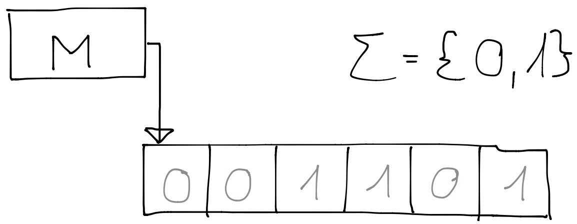
Eti Zusammenfassung

Rebeca Stuber, Jasmin Lienhard & Fabio Oesch

5. Semester (HS 2014)

Inhaltsverzeichnis

1 Endliche Automaten



Def: Ein endlicher Automat (deterministisch) ist ein 5-Tupel $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Q Menge der Zustände

Σ Alphabet

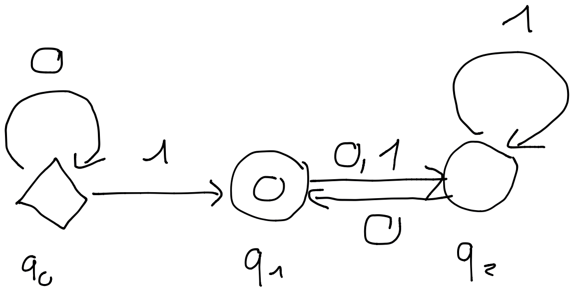
δ $Q \times \Sigma \to Q$ Übergangsfunktion

q_0 Startzustand

$F \subset Q$ akzeptierende Zustände

Bsp: Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
mit $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{q_1\}$

δ	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	q_2
q_2	q_1	q_2



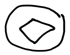
Antwortfunktion von A
$r_A : \Sigma^* \to Q$
Bsp: $r_A(0,0,1,0) = q_2 \notin F \Rightarrow 0010 \notin L(A)$
$L(A) = \{\omega \in \Sigma^* \mid r_A(\omega) \in F\}$

1.0.1 Notation

 : Startzustand

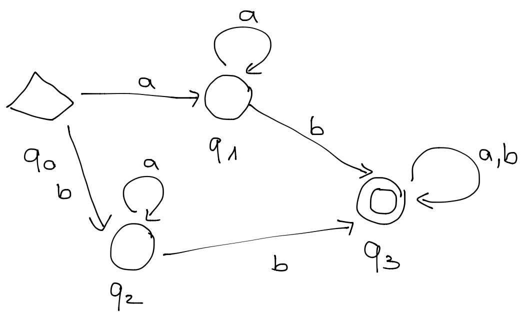
 : akzept Zustand

 : "gewöhnlicher" Zustand

 : akzept. Startzustand

1.1 Satz 1

Vor: $A \in DFA$
Beh: $L(A)$ ist regulär
Beweisidee:



$\Sigma = \{0,1\}$
$G = (N, T, Q, S)$ regulär mit $L(G) = L(A)$
$T = \Sigma = \{a, b\}$
$N = \{S = Sq_0, Sq_1, Sq_2, Sq_3\}$
$R = \{Sq_0 \to aSq_1 \mid bSq_2, Sq1 \to aSq1 \mid bSq3, Sq2 \to aSq2 \mid bSq3, Sq3 \to aSq3 \mid bSq3 \mid a \mid b\}$

1. Zuordnung: Zustand $\mapsto$ Nichtterminalsymbol

2. Jedem Pfeil im Diagramm ordnen wir eine oder zwei Regeln zu

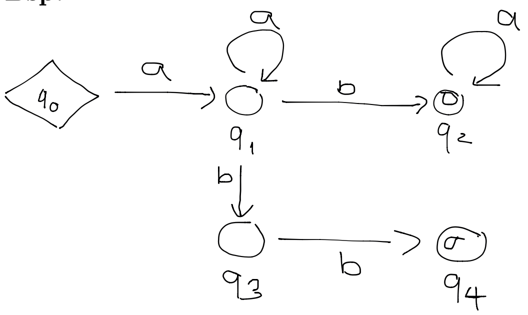
   (a) $q_i \xrightarrow{a} q_j$ mit $a_j \notin F$
   $\Rightarrow Sq_i \to aSq_j$

