolução

Como o preço **P** depende da quantidade **q** de quilômetros e tempo **h**, podemos indicar:

$P(q,h) = 3{,}80 + 1{,}54.q + 18{,}99.h$

b) Calcule a distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 74,40 na bandeira 2 e cujo tempo estimado em "hora parada", devido ao trânsito, foi de cerca de 1,5 horas.

Resolução

Nesse caso, como se trata da bandeira 2, temos R$ 1,83 por quilômetro rodado, portanto, a função deve ser escrita como:

$\mathbf{P(q,h) = 3{,}80 + 1{,}83.q + 18{,}99.h}$

Agora, vamos substituir $P = 74{,}40$ e $h = 1{,}5$ e obter o valor de q:

$P(q,h) = 3{,}80 + 1{,}83.q + 18{,}99.h \Rightarrow$

$\Rightarrow 74{,}40 = 3{,}80 + 1{,}83.q + 18{,}99.(1{,}5) \Rightarrow$

$\Rightarrow 74{,}40 - 3{,}80 - 28{,}485 = 1{,}83.q \Rightarrow$

$\Rightarrow q = 42{,}115/1{,}83 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ **$q \cong 23$ km**

Produção de Peças

Na produção de peças, uma indústria tem um custo fixo mensal de R$ 32.500,00 mais um custo variável de R$ 21,40 por peça produzida. Sendo **n** o número de unidades produzidas:

a) obtenha a função que fornece o custo total de produção de **n** peças;

Resolução

Como o custo total **C** está em função do número **n** de peças produzidas, podemos escrever:

C(n) = 32500 + 21,40.n

b) calcule o custo total de produção de 1000 peças.

Resolução

Nesse caso, basta substituirmos n = 1000 na função Custo Total:

C(n) = 32500 + 21,40.n ⇒

⇒ C(1000) = 32500 + 21,40.(1000) ⇒

⇒ C(1000) = 32500 + 21400 ⇒

⇒ **C(1000) = 53900**

Portanto, o custo mensal total para a produção de 1000 peças é de R$ 53.900,00.

c) quantas peças geram um custo total de R$ 92.420,00?

Resolução

Agora, basta substituirmos C = 92420 na função custo total obtida no item “a”:

C(n) = 32500 + 21,40.n ⇒

⇒ 92420 = 32500 + 21,40.n ⇒

⇒ 92420 – 32500 = 21,40.n ⇒

⇒ 59920 = 21,40.n ⇒

⇒ n = 59920/21,40 ⇒

⇒ **n = 2800 unidades**

Portanto, a produção de 2800 unidades gera uma despesa mensal total de R$ 92.420,00.

Empresas em crise

Uma empresa A possui, atualmente, uma carteira composta de 5000 clientes e está perdendo espaço no mercado, diminuindo sua carteira na ordem de 200 clientes mês. Uma empresa B possui, no momento, uma carteira com 6000 clientes e também vem perdendo espaço: cerca de 300 clientes mês.

a) Obtenha as funções que determinam mensalmente o número de clientes de cada uma das empresas.

Resolução

1) Vamos representar o número de clientes da empresa A como $\mathbf{N_A}$ e o número de meses decorridos como **t**. Assim, a função que estima o número de clientes da empresa A para os próximos **t** meses é dada por:

$$N_A = 5000 - 200.t \qquad (\text{ou } N_A(t) = 5000 - 200.t)$$

2) Vamos representar o número de clientes da empresa B como $\mathbf{N_B}$ e o número de meses decorridos como **t**. Assim, a função que estima o número de clientes da empresa B para os próximos t meses é dada por:

$$N_B = 6000 - 300.t \qquad (\text{ou } N_B(t) = 6000 - 300.t)$$

b) Represente, graficamente, no plano cartesiano, a situação em análise.

Resolução

Agora, vamos obter o instante t (o número de meses) no qual as duas empresas terão o mesmo número de clientes. Para isso, faremos $N_A = N_B$.

$$5000 - 200.t = 6000 - 300.t$$

Resolvemos a equação:

$$5000 - 6000 = 200.t - 300.t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -1000 = -100.t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t = 1000/100 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad t = 10 \text{ meses}$$

Substituindo-se ***t = 10 meses*** na função $N_A(t) = 5000 - 200.t$, obtemos:

$$N_A(10) = 5000 - 200.(10) \Rightarrow N_A(10) = 5000 - 2000 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ *$N_A(10) = 3000$ clientes*

(O número de clientes da empresa A após 10 meses é igual a 3000)

ou

Substituindo-se ***t = 10 meses*** na função ***$N_B(t) = 6000 - 300.t$***, obtemos:

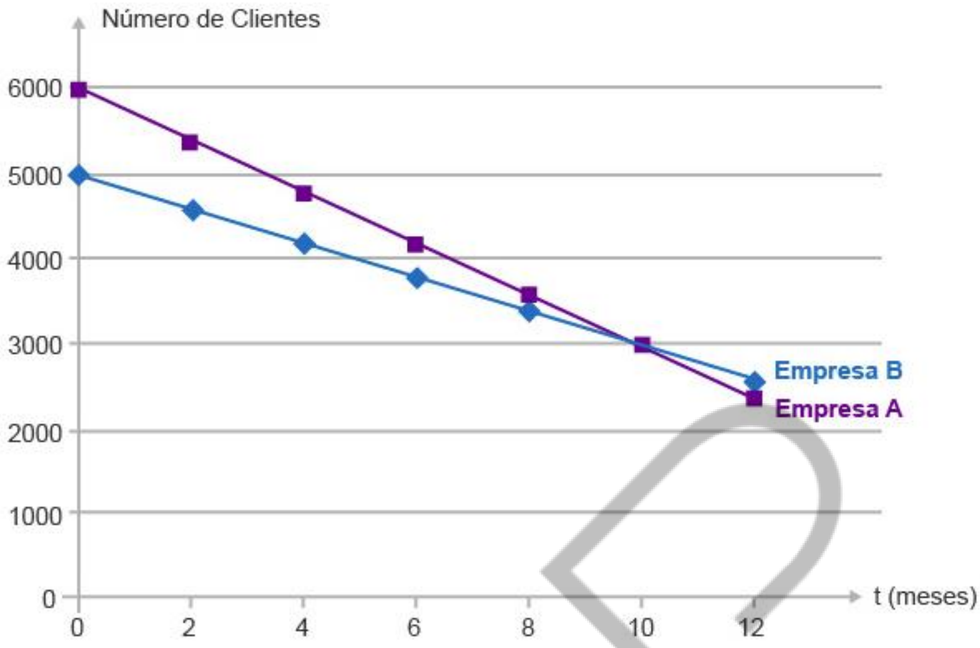
$N_B(10) = 6000 - 300.(10) \Rightarrow N_B(10) = 6000 - 3000 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $N_B(10) = 3000$ clientes (o número de clientes da empresa B após 10 meses é igual a 3000)

Para visualizarmos o gráfico, vamos utilizar uma tabela como apoio:

t	$N_A(t)$	$N_B(t)$
Nº de meses decorridos	Nº de clientes da empresa após t meses	Nº de clientes da empresa B após t meses
	$N_A(t) = 5000 - 200.t$	$N_B(t) = 6000 - 300.t$
0	5000	6000
10	3000	3000

Utilizando-se o Excel, podemos obter o gráfico:



Remuneração Bruta

Uma empresa paga a cada um de seus vendedores uma remuneração mensal composta de uma parte fixa mais um percentual (comissão) sobre o volume de vendas em reais. Quando o vendedor vende R$ 50.000,00, sua remuneração é R$ 1.800,00; quando vende R$ 80.000,00 sua remuneração é R$ 2.400,00. Determine:

a) o salário fixo desses vendedores;

b) a comissão (percentual).

Resolução (itens "a" e "b")

Temos dois pares de valores fornecidos: (50000; 1800) e (80000; 2400).

