

Anfängerpraktikum V406

Beugung am Spalt

Helena Nawrath
helena.nawrath@tu-dortmund.de

Carl Arne Thomann
arnethomann@me.com

Durchführung: 7. April 2015 Abgabe: 17. April 2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

1 Ziel

Trifft ein nach der geometrischen Optik definierter Lichtstrahl auf einen Spalt oder ein Hindernis, weicht er von seinem ursprünglichem Weg ab und wird gebeugt. Versuchsziel ist es, die Spaltbreiten verschiedener Blenden sowohl über die Intensität einer Beugungsfigur, als auch per Mikroskop zu bestimmen um anschließend die unterschiedlichen Methoden miteinander vergleichen zu können.

2 Theorie

Wird Licht an einem Spalt gebeugt, entsteht ein Beugungsbild. Dieses charakteristische Muster kann mit dem Prinzip von HUYGENS erklärt werden. Es besagt, dass von jedem Punkt einer Welle kugelförmige Elementarwellen ausgehen. Diese treten auch am Spalt auf und interferieren miteinander. Dabei erzeugen sie durch konstruktive und destruktive Interferenz die auftretenden Intensitätsmaxima und -minima des Beugungsbildes. Die Intensität I hängt stark vom Beugungswinkel φ , d.h. der Richtung, in die die Strahlen gebeugt werden, ab. Mathematisch kann die Beugung durch zwei Näherungen – FRESNEL- und FRAUNHOFER-Beugung – beschrieben werden, die in Abbildung 1 dargestellt sind.

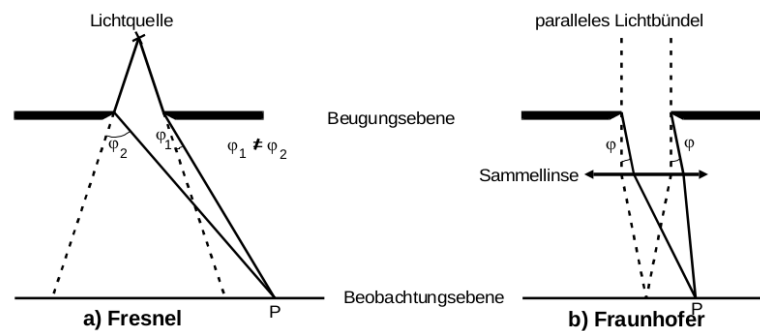


Abbildung 1: Skizze beider Näherungen.[1]

Befinden sich Lichtquelle und Beobachtungspunkt in endlicher Entfernung zueinander, werden divergente Strahlenbündel am Spalt unter verschiedenen Winkeln φ_1 und φ_2 gebeugt und interferieren in einem Punkt P , dies ist die FRESNEL-Beugung. Den Gegensatz dazu bildet die FRAUNHOFER-Beugung. Hier befinden sich Lichtquelle und Beobachtungspunkt unendlich weit voneinander entfernt. Dies hat zur Folge, dass die am Spalt ankommenden Lichtstrahlen parallel verlaufen. Im Beobachtungspunkt interferieren deshalb nur die Strahlen, die unter dem selben Winkel φ gebeugt wurden. Im weiteren Verlauf soll die FRAUNHOFER-Näherung genutzt werden.

2.1 Beugung am Parallelschlalt

$$A(z, t) = A_0 \exp \left(i \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right) \quad (1)$$

des im Winkel φ gebeugten Lichts, indem über die Schlaltöffnung – mathematisch als Aperturfunktion bezeichnet – integriert wird.

