

Anfängerpraktikum Versuch V351

Fourier-Analyse und -Synthese

Helena Nawrath
helena.nawrath@tu-dortmund.de

Carl Arne Thomann
arnethomann@me.com

Durchführung: 13. Januar 2015

Abgabe: 20. Januar 2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

Ziel

Ziel des Versuchs ist es, die FOURIER-Transformation kennenzulernen. Hierzu wird zum Einen eine bekannte periodische Funktion durch FOURIER-Transformation in die Elementarschwingung zerlegt und zum Anderen eine periodische Funktion aus Elementarschwingungen gebildet.

1 Theorie

1.1 Fourier-Reihenentwicklung, harmonische Analyse

Für eine periodische Funktionen, beispielsweise eine T-periodische Funktion $F(t)$ der Zeit, gilt

$$F(t) = F(t + T) \quad \forall t. \quad (1)$$

Bis Abschnitt 1.3 werden nur solche periodischen Funktionen betrachtet. Nach dem FOURIER'schen Theorem lassen sich periodische Funktionen als Linearkombination aus den Elementarschwingungen

$$a_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \text{und} \quad b_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (2)$$

zusammenfügen. Das bedeutet, dass die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin(\underbrace{n \frac{2\pi}{T} t}_{\omega}) + b_n \cos(\underbrace{n \frac{2\pi}{T} t}_{\omega}) \right) \quad (3)$$

mit $\omega = 2\pi \cdot f$ eine T-periodische Funktion F der Zeit darstellt, sofern die Reihe konvergent ist. Gleichmäßige Konvergenz der FOURIER-Reihe ist gegeben, wenn die Funktion F auf ihrem Definitionsbereich stetig ist.

Für die Koeffizienten in 3 gilt

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(2n\pi t) dt \quad (4a)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(2n\pi t) dt. \quad (4b)$$

Die Schwingung wird für $n = 0$ Grundschwingung und die Schwingungen für $n > 1$ Oberschwingungen bezeichnet. Für gerade Funktionen F , also mit $F(x) = F(-x)$, sind alle $b_n = 0$; analog sind für ungerade Funktionen F , also mit $-F(x) = F(-x)$, alle $a_n = 0$.

Durch diese Formeln ist allgemein das Beschreiben einer T-periodischen Funktion als konvergente FOURIER-Reihe möglich. Dies wird als *harmonische Analyse* oder *FOURIER-Analyse* bezeichnet. Sind andererseits die FOURIER-Koeffizienten einer periodischen Schwingung bekannt, so kann die Funktion aus den Elementarschwingungen zusammengesetzt werden. Dies wird als *Synthese* bezeichnet.

Werden eine begrenzte Anzahl von Elementarschwingungen benutzt, um eine periodische Funktion zusammenzusetzen, kommt es bei unstetigen Funktionen zum GIBBS'schen Phänomen. Es kommt bei der Unstetigkeitsstelle und in ihrer Umgebung zu sichtbaren Abweichungen.

1.2 Linienspektrum der Frequenzen, Spektralanalyse

Werden die FOURIER-Koeffizienten in Gleichungen (4) als Funktionen der Frequenzen f aufgetragen, so ergeben sich Frequenzspektren. In diesen ist abgezeichnet, aus welchen Elementarschwingungen die Funktion F besteht und welchen Wert die FOURIER-Koeffizienten (4) aufweisen. Bei konvergenten FOURIER-Reihen (3) geht die Höhe

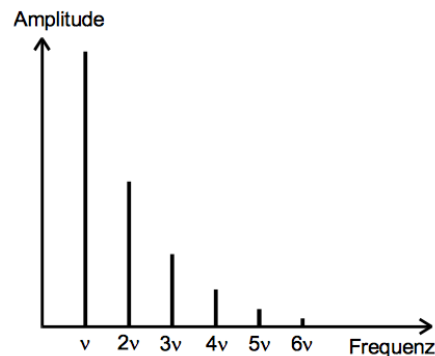


Abbildung 1: Beispiel eines Frequenzspektrums bei konvergenter FOURIER-Reihe. [1]

der diskreten Linien für $f \rightarrow \infty$ gegen Null.