Substituindo-se os pares ordenados obtidos na forma geral y = a.x + b ou "S = a.V + b", em que S é o salário total e V é o volume de vendas, obtemos:

$S = a.V + b \Rightarrow 1800 = a.50000 + b \Rightarrow 50000.a + b = 1800 \quad (I)$

$S = a.V + b \Rightarrow 2400 = a.80000 + b \Rightarrow 80000.a + b = 2400 \quad (II)$

As equações I e II obtidas na etapa anterior formam um sistema de equações:

$$\begin{cases} 50000.a + b = 1800 \\ 80000.a + b = 2400 \end{cases}$$

Utilizando-se o “**Método da Substituição**”, devemos escolher uma das equações, isolar uma das incógnitas e, então, substituir na outra equação. Observe:

Vamos escolher a primeira equação (poderíamos ter escolhido a segunda equação, tanto faz) e isolar a incógnita **b** (poderíamos isolar a incógnita **a**):

$1800 = a.50000 + b \Rightarrow$ b = 1800 – 50000.a

Agora, vamos substituir “b = 1800 – 50000.a” na outra equação:

80000.a + **b** = 2400 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 80000.a + **1800** – **50000.a** = 2400

Pronto! Basta resolver a equação:

80000.a + **1800** – **50000.a** = 2400 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 30000.a = 2400 – 1800 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 30000.a = 600 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ a = 600/30000 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ a = 0,02

Nesse momento, escolhemos uma das equações do sistema e substituímos o valor de **a** para obtermos o valor de **b**.

$$\begin{cases} 50000.a + b = 1800 \\ 80000.a + b = 2400 \end{cases}$$

Por exemplo, vamos utilizar a equação 50000.a + b = 1800.

Como temos a = 0,02, vem:

50000.a + b = 1800 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 50000.(0,02) + b = 1800 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1000 + b = 1800 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ b = 1800 + 1000 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ b = 800

Note que, após essas etapas, temos os seguintes dados:

- estabelecemos que a função tem a forma geral ***S = a.V + b***
- temos ***a = 0,02***
- temos ***b = 800***

Substituindo-se a = 0,02 e b = 800 em S = a.V + b, obtemos:

S = 0,02.V + 28000 ou, se preferirmos:

S(V) = 800 + 0,02.V (Modelo que projeta o salário mensal bruto **S** em função do volume mensal de vendas **V**)

Receita *versus* investimento em Marketing

A Receita **R** mensal de vendas de uma empresa relaciona-se com os gastos **M** no setor de Marketing, por meio de uma função de 1º grau. Quando a empresa gasta R$ 15.000,00 por mês, no setor de marketing, sua receita naquele mês é de R$ 50.000,00; se o gasto mensal com marketing for o triplo daquele, a receita mensal cresce 30% em relação àquela.

a) Obtenha a expressão **R** em função de **p** (ou seja, a função **R(p)**)

Resolução

Como temos uma função do 1º grau, podemos escrever:

R = a.p + b (em que **R** é a receita e **p** é o gasto com marketing)

Vamos obter um sistema a partir das informações dadas:

50000 = 15000.a + b (I)

65000 = 45000.a + b (II)

Isolando-se a incógnita b na equação (I), obtemos:

b = 50000 – 15000.a

Substituindo-se na equação (II), obtemos:

65000 = 45000.a + b $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 65000 = 45000.a + 50000 – 15000.a $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 65000 – 50000 = 30000.a $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 15000 = 30000.a $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ a = 15000/30000 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ a = 0,5

Substituindo-se a = 0,5 em uma das equações obtemos:

b = 50000 – 15000.a $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ b = 50000 – 15000.(0,5) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ b = 50000 – 7500 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ b = 42500

Portanto, a função que expressa a receita mensal **R** de acordo com o gasto **p** em marketing é **R(p) = 0,5.p + 42500**.

b) Qual a receita mensal esperada, se o gasto mensal com propaganda for de R$ 28.000,00?

Resolução

Nesse caso, basta substituirmos p = 28000 na função obtida no item “a”:

R = 0,5.p + 42500 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ R = 0,5.(28000) + 42500 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ R = 14000 + 42500 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ **R = R$ 56.500,00**

c) Para obter-se uma receita de cerca de R$ 60.000,00, qual deverá ser o gasto com propaganda?

Resolução

Vamos substituir R = 60000 na função obtida no item “a”:

R = 0,5.p + 42500 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 60000= 0,5.p + 42500 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 60000 – 425000 = 0,5.p $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 17500 = 0,5.p $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ p = 17500/0,5 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ **p = R$ 35.000,00**

Margem de Contribuição

O custo fixo mensal de uma empresa é R$ 30.000,00, o custo variável por unidade é R$ 12,00, e a margem de contribuição por unidade é de 40% sobre o custo unitário.

(Obs.: A diferença entre o preço de venda e o custo variável por unidade [custo unitário] é chamada de margem de contribuição por unidade.)

a) Obtenha as funções Custo e Receita e determine o ponto de equilíbrio Receita x Despesas.

Resolução

O custo total mensal **C** é a soma do custo fixo com o produto do número **n** (de peças produzidas por mês) pelo preço de custo de cada peça. Podemos indicar **C = 30000 + 12.n**.

A receita mensal é o produto do preço de venda de cada unidade pela quantidade de unidades vendidas.

Cada unidade é vendida ao preço de:

12 + 0,40.(12) = 12 + 4,8 = R$ 16,80

Assim, a função receita **R** é dada por **R = 16,80.n**.

Para obtermos o **ponto de equilíbrio**, basta fazermos **R = C**:

16,80.n = 30000 + 12.n $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 16,80.n – 12.n = 30000 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 4,80.n = 30000 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ n = 30000/4,80 $\Rightarrow$

⇒ **n = 6250**

b) Obtenha a função Lucro e faça o esboço do gráfico das funções Custo, Receita e Lucro em um mesmo plano cartesiano.

Resolução

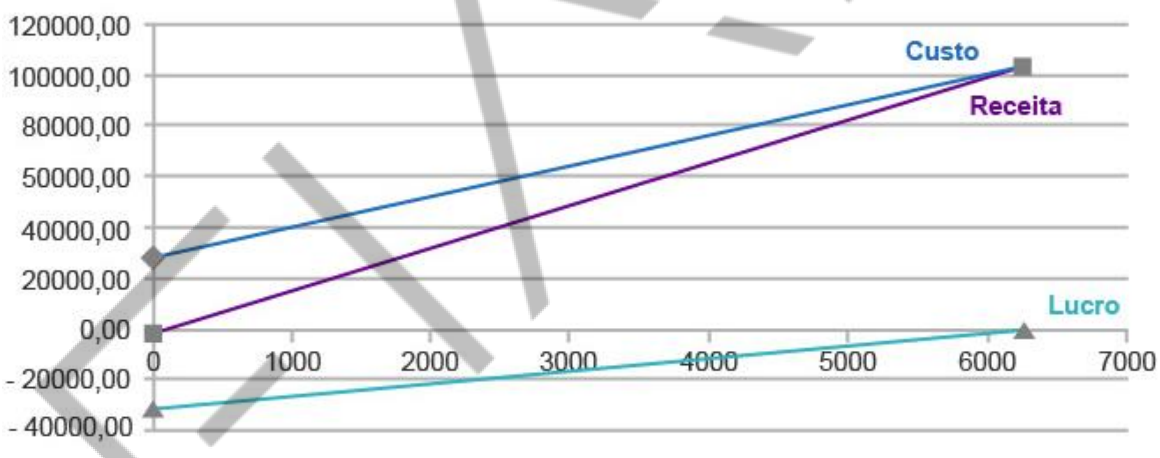
Para obtermos a função lucro basta fazermos “L = R – C” (ou seja, “lucro igual a receita menos custo”)

$L = 16{,}80.n - (12.n + 30000) \Rightarrow$

$\Rightarrow L = 16{,}80.n - 12.n - 30000 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{L = 4{,}80.n - 30000}$

Com o apoio do Excel, podemos fazer o gráfico:



Projeção de Lucro

Uma empresa fabrica componentes para o setor petrolífero e tem um custo mensal dado por C(x) = 50000 + 45x, em que x é o número de componentes produzidos por mês. Cada componente é vendido por R$ 70,00. Atualmente, o lucro mensal é de R$ 25.000,00. Para dobrar esse lucro, a fábrica deverá produzir e vender mensalmente:

a) o dobro do que produz e vende.

b) 1000 unidades a mais do que produz e vende.

c) 3000 unidades a mais do que produz e vende.

d) 4000 unidades a mais do que produz e vende.

e) 50% a mais do que produz e vende.

Resolução

1) Para resolvermos o teste, vamos obter as funções Custo, Receita e Lucro.

Função Custo (dada): C(x) = 50000 + 45.x

Função Receita: R(x) = 70.x

Função Lucro: L(x) = R – C, ou seja, L(x) = 25.x – 50000.

2) Agora sabemos que a função Lucro é L(x) = 25.x – 50000.

