

Versuch 204

## **Wärmeleitfähigkeit von Metallen**

Helena Nawrath  
helena.nawrath@tu-dortmund.de

Carl Arne Thomann  
arnethomann@me.com

Durchführung: 4. November 2014      Abgabe: 11. November 2014

TU Dortmund – Fakultät Physik

## 1 Ziel

Ziel des Versuches ist, die Wärmeleitfähigkeit von den Metallen Messing, Edelstahl und Aluminium zu bestimmen. Dafür werden diese über ein Peltier-Element erhitzt und die Temperatur der Proben an zwei verschiedenen Orten gemessen.

## 2 Theorie

Ist in einem abgeschlossenen System ein Temperaturunterschied vorhanden, findet Wärmetransport statt, um ein Temperaturgleichgewicht zu erreichen. Dies kann durch Konvektion, Wärmestrahlung oder Wärmeleitung geschehen. Bei Konvektion vermischen sich bei Fluiden unterschiedliche warme Temperaturbereiche; durch Wärmestrahlung gibt ein Körper oder ein Fluid seine Wärme an die Umgebung ab.

Die in diesem Versuch betrachtete Wärmeleitung in festen Körpern geschieht über freie Elektronen und Phononen, quantisierte Schwingungen innerhalb der Gitterstruktur des Metalls. Dabei fließt eine Wärmemenge

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt \quad (1)$$

durch den Festkörper mit Querschnittsfläche  $A$  von hoher zu niedriger Temperatur. Die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  ist eine Materialkonstante. Mit (1) und der Wärmestromdichte  $j_w$ , welche den Wärmestrom mit

$$j_w = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2)$$

bezüglich der Querschnittsfläche  $A$  darstellt, kann mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\rho} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3)$$

hergeleitet werden. Diese beschreibt die räumliche und zeitliche Entwicklung der Temperaturverteilung. Dabei ist

$$\sigma_T = \frac{\kappa}{\rho c} \quad (4)$$

die Temperaturleitfähigkeit, welche die Schnelligkeit angibt, mit welcher der Temperaturengleich stattfindet. Sie wird bestimmt durch die Dichte  $\rho$  und die spezifische Wärmekapazität  $c$ . Dabei beschreibt  $c$  die Energiemenge, die benötigt wird, um 1kg des untersuchten Materials um 1K zu erwärmen

Werden Körper durch periodischen Temperaturwechsel geheizt oder gekühlt, breiten sich in seinem Innern Temperaturwellen der Form

$$T(x, t) = T_{\max} \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x\right) \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x\right) \quad (5)$$

aus, was eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung (3) für lange Probenstäbe darstellt. Diese setzt sich zusammen aus der Amplitude  $T_{\max}$ , der Wellenzahl

$$k = \frac{\omega \rho c}{2\kappa}, \quad (6)$$

einem Schwingterm und einer Exponentialfunktion mit negativem Exponenten, der für die Dämpfung verantwortlich ist. Über die Dispersionsbeziehung, die Phasengeschwindigkeit  $v$  und die Frequenz  $\omega$  miteinander zu

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}}} = \sqrt{\frac{2\kappa \omega}{c \rho}} \quad (7)$$

verknüpft, erhält man mit (6) und den Beziehungen die Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \frac{2\pi}{\tilde{T}}$ , und die Phase  $\phi = 2\pi \Delta t \frac{1}{\tilde{T}}$  mit der Periodendauer  $\tilde{T}$  eine Gleichung für die Wärmeleitfähigkeit. Es gilt

$$\kappa = \frac{c \rho \Delta x^2}{2 \Delta t \ln \left( \frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}} \right)}. \quad (8)$$

$\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}}$  ist das Verhältnis der Wellenamplituden, welche an zwei Orten  $x_1$  und  $x_2$  im Abstand  $\Delta x = x_2 - x_1$  gemessen werden und den Gangunterschied  $\Delta t$  aufweisen. Hiermit kann  $\kappa$  über den zeitlichen Verlauf der Temperatur bestimmt werden.

