

# Wahrscheinlichkeiten und Statistik

Fabio Oesch

28. Oktober 2013

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Themen</b>	<b>3</b>
1.1 Ergebnisraum . . . . .	3
1.2 Ereignis $E \subseteq \Omega$ . . . . .	3
1.3 Wahrscheinlichkeitsfunktion . . . . .	3
1.4 Subadditivität . . . . .	3
1.5 Wahrscheinlichkeitsraum (Vorläufig) . . . . .	3
1.6 Theoretische Wahrscheinlichkeitsfunktion . . . . .	4
1.7 Laplace-Experimente . . . . .	4
1.8 Mehrstufige Zufallsexperiment . . . . .	4
1.9 Urnenmodell . . . . .	4
1.10 Repetition . . . . .	4
1.11 Erwartungswert: . . . . .	4
1.12 Streuung, Varianz . . . . .	5
1.13 Binomialverteilung . . . . .	5
1.13.1 Binomialverteilung: . . . . .	5
1.13.2 Testen einer Hypothese: . . . . .	5
1.14 Poissonverteilung . . . . .	6
1.15 Statistische Tests . . . . .	6
1.15.1 Prinzip des statistischen Tests . . . . .	6
1.15.2 Beispiel . . . . .	6
1.15.3 Erwartungswert und Varianz . . . . .	7
1.16 t-Verteilung . . . . .	7
1.17 Parametertests . . . . .	7
1.18 Konfidenz/Vertrauensintervall . . . . .	7
1.18.1 2-Stichproben t-Test . . . . .	8
1.18.2 Homoskedastischer Fall . . . . .	8
<b>2 Beispiele:</b>	<b>8</b>

# 1 Themen

1. beliebig oft wiederholbar
2. Resultat ist zufällig

**Bsp:** Lotto, Münze werfen, Würfeln

## 1.1 Ergebnisraum

$\Omega$  = Menge aller möglichen Ausgänge des Experimentes (im Skript mit  $S$ )

**Bsp:**  $\Omega$  von Lotto:  $\Omega = \{1, \dots, 45\}$

## 1.2 Ereignis $E \subseteq \Omega$

Ereignis  $E = \{\text{Augenzahl ist gerade}\}$

spezielle Ereignisse:

- $E = \Omega$  sicheres Ereignis
- $E = \emptyset$  unmögliches Ereignis

$E$  Ereignis:  $E^C = \overline{E} = \Omega \setminus E$

## 1.3 Wahrscheinlichkeitsfunktion

$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$

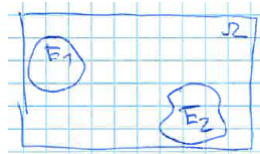
2 wichtige Eigenschaften:  $\mathcal{P}(\Omega) = 1$ ,  $\mathcal{P}(\emptyset) = 0$ ,  $0 \leq \mathcal{P}(E) \leq 1$

**Bsp:**  $\Omega = \{\text{Kopf, Zahl, Kante}\}$

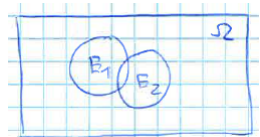
$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{P}(\{\text{Kopf}\}) = \frac{2}{3} \\ \mathcal{P}(\{\text{Kante}\}) = 0 \\ \mathcal{P}(\{\text{Zahl}\}) = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{P}(E) = 1, E = \{\text{Kopf, Zahl}\}$$

## 1.4 Subadditivität

$E_1, E_2 \subseteq \Omega$ ,  $E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(E_1 \cup E_2) = \mathcal{P}(E_1) + \mathcal{P}(E_2)$



$$\Rightarrow \mathcal{P}(E_1 \cup E_2) = \mathcal{P}(E_1) + \mathcal{P}(E_2), E = E_1 \cup E_2$$



$$\Rightarrow \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E_1) + \mathcal{P}(E_2) - \mathcal{P}(E_1 \cap E_2), E = E_1 \cup E_2$$

$\mathcal{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) \leq \mathcal{P}(E_1) + \dots + \mathcal{P}(E_n)$

