

Anfängerpraktikum V355

## **Gekoppelte Schwingkreise**

Helena Nawrath  
helena.nawrath@tu-dortmund.de

Carl Arne Thomann  
arnethomann@me.com

Durchführung: 6. Januar 2015      Abgabe: 13. Januar 2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

# 1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden gekoppelte elektrische Schwingkreise betrachtet. Ziel ist es, das Verhalten der Energie bzw. des Energieübergangs zwischen den einzelnen Systemen, insbesondere unter dem Aspekt der Zeitabhängigkeit zu betrachten. Des Weiteren soll das Verhalten des Gesamtsystems bei erzwungenen Schwingungen, also äußerer periodischer Anregung, untersucht werden.

## 2 Theorie

Sind zwei schwingfähige Systeme miteinander gekoppelt, so beeinflussen sie sich gegenseitig. Wird eines der Systeme zum Schwingen angeregt, so pendelt die zugeführte Energie zwischen beiden Systemen. Die Energie ist erhalten.

### 2.1 Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise

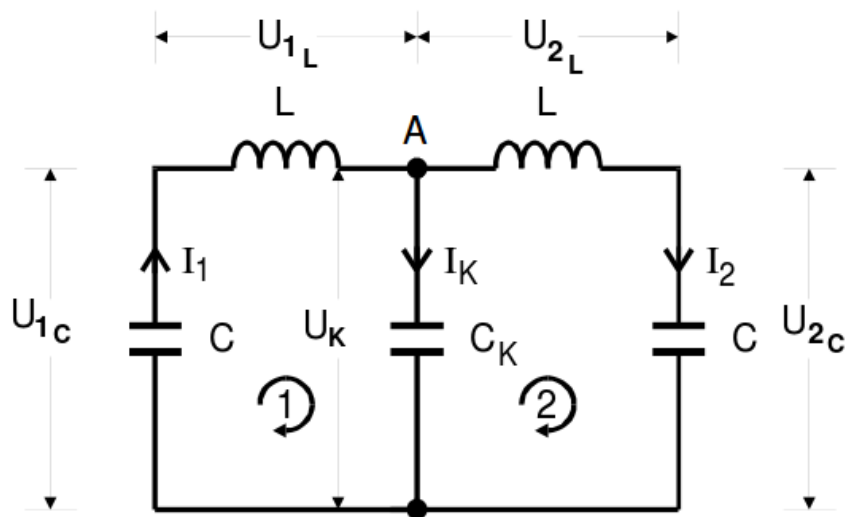


Abbildung 1: Zwei LC-Schwingkreise kapazitiv gekoppelt. [2]

Die zwei dargestellten, eigenständigen Schwingkreise sind über den Kondensator der Kapazität  $C_K$  miteinander verknüpft. Mit Knoten- und Maschenregel nach KIRCHHOFF lassen sich folgende Gleichungen herleiten:

$$I_K = I_1 - I_2 \quad (1)$$

$$U_{1C} + U_{1L} + U_K = 0 \quad (2)$$

$$U_{2C} + U_{2L} + U_K = 0 \quad (3)$$

Des Weiteren gelten die Beziehungen

$$U_C = \frac{1}{C} \int I dt \quad (4)$$

und

$$U_L = L \dot{I}. \quad (5)$$

Einsetzen von (4) und (5) sowie Ableiten nach der Zeit ergibt ein Differentialgleichungssystem. Werden die Gleichungen entkoppelt, lassen sie sich unabhängig voneinander lösen. Lösung der ersten Gleichung, entstanden durch Addition der Ströme  $I_i$ ,

$$L(\ddot{I}_1 + \ddot{I}_2) + \frac{1}{C}(I_1 + I_2) = 0 \quad (6)$$

ist eine harmonische Schwingung der Form

$$(I_1 + I_2)(t) = (I_{1,0} + I_{2,0}) \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \quad (7)$$

mit der Schwingungsfrequenz, gemäß  $\omega = 2\pi f$ ,

$$f_+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (8)$$

Diese Frequenz entspricht derer eines einzelnen, ungedämpften Oszillators mit den Bauteilen  $L$  und  $C$ . Die Amplitude  $(I_{1,0} + I_{2,0})$  bleibt konstant. Die zweite Gleichung, entstanden analog durch Subtraktion,

$$L(\ddot{I}_1 - \ddot{I}_2) + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_K}\right)(I_1 - I_2) = 0 \quad (9)$$

wird gelöst durch

$$(I_1 - I_2)(t) = (I_{1,0} - I_{2,0}) \cos\left(t \left[ L \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_K} \right)^{-1} \right]^{-\frac{1}{2}}\right). \quad (10)$$

