

Versuch 204

## **Wärmeleitfähigkeit von Metallen**

Helena Nawrath  
helena.nawrath@tu-dortmund.de

Carl Arne Thomann  
arnethomann@me.com

Durchführung: 4. November 2014      Abgabe: 11. November 2014

TU Dortmund – Fakultät Physik

## 1 Ziel

Ziel des Versuches ist, die Wärmeleitfähigkeit von den Metallen Messing, Edelstahl und Aluminium zu bestimmen. Dafür werden diese über ein Peltier-Element erhitzt und die Temperatur der Proben an zwei verschiedenen Orten gemessen.

## 2 Theorie

Ist in einem abgeschlossenen System ein Temperaturunterschied vorhanden findet Wärmetransport statt, um ein Temperaturgleichgewicht zu erreichen. Dies kann durch Konvektion, Wärmestrahlung oder Wärmeleitung geschehen. Bei Konvektion vermischen sich Gase oder Flüssigkeiten mit unterschiedlichen warmen Temperaturbereichen; durch Wärmestrahlung gibt ein Körper oder ein Fluid seine Wärme an die Umgebung ab.

Die in diesem Versuch betrachtete Wärmeleitung in festen Körpern geschieht über freie Elektronen und Phononen - quantisierte Schwingungen innerhalb der Gitterstruktur des Metalls. Dabei fließt eine Wärmemenge

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt \quad (1)$$

durch den Festkörper mit Querschnittsfläche  $A$  von hoher zu niedriger Temperatur. Die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  ist eine Materialkonstante. Mit (1) und der Wärmestromdichte  $j_w$ , welche den Wärmestrom bezüglich der Querschnittsfläche  $A$  darstellt,

$$j_w = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2)$$

kann mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3)$$

hergeleitet werden. Diese beschreibt die räumliche und zeitliche Entwicklung der Temperaturverteilung. Dabei ist

$$\sigma_T = \frac{\kappa}{\rho c} \quad (4)$$

die Temperaturleitfähigkeit, welche die Schnelligkeit angibt, mit der der Temperaturausgleich passiert. Sie wird bestimmt durch die Dichte  $\rho$  und die spezifische Wärmekapazität  $c$ . Dabei beschreibt  $c$  die Energiemenge, die benötigt wird, um 1kg des untersuchten Materials um 1K zu erwärmen

Werden Körper durch periodischen Temperaturwechsel geheizt oder -kühlt breiten sich in seinem Innern Temperaturwellen der Form

$$T(x, t) = T_{\max} \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega\rho c}{2\kappa}} x\right) \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\rho c}{2\kappa}} x\right) \quad (5)$$

aus, was eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (3) für lange Probenstäbe darstellt. Diese setzt sich zusammen aus der Amplitude  $T_{\max}$ , der Wellenzahl

$$k = \frac{\omega \rho c}{2\kappa}, \quad (6)$$

einem Schwingterm und einer Exponentialfunktion mit negativem Exponenten, der für die Dämpfung verantwortlich ist.

Über die Dispersionsbeziehung, die Phasengeschwindigkeit  $v$  und die Frequenz  $\omega$  miteinander zu

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}}} = \sqrt{\frac{2\kappa \omega}{c \rho}} \quad (7)$$

verknüpft, erhält man mit (6) und den Beziehungen  $\omega = \frac{2\pi}{\tilde{T}}$  – der Winkelgeschwindigkeit, und  $\phi = 2\pi \Delta t \frac{1}{\tilde{T}}$  – der Phase mit der Periodendauer  $\tilde{T}$  ein Gleichung für die Wärmeleitfähigkeit

$$\kappa = \frac{c \rho \Delta x^2}{2 \Delta t \ln \left( \frac{A_n}{A_f} \right)}. \quad (8)$$

$\frac{A_n}{A_f}$  ist das Verhältnis der Wellenamplituden, welche an zwei Orten  $x_1$  und  $x_2$  im Abstand  $\Delta x = x_2 - x_1$  gemessen werden und den Gangunterschied  $\Delta t$  aufweisen. Nun kann  $\kappa$  über den zeitlichen Verlauf der Temperatur bestimmt werden.

### 3 Durchführung

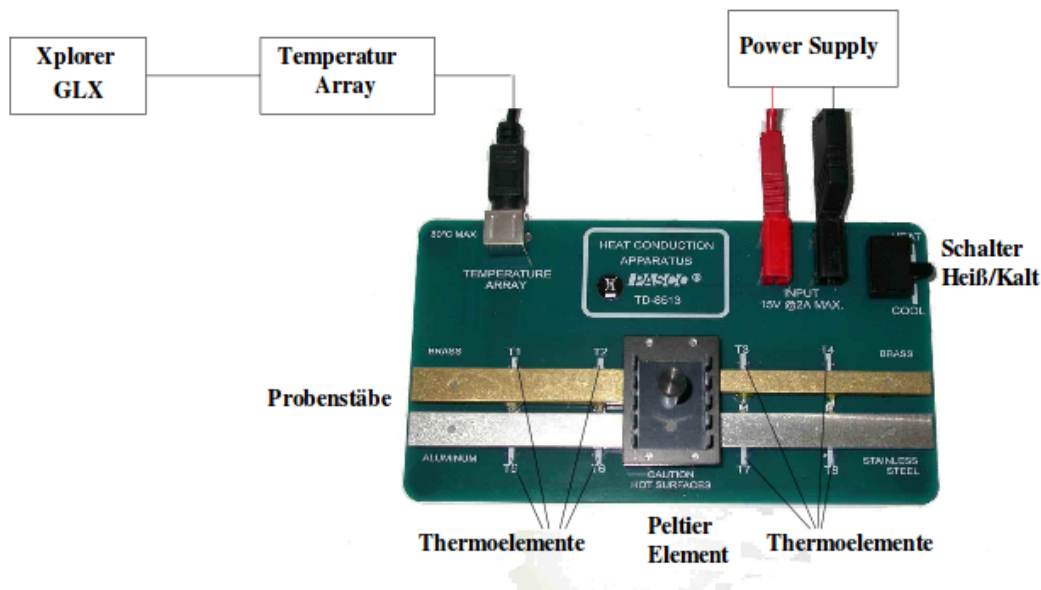


Abbildung 1: Aufbau der Platine.

Um den zeitlichen Temperaturverlauf von vier Metallproben bestimmen zu können, wurden diese auf der in Abbildung 1 gezeigten Platine angebracht. Mit dem mittig aufgesetzten Peltier-Element, bestehend aus zwei Halbleitern unterschiedlichen Energieniveaus, können die Stäbe durch Ausnutzen des Peltier-Effekts simultan geheizt oder gekühlt werden. Betrieben wird das Element durch eine angeschlossene Spannungsquelle. An jedem Stab befinden sich zwei Thermoelemente, bestehend aus zwei metallischen Leitern, die an den Orten  $x_1$  und  $x_2$  die Temperaturen der Stäbe aufzeichnen. Dabei ruft die Temperaturdifferenz - gegensätzlich zum Peltier-Element - einen Spannungsunterschied hervor, der gemessen wird. Diese Daten werden über ein Temperatur-Array an den GLX-Datenlogger weitergegeben, dort aufgezeichnet und auf einen USB-Stick exportiert.

