Kryptographie Vorlesungsnotizen

Jan Fässler & Fabio Oesch

4. Semester (FS 2013)

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Grundlagen

1.1 Modulare Division

1.2 Modulares Potenzieren

Seien $a, b, n \in \mathbb{Z}$ und $b, n > 1$. Berechnen Sie $a^b \bmod n$.
Da es für grosse b für den Taschenrechner nicht möglich ist dies zu berechnen verwenden wir ein spezielles Verfahren:

1.) binäre Darstellung von b:
$b = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i 2^i$ mit $\alpha \in \{0, 1\}$.

2.) Anwendung auf a:
$a^b = a^{\sum_{i=0}^{k} \alpha_i 2^i}$
$a^b = \prod_{i=0}^{k} a^{\alpha_i 2^i}$
$a^b = a^{\alpha_k 2^k} * a^{\alpha_{k-1} 2^{k-1}} * a^{\alpha_{k-2} 2^{k-2}} \dots a^{\alpha_1 2} * a^{\alpha_0}$
$a^b = (\dots((a^{a_k})^2 * a^{a_{k-1}})^2 \dots * a^{\alpha_1})^2 * a^{\alpha_0}$

3.) Das Verfahren besteht nun darin, den letzten Ausdruck von innen nach aussen auszuwerten und nach jeder Multiplikation das Resultat modulo n zu rechnen.

Beispiel: $977^{2222} \bmod 11$

1.) $2222_{10} \blacktriangleright \text{bin} = 100010101110_2$

2.) $(\dots(977)^2)^2)^2)^2 * 977)^2)^2 * 977)^2)^2 * 977)^2 * 977)^2 * 977)^2 * (0 * 977)$

3.) Anwendung des Verfahren:

977	$\bmod 11$	$= 9$
9^2	$\bmod 11$	$= 4$
4^2	$\bmod 11$	$= 5$
5^2	$\bmod 11$	$= 3$
3^2	$\bmod 11$	$= 9$
$9 * 977$	$\bmod 11$	$= 4$
4^2	$\bmod 11$	$= 5$
5^2	$\bmod 11$	$= 3$
$3 * 977$	$\bmod 11$	$= 5$
5^2	$\bmod 11$	$= 3$
3^2	$\bmod 11$	$= 9$
$9 * 977$	$\bmod 11$	$= 4$
4^2	$\bmod 11$	$= 5$
$5 * 977$	$\bmod 11$	$= 1$
1^2	$\bmod 11$	$= 1$
$1 * 977$	$\bmod 11$	$= 9$
9^2	$\bmod 11$	$= \mathbf{4}$

2 Klassische Kryptographie

2.0 Repetition

Alphabet endliche Mengen von Zeichen

Beispiel
$\mathcal{A} := \{A, B, C, ..., Z\}$, $|\mathcal{A}| = 26$
$\Sigma := \{0, 1\}$, $|\Sigma| = 2$
$\mathcal{A}^* := \{\text{endliche Wörter über } \mathcal{A}\}$

Sprachen über $\mathcal{A}$: $L \subset \mathcal{A}^*$

2.1 Klassische Verschlüsselungsverfahren

Substitution Cipher	**Transposition Cipher**
Einheiten werden **ersetzt**.	Einheiten werden **vertauscht**. 3 1 5 6 2 4 K O M M E H E U T E A B E N D Z U M Z O O A B C $\Rightarrow \underbrace{\text{OUNO}}_{1}\underbrace{\text{EAUB}}_{2}\ldots$ **Bem.** Einheiten werden vertauscht (ABC ist Padding)

monoalphabetisch	**polyalphabetisch**
$E : \mathcal{A} \to B,\ x \mapsto E(x)$	$E : \mathcal{A} \to P(B),\ x \mapsto E(x)$
monographisch	**polygraphisch**
Buchstaben	Gruppen von Buchstaben

2.2 Spezielles Bsp für Substitution Homophone Verschlüsselung

Gegeben: $\Sigma := \{0, 1\}$, $B := \{a, b, c\}$

Information über die Sprache des Klartextes: Häufigkeit von $0 : \frac{1}{3}$, Häufigkeit von $1 : \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} E :& \Sigma \to P(B) \\ & 0 \mapsto \{b\} \\ & 1 \mapsto \{a, c\} \end{aligned}$$

Bsp:
10110110011
abccbacbbaa

2.3 Kasiski-Text (monographisch & polyalphabetisch)

Klartext TO BE OR NOT TO BE

Schlüssel NOW

p = |NOW|

TOB	EOR	NOT	TOB	E
NOW	NOW	NOW	NOW	N
GCX	RCN	ACP	GCX	R

GCX kommt 2x for so können wir eine Annahme zur Periode p machen. Die Periode ist dann $c \cdot p$. Dies kann aber auch zufällig passieren.

