

Anfängerpraktikum V301

# **Leerlaufspannung und Innenwiderstand von Spannungsquellen**

Helena Nawrath  
helena.nawrath@tu-dortmund.de

Carl Arne Thomann  
arnethomann@me.com

Durchführung: 25. November 2014

Abgabe: 02. Dezember 2014

TU Dortmund – Fakultät Physik

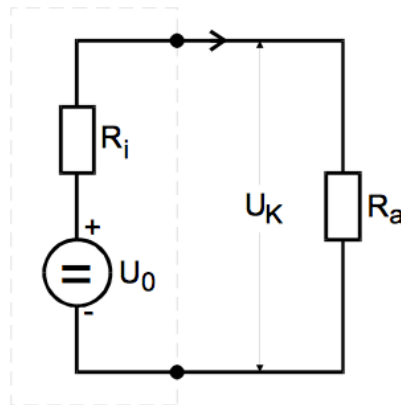
# 1 Zielsetzung

In diesem Versuch wird die Leerlaufspannung und der Innenwiderstand von realen Spannungsquellen bestimmt.

## 2 Theorie

Anders als bei idealen Spannungsquellen, die sich dadurch auszeichnen, ihre eingestellte Spannung  $U_{\text{Soll}}$  an den Klemmen trotz Belastung ohne Verluste aufrecht erhalten zu können, sinkt bei realen Spannungsquellen die Klemmenspannung  $U_K$ , sobald Verbraucher elektrische Leistung beziehen. Die Spannung, die an den Klemmen anliegt, ohne dass Verbraucher angeschlossen sind, wird als Leerlaufspannung  $U_0$  bezeichnet und fällt mit  $U_{\text{Soll}}$  einer idealen Spannungsquelle zusammen.

Zur Beschreibung des Spannungsverlustes wird ein Innenwiderstand  $R_i$  innerhalb der Spannungsquelle eingeführt, der fester Bestandteil einer realen Spannungsquelle ist. Die



**Abbildung 1:** Skizze eines einfachen Schaltkreises mit Ersatzschaltbild der Spannungsquelle. [1]

reale Spannungsquelle wird der Abbildung 1 gemäß als ideale Spannungsquelle mit  $U_{\text{Soll}}$  und dem Innenwiderstand  $R_i$  aufgefasst. Die Klemmenspannung ist in Reihe nach Spannungsquelle und Innenwiderstand abgreifbar. Mit der zweiten Kirchhoffschen Regel gilt für die Klemmenspannung

$$U_k = U_0 - R_i \cdot I \quad (1)$$

Die Annahme des Innenwiderstandes hat zur Folge, dass nicht beliebig hohe Leistungen von dem Verbraucher  $R_a$  aufgenommen und ebenfalls nicht beliebig hohe Leistungen von

dem Spannungsgerät geliefert werden können. Die an den Verbraucher  $R_a$  abgegebene Leistung

$$N(R_a) = I^2 \cdot R_a = U_0^2 \frac{R_i}{(R_i + R_a)^2} \quad (2)$$

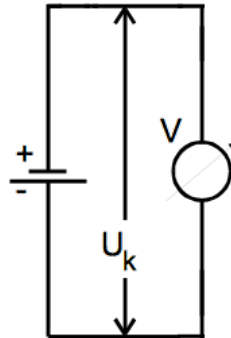
lässt eine Leistungsoptimierung in  $R_a$  zu. Damit existiert für eine gegebene Spannungsquelle mit bekanntem Innenwiderstand  $R_i$  ein optimaler Gesamtwiderstand  $R_{a, \text{optimal}} = R_i$  des Verbrauchers, bei welchem die Leistung maximal wird.

### 3 Durchführung

Für die Bestimmung der Leerlaufspannung und der Innenwiderstände wird ein hochohmiges Spannungsmessgerät benutzt, sodass der Spannungsverlust und damit Messunsicherheiten durch das Messgerät klein sind. Der Innenwiderstand des Messgerätes beträgt  $10 \text{ M}\Omega$ . Zur Bestimmung der Leerlaufspannung und des Innenwiderstandes werden zwei verschiedene Spannungsquellen benutzt.