Vor Messbeginn werden sowohl die korrekte Verkabelung, als auch die Einstellungen des Datenloggers überprüft; alle acht Thermoelemente  $T_1 - T_8$  sollten eine Temperatur aufzeichnen.

#### 3.1 Statische Messung

Das Peltier-Element wird mit einer Spannung  $U_P = 5V$  bei maximalem Strom  $I$  betrieben. Im Datenlogger wird eine Abtastzeit von  $\Delta t = 5s$  eingestellt. Nachdem die Isolierung auf die Probestäbe gelegt wurde, um einen Wärmeaustausch mit der Umgebung zu vermeiden, und der Schalter umgelegt ist, beginnt das Peltier-Element zu heizen. Der Datenlogger zeichnet alle 5 Sekunden die Temperaturen  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$  der Thermoelemente auf. Bis Thermoelement  $T_7$  eine Temperatur von  $T_7 \approx 43^\circ C$  anzeigt.

Anschließend werden die Isolierungen abgenommen, das Peltier-Element zum Kühlen der Stäbe auf den Modus "cool" gestellt, die aufgenommenen Daten zur Auswertung auf einen USB-Stick übertragen und die für die Auswertung benötigten Diagramme des Temperaturverlaufs ausgedruckt.

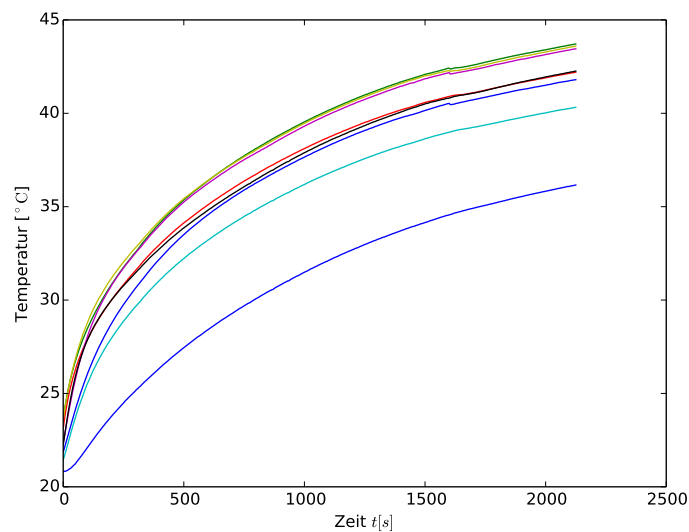
### 3.2 Dynamische Messung

Nachdem die Stäbe auf eine Temperatur von  $T < 30^\circ\text{C}$  gekühlt wurden, werden die Isolierungen erneut aufgelegt und das Peltier-Element beginnt bei einer Spannung von  $U_P = 8\text{V}$  zu heizen. Die Thermoelemente zeichnen nun mit  $\Delta t = 2\text{s}$  den Temperaturverlauf auf.

Nach  $\tilde{t} = 40\text{s}$  wird das Peltier-Element umgeschaltet und die Stäbe für weitere 40 s gekühlt. Dieser Vorgang wird wiederholt, bis zehn Perioden von  $T = 80\text{s}$  Dauer aufgezeichnet wurden. Anschließend werden die Stäbe analog zur statischen Messung wieder heruntergekühlt. Schließlich wird die dynamische Methode noch einmal wiederholt, wobei die Periodendauer nun  $T = 200\text{s}$  beträgt. Erneut werden die Messdaten auf einen USB-Stick übertragen und einige Temperaturverläufe graphisch dargestellt und ausgedruckt.

## 4 Auswertung

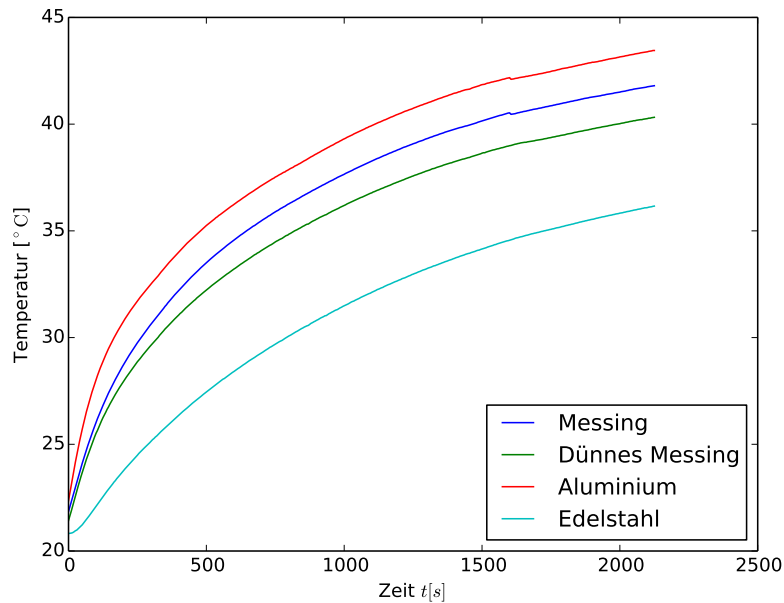
### 4.1 Statische Messung



**Abbildung 2:** Alle gemessenen Temperaturen.

Alle Temperaturverläufe werden in Diagramm 2 gleichzeitig aufgetragen. Es zeigt, dass der allgemeine Verlauf der Temperatur unabhängig von dem Material und der Entfernung

der Messpunkter ist. Die Temperaturkurven zeigen jeweils beschränktes Wachstum. Im



**Abbildung 3:** Verlauf der Temperaturen an den entfernten Messpunkten.

Diagramm 3 wird der Temperaturverlauf bei den entfernten Messpunkten T1, T4, T5, T8 (vgl. Abbildung 1) gezeigt. Die Kurve von Aluminium hat zu Beginn des Experiments den stärksten Anstieg und liegt über den Kurven der anderen Metallstäbe. Beide Kurven der Messingstäbe haben vergleichbare Steigungen; die Kurve des größeren Messingstabes liegt dabei über der des kleineren Stabes und hat am Endpunkt der Messung zu dieser eine Temperaturdifferenz von etwa 1°C. Die Kurve von Edelstahl ist deutlich von den Kurven der anderen Metallstäbe entfernt und weist die geringste Steigung auf. Zum Endpunkt der Messung liegt zwischen den Messpunkten von Aluminium und Edelstahl eine maximale Temperaturdifferenz von etwa 7°C vor.

Cirka 700 Sekunden nach Beginn des Erwärmens liegen an den entfernten Messpunkten die Temperaturen nach Tabelle 1 vor. Die höchste Temperatur hat der Aluminiumstab, die geringste Temperatur weist Edelstahl auf.

