

Anfängerpraktikum Versuch V351

## **Fourier-Analyse und -Synthese**

Helena Nawrath  
helena.nawrath@tu-dortmund.de

Carl Arne Thomann  
arnethomann@me.com

Durchführung: 13. Januar 2015

Abgabe: 20. Januar 2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

## Ziel

Ziel des Versuchs ist es, die FOURIER-Transformation kennenzulernen. Hierzu wird zum Einen eine bekannte periodische Funktion durch FOURIER-Transformation in die Elementarschwingung zerlegt und zum Anderen eine periodische Funktion aus Elementarschwingungen gebildet.

## 1 Theorie

### 1.1 Fourier-Reihenentwicklung, harmonische Analyse

Für eine periodische Funktionen, beispielsweise eine T-periodische Funktion  $F(t)$  der Zeit, gilt

$$F(t) = F(t + T) \quad \forall t. \quad (1)$$

Bis Abschnitt 1.3 werden nur solche periodischen Funktionen betrachtet. Nach dem FOURIER'schen Theorem lassen sich periodische Funktionen als Linearkombination aus den Elementarschwingungen

$$a_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \text{und} \quad b_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (2)$$

zusammenfügen. Das bedeutet, dass die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \sin(\underbrace{n \frac{2\pi}{T} t}_{\omega}) + b_n \cos(\underbrace{n \frac{2\pi}{T} t}_{\omega}) \right) \quad (3)$$

mit  $\omega = 2\pi \cdot f$  eine T-periodische Funktion  $F$  der Zeit darstellt, sofern die Reihe konvergent ist. Gleichmäßige Konvergenz der FOURIER-Reihe ist gegeben, wenn die Funktion  $F$  auf ihrem Definitionsbereich stetig ist.

Für die Koeffizienten in 3 gilt

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(2n\pi t) dt \quad (4a)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(2n\pi t) dt. \quad (4b)$$

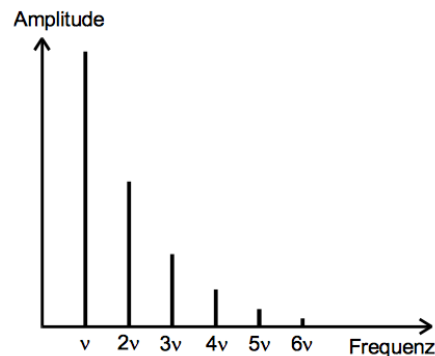
Die Schwingung wird für  $n = 0$  Grundschwingung und die Schwingungen für  $n > 1$  Oberschwingungen bezeichnet. Für gerade Funktionen  $F$ , also mit  $F(x) = F(-x)$ , sind alle  $b_n = 0$ ; analog sind für ungerade Funktionen  $F$ , also mit  $-F(x) = F(-x)$ , alle  $a_n = 0$ .

Durch diese Formeln ist allgemein das Beschreiben einer T-periodischen Funktion als konvergente FOURIER-Reihe möglich. Dies wird als *harmonische Analyse* oder *FOURIER-Analyse* bezeichnet. Sind andererseits die FOURIER-Koeffizienten einer periodischen Schwingung bekannt, so kann die Funktion aus den Elementarschwingungen zusammengesetzt werden. Dies wird als *Synthese* bezeichnet.

Werden eine begrenzte Anzahl von Elementarschwingungen benutzt, um eine periodische Funktion zusammenzusetzen, kommt es bei unstetigen Funktionen zum GIBBS'schen Phänomen. Es kommt bei der Unstetigkeitsstelle und in ihrer Umgebung zu sichtbaren Abweichungen.

