Wahrscheinlichkeiten und Statistik Zusammenfassung

Fabio Oesch

4. Dezember 2013

Inhaltsverzeichnis

3 Zufall und Ereignis

3.2 Zufallsexperimente und Ereignisse

Unter einem Zufallsexperiment verstehen wir einen Vorgang,

- der gedanklich beliebig oft wiederholbar und
- dessen Ausgang innerhalb einer Menge möglicher Ergebnisse ungewiss (zufällig)

ist. **Beispiel 3.2.1.** Ziehung der Lottozahlen ist $S = \{1, 2, 3, \ldots, 45\}$. Beim Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln ist $S = \{\text{Kugel ist rot,Kugel ist schwarz}\}$. Das **sichere Ereignis** ist falls der Stichprobenraum S immer zu trifft. Würfel: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Das **unmögliche Ereignis** ist falls der Stichprobenraum S nie zutreffen kann. Wird als $\emptyset$ dargestellt.

3.3 Verknüfung von Ereignissen

Oder $A \cup B$

Und $A \cap B$

Gegenereignis $\bar{A}$

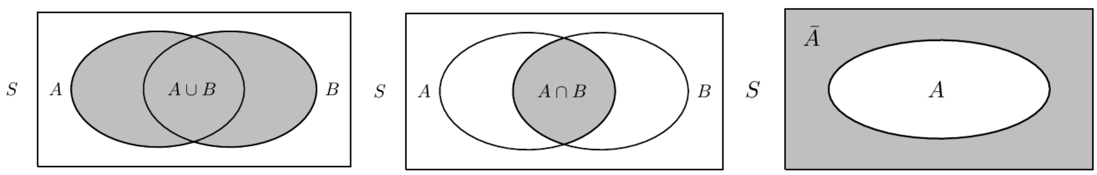

Abbildung 1: Von l.n.r.: Oder, Und, Gegenereignis

Aufgabe 3.3.8. Eine Anlage besteht aus zwei Kesseln und einer Maschine. Ist die Maschine intakt, dann liege das Ereignis A vor. Ist der erste (resp. zweite) Kessel arbeitsfähig, so liege das Ereignis B_1 (resp. B_2) vor. Es bezeichne C das Ereignis: die Anlage ist arbeitsfähig, die gewährleistet ist, wenn die Maschine und mindestens ein Kessel intakt sind. Drücken Sie die Ereignisse C und $\bar{C}$ durch die Ereignisse A, B_1 und B_2 aus. **Lösung:** $C = A \cap (B_1 \cup B_2)$ daraus folgt, dass $\bar{C} = \overline{A \cap (B_1 \cup B_2)} = \bar{A} \cup (\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2)$

3.4 Zusammengesetzte Versuche, Produktregel

Beispiel 3.4.2. Wenn wir vier Mal hintereinander eine Münze werfen, haben wir bei jedem Wurf die Möglichkeit Kopf K oder Zahl Z zu erhalten.

Ereignisbaum.png

Aus diesem Ereignisbaum ergen sich $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ Ausfallsmöglichkeiten beim zusammengesetzten Versuch. Der Stichprobenraum ist demzufolge $S = \{(K, K, K, K), (K, K, K, Z), \ldots, (Z, Z, Z, Z)\}$.

3.5 Permutationen, Variationen, Kombinationen

3.5.1 Permutationen (geordnet mit Zurücklegen)

Beispiel 3.5.1. Gegeben seien die Ziffern $1, 2, 3, 4$ und 5. Nun haben wir fünf Plätze mit fünf Zeichen auszufüllen. Das Setzen eines Zeichens auf einen Platz stellt einen Teilversuch dar. Beim 1. Teilversuch sind noch alle Plätze frei und wir haben genau fünf Möglichkeiten die erste Ziffer 1 zu setzen; beim 2. Teilversuch bleiben noch vier Möglichkeiten offen, die zweite Ziffer 2 zu setzen; etc $\Rightarrow P(5) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 120$

3.5.2 Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen

Beispiel 3.5.2. Es seien n nummerierte Lose in einer Urne. Es werde k mal ein Los gezogen und dessen Nummer notiert. Dann wird das Los wieder in die Urne gelegt. Wir erhalten somit als Ereignis eine Anzahl von k Nummern in einer bestimmten Reihenfolge. Bei allen k Teilversuchen haben wir n Wahlmöglichkeiten. $\Rightarrow V(k,n) = n^k$

3.5.3 Variation (geordnet ohne Zurücklegen)

Der Versuch läuft analog zu **Beispiel 3.5.2.** mit der Ausnahme, dass die Lose nicht zurückgelegt werden. $\Rightarrow V(k,n) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

3.5.4 Kombinationen (ungeordnet ohne Zurücklegen)

Ein typisches Beispiel zu dieser Art Stichprobe ist folgendes: Es seien n Kugeln gleicher Farbe in einer Urne und es werden k Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Da die Kuglen nicht unterscheidbar sind, kann keine Reihenfolge berücksichtigt werden. $\Rightarrow C(k,n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

