

Anfängerpraktikum V102

Drehschwingungen

Helena Nawrath
helena.nawrath@tu-dortmund.de

Carl Arne Thomann
arnethomann@me.com

Durchführung: 20. Januar 2015 Abgabe: 27. Januar 2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

1 Zielsetzung

Elastische Konstanten charakterisieren das Verhalten eines Stoffes bei Krafteinwirkung. Sie funktionieren als Proportionalitätsfaktoren zwischen der pro Flächeneinheit angreifenden Kraft und der daraus resultierenden relativen Deformation – einer Gestalts- oder Volumenänderung. Ziel ist es, die elastischen Konstanten einer Metallegierung zu bestimmen. Außerdem soll das magnetische Moment eines Permanentmagneten, sowie das Erdmagnetfeld gemessen werden.

2 Theorie

Wirken Kräfte auf einen Körper ein, kann dies auf zwei Arten geschehen. Die Kraft greift an jedem Volumenelement an und ändert dadurch den Bewegungszustand des Körpers; versetzt ihn beispielsweise in eine Translations- oder Rotationsbewegung. Andererseits ist es möglich, dass sich die angreifende Kraft nur auf die Oberfläche des Körpers beschränkt und dazu führt, dass Gestalt und/oder Volumen sich ändern. Dabei wird die Kraft pro Flächeneinheit als Spannung definiert. Diese teilt sich in zwei Komponenten auf: die Normalkomponente σ bewirkt eine Längenänderung senkrecht, eine Tangentialspannung τ eine Längenänderung parallel zur Kraftrichtung auf eine Probe. Die Kräfte wirken nachweislich an der Oberfläche und jeder beliebigen Querschnittsfläche des Körpers.

In Festkörpern sind die Atome in einem Kristallgitter regelmäßig angeordnet und befinden sich mit ihren direkten Nachbarn in einem Gleichgewichtszustand, in dem sich die abstoßenden und anziehenden Kräfte grade zu Null addieren. Durch Krafteinwirkung muss ein neuer Zustand hergestellt werden. Dies wird realisiert indem der Abstand r_0 der Teilchen zueinander variiert wird und sich ein neuer Gleichgewichtszustand mit dem Abstand r'_0 einstellt. Das Hooke'sche Gesetz

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} P = Q \frac{\Delta V}{V} \quad (1)$$

beschreibt für hinreichend kleine Kräfte an der Oberfläche bzw. an jedem Volumenelement einen linearen Zusammenhang zwischen der Spannung und der durch diese hervorgerufenen relative Deformation. Liegt eine elastische Deformation vor, so kehrt der Körper in seine Ausgangslage zurück, sobald die Krafteinwirkung vorbei ist - der Vorgang ist reversibel.

Werden unsymmetrische Kristalle mit richtungsabhängigen elektrostatischen Kräften betrachtet müssen sehr viele Komponenten gemessen bzw. errechnet werden. Isotrope Körper, beispielsweise polykristalline Kristalle, zeichnen sich stattdessen durch richtungsunabhängige elastische Konstanten aus und können theoretisch durch zwei Konstanten beschrieben werden. Es erweist sich jedoch als zweckmäßig insgesamt vier Konstanten

einzuführen. Der Schub- bzw. Torsionsmodul G beschreibt die Gestalts-, der Kompressionsmodul Q die Volumenelastizität. Der Elastizitätsmodul E ist der Proportionalitätsfaktor aus Gleichung (1), μ die Poissonsche Querkontraktionszahl.

$$\mu = -\frac{\Delta B}{B} \frac{L}{\Delta L} \quad (2)$$

beschreibt die relative Längenänderung bei angreifender Normalspannung in Spannungsrichtung. Die genannten Module sind nicht unabhängig voneinander und stehen über

$$E = 2G(\mu + 1) \quad \text{und} \quad E = 3(1 - 2\mu)Q \quad (3)$$

in Beziehung.

