Anfängerpraktikum V355

Gekoppelte Schwingkreise

Helena Nawrath
helena.nawrath@tu-dortmund.de

Carl Arne Thomann
arnethomann@me.com

Durchführung: 6. Januar 2015 Abgabe: 13. Januar 2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden gekoppelte elektrische Schwingkreise betrachtet. Ziel ist es, das Verhalten der Energie bzw. des Energieübergangs zwischen den einzelnen Systemen insbesondere unter dem Aspekt der Zeitabhängigkeit zu betrachten. Desweiteren soll das Verhalten des Gesamtsystems bei erzwungenen Schwingungen, also äußerer periodischer Anregung, untersucht werden.

2 Theorie

Sind zwei schwingfähige Systeme miteinander gekoppelt, so beeinflussen sie sich gegenseitig. Wird eines der Systeme zum Schwingen angeregt pendelt die zugeführte Energie zwischen beiden Systemen; die Energieerhaltung gilt.

2.1 Kapazitiv gekoppelte Schwingkreise

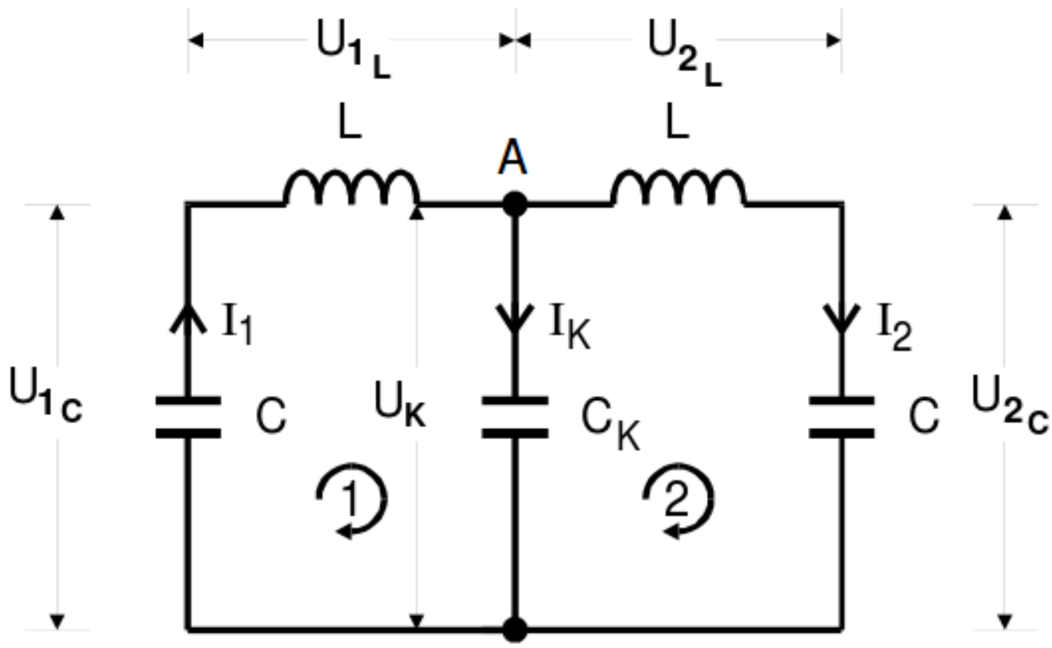

Abbildung 1: Zwei LC-Schwinkreise kapazitiv gekoppelt.

Die zwei dargestellten eigenständigen Schwingkreise sind über den Kondensator der Kapazität C_k miteinander verknüpft. Mit Knoten- und Maschenregel lassen sich folgende Gesetzmäßigkeiten herleiten:

$$I_\text{k} = I_1 - I_2 \tag{1}$$

$$U_{1\mathrm{C}} + U_{1\mathrm{L}+U_\mathrm{k}} = 0 \tag{2}$$

$$U_{2\mathrm{C}} + U_{2\mathrm{L}+U_\mathrm{k}} = 0 \tag{3}$$

Desweiteren gelten die Beziehungen

$$U_\mathrm{C} = \frac{1}{C}\int \quad I\mathrm{d}t \tag{4}$$

und

$$U_\mathrm{L} = L\dot{I}. \tag{5}$$

Einsetzen von (4) und (5), sowie ableiten nach der Zeit ergibt ein Differentialgleichungssystem. Werden die Gleichungen entkoppelt, lassen sie sich unabhängig voneinander lösen. Lösung der ersten Gleichung, entstanden durch Addition der DGL-System-Gleichungen,