Aufgaben

Aufgabe 3.5.3. Frau Meier hat 4 Kleider, 3 Hüte und 5 Paar Schuhe. Auf wie viele Arten kann sie sich zum Ausgehen anziehen, wenn alles zueinander passt und das Tragen eines Hutes **a.** Pflicht, **b.** freiwillig ist? **Lösung:** Dies könnte anhand eines Ereignisbaums gezeigt werden. Wir haben bei den Kleidern 4 verschiedene, Zusätzlich haben wir 5 Paar Schuhe und bei **a.** 3 Hüte und bei **b.** 4 Hüte. Also können wir die Produktregel anwenden: **a.** $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ analog für **b.**.
Aufgabe 3.5.5. Eine Münze wird 8 mal geworfen. Welcher Bruchteil der möglichen Ausfälle enthält Kopf und Zahl gleich oft? **Lösung:** Da die Chance immer die selbe ist (nämlich $\frac{1}{2}$ für jeden Wurf) können wir annehmen, dass wir 8 Münzen haben, die wir nicht zurücklegen. Die Reihenfolge spielt keine Rolle, dass heisst, dass wir die Formel $\binom{8}{4}$ nehmen und bekommen so die Anzahl von Möglichkeiten bei der es genau 4x Kopf geworfen wurde. Dies impliziert, dass wir auch automatisch 4x Zahl geworfen haben und müssen dies in die Berechnung nicht mit einbeziehen. Dies müssen wir nun durch die maximale Anzahl der Möglichkeiten teilen die 2^8 wäre. Wir haben also als Endresultat $\frac{70}{256}$
Aufgabe 3.5.8. Auf wie viele Arten können die Buchstaben des Wortes Pfeffer permutiert werden?**Lösung:** Da das f 3x vor kommt und das e 2x müssen wir durch diese dividieren. $\frac{7!}{3!\cdot 2!} = 420$
Aufgabe 3.5.10. Eine Klasse hat 15 Fussballspieler, einer davon heisst Klaus. Auf wie viele Arten kann eine Mannschaft von 11 Spielern a. Mit Klaus, b. ohne Klaus zusammengestellt werden. **Lösung:** a. $\binom{14}{10}$, b. $\binom{14}{11}$
Aufgabe 3.5.14. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 36 Jasskarten auf vier Spieler A, B, C, D zu verteilen? **Lösung:** $\binom{36}{9} \cdot \binom{27}{9} \cdot \binom{18}{9} \cdot \binom{9}{9}$

4 Wahrscheinlichkeit

4.1 Theoretische Wahrscheinlichkeit

$$\boxed{p = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{g}{m}}$$

Beispiel 4.1.3. Gegeben seien 10 Nüsse, davon seien 3 verdorben. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei gute Nüsse mit einem Griff genommen werden? Es gibt $m = \binom{10}{2}$ mögliche Fälle und $g = \binom{7}{2}$ günstige Fälle. Damit ist die W'keit $p = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{7}{15}$
Aufgabe 4.1.12 10 Lose 2 Gewinnlose mit 5x herausziehen genau 1 Gewinnlos **Lösung:** $m = 8, n = 2, k = 5, s = 1 \Rightarrow \frac{\binom{8}{4}\binom{2}{1}}{\binom{10}{5}}$
Aufgabe 4.1.13 Es liegen $m+n$ Lose vor, unter denen n Gewinnlose sind. Es werden k Lose auf einmal gezogen. Bestimmen Sie die W'keit dafür, dass sich unter den k Losen genau s Gewinnlose befinden.**Lösung:** Es gibt $m = \binom{m+n}{k}$ mögliche Ausfälle und genau $g = \binom{m}{k-s}\binom{n}{s}$ Möglichkeiten für s

Gewinnlose. Dabei zählt der Faktor $\binom{m}{k-s}$ die Möglichkeiten, $k-s$ Nieten zu haben und der Faktor $\binom{n}{s}$ zählt die Möglichkeiten, s Treffer zu haben. Damit folgt $p(s) = \frac{\binom{m}{k-s}\binom{n}{s}}{\binom{m+n}{k}}$.

4.2 Experimentelle Wahrscheinlichkeit

Gegeben sei ein Stichprobenraum $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ eines Versuchs. Zu jedem Ausfall $s_i \in S$ gehört eine relative Häufigkeit

$$\boxed{h(s_i) = \frac{\text{Anzahl des Auftretens von } s_i}{\text{Anzahl Versuche } N}}$$

seines Auftretens. Dabei gilt $0 \leq h(s_i) \leq 1$ und $h(s_1) + \cdots + h(s_n) = 1$.