   (b) $q_i \xrightarrow{a} a_j$ mit $q_j \in F$
   $Sq_i \to aSq_j$
   $Sq_i \to a$

Bsp:
a) Das Wort aab akzeptieren. $q_0 \to q_1 \to q_1 \to q_3$
b) Das Wort aab generieren. $Sq_0 \Rightarrow aSq_1 \Rightarrow aaSq_1 \Rightarrow aab$

1.2 Nicht-deterministische, endliche Automaten (NFA)

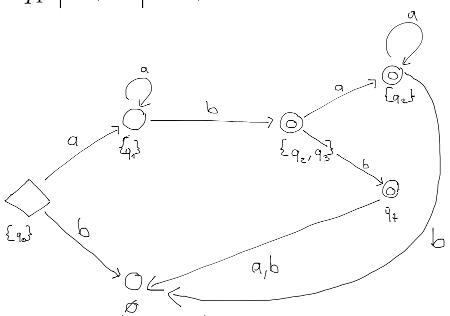
Bsp:



$baa \notin L(A)$, $aab \in L(A)$

δ	a	b
q_0	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_2, q_3\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\{q_4\}$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$

Satz: Vor. $A \in NFA$ **Beh.** $\exists B \in DFA : L(A) = L(B)$



$\overline{\delta}$	a	b
$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
$\{q_1\}$	$\{q_1\}$	$\{q_2, q_3\}$
$\{q_2, q_3\}$	$\{q_2\}$	$\{q_4\}$
$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
$\{q_4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

$\overline{F} = \{a_2, a_3\}, \{a_2\}, \{a_4\}$

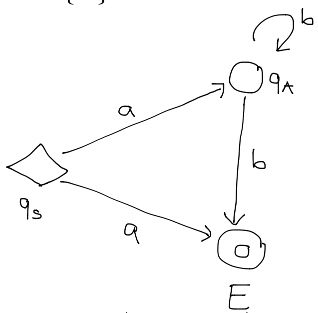
Satz: Vor. $L \subset \Sigma^*$ regulär, **Beh.** $\exists A \in NFA : L(A) = L$

Beweis regulär $\Rightarrow \exists$ reguläre Grammatik $G = (N, T, R, S)$
mit $N = \{S, A, B, \dots\}$, $T = \Sigma$, $R = \{\dots A \to aB,\ A \to a \dots\}$

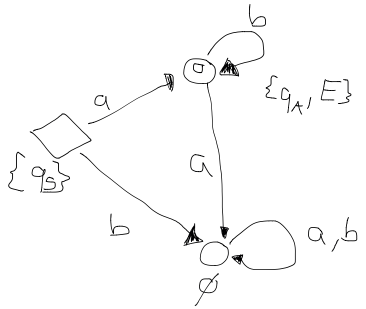
1. Jedem Nichtterminalsymbol ordnen wir einen Zustand zu. z.B. $A \mapsto q_A$
2. Jeder Regel vom Typ $A \to aB$ ordnen wir einen Pfeil im Diagramm zu: $q_A \xrightarrow{a} q_B$
3. Wir fügen einen **neuen** akzeptierenden Zustand E zu Q hinzu und für jede Regel $A \to b$ ein Pfeil $q_A \xrightarrow{b} E$
   $Q = \{q_S, q_A, q_B, \dots, E\}$

1.3 DFA

Bsp: $\Sigma = \{a, b\}$, $G = (N, T, R, S)$
mit $N = \{S, A\}$, $T = \Sigma$, $R = \{S \to aA, S \to a, A \to bA, A \to b\}$
$\mathbf{A} := (Q, \Sigma, \delta, q_S, F)$
$Q = \{q_S, q_A, E\}$
$F = \{E\}$



