Wahrscheinlichkeiten und Statistik

Jan Fässler

5. Semester (HS 2013)

If you use this documentation for a exam, you should offer a beer to the authors!

Inhaltsverzeichnis

1 Lapdance & Kombinatorik

1.1 Zufallsexperimente & Wahrscheinlichkeiten

Def. 1 (***Zufallsexperiment***)

Ein Experiment, welches beliebig oft wiederholt werden kann und bei jeder Durchführung ein Ergebnis aus einer bestimmten Menge von möglichen Ergebnissen annimmt.

Def. 2 (***Ergebnismenge*** Ω)

Ein Experiment, welches beliebig oft wiederholt werden Mögliche Ergebnisse eines Zufallsexperiments.

Def. 3 (***Ergebnis***)

Aussage, die bei der Durchführung des Experimentes entweder wahr oder falsch ist, je nachdem welches Ergebnis eingetreten ist.

Def. 4 (***Wahrscheinlichkeit***)

Mass für die relative Häufigkeit mit der das Ereignis bei wiederholten Durchführung des Experimentes eintritt.

Jedes Ereignis kann als Teilmenge von Ergebnissen interpretiert werden.

Die einzelnen Ergebnisse selber können ebenfalls als Ereignisse betrachtet werden:
Zu einem Ergebnis $\omega \in \Omega$ gehört das sogenannte **Elementarereignis** $E = \{\Omega\}$.

1.2 Laplace-Experiment

Def. 5 (***Laplace-Experiment***)

Ein Zufallsexperiment mit n verschiedenen möglichen Ergebnissen, die alle dieselbe Wahrscheinlichkeit, alse $\frac{1}{n}$ haben.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $E \subseteq \Omega$ wird für diesen Fall folgendermassen definiert:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl günstige Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller Ergebnisse}} \tag{1.1}$$

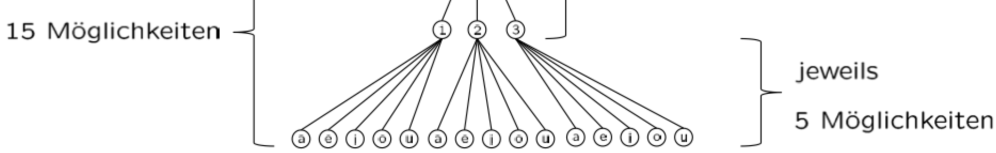
Dieses mathematische Modell für ein Laplace-Experiment, bestehend aus der Menge Ω mit der Funktion P nennt man einen **Laplace-Raum**. Dieses P heisst auch **Gleichverteilung**.

1.3 Kombinatorik

1.3.1 Produkte

Def. 6 (***Produktregel***)

Wenn es bei einem mehrstufigen Auswahlprozess für das 1. Objekt n_1 Möglichkeiten, für das 2. Objekt n_2 Möglichkeiten, ..., und für das k-te Objekt n_k Möglichkeiten gibt, dann gibt es für den gesamten Auswahlprozess $n_1 * n_2 * \cdots * n_k$ Möglichkeiten.



1.3.2 Summen

Def. 7 (*Summenregel*)

Wenn es n_1 Objekte mit Eigenschaft 1, n_2 Objekte mit Eigenschaft 2, $\ldots$, n_k Objekte mit Eigenschaft k gibt, und kein Objekt zwei der Eigenschaften gleichzeitig besitzt, dann gibt es insgesamt $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ Objekte die eine der Eigenschaft besitzen.

Beispiel: Eine Meitwagenfirma hat 5 Kleinwagen, 3 Mittelklassewagen und 2 Oberklassewagen. Da kein Auto in mehreren Kategorien sein kann, hat die Firma insgesamt $5 + 3 + 2 = 10$ Wagen.

1.3.3 Fakultät

Wir ziehen n mal ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge aus einer Urne mit n Kugeln. Dan gibt es $n * (n-1) * \ldots * 2 * 1$ Möglichkeiten.