Para um lucro de R$ 25.000,00, temos:

25000 = 25.x – 50000 ⇒ **x = 3000 unidades vendidas**

Para um lucro de R$ 50.000,00, temos:

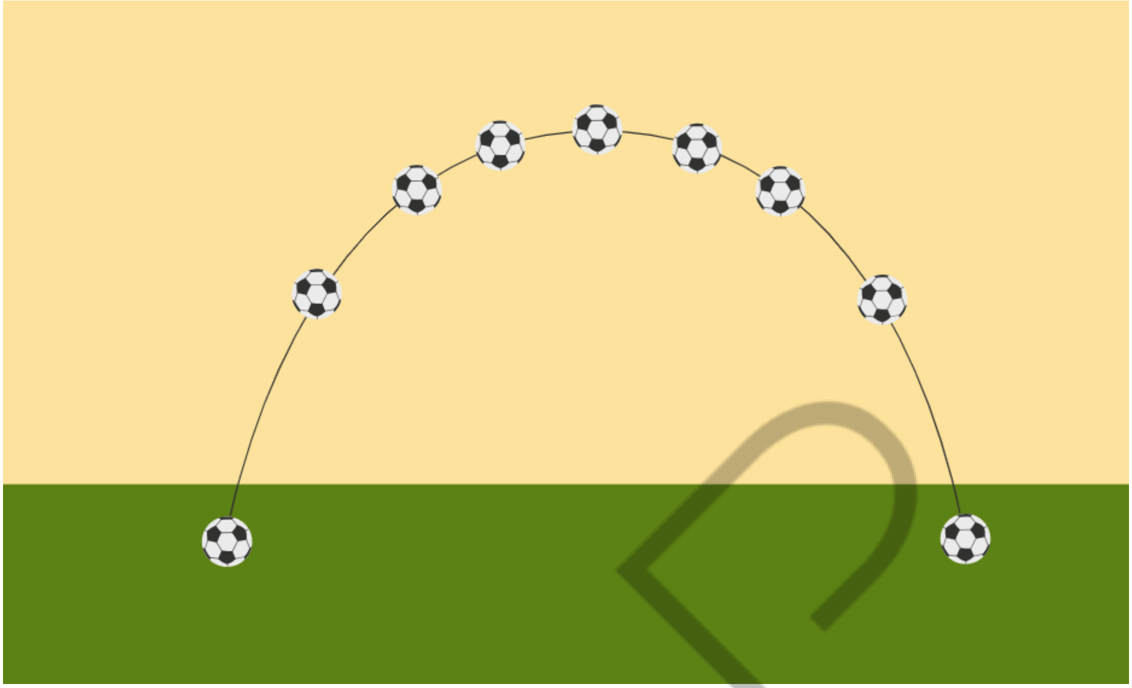
50000 = 25.x – 50000 ⇒ **x = 4000 unidades vendidas**

Assim, para dobrar o lucro, devemos vender 1000 unidades a mais. Portanto, a resposta correta é a alternativa "b".

1.3 Função do 2º grau

1.3.1 Função do 2º grau: Contextos e aplicações

As funções do 2º grau possuem diversas aplicações no nosso dia a dia, especialmente em situações da Biologia, da Física, da Administração, da Contabilidade, bem como na Engenharia Civil, entre outras áreas. Com a função do 2º grau, podemos obter o ponto mínimo ou máximo de alguma situação analisada e isso é feito por meio de uma representação em curva, formando de parábola. Por exemplo, a trajetória da bola após o chute de um jogador.



1.3.2 Número de jogos do Campeonato Brasileiro

“Domingo que nada! Sábado registra maior média de público no Brasileirão 2017.

Nas 48 partidas disputadas neste dia, pouco mais de 19.400 torcedores compareceram aos estádios. Domingão tem o maior número de jogos realizados, mas frequência de 15.870 pagantes por jogo.”

Veja mais em: <https://globoesporte.globo.com/numerologos/noticia/domingo-que-nada-sabado-registra-maior-media-de-publico-no-brasileirao-2017.ghtml>.

Figura 1.8 – Público por Dia de Semana
Fonte: Adaptado por FIAP (2018)

Consideremos um torneio de futebol que será disputado por quatro times pelo sistema no qual todos jogam contra todos em dois turnos. Quantos jogos seriam realizados, nesse caso?

Uma maneira de resolver o problema é considerar que cada time fará três jogos “em casa”, isto é, no seu próprio campo. Como temos quatro clubes, basta fazermos 4 x 3 = 12, ou seja, nesse caso, teremos um total de 12 jogos no campeonato.

No Campeonato Brasileiro, vinte (20) times disputam a competição em dois turnos: nesse caso, temos 20 x 19 = 380 jogos (!!!) em dois turnos com 19 rodadas cada um.

De forma geral, em um campeonato com **N** times, com as mesmas características do Campeonato Brasileiro (todos jogam contra todos em dois turnos), teríamos um total de “**N.(N** – **1)**” jogos no campeonato.

Representando-se o número total de jogos por **J**, podemos escrever:

J = N**.(**N **– 1)** ou ainda, aplicando-se a propriedade distributiva,

$$J(N) = N^2 - N$$

Note que a função **$J(N) = N^2 – N$** é um exemplo de função do 2º grau.

O número de jogos **J** depende do número **N** de times do campeonato: fazendo uma análise do contexto, foi possível gerar uma função do 2º grau (ou função quadrática) que modela a situação.

1.3.3 Definição: Uma formalização do conceito de função do 2º grau

Neste item, vamos formalizar o conceito de função polinomial do 2º grau.

Denomina-se função polinomial do 2º grau toda função $f: IR \rightarrow IR$, da forma

$y = a.x^2 + b.x + c$ (ou $f(x) = a.x^2 + b.x + c$), com $a \in IR^*$, $b \in IR$ e $c \in IR$.

(Para relembrar algumas notações matemáticas que apareceram aqui, observe a definição de função do 1º grau.)

1.3.4 Representação gráfica de uma função do 2º grau

As funções do 2º grau são representadas por curvas denominadas parábolas.

Considerando-se a forma geral $y = a.x^2 + b.x + c$, dizemos que:

Se $a > 0$, então a parábola possui concavidade voltada para cima: $\cup$

Se $a < 0$, então a parábola possui concavidade voltada para baixo: $\cap$

1.3.4.1 Temperatura de uma Reação Química

A temperatura de uma reação química varia ao longo do tempo de reação (em geral, medido em segundos).

Vamos considerar a reação química entre alumínio e iodo. O modelo matemático que estima a temperatura de reação ao longo do tempo, nesse caso, é dado por:

$T(s) = 2.s^2 – 8.s + 6$, em que "**T**" representa a temperatura em graus Celsius (ºC) e "**s**" representa o número de segundos decorridos após o início da reação.

Qual é a temperatura no início da reação?

Resolução

Nesse caso, vamos substituir s = 0 segundo, na função dada.

$T(s) = 2.s^2 – 8.s + 6 \Rightarrow T(0) = 2.(0)^2 – 8.(0) + 6 \Rightarrow T = 6$ ºC

Em que instantes a reação alumínio/iodo atinge a temperatura de 0 ºC?

Resolução

Vamos substituir T = 0 ºC na função:

$T(s) = 2.s^2 – 8.s + 6 \Rightarrow 0 = 2.s^2 – 8.s + 6$

Dividindo-se os dois lados da equação por dois, obtemos:

$s^2 – 4.s + 3 = 0$

$$s^2 - 4.s + 3 = 0 \Rightarrow 1.s^2 - 4.s + 3 = 0$$

Temos $a = 1$, $b = -4$ e $c = 3$:

Vamos aplicar a fórmula de Báscara:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-4)^2 - 4.(1).(3) = 16 - 12 = 4 \Rightarrow \Delta = 4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow s = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2.(1)} \Rightarrow s = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s = \dfrac{4-2}{2} \Rightarrow s = \dfrac{2}{2} \Rightarrow s = 1 \\ s = \dfrac{4+2}{2} \Rightarrow s = \dfrac{6}{2} \Rightarrow s = 3 \end{cases}$$

Assim, nos instantes 1 segundo e 3 segundos, a temperatura é de 0 ºC.

Em que instante a reação química atinge a menor temperatura? Qual é o valor dessa temperatura?

Resolução

Para respondermos essas questões, vamos obter as coordenadas do vértice da parábola. (Como a > 0, a concavidade da parábola é voltada para cima ∪, o que implica dizer que o vértice é um ponto de mínimo.)

Temos $T(s) = 2.s^2 - 8s + 6.$

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow s_v = -\frac{(-8)}{2.(2)} \Rightarrow s_v = \frac{8}{4} \Rightarrow s_v = 2 \text{ segundos}$$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4.a} \Rightarrow T_v = -\frac{16}{4.(2)} \Rightarrow T_v = -\frac{16}{8} \Rightarrow T_v = -2^o\,C$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-8)^2 - 4.(2).(6) = 64 - 48 = 16$$

Dessa forma, a temperatura mínima de –2 ºC ocorre no instante 2 segundos.

A representação gráfica a seguir nos ajudará a compreender as informações obtidas nos itens a, b e c.

Represente graficamente a situação em análise.