Die Schwingungsfrequenz

$$f_- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_K}\right)^{-1}}} \quad (11)$$

ist größer als Schwingungsfrequenz  $f_+$ . Erneute Addition und Subtraktion der voneinander unabhängigen Gleichungen ergibt

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(I_{1,0} + I_{2,0}) \cos(2\pi f_+ t) + \frac{1}{2}(I_{1,0} - I_{2,0}) \cos(2\pi f_- t) \quad (12)$$

und

$$I_2(t) = \frac{1}{2}(I_{1,0} + I_{2,0}) \cos(2\pi f_+ t) - \frac{1}{2}(I_{1,0} - I_{2,0}) \cos(2\pi f_- t). \quad (13)$$

Im Folgenden werden zwei Spezialfälle betrachtet. Schwingen die Systeme mit gleicher Amplitude  $I_{1,0} = I_{2,0}$  und gleicher Phase, so verschwindet die Differenzschwingung (10), sodass die Oszillatoren jeweils mit  $f_+$  eines einzelnen Oszillators und in Phase schwingen. Am Kondensator  $C_K$  liegt zu keinem Zeitpunkt eine Spannung an, da die Ströme sich gegenseitig kompensieren. Schwingen die Systeme mit entgegengesetzter Amplitude  $I_{1,0} = -I_{2,0}$  und Phase, so verschwindet die Summenschwingung (7). Die Oszillatoren schwingen gegenphasig mit der Frequenz  $f_-$ . Diese beiden Schwingungsmoden werden als Fundamentalschwingungen des Systems bezeichnet.

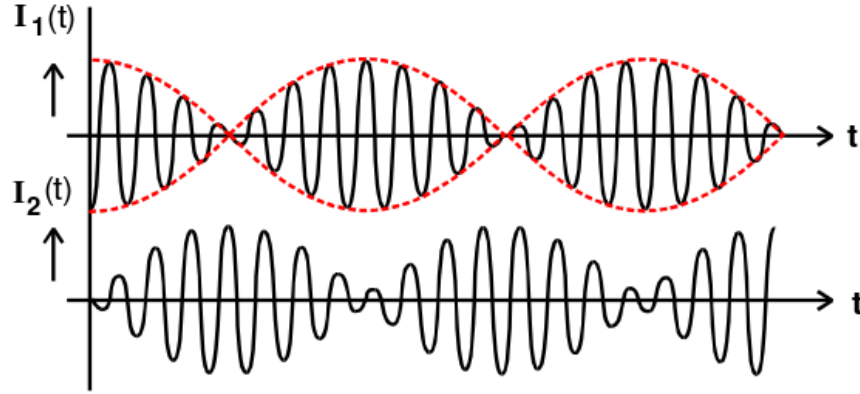


Abbildung 2: Schwebung. [2]

Wird zur Zeit  $t = 0$  nur ein Oszillator ausgelenkt, d.h.  $I_{1,0} \neq 0, I_{2,0} = 0$ , vereinfachen sich (12) und (13). Durch Ausnutzen von Additionstheoremen ergeben sich

$$I_1(t) = I_{10} \cos\left(\frac{1}{2}(\omega^+ + \omega^-)t\right) \cos\left(\frac{1}{2}(\omega^+ - \omega^-)t\right) \quad (14)$$

und

$$I_2(t) = I_{10} \sin\left(\frac{1}{2}(\omega^+ + \omega^-)t\right) \sin\left(\frac{1}{2}(\omega^+ - \omega^-)t\right). \quad (15)$$