**Bsp:** Lotto mit Matryoshka

$$\mathcal{P}(\{w\}) = \frac{1}{45}, E_1 = \{1\}, E_2 = \{1, 2\}, \dots, E_{45} = \{1, \dots, 45\} = \Omega \Rightarrow \mathcal{P}(\overbrace{E_1 \cup \dots \cup E_{45}}^{\Omega}) = 1$$

$$\mathcal{P}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{45}) \leq \mathcal{P}(E_1) + \dots + \mathcal{P}(E_{45}) = \frac{1}{45} + \frac{2}{45} + \dots + \frac{45}{45} = \frac{\frac{45 \cdot 46}{2}}{45} = \frac{46}{2} = 23$$

## 1.5 Wahrscheinlichkeitsraum (Vorläufig)

$W = (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ,  $\Omega$  = Ergebnisraum,  $\mathcal{P}(\Omega)$  = alle Ausgänge des Experiments. alle  $E$ 's,  $\mathbb{P}$  = Wahrscheinlichkeitsfunktion

## 1.6 Theoretische Wahrscheinlichkeitsfunktion

$\mathcal{P}(\{\text{Zahl}\}) = \mathcal{P}(\{\text{Kopf}\}) = \frac{1}{2}$  (Definiere die Wahrscheinlichkeit synthetisch)

$\mathcal{A}(E) = \frac{\text{wie häufig tritt } E \text{ ein bei } N\text{-facher Wiederholung}}{N}$  (Empirische Wahrscheinlichkeit)

## 1.7 Laplace-Experimente

$\Delta$  Fairen Spielen, Die Wahrscheinlichkeiten sind gleichverteilt

$|\Omega| = n$  endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.

Jedes Elementarergebnis ist gleich wahrscheinlich ( $|E| = 1$ ). **Bsp:** Würfel:  $\{1\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . kein Elementarergebnis:  $\{3, 4\}$   $\omega \in \Omega : \mathcal{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{|\Omega|}$ ,  $|A|$  = Anzahl Elemente in  $A$

## 1.8 Mehrstufige Zufallsexperiment

Zufallsexperiment  $Z$ , das mehrfache hintereinander angeführt wird.

**Bsp:** mehrmals Würfeln: Wie gross ist die W'keit  $2 \times$  hintereinander 6 zu würfeln:  $\mathcal{P}(2 \times 6 \text{ Würfeln}) = \frac{1}{36}$

Produktregel:  $\mathcal{P}(E_1 \text{ und } E_2) = \mathcal{P}(E_1) \cdot \mathcal{P}(E_2)$

Möglichkeiten:  $\Omega_1$  hat  $n_1$  viele Ausgänge ( $|\Omega_1| = n_1$ ),  $\Omega_2$  hat  $n_2$  viele Ausgänge ( $|\Omega_2| = n_2$ ) also  $n_1 \cdot n_2$

## 1.9 Urnenmodell

Unterscheidung nach „Zurücklegen“ oder „nicht zurücklegen“ und „geordnet“ oder „keine Reihenfolge“

	zurücklegen	nicht zurücklegen
geordnet	$n^k$	$n!$ oder $\frac{n!}{(n-k)!}$
ungeordnet		$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$p = \frac{\text{Anzahl der gnstigen Flle}}{\text{Anzahl der mglichen Flle}} = \frac{g}{m}$$

**Bsp:** Klasse aus 10 Mädchen und 14 Knaben. Wähle 5 Personen aus.

a) W'keit, dass alle Mädchen sind?

Antwort:  $P(\{5 \text{ Mädchen}\}) = \frac{|\{5 \text{ Mädchen}\}|}{|\Omega|}$ ,  $|\Omega| = \binom{24}{5}$ ,  $|\{5 \text{ Mädchen}\}| = \binom{10}{5}$

$$\Rightarrow P(\{5 \text{ Mädchen}\}) = \frac{\binom{10}{5}}{\binom{24}{5}}$$

$$\text{b) W'keit alles Knaben: } P(\{5 \text{ Knaben}\}) = \frac{\binom{14}{5}}{\binom{24}{5}}$$

c) W'keit, dass in der 5-er Gruppe, sowohl Mädchen, als auch Knaben vorkommen.