Edelstahl	Messing,dünn	Messing	Aluminium
29°C	34°C	35.4°C	37°C

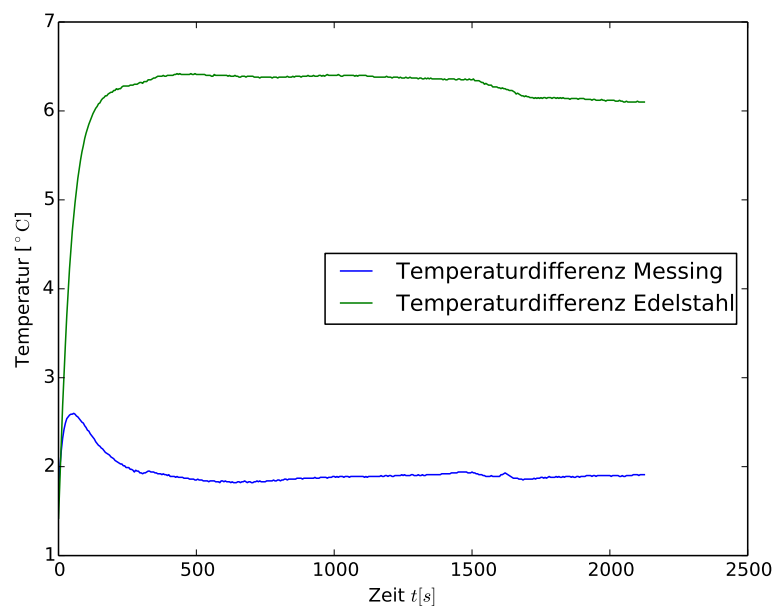
**Tabelle 1:** Temperaturen an entfernten Messpunkten bei  $t = 700$ s.

Mit (1) kann der Wärmestrom  $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$  innerhalb der Stäbe bestimmt werden. Dabei ist  $\kappa$  der Literaturwert der Wärmeleitfähigkeit des betrachteten Metalls und  $A$  die Querschnittsfläche (vgl. hierzu [V204]) des jeweiligen Stabes;  $\frac{\partial T}{\partial x}$  ist der Temperaturgradient

innerhalb des Stabes und wird hier mit  $\frac{\Delta T}{\Delta x}$  und  $\Delta x$  genähert. Es ergibt sich die Wärmemenge  $dQ$  zu fünf unterschiedlichen Zeiten.

Stab	50 s	500 s	1000 s	1500 s	2000 s
Messing 1	−0.4973 W	−0.3552 W	−0.3629 W	−0.3725 W	−0.3648 W
Messing 2	−0.2867 W	−0.2128 W	−0.2150 W	−0.2173 W	−0.2106 W
Aluminium	−0.4174 W	−0.0677 W	−0.0564 W	−0.0564 W	−0.0489 W
Edelstahl	−0.1116 W	−0.1538 W	−0.1536 W	−0.1524 W	−0.1469 W

**Tabelle 2:** Wärmemengen  $dQ$  der Probenstäbe zu fünf unterschiedlichen Zeiten.



**Abbildung 4:** Temperaturdifferenz der Messpunkte von Messing und Edelstahl.

Im Diagramm 4 ist die Temperaturdifferenz innerhalb eines Stabes für den Edelstahl- und für den Messingstab aufgetragen. Es wird deutlich, dass die Differenzkurve für Edelstahl näherungsweise ein beschränktes Wachstum beschreibt und kurz nach Beginn der Erwärmung einen Grenzwert erreicht, der bei etwa 6.25°C liegt. Die Differenzkurve des Messingstabes steigt zu Beginn der Messung an und erreicht kurz nach Beginn mit 2.6°C ihr globales Maximum. Nach dem Maximum nimmt die Differenz exponentiell ab und erreicht einen Grenzwert von etwa 2°C. Der Vergleich der Kurven zeigt, dass der Messingstab gegenüber dem Edelstahlstab den Grenzwert der Temperaturdifferenz schneller erreicht.

## 4.2 Dynamische Messung

Die Diagramme 5 zeigen bei periodischer Anregung einer Temperaturwelle mit einer Periodendauer von 80 Sekunden den Temperaturverlauf an den jeweiligen Enden. Zusätzlich zum Verlauf sind sowohl die Extrema, als auch deren Amplitudenfunktion eingezeichnet. Analoges Vorgehen mit den Werten für den Aluminiumstab ergeben die Diagramme 6 und 8. Die Messwerte ab dem neunten lokalen Maximum werden von der Auswertung aufgrund offensichtlicher Abweichungen ausgeschlossen.

Durch Eichung des Temperaturverlaufs mit eingezeichneter Amplitudenfunktion durch bilden der Differenz zwischen Temperaturverlauf und Amplitudenfunktion, ergeben sich nahezu gleichmäßige Schwingungen, die in Diagramm 7 und 8 sichtbar sind. Diese werden im Folgenden als Grundschrwingungen der Temperatur bezeichnet. In diesen Diagrammen ist zu erkennen, dass sich für eine gleichmäßige Schwingung jeweils die oberen Amplitudenfunktionen zum Eichen eignen.

Für die Messung der Temperaturwellen bei einer Periodendauer von 200 Sekunden wird vollkommen analog vorgegangen. Die Diagramme 9, 10 und 13 zeigen die Temperaturwellen der jeweiligen Metalle an den angegebenen Punkten. Zusätzlich zum Verlauf sind die Extrema markiert und deren Amplitudenfunktionen eingezeichnet.

Eicht man den Temperaturverlauf erneut, so ergeben sich die Grundschrwingungen in den begleitenden Diagrammen 11, 12 und 13. Anhand dieser Diagramme wird ersichtlich, dass sich jeweils die oberen Amplitudenfunktionen dazu eignen, den Temperaturverlauf auf eine gleichmäßige Grundschrwingung zu bringen.

Durch diese Grundschrwingungskurven können die Amplituden  $A_{\text{nah}}$  und  $A_{\text{fern}}$  der Schwingung, sowie die Phasendifferenz  $\Delta t$  zwischen den Messpunkten bestimmt werden; dabei wird der Teil der Grundschrwingung vernachlässigt, der durch offensichtliche Verfahrensfehler mangelhaft ist (vgl. 5,6). Für die Amplitudenbestimmung werden in einem brauchbaren Abschnitt in der Grundschrwingung Extremwerte bestimmt und die Mittelwerte der y-Koordinaten aller Maxima beziehungsweise Minima errechnet. Mit diesen Mittelwerten ist eine hinreichend genaue Beschreibung der Amplitude  $A$  möglich. Es gilt

$$A = \frac{\bar{y}_{\text{Max}} - \bar{y}_{\text{min}}}{2}. \quad (9)$$

Für die Bestimmung der Phasendifferenz werden ausgezeichnete Punkte der Schwingung, hier Maxima, bestimmt und die Differenzen der x-Werte gemittelt. Es gilt

$$\Delta \tilde{t} = x_{\text{Max}, n+1} - x_{\text{Max}, n}. \quad (10)$$

Der Mittelwert dieser Größe ist Maß für die Phasendifferenz  $\Delta t$ .



Es ergeben sich die in Tabelle 3 aufgetragenen Werte.