## 1.2 Linienspektrum der Frequenzen, Spektralanalyse

Werden die FOURIER-Koeffizienten in Gleichungen (4) als Funktionen der Frequenzen  $f$  aufgetragen, so ergeben sich Frequenzspektren. In diesen ist abgezeichnet, aus welchen Elementarschwingungen die Funktion  $F$  besteht und welchen Wert die FOURIER-Koeffizienten (4) aufweisen. Bei konvergenten FOURIER-Reihen (3) geht die Höhe



**Abbildung 1:** Beispiel eines Frequenzspektrums bei konvergenter FOURIER-Reihe. [1]

der diskreten Linien für  $f \rightarrow \infty$  gegen Null.

## 1.3 Nicht-periodische Funktionen, Fourier-Transformation

Nicht-periodische Funktionen  $F$  zeigen bei Spektralanalyse 1 ein kontinuierliches Spektrum, weiter gilt nicht  $a_n, b_n \xrightarrow{f \rightarrow \infty} 0$  im Allgemeinen. Für diese Funktionen ohne konvergenten FOURIER-Reihen wird eine FOURIER-Transformation angewandt.

Mit der FOURIER-Transformierten  $\tilde{F}(\omega)$  und der Funktion  $F(t)$  ist die FOURIER-Transformation als uneigentliches Integral beschreibbar. Es gilt

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cdot e^{i\omega t} dt \quad (5)$$

Die von der Frequenz abhängigen Funktion  $\tilde{F}(\omega)$  beschreibt das in Abschnitt 1.2 gezeigte Frequenzspektrum. Für reale Systeme kann nicht in den geforderten Zeitgrenzen  $-\infty$  und  $\infty$  integriert werden; durch vorzeitiges Abbrechen der Integration kommt es zu Abweichungen. Diese Abweichungen bestehen beispielsweise darin, dass eventuell erwartete diskrete Linien (vgl. Abb. 1) als Peaks mit endlicher Breite dargestellt werden und es neben den erwarteten Maxima auch zu Nebenmaxima kommt.

Die Umkehrformel der FOURIER-Transformation ist gegeben durch

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \quad (6)$$

## 2 Durchführung

### 2.1 Fourier-Analyse

Es werden periodische elektrische Schwingungen in ihre Fourier-Komponenten zerlegt und die gemessenen Fourier-Koeffizienten mit den nach Fourierschen Theorem erwarteten Werten nach Gleichung 4 verglichen.

Es wird das Signal eines Funktionsgenerators mit den Kenndaten in Tabelle ?? auf ein

Oszilloskop gegeben. Die Signalform wird gewählt aus Rechteck-, Sägezahn- und Dreiecksspannung. Dieses Oszilloskop wird im *Math*-Modus betrieben, welcher über eine endliche Zeit eine *Fast-Fourier-Transformation* [**FFT**] durchführt. Nach Abschnitt 1.3 werden für die periodischen Signale anstelle von diskreten Linien Peaks mit endlicher Breite erwartet. Die Höhe der Peaks nehmen im Frequenzspektrum mit wachsender Frequenz ab.

Die Amplitude der Elementarschwingung und damit die Fourier-Koeffizienten 4 entsprechen der Höhe der Peaks. Anschließend wird das Verfahren mit einer anderen Signalform wiederholt, sodass alle drei Signalformen analysiert werden.

### 2.2 Fourier-Synthese

Aus den Gleichungen 4 sind für periodische Signalformen, etwa Rechteck-, Sägezahn- oder Dreiecksspannungen, die Fourier-Koeffizienten bekannt. Mit Hilfe einer Vorrichtung wird die Signalform aus den Elementarschwingungen mit berechneter Amplitude additiv zusammengesetzt.

Die Vorrichtung besteht aus einem Funktionsgenerator, der eine feste Grundschwingung  $f = \text{const.}$  für  $n = 0$  und deren Oberschwingungen für  $n \in \{2, \dots, 9\}$  ausgibt. Diese Elementarschwingungen sind in ihrer Amplitude und in ihrer Phase einstellbar, weiter

kann das Summensignal ausgegeben werden. Die einzelnen Oberschwingungen und die Grundschiwingung können wahlweise dem Summensignal zugeschaltet werden.