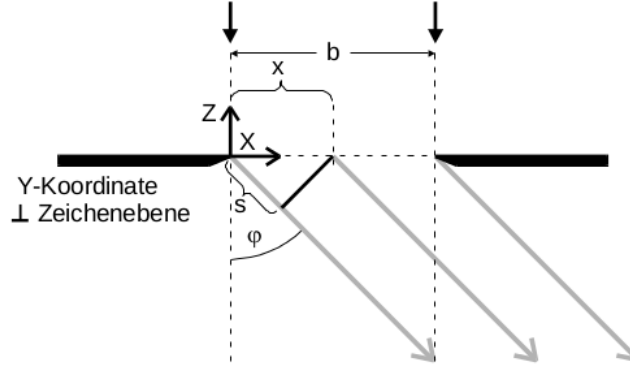


Abbildung 2: Beugung am Einzelschlalt.[1]

Weisen die Wellenfronten wie in Abbildung 2 einen Wegunterschied s auf, weil sie um den Abstand x voneinander entfernt sind, ergibt sich zwischen ihnen eine Phasendifferenz von

$$\sigma = \frac{2\pi s}{\lambda} = \frac{2\pi x \sin \varphi}{\lambda}. \quad (2)$$

Damit resultiert die Amplitude

$$B(z, t, \varphi) = A_0 \exp \left[i \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right] \cdot \exp \left(\frac{ib\pi \sin \varphi}{\lambda} \right) \cdot \frac{\lambda}{\pi \sin \varphi} \sin \left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right). \quad (3)$$

Bedeutsam für die Versuchsauswertung ist nur der letzte Faktor in Gleichung (3); die Exponentialfunktionen beschreiben Zeit- und Ortsabhängigkeit der Amplitude B bzw. stellen einen Phasenfaktor dar, welcher die nachfolgend betrachtete zeitlich gemittelte Intensität

$$I(\varphi) \propto B(\varphi)^2 = A_0^2 b^2 \left(\frac{\lambda}{\pi b \sin \varphi} \right)^2 \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right) \quad (4)$$

nicht beeinflusst. Die Höhe der Intensitätsmaxima nimmt mit φ^2 ab; Nullstellen – also Intensitätsminima – befinden sich an den Stellen

$$\sin \varphi_n = \pm n \frac{\lambda}{b}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

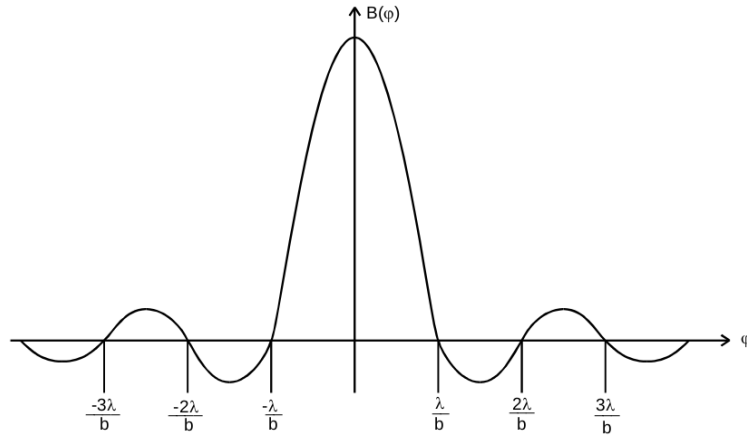


Abbildung 3: Beugungsbild des Einzelspaltes.[1]

2.2 Beugung am Doppelspalt

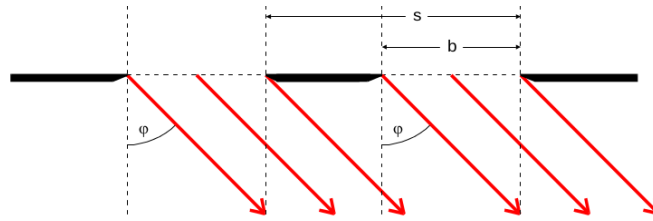


Abbildung 4: Beugung am Doppelspalt.[1]

Die Beugungsfigur ergibt sich durch die Überlagerung zweier Einzelspalte und einer Cosinus-Verteilung:

$$I(\varphi) \propto B(\varphi)^2 = 4 \cos^2 \left(\frac{\pi s \sin \varphi}{\lambda} \right) \left(\frac{\lambda}{\pi b \sin \varphi} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right). \quad (6)$$

Neben den Minima der Einzelspalte erscheinen zusätzlich Minima an

$$\varphi(k) = \arcsin^2 \left(\frac{2k+1}{2s} \right) \lambda, \quad (7)$$

den Nullstellen der Cosinus-Funktion. Allgemein wird die Funktion $B(\varphi)$ beschrieben als die FOURIER-Transformierte

$$g(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(ix\epsilon) dx \quad (8)$$

der Amplitudenverteilung der Welle in der Beugungsebene. Dabei werden alle am Spalt auftretenden Elementarwellen aufsummiert und mit einer Exponentialfunktion als Phasenfaktor versehen.