2.1 Bestimmung des Schubmoduls G

Erfährt ein Probekörper ausschließlich Tangentialspannungen verformt er sich so, dass eine Scherung um den Winkel α auftritt. Nach Hooke ist mit

$$\tau = G\alpha \quad (4)$$

die Spannung proportional zum Scherungswinkel. Die Messung wird realisiert, indem ein einseitig fest eingespannter zylinderförmiger Draht um den Winkel ϕ verdreht wird. Dabei wirkt ein Drehmoment M . Die Schichten des Zylindermantels werden dabei um den Winkel α gedreht. Da das Drehmoment abhängig vom Hebelarm, also vom Probendurchmesser ist, werden im weiteren Verlauf infinitesimale Drehmomente dM betrachtet, die eine Kraft dK auf das Massenelement im Radius dr bewirken. Aus

$$dM = r dK \quad (5)$$

folgt mit (4) und $\tau = \frac{dK}{dF}$

$$dM = r G \alpha dF. \quad (6)$$

Aus dem Zusammenhang $\alpha = \frac{r\phi}{L}$, dem Flächeninhalt des Kreisrings $dF = 2\pi r dr$ und anschließender Integration über den Radius der Probe eine Formel für das Gesamtdrehmoment

$$M = \frac{\pi R^4 G}{2L} \phi = D\phi. \quad (7)$$

Wird an das freie Drahtende ein Körper mit Trägheitsmoment θ angehängt, kann der Draht ungedämpfte harmonische Schwingungen der Dauer $T = 2\pi\sqrt{\frac{\theta}{D}}$ ausführen. Es wirken zwei entgegengesetzte Drehmomente aufeinander. Je nach Form des Körpers ist M_T unterschiedlich, hier wird eine Kugel benutzt mit $\theta = \frac{2}{5}m_k R_k^2$. Damit ergibt sich

$$G = \frac{16\pi m_k R_k^2 L}{5T^2 R^4}. \quad (8)$$

Der Vorteil der dynamischen Methode über die Messung der Schwingungsdauer ist die geringere Fehleranfälligkeit. Die Ergebnisse bei statischer Messung können durch eventuelle elastische Nachwirkungen verfälscht werden.

2.2 Bestimmung des magnetischen Moments m

Befindet sich der Draht in einem homogenen Magnetfeld

$$B = \frac{8\mu_0}{\sqrt{125}} \frac{I}{R_{\text{HS}}} n \quad (9)$$

– erzeugt durch ein Helmholtzspulenpaar mit Windungszahl N , Radius R_{HS} , durchflossen vom Strom I – führt er Schwingungen mit

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{mB + D}} \quad (10)$$

aus. Die Periodendauer wird geringer, da ein zusätzliches Drehmoment wirkt.

3 Durchführung

3.1 Aufbau der Messapparatur

Abbildung 1 zeigt die Messapparatur. Am unteren Ende eines einseitig fest eingespannten Drahtes ist eine Kugel befestigt in deren Innern sich ein Permanentmagnet befindet. Sie hängt zwischen zwei Helmholtzspulen, die durch einschalten der Stromquelle ein annähernd homogenes Magnetfeld erzeugen können. In der unteren Drahthälfte wird dieser durch einen kleinen Spiegel unterbrochen, der zur Bestimmung der Periodendauer benötigt wird.

3.2 Messung der Schwingungsdauer

Die Periodendauer der Torsionsschwingung wird über eine elektronische Stoppuhr gemessen. Mit Schwingungsbeginn soll das Zählwerk starten; nach einer Periode enden. Die Periodendauer T kann dann direkt am Zählwerk abgelesen werden. Dieser Vorgang wird realisiert über eine, durch die in Abbildung 2 gezeigte Lichtschranke, steuerbare Torstufe. Das Licht einer Lampe wird zunächst durch eine Sammellinse gebündelt und anschließend durch einen Spalt auf den Spiegel am Torsionsdraht geworfen. Wird der Draht durch bewegen des Justierrades zu Schwingungen angeregt wandert der Lichtstrahl von einer Seite zur anderen und passiert dabei die Photodiode. Sobald der Lichtstrahl auf die Photodiode trifft, erzeugt diese ein elektrisches Signal, welches durch eine geeignete Schaltung auf die Torsteuerungseingänge des Zählwerks geleitet wird.

In drei Versuchsteilen wird der Draht durch Auslenken des Justierrades zu harmonischen Schwingungen angeregt und die am Zählwerk angezeigte Schwingungsdauer notiert.

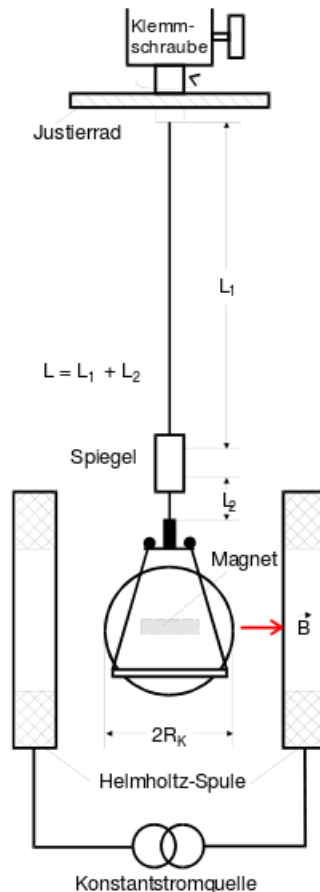


Abbildung 1: Aufbau der Messapparatur.