Gemäß der Annahme  $f_+ \approx f_-$  und  $C_K \gg C$  ist  $\frac{1}{2}(\omega^+ - \omega^-) \approx \omega^+$  und  $\omega^- - \omega^+ \ll \omega^+$ . Die Oszillatoren schwingen mit der Frequenz  $\frac{1}{2}(f_+ + f_-)$ , welche ungefähr der Frequenz eines Einzeloszillators entspricht. Die Amplituden verändern sich periodisch mit der Schwebungsfrequenz  $f_- - f_+$ . Die Verhältnisse haben sich nach der Zeit

$$\frac{T}{2}(\omega^- - \omega^+) = \frac{\pi}{2} \quad (16)$$

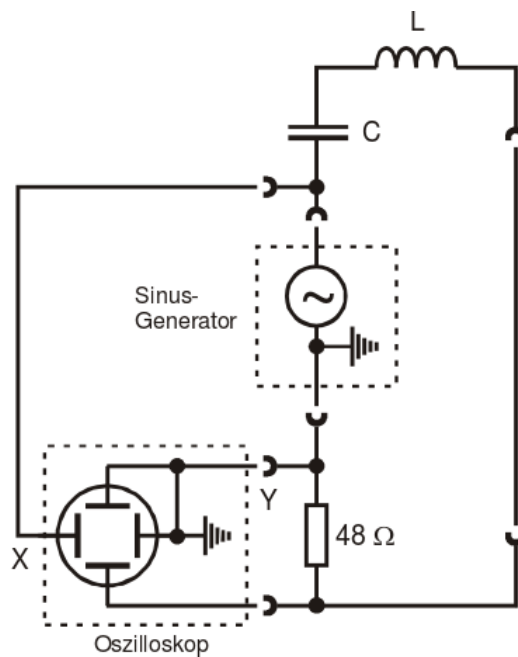
umgekehrt, die Energie pendelt periodisch mit der Schwebungsfrequenz zwischen beiden Systemen.

## 2.2 Erzwungene Schwingungen

Erzwungene Schwingungen werden durch eine von außen angelegte Sinusspannung  $U(t)$  erzeugt. Im Resonanzfall unterscheidet sich die  $I$ - $\phi$ -Resonanzkurve zweier gekoppelter Schwingkreise von der eines einzelnen Oszillators durch die Anzahl der auftretenden Maxima. An den Stellen der in Kapitel 2.1 hergeleiteten Fundamentalfrequenzen  $f_+$  und  $f_-$  befinden sich zwei Maxima.

## 3 Durchführung

### 3.1 Resonanzfrequenz



**Abbildung 3:** Schaltung zur Bestimmung der Resonanzfrequenz. [2]

Vor Messbeginn muss die feste Resonanzfrequenz eines Schwingkreises gemessen und anschließend die des anderen Schwingkreises darauf abgestimmt werden. Dazu wird die in Abbildung 3 gezeigte Schaltung aufgebaut.

Zur Abschätzung wird der festlegende Schwingkreis durch den Frequenzgenerator zum Schwingen angeregt. Durch Variieren der Frequenz am Generator ändert sich die am Widerstand  $R_1$  abfallende Spannung  $U_{R_1}(t)$ . Die am Generator eingestellte Frequenz entspricht der Resonanzfrequenz  $f_{\text{Res}}$  des Systems, wenn die Spannung  $U_{R_1}(t)$  maximal wird.

Die Feineinstellung wird mit dem X-Eingang des Oszilloskopes vorgenommen. Dazu wird das Oszilloskop in XY-Betrieb umgeschaltet. Beiden Eingängen wird nun eine Spannung geliefert; die Widerstandsspannung  $U_{R_1}(t)$  und die Erregerspannung  $U(t)$  überlagern sich und werden gegeneinander aufgetragen. Auf dem Oszilloskop wird diese Überlagerung als LISSAJOUS-Figur sichtbar, nach deren Aussehen sich die Phasendifferenz zwischen Generator- und Schwingkreisstrom beurteilen lässt. Der Resonanzfall tritt ein, wenn für die Phasendifferenz  $\Delta\phi = 0$  gilt und eine Gerade auf dem Bildschirm erscheint. Diese verläuft im ersten und dritten Quadranten des Bildschirms. Um den zweiten Schwingkreis auf dieselbe Frequenz einzustellen, wird die Schaltung mit diesem Schwingkreis erneut aufgebaut. Über eine variable Kapazität wird nach gleichem Verfahren die vorher bestimmte Resonanzfrequenz eingestellt.