### 3 Durchführung

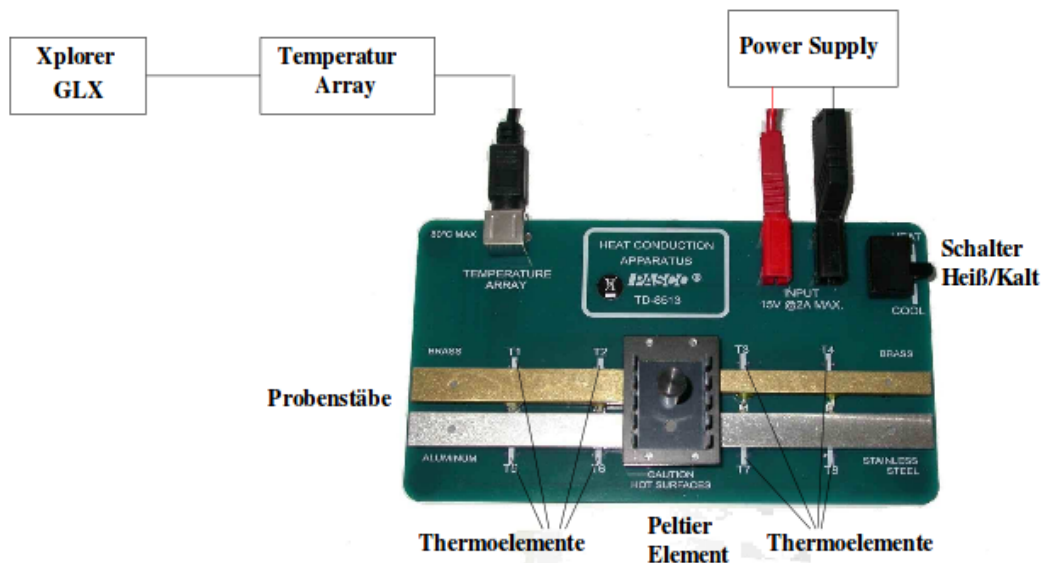


Abbildung 1: Aufbau der Platine.

Um den zeitlichen Temperaturverlauf von vier Metallproben bestimmen zu können, wurden diese auf der in Abbildung 1 gezeigten Platine angebracht. Mit dem mittig aufgesetzten Peltier-Element, bestehend aus zwei Halbleitern unterschiedlichen Energieniveaus, können die Stäbe durch Ausnutzen des Peltier-Effekts simultan geheizt oder gekühlt werden. Das Heizelement wird durch eine angeschlossene Spannungsquelle betrieben. An jedem Stab befinden sich zwei Thermoelemente, bestehend aus zwei metallischen Leitern, die an den Orten  $x_1$  und  $x_2$  die Temperaturen der Stäbe aufzeichnen. Dabei ruft die Temperaturdifferenz an den Thermoelementen gegensätzlich zum Peltier-Element, einen Spannungsunterschied hervor. Durch Eichung kann die anliegende Spannung als Temperatur interpretiert und aufgenommen werden; hierzu wird ein Temperatur-Array und ein Datenlogger verwendet.

Vor Messbeginn werden sowohl die korrekte Verkabelung, als auch die Einstellungen des Datenloggers überprüft. Alle acht Thermoelemente  $T_1 - T_8$  sollten eine Temperatur aufzeichnen.

#### 3.1 Statische Messung

Das Peltier-Element wird mit einer Spannung  $U_P = 5V$  bei maximalem Strom  $I$  betrieben. Im Datenlogger wird eine Abtastrate von  $\Delta t = 5s$  eingestellt. Nachdem die Isolierung auf die Probestäbe gelegt wurde, um einen Wärmeaustausch mit der Umgebung zu vermeiden, und der Schalter umgelegt ist, beginnt das Peltier-Element zu heizen. Der Datenlogger zeichnet alle 5 Sekunden die Temperaturen  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$  der Thermoelemente auf, bis Thermoelement  $T_7$  eine Temperatur von  $T_7 \approx 43^\circ C$  anzeigt.

Anschließend werden die Isolierungen abgenommen, das Peltier-Element zum Kühlen der Stäbe auf den Modus "cool" gestellt.

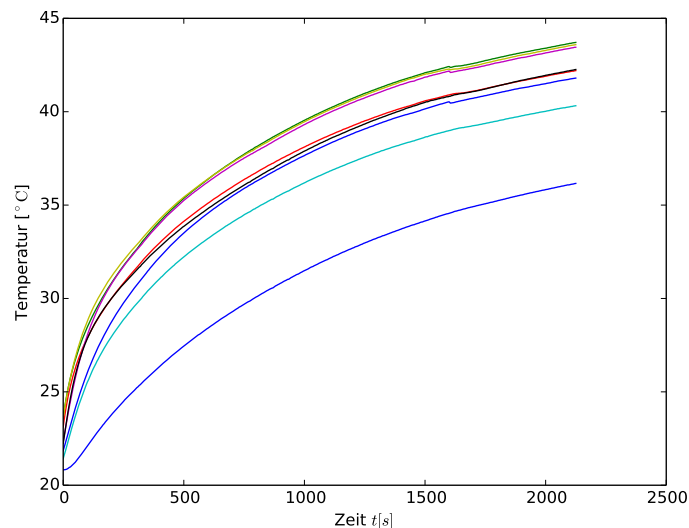
### 3.2 Dynamische Messung

Nachdem die Stäbe auf eine Temperatur von  $T < 30^\circ\text{C}$  gekühlt wurden, werden die Isolierungen erneut aufgelegt und das Peltier-Element beginnt bei einer Spannung von  $U_P = 8\text{V}$  zu heizen. Die Thermoelemente zeichnen nun mit  $\Delta t = 2\text{s}$  den Temperaturverlauf auf.

