ANFÄNGERPRAKTIKUM V101

Das Trägheitsmoment

Helena Nawrath
helena.nawrath@tu-dortmund.de

Carl Arne Thomann
arnethomann@me.com

Durchführung: 28. Oktober 2014 Abgabe: 04. November 2014

TU Dortmund – Fakultät Physik

1 Ziel

Es werden die Trägheitsmomente verschiedener Körper gemessen und anschließend mit den theoretisch errechneten Werten verglichen. Hierzu werden die Winkelrichtgröße D und das Trägheitsmoment der Drillachse I_D bestimmt.

2 Theorie

Translation und Rotation verbinden Analogien. Bei Rotationen sind das Drehmoment $\vec{M}$, das Trägheitsmoment I und die Winkelbeschleunigung $\dot{\vec{\omega}}$ maßgebliche Größen. Das Drehmoment $\vec{M}$ mit $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ ist abhängig von der Kraft $\vec{F}$, welche im Abstand $|\vec{r}|$ von der Drehachse angreift. Ausgedrückt über die Winkelrichtgröße D und die Auslenkung des Winkels ϕ ist der Betrag des Drehmomentes ebenfalls

$$|\vec{M}| = D\phi. \tag{1}$$

Das Trägheitsmoment I ist, analog zur trägen Masse m in Translationen, der Widerstand eines Drehmoments $\vec{M}$. Es gilt für Drehachsen durch den Masseschwerpunkt S

$$I_\text{S} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2 \tag{2}$$

für diskrete Massestücke m_i im Abstand r_i von der Rotationsachse und

$$I_\text{S} = \int_{m_\text{K}} r_i^2 \mathrm{d}m \tag{3}$$

$$= \int_{V_\text{K}} \rho(\vec{r}) \cdot r_\perp^2 \mathrm{d}V \tag{4}$$

für kontinuierliche Masseverteilungen mit Massenverteilung $\rho(\vec{r})$. Ist die Drehachse um a parallel zur Achse durch den Schwerpunkt verschoben, so kann das Trägheitsmoment I_a unter Zuhilfenahme des Satzes von Steiner berechnet werden,

$$I_a = I_\text{S} + m_\text{K} \cdot a^2. \tag{5}$$

Mechanische Drehschwingungen führen harmonische Schwingungen mit der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \tag{6}$$

für kleine Auslenkungswinkel ϕ aus. Die Winkelrichtgröße D berechnet sich bei $\vec{F} \perp \vec{r}$ mit Formel (1) und (6) zu

$$D = \frac{F \cdot r}{\phi} \tag{7}$$

$$= 4\pi^2 \cdot \frac{I}{T^2}. \tag{8}$$

3 Aufbau und Durchführung

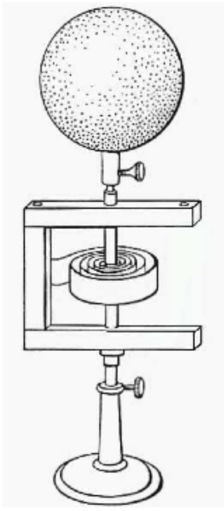


Abbildung 1: Skizze des Versuchsaufbaus mit Kugel als Probekörper

In diesem Versuch wird die gezeigte Apparatur verwendet. Eine drehbar gelagerte Achse ist über eine Spiralfeder an einen festen Rahmen gebunden. In das obere Ende der Drillachse können verschiedene Körper eingespannt und der Auslenkwinkel ϕ anhand einer Skala abgelesen werden.

3.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße D

Zur Bestimmung der Winkelrichtgröße D wird gemäß (1) das Drehmoment $\vec{M}$ und der Auslenkwinkel ϕ ermittelt. Hierzu wird eine Metallstange so in die Vorrichtung eingespannt, dass die Drehachse durch den Stangenschwerpunkt verläuft senkrecht zur Drehachse steht. Eine im Abstand r zum Drehzentrum angehängte Federwaage misst die Kraft F ausgehend vom rücktreibenden Drehmomentes bei Auslenkung der Metallstange um einen ausgewählten Winkel ϕ. Zu beachten ist, dass die Federwaage senkrecht zum Stab und zur Rotationsachse sein muss. Dadurch kann der Betrag des Drehmoments M durch

$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin(\angle(\vec{r}) \tag{9}$$

berechnet werden. Diese Messung wird für 10 verschiedene Winkel ϕ zwischen 0 und 2π durchgeführt. Neben der vorherig beschriebenen statischen Methode, kann D ebenfalls über die Messung der Schwingungsdauer T - die dynamische Methode - bestimmt werden. Diese wird jedoch nicht durchgeführt.