2.4 Playfair-Cipher

HARYP
OTEBC
DFG$\frac{\text{I}}{\text{J}}$K
LMNQS
UVWXZ

Schlüssel: Harry Potter, HAR~~R~~Y POT~~T~~E~~R~~

	Klartext	HA	LL	O	ZU	SA	MM	EN	
Bsp:	Preprocessed	HA	LX	LO	ZU	SA	MX	ME	NX
	Secret	AR	QU	UD	UV	...			

- Falls 2 auf gleicher Zeile: Beide Buchstaben um eins nach rechts
- Falls 2 auf gleicher Spalte: Beide Buchstaben um eins nach unten
- Falls 2 nicht auf gleicher Zeile/Spalte: Man nimmt die Buchstaben die auf seiner Spalte und auf des anderen Zeile liegen.

L	M	N	Q
↓			↑
U	V	W	X

2.5 Koinzidenzindex (index of coincidence)

1. **Gegeben**
   Alphabet Alphabet $\mathcal{A} := \{A, B, C, \ldots, Z\}$
   Sprache: Englisch

   $$\Rightarrow \text{Buchstabenhäufigkeit:} \quad \begin{array}{cccc} p_A & p_B & \cdots & p_Z \\ \| & \| & & \| \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_3 \end{array}$$

   mit $0 \leq p_i \leq 1$ und $\sum_{i=1}^{26} p_i = 1$

   IC: Grösse, die von der Sprache abhängt, aber invariant ist gegenüber Cäsar-Verschiebungen.

   Frage: Was bedeutet: Was bedeutet $\boxed{IC_L := \sum_{1=1}^{26} P_i^2}$ **i**ndex of **c**oincidence L: Language

   Bemerkung:
   Jede Sprache hat ihren eigenen Konzidenzindex
   $IC_{German} = 0.0766$
   $IC_{Arabic} = 0.0759$
   $IC_{flat} = 0.0385$ (Alle Buchstaben haben die gleiche häufigkeit: $p_1 = p_2 = ... = p_{26} = \frac{1}{26}$)
   Je unregelmässiger die buchstabenhäufigkeit, umso grösser der Index.

2. **Gegegen:**
   Sei F eine Buchstabenfolge der Länge n
   Bsp: $F =$"$AXCAABCXA$"
   $n_1 = \#A's$ in F
   $n_1 = \#B's$ in F
   $\vdots$

   Frage: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit zwei gleiche Buchstaben aus F herauszugreifen?

   Definition $\boxed{IC_F = \frac{\sum_1^{26} \binom{n_i}{2}}{\binom{n}{2}}}$

   Bsp:
   Alphabet $\Sigma := \{0, 1\}$
   F = 00110111101

$$\left.\begin{array}{r} n_0 = 4 \\ n_1 = 7 \\ \hline n = 11 \end{array}\right\} IC_F = \frac{4*3+7*6}{11*10} = 0.49$$

Annahme $IC_F \xrightarrow[F\to\infty]{} IC_L$ (ist im Allgemeinen falsch)

Bemerkung

Permutation der Buchstaben
F $\mapsto$ Perm(F)
F = "AXCA..."$\mapsto$ Perm(F) = "CBYC..."
$\boxed{IC_F = IC_{Perm(F)}}$

2.6 Vigenères Chipres

2.6.1 Berechnung der Schlüssellänge eines Vigenère-Cipher

Gegeben

C Vigenère-Chiffrat der Länge n
Die Schlüssellänge sei p (unbekannt)

$\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{p}$

C_1	C_2	C_3	C_4	$\cdots$	C_p
C_{p+1}	C_{p+2}	C_{p+3}	C_{p+4}	$\cdots$	C_{2p}
C_{2p+1}	C_{2p+2}	C_{2p+3}	C_{2p+4}	$\cdots$	C_{3p}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
C_{n-2}	C_{n-1}	C_n	-	-	-

$\left.\begin{array}{l}\\\\\\\\\\\end{array}\right\} \frac{n}{p}$

↑ ↗ ↗
monoalphabetisch

alle Spalten = p, alle Zeilen = $\frac{n}{p}$, letzte Zeile = monoalphabetisch!

