

1 Mengen und Relationen

1.1 Naive Mengenlehre

- Georg Cantor 1845 -1918

Menge: "Sammlung" von Objekten

Diese Objekte heissen Elemente.

Notation: $x \in M \rightarrow x$ ist Element von M

Eine Menge ist durch ihre Elemente eindeutig bestimmt.

Bsp: $M = \{1,2,3\}$, $M = N \rightarrow N = \{3,1,2\}$

Beschreibung von Mengen

1. Durch Aufzählung: $M = \{1,2,3\}$

2. Durch Prädikate: $M = \{x | P(x)\}$ "Menge aller x , die das Prädikat P erfüllen"

3. grafische Darstellung (Venn-Diagramme)

Bsp. $a \in A, d \in B, c \in A, c \in B$

1.1.1 Notation

$\forall x \in G$: "Für alle x aus der Menge G ..."

$\exists x \in G$: "Es existiert ein Element x in der Menge G ..."

Beispiele:

1. $G := \mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$

$A := \{1,2\}$

$B := \{3,4\}$

$AB = \emptyset$

1.1.2 Satz 1

1. G Grundmenge

2. A, B, C Teilmengen von G

1.2 weitere Mengen-Konstruktionen

1.2.1 Potenzmenge

Definition: $P(M) := \{x | x \subseteq M\}$ Potenzmenge von M

Die Menge aller Teilmengen von M

Beispiele

a) $M := \{1\} \rightarrow P(M) = \{\emptyset, \{1\}\}$

- b) $M := \{1, 2, 3\} \rightarrow P(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
 c) $M := \emptyset \rightarrow P(M) = \{\emptyset\}$

1.2.2 das kartesische Produkt

Seien A, B Mengen, $a \in A, b \in B$

Definition: Das Symbol (a, b) heisst das geordnete Paar von a und b .

Bemerkung: $(a, b) = (c, d) \rightarrow a=c$ und $b=d$

Definition: Seien A, B Mengen

$A \times B := \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$ heisst das kartesische Produkt von A und B .

Beispiel:

- a) $\{1, 2, 3\} \times \{4, 5\} // \text{i.a. } A \times B \neq B \times A$
 $= \{ (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5) \}$
 b) $\{1, 2\} \times \{1, 2\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$
 c) $A = \{a, b\}$
 $A \times \emptyset = \{(a, \emptyset), (b, \emptyset)\}$

1.2.3 Partitionen

Gegeben eine Menge M

Definition: Eine Partition von M ist eine Menge π

$\pi := \{A_i | i \in I\}$

($I = \text{Indexmenge}$) mit

- 1.) $A_i \neq \emptyset$
- 2.) $A_i \subset M$
- 3.) $A_i \cap A_j = \emptyset$
- 4.) $\cup A_i = M = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots$

Beispiel:

- a) $M := \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$
 $A_1 := \{1\}, A_2 := \{2\}, A_3 := \{x \in \mathbb{N}^* | x \geq 3\}$
 $\pi = \{A_1, A_2, A_3\}$ ist eine Partition von M .
 b) $M := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
 $A_a = \{(x, y) \mid x=a, y \in \mathbb{R}\}$

$\pi = \{A_a \mid a \in \mathbb{R}\}$

2 Relationen

Durch Relationen werden Beziehungen zwischen Objekten ausgedrückt.
Eine Relation ist stets eine Teilmenge des kartesischen Produktes. Seien M_1, \dots, M_n Mengen

Definition

Eine Teilmenge $R \subset M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$
heisst eine n-stellige Relation auf M_1, M_2, \dots, M_n

Beispiel 1:

$M =$ Einwohner von Brugg

$$R_1 \subset M \times M \times M // M^3$$

$(a, b, c) \in R_1 : \Leftrightarrow$ "a ist Vater von c", "b ist Mutter von c"

Beispiel 2:

$$R_2 \subset R^2 = R \times R$$

$$R_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\} \subset R \times R$$

Beispiel 3:

$$R_3 \subset R^2 = R \times R$$

$$R_2 = \{(x, y) | y = e^x\}$$

Beispiel 4:

Sei A eine beliebige Menge.

