

**Taller de Matemática Computacional - TUDAI/TUARI**  
**Trabajo Práctico 3 - 2024**  
**Funciones**

**Ejercicios indispensables**

1. Dada la función  $f(x) = \sqrt{x^2}$ 
  - a) Completar el siguiente diagrama  $f : \rightarrow$
  - b) ¿Cuáles son el dominio y la imagen de esta función?
2. Sea  $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - x + 2$ . Calcular  $f(-2)$ ,  $f(\frac{1}{4})$ ,  $f(x^2)$ ,  $f(x-h)$  y  $f(x) - f(h)$ .
3. Dados los siguientes pares de funciones, calcular:  $f+g$ ,  $f-g$ ,  $f*g$ ,  $\frac{f}{g}$ . Determinar dominio e imagen de cada función resultante:
  - a)  $f(x) = -1 + x^2$ ,  $g(x) = 1 + x$
  - b)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$ ,  $g(x) = x^2$
  - c)  $f(x) = \cos(x)$ ,  $g(x) = \sin(x)$
4. Decidir si existen las funciones  $f \circ g$  y/o  $g \circ f$ . En caso de existir, determinar la función composición:
  - a)  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = x^2$
  - b)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $g(x) = 1 + x^3$
  - c)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = 3^x$
5. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones corresponden a funciones inyectivas, suryectivas o biyectivas. Justificar. **Nota:** Todas las funciones están definidas de los reales hacia los reales,  $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ .
  - a)  $f(x) = x - 10$ .
  - b) Toda función lineal con dominio en los reales.
  - c) La aplicación  $g : M \rightarrow H$  que asigna a cada perra con su cachorro, donde  $H$  es el conjunto de todos los cachorros y  $M$  el conjunto de todas las madres.
  - d)  $f(x) = x^2 - 2$ .
  - e) Toda función cuadrática con dominio en los reales.
  - f)  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$
  - g)  $f(x) = e^x$
6. Dadas las siguientes funciones definidas de los reales en los reales,  $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ , decidir cuáles son inyectivas, suryectivas o biyectivas. Justificar en cada caso.
  - a)  $f(x) = 3x - 1$
  - b)  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
  - c)  $f(x) = \sqrt{x-1}$
  - d)  $f(x) = \ln(x-2)$
  - e)  $f(x) = 3\cos(2x) + 1$
  - f)  $f(x) = 8\sin(x - \frac{\pi}{2})$
  - g)  $f(x) = 2x^2 + 5x - 4$
  - h)  $f(x) = 2e^x - 1$
7. Para cada una de las funciones anteriores, analizar: dominio, imagen, raíces, ordenada al origen, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Realizar su representación gráfica utilizando GeoGebra.

8. Dadas las siguientes funciones definidas a trozos, analizar dominio, imagen, raíces, ordenada al origen, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento. Realizar una representación gráfica.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x < 3 \\ 2x - 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 32\left(\frac{1}{2}\right)^x, & x < 5 \\ \sqrt{x-4}, & x \geq 5 \end{cases}$$

9. La familia de funciones parte entera agrupa a funciones de la forma  $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ , satisfaciendo la condición  $|x - f(x)| < 1$ . Estas funciones permiten, dado un número con parte fraccionaria, obtener su parte entera. Existen al menos 4 funciones posibles:

- **Piso:** (*floor*) a cada número real asigna el número entero más próximo por defecto, es decir, el mayor número entero igual o menor que ese número real. Ej: a 2,2 le corresponde 2, a 2,9 le corresponde 2, a  $-3,1$  le corresponde  $-4$ . Se nota  $f(x) = \lfloor x \rfloor$ .
- **Techo:** (*ceil*) a cada número real asigna el número entero más próximo por exceso, es decir, el mayor número entero igual o mayor que ese número real. Ej: a 2,2 le corresponde 3, a 2,9 le corresponde 3, a  $-3,1$  le corresponde  $-3$ . Se nota  $f(x) = \lceil x \rceil$ .
- **Truncamiento:** se ignora la parte decimal.
- **Redondeo:** se asigna el entero más próximo según su parte decimal.

- a) Grafique cada una de las funciones y compare sus gráficas.  
 b) Definir la función truncamiento a partir de la función piso.  
 c) Decir si cada una de las funciones son inyectivas, suryectivas o biyectivas. Justifique.

10. Analizar dominio, imagen, amplitud, frecuencia, período y ángulo de fase de las siguientes funciones trigonométricas, en un solo período:

$$a) f(x) = 2 \sin(x) - 1$$

$$d) f(x) = \frac{1}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 3$$

$$b) f(x) = 2 \sin(3x + \pi) - 1$$

$$e) f(x) = \sin(2x) - 4$$

$$c) f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3$$

$$f) f(x) = -3 \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - 2$$

### Ejercicios importantes

1. Sea  $f(x) = 3x^2 - 4$ . Calcular  $f(-4)$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $f(x^2)$ ,  $f(x - h)$  y  $f(x) - f(h)$ .
2. Dadas las siguientes funciones, analizar: dominio, imagen, raíces, ordenada al origen, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Realizar la representación gráfica. **Nota:** Todas las funciones están definidas de los reales en los reales,  $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$ .

$$a) f(x) = |5 - \frac{1}{2}x| - 2$$

$$d) f(x) = 2x^2 + 5x - 4$$

$$b) f(x) = 6 \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$$

$$c) f(x) = \tan\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$e) f(x) = \frac{x+3}{x^2-1}$$

3. Decidir cuáles de las funciones anteriores son inyectivas, suryectivas o biyectivas. Justificar en cada caso.
4. Dadas las siguientes funciones definidas a trozos, analizar dominio, imagen, raíces, ordenada al origen, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y decrecimiento. Realizar una representación gráfica.

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq 0 \\ x^2 - 2x - 3, & x > 0 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} \frac{4x}{x-1}, & x \leq 0 \\ 4\cos(x + \pi), & x > 0 \end{cases}$$

5. Analizar dominio, imagen, amplitud, frecuencia, período y ángulo de fase de las siguientes funciones trigonométricas:

$$a) f(x) = -2\cos(x) + 3$$

$$d) f(x) = 4\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

$$b) f(x) = -\cos(-2x) + 3$$

$$c) f(x) = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$e) f(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$$

6. Dadas las siguientes funciones, analizar dominio, imagen, raíces, ordenada al origen, conjuntos de positividad y negatividad, intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Realizar una representación gráfica.

$$a) f(x) = 2|x - 1| + 3$$

$$c) f(x) = 3|x + 1| - 2$$

$$b) f(x) = -3|x - 1| + 3$$

7. Dados los siguientes pares de funciones, calcular:  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$ ,  $\frac{f}{g}$ . Determinar dominio e imagen de cada función resultante:

$$a) f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{3}$$

$$b) f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \sqrt{4 - x}$$

8. Decidir si existen las funciones  $f \circ g$  y/o  $g \circ f$ . En caso de existir, determinar la función composición:

$$a) f(x) = \frac{1}{x-2}, g(x) = x^2$$

$$b) f(x) = \ln(x), g(x) = \sin(x)$$