1 Mengen und Relationen

1.1 Naive Mengenlehre

- Georg Cantor 1845 -1918
Menge: "Sammlung" von Objekten
Diese Objekte heissen Elemente.
Notation: X $/in$ M $\rightarrow$ X ist Element von M
Eine Menge ist durch ihre Elemente eindeutig bestimmt.

Bsp: M = 1,2,3, M = N $\rightarrow$ N = 3,1,2

Beschreibung von Mengen
1. Durch Aufzählung: M = 1,2,3
2. Durch Prädikate: M = $x|P(x)$ "Menge aller x, die das Prädikat P erfüllen"
3. grafische Darstellung (Venn-Diagramme)
Bsp. $a \in A, d \in B, c \in A, c \in B$

1.1.1 Notation

$\forall x \in G$: "Für alle x aus der Menge G ..."
$\exists x \in G$: "Es existiert ein Element x in der Menge G ..."

Beispiele:
1. G := N = 0,1,2,3...
A := 1,2
B := 3,4
$AB = \emptyset$

1.1.2 Satz 1

1. G Grundmenge
2. A, B, C Teilmengen von G

1.2 weitere Mengen-Konstruktionen

1.2.1 Potenzmenge

Definition: $P(M) := x|xM$ Potenzmenge von M
Die Menge aller Teilmengen von M
Beispiele
a) $M := 1 \rightarrow P(M) = \emptyset, 1$

b) $M := 1,2,3 \rightarrow P(M) = \emptyset, 1,2,3,1,2,2,3,1,3,1,2,3$
c) $M := \emptyset \rightarrow P(M) = \emptyset$

1.2.2 das kartesische Produkt

Seien A, B Mengen, $a \in A$, $b \in B$
Definition: Das Symbol (a,b) heisst das geordnete Paar von a und b.
Bemerkung: (a,b) = (c,d) → a=c und b=d

Definition: Seien A,B Mengen
$AxB := (x,y)|x \in A, y \in B$ heisst das kartesische Produkt von A und B.

Beispiel:
a) $1,2,3x4,5$ // i.a. $AxB \neq BxA$
= (1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)
b) 1,2x1,2 = (1,1),(1,2),(2,1),(2,2)
c) A = a,b
$Ax\emptyset$ = (a,∅),(b,∅)

1.2.3 Partitionen

Gegeben eine Menge M
Definition: Eine Partition von M ist eine Menge π
$\pi := \{A_i|i \in I\}$
(I = Indexmenge) mit
1.) $A_i \neq \emptyset$
2.) $A_i \subset$ M
3.) $A_i \cap A_J = \emptyset$
4.) $\cup A_i$ = M = $A_1 \cup A_2 \cup A_3$...

Beispiel:
a) M:= N* = 1,2,3,..
A_1 :=1,A_2 :=2,A_3 :=$x \in N*|x \geq 3$
$\pi = A_1, A_2, A_3$ ist eine Partition von M.
b) M := RxR
A_a = (x,y) — x=a, y ∈ R

$\pi = \ A_a — a \in R$

2 Relationen

Durch Relationen werden Beziehungen zwischen Objekten ausgedrückt.
Eine Relation ist stets eine Teilmenge des kartesischen Produktes. Seien $M_1, ..., M_n$ Mengen

Definition
Eine Teilmenge $R \subset M_1 x M_2 x ... x M_n$
heisst eine n-stellige Relation auf $M_1, M_2, ..., M_n$

Beispiel 1:
M = Einwohner von Brugg
$R_1 \subset MxMxM//M^3$
(a,b,c) $\in R_1$:<==> "a ist Vater von c", "b ist Mutter von c"

Beispiel 2:
$R_2 \subset R^2 = RyR$
$R_2 = (x, y)|x^2 + y^2 = 1 \subset RxR$

Beispiel 3:
$R_3 \subset R^2 = RyR$
$R_2 = (x, y)|y = e^x$

Beispiel 4:
Sei A eine beliebige Menge.
$R_4 := (B, C)|B \subset C \subset C \subset AP(A)x(PaA)$

2.1 Beschränkung auf binäre Relationen: R $\subset M_1 x M_2$

Notation: xRy :<==> $(x, y) \in R \subset M_1 x M_2$

2.2 Darstellung von binären Relationen auf endlichen Mengen

Sei R $\subset M^2$ = MxM // Relation "auf" der Menge M
1) Matrizen
M:= m_1, m_2, m_3 Wir nummerieren die Elemente A_R := 3x3 Matrix, $a_i j$ =

0, falls $(m_{i,,j}) \notin R$, 1, sonst
2) (gerichtete Graphen)
M:= a_y, a_2, a_3, a_4
$R \subset M^2$: R = (a_1, a_4),(a_4, a_3),(a_2, a_3)
G_R Punkte = Elemente der Menge M

2.3 Spezielle Eigenschaften von Relationen

Definition
1) $R \subset M^2$ reflexiv :<==> $\forall x \in M : (x, x) \in R$
2) $R \subset M^2$ irreflexiv :<==> $\forall x \in M : (x, x) \notin R$
3) $R \subset M^2$ symmetrisch :<==> $\forall x, y \in M : (y, x) \in R \to (y, x) \in R$
4) $R \subset M^2$ antisymmetrisch :<==> $\forall x, y \in M : (y, x) \in R \to x = y$
5) $R \subset M^2$ transitiv :<==> $\forall x, y, z \in M : (x, y), (y, z) \in R \to (x, z) \in R$

Beispiel M := 1,2,3,4
1) $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (3, 3), (4, 4)\} \subset M^2$
- reflexiv, antisymmetrisch, transitiv
2) $R_2 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 1)\} \subset M^2$
- nur symmetrisch
3) $R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 4)\} \subset M^2$
- transitiv
4) $R_4 = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3)\} \subset M^2$
- keine speziellen Eigenschaften
5) $R_5 = \emptyset$