### 3.2 Zeitabhängigkeit der Schwingungsenergie

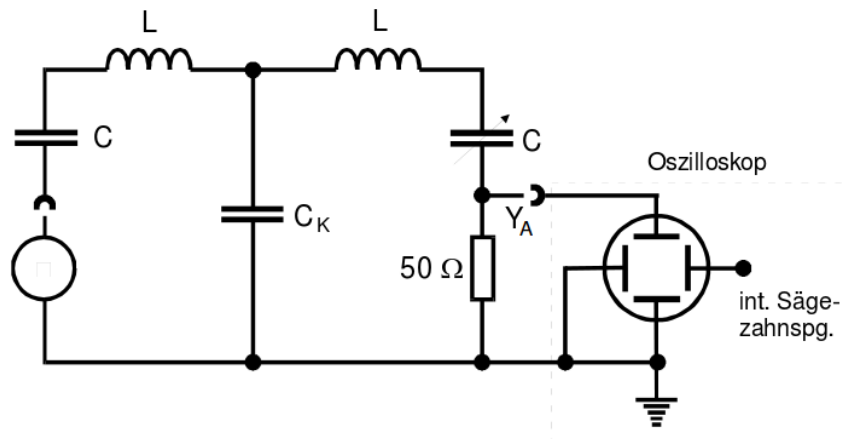


Abbildung 4: Schaltung zur Untersuchung gekoppelter Schwingkreise. [2]

Für den ersten Versuchsteil wird die Schaltung wie in Abbildung 4 benötigt. Mit einem Rechteckimpuls wird ein Kreis zum Schwingen angeregt. Am ohmschen Widerstand fällt eine Spannung  $U_{R_2}(t)$  ab, die durch das Oszilloskop dargestellt wird. Anschließend werden die Schwingungsmaxima pro Schwebungsperiode bei variablen Kopplungskapazitäten  $C_K$  abgezählt.

### 3.3 Frequenzen der Fundamentalschwingungen in Abhängigkeit der Koppelkapazität $C_K$

Der zweite Versuchsteil basiert auf derselben Schaltung, die Schwingung wird nun jedoch mit einem Sinusgenerator angeregt. Die Kapazität  $C_K$  wird erneut variiert. Für jede Kapazität wird die LISSAJOUS-Figur betrachtet und die Frequenz des Generators so eingestellt, dass der Phasenunterschied  $\phi = 0$  bzw.  $\phi = \pi$  beträgt. Bei  $\phi = 0$  ergibt sich

dieselbe Figur wie in Abschnitt 3.1 erläutert; für  $\phi = \pi$  ergibt sich ebenfalls eine Gerade, die jedoch im zweiten und vierten Quadranten verläuft, also an der  $U_{R_2}(t)$  gespiegelt ist.

### 3.4 Frequenzabhängigkeit der Ströme

Der dritte Versuchsteil basiert, wie Teil 1 und 2, auf der Schaltung in Abbildung 4. Die Einstellungen des Generators werden so geändert, dass dieser in 20 ms ein Frequenzband von 10 – 80 kHz durchläuft. Dabei wird die am Widerstand abfallende Spannung  $U_{R_2}(t)$  gegen die Zeit  $t$  – ein Maß für die Frequenz  $f$  – aufgetragen, sodass ein Spannungs-Frequenz-Diagramm entsteht, welches in Kapitel 2.2 beschrieben wird. Anschließend wird die Kopplungskapazität  $C_K$  variiert und die Zeitkoordinaten  $t_+$  und  $t_-$  der auftretenden Maxima notiert, sodass mit sämtlichen Kopplungskapazitäten  $C_K$  gemessen wird.