5 Zufallsgrössen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

5.1 Diskrete und stetige Zufallsgrössen

Die Zufallsgrösse X, die die Werte $x_1, \ldots, x_n$ annehmen kann, wird durch die Angabe ihrer W'keit charakterisiert. Jedem Ausfall s_i aus dem Stichprobenraum S, respektive $X(s_i) = x_i$, entspricht eine W'keit $p_i = P(X = x_i) \in [0, 1]$ als Funktion von x_i aufgefasst Dabei gilt $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$.
Aufgabe 5.1.1. Die Trefferwahrscheinlichkeit für einen Basketball in den gegnerishen Korb sei bei jedem Wurf 0.3. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und die Verteilungsfunktion der zufälligen Trefferzahl X bei zwei Würfen. **Lösung:** $k = 0$: $\binom{2}{0}(0.3)^0 * (1-0.3)^2 = 0.49$, $k = 1$: $\binom{2}{1}(0.3)^1 * (1-0.3)^1 = 0.42$, $k = 2$: $\binom{2}{2}(0.3)^2 * (1-0.3)^0 = 0.09$ Daraus folgt die folgende Tabelle:

k	0	1	2
$P(X = k)$	0.49	0.42	0.09
$\sum_{i=0}^{k} P(X = i)$	0.49	0.91	1.00

6 Diskrete Zufallsgrössen und Verteilungen

6.1 Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert $\mu = \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$. **Varianz** oder **Streuung** $\varsigma^2 = \text{Var}(X) = \mathbb{E}((X-\mu)^2) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2$ **Standardabweichung** $|\sqrt{\sigma}| = \sigma$
Beispiel 6.1.1. Betrachten wir wieder einmal den symmetrischen Würfel. Es ist bekanntlich $x_t = i$ und $p_t = \frac{1}{6}$ für alle $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dann erhalten wir für den Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{6} i \frac{1}{6} = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$
und für die Varianz $\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n}(i-\mu)^2 \frac{1}{6} = 2.92$
Die Standardabweichung beträgt demzufolge $\sigma = 1.71$.

6.2 Die Binomialverteilung

6.2.1 Definition und Eigenschaften der Binomialverteilung

Die Binomialverteilung beschäftigt sich mit Ereignissen, bei denen zwei alternative Ausgänge auftreten können, wei zum Beispiel Münzwurf (Kopf oder Zahl). Wir betrachten also einen Versuch mit zwei möglichen Ausfällen:

- **Erfolg** mit W'keit $p \in [0, 1]$
- **Misserfolg** mit W'keit $q = 1 - p \in [0, 1]$

Bei n Versuchen gibt es genau $\binom{n}{x}$ Anordnungen mit x Erfolgen und $n - x$ Misserfolgen. Damit erhalten wir die **Binomialverteilung** $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ **Beispiel 6.2.1.** Zwei Spieler A und B spielen Tischtennis. Der bessere Spieler A gewinnt mit der Wahrscheinlichkeit von 60%. Unentschieden sei ausgeschlossen. Sieger des Turniers (3 Spiele) ist der Spieler, der die Mehrzahl der Spiele gewonnen hat.Wie gross ist die W'keit, dass Spieler B das Turnier gewinnt? **Lösung:** Es bezeichne X die Zufallsgrösse, die als Werte die Anzahl der von A gewonnen Spiele habe. Dann ist $n = 3$, $p = 0.6$

und $q = 0.4$. $P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{3}{0}p^0q^3 + \binom{3}{1}p^1q^2 = 0.352$. In diesem Fall gewinnt der schlechtere Spieler mit 35%.

6.2.2 Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung

Varianz oder **Streuung**: $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = npq$
Standardabweichung $\sigma = \sqrt{npq}$

6.2.3 Die Binomialverteilung beim Testen von Hypothesen

Vorgehen:

1. Aufstellen der **Nullhypothese** H_0 und der **Alternativhypothese** H_1 und Vorgabe des **Signifikanzniveaus** α
2. Berechnung der **W'keit des Ereignisses** unter der Voraussetzung der Nullhypothese H_0.
3. **Statistischer Schluss:** Ist die berechnete W'keit kleiner als das Signifikanzniveau α, so wird H_0 abgelehnt, sonst wird H_0 angenommen.

Beispiel 6.2.2. Hat ein Huhn ein Favoriten von runden zu eckigen Körnern. Wir lassen das Huhn 20x ein Korn nehmen. 15x rundes, 5x eckiges. **Lösung:**

Nullhypothese H_0 $p = q = \frac{1}{2}$, d.h., das Huhn unterscheidet keine Formen. Mit Signifikanzniveau 0.05.

Alternativhypothese H_1 $http : //www.youtube.com/user/TeamFortressTVp > q$, d.h.,das Huhn zieht Kreise vor.

$$P(15 \leq X \leq 20) = \sum_{x=15}^{20} \binom{20}{x} p^x q^{20-x} = 0.021.$$

Die Berechnung der W'keit beträgt nur 2.1%. Da wir das Signifikanzniveau auf 5% angesetzt haben. Lehnen wir H_0 ab und nehmen die **Irrtumsw'keit** H_1 an.

6.3 Die Poissonverteilung

6.3.1 Poissonverteilung als Grenzfall der Binomialverteilung

Die **Poissonverteilung** ergibt sich, wenn n so gegen unendlich strebt, dass der Erwartungswert $\mu = np$ gegen einen endlichen Wert strebt. Das heisst wir können in der Binomialverteilung $p = \frac{\mu}{n}$ und $q = 1 - \frac{\mu}{n}$ setzen. Die Grenzverteilung ist somit $P(X = x) = \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu}$. Beispiele für poissonverteilte Zufallsgrössen sind:

- Die Anzahl der innerhalb einer kurzen Zeitspanne zerfallenden Atome eines radioaktiven Präparats.
- Die Anzahl der während einer festen Zeit beobachteten Sternschnuppen.