Nach 40s wird das Peltier-Element umgeschaltet und die Stäbe für weitere 40s gekühlt. Dieser Vorgang wird wiederholt, bis zehn Perioden von  $T = 80\text{s}$  Dauer aufgezeichnet wurden. Anschließend werden die Stäbe analog zur statischen Messung wieder heruntergekühlt. Danach wird die dynamische Methode wiederholt, wobei die Periodendauer nun  $T = 200\text{s}$  beträgt.

## 4 Auswertung

### 4.1 Statische Messung



**Abbildung 2:** Alle gemessenen Temperaturen ohne Beschriftung

Alle Temperaturverläufe werden in Diagramm 2 gleichzeitig aufgetragen. Es zeigt, dass der allgemeine Verlauf der Temperatur unabhängig von dem Material und der Entfernung des Messpunktes ist. Die Temperaturkurven zeigen jeweils beschränktes Wachstum und sind streng monoton steigend. Im Diagramm 3 wird der Temperaturverlauf bei den entfernten Messpunkten T1, T4, T5, T8 (vgl. Abbildung 1) gezeigt. Die Kurve von Aluminium hat zu Beginn des Experiments den stärksten Anstieg und liegt über den Kurven

der anderen Metallstäbe. Beide Kurven der Messingstäbe haben vergleichbare Steigungen; die Kurve des breiten Messingstabes liegt dabei über der des schmalen Stabes und hat am Endpunkt der Messung zu dieser eine Temperaturdifferenz von etwa 1°C. Die Kurve von Edelstahl ist deutlich von den Kurven der anderen Metallstäbe entfernt und weist zu Beginn der Messung die geringste Steigung auf. Zum Endpunkt der Messung liegt zwischen den Messpunkten von Aluminium und Edelstahl eine maximale Temperaturdifferenz von etwa 7°C vor.

Zirka 700 Sekunden nach Beginn des Erwärmens liegen an den entfernten Messpunkten die Temperaturen nach Tabelle 1 vor. Die höchste Temperatur hat der Aluminiumstab, die geringste Temperatur weist Edelstahl auf.

Edelstahl	Messing,dünn	Messing	Aluminium
29.28°C	35.48°C	34.08°C	37.12°C

**Tabelle 1:** Temperaturen an entfernten Messpunkten bei  $t = 700$ s.

Es wird sichtbar, dass bei gleicher Zeit durch den Aluminiumstab mehr Wärme geleitet wird als durch die Messingstäbe und durch den Edelstahlstab. Aluminium hat demnach die größte Wärmeleitfähigkeit.

Mit Gleichung (1) kann der Wärmestrom  $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$  innerhalb der Stäbe bestimmt werden. Dabei ist  $\kappa$  der Literatureurwert der Wärmeleitfähigkeit des betrachteten Metalls und  $A$  die Querschnittsfläche (vgl. hierzu [V204]) des jeweiligen Stabes.  $\frac{\partial T}{\partial x}$  ist der Temperaturgradient innerhalb des Stabes und wird hier mit  $\frac{\Delta T}{\Delta x}$  und  $\Delta x \approx 0.03$ m beschrieben. Es ergibt sich die Wärmemenge  $dQ$  zu fünf unterschiedlichen Zeiten.

Stab	50 s	500 s	1000 s	1500 s	2000 s
Messing 1	−0.4973 W	−0.3552 W	−0.3629 W	−0.3725 W	−0.3648 W
Messing 2	−0.2867 W	−0.2128 W	−0.2150 W	−0.2173 W	−0.2106 W
Aluminium	−0.4174 W	−0.0677 W	−0.0564 W	−0.0564 W	−0.0489 W
Edelstahl	−0.1116 W	−0.1538 W	−0.1536 W	−0.1524 W	−0.1469 W