1.3 Nicht-periodische Funktionen, Fourier-Transformation

Nicht-periodische Funktionen F zeigen bei Spektralanalyse 1 ein kontinuierliches Spektrum, weiter gilt nicht $a_n, b_n \xrightarrow{f \rightarrow \infty} 0$ im Allgemeinen. Für diese Funktionen ohne konvergenten FOURIER-Reihen wird eine FOURIER-Transformation angewandt.

Mit der FOURIER-Transformierten $\tilde{F}(\omega)$ und der Funktion $F(t)$ ist die FOURIER-Transformation als uneigentliches Integral beschreibbar. Es gilt

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cdot e^{i\omega t} dt \quad (5)$$

Die von der Frequenz abhängigen Funktion $\tilde{F}(\omega)$ beschreibt das in Abschnitt 1.2 gezeigte Frequenzspektrum. Für reale Systeme kann nicht in den geforderten Zeitgrenzen $-\infty$ und ∞ integriert werden; durch vorzeitiges Abbrechen der Integration kommt es zu Abweichungen. Diese Abweichungen bestehen beispielsweise darin, dass eventuell erwartete diskrete Linien (vgl. Abb. 1) als Peaks mit endlicher Breite dargestellt werden und es neben den erwarteten Maxima auch zu Nebenmaxima kommt.

Die Umkehrformel der FOURIER-Transformation ist gegeben durch

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \quad (6)$$

2 Durchführung

2.1 Fourier-Analyse

Es werden periodische elektrische Schwingungen in ihre FOURIER-Komponenten zerlegt und die gemessenen FOURIER-Koeffizienten mit den nach FURIERSchen Theorem erwarteten Werten nach Gleichung 4 verglichen.

Es wird das Signal eines Funktionsgenerators mit den Kenndaten in Tabelle 1 auf ein

Größe	Symbol	Wert
Spannung	U_{pp}	2 V
Frequenz	f	10 000 Hz

Tabelle 1: Kenndaten und Einstellungen des Funktionsgenerators.

Oszilloskop gegeben. Die Signalform wird gewählt aus Rechteck-, Sägezahn- und Dreieckspannung. Dieses Oszilloskop wird im *Math*-Modus betrieben, welcher über eine endliche Zeit eine *Fast-FOURIER-Transformation* [2] durchführt. Nach Abschnitt 1.3 werden für die periodischen Signale anstelle von diskreten Linien Peaks mit endlicher Breite erwartet. Die Höhe der Peaks nehmen im Frequenzspektrum mit wachsender Frequenz ab. Die Amplitude der Elementarschwingung und damit die FOURIER-Koeffizienten 4 entsprechen der Höhe der Peaks. Anschließend wird das Verfahren mit einer anderen Signalform wiederholt, sodass alle drei Signalformen analysiert werden.

2.2 Fourier-Synthese

Aus den Gleichungen 4 sind für periodische Signalformen, etwa Rechteck-, Sägezahn- oder Dreieckspannungen, die FOURIER-Koeffizienten bekannt. Mit Hilfe einer Vorrichtung wird die Signalform aus den Elementarschwingungen mit berechneter Amplitude additiv zusammengesetzt.

Die Vorrichtung besteht aus einem Funktionsgenerator, der eine feste Grundschiwingung $f = \text{const.}$ für $n = 1$ und deren Oberschwingungen für $n \in \{2, \dots, 9\}$ ausgibt. Diese Elementarschwingungen sind in ihrer Amplitude und in ihrer Phase einstellbar, weiter kann das Summensignal ausgegeben werden. Die einzelnen Oberschwingungen und die Grundschiwingung können wahlweise dem Summensignal zugeschaltet werden.

