Wahrscheinlichkeiten und Statistik

Jan Fässler

5. Semester (HS 2013)

If you use this documentation for a exam, you should offer a beer to the authors!

Inhaltsverzeichnis

1 Lapdance & Kombinatorik **1**

1.1 Zufallsexperimente & Wahrscheinlichkeiten . . . 1

1.2 Laplace-Experiment . . . 1

1.3 Kombinatorik . . . 2

1.3.1 Produkte . . . 2

1.3.2 Summen . . . 2

1.3.3 Fakultät . . . 2

1.3.4 Binominalkoeffizient . . . 2

1.4 Urnenmodel . . . 2

2 Allgemeine Wahrscheinlichkeiten **4**

2.1 Einleitung . . . 4

2.2 bedingte Wahrscheinlichkeit . . . 4

2.3 stochastische Unabhängigkeit . . . 5

2.4 Mehrstufige Zufallsexperimente . . . 5

3 diskrete Zufallsvariablen **6**

3.1 Zufallsvariablen . . . 6

3.2 Verteilungsfunktion . . . 6

3.3 Erwartungswert . . . 6

3.4 Varianz und Standardabweichung . . . 6

4 diskrete Verteilung **8**

4.1 Bernoulli-Verteilung . . . 8

4.2 Binomial-Verteilung . . . 8

4.3 geometirsche-Verteilung . . . 8

4.4 Poisson-Verteilung . . . 9

4.5 Eigenschaften . . . 9

1 Lapdance & Kombinatorik

1.1 Zufallsexperimente & Wahrscheinlichkeiten

Def. 1 (*Zufallsexperiment*)

Ein Experiment, welches beliebig oft wiederholt werden kann und bei jeder Durchführung ein Ergebnis aus einer bestimmten Menge von möglichen Ergebnissen annimmt.

Def. 2 (*Ergebnismenge* Ω)

Ein Experiment, welches beliebig oft wiederholt werden Mögliche Ergebnisse eines Zufallsexperiments.

Def. 3 (*Ergebnis*)

Aussage, die bei der Durchführung des Experimentes entweder wahr oder falsch ist, je nachdem welches Ergebnis eingetreten ist.

Jedes Ereignis kann als Teilmenge von Ergebnissen interpretiert werden.

Die einzelnen Ergebnisse selber können ebenfalls als Ereignisse betrachtet werden:
Zu einem Ergebnis $\omega \in \Omega$ gehört das sogenannte **Elementarereignis** $E = \{\Omega\}$.

Beispiel: Wurf eines Würfels
Ergebnismenge: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Beispiel für ein Ereignis:
E : ¨Die augenzahl ist gerade¨
$E = \{2, 4, 6\}$

Def. 4 (*Wahrscheinlichkeit*)

Mass für die relative Häufigkeit mit der das Ereignis bei wiederholten Durchführung des Experimentes eintritt.

1.2 Laplace-Experiment

Def. 5 (*Laplace-Experiment*)

Ein Zufallsexperiment mit n verschiedenen möglichen Ergebnissen, die alle dieselbe Wahrscheinlichkeit, alse $\frac{1}{n}$ haben.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $E \subseteq \Omega$ wird für diesen Fall folgendermassen definiert:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl günstige Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller Ergebnisse}} \tag{1.1}$$

Dieses mathematische Modell für ein Laplace-Experiment, bestehend aus der Menge Ω mit der Funktion P nennt man einen **Laplace-Raum**. Dieses P heisst auch **Gleichverteilung**.

Beispiel: Wurf eines Würfels
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für eineAugenzahl grösser als 4?
$E = \{5, 6\}$

$P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 33.33\%$

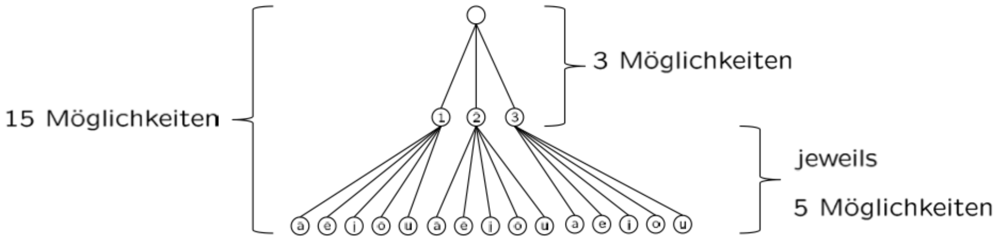
Im Laplace-Raum sind für Mengen M die Anzahl der Elemente, $|M|$, zu bestimmen. Die **Kombinatorik** liefert systematische Abzählverfahren.