Gegenw'keit von a) + b), also  $\overline{E} = \{\text{nur Mädchen oder nur Knaben}\} \Rightarrow P(\overline{E}) = P(\{\text{nur Mädchen}\}) +$

$$P(\{\text{nur Knaben}\}) = \frac{\binom{10}{5} + \binom{14}{5}}{\binom{24}{5}} \Rightarrow P(E) = 1 - P(\overline{E})$$

**Gegenw'keit benutzen:**  $P(E)$ ,  $\frac{\Omega}{\overline{E}} = \overline{E}$ ,  $1 - P(\overline{E}) = P(E)$

**Bsp:** 8x Münze werfen

Wie gross ist die W'keit, das Zahl & Kopf gleichhäufig vorkommen.

$$|E| = \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4}$$

## 1.10 Repetition

$X$  Zufallsvariable: Anzahl bei 1x würfeln }  $X, Y$  Gleichverteilt (uniform) uniform  
 $Y$  Zufallsvariable: Anzahl bei 1x würfeln }

$Z := X + Y$  Zufallsvariable:  $F(z) = \sum_{X_i \leq z} p_i$ ,  $p_i = P(Z = x_i)$

## 1.11 Erwartungswert:

Theoretischer Pendant zum Mittelwert.

**Bsp:**  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ,  $h = |\{x_1, x_2, x_3, x_4\}| \rightarrow \bar{x} = \frac{\sum x_i}{h}$

$\mathbb{E}X = \mu = \sum_{\text{alle } X_i} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i)$  keine Zufallsvariable

**Bsp:**  $X$  sein die Augenzahl von 1x würfeln.  $\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^6 i \cdot \frac{1}{6} = 3.5$

$Y = X - \mathbb{E}(X)$  ist eine Zufallsvariable,  $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X)) = \sum_{i=1}^n (x_i p_i - p_i \mathbb{E}(X)) = \sum_{i=1}^n x_i p_i -$

$$\sum_{i=1}^n p_i \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) \sum_{i=1}^n p_i = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X) = 0$$

**Bsp: Würfel**  $\mathbb{E}(X) = 3.5$ ,  $E(X - \mathbb{E}(X)) = 0$

$X - 3.5$	$1 - 3.5$	$2 - 3.5$	$3 - 3.5$	$4 - 3.5$	$5 - 3.5$	$6 - 3.5$
$p_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

## 1.12 Streuung, Varianz

$$\text{Var}(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \Rightarrow \mathbb{E}(X - \mu)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

## 1.13 Binomialverteilung

Zufallsexperiment mit 2 Ausgängen: Erfolg, Misserfolg

$$P(X = \text{Erfolg}) = p \in [0, 1], P(X = \text{Misserfolg}) = 1 - p = q$$

Zufallsvariable  $X$  = Anzahl Erfolge bei  $n$ -facher Wiederholung des Experiments

$$\text{Wahrscheinlichkeitsfunktion von } X \text{ aus. } P(X = x) = \frac{x_i}{p_i} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ n \end{array} \right| \frac{1}{(1-p)^n} \frac{1}{\binom{n}{1} p(1-p)^{n-1}} \frac{k}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \frac{n}{\binom{n}{n} p^n}$$

**Bsp:**

Spieler A: M.D. 40% Erfolgsw'keit, Spieler B: K.G. 60% Erfolgsw'keit.

Sie spielen 3x gegeneinander. E: W'keit dass A häufiger als B gewinnt. Also muss A 2- oder 3-Mal gewinnen.  $P(X = 2) + P(X = 3) \Rightarrow \binom{3}{2} 0.4^2 \cdot 0.6 + \binom{3}{3} 0.4^3 + 0.6^0 = 0.352 \Rightarrow 35.2\%$  W'keit gewinnt A

Erfolgsw'keit von  $p$ :  $\mathbb{E}X$  bei  $n$  spielen. Mit Trick:  $\mathbb{E}X = n \cdot p$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$f(t) = (q + pt)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} (pt)^k$$

### 1.13.1 Binomialverteilung:

Abkürzung:  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ ,  $n$ : Anzahl Experimente,  $p$ : Erfolgsw'keit

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \mathbb{E}(X) = np, \text{Var}(X) = \sigma^2 = np(1-p). \sigma: \text{Std'abweichung}$$

### 1.13.2 Testen einer Hypothese:

Vermutung: Hühner können zw.  $\circ$  und  $\Delta$  Futter entscheiden.