Resolução

No item a, obtemos (0 segundo; 6 ºC).

No item b, obtemos (1 segundo; 0 ºC) e (3 segundos; 0 ºC).

No item c, obtemos o vértice da parábola (2 segundos; – 2 ºC).

Com essas informações, podemos fazer um gráfico cartesiano com o apoio do Excel:

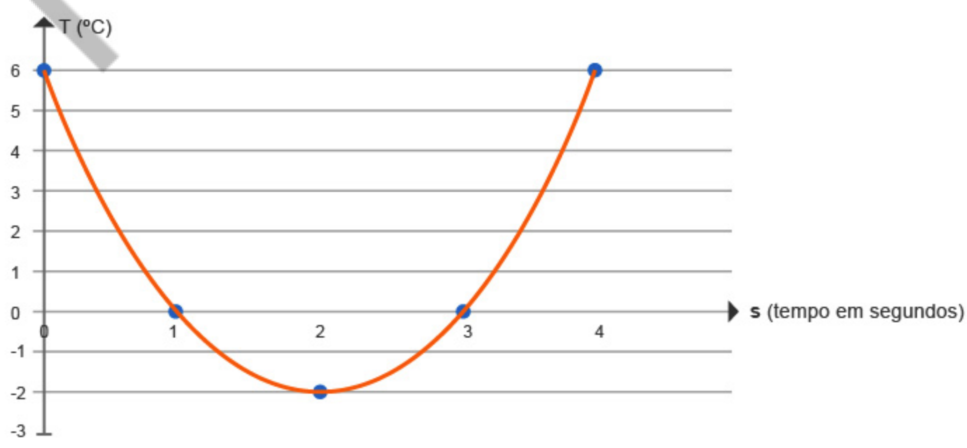


Figura 1.9 – Temperatura de uma reação química ao longo do tempo
Fonte: FIAP (2018)

Nesse caso, dizemos que a parábola possui concavidade voltada para cima, consequentemente, seu vértice (2 s; - 2 ºC) é um ponto de mínimo da parábola.

Observando o gráfico, podemos afirmar que: no início da reação química, a temperatura está na casa dos 6 ºC; nos primeiros dois segundos de reação, a temperatura cai até atingir seu menor valor no instante 2 s; após dois segundos de reação química, a temperatura aumenta segundo um crescimento parabólico.

1.3.4.2 Receita mensal de uma microempresa

A receita mensal **R** (em reais) de uma empresa é dada por:

R(p) = 20000p – 2000p², sendo **p** o preço de venda de cada unidade.

Qual é a receita, quando o preço de venda de cada unidade é de R$ 8,00?

Resolução

Nesse caso, vamos substituir p = R$ 8,00, na função dada.

$R(p) = 20000p - 2000p^2 \Rightarrow R(8) = 20000.(8) - 2000.(8)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R = 160000 - 128000 \Rightarrow R = R\$\ 32.000{,}00$

Qual é o preço de venda que maximiza a receita? Qual a receita máxima?

Resolução

Para respondermos a essa questão, vamos obter as coordenadas do vértice da parábola. (Como a < 0, a concavidade da parábola é voltada para baixo $\cap$, o que implica dizer que o vértice é um ponto de máximo.)

$$\text{Temos} \quad R(p) = 20000.p - 2000.p^2$$

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow p_V = -\frac{(20000)}{2.(-2000)} \Rightarrow p_V = \frac{-20000}{-4000} \Rightarrow p_V = R\$\ 5{,}00$$

$$y_V = R(5) = 20000.(5) - 2000.(5)^2 \Rightarrow R_V = R\$\ 50.000{,}00$$

Desse modo, R$ 5,00 é o preço de venda que maximiza a receita diária da empresa. O valor da receita máxima é R$ 50.000,00.

A representação gráfica a seguir nos ajudará a compreender melhor o problema que estamos analisando.

Representar graficamente a função receita dada.

Resolução

Temos a função receita dada por R(p) = 20000.p – 2000.p².

Vamos utilizar o Excel como apoio para visualizar o gráfico dessa função:

Tabela 1.7 – Tabela para construção do gráfico de R(p) = 20000.p – 2000.p²

p	R
Preço de venda de cada unidade (R$)	Receita mensal R$
0	0
1	18000
2	32000
3	42000
4	48000
5	50000
6	48000
7	42000
8	32000
9	18000
10	0

Fonte: FIAP (2017)

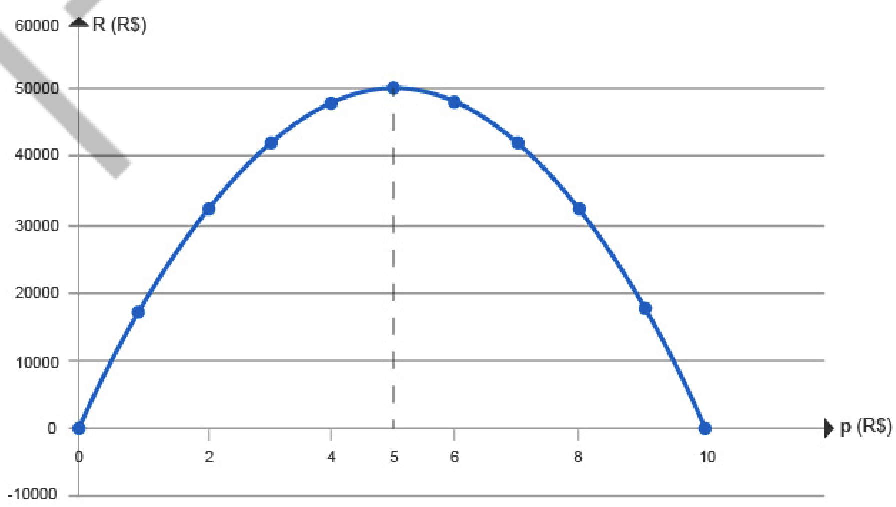


Figura 1.10 – Receita mensal em função do preço de venda de cada unidade
Fonte: FIAP (2018)

Nesse caso, dizemos que a parábola possui concavidade voltada para baixo, consequentemente, seu vértice (R$ 5,00; R$ 50.000,00) é um ponto de máximo da parábola.

Observando o gráfico, podemos afirmar que:

A um preço teórico de 0 reais cada unidade vendida, possivelmente, a empresa venderia todas as unidades (de graça...). Entretanto, sua arrecadação, sua receita seria nula.

A um preço de 10 reais cada unidade vendida, a receita volta a ser zero. Isso significa que R$ 10,00 é um preço completamente inadequado para o mercado ou um preço que o cliente não está disposto a pagar, ou um preço com o qual a empresa facilmente perderia espaço para a concorrência: o número de unidades vendidas tende a ser zero, o que implica em receita nula.

A um preço de R$ 5,00 cada unidade, a empresa teria sua receita máxima. Assim, para maximizar a receita, a empresa deve trabalhar com o preço ideal de R$ 5,00 ou com preços muito próximos a R$ 5,00.

1.3.5 Número de usuários de um software

Um determinado software com aplicações no setor de turismo acaba de ser lançado. Utilizando-se de um modelo matemático, estima-se que daqui a **t** meses, o número **N** de pessoas que utilizarão esse software será dado por:

$$N(t) = 40t^2 - 880t + 6000.$$

No lançamento, qual a expectativa de número de usuários do software?

Resolução

Nesse caso, vamos substituir t por zero (t = 0).

$$N(0) = 40.(0)^2 - 880.(0) + 6000 \Rightarrow N = 6000 \text{ usuários}$$

Quantas pessoas utilizarão o software daqui a um trimestre? E daqui a três anos?

Resolução

1) Vamos substituir t por 3 (t = 3 meses = 1 trimestre).

$N(3) = 40.(3)^2 - 880.(3) + 6000 \Rightarrow N = 3720$ usuários

2) Vamos substituir t por 36 (t = 36 meses = 3 anos).

$N(36) = 40.(36)^2 - 880.(36) + 6000 \Rightarrow N = 26160$ usuários

Daqui a quantos meses será registrado o menor número de usuários?

Resolução

Notemos que temos uma função do segundo grau com a = 40, ou seja, a > 0. Portanto, a parábola possui concavidade voltada para cima. Sendo assim, o vértice é um ponto de mínimo.

Temos $N(t) = 40.t^2 - 880.t + 6000.$

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow t_V = -\frac{(-880)}{2.(40)} \Rightarrow t_V = \frac{880}{80} \Rightarrow t_V = 11 \text{ meses}$$

$$y_V = N(11) = 40.(11)^2 - 880.(11) + 6000 \Rightarrow N_V = 1160 \text{ usuários}$$

Fazer o gráfico.

Resolução

Com o apoio do Excel, podemos fazer o gráfico da função dada.