6.3.2 Erwartungswert und Varianz der Poissonverteilung

Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = \mu$ **Varianz** oder **Streuung** $\mathrm{Var}(X) = \mu$ **Standardabweichung** $\sigma = \sqrt{\mu}$
Beispiel 6.3.1. Die W'keit dafür, dass ein Produkt einem Qualitätstest nicht genügt, beträgt $p = 0.001$. Wir bestimmen die W'keit, dass von 5000 Produkten mindestens zwei die Prüfung nicht überstehen. Diese Aufgabe ist eigentlich eine Aufgabe der Binomialverteilung. Sie kann aber wegen dem kleinen p und dem grossen n näherungsweise als Aufgabe der Poissonverteilung betrachtet werden. **Lösung:** Es sei $n = 5000$, $p = 0.001$ also $\mu = np = 5$, und X bezeichne die Anzahl Waren, die die Prüfung nicht bestehen. Dann gilt $P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{5^0}{0!}e^{-5} + \frac{5^1}{1!}e^{-5} = 6e^{-5} = 0.04$. Also $P(X \geq 2 = 1 - P(X < 2) = 0.96$.
Aufgabe 6.3.4. Wie gross ist die W'keit, dass von einer Gruppe mit 730 Personen wenigstens drei am Oster- oder Pfingstsonntag geboren sind? **Lösung:** $n = 730$, $p = \frac{2}{365}$ also $\mu = np = 4$, und X bezeichne die Anzahl Personen die am Oster- oder Pfingstsonntag geboren wurden ($P(X \geq 3)$). Dann gilt $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{4^0}{0!}e^{-4} + \frac{4^1}{1!}e^{-4} + \frac{4^2}{2!}e^{-4} = 0.2381$. Also $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 0.7619$.

7 Stetige Zufallsgrössen und Verteilungen

7.1 Stetige Zufallsgrössen und Wahrscheinlichkeitsdichten

Eigenschaften der nichtnegativen Funktion f (**W'keitsdichte**:)

1. Die Funktion F ist stetig monoton wachsend mit $F(-\infty) = 0$ und $F(\infty) = 1$.
2. Der Gesamtflächeninhalt untder der W'keitsdichtekurve ist gleich 1, d.h. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.
3. Es gilt $\frac{d}{dx}F(x) = F'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$
4. Die W'keit ein Ergeignis zwischen x_1 und x_2 zu erhalten, beträgt $P(x_1 \leq X \leq x_2) \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = F(x_2) - F(x_1)$

7.1.1 Die Gleichverteilung

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn} 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

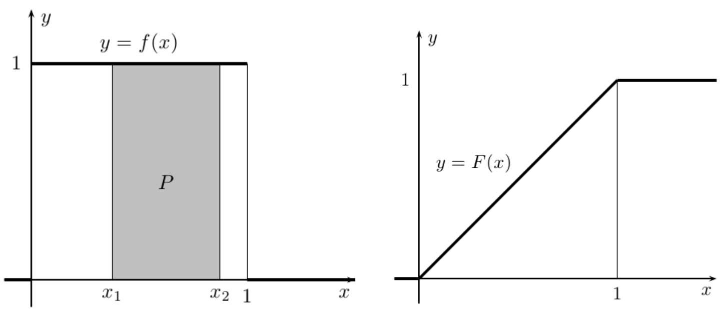

Abbildung 2: links: Die W'keitdichte der Gleichverteilung, rechts: Die Verteilungsfunktion der Gleichverteilung

7.1.2 Erwartungswert und Varianz

Erwartungswert $\mu = \mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ **Varianz** oder **Streuung** $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - \mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$

7.2 Die Normalverteilung

7.2.1 Die standardisierte Normalverteilung

Dichtefunktion der standardisierten Normalverteilung $f(z) = \varphi(z, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ für $-\infty < z < \infty$

Beispiel 7.2.1. Es sei $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ eine standardnormalverteilte Zufallsgrösse. Wir berechnen die W'keit $P(1 \leq Z \leq 2.45) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_1^{2.45} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(2.45, 0, 1) - \Phi(1, 0, 1)$. In der Tafel finden wir $\Phi(1, 0, 1) = 0.8413$ und $\Phi(2.45, 0, 1) = 0.9929$. Also folgt durch Subraktion die gesuchte W'keit = 0.1516.

Bemerkung 7.2.1. Es gilt $\Phi(-\infty, 0, 1) = 0$ und $\Phi(\infty, 0, 1) = 1$

7.2.2 Die Normalverteilung mit den Parametern μ und σ^2

Dichtefunktion $f(x) = \varphi(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ für $-\infty < x < \infty$.

Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = \mu$ **Varianz** oder **Streuung** $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$

7.2.3 Transformation auf die standardisierte Normalverteilung

Es wird $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ substituiert. Daraus folgt $P(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \Phi(x_2, \mu, \sigma^2) - \Phi(x_1, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{x_1-\mu}{\sigma}}^{\frac{x_2-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi(\frac{x_2-\mu}{\sigma}, 0, 1) - \Phi(\frac{x_1-\mu}{\sigma}, 0, 1)$.

Beispiel 7.2.2. Es sei $X \sim \mathcal{N}(2, 4)$ eine normalverteilte Zufallsgrösse mit den Parametern $\mu = 2$ und $\sigma^2 = 4$. Wir berechnen die W'keit $P(1 \leq X \leq 2.45) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 4}} \int_1^{2.45} e^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot 4}} dx$. Also folgt mit der Transformation $z_1 = \frac{1-2}{2} = -0.5$ und $z_2 = \frac{2.45-2}{2} = 0.225$, dass $P(1 \leq X \leq 2.45) = P(-0.5 \leq Z \leq 0.225) = \Phi(0.225, 0, 1) - \Phi(-0.5, 0, 1)$. In der Tafel finden wir $\Phi(-0.5, 0, 1) = 1 - \Phi(0.5, 0, 1)$.

7.3 Normalverteilung als Grenzfall der Binomialverteilung

Die Binomialverteilung kann für kleine Erfolgsw'keiten p und grosse Versuchsanzahl n durch die Poissonverteilung angenähert werden. Ist p nicht klein, so können wir die Normalverteilung nutzen. Der **Grenzwertsatz von de Moivre und Laplace** besagt, dass eine binomialverteilte Zufallsgrösse X mit Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = np$ und Varianz $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$, näherungsweise normalverteilt mit den Parametern $\mu = np$ und $\sigma^2 = np(1-p)$ ist. Danach können wir für eine binomialverteilte Zufallsgrösse X für greosses n die Näherungsformel $P(x_1 \leq x_2) \approx \Phi(\frac{x_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}, 0, 1) - \Phi(\frac{x_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}, 0, 1)$ verwenden. In der Literatur wird diese Näherung als Faustregel für $n > \frac{9}{p(1-p)}$ empfohlen.

8 Statistische Tests

8.1 Das Prinzip des statistischen Tests

Beispiel 8.1.1. Bei 12000 Würfen eines Würfels wurden $x = 2107$ Sechsen gezählt. Ist dieser Würfel unsymmetrisch, d.h. werden Sechsen bevorzugt gewürfelt? **Lösung:** $n = 12000$ Würfen, p die W'keit eine Sechs zu würfeln und X die Zufallsgrösse der Anzahl Sechsen.

Nullhypothese H_0 $p = \frac{1}{6}$, d.h., der Würfel ist symmetrisch

Alternativhypothese H_1 $p > \frac{1}{6}$, d.h., es werden Sechsen bevorzugt gewürfelt

Unter der Voraussetzung der Nullhypothese H_0 berechnen wir nun den Erwartungswert $\mathbb{E}(X) = np = 12000 \cdot \frac{1}{6} = 2000$. Da der Erwartungswert nicht unserem Experiment entspricht $(2107 > 2000)$ bestimmen wir die W'keit $P(2107 \leq X)$. $\mu = 2000$ und $\sigma^2 = np(1-p) = 12000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 1666\frac{2}{3}$. Wir erhalten nun mit Tafel $P(2107 \leq X) \approx 1 - \Phi(\frac{2107-2000}{\sqrt{1666\frac{2}{3}}}, 0, 1) = 1 - \Phi(2.621, 0, 1) = 0.0044$. Die W'keit unter der Voraussetzung der Nullhypothese so viel Abweichung vom Erwartungswert zu erhalten, ist somit ausserordentlich klein. Dies erlaubt uns, die Nullhypothese abzulehnen. Die **Irrtumsw'keit** dieses Schlusses entspricht dem berechneten Wert $P(2107 \leq X) \approx 0.0044$

Vorgehen:

1. Aufstellen der **Nullhypothese** H_0 und der **Alternativhypothese** H_1 und Vorgabe des **Signifikanzniveaus** α

2. Bestimmen eines **Ablehnungsbereichs** in Abhängigkeit von α, für den die W'keit, dass die Stichprobenfunktion Werte aus dem Ablehnungsbereich annimmt, höchstens gleich α ist.

3. Berechnung der **Testgrösse** aus der vorliegenden konkreten Stichprobe.

4. **Statistischer Schluss:** Liegt die Testgrösse im Ablehnungsbereichs, so wird H_0 abgelehnt, sonst wird H_0 angenommen.

8.2 Einseitiger und zweiseitiger Test

In allen Fällen gehen wir von der Nullhypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ aus.

1. **Zweiseitiger Test** $H_1 : \mu \neq \mu_0$. Zur Konstruktion des Ablehnungsbereiches wird der Flächeninhalt α symmetrisch auf beiden Seiten der Kurve aufgeteilt, und es ergibt sich einen zweiseitigen Ablehnungsbereich mit den beiden kritischen Grössen $z_{\frac{\alpha}{2}}$ und $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Die Abweichung zwischen den Stichprobenparameter und dem hypothetischen Wert μ_0 wird nur dem Absolutbetrag nach beurteilt.