$\overline{\delta}$	a	b
$\{q_S\}$	$\{q_A, E\}$	$\emptyset$
$\{q_A, E\}$	$\emptyset$	$\{q_A, E\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

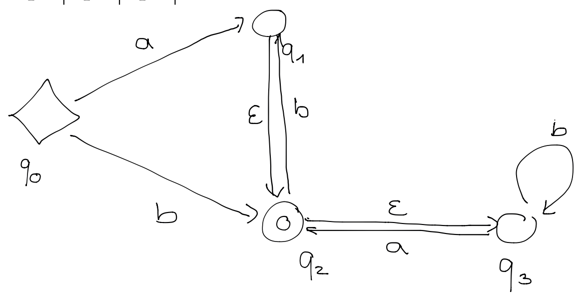


Def. Zwei endliche Automaten A und B heisen **äquivalent**: $\Leftrightarrow L(A) = L(B)$

1.4 NFA/ε

Bsp: (*) $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
$\Sigma = \{a, b\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $F = \{q_2\}$

δ	a	b	ε
q_0	q_1	q_2	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	q_2
q_2	$\emptyset$	q_1	q_3
q_3	q_2	q_3	$\emptyset$



1.4.1 ε-Hüllen der Zustände

$[q]^*_\varepsilon := \{r \in Q \mid q \overset{\varepsilon^*}{\to} r\}$
Bsp anhand Bild 9
$[q_0]^*_\varepsilon = \{q_0\}$, $[q_1]^*_\varepsilon = \{q_1, q_2, q_3\}$, $[q_2]^*_\varepsilon = \{q_2, q_3\}$, $[q_3]^*_\varepsilon = \{q_3\}$

NFA
$B = (\overline{Q}, \Sigma, \overline{\delta}, \overline{q_0}, \overline{F})$

$$\overline{\delta}(q, a) = \bigcup_{r \in [q]^*_\varepsilon} \delta(r, a) \quad (1)$$

$\overline{\delta}$	a	b
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_2\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_3\}$
q_3	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$

$\overline{F} = \{q \in Q \mid [q]^*_\varepsilon \cap F \neq \emptyset\}$

1.5 Eigenschaften regulärer Sprachen

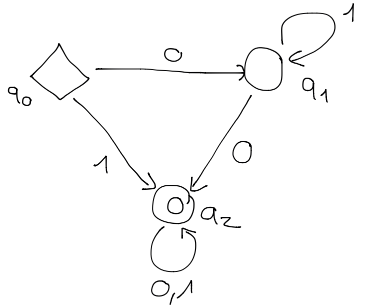
Sei Σ ein Alphabet
$C \subset P(\Sigma*)$ Menge von Sprachen
Frage: Führen Operationen auf den Elementen von C aus C heraus?
Bsp: von Operationen
$\overline{L} := \Sigma * \setminus L$
$L_1 \cup L_2$
$L_1 \cap L_2$
$L_1 \cdot L_2 = \{\omega_1\omega_2 | \omega_1 \in L_1, \omega_2 \in L_2\}$
Bsp: $L_1 = \{0, 1\}$,$L_2 = \{\varepsilon, 1\} \Rightarrow L_1 \cdot L_2 = \{0\varepsilon, 1\varepsilon, 01, 11\}$ **Notation:** $L^0 := \{\varepsilon\}$
$L^1 := L$
$L^2 := L \cdot L$ (Konkatenation)
$L^3 := L \cdot L^2 = L^2 \cdot L$