Die aus den Gleichungen 4 bekannten Amplituden werden an der Vorrichtung eingestellt und die einzelnen Phase so versetzt, dass die Schwingungen in Phase sind. Bei $a_n, b_n < 0$ kann ein Phasenversatz von $\phi = 180^\circ$ eingestellt werden, es gilt

$$-\sin(x) = \sin(x + 180^\circ). \quad (7a)$$

$$-\cos(x) = \cos(x + 180^\circ) \quad (7b)$$

3 Auswertung

3.1 Fourier-Transformation

Die Tabellen 2, 3 und 4 enthalten die gemessenen Amplituden U_n der n -ten Oberschwingung. Nach Gleichung (4a) und (4b) wurden in der Versuchsvorbereitung die Koeffizienten a_n, b_n der verschiedenen Spannungsformen berechnet. Es gilt

$$\text{Rechteck : } a_n = 0 \quad b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{4U_0}{\pi n}, & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{Sägezahn : } a_n = 0 \quad b_n = (-1)^{n+1} \frac{2U_0}{\pi n}, \quad (9)$$

$$\text{Dreieck : } a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ gerade} \\ \frac{8U_0}{n^2\pi^2}, & n \text{ ungerade} \end{cases} \quad b_n = 0. \quad (10)$$

mit Rechteck- und Dreiecksspannung als gerade Funktionen; die Rechtecksspannung ist ungerade. Nach diesen Formeln wird die theoretisch erwartete Amplitude $\frac{U_1}{n}$ berechnet, in dem die erste gemessene Amplitude als gegeben vorausgesetzt wird und anschließend durch n bzw. n^2 geteilt wird, um die restlichen Theoriewerte zu erhalten. Die Abweichung zwischen Messung und Theorie ist ebenfalls angegeben.

n	$\frac{U_1}{n} / \text{mV}$	U_n / mV	Abweichung /%
1	920	—	—
3	300	288	4
5	170	168	1
7	116	112	4
9	86	80	8
11	64	56	14

Tabelle 2: FOURIER-Analyse der Rechteckspannung.

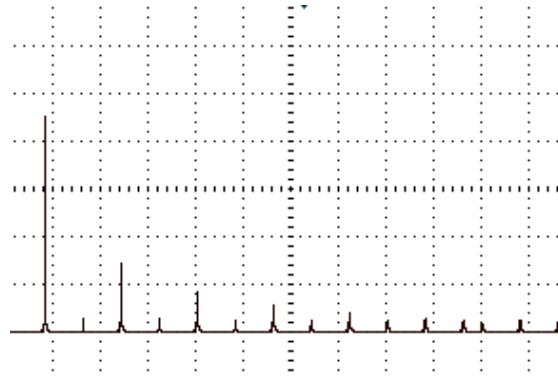


Abbildung 2: FOURIER-Analyse der Rechteckspannung. [3]

n	$\frac{U_1}{n^2} / \text{mV}$	U_n / mV	Abweichung /%
1	580	—	—
3	63	61,6	2,3
5	21	20,8	1,0
7	10	10,4	3,9
9	6	5,6	7,1
11	4	4,0	0,0

Tabelle 3: FOURIER-Analyse der Dreiecksspannung.

In den Abbildungen 2 und 3 werden die Amplituden der Koeffizienten dargestellt. Nach Gleichung (8) und (9) sollen alle geraden Koeffizienten wegfallen. Wird die Theorie mit den Abbildungen verglichen, fällt auf, dass dies – bedingt durch die verwendeten Bauteile in der Messung – nicht der Fall ist. Es treten Spannungen $U \geq 0 \text{ V}$ auf. Diese Abweichungen lassen sich für größere n nur schwierig von den Amplituden der ungeraden Koeffizienten unterscheiden.