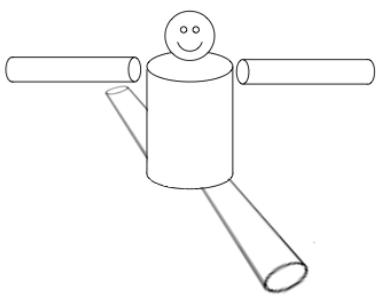
3.2 Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes I_D der Drillachse

Auf die Metallstange aus Kapitel 3.1 wird beidseitig im Abstand a von der Drehachse je eine Masse befestigt. Die Stange wird um ϕ ausgelenkt und mittels einer Stoppuhr die Schwingungsdauer T für 2 Perioden gemessen. Es wird ein neuer Abstand a gewählt und das Verfahren wiederholt, sodass insgesamt 10 Messwerte für Schwingungsdauer T aufgenommen werden. Masse und Abmessungen der Massestücke werden mit Waage und Schieblehre bestimmt.

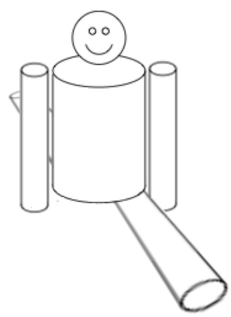
3.3 Bestimmung der Trägheitsmomente I verschiedener Körper

Als erster Körper wird ein Styroporzylinder gewählt, welcher senkrecht auf die Drillachse gesteckt wird. Anschließend wird der Körper in Schwingung versetzt und die Schwingungsdauer T für 5 Schwingungen insgesamt 10 Mal gemessen. Das Verfahren wird für den zweiten Körper, eine Kugel, analog wiederholt. Abmessungen und Masse der Probekörper werden mittels Schieblehre und Waage bestimmt.

3.4 Bestimmung der Trägheitsmomente I der Modellpuppe für zwei verschiedene Positionen



(a) Position (1) der Modellpuppe



(b) Position (2) der Modellpuppe

Die Puppe wird jeweils in Position (1) und in Position (2) in die Messvorrichtung eingespannt und der Messvorgang analog zu Kapitel 3.3 durchgeführt. Es folgen die Bestimmung des Gewichtes mit einer Waage und die Vermessung der einzelnen Körperteile der Puppe. Es werden Durchmesser und ggf. die Länge von Armen, Beinen, Kopf und Rumpf mit einer Schieblehre vermessen.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße D

Winkel		Kraft
ϕ	ϕ/ rad	F/ N
45°	$\frac{\pi}{4}$	0.22
90°	$\frac{\pi}{2}$	0.40
120°	$\frac{2\pi}{3}$	0.52
135°	$\frac{3\pi}{4}$	0.60
180°	π	0.78
225°	$\frac{5\pi}{4}$	0.92
240°	$\frac{4\pi}{3}$	0.90
270°	$\frac{3\pi}{2}$	1.08
315°	$\frac{7\pi}{4}$	1.26
360°	2π	1.42

Tabelle 1: Messung zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes der Drillachse

Mit den Messwerten und $r = 0.09965$m lässt sich die Winkelrichtgröße D mit der Gleichung (7) bestimmen. Die Unsicherheit ist die Standardabweichung des Mittelwertes σ_D mit

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} := \sqrt{\frac{1}{n^2 - n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{10a}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{10b}$$

für $x = D$. Es ergibt sich

$$D = (0.0757 \pm 0.0019)\,\mathrm{N\,m} \tag{11}$$

4.2 Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes I_D

Zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes I_D wird die verwendete Stange als nahezu masselos angenommen, wodurch ihr Anteil am Trägheitsmoment vernachlässigbar ist. Das gemessene Trägheitsmoment setzt sich aufgrund der Linearität des Trägheitsmomentes aus den Trägheitsmomenten der Massestücke m_1 und m_2 als Punktmassen, sowie dem Eigenträgheitsmoment I_D zusammen,

$$I = I_D + I_{m_1} + I_{m_2}. \tag{12}$$

Nach Einsetzen in Gleichung (7) wird der lineare Zusammenhang von T^2 und a^2 ersichtlich. Es gilt