Die aus den Gleichungen 4 bekannten Amplituden werden an der Vorrichtung eingestellt und die einzelnen Phase so versetzt, dass die Schwingungen in Phase sind. Bei  $a_n, b_n < 0$  kann ein Phasenversatz von  $\phi = 180^\circ$  eingestellt werden, es gilt

$$-\sin(x) = \sin(x + 180^\circ). \quad (7a)$$

$$-\cos(x) = \cos(x + 180^\circ) \quad (7b)$$

## 3 Auswertung

### 3.1 Fouriertransformation

$n$	$\frac{U_1}{n} / \text{mV}$	$U_n / \text{mV}$	Abweichung /%
1	920	—	—
3	300	288	4
5	170	168	1
7	116	112	4
9	86	80	8
11	64	56	14

**Tabelle 1:** Fourieranalyse der Rechtecksspannung.

$n$	$\frac{U_1}{n^2} / \text{mV}$	$U_n / \text{mV}$	Abweichung /%
1	580	—	—
3	63	61,6	2,3
5	21	20,8	1,0
7	10	10,4	3,9
9	6	5,6	7,1
11	4	4,0	0,0

**Tabelle 2:** Fourieranalyse der Dreiecksspannung.

Die Tabellen 1,2 und 3 enthalten die gemessenen Amplituden  $U_n$  der  $n$ -ten Oberschwingung. Nach Gleichung (4b) wurden in der Versuchsvorbereitung die Koeffizienten  $a_n, b_n$

$n$	$\frac{U_1}{n} / \text{mV}$	$U_n / \text{mV}$	Abweichung /%
1	460	—	—
2	230	224	3
3	152	144	6
4	112	112	0
5	88	88	0
6	74	74	0
7	64	64	0
8	56	56	0
9	50	48	4
10	44	46	5
11	40	40	0

**Tabelle 3:** Fourieranalyse der Sägezahnspannung.

der verschiedenen Spannungsformen berechnet. Es gilt

$$\text{Rechteck : } a_n = 0, \quad b_n = \frac{4U_0}{\pi n} \quad (8)$$

$$\text{Sägezahn : } a_n = 0, \quad b_n = (-1)^{n+1} \frac{2U_0}{\pi n} \quad (9)$$

$$\text{Dreieck : } a_n = \frac{8U_0}{n^2\pi^2}, \quad b_n = 0, \quad (10)$$

mit Rechteck- und Sägezahnspannung als gerade Funktionen; die Dreieckspannung ist ungerade. Nach diesen Formeln wird die theoretisch erwartete Amplitude  $\frac{U_1}{n}$  berechnet, in dem die erste gemessene Amplitude als gegeben vorausgesetzt wird und anschließend durch  $n$  bzw.  $n^2$  geteilt wird, um die restlichen Theoriewerte zu erhalten. Die Abweichung zwischen Messung und Theorie ist ebenfalls angegeben.

In den Abbildungen 3 und 2 werden die Amplituden der Koeffizienten dargestellt. Nach Gleichung (8) und (9) sollen alle geraden Koeffizienten wegfallen. Vergleicht man die Theorie mit den Abbildungen fällt auf, dass dies – bedingt durch die verwendeten Bauteile in der Messung – nicht der Fall ist. Es treten Spannungen  $U \geq 0 \text{ V}$  auf. Diese Abweichungen lassen sich für größere  $n$  nur schwierig von den Amplituden der ungeraden Koeffizienten unterscheiden. Die Abbildung 4 stimmt gut mit der Theorie überein, weist jedoch einen messtechnisch bedingten Fehler auf. Der Abstand zwischen dem 12. und 13. Peak weicht von der Größe der anderen Abstände ab. Bei Rechteck- und Dreieckspannung tritt der gleiche Fehler auf, was aber aufgrund der Peak-Höhe nicht direkt zu erkennen ist.