$$L(\ddot{I_1} + \ddot{I_2}) + \frac{1}{C}(I_1 + I_2) = 0 \tag{6}$$

ist eine harmonische Schwingung der Form

$$(I_1 + I_2)(t) = (I_{10} + I_{20})\cos(\frac{t}{\sqrt{LC}}) \tag{7}$$

mit der Schwingungsfrequenz $\nu^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. Diese Frequenz entspricht derer eines einzelnen Oszillators mit den Bauteilen L und C. Die Amplitude $(I_1 0 + I_2 0)$ bleibt konstant. Die zweite Gleichung, enstanden durch Subtraktion,

$$L(\ddot{I_1} - \ddot{I_2}) + (\frac{1}{C} + \frac{1}{C_\mathrm{k}})(I_1 - I_2) = 0 \tag{8}$$

wird gelöst durch

$$(I_1 - I_2)(t) = (I_{10} - I_{20})\cos\left(t\left[L\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_\mathrm{k}}\right)^{-1}\right]^{-\frac{1}{2}}\right). \tag{9}$$

Die Schwingungsfrequenz $\nu^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{1}{C}+\frac{1}{C_\mathrm{k}}\right)^{-1}}}$ ist größer als $\nu+$. Erneute Addition und Subtraktion der voneinander unabhägingen Gleichungen ergibt

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(I_{10} + I_{20})\cos(2\pi\nu^+ t) + \frac{1}{2}(I_{10} - I_{20})\cos(2\pi\nu^- t) \tag{10}$$

und

$$I_2(t) = \frac{1}{2}(I_{10} + I_{20})\cos(2\pi\nu^+ t) - \frac{1}{2}(I_{10} - I_{20})\cos(2\pi\nu^- t). \tag{11}$$

Im folgenden werden zwei Spezialfälle betrachtet. Schwingen die Systeme mit gleicher Amplitude $I_{10} = I_{20}$ und gleicher Phase so verschwindet die Differenzschwingung (**??**), sodass die Oszillatoren jeweils mit ν^+ eines einzelnen Oszillators und gleicher Phase schwingen. Am Kondensator C_k liegt zu keinem Zeitpunkt eine Spannung an, da die

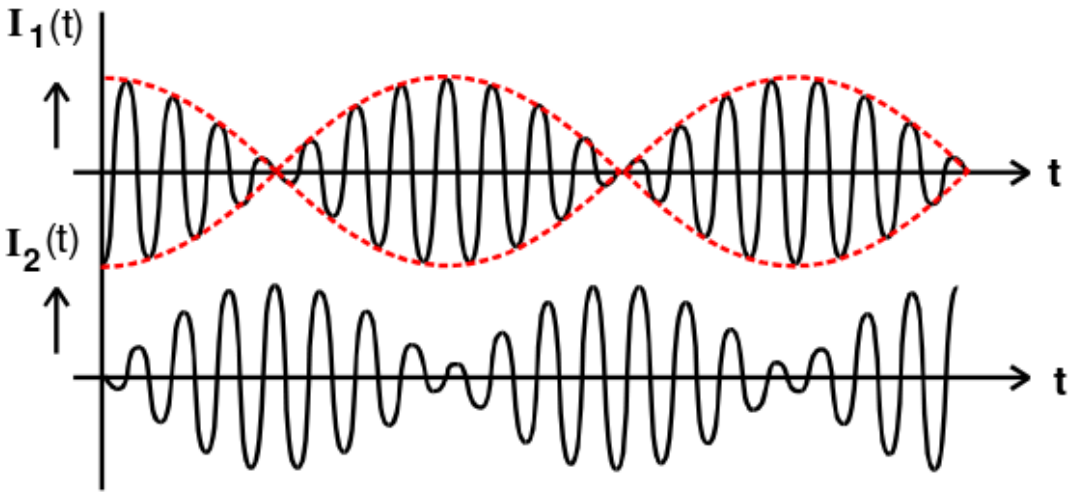

Abbildung 2: Schwebung.