**Tabelle 2:** Wärmemengen  $dQ$  der Probenstäbe zu fünf unterschiedlichen Zeiten.

Im Diagramm 4 ist die Temperaturdifferenz innerhalb eines Stabes für den Edelstahl- und für den Messingstab aufgetragen. Es wird deutlich, dass die Differenzkurve für Edelstahl näherungsweise ein beschränktes Wachstum beschreibt und kurz nach Beginn der Erwärmung einen Grenzwert erreicht, der bei etwa 6.25°C liegt. Die Differenzkurve des Messingstabes steigt zu Beginn der Messung an und erreicht kurz nach Beginn mit 2.6°C ihr globales Maximum. Nach dem Maximum nimmt die Differenz exponentiell ab und erreicht einen Grenzwert von etwa 2°C. Der Vergleich der Kurven zeigt, dass der Messingstab gegenüber dem Edelstahlstab den Grenzwert der Temperaturdifferenz schneller

erreicht.

## 4.2 Dynamische Messung bei 80 Sekunden-Periode

Die Diagramme 5 und 8 zeigen bei periodischer Anregung einer Temperaturwelle mit einer Periodendauer von 80 Sekunden den Temperaturverlauf an den jeweiligen Enden. Zusätzlich zum Verlauf sind sowohl die Extrema, als auch deren Amplitudenfunktion eingezeichnet. Die Messwerte ab dem neunten lokalen Maximum werden von der Auswertung aufgrund offensichtlicher Abweichungen ausgeschlossen.

Durch Eichung des Temperaturverlaufs mit eingezeichneter Amplitudenfunktion durch Bilden der Differenz zwischen Temperaturverlauf und Amplitudenfunktion, ergeben sich nahezu gleichmäßige Schwingungen, die in Diagramm 6 und 9 sichtbar sind. Diese werden im Folgenden als Grundschrwingungen der Temperatur bezeichnet. In diesen Diagrammen ist zu erkennen, dass sich für eine gleichmäßige Schwingung jeweils die oberen Amplitudenfunktionen zum Eichen eignen.

## 4.3 Dynamische Messung bei 200 Sekunden-Periode

Für die Messung der Temperaturwellen bei einer Periodendauer von 200 Sekunden wird vollkommen analog vorgegangen. Die Diagramme 11, 14 und 17 zeigen die Temperaturwellen der jeweiligen Metalle an den angegebenen Punkten. Zusätzlich zum Verlauf sind die Extrema markiert und deren Amplitudenfunktionen eingezeichnet.

Eicht man den Temperaturverlauf mit der eingezeichneten Amplitudenfunktionen, so ergeben sich die Grundschrwingungen in den begleitenden Diagrammen 12, 15 und 17. Anhand dieser Diagramme wird ersichtlich, dass sich jeweils die oberen Amplitudenfunktionen dazu eignen, den Temperaturverlauf auf eine gleichmäßige Grundschrwingung zu bringen.

## 4.4 Bestimmung der Wärmekapazität

Durch die Grundschrwingungskurven können die Amplituden  $A_{\text{nah}}$  und  $A_{\text{fern}}$  der Schwingung, sowie die Phasendifferenz  $\Delta t$  zwischen den Messpunkten bestimmt werden; dabei wird der Teil der Grundschrwingung vernachlässigt, der durch offensichtliche Verfahrensfehler mangelhaft ist (vgl. Diagramme 5, 8). Für die Amplitudenbestimmung werden in der Grundschrwingung Extremwerte bestimmt und die Mittelwerte der y-Koordinaten aller Maxima beziehungsweise Minima errechnet. Mit diesen Mittelwerten ist eine hinreichend genaue Beschreibung der Amplitude  $A$  möglich. Es gilt

$$A = \frac{\bar{y}_{\text{Max}} - \bar{y}_{\text{Min}}}{2}. \quad (9)$$

Für die Bestimmung der Phasendifferenz werden ausgezeichnete Punkte der Schwingungen bestimmt, die den Vergleich zweier Schwingungen zulassen. Geeignete Punkte sind Maxima, die Differenz der x-Koordinaten der Maxima zweier Schwingungen ist die Phasendifferenz dieser Schwingungen. Es werden alle Phasendifferenzen  $\Delta t_i$  mit

$$\Delta t_i = x_{\text{Max}, n+1} - x_{\text{Max}, n}. \quad (10)$$

ermittelt. Der Mittelwert der  $\Delta t_i$  ist ein Maß für die Phasendifferenz  $\Delta t$ . Die Schwingungskenngrößen sind in Tabelle 3 zusammengefasst. Mithilfe der Amplituden