Zur Bestimmung des Schubmoduls G muss der Permanentmagnet parallel zum Draht ausgerichtet sein, was der Richtung des Erdmagnetfeldes entspricht. Dieses nimmt dadurch keinen Einfluss auf die Schwingungsdauer. Es werden zehn Messwerte aufgenommen. Anschließend wird das magnetische Moment des Permanentmagneten bestimmt. In diesem Versuchsteil wird die Stromquelle der Helmholtz-Spulen eingeschaltet, um ein Magnetfeld zu realisieren. Die Stromstärke, mit der die Spulen betrieben werden, wird von $I = 0 \text{ A}$ bis $I = 1 \text{ A}$ in fünf Schritten variiert und je fünf Schwingungsdauern notiert. Hier wird der Permanentmagnet senkrecht zum Draht und parallel zum Magnetfeld der Spulen ausgerichtet, um den maximalen Einfluss des Magnetfeldes auf die Schwingung zu erreichen. Zur Bestimmung des Erdmagnetfeldes bleibt der Permanentmagnet senkrecht zum Draht ausgerichtet, um den maximalen Einfluss des Erdmagnetfeldes auf die Schwingung zu erreichen. Erneut werden zehn Perioden gemessen.

Zur Berechnung der Module müssen außerdem Drahtlänge und -durchmesser bekannt sein. Gemessen werden diese mit einer Micrometerschraube bzw. einem Maßband. Radius und Masse der angehängten Kugel, sowie der Befestigung, als auch Windungszahl der

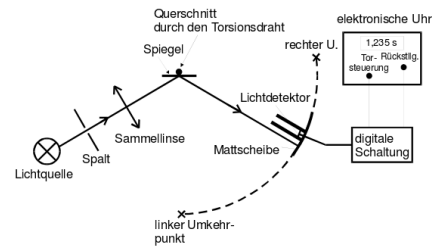


Abbildung 2: Aufbau der Lichtschranke.

Spulen sind angegeben.

4 Auswertung

Die in der Auswertung verwendeten Mittelwerte n -fach gemessener Größen sind gemäß der Gleichung

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (11)$$

bestimmt. Die Standardabweichung des Mittelwertes ergibt sich dabei zu

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (12)$$

Resultiert eine Größe über eine Gleichung f aus N anderen fehlerbehafteten Größen x_i mit $i \in \{1, \dots, N\}$, so berechnet sich der Gesamtfehler $\Delta f(x_i)$ nach der GAUSSschen Fehlerfortpflanzung zu

$$\Delta f(x_1, \dots, x_N) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2}. \quad (13)$$

4.1 Eigenschaften des untersuchten Systems

Das untersuchte Material ist Federstahl. Die Abmessungen des verwandten Drahtes sind in Tabelle 1 aufgetragen, die Werte von Durchmesser und den Teillängen korrelieren nicht.

Drahtdurchmesser d/mm	Drahtlängen l_1/m l_2/m		Masse der Kugel m_K/g	Radius der Kugel r_K/mm
0,190	0,551	0,500	$512,20 \pm 0,20$	$25,3800 \pm 0,0018$
0,189	0,551	0,510		
0,191	0,550	0,500		
0,193	0,551	0,520		
0,195	0,551	0,520		

Tabelle 1: Abmessungen des Drahtes.

Tabelle 2: Eigenschaften der Kugel.

Für die folgenden Rechnungen wird der Durchmesser $d = (0,1916 \pm 0,0011)$ mm und die Gesamtlänge $l = (0,6018 \pm 0,0005)$ m benutzt.

Die Eigenschaften der Kugel sind in Tabelle 2 aufgetragen. Zur Berücksichtigung des Trägheitsmomentes der Kugelaufhängung $\Theta_{\text{Aufhängung}}$ wird das Kugelträgheitsmoment Θ_{Kugel} in den folgenden Rechnungen mit dem Gesamtträgheitsmoment Θ des schwingenden Systems ersetzt. Mit

$$\Theta = \Theta_{\text{Kugel}} + \Theta_{\text{Aufhängung}} \quad (14)$$

$$= \frac{2}{5} m_K r_K^2 + 22,5 \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2 \quad (15)$$

wird das Gesamtträgheitsmoment $\Theta = (0,134\,22 \pm 0,000\,06) \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^2$ angenommen.