#### 3.1 Messung an einer Monozelle

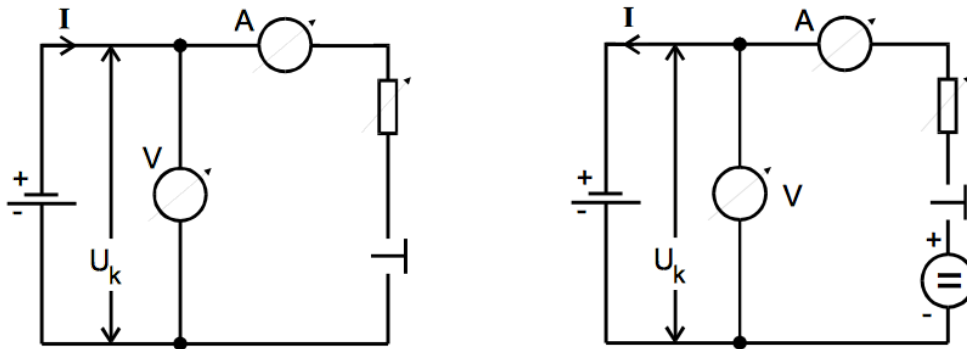
Die Leerlaufspannung wird mit einem Voltmeter bestimmt. Hierzu wird zwischen Spannungsquelle und Messgerät kein Verbraucher geschaltet.



**Abbildung 2:** Schaltung zur Messung der Leerlaufspannung.[1]

Anschließend wird die Spannung an den Klemmen  $U_k$  sowie der Strom  $I$  durch einen Verbraucher variablen Widerstandes  $R$  mit Volt- bzw. Amperemetern gemessen. Die Schaltung wird in Abbildung 3a gezeigt. Nach Schließen des Stromkreises werden die Werte von den Messgeräten abgelesen, der Widerstand  $R$  variiert und die Messung wiederholt, sodass insgesamt 10 Messwertpaare aufgenommen werden. Der Widerstand ist von  $0\text{--}50 \Omega$  zu wählen. Die Schaltung wird im Weiteren durch eine weitere, ideale Spannungsquelle erweitert. Diese wird gemäß Schaltskizze 3b so eingebaut, dass der Strom in umgekehrter Richtung als in Schaltung 3a fließt. Analog werden nach Einschwingen der

Messgeräte die Klemmenspannung  $U_k$  und der Strom  $I$  aufgenommen, der Widerstand  $R$  variiert und der Vorgang wiederholt, bis 10 Messwertpaare aufgenommen werden.



(a) Schaltung ohne Gegenspannungsmethode. (b) Schaltung mit Gegenspannungsmethode.

**Abbildung 3:** Schaltung zur Messung des Innenwiderstandes.[1]

### 3.2 Messung an einem Funktionsgenerator

Ähnlich zu 3.1 wird die Spannungsquelle mit einem ohmschen Verbraucher verbunden, wobei parallel zur Spannungsquelle ein Voltmeter und in Reihe zum Verbraucher ein Amperemeter geschaltet wird. Die Aufbauskitze ist 3a ähnlich. Für die erste Messung wird der Funktionsgenerator auf Sinusschwingung eingestellt, der Widerstand ist von  $0,5\text{-}5\text{ k}\Omega$  zu wählen. Analog zu 3.1 werden die Klemmenspannung  $U_k$  und der Strom  $I$  aufgenommen, der Widerstand  $R$  variiert und der Vorgang wiederholt, bis 10 Messwertpaare aufgenommen werden. Der Funktionsgenerator wird auf Rechteckspannung umgestellt und das Verfahren wiederholt, wobei der Widerstand von  $50\text{-}250\ \Omega$  gewählt wird.

## 4 Auswertung

### 4.1 Bestimmung von Leerlaufspannung und Innenwiderstand

In Tabelle 1 sind Klemmenspannung  $U_k$  und Belastungsstrom  $I$  der Monozelle bei Gleich- und Gegenspannung, gemessen bei variablem Belastungswiderstand  $R_a$ , aufgetragen. Tabelle 2 enthält die Daten der Messung mit Rechteck- und Sinusspannungsquelle.