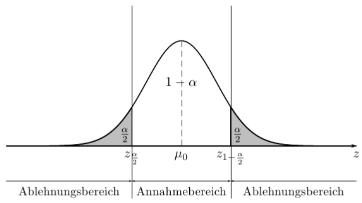

Abbildung 3: $H_1 : \mu \neq \mu_0$, zweiseitige Fragestellung mit den kritischen Grössen $z_{\frac{\alpha}{2}}$ und $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

2. **Einseitiger Test** $H_1 : \mu > \mu_0$ (resp. $H_1 : \mu < \mu_0$). Zur Konstrutkion des Ablehnungsbereiches wird der Flächeninhalt α nur auf einer Seite der Kurve abgeschnitten, und es ergibt sich einen einseitigen Ablehnungsbereich mit der kritischen Grösse z_α (resp. $z_{1-\alpha}$). Die damit verbundene einseitige Fragestellung liegt dann vor, wenn nur Abweichungen nach einer Seite interessieren, d.h., wenn es z.B. darauf ankommt zu beurteilen, ob ein Stichprobenparameter nicht zu gross ist, während einem zu kleinen Stichprobenparameter keine Bedeutung beigemessen wird. Hier müssen also grosse positive (resp. negative) Abweichungen zu einer Ablehnung zur Nullhypothese führen.

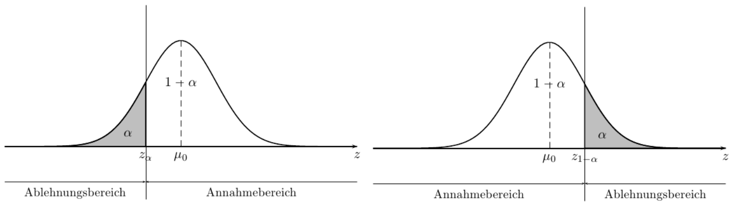

Abbildung 4: $H_1 : \mu < \mu_0$ (r: $H_1 : \mu > \mu_0$) einseitige untere (obere) Fragestellung mit der kritishen Grösse z_α ($z_{1-\alpha}$)

Beispiel 8.2.1. (z-Test) Letztes Jahr waren 75% der SBB-Fahrgäste Inhaber von Halbtaxabos. Bei einer kürzlich durchgeführten Fahrgastbefragung gaben 270 von 350 Befragten an, dass sie ein Halbtaxabo besitzen. Hat sich der Anteil der Besitzer von Halbtaxabos wesentlich verändert? Das Signifikanzniveau sei $\alpha = 10\%$. **Lösung:** Um diese Frage zu beantworten, führen wir einen statistischen Test nach obigem Prinzip durch: Es sei $p = 0.75$ der relative Anteil von Halbtaxabobesitzer im letzten Jahr. Nun formulieren wir die Null- und Alternativhypothese für einen statistischen Test:

$H_0 : p = 0.75$, d.h., die # Halbtaxabobesitzer ist gleich wie letztes Jahr.
$H_0 : p \neq 0.75$, d.h., die # Halbtaxabobesitzer hat sich verändert.

Es handelt sich hier um einen so genannten **zweiseitigen Test**, da hier die Alternativhypothese nur Werte $p \neq 0.75$ zulässt. Weiter beschreibe die Zufallsgrösse X die Anzahl der Halbtaxabobesitzer unter den $n = 350$ befragten Fahrgästen. Die Zufallsgrösse X ist binomialverteilt. Wir berechnen den Erwartungswert und die Varianz unter Annahame der Nullhypothese H_0. $\mathbb{E}(X) = np = 262.5$ und $\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 65.625$. Es stellt sich also die Frage, ob sich die Zahl der gezählten 270 Halbtaxabobesitzer signifikant vom Erwartungswert unterscheidet.
Weil $np(1-p) > 9$ können wir die Binomialverteilung mit einer Nomralverteilung mit den Parametern $\mu = 262.5$ und $\sigma^2 = 65.625$ approximieren. Durch eine Massstabsänderung auf der Koordinatenachse und einer Nullpunktverschiebung auf der x-Achse $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ kann von der Normalverteilung mit den Parametern μ und σ^2 zur standardisierten Normalverteilung mit den Parametern übergangen werden. Da es sich hier um eine zweiseitigen Test handelt, verteilen wir $\alpha = 0.10 = 0.05 + 0.05$ gleichmässig auf beide Seiten der Standardnormalverteilung. Aus der Beziehung $P(Z \leq z_{0.05}) = \Phi(z_{0.05}, 0, 1) = 0.05$

bestimmen wir mit Tafel. $z_{0.05} = -1.645$ ist die untere kritische Grenze. Die obere ist $z_{0.95} = 1.645$.
Die Berechnung der Testgrösse aus den vorliegenden Angaben ergibt $z = \frac{270-\mu}{\sigma} = 0.926$. Es gilt nun $z_{0.05} < z = 0.926 < z_{0.95} = 1.645$, d.h., die testgrösse z liegt im Annahmebereich und somit lautet der statistische Schluss: Wir nehmen die Nullhypothese auf dem Niveau 10% an. Der Anteil der Besitzer von Halbtaxabos hat sich nicht signifikant verändert.

