Laplace-Experiment

Ein Zufallsexperiment mit n verschiedenen möglichen Ergebnissen, die alle dieselbe Wahrscheinlichkeit, alse $\frac{1}{n}$ haben. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $E \subseteq \Omega$ wird für diesen Fall folgendermassen definiert:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl günstige Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller Ergebnisse}} \tag{1}$$

Dieses P heisst auch **Gleichverteilung**.

Produkte

Wenn es bei einem mehrstufigen Auswahlprozess für das 1. Objekt n_1 Möglichkeiten, für das 2. Objekt n_2 Möglichkeiten, ..., und für das k-te Objekt n_k Möglichkeiten gibt, dann gibt es für den gesamten Auswahlprozess $n_1 * n_2 * \cdots * n_k$ Möglichkeiten.

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k| = |A_1| * |A_2| * \cdots * |A_k| \tag{2}$$

Summen

Wenn es n_1 Objekte mit Eigenschaft 1, n_2 Objekte mit Eigenschaft 2, ..., n_k Objekte mit Eigenschaft k gibt, und kein Objekt zwei der Eigenschaften gleichzeitig besitzt, dann gibt es insgesamt $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ Objekte die eine der Eigenschaft besitzen.

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k| \tag{3}$$

Fakultät

Wir ziehen n mal ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge aus einer Urne mit n Kugeln. Dan gibt es $n * (n-1) * \ldots * 2 * 1$ Möglichkeiten.

$$n! := n * (n-1) * \cdots * 2 * 1 \sim \sqrt{2 * \pi * n} * (\frac{n}{e})^n \tag{4}$$

Binominalkoeffizient

$\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an.

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! * k!} \tag{5}$$

Urnenmodel

	zurücklegen	nicht zurücklegen
geordnet	n^k	$n!$ oder $\frac{n!}{(n-k)!}$
ungeordnet	$\binom{k+n-1}{k}$	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Wahrscheinlichkeit

Eien Wahrscheinlichkeit $P : 2^\Omega \to [0,1]$ erfüllt:

$$P(\Omega) = 1 \tag{6}$$
$$\forall E \subseteq \Omega : P(E^c) = 1 - O(E) \tag{7}$$
$$P(0) = 0 \tag{8}$$

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots \tag{9}$$
$$\forall E_1, E_2 \subseteq \Omega : P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \tag{10}$$
$$E = \{e_1, e_2, \ldots\} \to P(E) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \ldots \tag{11}$$

Z-Dichte

Die Funktion $f_P : \Omega \to [0,1]$ mit $f_P(w) = P(\{w\})$ heisst Zähldichte von P.

$$P(E) = \sum_{e \in E} f_P(e) \tag{12}$$
$$P(E) = \sum_{e \in \Omega} f_P(e) = 1 \tag{13}$$

bedingte Wahrscheinlichkeit

Es sei $B \subseteq \Omega$ mit $P(B) > 0$. Dann heisst $P(A|B)$ (elementare) bedingte Wahrscheibnlichkeit von A unter B.

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{14}$$

Formel von Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} * P(B|A) \tag{15}$$

totele Wahrscheinlichkeit

Es sei $B_i (i \in I)$ eine Zerlegung von Ω (d.h. die B_i sind paarweise disjunkt und $\Omega = U_{i \in I} B_i$) mit $P(B_i) > 0$.

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|B_i) * P(B_i) \tag{16}$$

positive prädiktive Wert

Für $0 < P(A) < 1$ gilt mit $\Omega = A \cup A^c$ insbesondere:

$$P(A|B) = \frac{P(A) * P(A|B)}{P(B|A) * P(A) + P(B|A^c) * P(A^c)} \tag{17}$$

stochastische Unabhängigkeit
Zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ heissen stochastisch unabhängig, falls

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B) \equiv \underbrace{P(A|B)}_{\frac{P(A\cap B)}{P(B)}} = P(A) \leftarrow (B) \neq 0] \tag{18}$$

Mehrstufige Zufallsexperimente
Gegeben ist eine Urne mit 4 weissen und 2 schwarzen Kugeln. Wir ziehen dreimal ohne Zurücklegen: Was ist die Warhscheinlichkeit A: ¨Dritte Kugel weiss¨?
$\Omega = \{w, s\} \times \{w, s\} \times \{w, s\}$ und $A = \{(w, w, w), (w, s, w), (s, w, w), (s, s, w)\}$

$$P(A) = f(w, w, w) + f(w, s, w) + f(s, w, w) + f(s, s, w) \tag{19}$$

Verteilungsfunktion
Es sei $X : \Omega \to X$ eine Zufallsvariable, wobei $X \in \mathbb{R}$ eine endliche oder abzählbare Menge ist. Zudem sei f die Zähldichte von X.