$20 \times \circ, 20 \times \Delta \Rightarrow \circ = \text{Erfolg}, \Delta = \text{Misserfolg}$

Zufallsvariable  $X$  zählt die Anzahl Erfolge  $\Rightarrow$  Binomiales Experiment d.h.  $X \sim \text{Bin}(20, p)$ .

Führen das Experiment durch:  $15 \times \circ$  und  $5 \times \Delta$ , experimentelle W'keit für Erfolg:  $p = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

**Hypothese formulieren:**

$H_0$ : Nullhypothese: es gibt keinen Unterschied  $\rightarrow$  Huhn kann nicht unterscheiden zw.  $\circ$  &  $\Delta$ ,  $p = q = \frac{1}{2}$

$H_1$ : Alternativhypothese:  $p \geq q$  ( $p < q$ ). d.h. es gibt einen Unterschied beim Fressverhalten.

**Ziel:** Entscheiden ob  $H_0$  anzunehmen ist, oder sie zugunsten von  $H_1$  verwerfen.

**Berechnung:** Berechne W'keit unter  $H_0$  ( $p = q = \frac{1}{2}$ ), dass wir einen Ausgang mit  $15 \times$  Erfolg und  $5 \times$  Misserfolg

$$P(15 \leq X \leq 20) = \sum_{k=15}^{20} \binom{20}{k} p^k (1-p)^{20-k} \stackrel{\text{unter } H_0!}{=} \sum_{k=15}^{20} \binom{20}{k} \frac{1}{2}^k \cdot \frac{1}{2}^{20-k} \approx 0.021 = 2.1\%, \text{ Signifikanz-Niveau } \alpha, \alpha = 0.1 \text{ (10\%)} \Rightarrow \text{ Falls } P(15 \leq X \leq 20 | H_0) \leq \alpha \Rightarrow \text{ dann verwerfen } H_0, \text{ ansonsten nehmen wir } H_0 \text{ an.}$$

- 2 Möglichkeiten: falls unter der Nullhypothese

1.  $P(15 \leq X \leq 20) > \alpha$ , dann nehmen wir die Nullhypothese an es spricht nichts gegen  $H_0$  auf Signifikanzniveau  $\alpha$

2.  $P(15 \leq X \leq 20) \leq \alpha$ , dann verwerfen wir  $H_0$  zugunsten von  $H_1$

- (2) Fehler 1. Art; verwerfen von  $H_0$ , obwohl  $H_0$ , obwohl  $H_0$  korrekt wäre  $\rightarrow$  Irrtumsw'keit  $P(15 \leq X \leq 20)$ .

- (1) Fehler 2. Art; verwerfen  $H_1$ , obwohl  $H_1$  korrekt ist  $\rightarrow$  Irrtumsw'keit  $\beta$  (Power)

## 1.14 Poissonverteilung

1. Gleichverteilung (fairer Wrfel)
2. Binomialverteilung
3. Poissonverteilung

**Idee:**  $p$  soll sehr klein sein.  $n$  soll sehr gross sein.

**Bsp:**  $X$  sei binomialverteilt und Parametern  $n, p$ .  $\Rightarrow \mathbb{E}(X) = n \cdot p$ .

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot p_n = \lambda \in \mathbb{R}, \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n}$

$X$  binomialverteilt:  $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k}, \xrightarrow{?} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$

Verteilung mit W'keitsfunktion  $\frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$  heisst Poissonverteilung.

Erwartungswert von  $X \tilde{Poi}(\lambda)$  ( $X$  ist Poisson-verteilung mit Parameter  $\lambda$ )

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot P(X = x) = \lambda$$

- Fr sehr kleine W'keiten. Mit bekanntem „Mittelwert“ (Erwartungswert)  $\lambda$ . Mit quasi unendlich (unbekannter) Anzahl gleicher Experimente.
- $P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$
- $\mathbb{E}(X) = \lambda$
- $\text{Var}(X) = \lambda$
- $X \tilde{Poi}(\lambda), Y \tilde{Poi}(\mu), Z = X + Y : Z \tilde{Poi}(\lambda + \mu)$

**Bsp:** Smartphonehersteller, Fehlerquote von 1, 5.000 Smartphones

Wie gross ist die W'keit, dass mind. 2 defekt sind.