1.3 Kombinatorik

1.3.1 Produkte

Def. 6 (*Produktregel*)

Wenn es bei einem mehrstufigen Auswahlprozess für das 1. Objekt n_1 Möglichkeiten, für das 2. Objekt n_2 Möglichkeiten, ..., und für das k-te Objekt n_k Möglichkeiten gibt, dann gibt es für den gesamten Auswahlprozess $n_1 * n_2 * \cdots * n_k$ Möglichkeiten.



1.3.2 Summen

Def. 7 (*Summenregel*)

Wenn es n_1 Objekte mit Eigenschaft 1, n_2 Objekte mit Eigenschaft 2, ..., n_k Objekte mit Eigenschaft k gibt, und kein Objekt zwei der Eigenschaften gleichzeitig besitzt, dann gibt es insgesamt $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ Objekte die eine der Eigenschaft besitzen.

Beispiel: Eine Meitwagenfirma hat 5 Kleinwagen, 3 Mittelklassewagen und 2 Oberklassewagen. Da kein Auto in mehreren Kategorien sein kann, hat die Firma insgesamt $5 + 3 + 2 = 10$ Wagen.

1.3.3 Fakultät

Wir ziehen n mal ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge aus einer Urne mit n Kugeln. Dan gibt es $n * (n-1) * \ldots * 2 * 1$ Möglichkeiten.

Def. 8 (*Fakultät*)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann Heisst $n! = n * (n-1) * \ldots * 2 * 1$ Fakultät von n. Zudem ist $0! := 1$.

Es gilt $n! \sim \sqrt{2 * \pi * n} * (\frac{n}{e})^n$

1.3.4 Binominalkoeffizient

Wir ziehen k mal aus einer Menge von n Zahlen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge. Es gibt also $\frac{n!}{(n-k)! * k!}$ Möglichkeiten.

Def. 9 (*Binominalkoeffizient*)

Es sei $0 \leq k \leq n$.
Dann ist der Binominalkoeffizient $\binom{n}{k}$ definiert als $\frac{n!}{(n-k)! * k!}$.
Für $k > n$ ist $\binom{n}{k} := 0$.

$\binom{n}{k}$ gibt also die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an.

1.4 Urnenmodel

Viele Abzählprobleme lassen sich auf das sogenannte Urnenmodell zurückführen. Gegeben ist eine Urne mit n unterschiedlichen Kugeln. Wir ziehen k Kugeln aus den n Kugeln. Auf wieviele Arten geht diesm wenn unterschieden wird nach „Zurücklegen" oder „nicht zurücklegen" und „geordnet" oder „keine Reihenfolge"?

k: Anzahl Ziehungen

n: Anzahl Elemente

	zurücklegen	nicht zurücklegen
geordnet	n^k	$n!$ oder $\frac{n!}{(n-k)!}$
ungeordnet	$\binom{k+n-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

2 Allgemeine Wahrscheinlichkeiten

2.1 Einleitung

Def. 10 (*Wahrscheinlichkeit*)

Eien Wahrscheinlichkeit $P : 2^{\Omega} \to [0, 1]$ erfüllt:
(1) $P(\Omega) = 1$
(2) *Für endlich oder abzählbar viele parweise disjunktive Ereignisse $E_1, E_2, E_3, \dots$ gilt:*
$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \dots$

Satz 1

Es sei P eine Wahrscheinlichkeit auf Ω. Dan gilt:
(1) $\forall E \subseteq \Omega : P(E^c) = 1 - O(E)$
(2) $P(0) = 0$
(3) $\forall E_1, E_2 \subseteq \Omega : P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
(4) *Für eine endliche oder abzählbare Menge $E = \{e_1, e_2, \dots\}$ gilt $P(E) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \dots$*

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung P durch die Angabe der Wahrscheinlichkeiten ist für die Elementarereignisse festgelegt, falls Ω endlich oder abzählbar ist.