## 4 Auswertung

Alle im Folgenden berechneten Ergebnisse sind wegen dieser Fehlerbehaftungen  $\Delta x_i$  mit Abweichungen nach dem GAUSSschen Theorem der Fehlerfortpflanzung angegeben [3]. Für die Gesamtabweichung  $\Delta f$  einer berechneten Größe gilt

$$\Delta f(x_1, \dots, x_N) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2}. \quad (17)$$

## 4.1 Abstimmen der Systemparameter

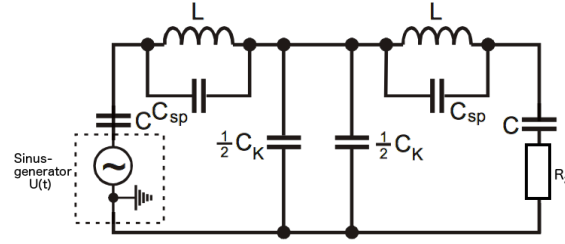


Abbildung 5: Ersatzschaltung für die Auswertung. [2] [5]

| Kapazität $C$<br>[pF] | Kapazität der Spule $C_{sp}$<br>[pF] | Induktivität der Spule $L$<br>[mH] |
|-----------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| $798 \pm 2$           | $37 \pm 1$                           | $31.90 \pm 0.05$                   |

Tabelle 1: Die festen Parameter des gekoppelten Systems nach Abbildung 5. [2]

Der Kopplungskondensator  $C_K$  wird überbrückt und somit effektiv nur der linke Schwingkreis angeregt. Die Resonanzfrequenz  $f_{Res}$  des Systems wurde mit  $f_{Res} = 30,74$  kHz bei maximaler Widerstandsspannung  $U_{R_1}(t)$  grob abgeschätzt.

Der Phasenwinkel  $\phi$  zwischen Erregerspannung  $U(t)$  und der Widerstandsspannung  $U_{R_1}(t)$  ist gleich Null, sofern die Erregerspannung  $U(t)$  die Resonanzfrequenz  $f_{Res}$  aufweist. Die Resonanzfrequenz  $f_{Res}$  wird mithilfe des in Abschnitt 3.1 beschriebenen Verfahrens auf den Wert

$$f_{Res} = 30,71 \text{ kHz} \quad (18)$$

präzisiert. Der für gedämpfte Schwingkreise bekannte Erwartungswert [1] für die Resonanzfrequenz ist

$$f_{Res, \text{Theorie}} = \sqrt{\frac{1}{LC_{Gesamt}} - \frac{R^2}{4L^2}} = (30,84 \pm 0,05) \text{ kHz}, \quad \Delta f_{Res} = -0,42 \% \quad (19)$$

In der Theorie werden ideale Komponenten angenommen. Zur Berücksichtigung, dass eine reale Spule eine nicht zu vernachlässigende Induktivität  $C_{sp}$  aufweist, werden für die Auswertung im Allgemeinen angepasste Gesamtkapazitäten betrachtet. Für (19) gilt daher  $C_{Gesamt} = C + C_{sp}$

Der zweite Schwingkreis wird durch seinen variablen Kondensator  $C$  mithilfe einer LISAJOUS-Figur an den ersten Schwingkreis angeglichen.

## 4.2 Untersuchung der Schwebung

Die Widerstandsspannung  $U_{R_2}(t)$  ist ein Maß für den Strom  $I_2(t)$ , es besteht nach Ohmschen Gesetz der Zusammenhang  $U(t) = R \cdot I(t)$  bei konstantem Widerstand  $R$ . Bei dem