Poissonapproximation:  $\lambda = 0.001 \cdot 5000 = 5$

$$P(X \geq 2) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 0)) = 1 - \left( \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} + \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} \right) = 1 - \left( \frac{5^1 e^{-5}}{1!} + \frac{5^0 e^{-5}}{0!} \right) = 1 - 6e^{-5} \approx 0.96$$

## 1.15 Statistische Tests

### 1.15.1 Prinzip des statistischen Tests

1. Nullhypothese  $H_0$  formulieren.

$$\text{Bsp: } \left. \begin{array}{l} H_0 : p = \frac{1}{6} \text{ bei einem Wrfel} \\ H_1 : p > \frac{1}{6} \text{ Alternativhypoth.} \end{array} \right\} H_1 \cap H_0 = \emptyset$$

2. Signifikanzniveau  $\alpha \in (0, 1)$
3. Stichprobe sammeln
4. Entscheid fllen: Berechne W'keit unter  $H_0$ , das wir einen Ausgang haben, wie die Stichprobe  
Ist sie grsser als  $\alpha \Rightarrow H_0$  annehmen  
Ist sie kleiner als  $\alpha \Rightarrow H_0$  zugunsten von  $H_1$  verwerfen

### 1.15.2 Beispiel

12'000 mal Wrfeln, 2'107 mal Sechs,  $\alpha = 10\%$

- $H_0 : p = \frac{1}{6}$  Nullhypothese
- $H_1 : p > \frac{1}{6}$  Alternativhypothese

$$\mathbb{E}(X) = np = 12000 \cdot \frac{1}{6} = 2000$$

Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit von  $P(2107 \leq X)$ . Wir bentigen Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace.  $\mu = np = 12000 \cdot \frac{1}{6} = 2000$  und  $\sigma^2 = np(1-p) = 12000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 1666\frac{2}{3}$ . Die Approximation ist erlaubt, da die Faustregel  $np(1-p) = 1666\frac{2}{3} > 9$  erfflt ist.

Nun erhalten wir mit der Tafel:

$$P(2107 \leq X) \approx 1 - \Phi\left(\frac{2107-2000}{\sqrt{1666\frac{2}{3}}}, 0, 1\right) = 1 - \Phi(2.621, 0, 1) = 1 - 0.9956 = 0.0044$$

Da  $\alpha < 0.0044$  ist verwerfen wir  $H_0$

### 1.15.3 Erwartungswert und Varianz

Auf dem Intervall  $I = ]-\infty, \infty[$   
Erwartungswert  $\mu = \mathbb{E}(X) = \int_{x_1}^{x_2} x f(x) dx$ , Varianz  $\sigma^2 = \int_{x_1}^{x_2} x^2 f(x) dx - \mu^2$

### 1.16 t-Verteilung

$$X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$T_{n-1} := \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}} \sqrt{n} \in \mathbb{R}^{\Omega^n} \text{ heisst t-verteilt mit } n-1 \text{ Freiheitsgraden}$$

$$t_{n-1} := \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - \mu}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \sqrt{n} \in \mathbb{R}$$

$$f_{n-1}(t) = c_{n-1} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \text{ fr } \lim_{n \rightarrow \infty} \rightarrow \varphi(t, 0, 1)$$

$$c_{n-1} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi(n-1)} \Gamma(\frac{n-1}{2})}, \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt. \text{ Gammafunktion.}$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x); \Gamma(1) = 1; \Gamma(5) = \Gamma(4+1) = 4\Gamma(4) = 4\Gamma(3+1) = 4 \cdot 3 \cdot \Gamma(3) = \dots = 5!$$

### 1.17 Parametertests

- 1-Stichprobentest  
 $H_0 : \mu = \bar{x} \quad X \sim W(\mu_1, \sigma_1^2) \quad H_1 : \mu \neq \bar{x} \quad Y \sim W(\mu_2, \sigma_2^2)$
- 2-Stichprobentest  
 $H_0 : \mu_1 \neq \mu_2$

