Lineare Algebra

platzh1rsch

June 25, 2012

1 Mathematische Symbole

1.1 spezielle Zeichen

Symbol	alternativ	Beschreibung
$\langle$ a $\rangle$	$\overline{a}$	Mittelwert von a

1.2 Mengen und Intervalle

Symbol	alternativ	Beschreibung
D		Definitionsbereich
W		Wertebereich
L		Lösungsmenge
$[a;b]$		geschlossenes Intervall (von a bis b, inkl. a und b)
$(a;b)$	]a;b[	offenes Intervall (von a bis b, exkl. a und b)
$\in$		Element von ..
$\notin$		nicht Element von ..
$\subset$		Teilmenge von (z.B. N /*subset* R)
$\supset$		Obermenge von (z.b. (R /*supset* N)
$\cup$		Vereinigungsmenge (alle Elemente die in Menge 1 oder in Menge 2 vorkomm
/*cap*		Schnittmenge (alle Elemente welche in beiden Mengen vorkommen)

1.3 Syntax und logische Symbole

Symbol	alternativ	Beschreibung
$\mid$	:	"mit der Eigenschaft"
$\approx$	$\sim$	näherungsweise gleich / ziemlich genau
$\sim$	$\propto$	Proportional zu ..
:=	=:	linke / rechte Seite wird definiert zu ...
$\Rightarrow$		daraus folgt ...
$\Leftrightarrow$		Aus einer Seite folgt andere Seite
$:\Leftrightarrow$	$\Leftrightarrow:$	linke / rechte Seite ist per Definition gleichwertig
$\neg$		nicht
$\wedge$		und
$\vee$		oder
$\setminus$		ohne
$\circ$		Verknüpfung zweier Aussagen
$\forall$		"für alle"
$\exists$		"existiert (mindestens) ein"
$\exists^1$	$\exists!$	"existiert genau ein"
$\nexists$	$\neg\exists$	"existiert kein"

1.4 Vektoren

Symbol	alternativ	Bedeutung
$\lvert\vec{v}\rvert$		Betrag des Vektors $= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 ... v_n^2}$
$\vec{e}_v$		Einheitsvektor von $\vec{v} = \frac{\vec{v}}{\lvert\vec{v}\rvert}$
$\vec{r}_A$	$\vec{OA}$	Ortsvektor eines Punktes
$\vec{v}_A B$	$\vec{AB}$	Verbindungsvektor zweier Punkte
d_{AB}	$\overline{AB}$	Abstand zweier Punkte
$\vec{a} \cdot \vec{b} =$ c	$\langle a, b \rangle = c$	Skalarprodukt (inneres Produkt)
$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$		Vektorprodukt / Kreuzprodukt (äusseres Produkt)
$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}] = V$		Spatprodukt ($\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{b} = \vec{c})$)

1.5 Matrizen

Sollte nicht allzu kompliziert sein...

Symbol	alternativ	Bedeutung

2 der n-dimensionale Vektorraum

2.1 Matrizenräume

2.1.1 Normalensystem

Das Normalensystem ist sehr hilfreich um Näherungslösungen zu berechnen.

$(A^T A)x = (A^T b)$

3 Matrizen und lineare Abbildungen

3.1 Abbildung

Eine Abbildung ist eine Zuordnung welche jedem Element a der Menge A ein Element b der Menge B zuordnet. (Dabei kann auch A = B sein).
Allgemeine Schreibweise: $T : A \longrightarrow B : a \mapsto b$ b heisst Bild von a unter der Abbildung und wird mit T(a) bezeichnet.
Eine Abbildung kann auch als Transformation oder als Funktion bezeichnet werden.

3.1.1 lineare Abbildung

Eine lineare Abbildung im $\Re^2$ ist eine Abbildung $T : \Re^2 \Rightarrow \Re^2 : x \mapsto yT(x)$ mit den folgenden Abbildungsgleichungen: ...

Die Bilder der Basisvektoren unter einer linearen Abbildung mit Matrix A sind die Spaltenvektoren der Matrix A.

3.1.2 Eigenschaften einer linearen Abbildung

T(x+x')=T(x)+T(x')
$T(t \centerdot x) = t \centerdot T(x)$

4 lineare Gleichungssysteme

4.1 Gleichungssysteme mit mehr als einer Unbekannten

4.2 Rang einer Matrix

Der Rang einer Matrix ist die Anzahl Stufenspalten einer Matrix oder anders betrachtet einfach die Anzahl der Zeilen die nicht 0 sind.