3 Durchführung

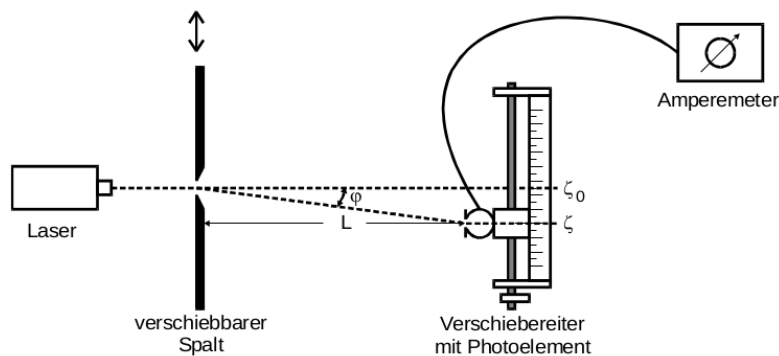


Abbildung 5: Versuchsaufbau.[1]

Die Intensität I der Beugungsfigur bei Verwendung verschiedener Spaltblenden wird punktwise ausgemessen. Dafür wird ein Spalt wie in Abbildung 5 von einem Laser der Wellenlänge $\lambda = 633 \text{ nm}$ beleuchtet. Im Abstand $L = 120,3 \text{ cm}$ vom Spalt entfernt befindet sich ein Verschiebereiter mit Photodiode. Die Anordnung wird so justiert, dass das Hauptmaximum des Beugungsbildes auf die Mitte des Verschiebereiters bei $d_0 = 25 \text{ mm}$ gerichtet ist. Die Photodiode wird in jedem Versuchsteil über eine Skala von 50 mm in 1 mm -Schritten verschoben. Ein an die Diode angeschlossenes Amperemeter zeigt die Intensität I an. Bei jeder Messung wird beachtet, dass die Photodiode ohne direkte Bestrahlung durch den Laser einen thermischen Dunkelstrom I_0 misst. Dieser wird vor jeder Messung bestimmt und in der Auswertung berücksichtigt.

Es werden zwei unterschiedliche Einzelspalte, sowie ein Doppelspalt untersucht. Anschließend werden die Spaltbreiten mit einem Mikroskop ausgemessen, dessen Vergrößerung vorher mit Hilfe von Vergleichsskalen überprüft wird.

4 Auswertung

In drei Versuchsteilen werden die Intensitäten verschiedener Blenden in Abhängigkeit vom Abstand d vom Intensitätsmaximum aufgenommen. Diese Werte sind in Tabelle 1 aufgetragen. Der Dunkelstrom I_0 wird in jeder Messung wiederholt zu $I_0 = 1,2 \text{ nA}$ bestimmt und von den Werten in Tabelle 1 subtrahiert. Der Abstand zwischen Blende und Photodiode beträgt konstant $L = 1,203 \text{ m}$.

Im Folgenden sollen verschiedene Spaltbreiten b_i mit Hilfe des Beugungsbildes bestimmt werden. Über geometrische Überlegungen und Kleinwinkelnäherung kann der Beugungswinkel nach

$$\varphi \approx \tan \varphi = \frac{|d - d_0|}{L} \quad (9)$$

genähert werden.