α := Anzahl Buchstabenpaare aus gleicher Spalte, $\alpha = \frac{n(\frac{n}{p}-1)}{2} = \frac{n(n-p)}{2p}$

β := Anzahl Buchstabenpaare aus verschiedenen Spalten, $\beta = \frac{n(n-\frac{n}{p})}{2} = \frac{n^2(p-1)}{2p}$

γ := Anzahl gleicher Buchstabenpaare aus C, $IC_L = \frac{\gamma}{\binom{n}{2}}$

$$\boxed{\gamma = \alpha \cdot IC_L + \beta \cdot IC_{\text{flat}}}$$

$$p = \frac{n(IC_L - IC_{flat})}{IC_C \cdot (n-1) + IC_L - n \cdot IC_{\text{flat}}}$$

2.6.2 Kryptoanalysis des Vigenère-Cipher

1) Schlüssellänge p
p=1,2,3,...

- Einleitung des Cipher-Tests in p Abschnitte
- Berechnung des IC des Abschnitts
- Wähle p mit $IC \sim IC_2$ (oder hoch)

2) Sei s,t zwei Strings über dem Alphabet A.
$s = s_1, s_2, s_3, ...s_k$
$t = t_1, t_2, t_3, ..., t_l$
Wieder zählen wir $n_1(s)$:= A in s, $n_3(t)$ = C in t

Def. $MIC(s,t) := \frac{\sum_{i=1} 26 n_i(s) * n_i(t)}{k*l}$

Bsp.

s=”AABCCA”
t=ÄBCABCABC”

$n_1(s) = 3,\ n_1(t) = 3$
$n_2(s) = 1,\ n_2(t) = 3$
$n_3(s) = 2,\ n_3(t) = 3$

$\rightarrow MIC(s,t) = \frac{1}{6*9}[3*3 + 1*3 + 2*3]$

Idee: s,t zwei cipher-Text mit Cäsar Cerschlüsselung
Wenn beide mit dem gleichen Schlüssel verschlüsselt werden
$\rightarrow MIC(s,t) \rightsquigarrow IC_L$
Sonst: $MIC(s,t) \rightsquigarrow IC_{flat}$

3.) Anwendung auf Cipher Text

Schlüssellänge p sei 5
$c_1, c_2, ..., c_5$ Abschnitte des Cipher Text
$MIC(c_i, c_j + k)$

Tabelle:

$(i,j);k$	0	1	2	$\cdots$	
$(1,2)$					
$(1,3)$					
$(1,4)$					
$(1,5)$					
$(2,3)$			x		$\rightarrow MIC(c_2, c_3 + k)$
$(2,4)$					
$(2,5)$					
$(3,4)$					
$(3,5)$					
$(4,5)$					

Bsp

c_1:	AXBM...
c_3:	ABXHE...
$c_3 + 2$:	CDZJG

4.) Wir suchen Einträge in der Tabelle, die hoch sind (> 0.06)
$MIC(s,t) = \frac{1}{kl} \sum_{i=1}^{26} n_i(s) n_i(t)$, $|s| = k$, $|t| = l$
zb: $MIC(c_2, c_3 + 22 > 0.06 \iff c_2 \sim c_3 + 22 \Rightarrow \boxed{\beta_2 - \beta_3 = k}$

Notation s∼t $\iff$ s und t sind mit dem gleichen Shift aus zwei Klartexten entstanden.