$$
\begin{aligned}
D &= 4\pi^2 \cdot \frac{I}{T^2} \\
&= 4\pi^2 \cdot \frac{I_D + I_{m_1} + I_{m_2}}{T^2} \\
&= 4\pi^2 \cdot \frac{I_D + a^2(m_1 + m_2)}{T^2} \\
T^2 &= 4\pi^2 \frac{I_D}{D} + 4\pi^2 \frac{a^2(m_1 + m_2)}{D}
\end{aligned}
$$

$$
T^2 = \underbrace{4\pi^2 \frac{(m_1 + m_2)}{D}}_{m_{\mathrm{Reg}}} \cdot a^2 + \underbrace{4\pi^2 \frac{I_D}{D}}_{b_{\mathrm{Reg}}} \tag{13}
$$

Zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments I_D werden die gemittelten Schwingperioden-Quadrate T^2 gegen das Abstandsquadrat a^2 aufgetragen. Aus der Regression mittels der Formeln

$$
\Delta = N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2 \tag{14a}
$$

$$
m_{\mathrm{Reg}} = \frac{N \sum x \cdot y - \sum x \cdot \sum y}{\Delta} \tag{14b}
$$

$$
b_{\mathrm{Reg}} = \frac{\sum x^2 \cdot \sum y - \sum x \cdot \sum x \cdot y}{\Delta} \tag{14c}
$$

$$
\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y - m_{\mathrm{Reg}} \cdot x - b_{\mathrm{Reg}})^2}{N - 2}} \tag{14d}
$$

$$
\sigma_m = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}} \tag{14e}
$$

$$
\sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}} \tag{14f}
$$

für $x = a^2$, $y = T^2$ und der Identität aus Gleichung (13), wird das Eigenträgheitsmoment I_D berechnet

$$
\begin{aligned}
I_D &= \frac{D}{4\pi^2} b_{\mathrm{Reg}} = (9.26 \pm 0.23) 10^{-3} \mathrm{kg\,m^2} \\
&= (9.26 \pm 0.23) 10^{-3} \mathrm{kg\,m^2}
\end{aligned} \tag{15}
$$

Abstand	Schwingungsdauer				Masse	
a/ cm	$2T_1$/ s	T_1/ s	$2T_2$/ s	T_2/ s	m_1/ g	m_2/ g
6,4925	5,90	2,950	5,90	2,950	221,74	221,73
8,4925	6,55	3,275	6,46	3,230	221,74	221,73
10,9925	7,29	3,645	7,21	3,605	221,75	221,73
13,7925	8,66	4,330	8,63	4,315	221,76	221,75
16,6925	10,07	5,035	10,10	5,050	221,75	221,74
19,0925	11,13	5,565	11,15	5,575	221,75	221,74
20,4925	11,92	5,960	11,76	5,880	221,75	221,73
22,4925	13,03	6,515	13,00	6,500	221,76	221,74
24,5925	14,10	7,050	13,96	6,980	221,75	221,75
29,5925	16,67	8,335	16,73	8,365	221,76	221,74

Tabelle 2: Messung zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes der Drillachse