Tabela 1.8 – Tabela para construção do gráfico de N(t) = 40.t² – 880.t + 6000

t	N
Tempo decorrido em meses	Número de usuários N(t) = 40.t² – 880.t + 6000
0	6000
3	3720
9	1320
11	1160
13	1320
20	4400
36	26160

Fonte: FIAP (2017)

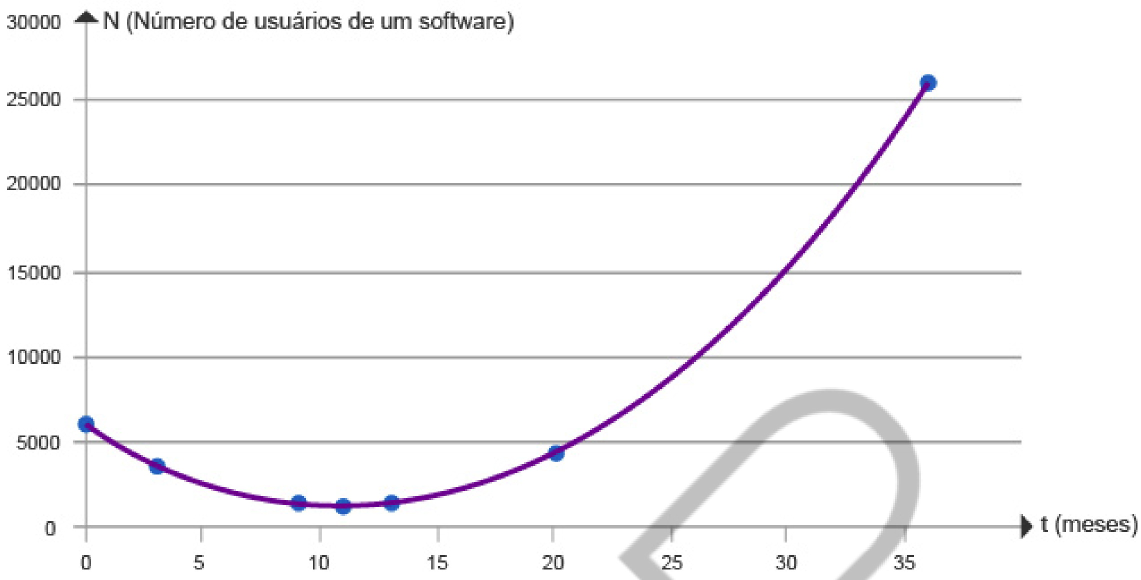


Figura 1.11 – Número de usuários de um software ao longo do tempo
Fonte: FIAP (2018)

1.3.6 Lucro mensal de uma empresa

Uma consultoria de administradores, após uma pesquisa realizada em determinada microempresa, concluiu que, para o próximo semestre, essa microempresa terá seu lucro mensal **L** (em reais) calculado por meio do modelo matemático:

$L(p) = -5000.p^2 + 60000.p - 160000$,

sendo **p** o preço de venda de cada unidade comercializada por essa microempresa.

a) Qual o "lucro", quando o preço de venda de cada unidade é, teoricamente, zero? Quais os preços de venda de cada unidade que determinam um **equilíbrio entre Receita e Despesas**?

Resolução

1) Substituindo-se p = 0 na função dada, obtemos:

$L(0) = -5000.(0)^2 + 60000.(0) - 160000 \Rightarrow L = -$ R\$ 160.000,00

2) O Equilíbrio (Igualdade) entre Receita e Despesas implica Lucro zero. Portanto, vamos substituir L por zero na função dada:

$$0 = -5000.p^2 + 60000.p - 160000$$

Dividindo-se a equação por -5000, obtemos:

$$p^2 - 12.p + 32 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -12 \quad c = 32$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-12)^2 - 4.(1).(32) = 144 - 128 = 16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow p = \frac{-(-12) \pm \sqrt{16}}{2.1} \Rightarrow p = \frac{12 \pm 4}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{12-4}{2} \Rightarrow p = \dfrac{8}{2} \Rightarrow p = \text{R\$ } 4{,}00 \\ p = \dfrac{12+4}{2} \Rightarrow p = \dfrac{16}{2} \Rightarrow p = \text{R\$ } 8{,}00 \end{cases}$$

Sendo assim, a um preço de R$ 4,00 ou R$ 8,00 cada unidade a empresa tem lucro zero. Podemos dizer que, a um preço de R$ 4,00 cada unidade, o que a empresa arrecada apenas cobre seus custos, gerando lucro zero. A um preço de R$ 8,00 a unidade, uma possibilidade é afirmarmos que a empresa vende menos, apenas o suficiente para cobrir suas despesas, voltando a ter lucro zero.

b) Qual é o preço de venda de cada unidade que **maximiza** o lucro mensal dessa microempresa no período em estudo? Qual o **lucro mensal máximo** para o período, nas condições dadas?

Resolução

Essa questão se refere ao vértice da parábola. Como a função possui a < 0 (observe que a = - 5000 é o termo que multiplica p^2), a concavidade da parábola é voltada para baixo ∩, portanto, a parábola tem ponto de máximo.

$$L(p) = -5000.p^2 + 60000.p - 160000$$

$$x_v = -\frac{b}{2.a} \Rightarrow p = \frac{-(60000)}{2.(-5000)} \Rightarrow p = R\$\,6{,}00$$

$$y_v = L(6) = -5000.(6)^2 + 6000.(6) - 160000 \Rightarrow L = R\$\,20.000{,}00$$

Sendo assim, ao preço de R$ 6,00 a microempresa tem seu lucro máximo de R$ 20.000,00.

c) Representar graficamente a função lucro dada.

Com o apoio do Excel, organizamos uma tabela de valores e solicitamos um “gráfico de dispersão”.

Tabela 1.9 – Tabela para construção do gráfico de $L(p) = -5000p^2 + 6000p - 160000$

p	L
Preço de venda de cada unidade (R$)	Lucro mensal (R$) L(p) = - 5000.p² + 60000.p - 160000
0	-160000
1	-105000
2	-60000
3	-25000
4	0
5	15000
6	20000
7	15000
8	0
9	-25000
10	-60000
11	-105000
12	-160000

Fonte: FIAP (2017)

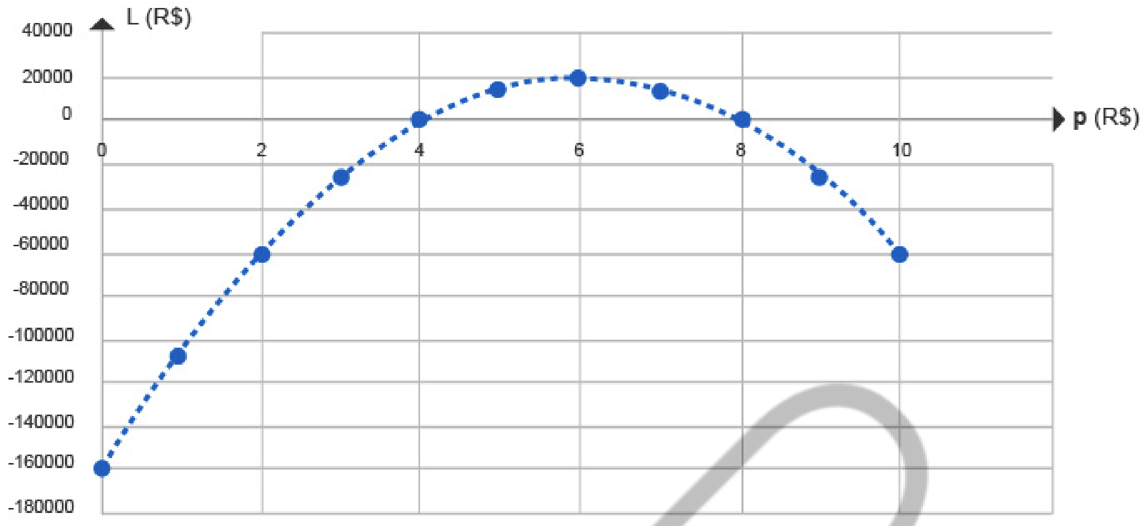


Figura 1.12 – Lucro mensal em função do preço de venda de um produto
Fonte: FIAP (2018)

1.3.7 Problemas aplicados envolvendo Função do 2º grau

1.3.7.1 Receita mensal em função do número de unidades vendidas

A receita mensal **R** (em reais) de uma empresa é dada por:

$R(n) = 100000n – 5000n^2$,

sendo **n** o número de milhares de unidades vendidas mensalmente.

a) Qual a receita para 11000 unidades vendidas?