Monozelle		Monozelle mit Gegenspannung	
$I / A$	$U_k / V$	$I / A$	$U_k / V$
0,050	1,20	0,030	1,80
0,060	1,15	0,040	1,90
0,070	1,10	0,090	2,10
0,080	1,05	0,110	2,20
0,090	1,00	0,120	2,30
0,110	0,90	0,150	2,50
0,130	0,80	0,180	2,60
0,150	0,70	0,230	2,90
0,200	0,40	0,270	3,10
0,260	0,10	0,310	3,30

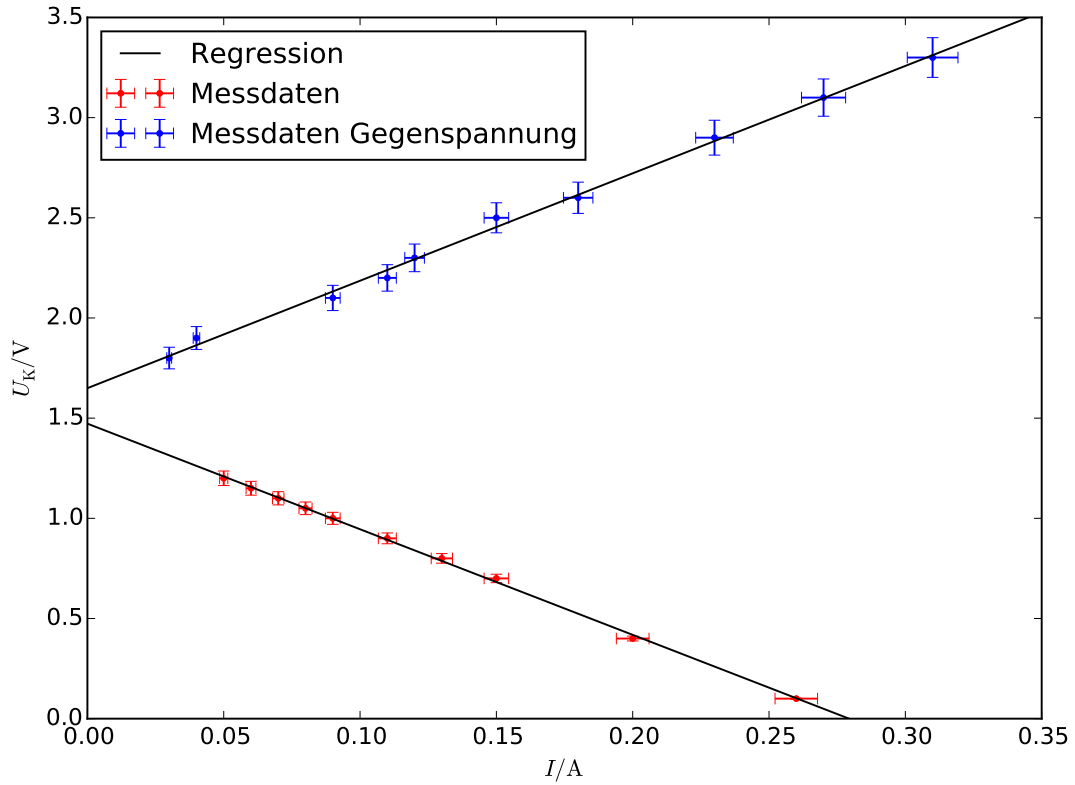
**Tabelle 1:** Messdaten der Monozelle mit und ohne Gegenspannung.

Rechteckspannung		Sinusspannung	
$I_{\text{eff}} / \text{mA}$	$U_k / V$	$I_{\text{eff}} / \text{mA}$	$U_k / V$
1,0	260	0,72	0,20
1,1	255	0,38	0,25
1,2	245	0,36	0,27
1,4	235	0,32	0,30
1,6	230	0,27	0,33
1,9	215	0,22	0,35
2,2	190	0,14	0,40
2,7	160	0,11	0,42
3,5	115	0,10	0,44
4,1	80	0,09	0,45