Grundvorausage:

- Verteilungsfamilie bekannt  
(d.h.  $W(\cdot, \cdot)$ , t-verteilt, Weibull etz)
- Testen ob 1-Stichpr.fall  $H_0 : \vartheta = \hat{\vartheta}_n$  ( $\vartheta$ : fester Wert,  $\vartheta$ : empirisch)  
2-sTichpr.fall  $H_0 : \hat{\vartheta}_n = \hat{\vartheta}_m$

1. Verteilung von  $T_n$  (Teststatistik) unter  $H_0$  bekannt  $\Leftrightarrow$ : exakter Test.
2. Verteilung von  $T_n$  unter  $H_0$  unbekannt.

Nicht parametrische Tests (Verteilungsfreie Tests):

- 1./2. Stichprobentests existieren
- keine Verteilungsparameter

1. Stichprobentest  $H_0 : \hat{F}_n(x) = F_0(x)$
2. Stichprobentest  $H_0 : \hat{F}_n(x) = \hat{G}_m(x)$   
 $\bar{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}\{x_i \leq x\}$

### 1.18 Konfidenz/Vertrauensintervall

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Experiment  $n$ -mal durchföhren.  $\Rightarrow X = \{x_1, \dots, x_n\}$

Theoretisch  $\mathbb{E}(X) = \mu$

Empirisch:  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  als Schtzung von  $\mu$

Wie gut ist die Schtzung? Vorgabe:  $\gamma \in [0, 1]$

$[\mu - \Delta x, \mu + \Delta x] \ni \bar{x}$  Finde  $\Delta x$ , so dass  $\mathbb{P}(\bar{x} \in [\mu - \Delta x, \mu + \Delta x]) = \gamma$ .

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, t_{n-1} = \frac{\bar{x} - \mu}{s} \text{ (t-verteilt (exakt) fr ZV.)}$

$\mathbb{P}(\bar{x} \in [\mu - \Delta x, \mu + \Delta x]) = \gamma = 1 - \alpha$

**Beispiel:**  $n = 10$  Stichproben  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$

$\bar{x} = 5, s = 0.2$  Vertrauensintervall  $=?$  bei Vertrauensw'keit von  $\gamma = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05; 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.025 =$

0.975

$\Rightarrow \Delta x = \frac{t_{10-1,0.975}}{\sqrt{10}} \cdot 0.2$  Tabelle betrachten Seite 140 ergibt mit Freiheitsgrad  $= n-1 = 9$ .  $t_{9,0.975} = 2.262$ .

$\Rightarrow \Delta x = \frac{2.262}{\sqrt{10}} \cdot 0.2 \approx 0.14$

Vertrauensintervall  $[4.86, 5.14]$ . mit W'keit von 95% liegt  $\mu$  in  $[5 - \Delta x, 5 + \Delta x]$

### Allgemein

Feste Vertrauensw'keit  $\gamma = 0.95$

$s$  konstant

Stichproben  $n$ :  $\Delta x = \frac{t_{N-1,0.975}}{\sqrt{N}} s (n \rightarrow \infty) = 0$

$t_{n,0.975} \leq t_{n-1,0.975} \leq 2.262$  fr  $n \geq 10$

### Beispiel:

$$t = \frac{\overbrace{\bar{x} - \mu}^{\Delta \mu}}{s} \sqrt{s}$$

Festes  $\gamma$ , und  $\Delta \mu$ . Wie gross  $n$  wählen?

$$\frac{t \cdot s}{\bar{x} - \mu} = \sqrt{n} \Rightarrow \frac{t^2 \cdot s^2}{(\Delta x)^2} \leq n$$

- Vorgehen: - Vertrauensintervallgrösse  $\Delta \mu$ , - Vertrauensw'keit  $\gamma$  ( $\rightarrow$  fliesst in  $t$  ein)

$t = t_{n-1, 1-\frac{1-\gamma}{2}}$  Quantifunktion der t-Verteilung.