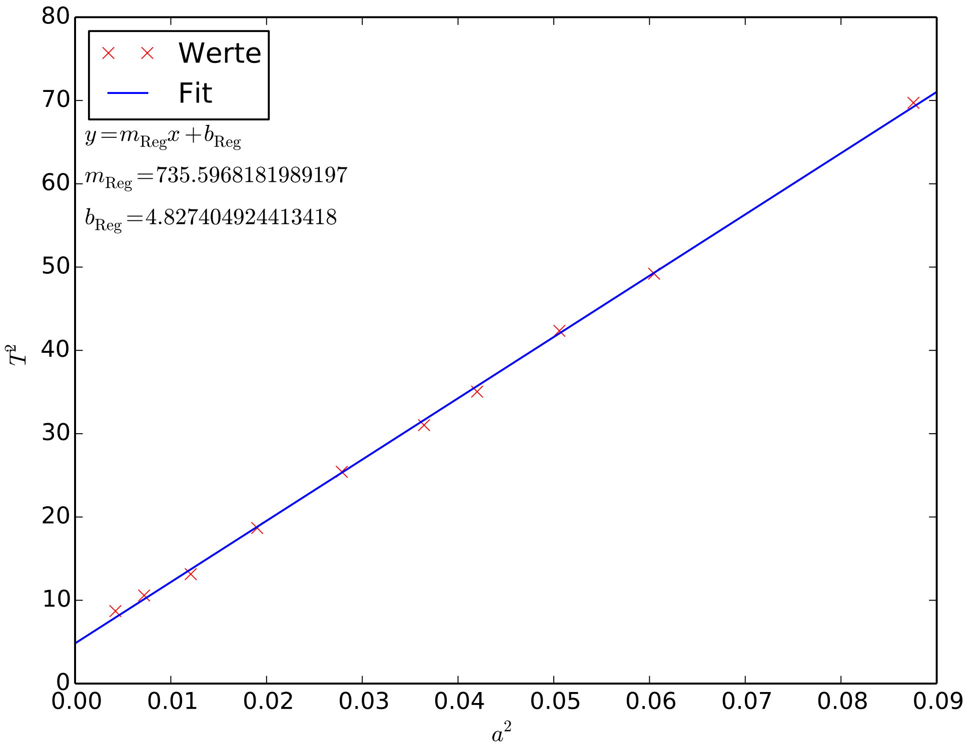


Abbildung 3: Regression von T^2 gegen a^2

4.3 Trägheitsmoment I_Z eines Zylinders

Schwingungsdauer		Abmessungen		Masse
$5T/$ s	$T/$ s	Höhe $H/$ cm	Durchmesser $D/$ cm	$M/$ g
4,41	0,882	10,120	9,848	368,57
4,35	0,870	10,150	9,850	368,57
4,44	0,888	10,120	9,844	368,57
4,44	0,888	10,102	9,840	368,57
4,36	0,872	10,112	9,844	368,57
4,41	0,882	10,112	9,850	368,58
4,32	0,864	10,058	9,850	368,59
4,40	0,880	10,070	9,844	368,57
4,33	0,886	10,068	9,844	368,58
4,39	0,878	10,072	9,850	368,57

Tabelle 3: Messung zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes eines Zylinders

Mit bekannter Winkelrichtgröße D wird die Gleichung (7) benutzt, um das Trägheitsmoment aus der Schwingungsdauer T zu berechnen. Der Fehler des Trägheitsmomentes wird mithilfe der Gausschen Fehlerfortpflanzung mit

$$\sigma = \sqrt{\sum_i^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \Delta x_i^2} \tag{16}$$

bestimmt. Es ergibt sich

$$I_Z = (1.48 \pm 0.04) 10^{-3} \mathrm{kg\,m^2} \tag{17}$$

Das sichtbare Material der Zylinders ist Styropor-ähnlich. Da die gemessene Masse des Zylinders, $m_Z = (368.5740 \pm 0.0022)$g, stark von der theoretischen Masse eines Styropor-Zylinders gleicher Maße, $m_{\text{Theorie}} = \rho_{\text{Styropor}} V = (807.4 \pm 0.8)$g, abweicht, wird die Vermutung angestellt, dass der Körper ein Hohlzylinder ist oder dass der Körper nicht vollständig aus Styropor besteht. Zur Bestimmung der Geometrie des vermuteten Styropor-Hohlzylinders wird die Formel für Hohlzylinder-Volumen mit der Dichte ρ_{Styropor} multipliziert und mit der gemessenen Masse gleichgesetzt. Dabei gilt die Annahme, dass die

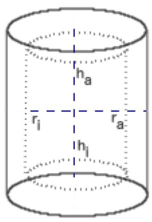


Abbildung 4: Bezeichnungen des Hohlzylinders

Stärke des Hohlzylinders für Mantel, Deckel und Boden gleich sind, $r_a - r_i = h_a - h_i$. Die so von zwei Unbekannten r_i und h_i auf eine Unbekannte r_i reduzierte Gleichung

$$m_{\text{Z}} = \rho(-2\pi * (r_i)^3 + (r_i)^2 * (2\pi r_a - \pi h_a) + (\pi h_a r_a^2) \tag{18}$$

ergibt für den Innenradius $r_i = 0.0401012\text{m}$.