**Tabelle 2:** Messdaten mit Rechteck- und Sinusspannung vom RC-Generator.

Werden die Messewerte der Spannung  $U_k$  gegen die Stromstärke  $I$  aufgetragen und eine lineare Ausgleichsrechnung ausgeführt, können Innenwiderstand  $R_i$  und Leerlaufspannung  $U_0$  der verwendeten Spannungsquellen bestimmt werden. Die verwendeten Volt-

und Amperemeter besitzen eine in der weiteren Auswertung berücksichtigte Unsicherheit von 3%. Abbildung 4 zeigt Messwerte mit Fehlerbalken und Regressionsgeraden der Messung an der Monozelle mit Gleich- und Gegenspannung; Abbildung 5 und 6 stellen Messpunkte und Ausgleichsgeraden der Rechteck- und Sinusspannung dar.



**Abbildung 4:** Messwerte und Regression der Messung an der Monozelle mit und ohne Gegenspannung.

Es ergeben sich die Geradengleichungen mit berechneten Koeffizienten

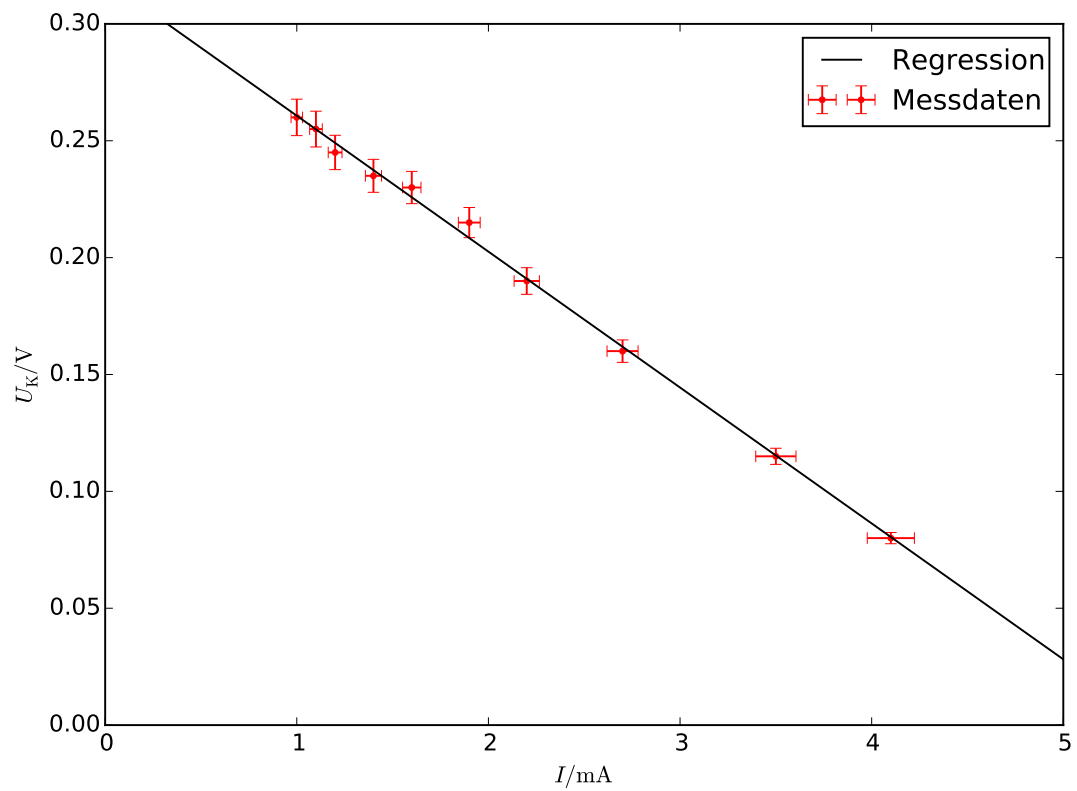
$$U_k = (-5.27 \pm 0.06) \Omega \cdot I + (1.473 \pm 0.008) \text{ V} \quad \text{Monozelle,} \quad (3)$$

$$U_k = (5.36 \pm 0.10) \Omega \cdot I + (1.650 \pm 0.018) \text{ V} \quad \text{Gegenspannung,} \quad (4)$$

$$U_k = (-58 \pm 1) \Omega \cdot I + (0.3189 \pm 0.0024) \text{ V} \quad \text{Rechteckspannung,} \quad (5)$$

