1 Mengen und Relationen

1.1 Naive Mengenlehre

- Georg Cantor 1845 -1918
Menge: "Sammlung" von Objekten
Diese Objekte heissen Elemente.
Notation: X $/in$ M $\rightarrow$ X ist Element von M
Eine Menge ist durch ihre Elemente eindeutig bestimmt.

Bsp: M = 1,2,3, M = N $\rightarrow$ N = {3,1,2}

Beschreibung von Mengen
1. Durch Aufzählung: M = { 1,2,3 }
2. Durch Prädikate: M = $x|P(x)$ "Menge aller x, die das Prädikat P erfüllen"
3. grafische Darstellung (Venn-Diagramme)
Bsp. $a \in A, d \in B, c \in A, c \in B$

1.1.1 Notation

$\forall x \in G$: "Für alle x aus der Menge G ..."
$\exists x \in G$: "Es existiert ein Element x in der Menge G ..."

Beispiele:
1. G := N = {0,1,2,3...}
A := {1,2}
B := {3,4}
$AB = \emptyset$

1.1.2 Satz 1

1. G Grundmenge
2. A, B, C Teilmengen von G

1.2 weitere Mengen-Konstruktionen

1.2.1 Potenzmenge

Definition: $P(M) := \{x|xM\}$ Potenzmenge von M
Die Menge aller Teilmengen von M
Beispiele
a) $M := \{1\} \rightarrow P(M) = \{\emptyset, \{1\}\}$

b) $M := \{1, 2, 3\} \to P(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
c) $M := \emptyset \to P(M) = \{\emptyset\}$

1.2.2 das kartesische Produkt

Seien A, B Mengen, $a \in A$, $b \in B$
Definition: Das Symbol (a,b) heisst das geordnete Paar von a und b.
Bemerkung: (a,b) = (c,d) $\to$ a=c und b=d

Definition: Seien A,B Mengen
$AxB := \{(x, y)|x \in A, y \in B\}$ heisst das kartesische Produkt von A und B.

Beispiel:
a) $\{1, 2, 3\}x\{4, 5\}$ // i.a. $AxB \neq BxA$
= { (1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5) }
b) {1,2}x{1,2} = {(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)}
c) A = {a,b}
$Ax\emptyset$ = {(a,$\emptyset$),(b,$\emptyset$)}

1.2.3 Partitionen

Gegeben eine Menge M
Definition: Eine Partition von M ist eine Menge π
$\pi := \{A_i|i \in I\}$
(I = Indexmenge) mit
1.) $A_i \neq \emptyset$
2.) $A_i \subset$ M
3.) $A_i \cap A_J = \emptyset$
4.) $\cup A_i$ = M = $A_1 \cup A_2 \cup A_3$...

Beispiel:
a) M:= N* = {1,2,3,..}
A_1 :={1},A_2 :={2},A_3 :={$x \in N * |x \geq 3$}
$\pi = \{A_1, A_2, A_3\}$ ist eine Partition von M.
b) M := RxR
A_a = {(x,y) — x=a, y $\in$ R }

π = { A_a — $a \in R$}

2 Relationen

Durch Relationen werden Beziehungen zwischen Objekten ausgedrückt.
Eine Relation ist stets eine Teilmenge des kartesischen Produktes. Seien $M_1, ..., M_n$ Mengen

Definition

Eine Teilmenge $R \subset M_1 x M_2 x ... x M_n$
heisst eine n-stellige Relation auf $M_1, M_2, ..., M_n$

Beispiel 1:

M = Einwohner von Brugg
$R_1 \subset MxMxM//M^3$
(a,b,c) $\in R_1$:<==> "a ist Vater von c", "b ist Mutter von c"

Beispiel 2:

$R_2 \subset R^2 = RyR$
$R_2 = \{(x, y)|x^2 + y^2 = 1\} \subset RxR$

Beispiel 3:

$R_3 \subset R^2 = RyR$
$R_2 = \{(x, y)|y = e^x\}$

Beispiel 4:

Sei A eine beliebige Menge.
$R_4 := \{(B, C)|B \subset C \subset C \subset A\}P(A)x(PaA)$

2.1 Beschränkung auf binäre Relationen: R $\subset M_1 x M_2$

Notation: xRy :<==> $(x, y) \in R \subset M_1 x M_2$

2.2 Darstellung von binären Relationen auf endlichen Mengen

Sei R $\subset M^2$ = MxM // Relation "auf" der Menge M
1) Matrizen
M:= $\{m_1, m_2, m_3\}$ Wir nummerieren die Elemente A_R := 3x3 Matrix, a_ij

= {0, falls $(m_{i,,j}) \notin R$, 1, sonst }
2) (gerichtete Graphen)
M:= $\{a_y, a_2, a_3, a_4\}$
$R \subset M^2$: R = $\{(a_1, a_4)$,(a_4, a_3),$(a_2, a_3)\}$
G_R Punkte = Elemente der Menge M