Ströme sich gegenseitig kompensieren. Schwingen die Systeme mit entgegengesetzter Amplitude $I_{10} = -I_{20}$ und Phase verschwindet die Summenschwingung (**??**). Die Oszillatoren schwingen gegenphasig mit der Frequenz ν^-. Diese beiden Schwingungsmoden werden als Fundamentalschwingungen des Systems bezeichnet.

Wird zur Zeit $t = 0$ nur ein Oszillator ausgelenkt, d.h. $I_{10} \neq 0, I_{20} = 0$, vereinfachen sich (**??**) und (**??**). Mit einigen Umformungen und nutzen von Additionstheoremen ergeben sich

$$I_1(t) = I_{10} \cos(\frac{1}{2}(\omega^+ + \omega^-)t) \cos(\frac{1}{2}(\omega^+ - \omega^-)t) \tag{12}$$

und

$$I_2(t) = I_{10} \sin(\frac{1}{2}(\omega^+ + \omega^-)t) \sin(\frac{1}{2}(\omega^+ - \omega^-)t). \tag{13}$$

Gemäß der Annahme $\nu^+ \approx \nu^-$ und C_k » C ist $\frac{1}{2}(\omega^+ - \omega^-) \approx \omega^+$ und $\omega^- - \omega^+$ « ω^+. Die Oszillatoren schwingen mit der Frequenz $\frac{1}{2}(\nu^+ + \nu)$, welche ungefähr der Frequenz eines Einzeloszillators entspricht. Die Amplituden verändern sich Periodisch mit der Schwebungsfrequenz $\nu^- - \nu^+$. Die Verhältnisse haben sich nach der Zeit

$$T * \frac{1}{2}(\omega^- - \omega^+) = \frac{\pi}{2} \tag{14}$$

umgekehrt, die Energie pendelt periodisch mit der Schwebungsfrequenz zwischen beiden Systemen.

2.2 Erzwungene Schwingungen

Erzwungene Schwingungen werden durch eine von außen angelegte Sinusspannung erzeugt. Wird Abbildung **??** um einen Sinusgenerator erweitert, so kann mit Hilfe der Maschenregel eine Formel für den Strom I_2 gewonnen werden.

$$I_2 = |U| \frac{1}{\sqrt{4\omega^2 {C_\mathrm{k}}^2 R^2 Z(\omega)^2 + \left(\frac{1}{\omega C_\mathrm{k}} - \omega C_\mathrm{k} Z(\omega)^2 + \omega R^2 C_\mathrm{k}\right)^2}} = |U||L|, \qquad (15)$$

mit dem Leitwert $|L|$ und dem Widerstand $Z(\omega)$, nähert sich für sehr große und sehr geringe Frequenzen dem Wert Null an. An den Stellen der genannten Fundamentalfrequenzen ω^+ und ω^- treten Resonanzphänomene auf. Die Resonanzkurve zweier gekoppelter Schwingkreise unterscheidet sich von der Kurve eines einzelnen Oszillators mit periodischer Anregung durch die Anzahl der auftretenden Maxima. Die Werte des Stromes an diesen Frequenzen entscheiden sich nur unwesentlich, sodass die Leitwerte $|L(\omega^+)| = |L(\omega^-)| \approx {}^1\!/_{2R}$ angenommen werden darf. Betrachtet man die Frequenz ω^+, welche unabhängig von der Koppelkapazität C_k ist, können beide Schwingkreise als ein Kreis mit $L_\mathrm{ges} = 2L$ und $C_\mathrm{ges} = {}^1\!/_2 C$ angesehen werden. Durch die Koppelleitung fließt kein Strom. Bei der Frequenz ω^- ist $C_\mathrm{ges} = {}^{CC_\mathrm{k}}\!/_{C_\mathrm{k}+2C}$ - durch die Koppelleitung fließt nun der maximale Strom.