Material	$A_{\text{nah}} / ^\circ\text{C}$	$A_{\text{fern}} / ^\circ\text{C}$	$\Delta t / \text{s}$	$\rho / \text{kg/m}^3$	$c / \text{J/(m K)}$
Messing P2	3.1336	0.9034	25.0	8520	385
Aluminium P2	3.0011	1.5856	18.75	2800	830
Edelstahl P3	5.477	0.715	116.875	8000	400

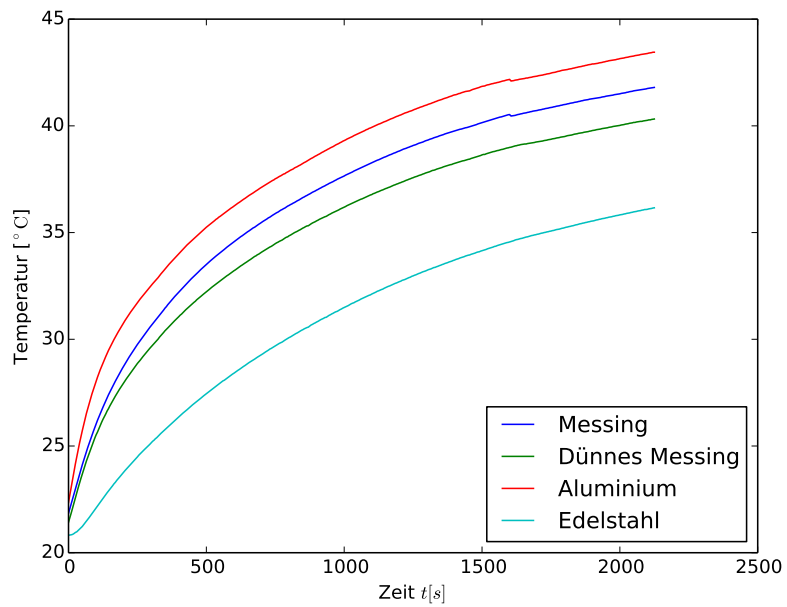
**Tabelle 3:** Kenngrößen der Grundschrwingungen

$A_{\text{nah}}$  und  $A_{\text{fern}}$ , der Phasendifferenz  $\Delta t$ , der Geometrie und Beschaffenheit des Stabes kann mit der Gleichung (8) die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  bestimmt werden.

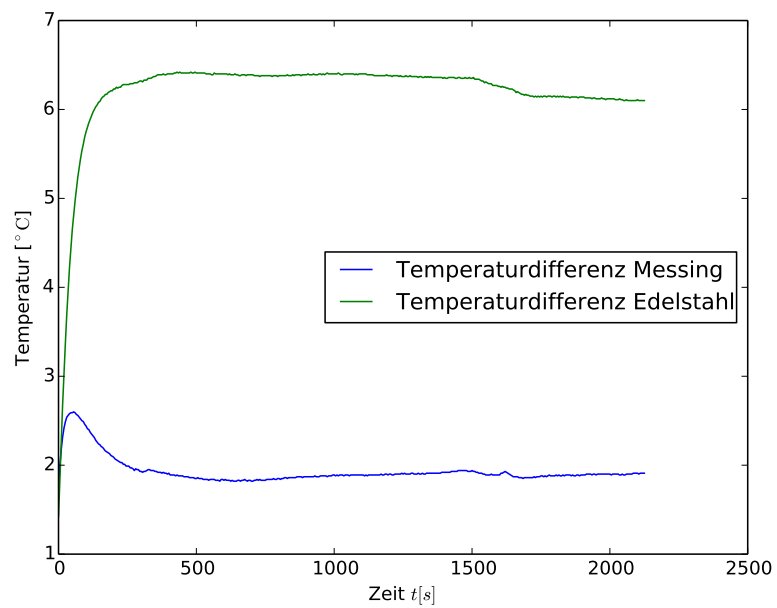
Wärmeleitfähigkeit / $\text{W/(m K)}$			
	Messing M2	Aluminium M2	Edelstahl M3
Messung	47.4702	87.4175	6.0504
Literatur	120	236	15
Abweichung	60.44%	62.96%	59.66%