4.1 Beugung am schmalen Einfachspalt

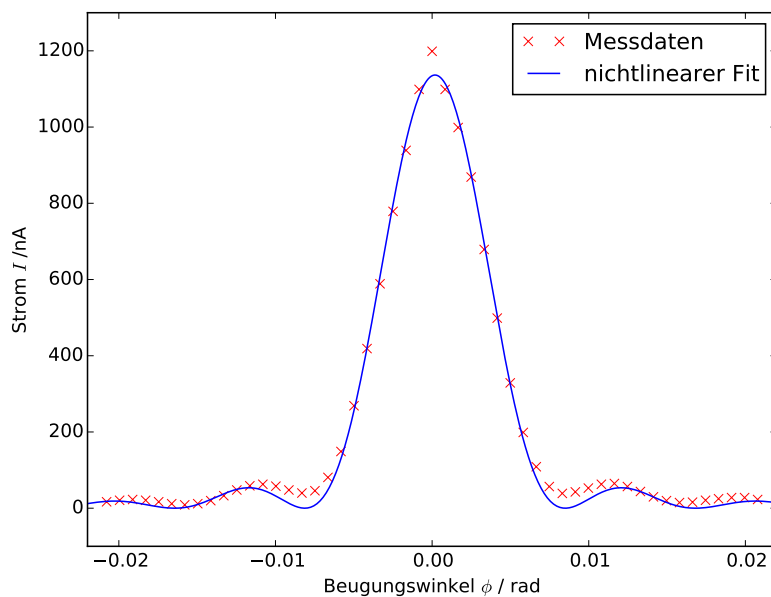


Abbildung 6: Intensitätsverteilung bei Beugung am schmalen Einfachspalt.

Die Intensität $I_1 = I_1' - I_0$ wird in Abhängigkeit Beugungswinkel φ wie in Abbildung 6 aufgetragen. Eine nichtlineare Regression der Formel (4) liefert die Amplitude $A_1 = 14,0 \pm 0,1$, die Spaltbreite $b_1 = (0,0761 \pm 0,0007) \text{ mm}$ und eine Verschiebung der Kurve um $c_1 = (-0.19 \pm 0.03) \cdot 10^{-3}$. Laut Hersteller besitzt der Spalt eine Breite von $b_{1,h} = 0,075 \text{ mm}$. Ausgemessen mit einem Mikroskop ergibt sich $b_{1,m} = 0,095 \text{ mm}$.

4.2 Beugung am breiten Einfachspalt

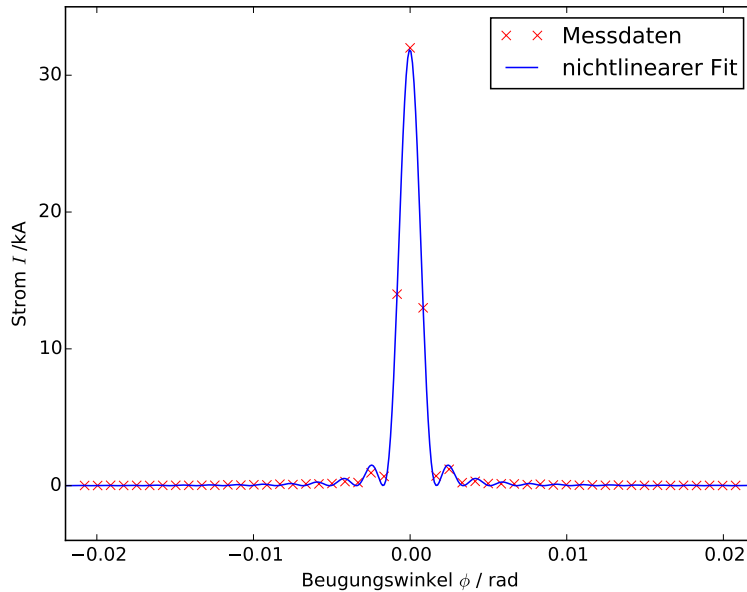


Abbildung 7: Intensitätsverteilung bei Beugung am breiten Einfachspalt.