1.5.1 *- oder Kleene-Operation

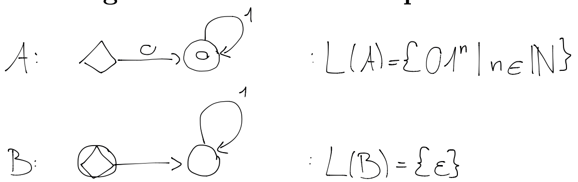
$L^* := L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup L^3 \cup \ldots$
Bsp: $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Sigma^* = \{\varepsilon\} \cup \{0, 1\} \cup \{00, 01, 10, 11\} \cup \ldots$ **Notation:** $Reg_\Sigma :=$ Menge der regulären Sprachen über Σ.
Satz: Vor. $L_1, L_2 \in Reg_\Sigma$
Beh. $\overline{L_1}, L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2, L_1 \cdot L_2, L_1^* \in Reg_\Sigma$

Bew.

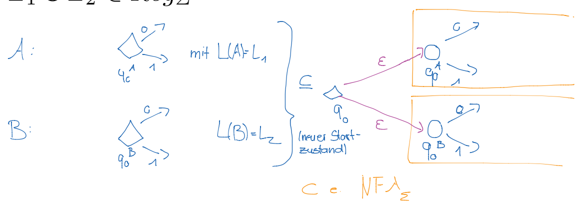
1. $I_1 \in Reg_\Sigma \Rightarrow \exists A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \in DFA$ mit $L(A) = L$



$L(A) = \{1w, 01^*0\omega | \omega \in \Sigma^*\}$
$\overline{L(A)} = \{01^*, \varepsilon\}$
$\overline{A} := (Q, \Sigma, \delta, q_0, \overline{F} := Q \setminus F)$
$L(\overline{A}) = I$
Achtung: Gilt nur für DFA's! **Bsp:**

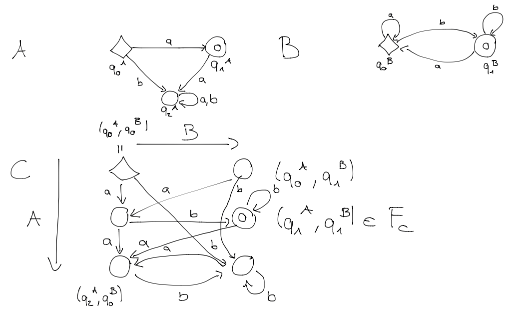


2. $L_1 \cup L_2 \in Reg_\Sigma$

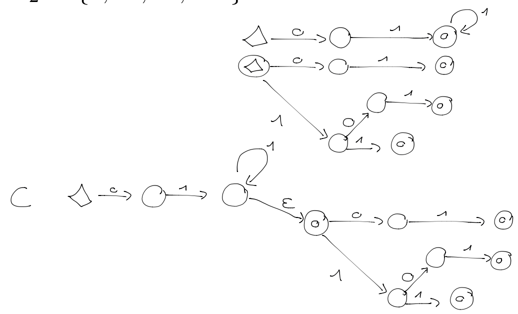


$L(C) = L_1 \cup L_2$

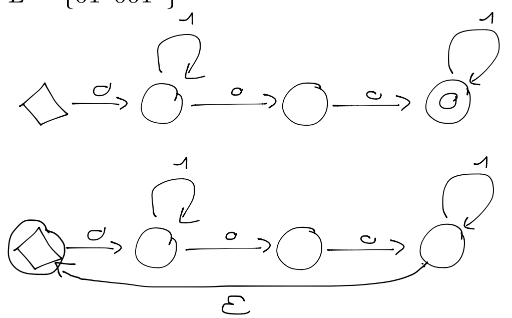
3. $L_1 \cap L_2 \in Reg_\Sigma$
1. Beweis De Morgan: $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$
Bsp:



4. $L_1 \cdot L_2 \in Reg_\Sigma$
$L_1 = \{01^+\}$
$L_2 = \{\varepsilon, 01, 11, 101\}$