**Tabelle 4:** Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  der Metalle.

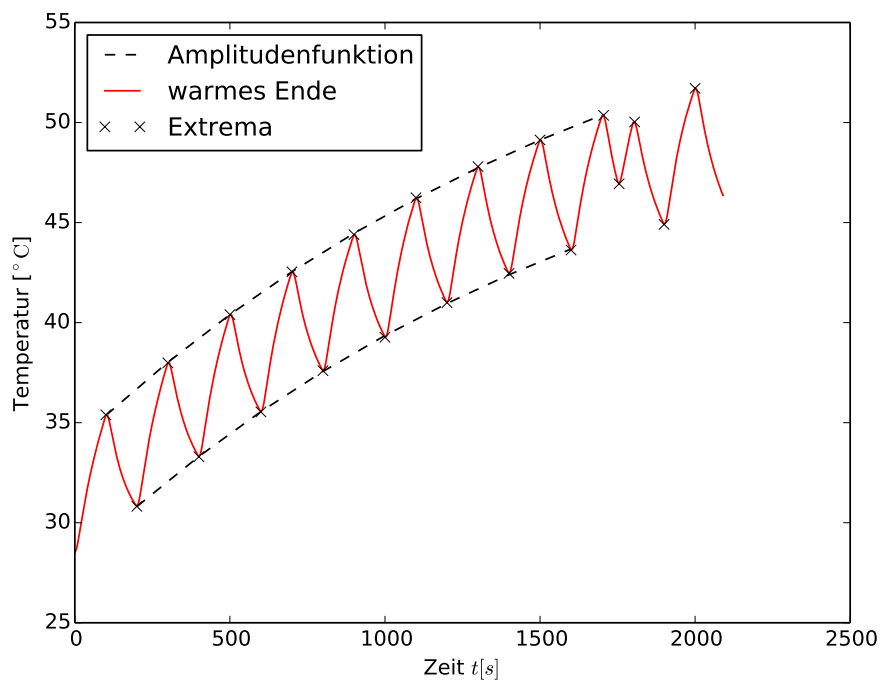
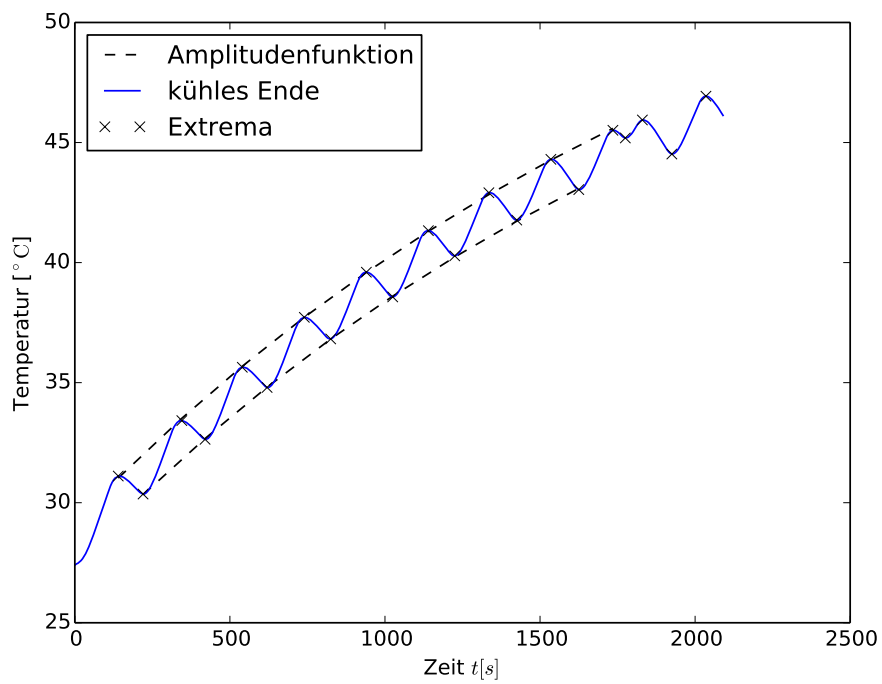




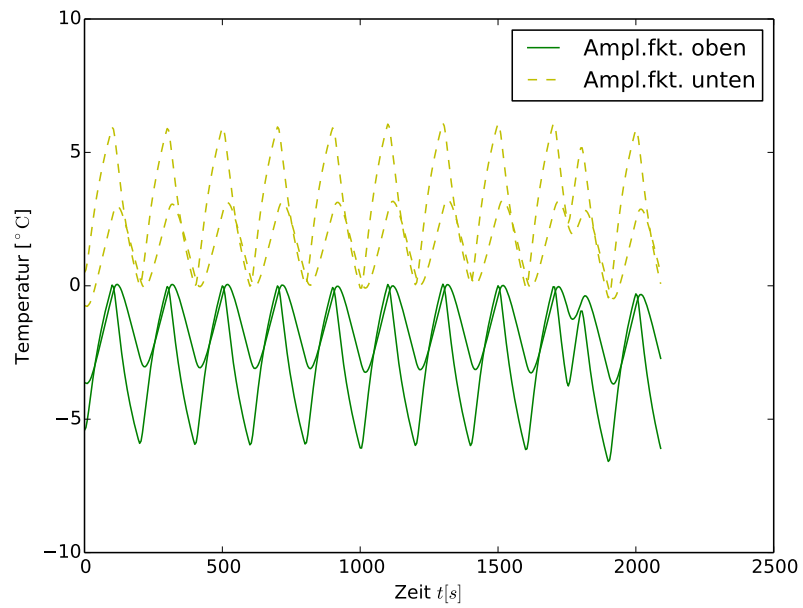
**Abbildung 3:** Verlauf der Temperaturen an den entfernten Messpunkten.