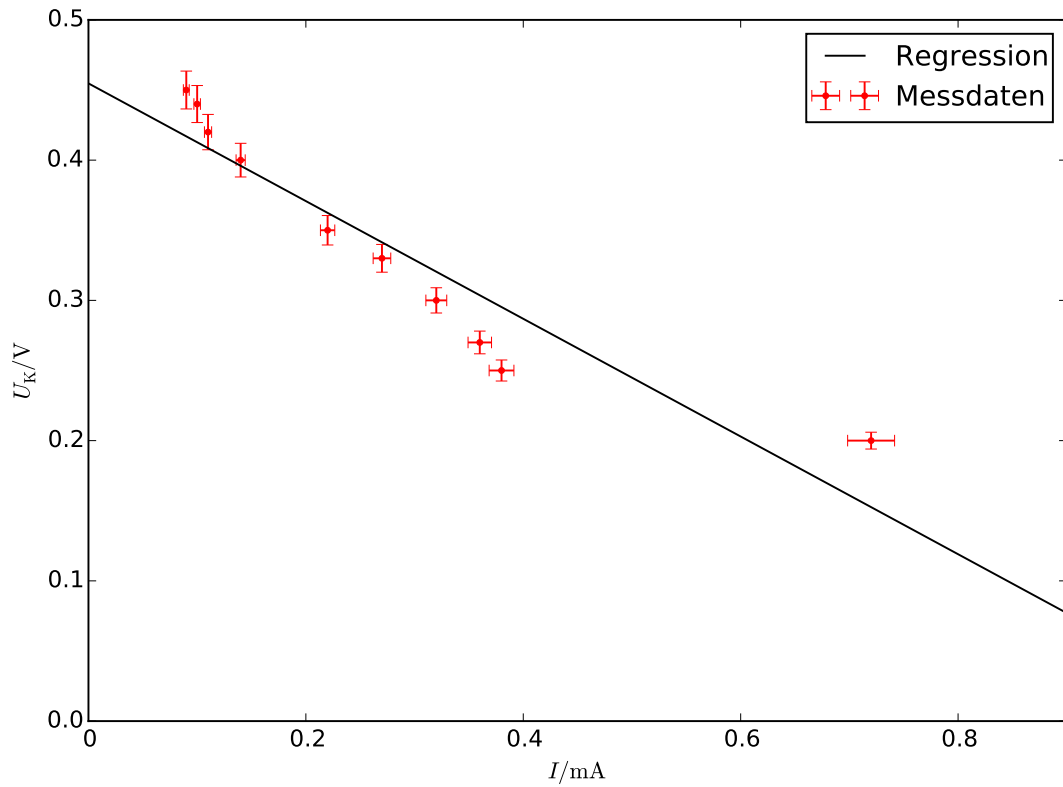
$$U_k = (-420 \pm 60) \Omega \cdot I + (0.455 \pm 0.018) \text{ V} \quad \text{Sinusspannung.} \quad (6)$$

Daraus können nach Gleichung (1) die in Tabelle 3 aufgetragenen Innenwiderstände und Leerlaufspannungen abgelesen werden. Dabei ist zu beachten, dass wegen der verwendeten Gegenspannung während der Messung an der Monozelle der Strom ein negatives



**Abbildung 5:** Messwerte und Regression der Messung mit Rechteckspannungsquelle.

Vorzeichen aufweist, da dieser in die entgegengesetzte Richtung fließt. Aufgrund der zweifachen Messung mit der Monozelle kann für diese das Mittel der Werte gebildet werden.