Def. 8 (*Fakultät*)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Dann Heisst $n! = n * (n-1) * \ldots * 2 * 1$ Fakultät von n. Zudem ist $0! := 1$.

Es gilt $n! \sim \sqrt{2 * \pi * n} * (\frac{n}{e})^n$

1.3.4 Binominalkoeffizient

Wir ziehen k mal aus einer Menge von n Zahlen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge. Es gibt also $\frac{n!}{(n-k)! * k!}$ Möglichkeiten.

Def. 9 (*Binominalkoeffizient*)

Es sei $0 \leq k \leq n$.
Dann ist der Binominalkoeffizient $\binom{n}{k}$ definiert als $\frac{n!}{(n-k)! * k!}$.
Für $k > n$ ist $\binom{n}{k} := 0$.

$\binom{n}{k}$ gibt also die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an.

1.4 Urnenmodel

Viele Abzählprobleme lassen sich auf das sogenannte Urnenmodell zurückführen. Gegeben ist eine Urne mit n unterschiedlichen Kugeln. Wir ziehen k Kugeln aus den n Kugeln. Auf wieviele Arten geht diesm wenn unterschieden wird nach „Zurücklegen“ oder „nicht zurücklegen“ und „geordnet“ oder „keine Reihenfolge“?

k: Anzahl Ziehungen

n: Anzahl Elemente

	zurücklegen	nicht zurücklegen
geordnet	n^k	$n!$ oder $\frac{n!}{(n-k)!}$
ungeordnet	$\binom{k+n-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

2 Allgemeine Wahrscheinlichkeiten

2.1 Einleitung

Def. 10 (*Wahrscheinlichkeit*)

Eien Wahrscheinlichkeit $P : 2^\Omega \to [0,1]$ erfüllt:
(1) $P(\Omega) = 1$
(2) *Für endlich oder abzählbar viele parweise disjunktive Ereignisse $E_1, E_2, E_3, \ldots$ gilt:*
$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots$

Satz 1

Es sei P eine Wahrscheinlichkeit auf Ω. Dan gilt:
(1) $\forall E \subseteq \Omega : P(E^c) = 1 - O(E)$
(2) $P(0) = 0$
(3) $\forall E_1, E_2 \subseteq \Omega : P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
(4) *Für eine endliche oder abzählbare Menge $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$ gilt $P(E) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \ldots$*

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung P durch die Angabe der Wahrscheinlichkeiten ist für die Elementarereignisse festgelegt, falls Ω endlich oder abzählbar ist.

Def. 11 (*Zähldichte (Z-Dichte)*)

Die Funktion $f_P : \Omega \to [0,1]$ mit $f_P(w) = P(\{w\})$ heisst Zähldichte von P.

In diesem Fall gilt also $P(E) = \sum_{e \in E} f_P(e)$, insbesondere $P(E) = \sum_{e \in \Omega} f_P(e) = 1$

2.2 bedingte Wahrscheinlichkeit

Würfeln mit einem normalen Würfel: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $P =$ Gleichverteilung. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für $A = \{2,3\}$, wenn ich weiss, dass eine ungerade Zahl gewürfelt worden ist?
Es verbleibt noch die eingeschränkte Ergebnismenge $B = \{1,3,5\}$.
Es sind also nur noch $|B| = 3$ Ergebnisse möglich.
Davon sind $|A \cap B| = 1$ Ergebnisse günstig.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit $\frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{1}{3}$.

Def. 12 (*bedingte Wahrscheinlichkeit*)

Es sei Ω eine nichtleere endliche Menge und P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω. Ferner sei $B \subseteq \Omega$ mit $P(B) > 0$.
Dann heisst $P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ (elementare) bedingte Wahrscheibnlichkeit von A unter B.

Def. 13 (*Formel von Bayes*)

Es sei Ω eine nichtleere endliche Menge und P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω. Ferner seien $A, B \subseteq \Omega$ mit $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$.
Dann gilt $P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} * P(B|A)$.