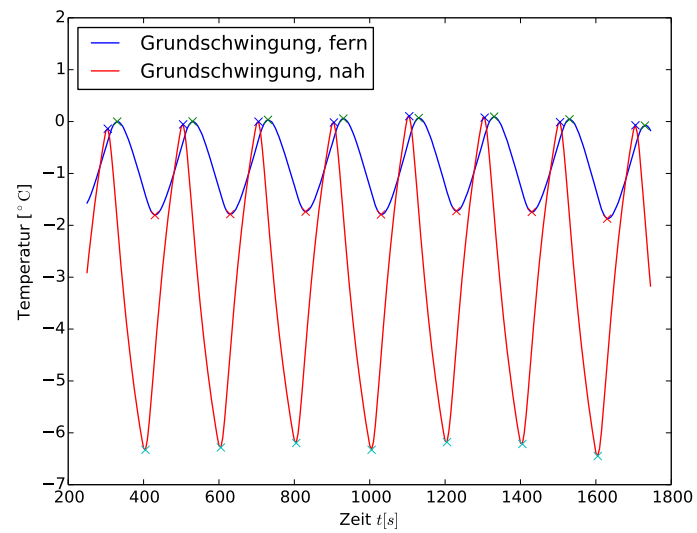
**Abbildung 4:** Temperaturdifferenz der Messpunkte von Messing und Edelstahl.



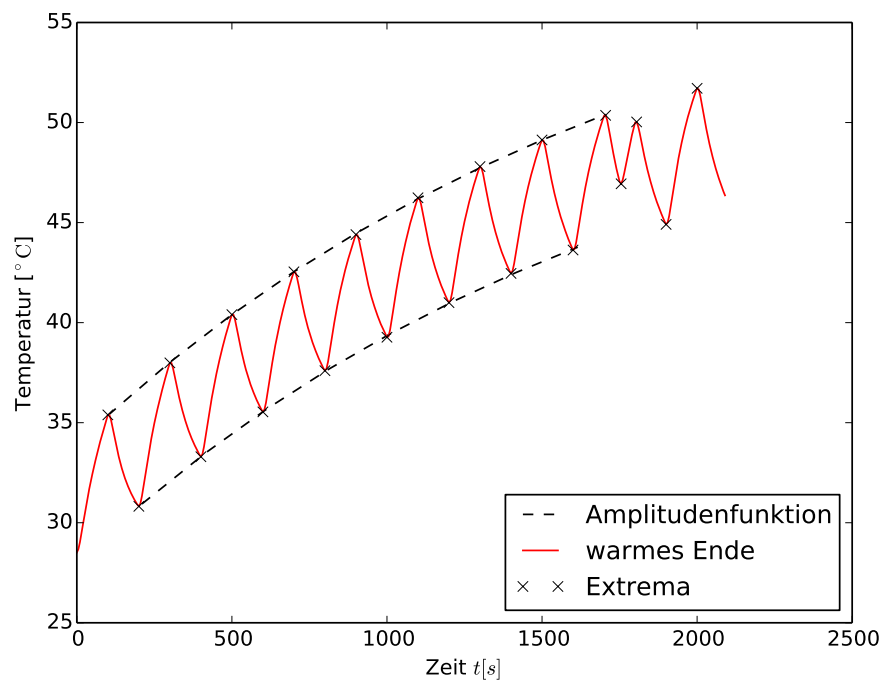
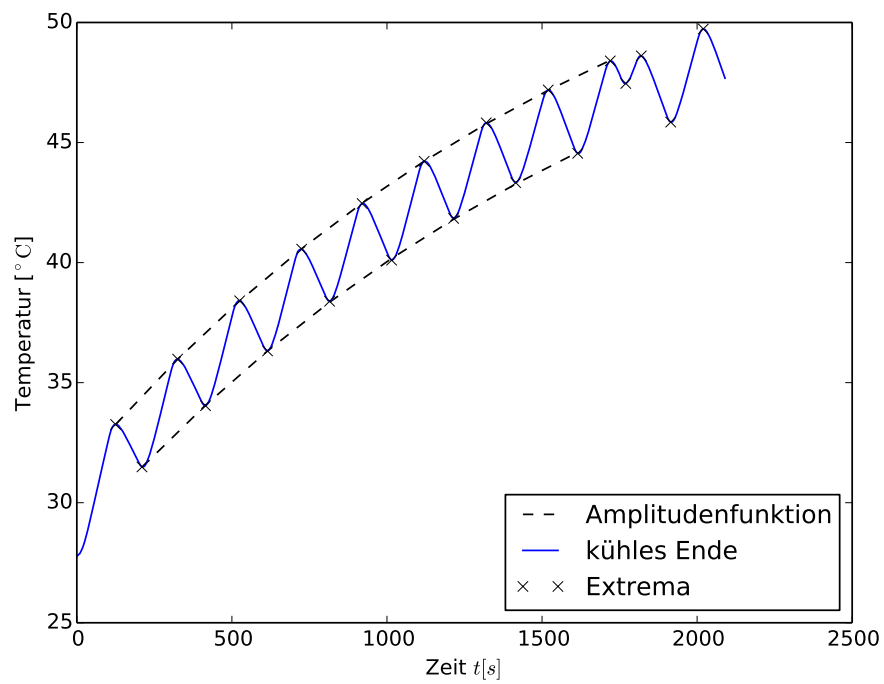
**Abbildung 5:** Periodische Messung bei Messing mit 80 Sekunden-Periode.