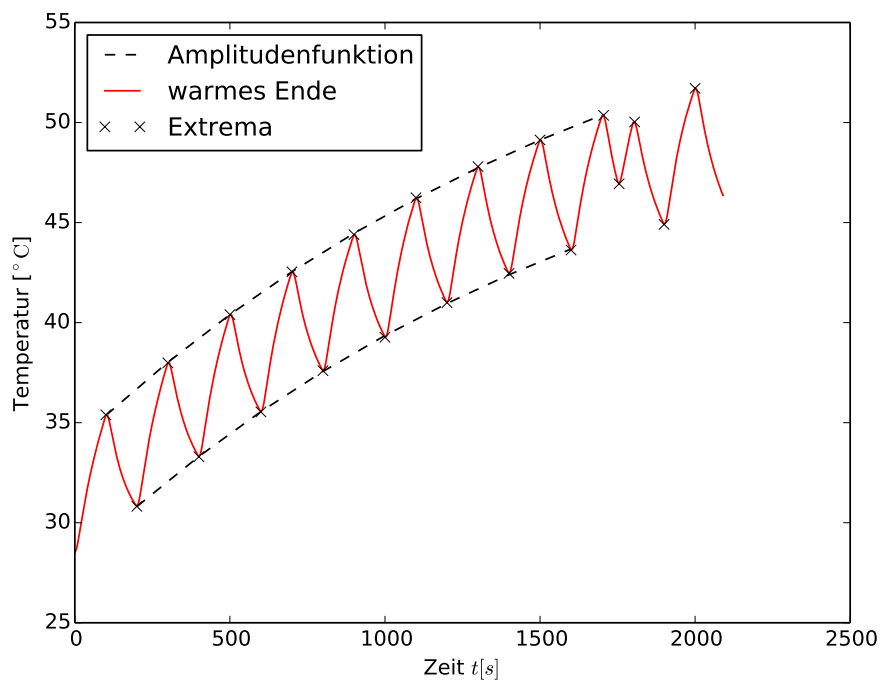
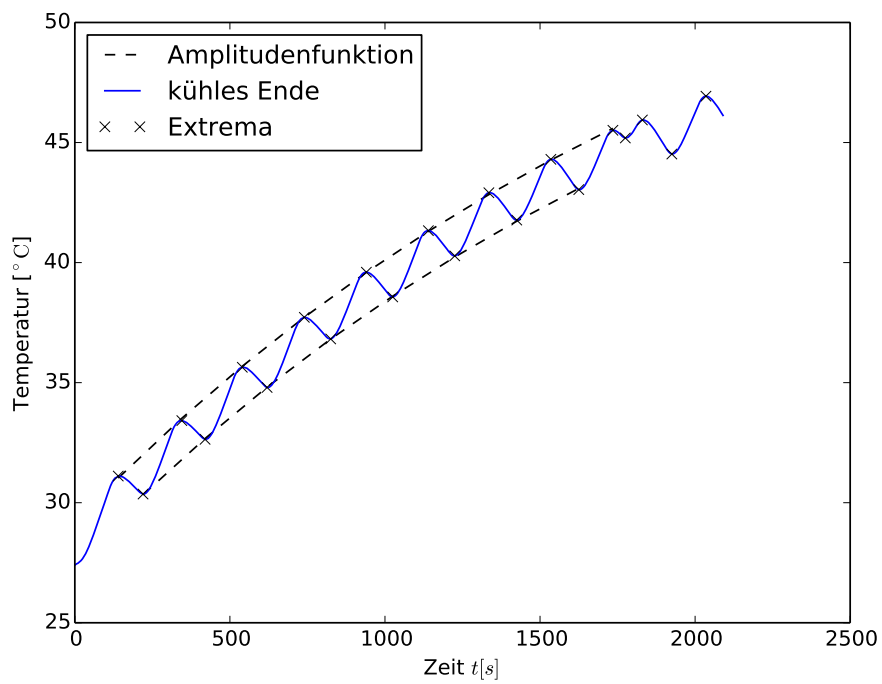
Material	$A_{\text{nah}} / ^\circ\text{C}$	$A_{\text{fern}} / ^\circ\text{C}$	$\Delta t / \text{s}$	$\rho / \text{kg/m}^3$	$c / \text{J/(m K)}$
Messing P2	3.1336	0.9034	25.0	8520	385
Aluminium P2	3.0011	1.5856	18.75	2800	830
Edelstahl P3	5.477	0.715	116.875	8000	400

**Tabelle 3:** Amplituden der Proben für die 80 s – Periode P2 und die 200 s – Periode P3.

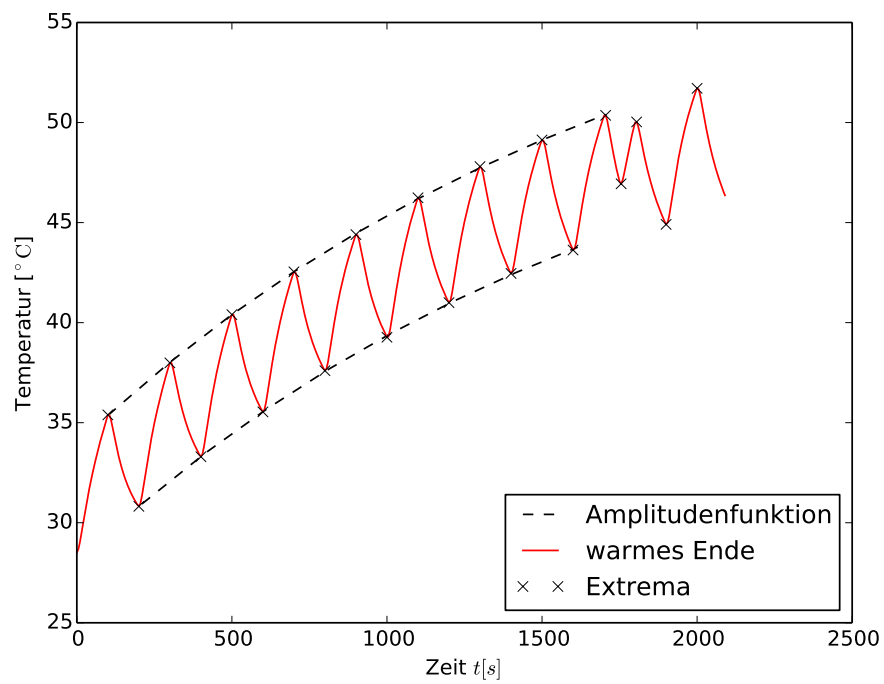
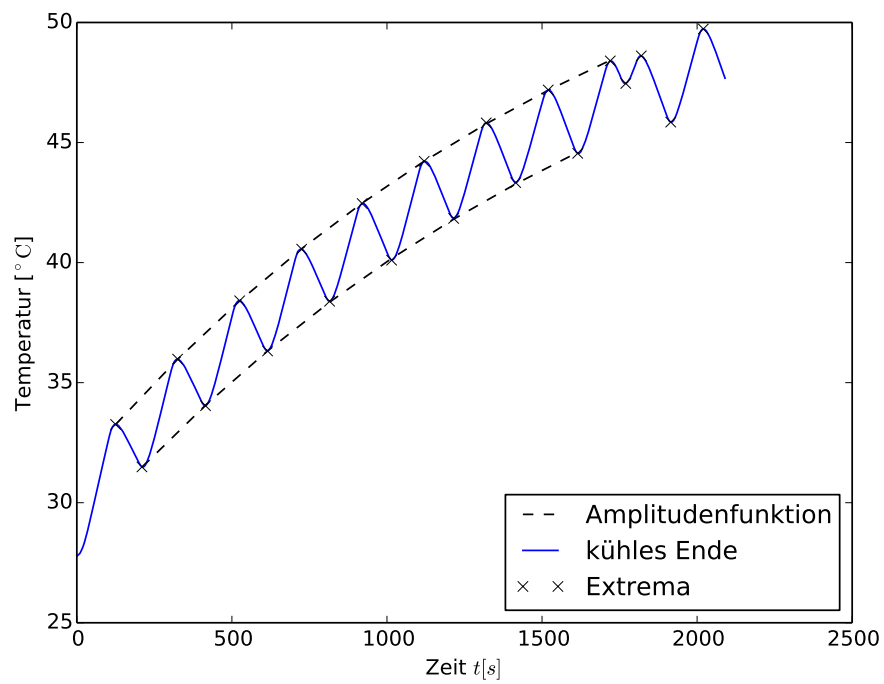
Mithilfe der Amplituden  $A_{\text{nah}}$  und  $A_{\text{fern}}$ , der Phasendifferenz  $\Delta t$ , der Geometrie und Beschaffenheit des Stabes kann mit der Gleichung (8) die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  bestimmt werden.