Def. 14 (*totele Wahrscheinlichkeit*)

Es sei Ω eine nichtleere endliche Menge und P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω. Ferner seien $B_i (i \in I)$ eine Zerlegung von Ω (d.h. die B_i sind paarweise disjunkt und $\Omega = U_{i \in I} B_i$) mit $P(B_i) > 0$.
Dann gilt $P(A) = \sum_{i \in I} P(A|B_i) * P(B_i)$

Def. 15 (*positive prädiktive Wert*)

Für $0 < P(A) < 1$ gilt mit $\Omega = A \cup A^c$ insbesondere:
$P(A|B) = \frac{P(A) * P(A|B)}{P(B|A) * P(A) + P(B|A^c) * P(A^c)}$

2.3 stochastische Unabhängigkeit

Def. 16 (***stochastisch unabhängig***)

Es sei P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf Ω.
Zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ heissen stochastisch unabhängig, falls $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$.
Im Falle $P(B) \neq 0$ ist dies äquivalent zu $\underbrace{P(A|B)}_{\frac{P(A\cap B)}{P(B)}} = P(A)$.

2.4 Mehrstufige Zufallsexperimente

Ein n-stufiger Versuch mit Ergebnismenge Ω_i für den i-ten Versuch wird meist wie folgt modelliert:

(1) Man legt die Dichte $f_1(\omega_1)$ auf Ω_1 für den ersten Versuch fest.

(2) Man legt die Dichte $f_2(\omega_2|\omega_1)$ auf Ω_2 für den zweiten Versuch in Abhängigkeit vom Ergebnis ω_1 des ersten Versuchs fest.

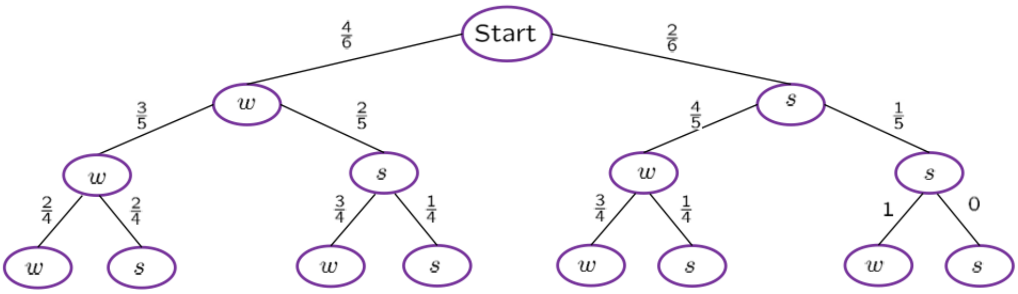
(3) Man legt die Dichte $f_3(\omega_3|\omega_1, \omega_1)$ auf Ω_3 für den dritten Versuch in Abhängigkeit der Ergebnisse (ω_1, ω_2) der ersten beiden Versuche fest.

...

(n) Man legt die Dichte $f_n(\omega_n|\omega_1,, \dots,\omega_{n-1})$ auf Ω_n für den n-ten Versuch in Abhängigkeit der Ergebnisse $(\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$ der ersten n Versuche fest.

(n+1) Die resultierende Dichte auf Ω_1 x Ω_2 x ... x Ω_n ist dann $f(\omega_1, \dots, \omega_n) = f_1(\omega_1) * f_2(\omega_2|\omega_1) * \dots * f_n(\omega_n|\omega_1, \dots, \omega_{n-1})$.

Wenn die Versuche nicht voneinander abhängen, dann modelliert man die Versuche einzeln, mit Dichten $f_i(\omega_i)$ auf Ω_i, und erhält als resultierende Dichte $f(\omega_1, \dots, \omega_n) = f1(\omega_1) * \dots * f_n(\omega_n)$.



3 diskrete Zufallsvariablen

3.1 Zufallsvariablen

Eine Zufallsvariable ist eine normale mathematische Funktion. Da bei jeder Durchführung des Zufallsexperiments ein zufälliges Ergebnis ω eintritt, ist auch der zugehörige Wert $X(\omega)$ nicht vorhersagbar.