Die Abbildung 4 stimmt gut mit der Theorie überein, weist jedoch einen messtechnisch bedingten Fehler auf. Der Abstand zwischen dem 12. und 13. Peak weicht von der Größe der anderen Abstände ab. Bei Rechteck- und Dreiecksspannung tritt der gleiche Fehler

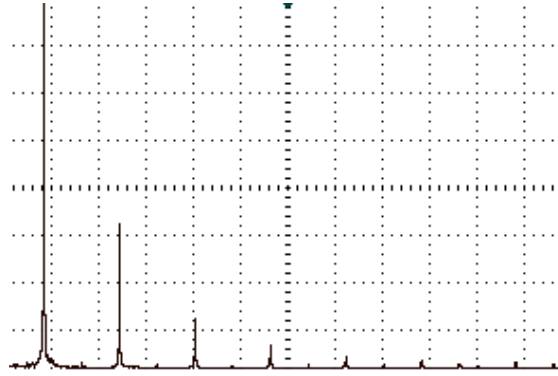


Abbildung 3: FOURIER-Analyse der Dreiecksspannung.[3]

n	$\frac{U_1}{n} / \text{mV}$	U_n / mV	Abweichung /%
1	460	—	—
2	230	224	3
3	152	144	6
4	112	112	0
5	88	88	0
6	74	74	0
7	64	64	0
8	56	56	0
9	50	48	4
10	44	46	5
11	40	40	0

Tabelle 4: FOURIER-Analyse der Sägezahnspannung.

auf, was aber aufgrund der Peak-Höhe nicht direkt zu erkennen ist.

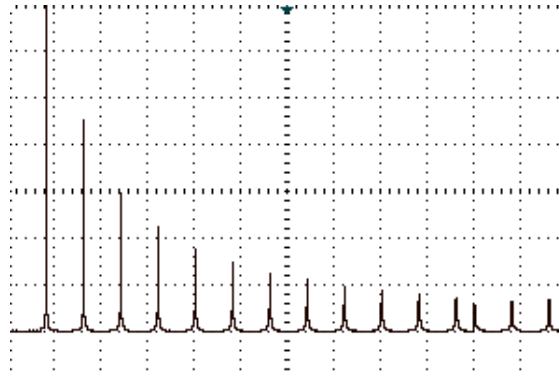


Abbildung 4: FOURIER-Analyse der Sägezahnspannung. [3]

3.2 Fourier-Synthese

n	U_n /mV		
	Rechteck	Sägezahn	Dreieck
1	634.8	634.8	634.80
2	0	318.00	0
3	216.73	212.00	70.72
4	0	159.76	0
5	130.20	127.65	25.48
6	0	106.45	0
7	92.90	91.20	13.27
8	0	79.49	0
9	72.08	70.55	7.95

Tabelle 5: FOURIER-Synthese drei verschiedener Spannungen.

In Tabelle 5 sind die Amplituden der unterschiedlichen Oberwellen für Rechteck-, Dreieck- und Sägezahnspannung aufgetragen.

In Abbildung 5 ist die synthetisierte Dreieckspannung abgebildet. Die Flanken sind nicht gerade, sondern weisen Schwingungsbäuche auf. Die Spannungsspitzen sind abgerundet. Trotzdem ist die maßgebliche, dreieckige Form gut erkennbar. Die Rechteckspannung ist ebenfalls gut zu erkennen, weist aber – hauptsächlich an den Maximalwerten der Spannung vorzufindende – Abweichungen auf. Abbildung 7 zeigt die Sägezahnspannung. Diese unterscheidet sich vom idealen Aussehen durch nicht ganz senkrecht abfallende Flanken und Schwingungen an steigenden Flanken.

Die relativ starken Abweichungen werden erzeugt, da die FOURIER-Synthese nach $n = 10$ Oberschwingungen abgebrochen wird. Durch größere Werte für n , sowie noch genaueres Einstellen der Phasen kann der Fehler weiter minimiert werden.