Wärmeleitfähigkeit / $\text{W/(m K)}$			
	Messing M2	Aluminium M2	Edelstahl M3
Messung	47.4702	87.4175	6.0504
Literatur	120	236	15
Abweichung	60.44%	62.96%	59.6639%

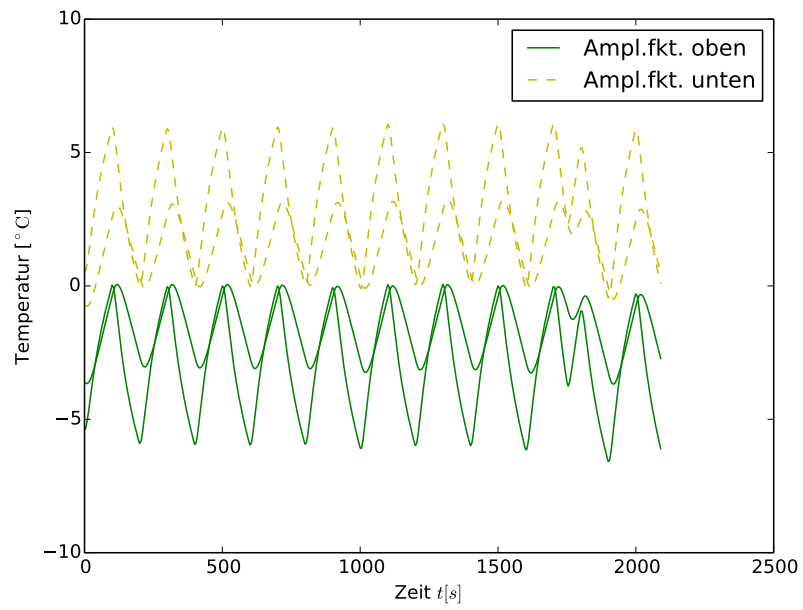
**Tabelle 4:** Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  der Metalle.



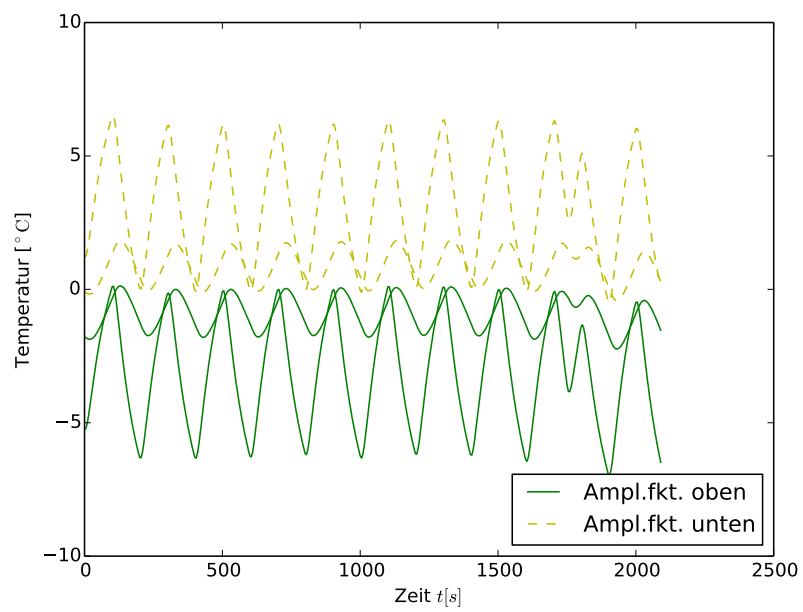
**Abbildung 5:** Periodische Messung bei Messing mit 80 Sekunden-Periode.



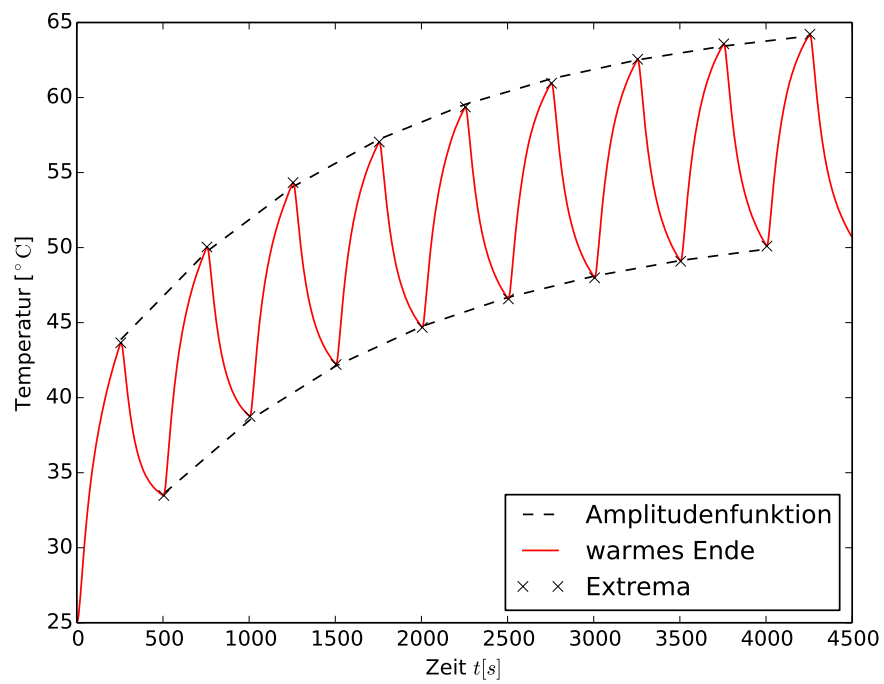
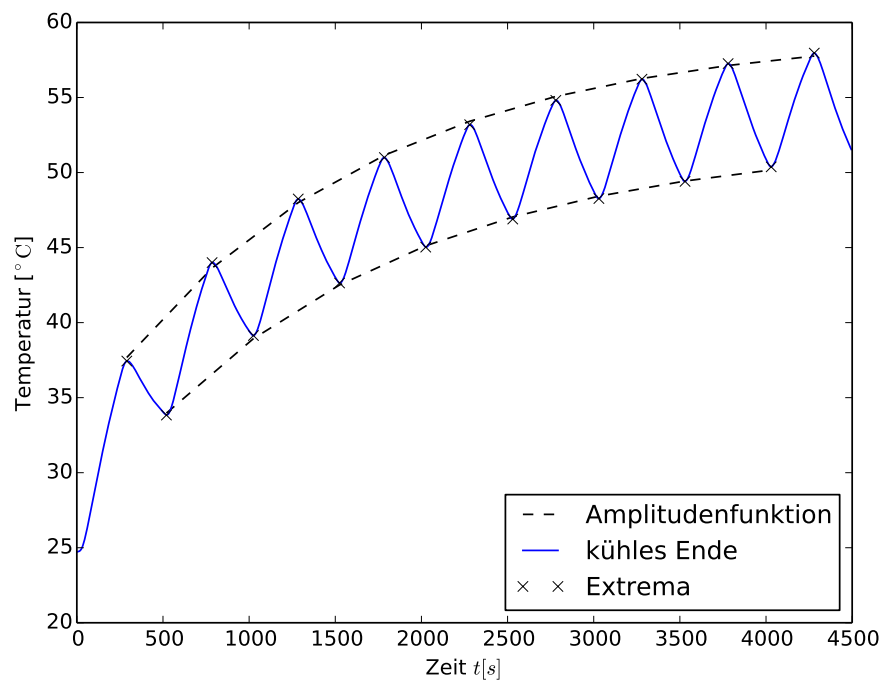
**Abbildung 6:** Periodische Messung bei Aluminium mit 80 Sekunden-Periode.