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \in X : t \leq x} f(t) \tag{20}$$

Erwartungswert, Varianz & Standardabweichung

$$E(X) = \sum_{x \in X} x * f(x) = \sum_{x \in X} x * P(X = x) \tag{21}$$
$$V(X) = \sum_{x \in X} (x - E)^2 * f(x) = \sum_{x \in X} (x - E)^2 * P(X = x) = E(X^2) - E(X)^2 \tag{22}$$
$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \tag{23}$$

Bernoulli-Verteilung
Treffer ($WK\ p$), nicht Treffer

$$X \sim B(p) : P(0) = 1 - p \tag{24}$$
$$P(1) = p \tag{25}$$
$$E(X) = p \tag{26}$$
$$V(X) = p * (1 - p) \tag{27}$$

Binomial-Verteilung
Anzahl Treffer ($WK\ p$) in n unabhängigen Versuchen

$$X \sim Bin(n, p) : P(X = k) = \binom{n}{k} * p^k * (1 - p)^{n-k}, k = 0, 1, \ldots, n \tag{28}$$
$$E(X) = n * p \tag{29}$$
$$V(X) = n * p * (1 - p) \tag{30}$$

geometirsche-Verteilung

Versuche bis erster Treffer ($WK\ p$) in unabhängigen Veruschen

$$X \sim Geo(n, p) : P(X = k) = (1 - p)^{k-1} * p, k = 0, 1, \ldots, n \tag{31}$$
$$E(X) = \frac{1}{p} \tag{32}$$
$$V(X) = \frac{1 - p}{p^2} \tag{33}$$

Poisson-Verteilung

Verteilung für seltene Ereignisse mit im Schnitt λ Ereignisse pro Zeit/Ort

$$X \sim Poi(\lambda) : P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} * e^{-\lambda}, k = 0, 1, \ldots, n \tag{34}$$
$$E(X) = \lambda \tag{35}$$
$$V(X) = \lambda \tag{36}$$

Eigenschaften

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \tag{37}$$
$$E(a * X) = a * E(X) \tag{38}$$
$$E(X + c) = E(X) + c \tag{39}$$
$$V(X + c) = V(X) \tag{40}$$
$$V(a * X) = a^2 * V(X) \tag{41}$$
$$E(g(X)) = \sum_x g(x) * P(X = x) \leftarrow [\mathbb{R} \to \mathbb{R}] \tag{42}$$
$$E(g(X)) \neq g(E(X)) \tag{43}$$

Stetige Verteilungen Allgemein

Ganze fläche unter der Dichtefunktion muss 1 sein :

$$P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \tag{44}$$

$$\tag{45}$$

$$P(a \leq X \leq b = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{46}$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \tag{47}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx \tag{48}$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2.f(x)dx = E(X^2) - E(X)^2 \tag{49}$$

$$\sigma(X) = \sqrt(V(X)) \tag{50}$$

0.0.1 Stetige Gleichverteilung

$$f(x) = \frac{1}{t-s} E(x) = \frac{s+t}{2} V(x) = \frac{1}{12}(t-s)^2 \tag{51}$$

Matlab: `unifpdf(x,s,t)`
`unifcdf(x,s,t)`
Beispiel : Person A kommt zu zufälligen Zeitpunkt am Bahnhof : P(Wartezeit länger als 10 min)

Standard-Normalverteilung
Matlab:
`normpdf(x)`
`normcdf(x)`

$$X\ N(0,1) \tag{52}$$
$$E(X) = 0 \tag{53}$$
$$V(X) = 1 \tag{54}$$

Normalverteilung
Matlab:
`normpdf` (x, μ, σ) `normcdf` (x, μ, σ)

$$E(X) = \mu \tag{55}$$
$$V(X) = \sigma^2 \tag{56}$$

Verteilungsfunktion $= \phi$

Standisierung Normalverteilung

$$X - \mu\ (0, \sigma) \tag{57}$$
$$Z\ N(0,1) : Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{58}$$

Quantil der Normalverteilung

Gegeben ist ein $\alpha \in (0,1)$: Für welchen Wert gilt $P(X \leq z_a) = a$? **Matlab:** `norminv`$(a\mu\sigma)$
Standardnormalverteiling : (Falls Parameter fehlen z.B)
`norminv(a)`