Das Trägheitsmoment eines solchen Hohlzylinders setzt sich zusammen aus den Trägheitsmomenten eines Zylindermantels und zwei Kreisscheiben, die um ihren Mittelpunkt rotieren.

$$I_{\text{HZ, Theorie}} = I_{\text{Zylindermantel}} + 2I_{\text{Kreisscheibe}}$$
$$I_{\text{HZ, Theorie}} = m_{\text{Mantel}}\frac{r_i^2 + r_a^2}{2} + m_{\text{Kreisscheibe}} r_i^2$$

Man erhält

$$I_{\text{HZ, Theorie}} = (6.256306729 \pm Fehler)10^{-3}\text{kg}\,\text{m}^2 \tag{19}$$

4.4 Trägheitsmoment I_{K} einer Kugel

Schwingungsdauer		Abmessungen	Masse
$5T/$ s	$T/$ s	Durchmesser $D/$ cm	$M/$ g
8,60	1,720	13,745	812,7
8,56	1,721	13,730	812,7
8,61	1,722	13,720	812,7
8,58	1,716	13,745	812,7
8,56	1,721	13,750	812,7
8,61	1,722	13,740	812,7
8,55	1,710	13,750	812,7
8,61	1,722	13,710	812,7
8,60	1,720	13,745	812,7
8,61	1,722	13,730	812,7

Tabelle 4: Messung zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes einer Kugel

Analog zu 4.3 wird über die Schwingungsdauer T das Trägheitsmoment I_{K} der Kugel zu

$$I_K = (5.67 \pm 0.14)10^{-3}\text{kg}\,\text{m}^2 \tag{20}$$

bestimmt. Für die theoretische Berechnung des Trägheitsmomentes wird die gemessene Masse der Kugel benutzt. Mit $I_K = \frac{2}{5} m_{\text{Kugel}} r^2$ ist

$$I_{\text{K, Theorie}} = (1.5335 \pm 0.0010)10^{-3}\text{kg}\,\text{m}^2 \tag{21}$$

4.5 Trägheitsmoment $I_{\textsf{Puppe}}$

Position (1)	Position (2)
0,768	0,974
0,778	0,956
0,772	0,974
0,772	0,96
0,774	0,972
0,786	0,992
0,768	0,96
0,78	0,98
0,768	0,98
0,774	0,974

Tabelle 5: Schwingungsdauer der Puppe

Analog zu 4.3 wird über die Schwingungsdauer T das Trägheitsmoment I_{Puppe} für beide Positionen zu

$$I_{\text{Puppe},1} = (1.149 \pm 0.028)10^{-3}\text{kg}\,\text{m}^2 \tag{22a}$$

$$I_{\text{Puppe},2} = (1.81 \pm 0.04)10^{-3}\text{kg}\,\text{m}^2 \tag{22b}$$

bestimmt. Für die theoretische Berechnung werden die Volumina der Körperteile, die Dichte der Puppe ρ_{Puppe} mit $\rho_{\text{Puppe}} = \frac{m_{\text{Puppe}}}{V_{\text{Puppe, Gesamt}}}$ und dadurch die Massen der Körperteile bestimmt. Die Daten sind der Tabelle 5 zu entnehmen. Für die Einzelträgheitsmomente, deren Summe das Trägheitsmoment der Puppe ist, gelten die Formeln

$$\begin{aligned}
I_{\text{Arm},1} &= \frac{m_{\text{Arm}}}{2}\left(\frac{d_{\text{Arm}}}{2}\right)^2 + \underbrace{m_{\text{Arm}}\left(\frac{d_{\text{Rumpf}}}{2} + \frac{d_{\text{Arm}}}{2}\right)^2}_{\text{Satz von Steiner}} \\
I_{\text{Arm},2} &= \frac{m_{\text{Arm}}}{2}(\frac{d_{\text{Arm}}}{2})^2 \\
I_{\text{Bein}} &= m_{\text{Bein}}\left(\frac{(d_{\text{Bein}})^2}{16} + \frac{(h_{\text{Bein}})^2}{12}\right) + \underbrace{m_{\text{Bein}}\left(\frac{h_{\text{Bein}}}{2}\right)^2}_{\text{Satz von Steiner}} \\
I_{\text{Kopf}} &= \frac{2m_{\text{Kopf}}}{5}\left(\frac{d_{\text{Kopf}}}{2}\right)^2 \\
I_{\text{Rumpf}} &= \frac{m_{\text{Rumpf}}}{2}\left(\frac{d_{\text{Rumpf}}}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Armdurchmesser		Armlänge		Beindurchmesser		Beinlänge		Kopf	Rumpf		Masse
links	rechts	links	rechts	links	rechts	links	rechts				
d_{A}/ cm	d_{A}/ cm	l_{A}/ cm	l_{A}/ cm	d_{B}/ cm	d_{B}/ cm	l_{B}/ cm	l_{B}/ cm	d/cm	d/cm	l/cm	M/g
1,7	1,5	14,1	14,0	1,6	1,6	15,0	15,5	3,0	3,9	9,9	162,60
1,3	1,4	14,2	14,1	1,7	2,1	14,9	15,4	3,0	3,6	10,0	162,61
1,6	1,6	14,0	14,0	2,0	1,8	15,0	15,4	3,1	3,6	9,9	162,62
1,0	1,2	13,9	14,1	1,2	1,6	15,0	15,6	3,1	3,9	9,9	162,65
1,4	1,1	14,0	13,9	1,7	1,1	14,9	15,6	3,0	4,1	9,9	162,63
0,9	1,4	13,8	14,1	1,4	1,5	14,9	15,6	3,1	3,5	10,0	162,63
1,6	1,3	13,9	14,0	1,3	1,3	15,0	15,3	3,0	3,7	9,8	162,61
1,5	1,1	14,1	14,1	1,9	1,0	14,9	15,4	3,1	3,5	9,9	162,62
1,6	0,9	13,8	14,1	1,5	1,7	15,0	15,6	3,0	3,6	9,7	162,61
1,7	1,4	13,9	14,2	1,3	1,6	15,0	15,6	3,1	3,2	9,8	162,64