Erneut wird in Abbildung 7 die Intensität I in Abhängigkeit von φ aufgetragen und eine nichtlineare Regression nach Gleichung (4) ausgeführt. Es ergeben sich $A_2 = 15,21 \pm 0,08$, $b_2 = (0,371 \pm 0,002) \text{ mm}$ und $c_2 = (20 \pm 6) \cdot 10^{-6}$. Die Messung mit dem Mikroskop ergibt $b_{2,m} = 0,428 \text{ mm}$. Nach Herstellerangaben beläuft sich die Spaltbreite auf $b_{2,h} = 0,4 \text{ mm}$.

4.3 Beugung am Doppelspalt

Nebst Amplitude, Spaltbreite und Verschiebung der Kurve wird beim Doppelspalt der Abstand g zwischen beiden Spalten bestimmt. Eine nichtlineare Regression nach (6), gezeigt in Abbildung 8, ergibt $A_3 = 18 \pm 1$, $b_3 = (0,099 \pm 0,007) \text{ mm}$, $c_3 = (-25 \pm 2) \cdot 10^{-6}$ und $g_3 = (0,490 \pm 0,006) \text{ mm}$. Die Mikroskopmessung ergibt $b_{3,m} = 0,143 \text{ mm}$ und $g_{3,m} = 0,524 \text{ mm}$. Die Hersteller geben $b_{3,h} = 0,1 \text{ mm}$ und $g_{3,h} = 0,4 \text{ mm}$.

Aus Gleichung (6) ist erkennbar, dass für ausgezeichnete x-Stellen die Cosinusquadrat-Verteilung maximal und normiert wird und damit die Intensitätsverteilung (4) der eines Einfachspalts gleicht. Die Maxima des Kurvenverlaufes in Abbildung 8 sind gesondert

gekennzeichnet, die einhüllende Kurve ist ein Fit dieser Maxima mit der Funktionenklasse (4). Damit ist die Beziehung zwischen Einzel- und Doppelspaltverteilung in Gleichung (6) nachgewiesen.

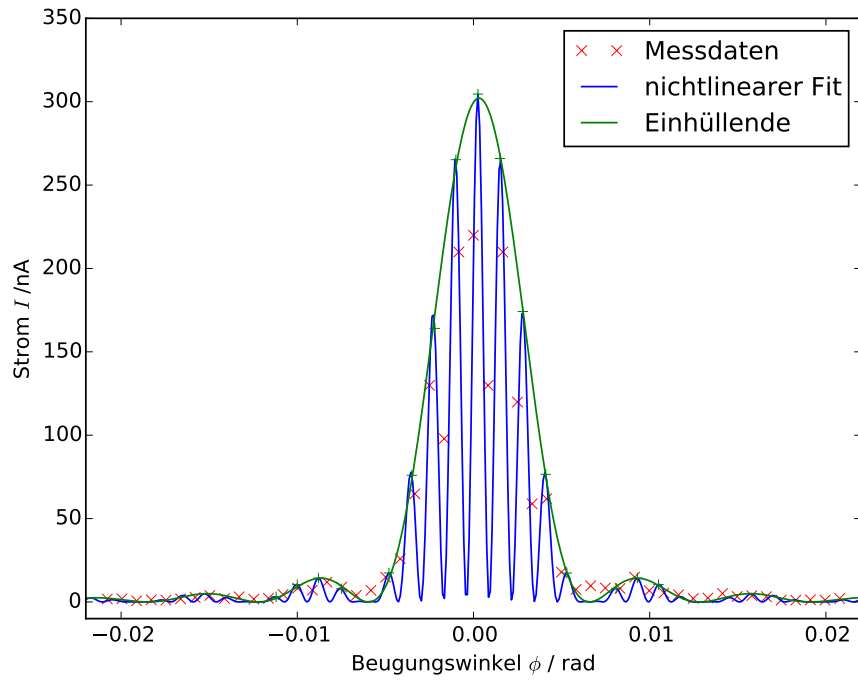


Abbildung 8: Beugung am Doppelspalt.