Def. 11 (*Zähldichte (Z-Dichte)*)

Die Funktion $f_P : \Omega \to [0, 1]$ mit $f_P(w) = P(\{w\})$ heisst Zähldichte von P.

In diesem Fall gilt also $P(E) = \sum_{e \in E} f_P(e)$, insbesondere $P(E) = \sum_{e \in \Omega} f_P(e) = 1$

2.2 bedingte Wahrscheinlichkeit

Würfeln mit einem normalen Würfel: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P =$ Gleichverteilung. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für $A = \{2, 3\}$, wenn ich weiss, dass eine ungerade Zahl gewürfelt worden ist?
Es verbleibt noch die eingeschränkte Ergebnismenge $B = \{1, 3, 5\}$.
Es sind also nur noch $|B| = 3$ Ergebnisse möglich.
Davon sind $|A \cap B| = 1$ Ergebnisse günstig.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit $\frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{1}{3}$.

Def. 12 (*bedingte Wahrscheinlichkeit*)

Es sei Ω eine nichtleere endliche Menge und P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω. Ferner sei $B \subseteq \Omega$ mit $P(B) > 0$.
Dann heisst $P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (elementare) bedingte Wahrscheibnlichkeit von A unter B.

Def. 13 (*Formel von Bayes*)

Es sei Ω eine nichtleere endliche Menge und P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω. Ferner seien $A, B \subseteq \Omega$ mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$.
Dann gilt $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} * P(B|A)$.

Def. 14 (*totele Wahrscheinlichkeit*)

Es sei Ω eine nichtleere endliche Menge und P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω. Ferner seien $B_i (i \in I)$ eine Zerlegung von Ω (d.h. die B_i sind paarweise disjunkt und $\Omega = U_{i \in I} B_i$) mit $P(B_i) > 0$.
Dann gilt $P(A) = \sum_{i \in I} P(A|B_i) * P(B_i)$

Def. 15 (*positive prädiktive Wert*)

Für $0 < P(A) < 1$ gilt mit $\Omega = A \cup A^c$ insbesondere:
$P(A|B) = \frac{P(A) * P(A|B)}{P(B|A) * P(A) + P(B|A^c) * P(A^c)}$

2.3 stochastische Unabhängigkeit

Def. 16 (*stochastisch unabhängig*)

Es sei P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω.
Zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ heissen stochastisch unabhängig, falls $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$.
Im Falle $P(B) \neq 0$ ist dies äquivalent zu $\underbrace{P(A|B)}_{\frac{P(A\cap B)}{P(B)}} = P(A)$.

2.4 Mehrstufige Zufallsexperimente

Ein n-stufiger Versuch mit Ergebnismenge Ω_i für den i-ten Versuch wird meist wie folgt modelliert:

(1) Man legt die Dichte $f_1(\omega_1)$ auf Ω_1 für den ersten Versuch fest.

(2) Man legt die Dichte $f_2(\omega_2|\omega_1)$ auf Ω_2 für den zweiten Versuch in Abhängigkeit vom Ergebnis ω_1 des ersten Versuchs fest.

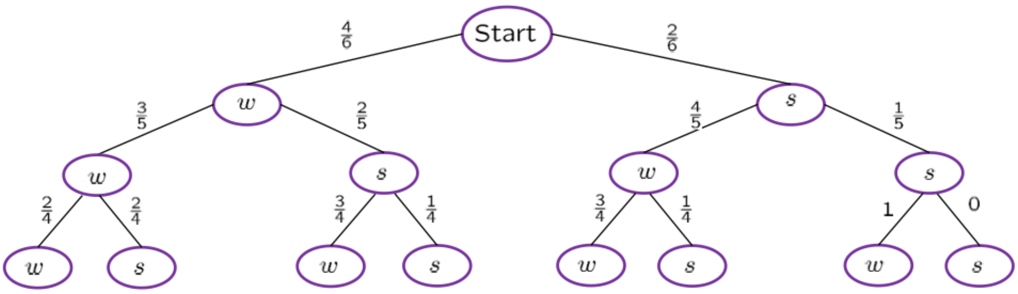
(3) Man legt die Dichte $f_3(\omega_3|\omega_1, \omega_1)$ auf Ω_3 für den dritten Versuch in Abhängigkeit der Ergebnisse (ω_1, ω_2) der ersten beiden Versuche fest.