2.3 Spezielle Eigenschaften von Relationen

Definition
1) $R \subset M^2$ reflexiv: <==> $\forall x \in M : (x, x) \in R$ - alle Loops
2) $R \subset M^2$ irreflexiv: <==> $\forall x \in M : (x, x) \notin R$ - keine Loops
3) $R \subset M^2$ symmetrisch: <==> $\forall x, y \in M : (x, x) \in R \to (y, x) \in R$ - nur Doppelpfeile
4) $R \subset M^2$ antisymmetrisch: <==> $\forall x, y \in M : (x, y) \in \wedge (y, x) \in R \to x = y$ - keine Doppelpfeile
5) $R \subset M^2$ transitiv: <==> $\forall x, y, z \in M : (x, y), (y, z) \in R \to (x, z) \in R$ - Abkürzungen

Beispiel M := 1,2,3,4
1) $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (3, 3), (4, 4)\} \subset M^2$
- reflexiv, antisymmetrisch, transitiv
2) $R_2 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 1)\} \subset M^2$
- nur symmetrisch
3) $R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 4)\} \subset M^2$
- transitiv
4) $R_4 = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3)\} \subset M^2$
- keine speziellen Eigenschaften
5) $R_5 = \emptyset$
- alles ausser reflexiv

2.4 Äquivalenzrelationen

Definition
R ⊂ M x M heisst Äquivalenzrelation
1) R ist reflexiv
2) R ist symmetrisch
3) R ist transitiv

Beispiel M := {1,2,3,4,5}
R = {(1,1)(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2),(4,5),(5,4)}
Sei R eine Äquivalenzrelation auf M und a ∈ M.
Definition
$[a] := \{x \in M | (x, a) \in R\}$
$[a]$ist die Äquivalenzklasse von a bzgl. R (in M.).

Beispiel
$[1] = \{1, 2, 3\} \subset$ M
$[2] = \{2, 1, 3\}$
$[3] = \{3, 2, 1\}$
$[4] = \{4, 5\}$
$[5] = \{5, 4\}$

Satz 2
Voraussetzung: R ist Äquivalenzrelation auf M
Behauptung: $\Pi := \{[a]|a \in M\}$ ist eine Partition von M.
Beweis: 1) $\forall a \in M : a \in [a], weil R reflexiv : \forall x \in M : (x, x) \in R$
d.h. $[a] \neq \emptyset$ und U [a] = M (x), a $\in$ M
$M = Ua \subset a \in [a] \rightarrow a \subset [a]$
2) $[a] \cap [b] \neq \emptyset \rightarrow [a] = [b]$
Sei $[a] \cap [\neq \emptyset \rightarrow \exists c \in M : c \in [a] \cap [b], d.h. c \in [a] und c \in [b]$
$\rightarrow (c, a) \in R und (c, b) \in R$
R symmetrisch: (c,a)$\in$ R $\rightarrow (a, c) \in$ R
R transitiv: (a,c) $\in$ R und (c,b) $\in$ R $\rightarrow$ (a,b) $\in$ R

Wir zeigen: $[a] \subset [b] (und [b] \subset [a]$
z.Z. d $\in [a] \rightarrow d \in [b]$

d $\in [a], d.h. (d, a) \in R, und (a, b) \in R (R ist transitiv)$
(d,b) $\in R, d.h. d \in [b]$

2.5 Relationsoperationen

Sei M eine Menge.
Wir betrachten binäre Relationen auf M: R $\subset$ MxM.
Seien $R_1, R_2 \subset$ MxM, R_1, R_2 sind Mengen.
Wir können die Operationen $\cap$, $\cup$ auf R_1, R_2 anwenden:

Beispiel:
Sei M = {1,2,3}
R_1: (1,1),(1,2),(2,2),(2,1),(2,3),(3,2)
R_2: (1,2),(2,1),(3,3)
$R_1 \cap R_2$: (1,2),(2,1)

Nun betrachten wir Operationen, die ausnutzen, dass R eine Teilmenge eines kart. Produktes ist:
Seien R,S Relationen auf M, d.h. R,S $\subset$ MxM
Definition:
R^T:= {(x,y) — (y,x) $\in$ R } heisst die transponierte Relation zu R.

Bemerkung: Falls A_R die Matrix der Relation R ist, dann istA_R^T die Matrix von R^T.
Definition:
S $\circ$ R := $\{$(x,z) — $\exists y \in$ M:(x,y)$\in$ R und (y,z — $\in$ S$\}$
heisst das Produkt von R und S

Beispiel
1) M = $\{$1,2,3$\}$
R = $\{$(1,1),(1,2),(1,3),(2,3)$\}$
R^T = $\{$(1,2),(2,1),(3,1),(3,2)$\}$

2) M = $\{$1,2,3,4$\}$
R = $\{$(1,3),(1,4)$\}$
S = $\{$(3,3),(3,2),(3,4),(4,2)$\}$

S $\circ$ R: $\{$(1,2),(1,2),(1,4),(1,3)$\}$

Definition: I := $\{$(x,x) — x $\in$M$\}$
Bemerkung: A_I=

$$\begin{pmatrix} 1 & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Satz 3
Voraussetzung: Q,R,S $\in$ P(MxM)
Behauptung:
1) (Q$\circ$S)$\circ$R = Q$\circ$(S$\circ$R)
2) I$\circ$R = R$\circ$I=R

2.6 Funktionen