Taller de Matemática Computacional - TUDAI/TUARI
Trabajo Práctico 6 - 2024
Álgebra Lineal

Ejercicios indispensables

1. Sean los vectores $A = (5, 9, 10, -6)$ y $B = (-1, 5, 2, 2)$. Completar:

   a) $A_3 =$
   b) $A_4 =$
   c) $B_1 =$
   d) $B_2 * A_1 =$
   e) $A_1 + B_3 - A_4 =$
   f) $(A_1 + B_3)A_4 =$
   g) $\sqrt{\sum_{i=1}^{4} A_i^2} =$
   h) $\sum_{i=1}^{4} A_i B_i =$
   i) $A_i + B_i = \qquad \forall i \in [1, 4]$

2. Sean los vectores:

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Calcular:

   a) $|v| =$
   b) $3u$
   c) $-w$
   d) $v + u$
   e) $\frac{1}{3}(v - w)$
   f) $\frac{1}{3}v - \frac{1}{3}w$
   g) $v^t u$
   h) $v \cdot w$

3. Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   Completar, de ser posible. Si no lo es, explicar por qué:

   a) $A_{21} =$
   b) $A_{12} =$
   c) $A_{23} =$
   d) $A_{32} =$
   e) $A_{11} + A_{22} =$
   f) $A_{11} - A_{22} =$
   g) $\alpha * A = \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
   h) $A_{12} * A =$
   i) $A + A =$
   j) $AA =$
   k) $A + A^T =$
   l) $AA^T =$
   m) $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} A_{ij} + A_{ij} =$
   n) $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} A_{ij} A_{ji}^T =$

4. Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 3\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Encuentre las matrices que se obtienen efectuando las siguientes operaciones, o dar las razones por las que las soluciones no están definidas.

1) $B + 2A^T$
2) $2B + D$
3) $M = -A^T$
4) $N = -(A^T)$
5) CE
6) $\det(D)$
7) $Q = DH$
8) $S = H^T D^T$
9) HD
10) $H^T D$
11) GB

b) Compare las matrices M y N obtenidas en los incisos $4a3$ y $4a4$.

c) Compare las matrices Q y S obtenidas en los incisos $4a7$ y $4a8$.

5. Resuelva: Se analizará el gasto mensual que producen tres familias, en base a los siguientes datos.

- **Consumo promedio diario de alimentos por familia**: Familia A: pan 1 kg, carne 2 kg, leche 1 kg. Familia B: pan 2 kg, carne 3 kg, leche 1 kg. Familia C: pan 2 kg, carne 3 kg, leche 2 kg.

- **Costo por kg de alimento del *mes 1***: Pan \$5, carne \$30, leche \$20.

a) Plantee la operación matricial que permitirá obtener el gasto mensual total que produce cada familia en el *mes 1*. **Ayuda:** Considere en la operación matricial a las familias como filas y a Pan, Carne y Leche como columnas. **Nota:** Considere que el mes tiene 30 días y el costo de los productos se mantuvo constante en el mes 1.

b) Si tenemos una cuarta familia D que consume diariamente: Pan 1 kg, carne 1 kg, leche 1 kg, amplíe el sistema matricial planteado para obtener el gasto total mensual que produce cada familia en el *mes 1*.

c) Si la inflación inter-anual fue del 25 %. Cuánto gastará cada una de las cuatro familias en el *mes 13*. **Nota:** Considere que los nuevos costos de los productos se mantienen constantes durante los 30 días del *mes 13*.

6. Determine si es válida la expresión $A = k_1 B + k_2 C$, donde k_1 y k_2 son números reales y A, B y C matrices tales que:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Justifique su respuesta.