Def. 17 (***Zufallsvariable***)

Eine Zufallsvariable X über Ω ist eine Abbildung ovn Ω in einere Menge X. Im Folgenden wird stehts $X \subseteq \mathbb{R}$ sein. Dan sagt man auch reellwertige Zufallsvariable.

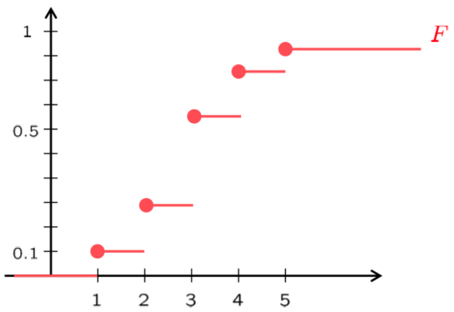
X induziert eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P^X auf X durch $P^X(A) = P(X^{-1}(A))$, wobei $X^{-1}(A)$ das Urbild von A bezeichnet.
P^X heisst Verteilung von X oder bildmass von X unter P.

3.2 Verteilungsfunktion

Def. 18 (***Verteilungsfunktion***)

Es sei $X : \Omega \to X$ eine Zufallsvariable, wobei $X \in \mathbb{R}$ eine endliche oder abzählbare Menge ist. Zudem sei f die Zähldichte von X.
Dann heisst $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \in X: t \leq x} f(t)$ Verteilungsfunktion von X.

x_i	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1



3.3 Erwartungswert

Def. 19 (***Erwartungswert***)

Es sei $X : \Omega \to X$ eine Zufallsvariable, wobei $X \subset \mathbb{R}$ eine endliche oder abzählbare Menge ist. Zudem sei f die Zähldichte von X.
Dann heisst $E(X) = \sum_{x \in X} x * f(x) = \sum_{x \in X} x * P(X = x)$ Erwartungswert von X.

3.4 Varianz und Standardabweichung

Def. 20 (***Varianz***)

Es sei $X : \Omega \to X$ eine Zufallsvariable, wobei $X \subset \mathbb{R}$ eine endliche oder abzählbare Menge ist. Zudem sei f die Zähldichte von X und μ der Erwartungswert von X.
Dann heisst $V(X) = \sum_{x \in X} (x - \mu)^2 * f(x) = \sum_{x \in X} (x - \mu)^2 * P(X = x)$ Varianz von X.

Durch das Quadrieren heben sich Abweichung nach unten und nach oben nicht auf, zudem werden grössere Abweichungen stärker gewichtet.

Def. 21 (*Standardabweichung*)

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ heisst Standardabweichung von X.

Die Varianz und die Standardabweichung sind MAsse für die Streuung der Zufallsvariable um den Erwartungswert.
Zur Berechnung der Varianz ist es manchmal einfacher, folgende Formel zu verwenden:

Satz 2

*Es sei $X : \Omega \to X$ eine Zufallsvariable, wobei $X \subset \mathbb{R}$ eine endliche oder abzählbare Menge ist.
Dan gilt $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.*

3.5 diskrete Verteilung

Alle Ereignisse gleich wahrscheinlich	Laplace
Treffer($WK\ p$), nicht Treffer	$B(p)$
Anzahl Treffer ($WK\ p$) in n unabhängigen Versuchen	$Bin(n, p)$
Versuche bis erster Treffer ($WK\ p$) in unabhängigen Versuchen	$Geo(p)$
Verteilung für seltene Ereignisse mit im Schnitt λ Ereignissen pro Zeit/Ort-Einheit	$Poi(\lambda)$

3.5.1 Bernoulli-Verteilung

Treffer($WK\ p$), nicht Treffer

Def. 22 (*Bernoulli-Verteilung*)

Die Verteilung einer Zufallsvariable X, die nur zwei Werte 0 (Treffer) oder 1 (kein Treffer) annehmen kann, wobei p die Wahrscheinlichkeit für 1 bezeichent, heisst Bernoulli-verteilt mit Parameter p.