| Kopplungskapazität<br>$C_K$<br>[nF] | Frequenzverhältnis |                                  |                       |
|-------------------------------------|--------------------|----------------------------------|-----------------------|
|                                     | $\alpha$<br>[1]    | $\alpha_{\text{Theorie}}$<br>[1] | $\Delta\alpha$<br>[1] |
| $9,99 \pm 0,09$                     | 14                 | $14.2 \pm 0.14$                  | -0.2                  |
| $8,00 \pm 0,08$                     | 11                 | $11.6 \pm 0.11$                  | -0.6                  |
| $6,47 \pm 0,06$                     | 9                  | $9.6 \pm 0.09$                   | -0.6                  |
| $5,02 \pm 0,05$                     | 7                  | $7.6 \pm 0.07$                   | -0.6                  |
| $4,00 \pm 0,04$                     | 6                  | $6.3 \pm 0.06$                   | -0.3                  |
| $3,00 \pm 0,03$                     | 5                  | $5.0 \pm 0.04$                   | -0.0                  |
| $2,03 \pm 0,02$                     | 4                  | $3.7 \pm 0.03$                   | 0.3                   |
| $1,01 \pm 0,01$                     | 2                  | $2.3 \pm 0.02$                   | -0.3                  |

**Tabelle 2:** Die Frequenzverhältnisse  $\alpha$  in Abhängigkeit von der Kopplungskapazität  $C_K$ .

Auftragen der Widerstandsspannung  $U_{R_2}(t)$  gegen die Zeit wird wie in Abbildung 2 eine Schwebung sichtbar. Um das Verhältnis der Schwebungs- und Schwingungsfrequenz zu bestimmen, wird innerhalb einer Schwebungsperiode die Anzahl der Schwingungsmaxima abgezählt, der Erwartungswert ist aus Abschnitt 2 gegeben. Es gilt

$$\alpha = \frac{n_{\text{Max.Osz.}}}{n_{\text{Max.Schweb.}}} \quad \text{und} \quad \alpha_{\text{Theorie}} = \frac{f_+ + f_-}{2(f_+ - f_-)}, \quad (20)$$

es ergibt sich die Tabelle 2.

### 4.3 Untersuchung der Fundamentallösungen

| Kopplungskapazität<br>$C_K$<br>[nF] | Fundamentalfrequenz |                |                                  |                                  | Abweichung          |                     |
|-------------------------------------|---------------------|----------------|----------------------------------|----------------------------------|---------------------|---------------------|
|                                     | $f_+$<br>[kHz]      | $f_-$<br>[kHz] | $f_{+, \text{Theorie}}$<br>[kHz] | $f_{-, \text{Theorie}}$<br>[kHz] | $\Delta f_+$<br>[%] | $\Delta f_-$<br>[%] |
| $9,99 \pm 0,09$                     | 30.56               | 32.85          | $30.84 \pm 0.05$                 | $33.09 \pm 0.05$                 | 0.90                | 0.73                |
| $8,00 \pm 0,08$                     | 30.57               | 33.38          | $30.84 \pm 0.05$                 | $33.63 \pm 0.06$                 | 0.87                | 0.73                |
| $6,47 \pm 0,06$                     | 30.57               | 33.98          | $30.84 \pm 0.05$                 | $34.25 \pm 0.06$                 | 0.87                | 0.77                |
| $5,02 \pm 0,05$                     | 30.57               | 34.88          | $30.84 \pm 0.05$                 | $35.16 \pm 0.06$                 | 0.87                | 0.78                |
| $4,00 \pm 0,04$                     | 30.57               | 35.86          | $30.84 \pm 0.05$                 | $36.16 \pm 0.07$                 | 0.87                | 0.82                |
| $3,00 \pm 0,03$                     | 30.57               | 37.40          | $30.84 \pm 0.05$                 | $37.73 \pm 0.08$                 | 0.87                | 0.87                |
| $2,03 \pm 0,02$                     | 30.58               | 40.12          | $30.84 \pm 0.05$                 | $40.5 \pm 0.1$                   | 0.84                | 0.97                |
| $1,01 \pm 0,01$                     | 30.58               | 47.23          | $30.84 \pm 0.05$                 | $47.9 \pm 0.15$                  | 0.84                | 1.37                |

**Tabelle 3:** Die Frequenzen der Fundamentallösungen in Abhängigkeit von der Kopplungskapazität  $C_K$ .

Für die Berechnung der Fundamentalfrequenz  $f_+$  wird die Gesamtkapazität  $C_{\text{Gesamt}} = C + C_{\text{sp}}$ , für die Fundamentalfrequenz  $f_-$  wird die Gesamtkapazität  $C_{\text{Gesamt}} = (\frac{1}{C} + \frac{1}{C_K})^{-1} + C_{\text{sp}}$  betrachtet. Bei der Untersuchung der Fundamentallösung wird analog zu 4.2 die LISSAJOUS-Figur betrachtet, die durch Auftrag der Widerstandsspannung  $U_{R_2}(t)$  gegen die Generatorspannung  $U(t)$  angezeigt wird. Es ergeben sich die Frequenzen in Tabelle 3. Nach Gleichung (8) und (11) ergeben sich die theoretischen Werte für die Fundamentalschwingungsfrequenzen in Tabelle 3.