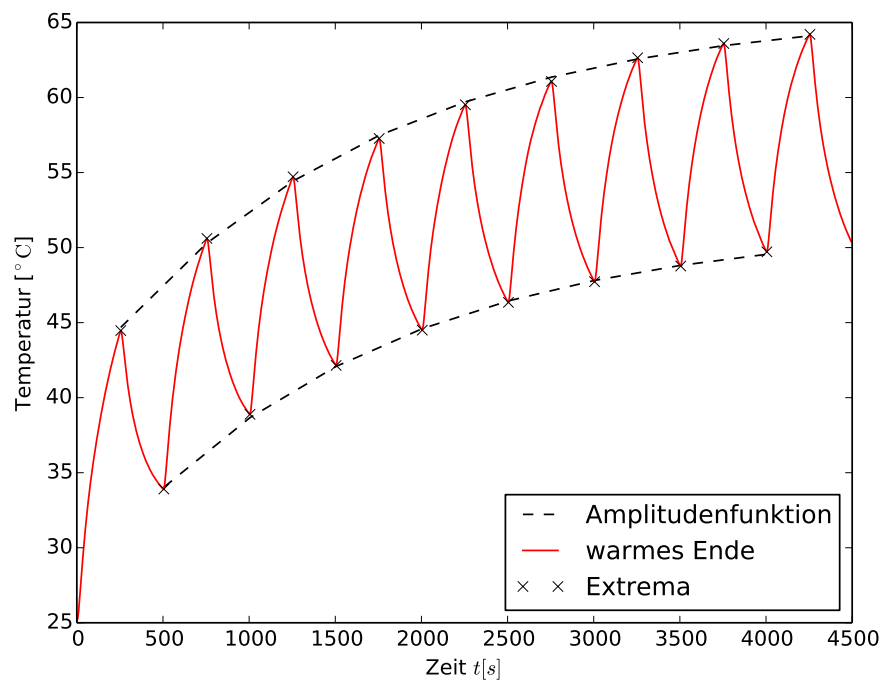
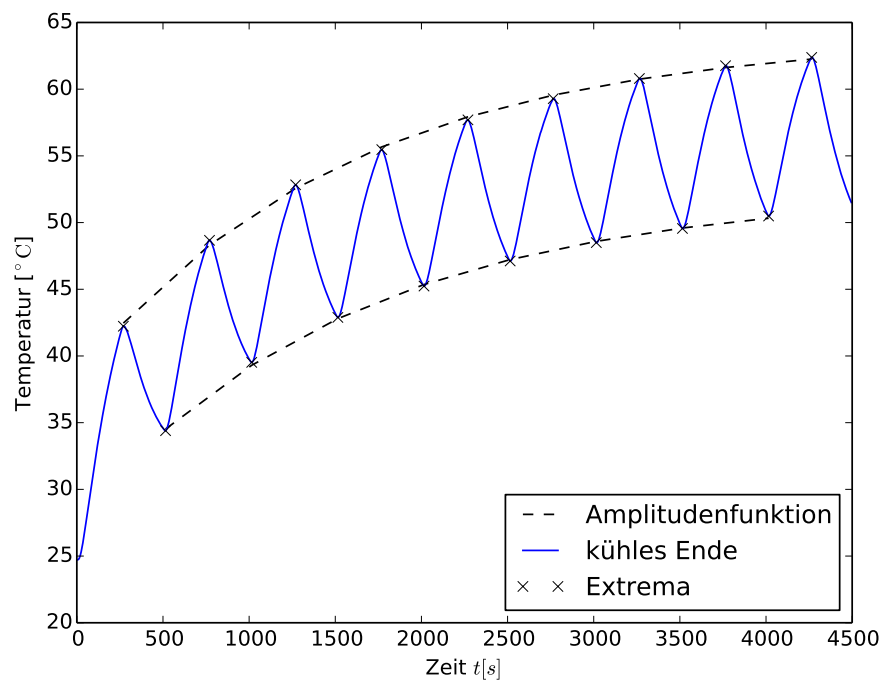
**Abbildung 7:** Normierung von Diagramm 6 auf Grundschiwingung



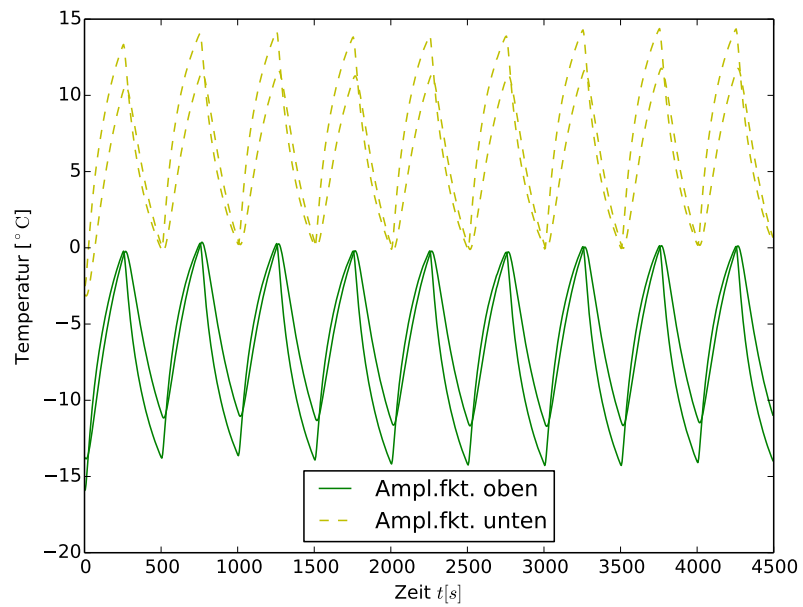
**Abbildung 8:** Normierung von Diagramm 5 auf Grundschiwingung.