Resolução

Nesse caso, basta fazermos n = 11 (11 milhares = 11000 unidades):

$R(n) = 100000.n – 5000.n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R(11) = 100000.(11) – 5000.(11)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R(11) = 1100000 – 5000.(121) \Rightarrow$

$\Rightarrow R(11) = 1100000 – 605000 \Rightarrow$

$\Rightarrow R(11) = 495000$

Temos uma receita de R$ 495.000,00.

b) Quantas unidades devem ser vendidas para gerar uma receita de R$ 420.000,00?

Resolução

Nesse item, vamos fazer R = 420000:

$R(n) = 100000.n - 5000.n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 420000 = 100000.n - 5000.n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5000.n^2 - 100000.n + 420000 = 0$

Vamos resolver essa equação do 2º grau por meio da Fórmula de Báscara:

$$5000.n^2 - 100000.n + 420000 = 0 \Rightarrow n^2 - 20.n + 84 = 0$$

Temos $a = 1, \quad b = -20 \quad e \quad c = 84$:

Vamos aplicar a fórmula de Báscara:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-20)^2 - 4.(1).(84) = 400 - 336 = 64 \Rightarrow \Delta = 64$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow n = \frac{-(-20) \pm \sqrt{64}}{2.(1)} \Rightarrow n = \frac{20 \pm 8}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = \dfrac{20-8}{2} \Rightarrow n = \dfrac{12}{2} \Rightarrow n = 6\ (\text{milhares}) \\ n = \dfrac{20+8}{2} \Rightarrow n = \dfrac{28}{2} \Rightarrow n = 14\ (\text{milhares}) \end{cases}$$

Portanto, devem ser vendidas **6000 unidades** ou **14000 unidades.**

c) Quantas unidades devem ser vendidas para se maximizar a receita? Qual a receita máxima?

Resolução

Temos $R(n) = -5000.n^2 + 100000.n$:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow n_v = -\frac{(100000)}{2.(-5000)} \Rightarrow n_v = \frac{-100000}{-10000} \Rightarrow n_v = 10 \text{ milhares}$$

Vamos substituir n = 10 na função dada:

$R(n) = 100000.n - 5000.n^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R(10) = 100000.(10) - 5000.(10)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ R(11) = 1000000 – 5000.(100) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ R(11) = 1000000 – 500000 $\Rightarrow$

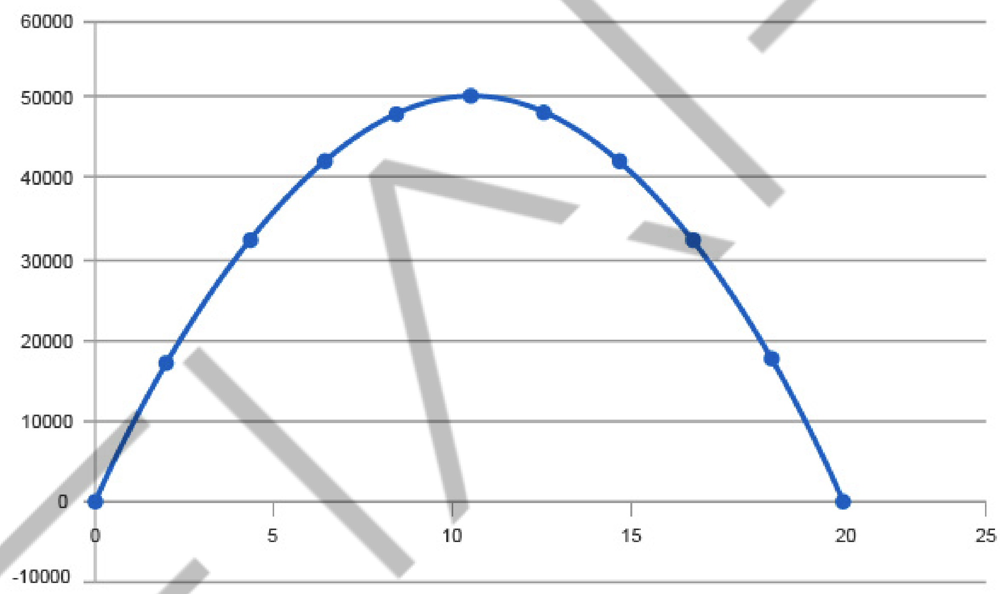
$\Rightarrow$ R(11) = 500000

Temos uma **receita máxima de R$ 500.000,00**.

d) Representar graficamente a função dada.

Resolução

Utilizando o Excel como apoio, obtemos o gráfico da função:



1.3.7.2 Lucro em função do preço de venda

O lucro mensal **L** (em reais) de uma empresa é dado por:

L(p) = $-3000p^2 + 36000p - 81000$,

sendo **p** o preço de venda de cada unidade.

a) Qual é o lucro, quando o preço de venda de cada unidade é R$ 4,20? E quando o preço de venda unitário é R$ 8,00?

Resolução

1) Vamos substituir p = 4,20 na função dada:

$L(p) = -3000.p^2 + 36000.p - 81000 \Rightarrow$

$\Rightarrow L(4,20) = -3000.(4,20)^2 + 36000.(4,20) - 81000 \Rightarrow$

$\Rightarrow L(4,20) = 17280 \Rightarrow$ Lucro de R$ 17.580,00

2) Vamos substituir p = 8 na função dada:

$L(p) = -3000.p^2 + 36000.p - 81000 \Rightarrow$

$\Rightarrow L(8) = -3000.(8)^2 + 36000.(8) - 81000 \Rightarrow$

$\Rightarrow L(8) = 15000 \Rightarrow$ Lucro de R$ 15.000,00

b) Determine o intervalo de preço de venda para o qual a receita da empresa passa a superar as despesas.

Resolução

Inicialmente, vamos verificar o momento no qual o lucro é zero.

Substituindo-se L = 0 na função dada, obtemos:

$L(p) = -3000.p^2 + 36000.p - 81000 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = -3000.p^2 + 36000.p - 81000 \Rightarrow$

Podemos dividir os dois membros da equação por "- 3000":

$$p^2 - 12.p + 27 = 0$$

Temos $a = 1, \quad b = -12 \quad e \quad c = 27$:

Vamos aplicar a fórmula de Báscara:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-12)^2 - 4.(1).(27) = 144 - 108 = 36 \Rightarrow \Delta = 36$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow p = \frac{-(-12) \pm \sqrt{36}}{2.(1)} \Rightarrow p = \frac{12 \pm 6}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{12-6}{2} \Rightarrow p = \dfrac{6}{2} \Rightarrow p = 3 \text{ (reais)} \\ p = \dfrac{12+6}{2} \Rightarrow p = \dfrac{18}{2} \Rightarrow p = 9 \text{ (reais)} \end{cases}$$

A receita supera as despesas quando o preço de venda está entre R$ 3,00 e R$ 9,00. (O gráfico apresentado no item "d" ilustra essa situação.)

c) Qual o preço de venda que maximiza o lucro? Qual é o lucro máximo?

Resolução

Temos $L(p) = -3000.p^2 + 36000.p - 81000$:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow p_v = -\frac{(36000)}{2.(-3000)} \Rightarrow p_v = \frac{-36000}{-6000} \Rightarrow p_v = 6 \text{ reais}$$

Vamos substituir p = 6 na função dada:

$L(p) = -3000.p^2 + 36000.p - 81000 \Rightarrow$

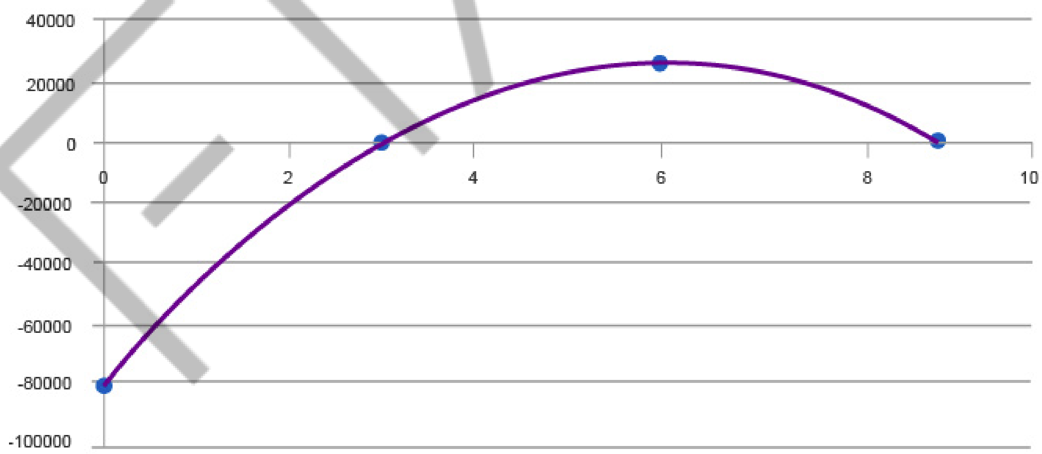
$\Rightarrow L(6) = -3000.(6)^2 + 36000.(6) - 81000 \Rightarrow$

$\Rightarrow L(6) = 27000 \Rightarrow$ Lucro máximo de R$ 27.000,00

d) Representar graficamente a função lucro dada.