Tabelle 6: Abmessungen und Masse der Modellpuppe

	Arm		Beine		Kopf	Rumpf
	links	rechts	links	rechts		
Volumen[10^{-5}m^3]	2.24 ± 0.28	1.84 ± 0.19	2.86 ± 0.31	2.8 ± 0.4	1.486 ± 0.024	9.8 ± 0.7
Masse [kg]	0.0173 ± 0.0021	0.0142 ± 0.0015	0.0220 ± 0.0023	0.0220 ± 0.0027	0.0114 ± 0.0005	0.076 ± 0.004

Tabelle 7: Abmessungen und Masse der Puppenteile

Trägheitsmoment	$[10^{-5}\mathrm{kg\,m^2}]$
Linker Arm Pos.1	1.12 ± 0.17
Rechter Arm Pos.1	$.86 \pm .11$
Linker Arm Pos.2	16.1 ± 1.9
Rechter Arm Pos.2	13.3 ± 1.4
Linkes Bein	16.5 ± 1.7
Rechtes Bein	17.6 ± 2.2
Kopf	0.106 ± 0.006
Rumpf	1.20 ± 0.14

Tabelle 8: Trägheitsmomente der Puppenteile

Damit ergeben sich die theoretischen Gesamtträgheitsmomente

$$I_{\mathrm{Puppe,1,Theorie}} = (3.74 \pm 0.24)10^{-4}\mathrm{kg\,m^2}, \tag{23a}$$
$$I_{\mathrm{Puppe,2,Theorie}} = (6.48 \pm 0.27)10^{-4}\mathrm{kg\,m^2}. \tag{23b}$$

Der Quotient α der theoretischen Trägheitsmomente aus (23) ist

$$\alpha = \frac{I_{\mathrm{Puppe,1,Theorie}}}{I_{\mathrm{Puppe,1,Theorie}}}, \tag{24a}$$

analog ist der Quotient β der gemessenen Trägheitsmomente aus (22a) und (22b)

$$\beta = \frac{I_{\mathrm{Puppe,1}}}{I_{\mathrm{Puppe,1}}}. \tag{24b}$$

5 Diskussion

5.1 Winkelrichtgröße D und Eigenträgheitsmoment I_{D} der Drillachse

Mit einem relativen Fehler von $2,51\%$ kann die Winkelrichtgröße über die statische Methode für weitere Berechnungen ausreichend genau bestimmt werden. Dabei liegt die größte Fehlerquelle im Ablesen der Auslenkungswinkel, welche per Augenmaß bestimmt wurden.

Das Trägheitsmoment I setzt sich aus dem Eigenträgheitsmoment I_{D} der Drillachse und den Trägheitmomenten I_{m_i} der als punktförmig angenommenen Massestücke zusammen. Der verwendete Stab wird als masselos angesehen und daraus resultierend das Trägheitsmoment I_{S} vernachlässigt. Diese Annahmen sind zu grob, sodass das errechnete Trägheitsmoment I_{D} mit einem Fehler von $2,48\%$ sehr stark vom eigentlichem Trägheitsmoment der Drillachse nach oben abweicht. Wird die Annahme eines masselosen Stabes nicht getroffen, so ergibt sich nach Abzug von I_{S} und I_{m_i} ein negativer Wert für I_{D}.