Abstand d/mm	Intensität		
	I_1'/nA	I_2'/nA	I_3'/nA
0	18	16	19
1	22	13	20
2	24	30	8
3	22	16	14
4	18	25	12
5	13	19	20
6	10	27	28
7	13	28	40
8	21	26	40
9	34	33	32
10	49	30	18
11	60	64	23
12	64	42	46
13	59	68	84
14	49	58	72
15	41	110	120
16	47	82	90
17	82	130	41
18	150	130	71
19	270	160	150
20	420	300	260
21	590	230	650
22	780	940	1300
23	940	680	980
24	1100	14 000	2100
25	1200	32 000	2200
26	1100	13 000	1300
27	1000	710	2100
28	870	1200	1200
29	680	220	590
30	500	320	620
31	330	160	180
32	200	140	76
33	110	130	98
34	58	78	85
35	40	110	82
36	44	52	150
37	54	72	69
38	64	34	55
39	66	58	44
40	58	29	22
41	45	46	25
42	31	30	52
43	21	25	34
44	16 9	32	39
45	17	21	33
46	22	27	12
47	26	14	12
48	29	26	14
49	29	12	12
50	24	20	22

Tabelle 1: Messung der Intensitäten I_i' in Abhängigkeit vom Abstand d .

5 Diskussion

Die mittels beider Methoden bestimmten Abmessungen b_i und g_3 weisen geringe Abweichungen mit

$\Delta b_1 = 0,92\%$, $\Delta b_2 = 0,54\%$, $\Delta b_3 = 7,1\%$ und $\Delta g_3 = 1,22\%$ voneinander auf. Die Abweichungen $\tilde{\Delta}b_i$ der Spaltbreiten im Bezug zu den Herstellerangaben sind in Tabelle 2 aufgetragen.

Blende	relativer Fehler / %	
	Beugung	Mikroskop
$\tilde{\Delta}b_1$	1,47	26,67
$\tilde{\Delta}b_2$	7,25	7,00
$\tilde{\Delta}b_3$	1,00	43,00
$\tilde{\Delta}g_3$	22,50	31,00

Tabelle 2: Relative Fehler der Spaltbreiten bei verschiedenen Messmethoden.

Deutlich zu erkennen ist, dass die mit Hilfe des Mikroskops ermittelten Spaltbreiten wesentlich stärker von den Herstellerangaben abweichen als die über die Beugung gemessenen Werte. Grund dafür ist die ungenaue Bestimmung der Vergrößerung über Vergleichsskalen. Außerdem spielen Ablesefehler eine größere Rolle als bei der Beugung.

Bei der Messmethode via Diffraktion kann durch die erhebliche Anzahl an Messwerten der Ablesefehler relativ gering gehalten werden. Bei der Vermessung des breiten Einzelspaltes besitzt der relative Fehler einen höheren Wert als die anderen Blenden. Dies lässt sich auf das besonders ausgeprägte Maximum und unscheinbare Nebenmaxima zurückführen. Durch die umfangreichere Aufnahme von Messwerten, z.B. durch Reduzierung der Schrittweite auf 0,5 mm im Bereich des Hauptmaximums, ließe sich diese Unsicherheit eventuell verringern. Der Vorgang der Messung ist bei genauer Justierung der Anordnung wenig fehleranfällig. Bedeutenste Fehlerquelle ist die Beeinflussung der Intensitätsmessung durch sich ändernde Lichtverhältnisse. Es gilt daher die Beleuchtungsverhältnisse so weit wie möglich konstant zu halten.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch V406: Beugung am Spalt*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V406.pdf>.
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/90/1>. Version 1.3.1.
- [3] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001. URL: <http://www.scipy.org/>. Version 0.14.0.
- [4] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>. Version 2.4.5.
- [5] Travis E. Oliphant. „Python for Scientific Computing“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/10/1>. Version 1.8.1.
- [6] The GIMP Team. *GIMP: GNU Image Manipulation Program*. URL: <http://www.gimp.org/>. Version 2.8.10.

Die verwendeten Plots wurden mit *matplotlib*[2] und die Grafiken mit *GIMP*[6] erstellt sowie die Berechnungen mit *Python-Python-Numpy*, [5], *Python-Scipy*[3] und *Python-uncertainties*[4] durchgeführt.