**Abbildung 6:** Messwerte und Regression bei Messung mit Sinusspannungsquelle.

Die direkte Messung über das Voltmeter ergibt eine Leerlaufspannung  $U_0 = (1.5 \pm 0.05) \text{ V}$ , welche nur geringfügig vom Mittelwert in Tabelle 3 abweicht. Bei einem endlichen Eingangswiderstand  $R_V = 10 \text{ M}\Omega$  des Voltmeters ergibt sich der systematische Fehler von  $U_0 = (8.2992 \cdot 10^{-7}) \text{ V}$  durch

$$\Delta U_0 = \frac{R_i U_k}{R_V}. \quad (7)$$

Bei dem Aufbau der Schaltung muss sorgsam darauf geachtet werden, dass das Voltmeter vor das Amperemeter geschaltet wird, damit tatsächlich die Spannung  $U_k$  gemessen werden kann. Geschieht dies nicht, beeinflusst der Innenwiderstand des Amperemeters die Messung.



Spannungsquelle	$R_i / \Omega$	$U_0 / \text{V}$
Monozelle	$5.27 \pm 0.06$	$1.473 \pm 0.008$
Gegenspannung	$5.4 \pm 0.1$	$1.65 \pm 0.02$
Mittelwert	$5.32 \pm 0.08$	$1.56 \pm 0.01$
Rechteckspannung	$58 \pm 1$	$0.319 \pm 0.003$
Sinusspannung	$420 \pm 60$	$0.46 \pm 0.02$

**Tabelle 3:** Ergebnisse für Innenwiderstände und Leerlaufspannungen.

## 4.2 Leistung am Belastungswiderstand

Es wird die am Belastungswiderstand  $R_a = \frac{U_k}{I}$  umgesetzte Leistung  $N$  der Monozelle ohne Gegenspannung betrachtet. Werden die Größen gegeneinander aufgetragen, ergibt sich der in Abbildung 7 gezeigte Verlauf. Mit dem Innenwiderstand  $R_i$  sowie der Leerlaufspannung  $U_0$  aus Tabelle 3 kann nach Gleichung (2) eine Theoriekurve errechnet werden.

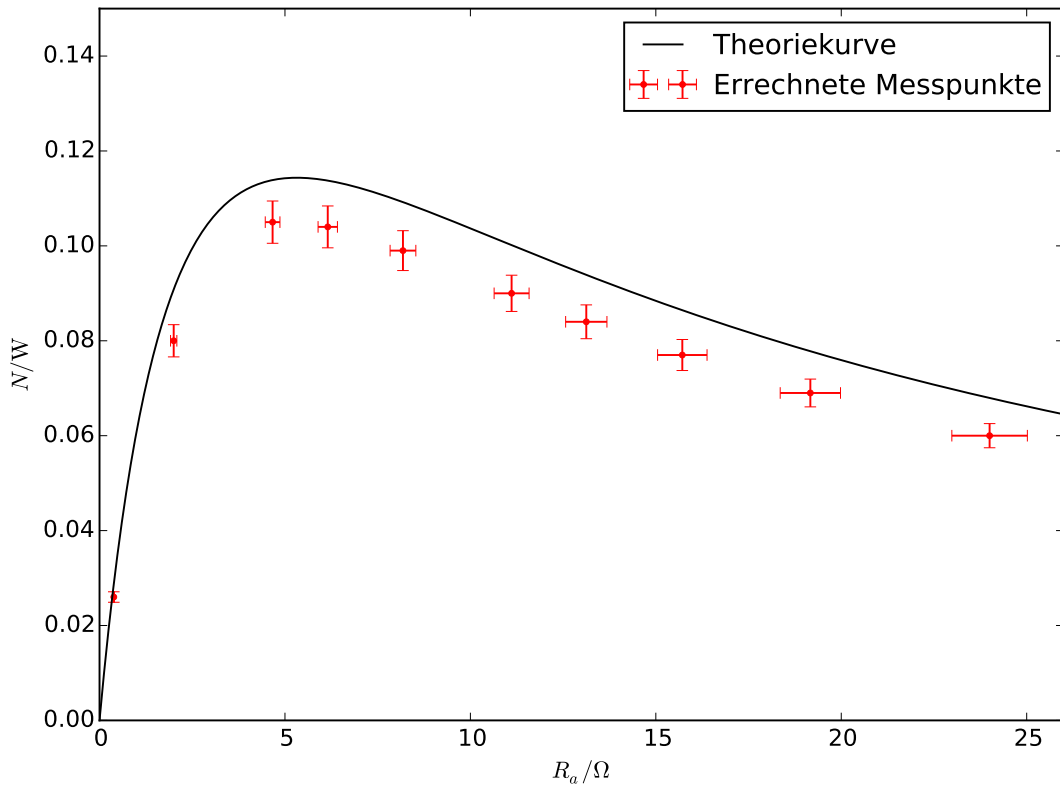
Mit den fehlerbehafteten Größen  $U_k$  und  $I$  ergeben sich mit der Gausschen Fehlerfortpflanzung die Fehler