3 Durchführung

3.1 Resonanzfrequenz

Vor Messbeginn muss die fest eingestellte Resonanzfrequenz eines Schwingkreises gemessen und anschließend der Andere darauf abgestimmt werden. Dazu wird die in Abbildung ABC gezeigte Schaltung aufgebaut. Für die grobe Messung der Frequenz wird der X-Eingang zunächst nicht benötigt. Am Frequenzgenerator wird die Frequenz so lange variiert, bis auf dem Oszilloskop ein Strom mit maximaler Amplitude angezeigt wird. Die Feineinstellung wird mit X-Eingang vorgenommen, indem mit Lissajousfiguren mit im XY-Betrieb laufenden Oszilloskop, die Phasendifferenz zwischen Generator- und Schwingkreisstrom betrachtet wird. Der Resonanzfall tritt ein, wenn die Phasenverschiebung null beträgt und eine Gerade auf dem Bildschirm erscheint. Um den zweiten Schwingkreis auf dieselbe Frequenz zu eichen wird die Schaltung mit diesem Kreis erneut aufgebaut. Über eine variable Kapazität wird nach gleichem Verfahren der Resonanzfall eingestellt.

3.2 Zeitabhängigkeit der Schwingungsenergie

Für den ersten Versuchteil wird Schaltung 6 wie in Abbildung XY benötigt. Mit einem Rechteckimpuls wird ein Kreis zum Schwingen angeregt. Am ohmschen Widerstand fällt eine Spannung ab die durch das Oszilloskop dargestellt wird. Die Maxima jeder Schwebungsperiode werden bei verschiedenen Koppelkapazitäten abgezählt.

3.3 Frequenzen der Fundamentalschwingungen in Abhängigkeit der Koppelkapazität

Der zweite Versuchsteil basiert auf derselben Schaltung, die Schwingung wird nun jedoch mit einem Sinusgenerator angeregt. Die Kapazität C_k wird variiert. Für jede Kapazität wird die Lissajou-Figur betrachtet und die Frequenz so eingestellt, dass der Phasenunterschied $\varphi = 0$ bzw. $\varphi = \pi/2$ beträgt.

3.4 Frequenzabhängigkeit der Ströme

4 Auswertung

4.1 Abstimmen der Systemparameter

Der Kopplungskondensator wird überbrückt und somit effektiv nur der linke Schwingkreis angeregt. Die Frequenz des Generators, bei welchem die Widerstandsspannung $U_{\mathrm{R},1}(t)$ maximal wird, ist die Resonanzfrequenz des Systems. Diese wurde mit

$$f_{\mathrm{Resonanz}} = 30{,}74\,\mathrm{kHz} \tag{16}$$

grob abgeschätzt. Präzise ist der Phasenwinkel zwischen Erregerspannung $U(t)$ und der Widerstandsspannung $U_{\mathrm{R},2}(t)$ gleich Null, wenn die Erregerspannung die Resonanzfrequenz aufweist. Beim Auftragen der Widerstandsspannung $U_{\mathrm{R},2}(t)$ gegen die Erregerspannung $U(t)$ wird eine Lissajou-Figur sichtbar. Für den Phasenwinkel $\phi = 0$ ist diese Figur nicht-elliptisch, gerade und verläuft im ersten und dritten Quadranten des Oszilloskopes. Die Resonanzfrequenz f_{Resonanz} wird auf den Wert

$$f_{\mathrm{Resonanz}} = 30{,}71\,\mathrm{kHz} \tag{17}$$

präzisiert. Der nach Gleichung **??**!! gegebene Erwartungswert für die Resonanzfrequenz ist

$$f_{\mathrm{Resonanz,\ Theorie}} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{LC}} - \frac{\mathrm{R}^2}{4\mathrm{L}^2}} = (198{,}20 \pm 0{,}29)\,\mathrm{kHz}. \tag{18}$$

Der zweite Schwingkreis wird durch den Kondensator an den ersten angeglichen.

Kapazität $C_{1,2}$ pF	Kapazität der Spule C_{sp} pF	Induktivität der Spule L mH
798±2	37±1	31.90±0.05

Tabelle 1: Die festen Parameter des gekoppelten Systems nach Abbildung **??**!!.