5 Vektorgeometrie

5.1 Basis

Die Basis in der linearen Algebra ist eine Teilmengen eines Vektorraumes, mit deren Hilfe sich jeder Vektor des Raumes eindeutig als endliche Linearkombination darstellen lässt. Eine Basis besteht aus mehreren Basisvektoren welche alle voneinander linear unabhängig sind. Der zur Basis gehörende Vektorraum ist die lineare Hülle ebendieses.

5.2 Einheitsvektoren

Vektoren der Länge 1 heissen Einheitsvektoren.
Der Einheitsvektor eines Vektors kann berechnet werden mit

$\vec{a} := \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ dies nennt sich "normieren".

5.3 Nullvektor

Vektoren der Länge 0 sind Nullvektoren.

5.4 Skalarprodukt

Mit dem Skalarprodukt können Winkel und Längen berechnet werden.
$||\vec{a}||^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$

5.4.1 Geometrische Bedeutung des Skalarprodukts

$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot cos(\varphi)$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

5.5 Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Das Vektorprodukt existiert nur im R^3. Es ordnet zwei Vektoren einen dritten Vektor zu welcher senkrecht auf den zweien steht.

5.5.1 Gesetze des Vektorprodukts

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. $\vec{a} \times \vec{a}$
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{x}$
4. $(\vec{a} + \vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{2} + \vec{b} \times \vec{c}$
5. $||\vec{c}|| = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot sin(\varphi) = Parallelogramm$

ACHTUNG: Assoziativgesetz nicht gültig:
$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$
Der Betrag des Vektorprodukts entspricht der Fläche des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms.

5.6 Spatprodukt

Das Spatprodukt dreier Vektoren spannt ein Spat (Parallelepided) auf und existiert nur im R3. Berechnet wird es mit
$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] := (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}$
Die Vektoren liegen auf derselben Ebene wenn ihr Spatprodukt 0 ist.
Das Spatprodukt entspricht der 3x3 Matrix mit a, b und c als Spaltenvektoren.

5.7 Geraden

$ax + by + c = 0$ Gerade in der Ebene (R2)

5.7.1 Parametergleichung

$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{v}$

5.7.2 Spurpunkte

Spurpunkte sind Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen.

5.8 Ebene

Eine Ebene im R3 ist durch 3 Punkte gegeben und nach jeder Seite unendlich ausgedehnt. Ebenen können mit der Parametergleichung oder mit der Normalengleichung dargestellt werden.

5.8.1 Parametergleichung

$\vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$

5.8.2 Normalengleichung

$\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{p}) = 0 \leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{p}$

Die Normalengleichung einer Ebene stellt in Komponenten eine lineare Gleichun für die Koordinaten des laufenden Punktes der Ebene dar.

Koordinatengleichung
$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$

6 Determinanten

Die Determinante ist eine Funktion welche jeder quadratischen Matrix eine reelle Zahl zuordnet. Sie gibt u.a. an ob eine Matrix invertierbar ist.
$Ainvertierbar \Leftrightarrow det(A) \neq 0$

6.1 Berechnung von Determinanten

6.1.1 Zeilen- und Spaltenentwicklung

Die Determinante einer Matrix kann auf verschiedene Weisen als Summe von Determinanten von Untermatrizen einer Matrix berechnet werden. Dies nennt man Zeilen- und Spaltenentwicklung. Für alle Matrizen grösser 3x3 ist diese Berechnungsmethode zwingend, da die Methode von Sarrus nur bis 3x3 funktioniert.

Notation
A^{ij} bezeichnet die Untermatrix von A in welcher Zeile i und Spalte j gestrichen wurden.
$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $A^{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$
Für das Berechnen der Determinante sieht die Formel so aus:
$a_{11} \cdot det(A^{11}) - a_{12} \cdot det(A^{12}) + a_{13} \cdot det(A^{13})$

Wichtig ist dass das folgende Schema für die Vorzeichen der Koeffizienten eingehalten wird:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & .. \\ - & + & - & .. \\ + & - & + & .. \\ .. & .. & .. & \end{pmatrix}$$

6.2 Eigenschaften der Determinanten

1. Die Determinante ändert sich nicht beim Transponieren
$det(A) = det(A^T)$

2. Die Determinante ist linear in jeder Zeile / Spalte

$$det \begin{pmatrix} c \cdot a_{11} & c \cdot a_{12} & c \cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = c \cdot det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & c \cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & c \cdot a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & c \cdot a_{33} \end{pmatrix}$$

3. Das Vertauschen zweier Zeilen ändert das Vorzeichen der Determinante

4. Wenn zwei Zeilen oder zwei Spalten in einer Matrix identisch sind, ist die Determinante $= 0$

5. Enthählt eine Matrix eine Nullzeile oder Nullspalte ist die Determinante $= 0$

6. Lineare Umformungen mit Addition ändern nichts an der Determinanten

6.3 elementare Zeilenoperationen

Um die Berechnung der Determinante einfacher zu machen hilft es oft die Matrix vor der Entwicklung noch umzuformen. Dabei gelten einige Regeln bzgl. der Auswirkungen auf die Determinante.