4.2 Bestimmung des Schubmoduls G

T_G / s	
18,585	18,589
18,598	18,592
18,593	18,594
18,588	18,598
18,585	18,588

Tabelle 3: Schwingungsdauern zur Berechnung des Schubmoduls G .

Die zur Berechnung des Schubmoduls G benötigten Schwingdauern T_G sind in Tabelle 3 aufgetragen. Der Schubmodul G wird mittels der Formel (8) berechnet. Es gilt

$$G = 8\Theta \frac{\pi L}{T^2 r_D^4} \quad (16)$$

$$= (69,7 \pm 1,6) \frac{\text{GN}}{\text{m}^2} \quad (17)$$

Aus der Literatur ist der Schubmodul für das Material Federstahl mit

$$G_{\text{Theorie}} = 73,575 \frac{\text{GN}}{\text{m}^2} \quad (18)$$

bekannt. Die Messung weicht von der Theorie um -5.27% ab.

4.3 Bestimmung des Dipolmomentes m

Tabelle 4 zeigt in Abhängigkeit von der Stromstärke I der HELMHOLTZ-Spule die gemessenen Schwingdauern $T_{m,i}$ sowie deren Mittelwerte und Standardabweichungen. Die einzelnen Schwingdauern verschiedener Stromstärken I korrelieren nicht.

I / A	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8
$T_{m,i} / \text{s}$	11,424	9,526	6,889	5,837	5,171
	11,441	9,513	6,949	5,785	5,169
	11,386	9,490	6,953	5,841	5,172
	11,411	9,480	6,955	5,831	5,162
	11,384	9,473	6,954	5,844	5,162
T_m / s	$11,41 \pm 0,01$	$9,49 \pm 0,01$	$6,94 \pm 0,01$	$5,83 \pm 0,01$	$5,17 \pm 0,01$

Tabelle 4: Schwingungsdauern zur Berechnung des magnetischen Moments m .

Zur Bestimmung des Dipolmomentes wird die Gleichung (??) benutzt, um die Magnetfeldstärke B der HELMHOLTZ-Spule gegen das reziproke Schwingdauer-Quadrat $\frac{1}{T_m^2}$ aufzutragen. Die Magnetfeldstärke B der HELMHOLTZ-Spule ist durch die Gleichung (9) und durch den Spulenstrom I bekannt. Mit der Linearisierung

$$B = 4\pi^2 \underbrace{\frac{\Theta}{m}}_{a_{\text{lin}}} \underbrace{\frac{1}{T_m^2}}_{x_{\text{lin}}} - \underbrace{\frac{D}{m}}_{b_{\text{lin}}} \quad (19)$$

und der Regression mittels der Formeln (25) sind die Parameter des Fits

$$a_{\text{lin}} = (0,1036 \pm 0,0022) \text{ T s}^2, \quad (20)$$

$$b_{\text{lin}} = -(3,16 \pm 0,53) \cdot 10^{-4} \text{ T}. \quad (21)$$

Es folgt für das magnetische Moment

$$m = 4\pi^2 \frac{\Theta}{a_{\text{lin}}} \quad (22)$$

$$= (0,0512 \pm 0,0011) \text{ T m} \quad (23)$$

4.4 Bestimmung der Erdmagnetfeldstärke B_{Erde}

T_E / s	
18,413	18,404
18,411	18,395
18,390	18,399
18,409	18,396
18,379	18,391

Tabelle 5: Schwingungsdauern zur Berechnung des Erdmagnetfeldes B_{Erde} .

Die gemessenen Zeiten $T_{E,i}$ sind in Tabelle 5 aufgetragen, der Mittelwert mit Standardabweichung ist $T_E = (18,3987 \pm 0,0034) \text{ s}$.

Mithilfe der Gleichung (19) wird die Stärke des Erdmagnetfeldes B_{Erde} bestimmt. Aus Abschnitt 2, Gleichung (??) und Abschnitt 4.3, Gleichung (23) sind die in Formel (19) benötigten Größen m und D bekannt.