Schreibweise: $X \sim B(p)$
Dichte von $X : f(0) = 1 - p$, $f(1) = p$

$E(X) = p$
$V(X) = p * (1 - p)$

3.5.2 Binomial-Verteilung

Anzahl Treffer ($WK\ p$) in n unabhängigen Versuchen

Def. 23 (*Binomial-Verteilung*)

Die Verteilung einer Zufallsvariable X, die die Anzahl an Treffern bei der n-maligen unabhängigen Durchführung eines Experiments mit zwei Ausgängen, Treffer oder kein Treffer, wobei p die Wahrscheinlichkeit für Treffer bezeichnet, heisst Binomial-verteilt mit Parametern n, p.

Schreibweise: $X \sim Bin(n, p)$
Dichte von $X : f(k) = \binom{n}{k} * p^k * (1 - p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$

$E(X) = n * p$

$V(X) = n * p * (1 - p)$

Matlab: binocdf(k, n, p)

3.5.3 geometirsche-Verteilung

Versuche bis erster Treffer ($WK\ p$) in unabhängigen Versuchen

Def. 24 (*geometischre-Verteilung*)

Die Verteilung einer Zufallsvariable X, die die Anzahl der Versuche bis zum ersten Treffer bei der n-maligen unabhängigen Durchführung eines Experiments mit zwei Ausgängen, Treffer und kein Treffer, wobei p die Wahrscheinlichkeit für Treffer bezeichnet, heisst geometrisch verteilt mit Parameter p.

Schreibweise: $X \sim Geo(n, p)$
Dichte von $X : f(k) = (1 - p)^{k-1} * p$, $k = 0, 1, \ldots, n$
$X = k$ bedeutet, dass die ersten $k - 1$ Versuche jeweils kein Treffer waren. und der k-te Versuch ein Treffer war.
$E(X) = \frac{1}{p}$
$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

3.5.4 Poisson-Verteilung

Verteilung für seltene Ereignisse mit im Schnitt λ Ereignissen pro Zeit/Ort-Einheit

Def. 25 (*Poisson-Verteilung*)

Die Poisson-Verteilung kommt bei Zufallsvariablen zum Einsatz, welche die Anzahl Ereignisse einer bestimmten Art in einer Zeit- und/oder Ort-Intervall beschreiben. Falls im Mittel λ-Ereignisse auftreten, dann ist X Poisson verteilt mit Parameter λ.

Schreibweise: $X \sim Poi(\lambda)$
Dichte von $X : f(k) = \frac{\lambda^k}{k!} * e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, \ldots, n$
$X = k$ bedeutet, dass die ersten $k - 1$ Versuche jeweils kein Treffer waren. und der k-te Versuch ein Treffer war.
$E(X) = \lambda$
$V(X) = \lambda$

3.5.5 Eigenschaften

Satz 3

Es seien X, Y Zufallsvariablen und $a, c \in \mathbb{R}$. Dan gilt:

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(a * X) = a * E(X)$
- $E(X + c) = E(X) + c$
- $V(X + c) = V(X)$
- $V(a * X) = a^2 * V(X)$
- $E(g(X)) = \sum_x g(x) * P(X = x)$ *für alle Funktionen g:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $E(g(X)) \neq g(E(X))$.

4 stetige Verteilung

4.1 stetige Zufallsvariablen

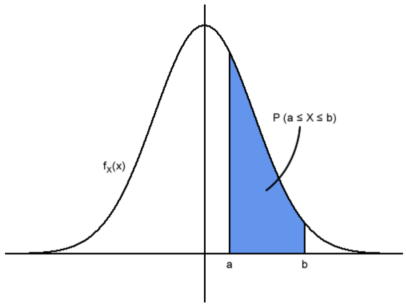
Def. 26 (*stetige Zufallsvariable*)

Eine stetige Zufallsvariable hat einen kontinuierlichn Wertebereich, bestehend aus einem Intervall oder ganz $\mathbb{R}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine stetige Zufallsvariable einen exakten Wert annimt ist 0. Sinnvoll sind Wahrscheinlichkeiten, dass X einen Wert in einem Intervall $[a, b]$ annimt.