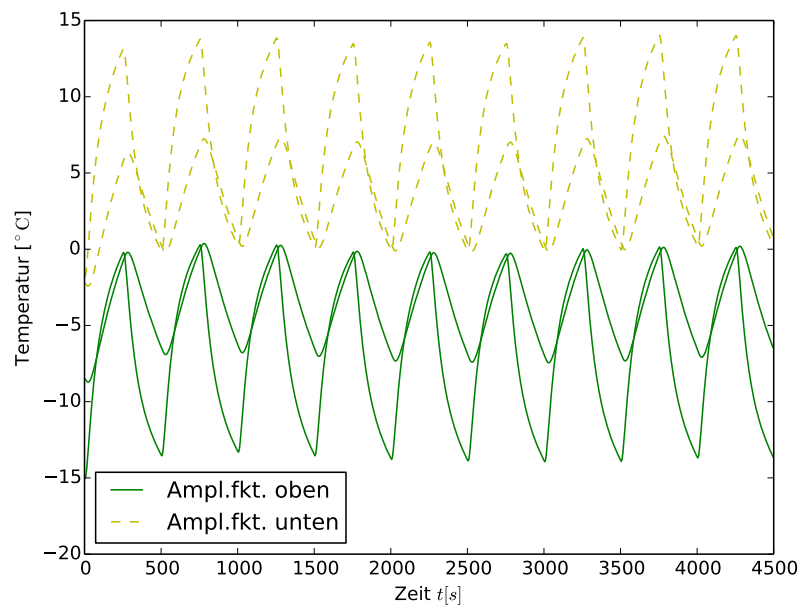
**Abbildung 9:** Periodische Messung bei Messing mit 200 Sekunden-Periode.



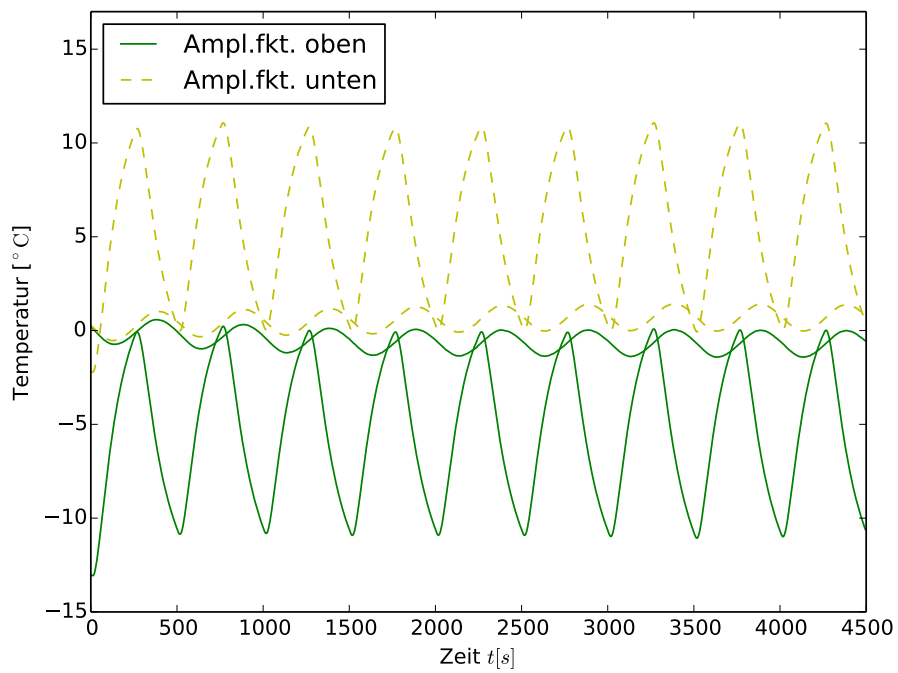
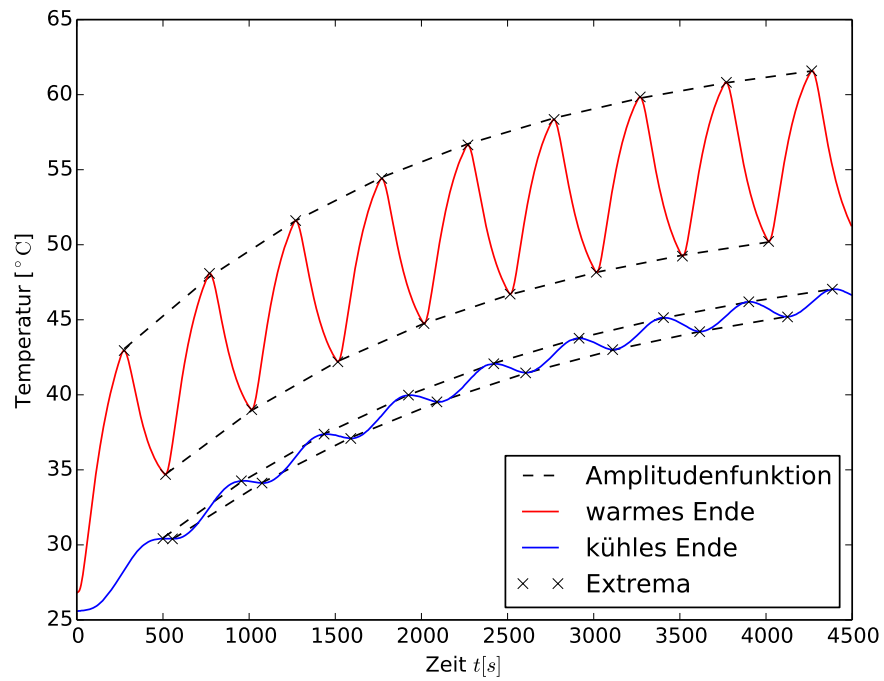
**Abbildung 10:** Periodische Messung bei Aluminium mit 200 Sekunden-Periode.