Resolução

Utilizando o Excel como apoio, obtemos o gráfico da função:



e) Para que valores de p o lucro é superior a R$ 20.250,00?

Resolução

Fazendo-se L = 20250, obtemos:

$L(p) = -3000.p^2 + 36000.p - 81000 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 20250 = –3000.p² + 36000.p – 81000 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 3000.p² – 36000.p + 101250 = 0

$$3000.p^2 - 36000.p + 101250 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p^2 - 12.p + 33{,}75 = 0$$
Temos $a = 1$, $b = -12$ e $c = 33{,}75$:
Vamos aplicar a fórmula de Báscara:
$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-12)^2 - 4.(1).(33{,}75) = 144 - 135 = 9 \Rightarrow \Delta = 9$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow p = \frac{-(-12) \pm \sqrt{9}}{2.(1)} \Rightarrow p = \frac{12 \pm 3}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} p = \dfrac{12-3}{2} \Rightarrow p = \dfrac{9}{2} \Rightarrow p = 4{,}50 \text{ (reais)} \\ p = \dfrac{12+3}{2} \Rightarrow p = \dfrac{15}{2} \Rightarrow p = 7{,}50 \text{ (reais)} \end{cases}$$

O lucro é superior a R$ 20.250,00 quando o preço de venda está entre R$ 4,50 e R$ 7,50.

1.3.7.3 Lucro em função do número de unidades vendidas

Determinada indústria tem seu lucro mensal estimado pela fórmula:

L(n) = – 8000n² + 128000n – 480000,

sendo **n** o número de milhares de unidades vendidas mensalmente.

a) Qual será o lucro, caso não seja vendida nenhuma unidade? Quantas unidades devem ser vendidas mensalmente para que se obtenha um equilíbrio entre Receita e Despesas?

Resolução

1) Substituindo-se n = 0 na função dada, obtemos:

L(0) = – 8000.(0)² + 128000.(0) – 480000 $\Rightarrow$ L = – R$ 480.000,00

2) O Equilíbrio (Igualdade) entre Receita e Despesas implica Lucro zero. Portanto, vamos substituir L por zero na função dada:

$$0 = -8000.n^2 + 128000.n - 480000$$

Dividindo $-$se a equação por -8000, obtemos :

$$n^2 - 16.n + 60 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -16 \quad c = 60$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c = (-16)^2 - 4.(1).(60) = 256 - 240 = 16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \Rightarrow n = \frac{-(-16) \pm \sqrt{16}}{2.1} \Rightarrow n = \frac{16 \pm 4}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = \dfrac{16-4}{2} \Rightarrow n = \dfrac{12}{2} \Rightarrow n = 6 \text{ milhares} \\ n = \dfrac{16+4}{2} \Rightarrow n = \dfrac{20}{2} \Rightarrow n = 10 \text{ milhares} \end{cases}$$

O lucro será nulo para 6000 unidades ou 10000 unidades vendidas.

b) Quantas unidades devem ser vendidas para se maximizar o lucro mensal dessa indústria? Qual é o lucro mensal máximo previsto?

Resolução

$$L(n) = -8000.n^2 + 128000.n - 4800000$$

$$x_V = -\frac{b}{2.a} \Rightarrow n = \frac{-(128000)}{2.(-8000)} \Rightarrow n = 8 \text{ milhares}$$

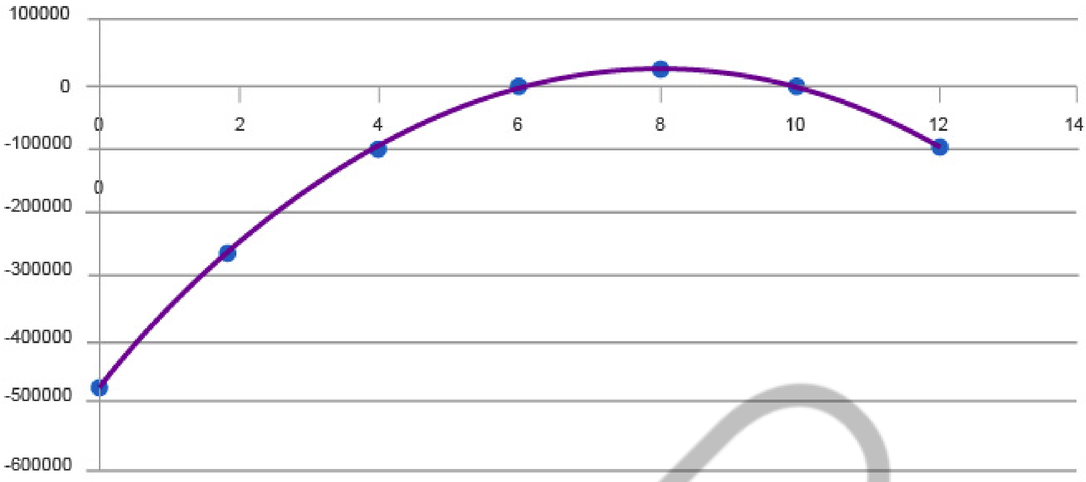
$$y_V = L(8) = -8000.(8)^2 + 128000.(8) - 480000 \Rightarrow L = R\$\ 32.000{,}00$$

8000 unidades vendidas determinam o lucro máximo de R$ 32.000,00.

c) Representar graficamente a função lucro dada (p = 0; L = 0; vértice).

Resolução

Utilizando o Excel como apoio, obtemos o gráfico da função:



1.3.7.4 Receita e lucro no setor automotivo: Maximização

Uma empresa do setor automotivo, em um estudo feito por seus analistas, obteve os seguintes resultados:

N(p) = 30000 – 2000p

C(N) = 26000 + N

Em que o número N de unidades vendidas mensalmente depende do preço p de venda de cada unidade e C é o custo total de produção das N unidades, para valores em reais.

Nesse caso, obtenha:

a) a função R(p), o preço de venda que maximiza a receita e o valor da receita máxima. Faça um esboço do gráfico.

Resolução

1) Vamos obter a Função Receita:

Receita = (número de unidades vendidas) vezes (preço de venda de cada unidade)

Assim, temos:

R = N.p $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ R = (30000 – 2000.p).p $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ R(p) = 30000.p – 2000.p²

2) Vamos obter o preço que maximiza a receita e o valor da receita máxima:

Temos $R(p) = 30000.p - 2000.p^2$:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow p_V = -\frac{(30000)}{2.(-2000)} \Rightarrow p_V = \frac{-30000}{-4000} \Rightarrow p_V = 7{,}50 \text{ reais}$$

Vamos substituir p = 7,5 na função dada:

$R(p) = 30000.p - 2000.p^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R(7{,}5) = 30000.(7{,}5) - 2000.(7{,}5)^2 \Rightarrow$

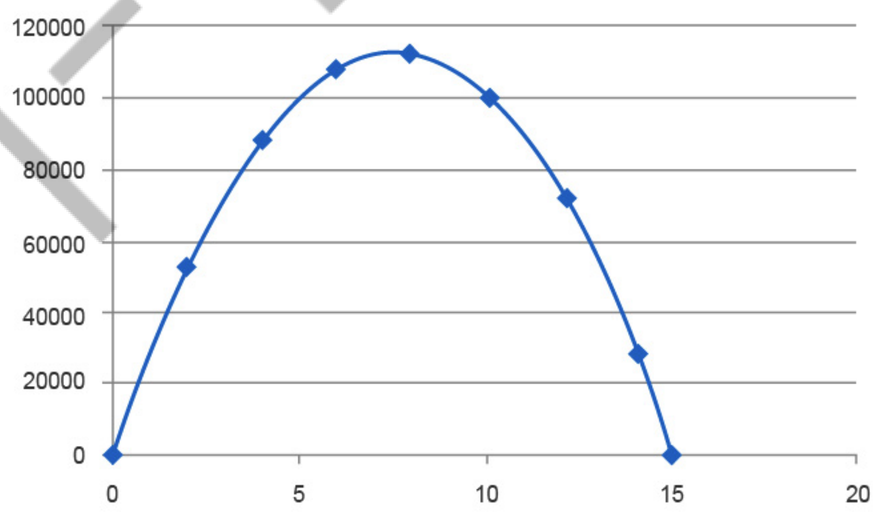
$\Rightarrow R(7{,}5) = 225000 - 2000.(56{,}25) \Rightarrow$

$\Rightarrow R(7{,}5) = 225000 - 112500 \Rightarrow$

$\Rightarrow R(7{,}5) = 112500$

Temos uma **receita máxima de R$ 112.500,00**.