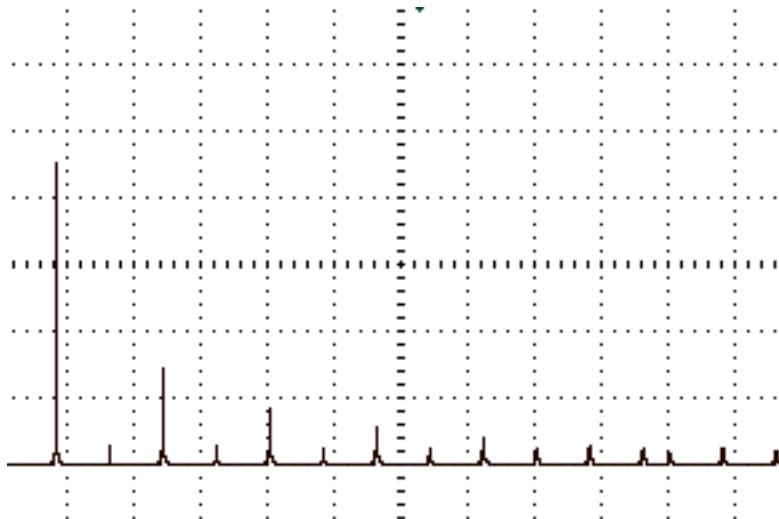


Abbildung 2: Fourieranalyse der Rechteckspannung.

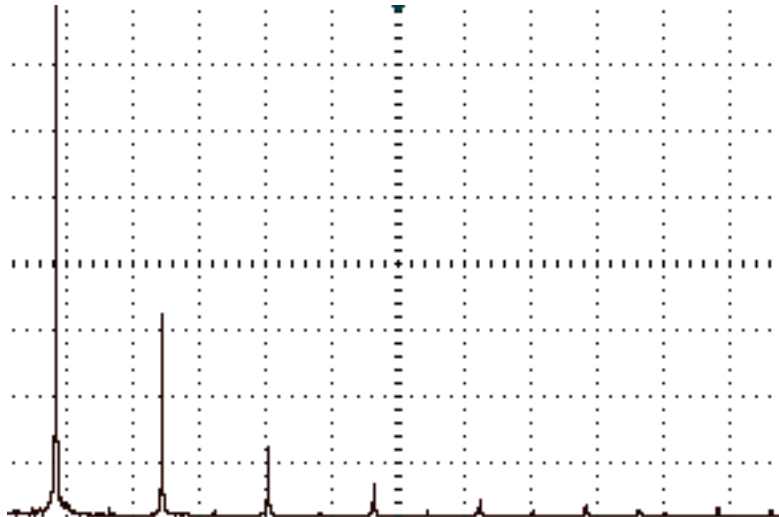
## 3.2 Fouriersynthese

Bei der Fouriersynthese sollen die in Kapitel 3.1 untersuchten Schwingungen aus einzelnen Koeffizienten hergestellt werden. Dazu werden die Amplituden der verschiedenen Oberschwingungen am Oberwellengenerator eingestellt und die Phase so geändert, dass die auf dem Oszilloskopbildschirm dargestellte Summenspannung dem gewählten Spannungsverlauf entspricht. In Tabelle 4 sind die Amplituden der unterschiedlichen Oberwellen für Rechteck-, Dreieck- und Sägezahnspannung aufgetragen.