**Abbildung 11:** Normierung von Diagramm 10 auf Grundschiwingung.

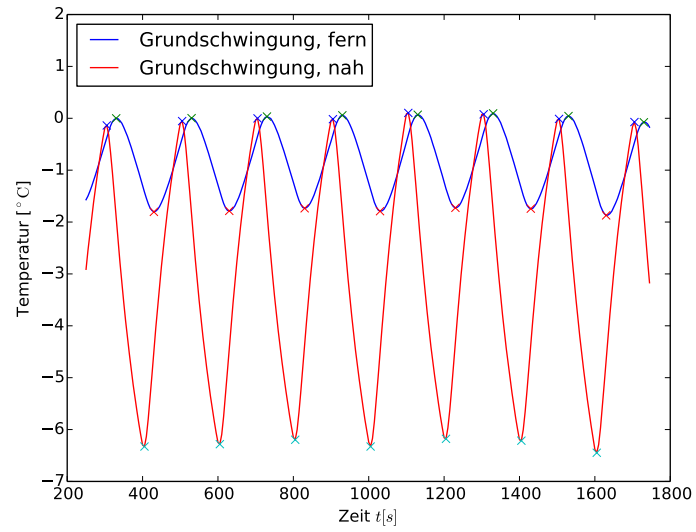


**Abbildung 12:** Normierung von Diagramm 9 auf Grundschiwingung.

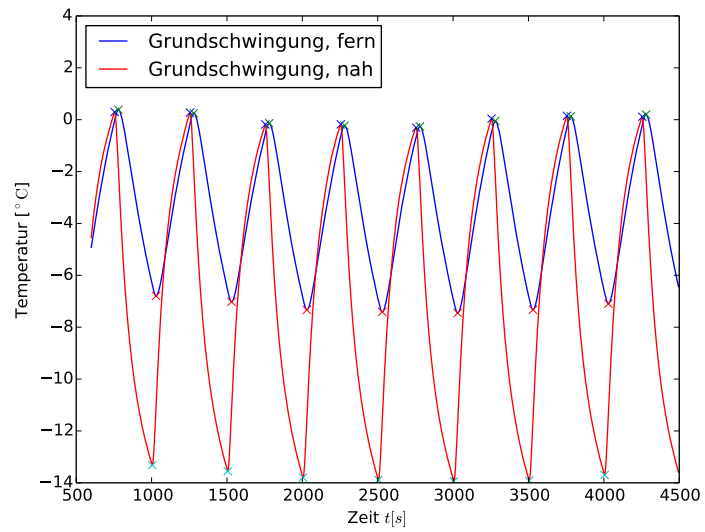


**Abbildung 13:** Periodische Messung bei Edelstahl mit 200 Sekunden-Periode sowie Normierung auf Grundschwingung.

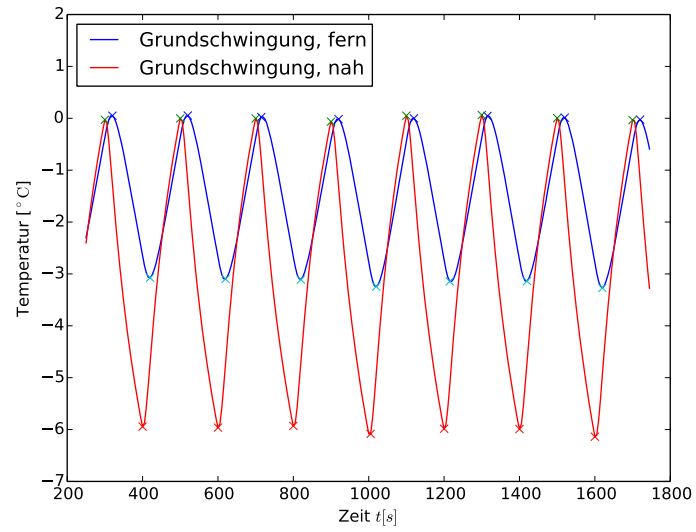




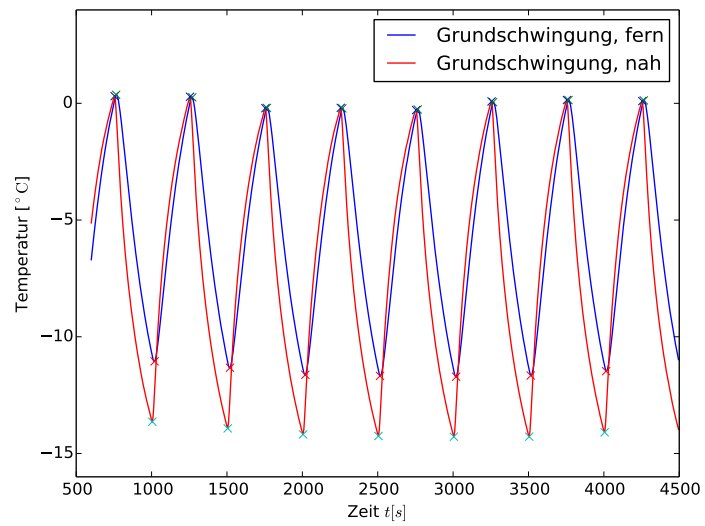
**Abbildung 14:** Ausgewählter Teil der Grundschiwingung von Messing bei 80 Sekunden-Periode.



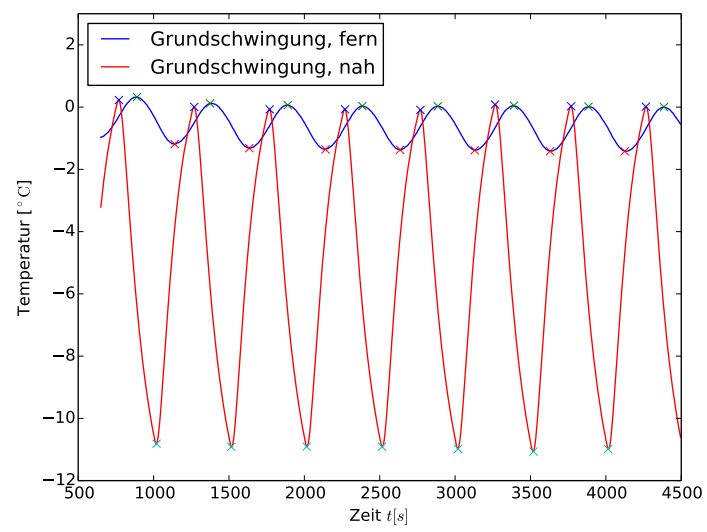
**Abbildung 15:** Ausgewählter Teil der Grundschiwingung von Messing bei 200 Sekunden-Periode.



**Abbildung 16:** Ausgewählter Teil der Grundschiwingung von Aluminium bei 80 Sekunden-Periode.



**Abbildung 17:** Ausgewählter Teil der Grundschiwingung von Aluminium bei 200 Sekunden-Periode



**Abbildung 18:** Ausgewählter Teil der Grundschiwingung von Edelstahl bei 200 Sekunden-Periode.

## 5 Diskussion

## 6 Diskussion

Vergleicht man die Literaturwerte der Wärmekapazitäten für Aluminium, Messing und Edelstahl mit den experimentell gewonnenen Werten wie in Tabelle 4, ergeben sich Abweichungen von  $\approx 60\%$  bei jeder Probe. Trotz der enormen Abweichung vom Literaturwert kann eine gute Aussage über das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeiten getroffen werden, wenn die Stäbe untereinander verglichen werden und der absolute Wert keine Rolle spielt.

Die größte Fehlerquelle liegt im Ablesen des Abstands  $\Delta x$  der Thermoelemente voneinander. Dies geschieht mit einem handelsüblichen Lineal und exaktes Abmessen ist aufgrund der Bauart der Platine schwierig. Desweiteren ist nicht bekannt, wie genau die Thermoelemente selber die Temperatur messen – eventuelle Unsicherheiten werden in der Auswertung nicht betrachtet.

Für die Stoffgemische kann kein exakter Literaturwert angegeben werden, so lange die genaue Stoffzusammensetzung unbekannt ist. Ebenso können im Reinstoff Aluminium Verunreinigungen für Fehler sorgen.

## 7 Daten

### Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/90/1>. Version 1.3.1.
- [2] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001. URL: <http://www.scipy.org/>. Version 0.14.0.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>. Version 2.4.5.
- [4] Travis E. Oliphant. „Python for Scientific Computing“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/10/1>. Version 1.8.1.
- [5] The GIMP Team. *GIMP: GNU Image Manipulation Program*. URL: <http://www.gimp.org/>. Version 2.8.10.

Die verwendeten Plots wurden mit *matplotlib*[1] und die Grafiken mit *GIMP*[5] erstellt sowie die Berechnungen mit *Python-Python-Numpy*, [4], *Python-Scipy*[2] und *Python-uncertainties*[3] durchgeführt.