Diese Wahrscheinlichkeiten werden durch die Dichte $f(x)$ der Zufallsvariablen beschrieben:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \tag{4.1}$$



Die Gesammtfläche unter der Dichtefunktion muss gleich 1 sein.

$$P(-\infty \leq X \leq \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{4.2}$$

4.2 Verteilungsfunktion

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dx \tag{4.3}$$

4.2.1 Eigenschaften

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) \tag{4.4}$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \tag{4.5}$$

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1 \tag{4.6}$$

$$F'(X)f(x), \text{falls f stetig} \tag{4.7}$$

4.3 Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

Erwartungswert von X:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x * f(x)dx \tag{4.8}$$

Varianz von X:

$$V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 * f(x)dx = E(X^2) - E(X)^2 \tag{4.9}$$

Standardabweichung von X:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \tag{4.10}$$

4.4 Gleichverteilung

Def. 27 (*stetige Gleichverteilung*)

Die stetige Gleichverteilung auf dem Intervall$[s,t]$ ist gegeben durch die konstante Dichte $f(x) = \frac{1}{t-s}$ für $s \leq x \leq t$.

Schreibweise: $X \sim U[s,t]$
$E(x) = \frac{s+t}{2}$
$V(x) = \frac{1}{12} * (t-s)^2$

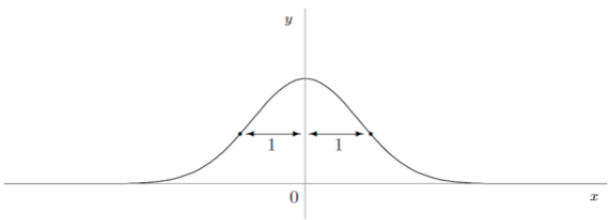
4.5 Normalverteilung

4.5.1 Standardnormalverteilung

Def. 28 (*Standardnormalverteilung*)

*Die Standardnormalverteilung ist gegeben durch die Dichte $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * e^{-\frac{x^2}{2}}$. Man nennt dies auch **Gauss'sche Glockenkurve**.*

Schreibweise: $X \sim N(0,1)$
$E(x) = 0$
$V(x) = 1$



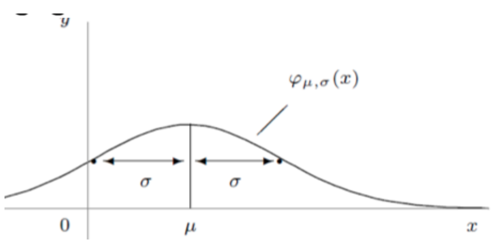
Die Verteilungsfunktion wird mit Φ bezeichnet: $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$.

4.5.2 Normalvertielung

Def. 29 (*Normalverteilung*)

Die Normalverteilung mit Parametern μ und σ ist gegeben durch die Dichte $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} * e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Schreibweise: $X \sim N(\mu, \sigma)$
$E(x) = \mu$
$V(x) = \sigma^2$ Die allgemeine Normalverteilung entsteht, in dem die Gauss'sche Glockenkurve horizontal um die Strecke μ verschoben wird und um den Faktor $\sigma > 0$ horizental gestreckt wird: $\sigma_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$



Die Verteilungsfunktion wird mit Φ bezeichnet: $\Phi(x)_{\mu,\sigma} = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$.