3) Vamos fazer um esboço do gráfico:



b) a função L(p), o preço de venda que maximiza o lucro e o valor do lucro máximo. Faça um esboço do gráfico.

Resolução

1) Vamos obter a Função Lucro:

Lucro = Receita – Custo $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L = R – C $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L = 30000.p – 2000.p² – (26000 + N) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L = 30000.p – 2000.p² – (26000 + 30000 – 2000.p) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L = 30000.p – 2000.p² – (56000 – 2000.p) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L = 30000.p – 2000.p² – 56000 + 2000.p $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L(p) = – 2000.p² + 32000.p – 56000

2) Vamos obter o preço de venda que maximiza o lucro e o valor do lucro máximo:

$$\text{Temos} \quad L(p) = -2000.p^2 + 32000.p - 56000:$$

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow p_v = -\frac{(32000)}{2.(-2000)} \Rightarrow p_v = \frac{-32000}{-4000} \Rightarrow p_v = 8 \text{ reais}$$

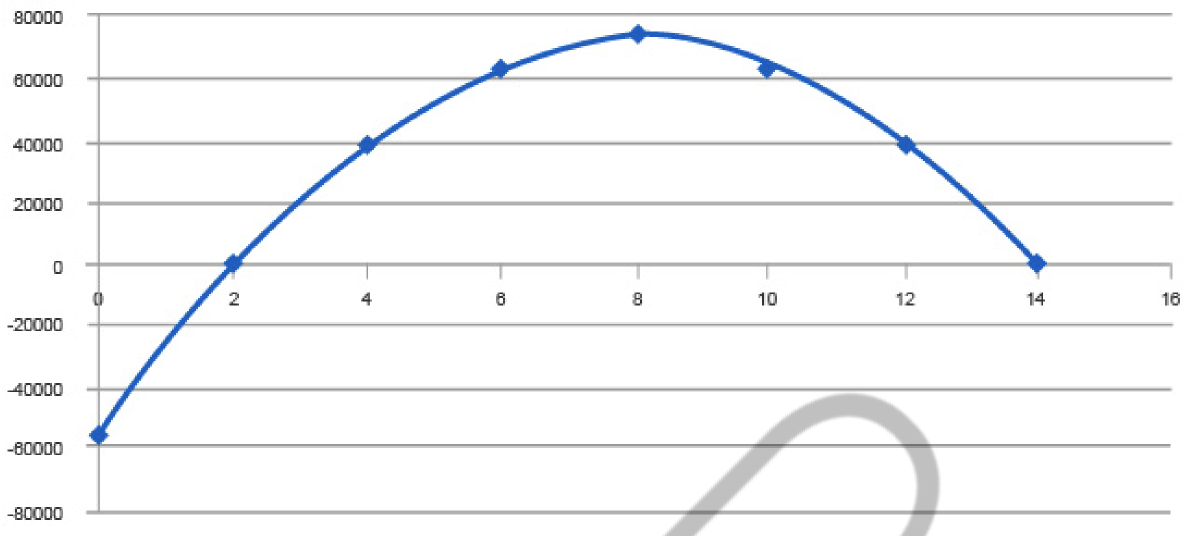
Vamos substituir p = 8 na função dada:

L(p) = –2000.p² + 32000.p – 56000 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L(8) = –2000.(8)² + 32000.(8) – 56000 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L(8) = 72000 $\Rightarrow$ Lucro máximo de R\$ 72.000,00

3) Vamos fazer um esboço do gráfico com apoio do Excel:



1.3.7.5 Concentração molecular (mol)

Os dados experimentais indicados a seguir correspondem às concentrações de uma substância química medida em intervalos de 1 segundo. Assumindo que a linha que passa pelos três pontos experimentais é uma parábola, determine a concentração (em mol) após 4 segundos.

Tempo (s)	Concentração (mol)
1	27,00
2	32,00
3	35,00

Resolução

1) A forma geral de uma função do 2º grau é $y = a.x^2 + b.x + c$.

Temos três pares ordenados (x; y) dados no enunciado:

(1; 27); (2; 32) e (3; 35)

Vamos substituir os pares ordenados na forma geral $y = ax^2 + bx + c$ e resolver um sistema de equações:

$$\begin{cases} 27 = a.(1)^2 + b.(1) + c \\ 32 = a.(2)^2 + b.(2) + c \\ 35 = a.(3)^2 + b.(3) + c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 27 \\ 4.a + 2.b + c = 32 \\ 9.a + 3.b + c = 35 \end{cases}$$

Na primeira equação do sistema, ao isolarmos a incógnita c, obtemos:

c = 27 – a – b

Vamos substituir c = 27 – a – b na 2ª equação e na 3ª equação do sistema:

$$\begin{cases} 4.a + 2.b + 27 - a - b = 32 \\ 9.a + 3.b + 27 - a - b = 35 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3.a + b = 5 \\ 8.a + 2.b = 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3.a + b = 5 \\ -4.a - b = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

Ao somarmos, membro a membro, as equações do sistema, obtemos:

– a = 1 ⇒ **a = – 1**

Como 3.a + b = 5, temos:

3.(-1) + b = 5 ⇒ **b = 8**

Como a + b + c = 27, temos:

-1 + 8 + c = 27 ⇒ **c = 20**

Temos y = a.x² + b.x + c, **a = –1**, **b = 8** e **c = 20**. Portanto:

y = -1.x² + 8.x + 20

2) Substituindo-se x = 4 na função obtida, obtemos:

y = –x² + 8.x + 20 ⇒

⇒ y = –(4)² + 8.(4) + 20 ⇒

$\Rightarrow$ **y = 36**

Portanto, temos uma concentração de 36 unidades moleculares após 4 segundos.

1.3.7.6 Respostas dos problemas

a) R$ 495.000,00 b) 6000 unidades ou 14000 unidades c) 10000 unidades; R$ 500.000,00 d) gráfico

a) R$ 17.280,00; R$ 15.000,00 b) $3 < p < 9$ c) R$ 6,00; R4 27.000,00 d) gráfico e) $4{,}50 < p < 7{,}50$

a) – R$ 480.000,00; 6000 unidades ou 10000 unidades b) 8000 unidades; R$ 32.000,00

a) $R(p) = 30000p – 2000p^2$; R$ 7,50; R$ 112.500,00

b) $L(p) = -2000p^2 + 32000p – 56000$; R$ 8,00; R$ 72.000,00

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Cleiton Sales de. **Taxa de depreciação de máquinas e equipamentos. Você calcula? Confira dicas!**. [s.d.]. Disponível em: <https://muitomaisdigital.com.br/taxa-de-depreciacao-de-maquinas-e-equipamentos-voce-calcula-confira-dicas/>. Acesso em: 3 dez. 2017.

BENCK, Julio. **Como calcular a depreciação de veículos**. 13 fev. 2017. Disponível em: <https://hintigo.com.br/depreciacao-de-veiculos/>. Acesso em: 1º dez. 2017.

BONETTO, G.; MUROLO, A. **Matemática Aplicada à Administração, Economia e Contabilidade.** São Paulo: Pioneira/Thomson Learning, 2004.

CATRACA LIVRE. **Casal inglês está viajando o mundo há 8 anos em uma van**. 17 nov. 2016. Disponível em: <https://catracalivre.com.br/geral/mundo/indicacao/casal-ingles-esta-viajando-o-mundo-ha-8-anos-em-uma-van/>. Acesso em: 2 dez. 2017.

DEMANA, Franklin D. **Pré-Cálculo**. São Paulo: Pearson, 2013.

FENELO, Marcio. **Quanto meu imóvel vai valorizar?**. 2015. Disponível em: <https://www.empiricus.com.br/newsletters/imoveis/quanto-meu-imovel-vai-valorizar/>. Acesso em: 30 nov. 2017.

FERNANDES, Daniela B. **Cálculo Diferencial**. São Paulo: Pearson, 2014.

GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. **Cálculo A.** São Paulo: Pearson, 2013.

HOFFMANN, L. D.; BRADLEY, G. L. **Cálculo:** Um Curso Moderno e Suas Aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

IEZZI, Gelson. **Matemática:** Ciências e Aplicações. São Paulo: Atual, 2010.

ROSSO, A. C.; FURTADO, P. **Matemática:** Uma Ciência para a Vida. São Paulo: Harbra, 2011.

THOMAS, George B. **Cálculo – Volume I**. São Paulo: Pearson, 2012.