Dies zeigt, dass der tatsächliche Wert I_{D} so gering ist, dass es in weiteren Versuchsteilen vernachlässigt werden kann.

5.2 Bestimmung der Trägheitsmomente zweier Körper

Für die Berechnung des Trägheitsmomentes I_Z wird die Annahme gemacht, dass es sich um einen Hohlzylinder aus Styropor handelt. Es ist davon auszugehen, dass der theoretische Wert nicht vollkommen korrekt ist, da der Zylinder nicht ausschließlich aus Styropor besteht. Befindet sich zur Stabilisierung ein Grundgerüst, z.B. aus Plastik oder Metall, im Zylindermantel ist bei konstant bleibender Masse ein größerer Teil dieser noch weiter von der Drehachse entfernt. Dies liefert ein größeres Trägheitsmoment und entspräche dann eher dem gemessenen Wert und würde die Abweichung von $81,84\%$ erklären. Das gemessene Trägheitsmoment hat einen relativen Fehler von $2,7\%$, kann also ziemlich genau gemessen werden.

Das gemessene Trägheitsmoment I_K der Kugel mit einem relativen Fehler von $2,45\%$ liegt in der Größenordnung des errechneten Wertes, der eine Abweichung von $0,65\%$ aufweist. Dabei weicht dieser um $27,05\%$ von der Messung ab.

5.3 Bestimmung der Trägheitsmomente der Modellpuppe

5.3.1 Gemessene Trägheitsmomente

Das über die gemessene Periodendauer berechnete Gesamtträgheitsmoment der ersten Position ist $36,52\%$ größer als das der Zweiten, da in Position 1 sich mehr Masse weiter von der Drehachse entfernt befindet. Die relativen Fehler von $2,21\%$ (Position 1) und $2,44\%$ (Position 2) liegen in einem vertretbaren Rahmen.

Die berechneten Trägheitsmomente von Kopf und Rumpf der Puppe weisen einen relativen Fehler von $5,66\%$ bzw. $11,67\%$ auf. Die Trägheitsmomente der Arme unterscheiden sich in Position 1 um $21,05\%$, in Position 2 um $30,23\%$. Die Trägheitsmomente der Beine mit relativen Fehlern von $10,33\%$ (links) und $12,50\%$ unterscheiden sich um $6,67\%$. Dies ist erklärbar mit den nicht genau bestimmbaren Abmessungen der Puppe aufgrund der unregelmäßigen Form.

Wegen der ausgesprochen groben Näherung des Puppenkörpers durch einzelne Zylinder und Kugeln lassen sich nur die Verhältnisse der Momente, nicht aber diese selbst, vergleichen. Aus den Quotienten der theoretischen Werte $Q_\mathrm{T} = 1,73 \pm 0,08$ und dem der gemessenen Werte $Q_\mathrm{M} = 1,58 \pm 0,00$ folgt eine Übereinstimmung von $109,96 \pm 5,13\%$. Die Abweichung resultiert aus der Tatsache, dass die Position von Armen und Beinen sich während der Schwingung verändert, sodass sie sich am Ende der Messung nicht mehr senkrecht zur Drehachse befinden, sondern in einem unbestimmten Winkel geneigt sind.

Größte Fehlerquelle in allen Versuchsteilen ist die manuelle und einmalige Zeitmessung. Bei der Fehlerrechnung wird die menschliche Reaktionszeit nirgends berücksichtigt. Der Fehler kann etwas minimiert werden, wenn statt nur einer Schwingungsperiode die Zeit für mehrere Schwingungen gemessen und anschließend durch deren Anzahl dividiert wird. Zusätzlich ist, besonders bei schnellen Schwingungen, ein genaues Erkennen des Endes einer Periode schwierig. Der Versuch eignet sich deswegen besonders für die Messung großer Trägheitsmomente. Die Näherungen, sowohl bei den Körpern, als auch der Modellpuppe, sind sehr grob. Die Annahme einer homogenen Masseverteilung passt nicht genau mit der Realität zusammen. Betrachtet man die Fehlerquellen stimmen theoretische und gemessene Werte soweit überein, dass von einer Richtigkeit der Formeln ausgegangen und der Satz von Steiner als verifiziert betrachtet werden kann.