- Abschätzung:  $t \approx 2$  (oder  $t = 3$ ). Daumenregel:  $\frac{4 \cdot s^2}{(\Delta \mu)^2} \geq N$  ( $s^2$  ist geschätzt)

### 1.18.1 2-Stichproben t-Test

Annahme: • Normalverteilung, • 2 Gruppen

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ ,  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

2 Fälle: a) unbekannte, aber gleiche Varianz d.h.  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$  (Homoskedastisch) exakter Test

b) unbekannte, evtl. ungleiche Varianzen,  $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$  (Heteroskedastisch) approximation

### 1.18.2 Homoskedastischer Fall

Zwei Stichproben:  $X = \{x_1, \dots, x_n\} \sim W(\mu, \sigma^2)$ ;  $Y = \{y_1, \dots, y_n\} \sim W(\mu_2, \sigma^2)$

$\mu_1, \mu_2, \sigma^2$  sind unbekannt.

Testen, ob  $\mu_1 = \mu_2$  auf Signifikanzniveau  $\alpha$  (2-seitiger Test, d.h.  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$  gegen  $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ )

Testgrösse:  $t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s} \sqrt{\frac{n \cdot m}{n+m}}$ . t-verteilt mit  $n+m-2$  Freiheitsgraden

$$\bar{s}_1 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, m-1 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2$$

$$s = \frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \sum_{i=1}^m (y_i - \bar{y})^2}{n+m-2}$$

Signifikanzniveau  $\alpha$ : Ist  $|t| < t_{n+m-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0$  annehmen. Ist  $|t| \geq t_{n+m-2, 1-\frac{\alpha}{2}} \Rightarrow H_0$  ablehnen.

## 2 Beispiele:

**Aufgabe 3.5.8.** Auf wie viele Arten können die Buchstaben des Wortes Pfeffer permutiert werden?  
 $\frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$

**Aufgabe 3.5.10.** Eine Klasse hat 15 Fussballspieler, einer davon heisst Klaus. Auf wie viele Arten kann eine Mannschaft von 11 Spielern a. Mit Klaus, b. ohne Klaus zusammengestellt werden. a.  $\binom{14}{10}$ , b.  $\binom{14}{11}$

**Aufgabe 3.5.14.** Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 36 Jasskarten auf vier Spieler A, B, C, D zu verteilen?  $\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{9}{9}$

**Aufgabe 4.1.3** von 10 Nssen sind 3 verdorben. Wahrscheinlichkeit, dass 2 gute Nsse genommen werden,

$$m = \binom{10}{2}, g = \binom{7}{2} \Rightarrow p = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} \cdot \frac{7}{15}$$

**Aufgabe 4.1.12** 10 Lose 2 Gewinnlose mit 5x herausziehen genau 1 Gewinnlos  $\Rightarrow m = 8, n = 2, k =$

$$5, s = 1 \Rightarrow \frac{\binom{8}{4} \binom{2}{1}}{\binom{10}{5}}$$

**Aufgabe 4.1.13** Es liegen  $m+n$  Lose vor, unter denen  $n$  Gewinnlose sind. Es werden  $k$  Lose auf einmal gezogen. Bestimmen Sie die W'keit dafür, dass sich unter den  $k$  Losen genau  $s$  Gewinnlose befinden.

Es gibt  $m = \binom{m+n}{k}$  mögliche Ausfälle und genau  $g = \binom{m}{k-s} \binom{n}{s}$  Möglichkeiten für  $s$  Gewinnlose. Dabei zählt der Faktor  $\binom{m}{k-s}$  die Möglichkeiten,  $k-s$  Nieten zu haben und der Faktor  $\binom{n}{s}$  zählt die Möglichkeiten,



$s$  Treffer zu haben. Damit folgt  $p(s) = \frac{\binom{m}{k-s}\binom{n}{s}}{\binom{m+n}{k}}$ .

**Bsp:** Wurfel für sechs  $p = \frac{1}{6}, p > \frac{1}{6}$  a) 2x 6 in 3 Würfeln b) 3x 6 in 5 Würfeln

$H_0 : p = \frac{1}{6}$  mit  $\alpha = 5\%$  also gilt: a)  $P(2 \leq X \leq 3) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0 = 0.074 > \alpha \Rightarrow H_0$  angenommen; b)  $P(3 \leq X \leq 5) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^0 = 0.035 < \alpha \Rightarrow H_0$  nicht angenommen;