9 Prüfen von Erwartungswerten

9.2 Einstichproben-t-Test

Beim **Einstichproben-t-Test** ist der Erwartungswert μ der Grundgesamtheit G bekannt und es sind folgende **Voraussetzungen** zu beachten:

1. Die normalverteilte Grundgesamtheit G hat den bekannten Erwartungswert μ und die unbekannte Varianz σ^2.

2. Es dind zufällig N Stichprobenwerte $x_1, \ldots, x_N$ aus einer normalverteilten Grundgesamtheit gewählt.

geschätzte Mittelwert $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ aufstellen und mit Erwartungswert μ der Grundgesamtheit G vergleichen.

$H_0 : \mu = \bar{x}$, d.h., Stichprobe stammt aus der Grundgesamtheit G mit Erwartungswert μ.
$H_1 : \mu \neq \bar{x}$, d.h., Stichprobe stammt aus einer anderen Grundgesamtheit.

Zu jeder Stichprobe berechnen wir aus den Werten $x_1, \ldots, x_N$ den geschätzten Mittelwert $\bar{x}$ und die **geschätzte Varianz** $s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$ und daraus die **Testgrösse** $t = \frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{N}$.
Der Wert der Testgrösse t wird umso grösser,

- je grösser die Abweichung des geschätzten MIttelwerts $\bar{x}$ vom Erwartungswert μ ist,
- je grösser der Stichprobenumfang N gewählt ist und
- je kleiner die geschätzte Varianz s^2 ist, d.h., je weniger die Stichprobenwerte um den Mittelwert streuen.

statistische Schluss (zweiseitige Fragestellung):

- Ist die Testgrösse $|t| < t_{n,1-\frac{\alpha}{2}}$, dann wird die Nullhypothese H_0 angenommen, d.h., Abweichungen vom idealen Wert $t = 0$ sind zufälliger Natur. Die Stichprobe stammt somit mit einer Irrtumsw'keit von $1 - \alpha$ aus der Grundgesamtheit mit dem Erwartungswert μ.
- Ist die Testgrösse $|t| \geq t_{n,1-\frac{\alpha}{2}}$, dann wird die Nullhypothese H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt. Die Stichprobe stammt demnach aus einer andere Grundgesamtheit.

Beispiel 9.2.1. Es sei die folgende Stichprobe mit zehn Werten gegeben: 5 -5 7 4 15 -7 5 10 18 16
Lösung: Uns interessiert nun, ob die Stichprobe aus einer Grundgesamtheit mit Erwartungswert $\mu = 0$ und unbekannter Varianz stammt oder nicht.

$H_0 : \mu = \bar{x}$, d.h., Stichprobe stammt aus der Grundgesamtheit mit Erwartungswert $\mu = 0$.
$H_1 : \mu \neq \bar{x}$, d.h., Stichprobe stammt aus einer anderen Grundgesamtheit.

Wir indentifizieren den Stichprobenumfang mit $N = 10$ und berechnen $\bar{x} = 6.8$ und $s^2 = 70.18$. Die Nullhypothese besagt in diesem Fall, dass das Mittel $\bar{x} = 6.8$ rein zufällig, auswahlbedingt, vom erwarteten theoretischen Wert $\mu = 0$ abweicht. Da hier der Erwartungswert $\mu = 0$ der Grundgesamtheit bekannt und die Varianz unbekannt ist, benutzen wir einen Student-t-Test mit $n = N - 1 = 9$ Freiheitsgraden, um obige Hypothese zu untersuchen. Wir berechnen die Testgrösse $t = \frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{N} = \frac{6.8-0}{\sqrt{70.18}}\sqrt{10} = 2.567$. Zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$ bestimmen wir nun die kritische Grösse $t_{9,1-0.025} = 2.262$ für die zweiseitige Fragestellung. Nun führen wir den **statistischen Schluss** durch: Es gilt $|t| = 2.567 \geq t_{9,1-0.025} = 2.262$, also wird die Nullhypothese H_0 abgelehnt. Das Mittel $\bar{x} = 6.8$ weicht somit wesentlich vom theoretischen Wert $\mu = 0$ ab.

9.2.1 Vertrauensintervall für den Erwartungswert

Beispiel 9.2.2. Es sei eine Stichprobe vom Umfang $N = 10$ mit geschätztem Mittelwert $\bar{x} = 5$ und Standardabweichung $s = 0.2$ gegeben. In welchem Intervall liegt nun der wahre aber unbekannte Erwartungswert μ der normalverteilten Grundgesamtheit? **Lösung:** Dazu berechnen wir zur Vertrauensw'keit $\gamma = 0.95$ die kritische Grösse $t_{9,1-0.025} = 2.262$ der Student-t-Verteilung. Damit ergibt sich das gesuchte Vertrauensintervall $5 - \frac{2.262}{\sqrt{10}}0.2 \leq \mu \leq 5 + \frac{2.262}{\sqrt{10}}0.2$, also $4.86 \leq \mu \leq 5.14$ mit 95% W'keit.