5. $L_1^* \in Reg_\Sigma$
$L = \{01^*001^*\}$



1.6 Das Pumping-Lemma und der Satz von Myhill-Nerode

Frage: Wie zeigen wir, dass eine Sprache $L \notin Reg_\Sigma$?
Gegeben: $L \in Reg_\Sigma \Rightarrow \exists A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \in DFA$
$n :=\mid Q \mid$ (Anzahl der Zustände)

1.6.1 Pumping Lemma

Vor. $L \in Reg_\Sigma$
Beh. $\exists n \in \mathbb{N}^* : \forall \omega \in L, \mid \omega \mid \geq n \exists x, y, z \in \Sigma^*$
x ist Weg vom Anfangszustand zum wiederholenden Zustand, y ist der Loop (vom wiederholenden zum wiederholenden Zustand), z der Weg vom wiederholenden Zustand zum akzeptierenden Zustand

1. $\omega = xyz$
2. $\mid y \mid \geq 1$
3. $\mid xy \mid \leq n$
4. $\forall i \in \mathbb{N} : xy^iz \in L$

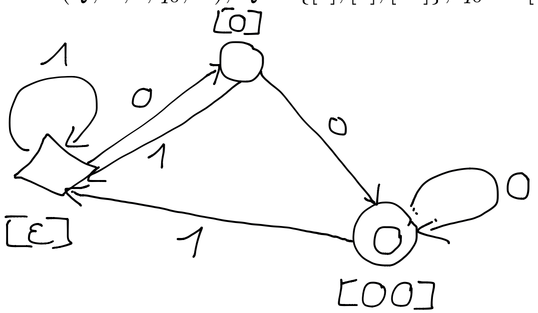
Bsp:

1. $\Sigma = \{0, 1\}$, $L = \{0^k1^k \mid k \in \mathbb{N}^*\}$
   $G = (N, T, R, S)$, $N = \{S\}$, $T = \{0, 1\}$, $R = \{S \to 01, S \to 0S1\}$ (kontextfrei) $\} = L(G) = L$
   Annahme L ist regulär
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$: Wählen wir ein Wort $\omega_n \in L$ mit $\mid \omega_n \mid \geq n$.
   $\omega_n = 0^n1^n = \left| \begin{array}{c|c} 0\ldots\ldots0 & 1\ldots\ldots1 \\ \hline \multicolumn{2}{c}{x \mid y \mid z \Rightarrow \text{3. Bedingung: } y = 0\ldots0 \geq 1} \end{array} \right| (\mid \omega_n \mid = 2n)$
   Bedingung 4: $xyyz \in L$ geht nicht, da mindestens eine weitere 0 hinzugefügt wird.
   $\Rightarrow$ Die Sprache ist kontextfrei denn $xz \notin L$

Bsp. $G^n_{arith} = (N, T, R, < arithmAusdruecke >)$ // $< AA >$
$N = \{< AA >, < Vor >\}$, $T = \{(,), +, -, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
$R = \{< AA > \to < Var >, < Var > \to x_1, < Var > \to x_2, \ldots, < Var > \to x_n,$
$< AA > \to (< AA > + < AA >), < AA > \to (< AA > \cdot < AA >)\}$
Augfaben:

1. Gegeben für Bsp für Wörter aus $L(G^n_{arith})$
   $x_1, x_2, x_n, (x_1 + x_2)$
2. Welcher Klasse gehört G^n_{arith} an.
   kontextfrei
3. In welchek Klasse liegt $L(G^n_{arith})$
   Es wird angenommen, dass die Sprache nicht regulär ist, da man Zählen muss, wieviele Klammern geöffnet worden sind.
   Annahme: $L(G^n_{arith}) \in Reg$
   $n \in \mathbb{N}^*$ ω_n
   $\omega_n = \underbrace{(((((\ldots(}_{n} x_1 + x_2)\ldots)$
   Da $\mid xy \mid \leq n$ und $y \neq \varepsilon \Rightarrow y = (^n \mid n \in \mathbb{N}$
   $\omega_n = xyz$, $\tilde{\omega} = xyyz \notin L(G^n_{arith})$