Bsp. $klar_1 \sim klar_2$

$klar_1 \xrightarrow{\beta_1} c_1$	$c_1 = klar_1 + \beta_1$
$klar_2 \xrightarrow{\beta_2} c_2$	$c_2 = klar_2 + \beta_2$

Wir suchen die grossen Werte von $MIC(c_i, c_j + k)$
$MIC(c_i, c_j + k)$ gross $\iff c_i \sim c_j + k$

$c_i = klar_i + \beta_i \sim klar_i + \beta_j + k = k = \beta_i + \beta_j$

$\downarrow$ sind bekannt
$k_{12} = \beta_2 - \beta_1$
$k_{13} = \beta_3 - \beta_1$
$k_{52} = \beta_2 - \beta_5$
} Auflösen nach β_1

Schlüsselwort: $\beta_1, \overset{\text{abhängig von } \beta_1}{\beta_2, \ldots, \beta_p} = \beta_1, \beta_1 + k_{12}, \ldots,$
Ausprobieren: $\beta_1 = 0, 1, \ldots, 25$

2.7 One-Time-Pad

$\Sigma = \{0, 1\}$

Klartext:	$p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 \cdots =$	0 1 0 1 . . .
Schlüssel:	$k_1 k_2 k_3 k_4 k_5 \cdots =$	1 1 0 1 0 . . .
ciphertext:	$\underset{p_1 \oplus k_1}{c_1} \; c_2 c_3 c_4 c_5 \cdots =$	1 0 0 1 1 . . .

2.8 Kryptosysteme

Kryptosystem: (P, C, K, e, d)

P Menge der Klartexte

C Menge der Geheimtexte

K Menge der Schlüssel
$e : K \times P \to C$
$d : K \times C \to P$

$\forall k \varepsilon K \; \forall p \varepsilon P : d(k, e(k, p)) = p$
$\to \forall k \varepsilon K : e(k, -)$ ist injektiv
$\to \forall k \varepsilon K : d(k, -)$ ist surjektiv

2.9 Kryptoanalysis

2.9.1 Ciphertext-only attack

Gegeben $c_i = e_k(p_i)$, i=1, ..., n

Gesucht p_i, i= 1, ...,n oder k

2.9.2 known-plaintext attack

Gegeben $(p_i, c_i = e_k(p_i))$, i=1, ..., n

Gesucht k

2.9.3 chosen-plaintext attack

Gegeben $(p_i, c_i = e_k(p_i))$, i=1, ..., n
p_i nach Wahl des Kryptoanalytikers

Gesucht k

Verwendung DIE Attacke gegen jedes Public-Key System

2.9.4 chosen-ciphertext attack

Gegeben $(p_i, p_i = d_k(c_i))$, i=1, ..., n
c_i nach Wahl des Kryptoanalytikers

Gesucht k

3 Block-Cipher

Alphabet

Σ={0, 1}
$\Sigma^n := \Sigma \times \Sigma \times \cdots \times \Sigma$

Definition

Ein Block - Cipher ist eine **injektive** Abbildung
$C : K \to Perm(\Sigma^n)$
wobei K der Schlüsselraum ist.

Bsp.

$n = 3$
$\Sigma^3 = \Sigma \times \Sigma \times \Sigma$

$$p \left\{ \begin{array}{ccc} 000 & \nearrow & 000 \\ 001 & \to & 001 \\ \cdots & & \cdots \\ 111 & \searrow & 111 \end{array} \right\} l$$

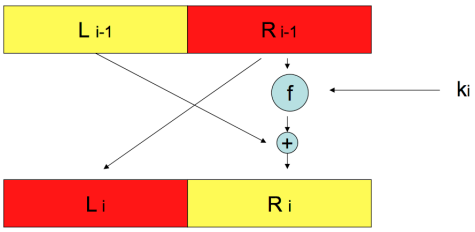
↑Schlüssel

Frage:

Wie gross ist der Schlüsselraum K maximal?
$|K| \leq (2^n)!$

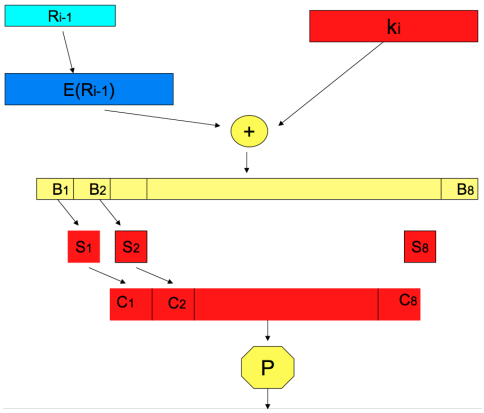
3.1 Data Encription Standard (DES)