...

(n) Man legt die Dichte $f_n(\omega_n|\omega_1,, \ldots, \omega_{n-1})$ auf Ω_n für den n-ten Versuch in Abhängigkeit der Ergebnisse $(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$ der ersten n Versuche fest.

(n+1) Die resultierende Dichte auf Ω_1 x Ω_2 x ... x Ω_n ist dann $f(\omega_1, \ldots, \omega_n) = f_1(\omega_1) * f_2(\omega_2|\omega_1) * \ldots * f_n(\omega_n|\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$.

Wenn die Versuche nicht voneinander abhängen, dann modelliert man die Versuche einzeln, mit Dichten $f_i(\omega_i)$ auf Ω_i, und erhält als resultierende Dichte $f(\omega_1, \ldots, \omega_n) = f1(\omega_1) * \ldots * f_n(\omega_n)$.



3 diskrete Zufallsvariablen

3.1 Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable ist eine normale mathematische Funktion. Da bei jeder Durchführung des Zufallsexperiments ein zufälliges Ergebnis ω eintritt, ist auch der zugehörige Wert $X(\omega)$ nicht vorhersagbar.

Def. 17 (***Zufallsvariable***)

Eine Zufallsvariable X über Ω ist eine Abbildung ovn Ω in einere Menge X. Im Folgenden wird stehts $X \subseteq \mathbb{R}$ sein. Dan sagt man auch reellwertige Zufallsvariable.

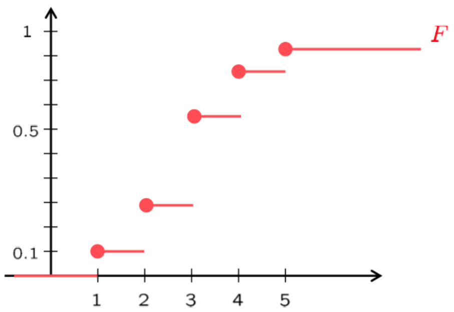
X induziert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P^X auf X durch $P^X(A) = P(X^{-1}(A))$, wobei $X^{-1}(A)$ das Urbild von A bezeichnet.
P^X heisst Verteilung von X oder bildmass von X unter P.

3.2 Verteilungsfunktion

Def. 18 (***Verteilungsfunktion***)

Es sei $X : \Omega \to X$ eine Zufallsvariable, wobei $X \in \mathbb{R}$ eine endliche oder abzählbare Menge ist. Zudem sei f die Zähldichte von X.
Dann heisst $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \in X : t \leq x} f(t)$ Verteilungsfunktion von X.

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1



3.3 Erwartungswert

Def. 19 (***Erwartungswert***)

Es sei $X : \Omega \to X$ eine Zufallsvariable, wobei $X \subset \mathbb{R}$ eine endliche oder abzählbare Menge ist. Zudem sei f die Zähldichte von X.
Dann heisst $E(X) = \sum_{x \in X} x * f(x) = \sum_{x \in X} x * P(X = x)$ Erwartungswert von X.

3.4 Varianz und Standardabweichung

Def. 20 (***Varianz***)

Es sei $X : \Omega \to X$ eine Zufallsvariable, wobei $X \subset \mathbb{R}$ eine endliche oder abzählbare Menge ist. Zudem sei f die Zähldichte von X und μ der Erwartungswert von X.
Dann heisst $V(X) = \sum_{x \in X} (x - \mu)^2 * f(x) = \sum_{x \in X} (x - \mu)^2 * P(X = x)$ Varianz von X.

Durch das Quadrieren heben sich Abweichung nach unten und nach oben nicht auf, zudem werden grössere Abweichungen stärker gewichtet.

Def. 21 (*Standardabweichung*)

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ heisst Standardabweichung von X.