Falls man Zählen muss ist die Sprache mit grosser Wahrscheinlichkeit keine reguläre Sprache. Zählen bedeutet zum Beispiel, dass bei 0^n1^n man die Nullen zählen muss da es genau gleich viele Einsen haben muss.
Bsp. $\Sigma = \{0, 1\}$
$L = \{\omega \in \Sigma^* \mid \omega$ endet auf $00\}$
Erste Frage: Was sind die Äquivalezklassen? $R_L = [\varepsilon], [0], [00]$, $\Sigma^* = [\varepsilon] \cup [0] \cup [00]$
$A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, $Q = \{[\varepsilon], [0], [00]\}$, $q_0 := [\varepsilon]$, $F := \{[00]\}$, $\delta([\omega], a) := [\omega a]$



1.6.2 Satz von Myhill-Nerode

Anzahl der Äquivalezklassen wird definiert durch $ind(R) := |\{[x] \mid x \in M\}|$
Satz 2.33 (Myhill-Nerode) Es sei $L \subset \Sigma^*$ eine Sprache. L ist genau dann regulär, wenn $ind(R_L) < \infty$

1.7 Minimierung endlicher Automaten (gilt nur für DFA)

Problem: Gegeben: $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L(A) = L$
Gesucht: Minimaler DFA, der L akzeptiert.
Notation: Sei $q \in Q$
$L(A, q) := \{\omega \in \Sigma^* \mid r_A(q, \omega) \in F\}$
Bsp. $L(A, q_0) = L(A)$
Wir führen auf Q eine Relation RL_A ein:
Seien $q_l, q_j \in Q$
$(q_l, q_j) \in RL_A :\Leftrightarrow L(A, q_i) = L(A, q_j)$
Bem. RL_A ist eine Äquivalenzrelation

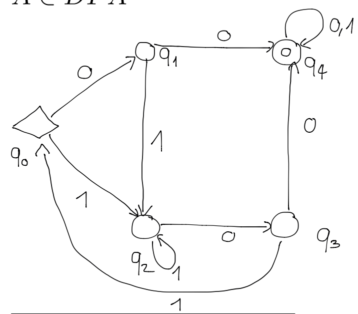
1.7.1 Minimaler Automat

1. Elimination von aus q_0 nicht erreichbaren Zuständen
2. Bestimmen der Äquivalezklassen von RL_A
3. $A_{Min} = (\bar{Q}, \Sigma, \bar{\delta}, \bar{q_0}, \bar{F})$
   mit $\bar{Q} := \{[q] \mid q \in Q\}$, $\bar{q_0} := [q_0]$, $\bar{F} := \{[q] \mid q \in F\}$, $\bar{\delta} := [\delta(q, a)]$

1.7.2 Algorithmus zur Bestimmung der Äquivalezklassen von RL_A

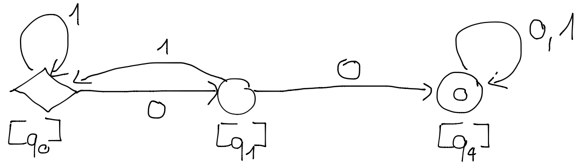
1. $\forall q_i, q_j \in Q$ mit $q_i \in Q \backslash F$ und $a_j \in F \Rightarrow [q_i] \neq [q_j]$
   Beweis. $\varepsilon \notin L(A, q_i)$ und $\varepsilon \in L(A, q_j)$
2. Sei $[q_i] \neq [q_j]$ und $\tilde{q_k}, \tilde{q_e} \in Q$
   $\exists a \in \Sigma : \left\{ \begin{array}{c} \delta(\tilde{q_k}, a) = q_i \\ \delta(\tilde{q_e}, a) = q_j \end{array} \right\} \Rightarrow [\tilde{q_k}] \neq [\tilde{q_e}]$
   $L(A, q_i) \neq L(A, q_j) \Rightarrow L(A, \tilde{q_k} \neq L(A, \tilde{q_e})$