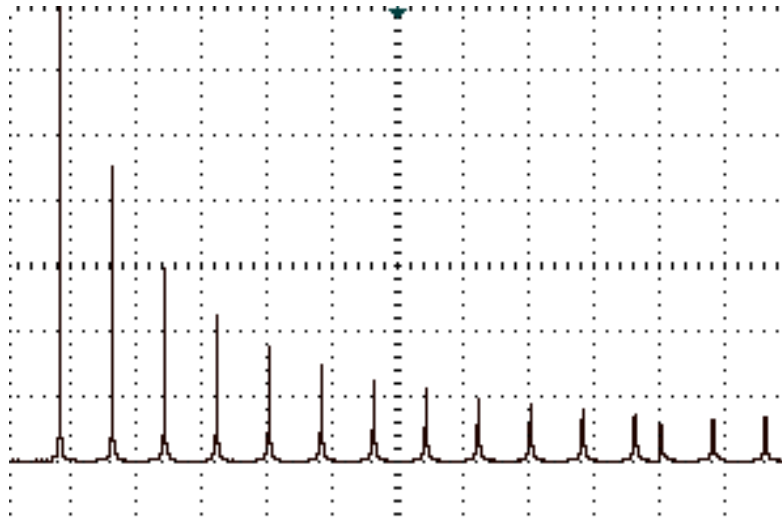
n	$U_n$ /mV		
	Rechteck	Sägezahn	Dreieck
1	634.8	634.8	634.80
2	0	318.00	0
3	216.73	212.00	70.72
4	0	159.76	0
5	130.20	127.65	25.48
6	0	106.45	0
7	92.90	91.20	13.27
8	0	79.49	0
9	72.08	70.55	7.95

Tabelle 4: Fouriersynthese drei verschiedener Spannungen.

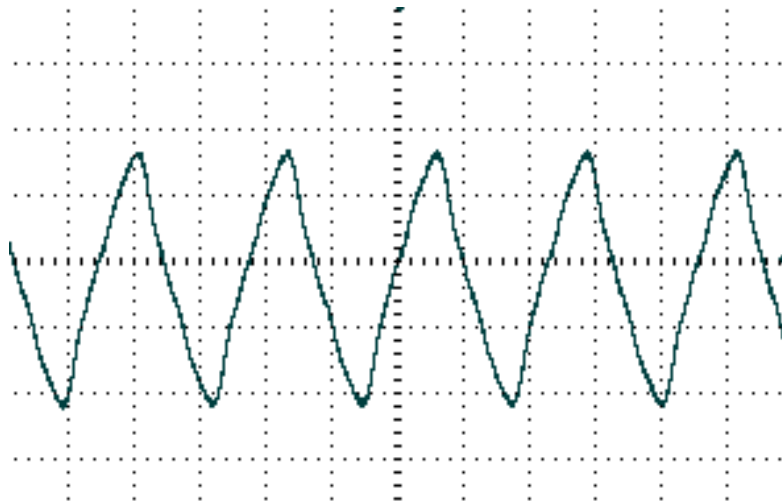
In Abbildung 5 ist die synthetisierte Dreieckspannung abgebildet. Die Flanken sind nicht gerade, sondern weisen Schwingungsbäuche auf. Die Spannungsspitzen sind abgerundet. Trotzdem ist die maßgebliche, dreieckige Form gut erkennbar.