9.2.2 Ungefähr erforderlicher Stichprobenumfang

$N = \frac{t^2 s^2}{(\bar{x}-\mu)^2}$. Toleranzbereich $\delta\mu = |\bar{x} - \mu|$ vor. Ist zusätzlich die Varianz s^2 aus Voruntersuchungen etwa in Form einer oberen Schranke bekannt, so können wir für den Stichprobenumfang N einen ungefähren Wert abschätzen, indem wir einen Durchschnittswert für $t = t_{n,1-\frac{\alpha}{2}} \approx 2$ bei einer Vertrauensw'keit $\gamma = 1 - \alpha$ einsetzen. Wir erhalten damit einen ungefähren Stichprobenumfang $N \approx 4\frac{s^2}{\delta\mu^2}$.

9.3 Vergleich zweier Mittelwerte unverbundener Stichproben

9.3.1 Zweistichproben-t-Test bei unbekannten aber gleichen Varianzen

Beispiel 9.3.1. (Parallelklassen) An einer Fachhochschule werden eine Klasse A von 25 Studierenden und eine Parallelklasse B von 28 Studierenden vom gleichen Dozenten in Mathe unterrichtet. Der Dozent gestaltet jeweils den Unterricht in beiden Klassen gleich. Demzufolge wurden die beiden Klassen gleichzeitig zur gleichen Klausur aufgeboten. Die erreichten Notendurchschnitte waren $\bar{x}_A = 3.9$ und $\bar{x}_B = 4.2$ und die Standardabweichungen betrugen je $s_A = s_B = 1$. Der Dozent stellt sich nun sofort die Frage ob die B-Klasse signifikant besser als die A-Klasse sei. **Lösung:** Beim **Zweistichproben-t-Test** sind folgende **Voraussetzungen** zu beachten:

1. Die normalverteilten Grundgesamtheiten G_1 und G_2 haben die unbekannten Erwartungswerte μ_1 und μ_2 und die unbekannten aber **gleichen** Varianzen $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ so genannt **homoskedastischer** Fall. Der Wert von σ^2 braucht jedoch nicht bekannt zu sein.

2. Es sind zufällig zwei Stichproben $x_1, \ldots, x_{N_1}$ und $y_1, \ldots, y_{N_2}$ aus den normalverteilten Grundgesamtheiten G_1 und G_2 gewählt.

Wir wollen nun wissen, ob sich die Mittelwerte $\bar{x}$ und $\bar{y}$ der gewählten Stichproben signifikant voneinander unterscheiden um herauszufinden, ob die Stichproben aus der gleichen Grundgesamtheit stammen. Dazu formulieren wir die beiden alternativen Hypothesen

$H_0 : \mu = \bar{x}$, d.h., Stichprobe stammt aus der Grundgesamtheit.
$H_1 : \mu \neq \bar{x}$, d.h., Stichprobe stammt aus unterschiedlichen Grundgesamtheit.

Um die Frage zu beantworten berechnen wir die **geschätzten Mittelwerte** $\bar{x} = \frac{1}{N_1}\sum_{i=1}^{N_1} x_i$ und $\bar{y} = \frac{1}{N_2}\sum_{i=1}^{N_2} y_i$ und die **geschätzte Varianzen** $s_1^2 = \frac{1}{N_1-1}\sum_{i=1}^{N_1}(x_i - \bar{x})^2$ und $s_2^2 = \frac{1}{N_2-1}\sum_{i=1}^{N_2}(y_i - \bar{y})^2$ und daraus das **gewogene Mittel der Varianzen** $s^2 = \frac{(N_1-1)s_1^2+(N_2-1)s_2^2}{N_1+N_2-2}$. Mit diesen Werten berechnen wir nun die **Testgrösse** $t = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{s}\sqrt{\frac{N_1 N_2}{N_1+N_2}}$, welche unter den obigen Voraussetzungen und der Nullhypothese einer Student-t-Verteilung mit $n = N_1 + N_2 - 2$ Freiheitsgraden genügt. Damit können wir nun nach Vorgabe eines Signifikanzniveaus α die kritische Grösse $t_{n,1-\frac{\alpha}{2}}$ für die zweiseitige Fragestellung bestimmen. Danach ziehen wir wieder den **statistischen Schluss:**

- Ist die Testgrösse $|t| < t_{n,1-\frac{\alpha}{2}}$, dann wird die Nullhypothese H_0 angenommen, d.h., die Unterschiede zwischen $\bar{x}$ und $\bar{y}$ sind zufälliger Natur.

- Ist die Testgrösse $|t| \geq t_{n,1-\frac{\alpha}{2}}$, dann wird die Nullhypothese H_0 auf dem Signifikanzniveau α abgelehnt.

Sind im Falle unabhängiger Stichproben ihre Umfänge gleich, gilt also $N_1 = N_2 = N$, so vereinfacht sich die Testgrösse zu $t = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{s_1^2+s_2^2}}\sqrt{N}$