7. Determine, en cada caso, si los sistema de ecuaciones lineales dados son equivalentes:

a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ -x - y = 2 \end{cases}$ y $\begin{cases} 2u + 3v = -5 \\ u - 2v = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y=0 \\ -x-y=2 \end{cases}$ y $\begin{cases} x-y+z=0 \\ -x-y+z=2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1-x_2=0 \\ -x_1-x_2=2 \\ -2x_1+2x_2=0 \end{cases}$ y $\begin{cases} 2x_1+3x_2=-5 \\ x_1-2x_2=1 \end{cases}$

8. Las fuerzas que actúan en un cuerpo se localizan en un plano, con lo cual pueden ser representadas mediante elementos de R_2. Determine la fuerza que hay que aplicar sobre un cuerpo para mantenerlo en equilibro si está sometido a las siguientes fuerzas:

$$2F_1 - 0{,}5F_2 + F_3$$

siendo los vectores fuerza: $F_1 = (-2,3)$, $F_2 = (2,0)$ y $F_3 = (4,4)$. Resuelva analítica y gráficamente.

Nota: Un cuerpo se encuentra en equilibrio si la sumatoria de fuerzas que actúan sobre él es igual a cero.

9. Cuáles de los siguientes pares de vectores:

$$\begin{aligned} u_1 &= (2;1;3) \quad u_2 = (2;3;0) \\ u_1 &= (4;2;6;8) \quad u_2 = (2;1;3;4) \\ u_1 &= (1;0;0;2) \quad u_2 = (0;3;1;0) \end{aligned}$$

   a) son ortogonales
   b) son paralelos
   c) tienen el mismo sentido

10. Encuentre el valor de x para que los vectores sean perpendiculares. Grafique.

   a) $a = (2,3)$ y $b = (-1,x)$.
   b) $c = (5,3,1)$ y $d = (2,x,4)$.

11. Dadas las siguientes matrices, describir el efecto geométrico que produce Ax sobre un vector arbitrario x, donde c es un escalar no nulo (analizar los casos en función del signo y la magnitud de c):

$$A = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Nota: Explique, para cada caso, que ocurre cuando c pertenece a los siguientes intervalos: $(1,\infty), (0,1), (-\infty,0), \{0\}, \{1\}$

Ejercicios importantes

1. Dadas las siguientes matrices del ejercicio 4:

   a) Encuentre las matrices que se obtienen efectuando las siguientes operaciones, o dar las razones por las que las soluciones no están definidas.

1) $G \cdot B^T$

2) $DD + A$

3) $3H$

4) $-3H$

2. Verifique que el triángulo con vértices en $a = (2;3;4)$, $b = (3;1;2)$ y $c = (7;0;1)$ es un triángulo rectángulo.

3. Un pirata encontró un mapa de tesoro escondido en un desierto llano. El mismo contiene de las siguientes coordenadas:

   - Inicio: $i = (0,0)^T$;
   - Llave A: $a = (1,1)^T$;
   - Llave B: $b = (3,5)^T$;
   - Cueva C: $c = (5,5)^T$;

   El mapa tiene la siguiente inscripción:

   > Si el tesoro quieres tener, a la cueva debes llegar, pero sin las llaves a y b, a la cueva no podrás entrar!

   El pirata rápidamente entiende que antes de ir a la cueva, tiene que ir a buscar las llaves según indicado en las coordenadas del mapa.

   a) Plantee cuál es el camino más corto entre el inicio (i) y la cueva c, pasando por las llaves a y b, con operaciones vectoriales. Grafique.

   b) Cuál es la distancia de este camino?

   c) Si el Mapa se codificó utilizando operaciones matriciales de multiplicación. Ayude al pirata a construir el verdadero mapa, decodificando los puntos $\{i, a, b, c\}$, en los puntos $\{\hat{i}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{c}\}$ para cada una de las siguientes matrices de codificación:

   $$R = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Nota: La codificación por multiplicación de una matriz M, consiste en que para cada punto codificado (p) del mapa, el verdadero punto se encuentra en $\hat{p}$ se obtiene como $\hat{p} = Mp$.

   d) Para cada una de las matrices de codificación, Plantee cuál es el camino más corto entre el inicio ($\hat{i}$) y la cueva $\hat{c}$, pasando por las llaves $\hat{a}$ y $\hat{b}$, con operaciones vectoriales. Grafique.

   e) Cuál es la distancia de este camino? para cada escenario de codificación.

   f) Discuta que pasa con la distancia cuando las matrices son de rotación y cuando son de deformación.