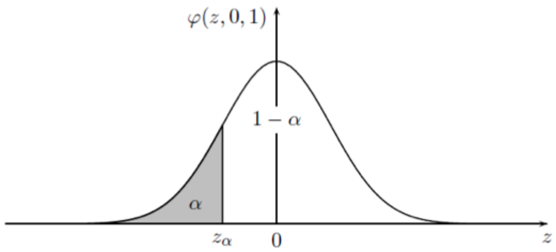
4.5.3 Matlab

Dichte	normpdf(x, μ, σ)
Verteilungsfunktion	normcdf(x, μ, σ)

4.6 Quantil

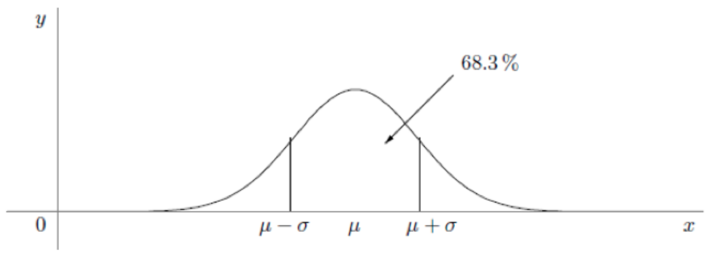
Def. 30 (*Quantil*)

Gegeben sei ein $\alpha \in (0,1)$. Für welchen Wert z_α gilt $P(X \leq z_\alpha) = \alpha$?
So ein z_α heisst α-Quantil (oder Perzentil)



4.6.1 Sigma-Regel

Für $x \sim N(\mu, \sigma)$ gilt:
$P(\mid X - \mu \mid \leq \sigma) \approx 68.3\%$: 1. Sigma-Regel
$P(\mid X - \mu \mid \leq 2\sigma) \approx 95.5\%$: 2. Sigma-Regel
$P(\mid X - \mu \mid \leq 3\sigma) \approx 99.7\%$: 3. Sigma-Regel



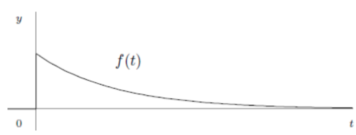
4.7 Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung beschreibt zufällige Lebensdauernvon Geräten oder Wartezeiten auf zufällige Ereignisse.

Def. 31 (*Exponentialerteilung*)

Die Wahrscheinlichkeit dass X einen Wert grösser als t annimt, sinkt exponentiell: $P(X \geq t) = e^{-\lambda t}$, $(t \geq 0)$
Eine Zufallsvariable mit dieser Dichte heisst exponentiell verteilt mit Parameter λ.

Schreibweise: $X \sim Exp(\lambda)$
$E(x) = \frac{1}{\lambda}$
$V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$



5 Unabhängige Zufallsvariablen

5.1 Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Def. 32 (*Unabhängige Zufallsvariablen*)

Eine unendliche Folge von Zufallsvariablen heisst ***(stochastisch) unabhängig****, wenn jede endliche Teilfolge davon stochastisch unabhängig ist.*
Eine endliche Folge von Zufallsvariabeln $X_1, \ldots, X_n$ heisst (stochastisch) unabhängig, wenn

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) * P(X_2 \leq x_2), \ldots, P(X_n \leq x_n) \tag{5.1}$$

für alle $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

Satz 4

Es seien X und Y unabhängige diskrete Zufallsvariablen mit den Werten χ und Υ und Zähldichten f_X und f_Y.
Weiter sei $g : \chi \times \Upsilon \to \mathbb{Z}$. Dan gilt für alle $z \in \mathbb{Z}$:

$$P(g(X,Y) = z) = \sum_{x \in \chi} \sum_{y \in \Upsilon : g(x,y) = z} f_X(x) * f_Y(y) \tag{5.2}$$

Satz 5

Es seien X und Y unabhängige diskrete Zufallsvariablen mit den Werten χ und Υ und Zähldichten f_X und f_Y. Dann hat die Summe $X + Y$ die Zähldichte

$$f_{X+Y}(z) = \sum_{xin\chi} f_X(x) * f_Y(z - x) \tag{5.3}$$

Hierbei ist für $f_Y(y) = 0$ für $y \notin \Upsilon$

Die Zähldichte von f_{X+Y} nennt man auch Faltung von f_X und f_Y.