$$R_4 := \{(B, C) | B \subset C \subset A\} \subset P(A) \times P(A)$$

2.1 Beschränkung auf binäre Relationen: $R \subset M_1 \times M_2$

Notation: $x R y : \Leftrightarrow (x, y) \in R \subset M_1 \times M_2$

2.2 Darstellung von binären Relationen auf endlichen Mengen

Sei $R \subset M^2 = M \times M$ // Relation "auf" der Menge M

1) Matrizen

$M := \{m_1, m_2, m_3\}$ Wir nummerieren die Elemente $A_R := 3 \times 3$ Matrix, a_{ij}

$= \{0, \text{ falls } (m_{i,j}) \notin R, 1, \text{ sonst } \}$

2) (gerichtete Graphen)

$M := \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

$R \subset M^2 : R = \{(a_1, a_4), (a_4, a_3), (a_2, a_3)\}$

G_R Punkte = Elemente der Menge M

2.3 Spezielle Eigenschaften von Relationen

Definition

- 1) $R \subset M^2$ reflexiv : $\Leftrightarrow \forall x \in M : (x, x) \in R$
- 2) $R \subset M^2$ irreflexiv : $\Leftrightarrow \forall x \in M : (x, x) \notin R$
- 3) $R \subset M^2$ symmetrisch : $\Leftrightarrow \forall x, y \in M : (y, x) \in R \rightarrow (x, y) \in R$
- 4) $R \subset M^2$ antisymmetrisch : $\Leftrightarrow \forall x, y \in M : (y, x) \in R \rightarrow x = y$
- 5) $R \subset M^2$ transitiv : $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in M : (x, y), (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$

Beispiel $M := \{1, 2, 3, 4\}$

- 1) $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (3, 3), (4, 4)\} \subset M^2$
- reflexiv, antisymmetrisch, transitiv
- 2) $R_2 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 1)\} \subset M^2$
- nur symmetrisch
- 3) $R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 4)\} \subset M^2$
- transitiv
- 4) $R_4 = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3)\} \subset M^2$
- keine speziellen Eigenschaften
- 5) $R_5 = \emptyset$
- alles ausser reflexiv

2.4 Äquivalenzrelationen

Definition

$R \subset M \times M$ heisst Äquivalenzrelation

- 1) R ist reflexiv
- 2) R ist symmetrisch
- 3) R ist transitiv

Beispiel $M := \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 5), (5, 4)\}$

Sei R eine Äquivalenzrelation auf M und $a \in M$.

Definition

$[a] := \{x \in M \mid (x, a) \in R\}$

$[a]$ ist die Äquivalenzklasse von a bzgl. R (in M).

Beispiel

$[1] = \{1, 2, 3\} \subset M$

$$[2] = \{2, 1, 3\}$$

$$[3] = \{3, 2, 1\}$$

$$[4] = \{4, 5\}$$

$$[5] = \{5, 4\}$$

Satz 2

Voraussetzung: R ist Äquivalenzrelation auf M

Behauptung: $\Pi := \{[a] | a \in M\}$ ist eine Partition von M .

Beweis: 1) $\forall a \in M : a \in [a]$, weil *Reflexiv* : $\forall x \in M : (x, x) \in R$

d.h. $[a] \neq \emptyset$ und $\bigcup [a] = M$ (x), $a \in M$

$$M = \bigcup a \subset a \in [a] \rightarrow a \subset [a]$$

$$2) [a] \cap [b] \neq \emptyset \rightarrow [a] = [b]$$

Sei $[a] \cap [b] \neq \emptyset \rightarrow \exists c \in M : c \in [a] \cap [b]$, d.h. $c \in [a]$ und $c \in [b]$

$$\rightarrow (c, a) \in R \text{ und } (c, b) \in R$$

R symmetrisch: $(c, a) \in R \rightarrow (a, c) \in R$

R transitiv: $(a, c) \in R$ und $(c, b) \in R \rightarrow (a, b) \in R$

Wir zeigen: $[a] \subset [b] \text{ und } [b] \subset [a]$

z.Z. $d \in [a] \rightarrow d \in [b]$

$$d \in [a], \text{ d.h. } (d, a) \in R, \text{ und } (a, b) \in R \text{ (Risttransitiv)}$$

$$(d, b) \in R, \text{ d.h. } d \in [b]$$