Die Winkelrichtgröße D beträgt $D = (1,5333 \pm 0,0007) \cdot 10^{-5} \text{ N m}$. Damit ist die Stärke des Erdmagnetfeldes

$$B_{\text{Erde}} = (6,27 \pm 0,18) \cdot 10^{-6} \text{ T}. \quad (24)$$

4.5 Bestimmung der Poissonschen Querkontraktionszahl μ und des Kompressionsmoduls Q

Der Literaturwert des Elastizitätsmoduls E für Federstahl ist

$$E = 190,3 \text{ GPa}, \quad (26)$$

aus Abschnitt 4.1, Gleichung (17) ist der Schubmodul G mit

$$G = (69,7 \pm 1,6) \frac{\text{GN}}{\text{m}^2} \quad (27)$$

bekannt. Mithilfe der Zusammenhänge nach Gleichung (3) gilt für die POISSONSche Querkontraktionszahl μ und für den Kompressionsmodul Q

$$\mu = \frac{E}{2G} - 1 \quad Q = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} \quad (28)$$

$$= 0,362 \pm 0,031. \quad = (0,23 \pm 0,05) \frac{\text{TN}}{\text{m}} \quad (29)$$

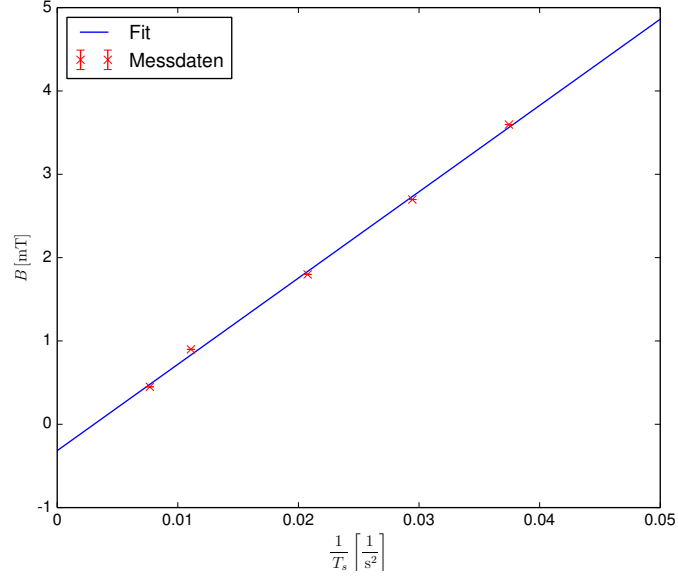


Abbildung 3: Messdaten und Regression der Schwingdauern T_S und der Magnetfeldstärke B .

$$\Delta = N \sum x^2 - \left(\sum x \right)^2 \quad (25a)$$

$$a_{\text{Reg}} = \frac{N \sum x \cdot y - \sum x \cdot \sum y}{\Delta} \quad (25b)$$

$$b_{\text{Reg}} = \frac{\sum x^2 \cdot \sum y - \sum x \cdot \sum x \cdot y}{\Delta} \quad (25c)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y - a_{\text{Reg}} \cdot x - b_{\text{Reg}})^2}{N - 2}} \quad (25d)$$

$$\sigma_a = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}} \quad (25e)$$

$$\sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}} \quad (25f)$$

(vgl. [2]) mit $x = x_{\text{lin}} = \frac{1}{T_m^2}$, $y = B$, $a_{\text{Reg}} = a_{\text{lin}}$, $b_{\text{Reg}} = b_{\text{lin}}$ und der Anzahl der Datenpaare N

5 Diskussion

Lesen Sie pünktlich zum Beginn der Vorweihnachtszeit die Kolumnen aus unserer neuen Rubrik "Eine heiße Sache - Das Bügeleisen im Wandel Zeit" In der ersten Ausgabe widmet sich Dr. Atmin dem Schwerpunkt "Südeuropäische Fabrikate des ausgehenden 19. Jahrhunderts"

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/90/1>. Version 1.3.1.
- [2] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001. URL: <http://www.scipy.org/>. Version 0.14.0.
- [3] Travis E. Oliphant. „Python for Scientific Computing“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/10/1>. Version 1.8.1.
- [4] The GIMP Team. *GIMP: GNU Image Manipulation Program*. URL: <http://www.gimp.org/>. Version 2.8.10.

Die verwendeten Plots wurden mit *matplotlib*[1] und die Grafiken mit *GIMP*[4] erstellt und/oder bearbeitet. Die Berechnungen wurden mit *Python-Numpy*, [3] durchgeführt.