$A \in DFA$



q_1	$\star^0_1$	-	-	-
q_2		$\star^0_1$	-	-
q_3	$\star^0_1$		$\star^0_1$	-
q_4	$\star_0$	$\star_0$	$\star_0$	$\star_0$
	q_0	q_1	q_2	q_3

$RL_A = \{[q_0], [q_1], \cancel{[q_2]}, \cancel{[q_3]}, [q_4]\}$



2 Weiteres

2.1 Chomsky-Hierarchie

Klasse	Bezeichnung	Bedingung
0	allgemein	keine
1	kontextsensitiv	$u = \omega_1 A \omega_2, v = \omega_1 \omega \omega_2$ mit $A \in N$, $\omega_1, \omega_2 \in (N \cup T)^*$, $\omega \in (N \cup T)^+$.
2	kontextfrei	$u \in N$, $v \in (N \cup T)^+$
3	regulär	$u \in N$, $v = a$ oder $v = aA$ (oder $v = Aa$) mit $a \in T$, $A \in N$

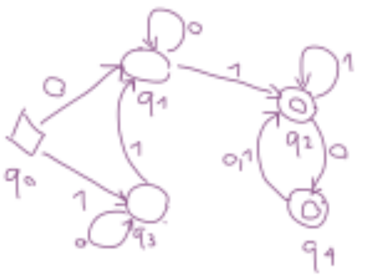
Bemerkung 1.8 Die Regeln der Klassen 1 , 2 und 3 sind nicht verkürzend $|u| \leq |v|$. Deshalb können Grammatiken der Klassen 1 , 2 und 3 , wie sie

oben beschrieben sind, keine Sprachen erzeugen, die das leere Wort enthalten. Um auch solche Sprachen beschreiben zu können, lassen wir zu, dass diese Grammatiken die Regel $S \to \varepsilon$ enthalten dürfen. In diesem Fall darf aber das Startsymbol S nur auf der linken Seite von Regeln erscheinen.

Bemerkung 1.9 Eine Grammatik mit Regeln der Form $v = aA$ heisst rechts-linear, eine mit Regeln der Form $v = Aa$ heisst links-linear. Die Menge der rechts- und links-linearen Grammatiken bildet die Klasse der regulären Grammatiken. Eine Grammatik mit Regeln der Form $v = aA$ und der Form $v = Aa$ heisst linear und ist nicht regulär.

Bemerkung 1.10 Es gilt Klasse 3 $\subset$ Klasse 2 $\subset$ Klasse 1 $\subset$ Klasse 0.

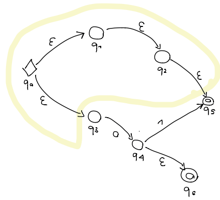
Beispiel 1.11 Wenn eine Sprache durch eine kontextsensitive und eine reguläre Grammatik erzeugt werden kann, dann ist die Klasse der Sprache regulär.



q_1	*			
q_2	*	*		
q_3	*	*	*	
q_4	*	*		*
	q_0	q_1	q_2	q_3

$RL_A = \{ [q_0], [q_1], [q_2], [q_3], \cancel{[q_4]} \}$

δ	0	1
q_0	q_1	q_3
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2
q_3	q_3	q_1
~~q_4~~	~~q_2~~	~~q_2~~



δ	0	1	ε
q_0			q_1, q_3
q_1			q_2
q_2			q_5
q_3	q_4		
q_4		q_5	q_6
q_5			
q_6			

Geben Sie die Tabelle und den Graphen eines zu A äquivalenten nicht-deterministischen Automaten ohne Epislon-Übergänge an.