Satz 6

Es seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen sind, dan gilt

$$X \sim Poi(\lambda_1), Y \sim Poi(\lambda_2) \Rightarrow X + Y \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2) \tag{5.4}$$

$$X \sim Bin(n_1, p), Y \sim Bin(n_2, p) \Rightarrow X + Y \sim Bin(n_1 + n_2, p) \tag{5.5}$$

Satz 7 (*Additionstheorem der Normalverteilung*)

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige, normal verteilte Zufallsvariablen eines Zufallsexperiments mit den Erwartungswerten μ_i und der Standardabweichung σ_1. Weiter seiena$_1, a_2, \ldots, a_n$ belibige reelle Zahlen, nicht alle gleich 0.
Dann ist die Zufallsvariable $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n$ auch normal verteilt mit Erwartungswert $a_1\mu_1, a_2\mu_2, \ldots, a_n\mu_n$ und Varianz $a_1^2\sigma_1^2, a_2^2\sigma_2^2, \ldots, a_n^2\mu_n^2$

5.2 Eigenschaft von Erwartungswert und Varianz

Es seien X und Y Zufallsvariablen und $a, c \in \mathbb{R}$. Dan gilt:

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \tag{5.6}$$
$$E(aX) = aE(X) \tag{5.7}$$
$$E(X+c) = E(X) + c \tag{5.8}$$
$$V(X+c) = V(X) \tag{5.9}$$
$$V(aX) = a^2 V(X) \tag{5.10}$$
$$\text{Falls X und Y unabhängig sind: } V(X+Y) = V(X) + V(Y) \tag{5.11}$$
$$\text{Wenn X diskret ist und } f_X \text{die Zählichte von X: } E(g(X)) = \sum_x g(x) * f_X(x) \tag{5.12}$$
$$\text{Wenn X stetig ist und } f_X \text{ ide Dichte von X: } E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) * f_X(x) dx \tag{5.13}$$

5.3 die Ungleichung von Tschabyscheff

Satz 8

Es sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Dann gilt für alle $k > 0$:

$$P(\mid X - \mu \mid \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2} \tag{5.14}$$

Diese Abschätzung gilt für alle möglichen Verteilungen von X. Sie ist deshalb in manchen Fällen recht grob.

5.4 Grentzwertsätze

5.4.1 Gesetz der Grossen Zahlen

Es sei E ein Ereignis eines Zufallexperiments, und sei p die Wahrscheinlichkeit von E. Weiter bezeichne X die Anzahl des Eintreffens von E bei n unabhängigen Ausführungen dieses Experiments. Für jede beliebig kleine reelle Zahl $\epsilon > 0$ gilt dann:

$$P(\mid \frac{X}{n} - p \mid \geq \epsilon) \to 0 (n \to \infty) \tag{5.15}$$

5.4.2 Zentraler Grenzwertsatz

Es sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen eines Wahrscheinlichkeitsraumes, welche alle dieselbe Verteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 haben. Dan gilt für grosse n:
Die Summe $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ besitzt näherungsweise die Normalverteilung $N(\mu_n, \sigma_n)$ mit $\mu_n = n * \mu$ und $\sigma_n = \sqrt{n} * \sigma$. Es gilt also näherungsweise $\frac{S_n - \mu_n}{\sqrt{n} * \mu} \sim N(0,1)$.
Präzise gilt für alle $z \in \mathbb{R}$:

$$P(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq z) \to \Phi(z)(n \to \infty) \tag{5.16}$$

5.4.3 Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace

Für grosse n ist

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi(\frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}) - \Phi(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}) \tag{5.17}$$

Diese Approximation ist für $n > \frac{9}{p(1-p)}$ hinfreichend genau.
Etwas genauer wird es mit der sogenannten **Stetigkeitskorrektur**:

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi(\frac{b + \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}) - \Phi(\frac{a - \frac{1}{2} - np}{\sqrt{np(1-p)}}) \tag{5.18}$$

6 Aspekte der induktiven Statistik