Lucifer	Schlüssellänge	128
↓		
DES	Schlüssellänge	56
	Blocklänge	64



$L_1 := R_0$
$R_1 := f(R_0, k_1) \oplus L_0$
$L_0 := f(L_1, k_1) \oplus R_1$
$R_0 := L_1$

Die f-Funktion:



3.2 Modi von Block-Cipher

Sei $\Sigma := \{0,1\}$
$p = c = \Sigma^4 = \{\square\square\square\square\}$
$k =$ Permutation von Σ^4
$k = \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Vor- und Entschlüsselung

Sei $m = 0101 \in p$ (Klartext)
$e_k(m) = e_k(0101) = 1010 = c$

3.2.1 ECB-Modus (electronic code block)

$m = \underbrace{1100}_{m_1}|\underbrace{0110}_{m_2}|\underbrace{1100}_{m_3}|101^*$

$\xrightarrow[m_1]{} \boxed{e_k} \xrightarrow[c_1]{}$

Bem:

1. $m_1 = m_3 \Rightarrow c_1 = c_3$
2. Vertauschen der Ciphertext-Blöcke wird nicht notwendigerweise erkannt

3.2.2 CBC-Modus (cipher block chaining)

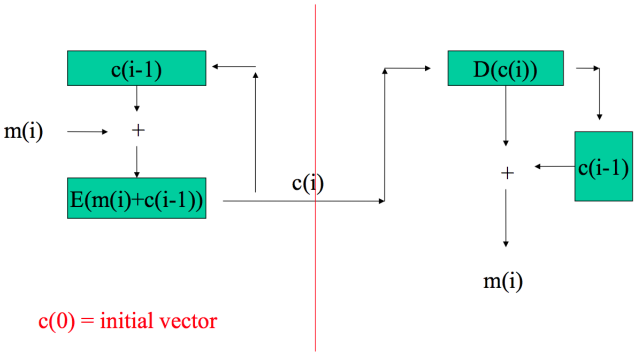
$m = \underset{\text{Länge n}}{m_1} |m_2| \ldots$, n : Blocklänge

IV = Initialvektor (i.a. bekannt)
$C_0 := IV$
$C_1 := e_k(C_0 \oplus m_1)$
$C_2 := e_k(C_1 \oplus m_2)$

Bsp: $m = \underbrace{1100}_{m_1}|\underbrace{0110}_{m_2}|\underbrace{1100}_{m_3}|101$
$IV = C_0 = 1110$

$c_1 = e_k(c_0 \oplus m_1) = e_k(0010) = 0001$
$c_2 = e_k(c_1 \oplus m_2) = e_k(0111) = 1011$
$c_3 = e_k(c_2 \oplus m_3) = e_k(0111) = 1011$

Entschlüsselung: $c_1 \oplus d_k(c_2) = c_1 \oplus d_k(e_k(c_1 \oplus m_2)) = c_1 \oplus m_2 \oplus c_1 = m_2$



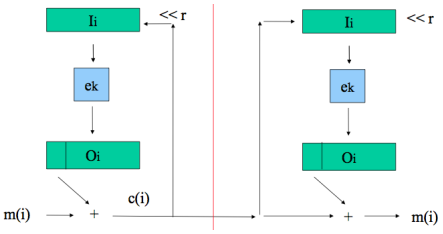
$m = \underset{\text{Länge n}}{m_1} |m_2$, n : Blocklänge
IV =Initialvektor (i.a. bekannt)
$c_0 := IV$, $c_1 := e_k(c_0 \oplus m_1)$, $c_2 := e_k(c_1 \oplus m_2)$
$c_1 \oplus d_k(c_2) = d_k(e_k(c_1 \oplus m_2)) = c_1 \oplus m_2 \oplus c_1 = m_2$
Bsp: $m = \underbrace{1100}_{m_1}|\underbrace{0110}_{m_2}|\underbrace{1100}_{m_3}|101$, $IV = c_0 = 1110$
$c_1 = e_k(c_0 \oplus m_1) = e_k(0010) = 0001$

$c_2 = e_k(c_1 \oplus m_2) = e_k(0111) = 1011$
$c_3 = e_k(c_2 \oplus m_3) = e_k(0111) = 1011$
Bem:

1. $m_1 = m_3 \nRightarrow c_1 = c_3$
2. Vertauschen kann bemerkt werden
3. Übertragungsfaktor machen sich bemerkbar

3.2.3 CFB-Modus (cipher feedback)

$m = \underbrace{\tilde{m_1}}_{\text{Länge}=r} |\tilde{m_2}|\tilde{m_3}| \ldots$, n: Cipher Block-Länge (DES: 64) und $\boxed{0 < r \leq n}$



$I_1 \quad := IV \in \Sigma^n$
$\downarrow$
DES
$\downarrow$
$O_1 : \underbrace{\square}_{r} \square$
$\oplus \quad \rightarrow c_1$
$\tilde{m_1} \rightarrow \underbrace{\square}_{r}$

Bsp: $m = 110|001|101|100|101$, $IV = 1110$, $\boxed{r = 3,\ n = 4}$

$$I_1 = 1110 \quad \downarrow \quad \boxed{e_k} \quad \downarrow \quad O_1 = \mathbf{110}1 \quad \oplus \quad \rightarrow c_1 = 000$$
$$\tilde{m_1} = 110$$

$$I_2 = \overbrace{1110}^{I_1}\overbrace{\mathbf{000}}^{c_1} \quad \downarrow \quad \boxed{e_k} \quad \downarrow \quad O_2 = \mathbf{000}0 \quad \oplus \quad \rightarrow c_2 = 001$$
$$\tilde{m_2} = 001$$

4 RSA

4.1 Schlüsselerzeugung

PK = (n,e)
SK = (n,d)
Wir wählen zwei (grosse) Primzahlen p,q $\in \mathbb{R}^*$. $\varphi \neq q$
$n = p * Q$
$\varphi(n) = (p-1)(q-1)$ // $\varphi(n) = |\mathbb{Z}_n^*|$
Wir wählen $e \in \mathbb{Z}^*_{\varphi(n)}$ // ggT(e,$\varphi(n)$) = 1
$d := e^{-1}$ in $\mathbb{Z}^*_{\varphi(n)}$ // ed=1 in $\mathbb{Z}^*_{\varphi(n)} \Leftrightarrow$ ed $\equiv 1 \bmod \varphi(n)$

$\Longrightarrow \varphi(n) | (ed-1)$

$\Longrightarrow \boxed{\exists k \in \mathbb{Z} : e*d + k*\varphi(n)) = 1}$

$d := e^{-1} \in \mathbb{Z}^*_{120} : \boxed{ed + k\varphi(n) = 1}$

Beispiel:
$p = 11,\ q = 13$
$n = p * q = 143$
$\varphi(n) = 120 = 2^3 * 3 * 5$
e:=7 $\Rightarrow$ PK=(143,7)
$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$

i	q_i	r_i	s_i	t_i
0	-	120	1	0
1	17	7	0	1
		1	1	-17

120=q*7+r

$\Longrightarrow (*) \underbrace{e}_{7} * (-17) + 1 * \underbrace{\varphi(n)}_{120}) = 1$ // mod $\varphi(n) \Rightarrow \boxed{d \equiv (-17) \bmod \varphi(n)}$

4.2 Verschlüsselung und Entschlüsselung

4.2.1 RSA ist ein Blockcipher

encryption : enc
$\mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$
$m \longrightarrow c^e \bmod$ n

decyption : dec
$\mathbb{Z}_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$
$m \longrightarrow c^d \bmod$ n

$PK = (u, e)$
$SK = (u, d)$
$\Big\} \boxed{\forall m \in \mathbb{Z}_n : dec_{SK}((enc_{PK}(m))) = m}$

4.2.2 Beweis

Fall 1:
ggT(m,n)=1
$(m^e)^d = m$ in $\mathbb{Z}_n$
Weil ggT(m,n)=1 existiert das Inverse von m: $\underbrace{m^{ed-1} = 1}_{\text{Das ist zu Zeigen!}}$ in $\mathbb{Z}_n$

$e * d + k * \varphi(n) = 1$ // Konstruktion des Schlüssel
$\Rightarrow e * d - 1 = -k * \varphi(n) : m^{ed-1} = m^{-k*\varphi(n)} = (m^{-k}) = 1$ // Satz von Euler-Fermat

Fall 2:
ggT(m,n)$\neq$1 $\Rightarrow m = l * p$ oder $m = k * q$