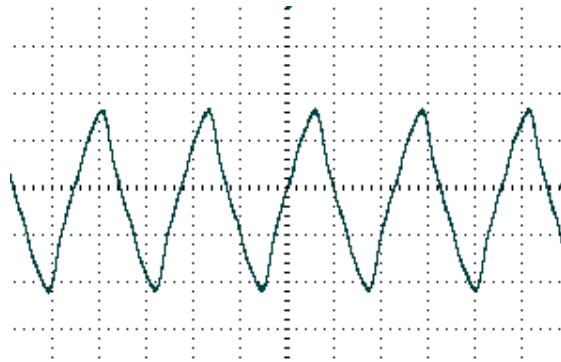


Abbildung 5: FOURIER-Synthese der Dreiecksspannung. [3]

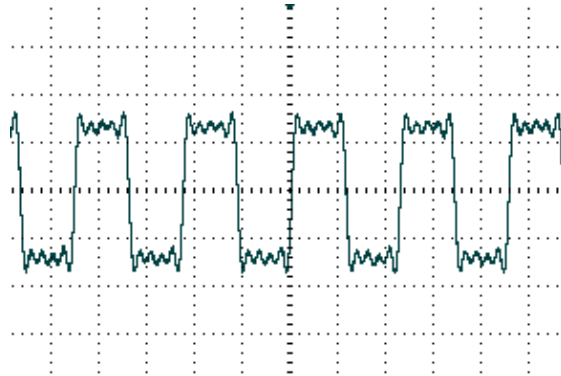


Abbildung 6: FOURIER-Synthese der Rechteckspannung. [3]

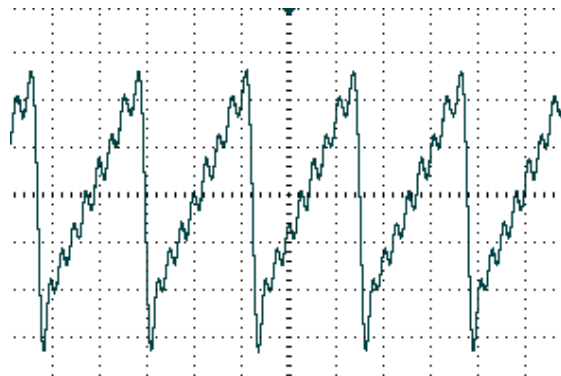


Abbildung 7: FOURIER-Synthese der Sägezahnspannung. [3]

4 Diskussion

Bei der FOURIER-Analyse treten geringe Abweichungen zwischen berechneten und experimentell bestimmten Spannungswerten auf, deren Wert für größere n ansteigt. Da alle Theoriewerte aus der ersten eingestellten Spannung berechnet werden, könnten eventuelle Fehler durch ungenaues Ablesen der dieser Amplitude auftreten. Durch weitere Messreihen könnte darüber eine stärkere Aussage getroffen werden.

Die Voraussetzung der Integration über eine unendlich lange Zeit kann vom verwendeten Oszilloskop nicht realisiert werden. Daher fallen die geraden Koeffizienten der Rechteck- und Sägezahnspannung nicht weg. Im Widerspruch zur Theorie nehmen nach Gleichungen (8) und (9) verschwindende Koeffizienten einen Wert größer als Null an. Zusätzlich treten Abweichungen durch eine endliche Genauigkeit der verwendeten Geräte auf.

Prinzipiell lassen sich Spannungen durch die einzelnen FOURIER-Koeffizienten so zusammensetzen, dass ihre Form gut zu erkennen ist. Rechteck- und Sägezahnspannung jedoch sind unstetige Funktionen. Deswegen treten an den Sprungstellen nach dem GIBBSschen Phänomen Überschwüngen auf, die nicht vermieden werden können. Selbst für $n \rightarrow \infty$ werden die Abweichungen nicht geringer.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch V351: Fourier-Analyse und -Synthese*. URL: <http://129.217.224.2/HOME/PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V351.pdf> (besucht am 13.01.2015).
- [2] FH Flensburg. *Schnelle Fourier-trans-formation (FFT)*. URL: <http://www.iti.fh-flensburg.de/lang/algorithmen/fft/fft.htm> (besucht am 14.01.2015).
- [3] The GIMP Team. *GIMP: GNU Image Manipulation Program*. URL: <http://www.gimp.org/>. Version 2.8.10.

Die Grafiken wurden mit *GIMP*[3] bearbeitet sowie die Berechnungen mit Python-*Numpy* durchgeführt.