δ	0	1
q_0	q_4	
q_1		
q_2		
q_3	q_4	
q_4		q_5
q_5		
q_6		

$[q]^*_\varepsilon = \{ r \in Q \mid q \xrightarrow{\varepsilon} r \}$

$[q_0]^*_\varepsilon = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_5\}$

$[q_1]^*_\varepsilon = \{q_1, q_2, q_5\}$

$[q_2]^*_\varepsilon = \{q_2, q_5\}$

$[q_3]^*_\varepsilon = \{q_3\}$

$[q_4]^*_\varepsilon = \{q_4, q_6\}$

$[q_5]^*_\varepsilon = \{q_5\}$

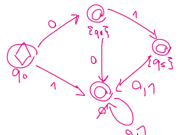
$[q_6]^*_\varepsilon = \{q_6\}$

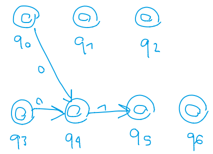
$L(A) = \{ \cancel{0}, 01 \}$ ε

Geben Sie einen zu A äquivalenten deterministischen Automaten an. Verwenden Sie das Verfahren von Rabin-Scott.

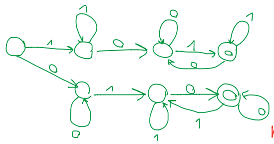
	0	1
q_0	q_4	
q_3	q_4	
q_4		q_5

δ	0	1
q_0	$\{q_4\}$	$\emptyset$
$\{q_4\}$	$\emptyset$	$\{q_5\}$
$\{q_5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$





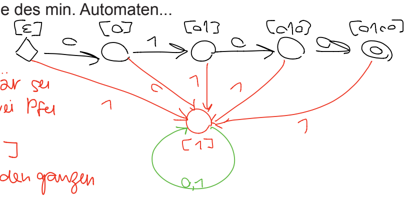
L3 = Menge aller endlichen Wörter, die gleich oft die Teilwörter 01 und 10 enthalten.



Σ = {0, 1}, L = {0100} u ̈ber Σ. alle Äquivalenz-klassen der zur Sprache L gehörigen Relation RL

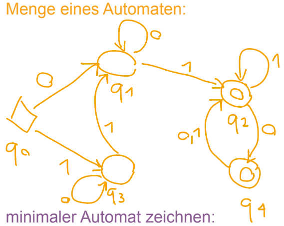
[ε] [0] [01] [010] [0100] [1] weil im Alphabet

minimaler Automat: Klassen von Nerode sind Zustände des min. Automaten...



muss regulär sei also immer zwei Pfei mit 1 und 0 zur Klasse [1] ziehe ich nun den ganzen Rest!

Menge eines Automaten:



$L(A, q_2) = \Sigma^*$

$L(A, q_4) = \Sigma^*$

$L(A, q_1) = \Sigma^* - \{0^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$L(A, q_3) = \Sigma^* - \{0^n 1 0^k \mid n, k \in \mathbb{N}\}$

$L(A, q_0) = \Sigma^* - \{0^n, 1 0^n 1 0^k \mid n, k \in \mathbb{N}\}$

minimaler Automat zeichnen:
Vorgehen:
1. alle akzept. Zustände in Tabelle einzeichnen.
1. a) 2 verschiedene akzept. Zustände liegen in der gleichen Äquivalenzklasse. Also: kein Stern
2. mit 0 und 1 Wege schaffen. neue Zustände müssen 1x akzept. und 1x nicht akzept. sein.
3. wenn kein Stern gemacht werden kann, vorläufig überspringen.
3. a) Schritt drei so lange wiederholen bis alles ausgefüllt.
4. leere Felder prüfen und schauen ob ein Stern kommt: wenn der neue Zustand (qi, qj) in Tabelle einen Stern hat, dann auch einen Stern zeichnen.
5. dort wo in Tabelle keine Sterne sind: von rechts (waagrecht) Zustand streichen und mit senkrechtem ersetzen.