#### 4.4 Untersuchung der Stromkurve $I_2(t)$

Wird die Widerstandsspannung  $U_{R_2}(t)$  auf einem Oszilloskopen dargestellt, so zeigt sich nach der Beschreibung in Abschnitt 3.4 der Auftrag von der Widerstandsspannung  $U_{R_2}(t)$  gegen die Erregerfrequenz  $f$ . Mit den Anfangs- und Endkoordinaten  $P_{\text{Anfang}} = (-7 \text{ ms} | 10 \text{ kHz})$  und  $P_{\text{Ende}} = (14,3 \text{ ms} | 80 \text{ kHz})$  können die Zeitkoordinaten in Tabelle 4 in Frequenzen umgerechnet werden. Die lineare Regression aus diesen beiden Koordinaten gibt die Umrechnungsformel

$$f_{\pm} = 3.2863 \frac{\text{kHz}}{\text{ms}} t_{\pm} + 33,0047 \text{ kHz}. \quad (21)$$

| Zeitkoordinate |       | Kopplungskapazität | Frequenz |       |
|----------------|-------|--------------------|----------|-------|
| $t_+$          | $t_-$ | $C_K$              | $f_+$    | $f_-$ |
| [ms]           | [ms]  | [nF]               | [kHz]    | [kHz] |
| 0,3            | 0,9   | $9,99 \pm 0,09$    | 37,42    | 39,67 |
| 0,3            | 1,1   | $8,00 \pm 0,08$    | 37,42    | 40,42 |
| 0,4            | 1,2   | $6,47 \pm 0,06$    | 37,49    | 40,80 |
| 0,3            | 1,5   | $5,02 \pm 0,05$    | 37,42    | 41,92 |
| 0,2            | 1,8   | $4,00 \pm 0,04$    | 37,04    | 43,05 |
| 0,2            | 2,2   | $3,00 \pm 0,03$    | 37,04    | 44,55 |
| 0,2            | 3,0   | $2,03 \pm 0,02$    | 37,04    | 47,56 |
| 0,2            | 5,1   | $1,01 \pm 0,01$    | 37,04    | 55,44 |

**Tabelle 4:** Die Zeitkoordinaten und die Frequenzen der Strommaxima in Abhängigkeit von der Kopplungskapazität  $C_K$ .

## 5 Diskussion

Für die Untersuchung von gekoppelten Schwingungen eignen sich elektrische Schaltungen sehr gut. Die theoretischen Überlegungen gelten analog für andere gekoppelte Schwin- ger, etwa für mechanische Systeme. Besondere Eignung zeigt die elektrische Schaltung

dadurch, dass es mithilfe eines Oszilloskopes und eines Signalgenerators präzise ausgemessen werden kann. Die konsequent geringen Abweichungen von Messung und Erwartungswert beweisen die Theorie und die Eignung der elektrischen Schaltung.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch V354: Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V354.pdf> (besucht am 12.01.2015).
- [2] TU Dortmund. *Versuch V355: Gekoppelte Schwingkreise*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V355.pdf> (besucht am 12.01.2015).
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>. Version 2.4.5.
- [4] Travis E. Oliphant. „Python for Scientific Computing“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/10/1>. Version 1.8.1.
- [5] The GIMP Team. *GIMP: GNU Image Manipulation Program*. URL: <http://www.gimp.org/>. Version 2.8.10.

Die Grafiken wurden mit *GIMP*[5] bearbeitet. Die Berechnungen wurden mit Python-*Numpy* [4] und Python-*uncertainties* [3] durchgeführt.