Die Varianz und die Standardabweichung sind MAsse für die Streuung der Zufallsvariable um den Erwartungswert.
Zur Berechnung der Varianz ist es manchmal einfacher, folgende Formel zu verwenden:

Satz 2

*Es sei $X : \Omega \to X$ eine Zufallsvariable, wobei $X \subset \mathbb{R}$ eine endliche oder abzählbare Menge ist.
Dan gilt $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.*

4 diskrete Verteilung

Alle Ereignisse gleich wahrscheinlich	Laplace
Treffer(WKp), nciht Treffer	$B(p)$
Anzahl Treffer (WKp) in n unabhängigen Versuchen	$Bin(n, p)$
Versuche bis erster Treffer (WKp) in unabhängigen Versuchen	$Geo(p)$
Verteilung für seltene Ereignisse mit im Schnitt λ Ereignissen pro Zeit/Ort-Einheit	$Poi(\lambda)$

4.1 Bernoulli-Verteilung

Def. 22 (*Bernoulli-Verteilung*)

Die Verteilung einer Zufallsvariable X, die nur zwei Werte 0 (Treffer) oder 1 (kein Treffer) annehmen kann, wobei p die Wahrscheinlichkeit für 1 bezeichent, heisst Bernoulli-verteilt mit Parameter p.

Schreibweise: $X \sim B(p)$
Dichte von $X : f(0) = 1 - p$, $f(1) = p$

$E(X) = p$
$V(X) = p * (1 - p)$

4.2 Binomial-Verteilung

Def. 23 (*Binomial-Verteilung*)

Die Verteilung einer Zufallsvariable X, die die Anzahl an Treffern bei der n-maligen unabhängigen Durchführung eines Experiments mit zwei Ausgängen, Treffer oder kein Treffer, wobei p die Wahrscheinlichkeit für Treffer bezeichnet, heisst Binomial-verteilt mit Parametern n, p.

Schreibweise: $X \sim Bin(n, p)$
Dichte von $X : f(k) = \binom{n}{k} * p^k * (1 - p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$

$E(X) = n * p$
$V(X) = n * p * (1 - p)$

4.3 geometirsche-Verteilung

Def. 24 (*geometischre-Verteilung*)

Die Verteilung einer Zufallsvariable X, die die Anzahl der Versuche bis zum ersten Treffer bei der n-maligen unabhängigen Durchführung eines Experiments mit zwei Ausgängen, Treffer und kein Treffer, wobei p die Wahrscheinlichkeit für Treffer bezeichnet, heisst geometrisch verteilt mit Parameter p.

Schreibweise: $X \sim Geo(n, p)$
Dichte von $X : f(k) = (1 - p)^{k-1} * p$, $k = 0, 1, \ldots, n$
$X = k$ bedeutet, dass die ersten $k - 1$ Versuche jeweils kein Treffer waren. und der k-te Versuch ein Treffer war.
$E(X) = \frac{1}{p}$
$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

4.4 Poisson-Verteilung

Def. 25 (*Poisson-Verteilung*)

Die Poisson-Verteilung kommt bei Zufallsvariablen zum Einsatz, welche die Anzahl Ereignisse einer bestimmten Art in einer Zeit- und/oder Ort-Intervall beschreiben. Falls im Mittel λ-Ereignisse auftreten, dann ist X Poisson verteilt mit Parameter λ.

Schreibweise: $X \sim Poi(\lambda)$
Dichte von $X : f(k) = \frac{\lambda^k}{k!} * e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, \ldots, n$
$X = k$ bedeutet, dass die ersten $k - 1$ Versuche jeweils kein Treffer waren. und der k-te Versuch ein Treffer war.
$E(X) = \lambda$
$V(X) = \lambda$

4.5 Eigenschaften

Satz 3

Es seien X, Y Zufallsvariablen und $a, c \in \mathbb{R}$. Dan gilt:

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(a * X) = a * E(X)$
- $E(X + c) = E(X) + c$
- $V(X + c) = V(X)$
- $V(a * X) = a^2 * V(X)$
- $E(g(X)) = \sum_x g(x) * P(X = x)$ *für alle Funktionen g:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $E(g(X)) \neq g(E(X))$.