Sigma Regeln

$$P(|X - \mu| \leq \sigma) \approx 68.3\% \tag{59}$$
$$P(|X - \mu| \leq 2\sigma) \approx 95.5\% \tag{60}$$
$$P(|X - \mu| \leq 3\sigma) \approx 99.7\% \tag{61}$$
$$\tag{62}$$

Exponentialverteilung

$$P(X \geq t) = e^{-\lambda t}, (t \geq 0) \tag{63}$$
$$F(t) = 1 - e^{-t} \tag{64}$$
$$\tag{65}$$

Matlab:
`exppdf`$(x, \frac{1}{\lambda})$
`expcdf`$(x, \frac{1}{\lambda})$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \tag{66}$$
$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \tag{67}$$
$$\tag{68}$$

Zwischenankuftszeit $\quad Exp(\lambda) \Leftrightarrow$ Anzahl $\quad Poi(\lambda)$ **No Memory Property:** Wenn ein Gerät mit einer exponentiell verteilten Lebendauer X, t Stunden gelaufen ist,
$P(h)$ wo h ist für h Stunden weiter laufen ist gleich wie als es neu wäre.

Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

$$X\ Poi(\lambda_1), Y\ Poi(\lambda_2) \Rightarrow X + Y\ Poi(\lambda_1 + \lambda_2) \tag{69}$$
$$X\ Bin(n_1, p), Y\ Bin(n_2, p) \Rightarrow X + Y\ Bin(n_1 + n_2, p) \tag{70}$$

Additionstheorem der Normalverteilung

Seien $X_1, X_2, ...X_N$ unabhängige normal verteilte Zufallsvariablen eines Zufallsexperiments mit Erwartungswetern μ_i und σ_i Wieter seien $a_1..a_n$ beliebige reelle Zahlen nicht alle gleich 0.

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + a_nX_nE(Y) = a_1\mu_1 + .. + a_n\mu_nV(X) = a_1^2\sigma_1^2 + .. + a_n^2\sigma_n^2 \quad (71)$$

Beispiel :
$X_1\ N(250, 7.5)$
$X_2\ N(30, 2.2)$
$X_3\ N(750, 20)$
$P(X_1 + X_2 + X_3)\ N(250 + 30 + 750, \sqrt{7.5^2 + 2.2^2 + 20^2}$

Eigenschaften Bei Addition von E und V

Erwartungswert ist linear

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \quad (72)$$
$$E(aX) = aE(X) \quad (73)$$
$$E(X + c) = E(X) + c \quad (74)$$
$$V(X + c) = V(X) \quad (75)$$
$$V(aX) = a^2V(X) \quad (76)$$
$$(77)$$

Tschebycheff

Es sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2

$$k > 0 : P(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2} \quad (78)$$

Zentraler Grenzwertsatz

$$S_n = X_1.. + X_n\mu_n = n.\mu \quad (79)$$
$$\sigma_n = \sqrt{n}.\sigma \frac{S_n - \mu_n}{\sqrt{n}.\sigma}\ N(0, 1) \quad (80)$$

Moivre und Laplace Grenzwertsatz

$Bin(n, p)$ als Summe von n $B(p)$ variablen

$$P(a \leq X \leq b) \approx \sigma(\frac{b - np}{\sqrt{np(1 - p}}) - \sigma(\frac{a - np}{\sqrt{np(1 - p)}}) \quad (81)$$

KonfidenzIntervall

Üblicherwiese Q = 0.95

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1 - p)}}\ N(0, 1) \quad (82)$$
$$\alpha = \frac{1 + Q}{2} \quad (83)$$
$$(84)$$

$z_\alpha = \texttt{norminv}(\alpha)$
Intervall :

$$[\frac{k}{n} - \frac{z_a}{n}\sqrt{\frac{k(n - k)}{n}}, \frac{k}{n} + \frac{z_a}{n}\sqrt{\frac{k(n - k)}{n}}] \quad (85)$$

Hypothesen

H_0 Nullhypothese

H_1 Alternativhypothese

Fehler 1 Art: H_O trifft zu aber verwerfen.

Fehler 2 Art: H_0 trifft **nicht** zu aber nicht verwerfen

Signigikanzniveau α Verwerfungsbereich - Wahrscheinlichkeit für Fehler 1 Art höchstens α

$X \in V_{bereich} \to H_0$ ungültig das Gegenteil gilt auch. Gegenteil ist aber zu schwach für definitven Beweis.

T Verteilung

Benutzt um σ zu Schätzen:

$$T = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}} \quad (86)$$

t verteilt mit n-1 Freiheitsgraden