4.2 Untersuchung der Schwebung

Die Widerstandsspannung $U_{\mathrm{R},2}(t)$ ist ein Maß für den Strom $I_2(t)$, es besteht nach Ohmschen Gesetz der Zusammenhang $U(t) = \mathrm{R} \cdot I(t)$ bei konstantem Widerstand R. Bei dem Auftragen der Widerstandsspannung $U_{\mathrm{R},2}(t)$ gegen die Zeit wird gemäß der Theorie **??** eine Schwebung sichtbar. (Helena) Um das Verhältnis der Schwebungs- und Schwingungsfrequenz zu bestimmen, wird innerhalb einer Schwebungsperiode die Anzahl der Schwingungsmaxima abgezählt. Das Verhältnis der Frequenzen α ist gegeben durch

$$\alpha = \frac{n_{\mathrm{Osz.}}}{n_{\mathrm{Schweb.}}}. \tag{19}$$

Daraus ergibt sich die Tabelle **??**

Kopplungskapazität C_{Kopplung} nF	Frequenzverhältnis α 1
9.99	14
8.00	11
6.47	9
5.02	7
4.00	6
3.00	5
2.03	4
1.01	2

Tabelle 2: Die Frequenzverhältnisse α in Abhängigkeit von der Kopplungskapazität C_{Kopplung}

4.3 Untersuchung der Fundamentallösungen

Frequenz		Kopplungskapazität
f_+ kHz	f_- kHz	C_{Kopplung} nF
30.56	32.85	9.99
30.57	33.38	8.00
30.57	33.98	6.47
30.57	34.88	5.02
30.57	35.86	4.00
30.57	37.40	3.00
30.58	40.12	2.03
30.58	47.23	1.01

Tabelle 3: Die Frequenzen der Fundamentallösungen in Abhängigkeit von der Kopplungskapazität C_{Kopplung}

4.4 Untersuchung der Stromkurve $I_2(t)$

Der Generator in Schaltung **??** durchläuft innerhalb von 20 ms das Frequenzspektrum von 10 kHz bis 80 kHz. Wird die Widerstandsspannung $U_{\text{R},2}(t)$ auf einem Oszilloskopen dargestellt, so zeigt sich der Auftrag von der Widerstandsspannung $U_{\text{R},2}(t)$ gegen die Erregerfrequenz. Die Zeitkoordinaten der Maxima sind in Tabelle 4 dargestellt.

Mit den Anfangs- und Endkoordinaten $\text{P}_{\text{Anfang}} = (-7\,\text{ms})|(10\,\text{kHz})$ und $\text{P}_t extEnde = (14{,}3\,\text{ms})|(80\,\text{kHz})$ können die Zeitkoordinaten in Tabelle 4 in Frequenzen umgerechnet werden. Die lineare Regression aus diesen beiden Koordinaten gibt die Umrechnungsformel

$$f = 3.7559t + 36.2911 \tag{20}$$

Zeitkoordinate		Kopplungskapazität	Frequenz	
t_+	t_-	C_{Kopplung}	f_+	f_-
ms	ms	nF	kHz	kHz
0,3	0,9	9,99	37,4178	39,6714
0,3	1,1	8,00	37,4178	40,4225
0,4	1,2	6,47	37,4934	40,7981
0,3	1,5	5,02	37,4178	41,9249
0,2	1,8	4,00	37,0423	43,0516
0,2	2,2	3,00	37,0423	44,554
0,2	3,0	2,03	37,0423	47,5587
0,2	5,1	1,01	37,0423	55,446

Tabelle 4: Die Zeitkoordinaten und die Frequenzen der Strommaxima in Abhängigkeit von der Kopplungskapazität C_{Kopplung}.

5 Diskussion

Lesen Sie pünktlich zum Beginn der Vorweihnachtszeit die Kolumnen aus unserer neuen Rubrik "Eine heiße Sache - Das Bügeleisen im Wandel Zeit" In der ersten Ausgabe widmet sich Dr. Atmin dem Schwerpunkt "Südeuropäische Fabrikate des ausgehenden 19. Jahrhunderts"

Literatur

[1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: `http://link.aip.org/link/?CSX/9/90/1`. Version 1.3.1.

[2] Travis E. Oliphant. „Python for Scientific Computing“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: `http://link.aip.org/link/?CSX/9/10/1`. Version 1.8.1.

[3] The GIMP Team. *GIMP: GNU Image Manipulation Program*. URL: `http://www.gimp.org/`. Version 2.8.10.

Die verwendeten Plots wurden mit *matplotlib*[1] und die Grafiken mit *GIMP*[3] erstellt und/oder bearbeitet. Die Berechnungen wurden mit Python-*Numpy*, [2] durchgeführt.