1. Multiplikation einer Zeile mit dem Faktor $c \rightarrow A \cdot c$
2. Vertauschung zweier Zeilen $\rightarrow A \cdot -1$

6.4 Geometrische Bedeutung der Determinanten

7 lineare Unabhängigkeit

7.1 Linearkombinationen

Eine Linearkombination ist die Summe der Vielfachen von Vektoren.
Allgemeine Definition:
$b = \lambda a_1 + \lambda a_2 ... + \lambda a_n$ Wobei λ die Koeffizienten sind.

7.2 Matrizen und lineare Abbildungen

7.2.1 inverse Abbildung

Ist eine lineare Abbildung T invertierbar, d.h. besitzt sie eine Umkehrabbildung T^{-1}, dann ist diese Abbildung ebenfalls linear. Bezeichnet nun A die Abbildungsmatrix von T, so gehört zu T^{-1} ebenfalls eine Abbildungsmatrix A^*. Da die Zusammensetzung der beiden Abbildungen $T^{-1}\circ$ T die identische Abbildung ergibt, muss für die Matrizen gelten:

$T^{-1}(T(x)) = x$ für alle x
$A^*(Ax) = x$
$(A^* \circ A)x = x$

7.2.2 Drehung mit Drehmatrizen

Die Drehung eines Vektors um einen festen Ursprung um den Winkel α wird durch die Multiplikation mit der Drehmatrix R_α erreicht.

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}, R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix},$$
$$R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & 0 & sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin(\alpha) & 0 & cos(\alpha) \end{pmatrix}, R_z(\alpha) = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.3 Inverse einer Matrix

So wie gilt $a \cdot a^{-1} = 1$ so gibt es das gleiche "Phänomen" bei Matrizen mit den sogenannten invertierten Matrizen. Eine Matrix ist invertierbar wenn es eine Matrix B gibt für die gilt:

$A \cdot B = II$ und $B \cdot A = II \longrightarrow B = A^{-1}$

A^{-1} ist die Inverse von A. Da Matrizenmultiplikationen nicht kommutativ sind gibt es für jede invertierbare Matrix eine Links- und eine Rechtsinverse. Allerdings sind diese stets identisch.

Regeln
$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
$(A^{-1})^{-1} = A$

7.4 Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt

Der Gram-Schmidt Algorithmus berechnet zu den lineaer unabhängigen Vektoren $w_1..w_n$ ein Orthogonalsystem von n paarweise orthogonalen Vektoren ($v_1..v_2$ welche ebenfalls denselben Untervektorraum erzeugen.

$v_1 = w_1$
$v_2 = w_2 - \frac{v_1 \circ w_2}{v_1 \circ v_1} v_1$
$v_3 = w_3 - \frac{v_1 \circ w_2}{v_1 \circ v_1} v_1 - \frac{v_2 \circ w_3}{v_2 \circ v_2} v_2$
...

7.5 Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt

Das Orthonormalisierungsverfahren ist eine Erweiterung des Orthogonalisierungsverfahrens. Der Algorithmus ist mehr oder weniger derselbe. Nur dass jeder Vektor nach der Orthogonalisierung noch normalisiert wird.

In der Regel ist es allerdings einfacher zuerst den Orthogonalisierungsalgorithmus auf alle Vektoren anzuwenden und erst am Schluss die Vektoren zu normieren.

$v_1 = \frac{w_1}{||w_1||}$ (Normalisieren des ersten Vektors)
$v_2^{'} = w_2 - (v_1 \circ w_2) \cdot v_1$ (Orthogonalisieren von w_2)
$v_2 = \frac{v_2^{'}}{||v_2^{'}||}$ (Normalisieren von v_2
$v_3^{'} = w_3 - (v_1 \circ w_3) \cdot v_1 - (v_2 \circ w_3) \cdot v_2$ (Orthogonalisieren von w_3)
...