$$\Delta R_a = \frac{U_k}{I} \sqrt{\left(\frac{\Delta U_k}{U_k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2} \quad (8)$$

und

$$\Delta N = U_k I \sqrt{\left(\frac{\Delta U_k}{U_k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I}\right)^2}. \quad (9)$$

Alle Messpunkte liegen trotz abgebildeter Standardabweichung in ungefähr gleicher Entfernung unter der Theoriekurve. Daraus kann auf einen systematischen Fehler geschlossen werden.



**Abbildung 7:** Messwerte mit Fehlerbalken und Theoriekurve der am Belastungswiderstand abfallenden Leistung.

## 5 Diskussion

Die Leerlaufspannung  $U_0$  der Monozelle wurde auf zwei verschiedenen Weisen bestimmt. Die direkte Messung  $U_{0,\text{Gl.}} = (1.473 \pm 0.008) \text{ V}$  mit einem relativen Fehler von 0.5% ist nicht wesentlich präziser gegenüber dem Wert mit Gegenspannung  $U_{0,\text{UG}} = (1.65 \pm 0.02) \text{ V}$  mit einem Fehler von 1.2%. Die Innenwiderstände  $R_{i,\text{Gl.}} = (5.27 \pm 0.06) \Omega$  und  $R_{i,\text{UG}} = (5.4 \pm 0.1) \Omega$  weisen relative Fehler von 1.2% und 1.9% auf. Sowohl die Leerlaufspannung, als auch der Innenwiderstand kann anhand beider Methoden sehr genau bestimmt werden. Gleiches gilt für die Werte, welche mit der Rechteckspannung bestimmt wurden. Diese weisen relative Fehler von 0.94% und 1.72% für Leerlaufspannung und Innenwiderstand auf. Die Messung mit Sinusspannungsquelle ist mit Fehlern von 4.35% und 14.3% etwas ungenauer, liegt aber noch immer im vertretbaren Rahmen.

Die direkte Messung von  $U_0$  über das Voltmeter mit endlichem Innenwiderstand liefert einen systematischen Fehler von  $8.2992 \cdot 10^{-7} \text{ V}$ , der vernachlässigbar gering ist.

Das Prinzip der Leistungsanpassung besagt, dass die am Belastungswiderstand abfal-

lende Leistung maximal wird, wenn Außen- und Innenwiderstand den gleichen Wert aufweisen. Der Vergleich vom Mittelwert  $R_i = (5,32 \pm 0,08) \Omega$  mit dem Maximum der Theoriekurve in Abbildung 7, welches ungefähr bei  $R_a \approx 5 \Omega$  liegt, bestätigt die Aussage.

Es zeigt sich, dass mit diesem einfachen Messverfahren alle betrachteten Werte ziemlich genau bestimmt werden können.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch V301: Leerlaufspannung und Innenwiderstand von Spannungsquellen*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V301.pdf> (besucht am 01.12.2014).
- [2] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/90/1>. Version 1.3.1.
- [3] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001. URL: <http://www.scipy.org/>. Version 0.14.0.
- [4] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>. Version 2.4.5.
- [5] Travis E. Oliphant. „Python for Scientific Computing“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/10/1>. Version 1.8.1.
- [6] The GIMP Team. *GIMP: GNU Image Manipulation Program*. URL: <http://www.gimp.org/>. Version 2.8.10.

Die verwendeten Plots wurden mit *matplotlib*[2] und die Grafiken mit *GIMP*[6] erstellt sowie die Berechnungen mit *Python-Python-Numpy*, [5], *Python-Scipy*[3] und *Python-uncertainties*[4] durchgeführt.