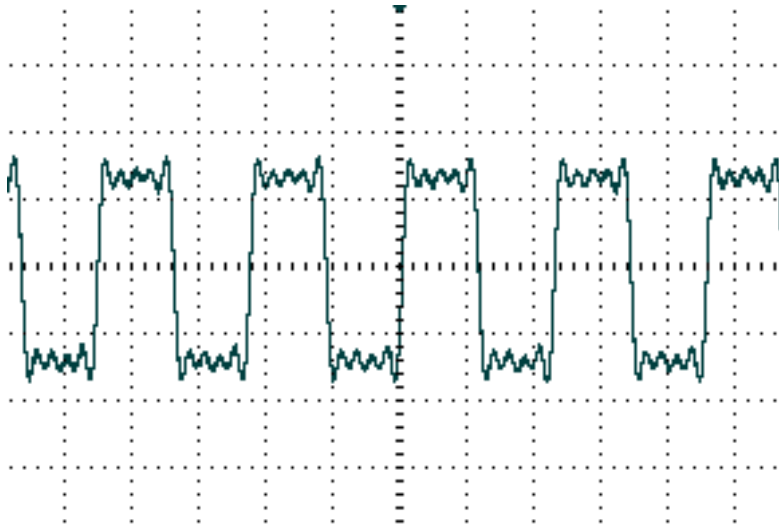




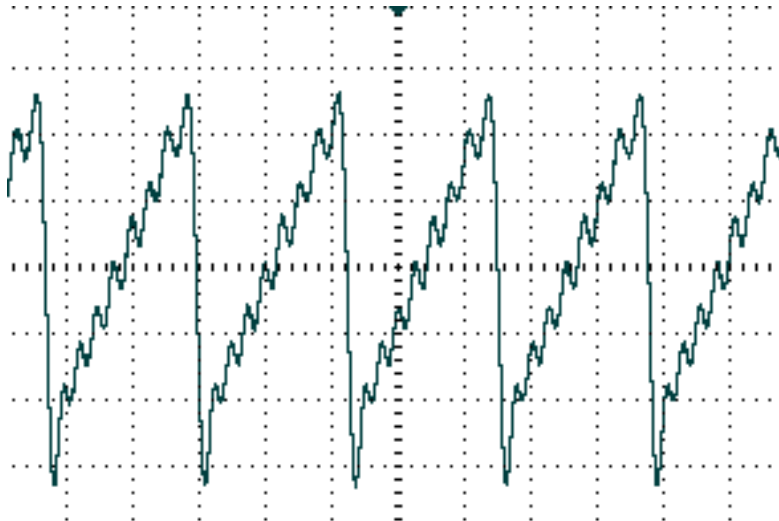
**Abbildung 4:** Fourieranalyse der Sägezahnspannung.



**Abbildung 5:** Fouriersynthese der Dreiecksspannung.



**Abbildung 6:** Fouriersynthese der Rechteckspannung.



**Abbildung 7:** Fouriersynthese der Sägezahnspannung.

## 4 Diskussion

Bei der Fourier-Analyse treten geringe Abweichungen zwischen berechneten und experimentell bestimmten Spannungswerten auf, deren Wert für größere  $n$  ansteigt. Da alle Theoriewerte aus der ersten eingestellten Spannung berechnet werden könnten eventuelle Fehler durch ungenaues Ablesen der dieser Amplitude auftreten. Durch weitere Messreihen könnte darüber eine stärkere Aussage getroffen werden. Die Voraussetzung der Integration über eine unendlich lange Zeit kann vom verwendeten Oszilloskop nicht realisiert werden. Daher fallen die geraden Koeffizienten der Rechteck- und Sägezahnspannung nicht weg. Alle  $a_n$  nehmen einen Wert an, der größer als Null ist. Dies steht im Widerspruch mit der Theorie nach Gleichung (8) und (9). Zusätzlich treten Abweichungen durch eine endliche Genauigkeit der verwendeten Geräte auf.

Prinzipiell lassen sich Spannungen durch die einzelnen Fourier-Koeffizienten so zusammensetzen, dass ihre Form gut zu erkennen ist. Rechteck- und Sägezahnspannung jedoch sind unstetige Funktionen. Deswegen treten an den Sprungstellen nach dem Gibbschen Phänomen Überschwüngen auf, die nicht vermieden werden können. Selbst für  $n \rightarrow \infty$  werden die Abweichungen nicht geringer.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch V351: Fourier-Analyse und -Synthese*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V351.pdf> (besucht am 13.01.2015).
- [2] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001. URL: <http://www.scipy.org/>. Version 0.14.0.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>. Version 2.4.5.
- [4] Travis E. Oliphant. „Python for Scientific Computing“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/10/1>. Version 1.8.1.
- [5] The GIMP Team. *GIMP: GNU Image Manipulation Program*. URL: <http://www.gimp.org/>. Version 2.8.10.

Die Grafiken wurden mit *GIMP*[5] bearbeitet sowie die Berechnungen mit *Python-Numpy*, [4], *-SciPy*[2] und *-uncertainties*[3] durchgeführt.