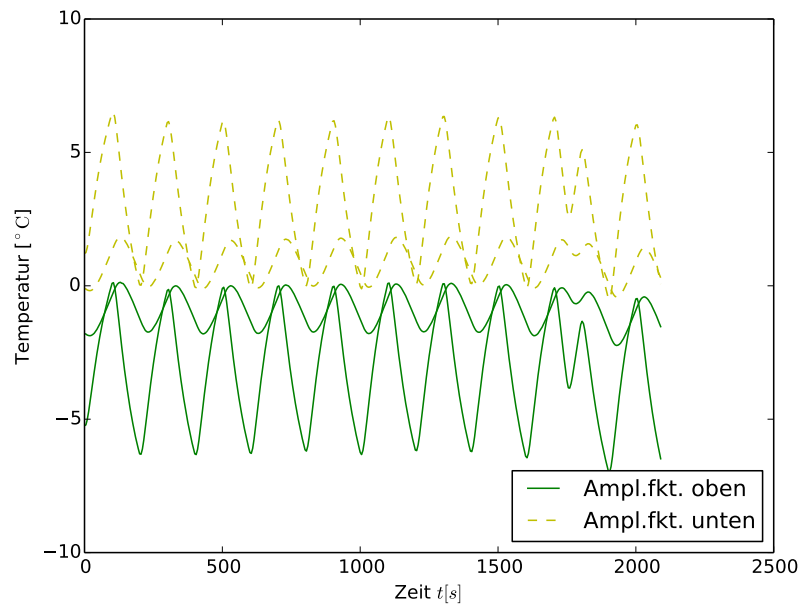
**Abbildung 6:** Normierung von Diagramm 5 auf Grundschiwingung.



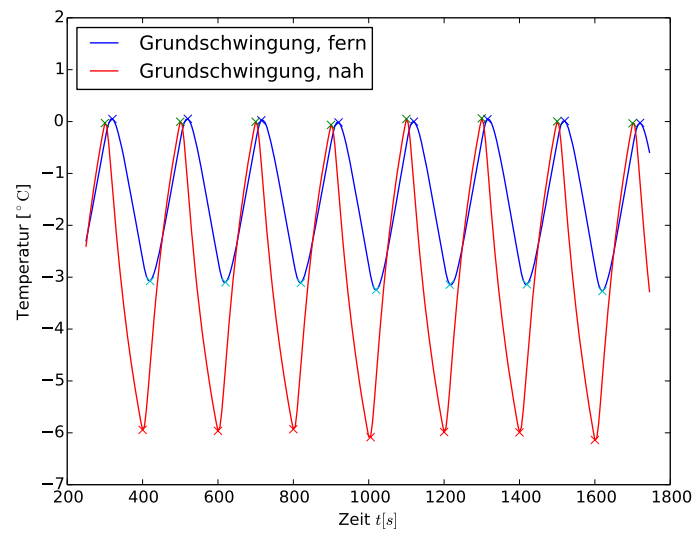
**Abbildung 7:** Ausgewählter Teil der Grundschiwingung von Messing bei 80 Sekunden-Periode.



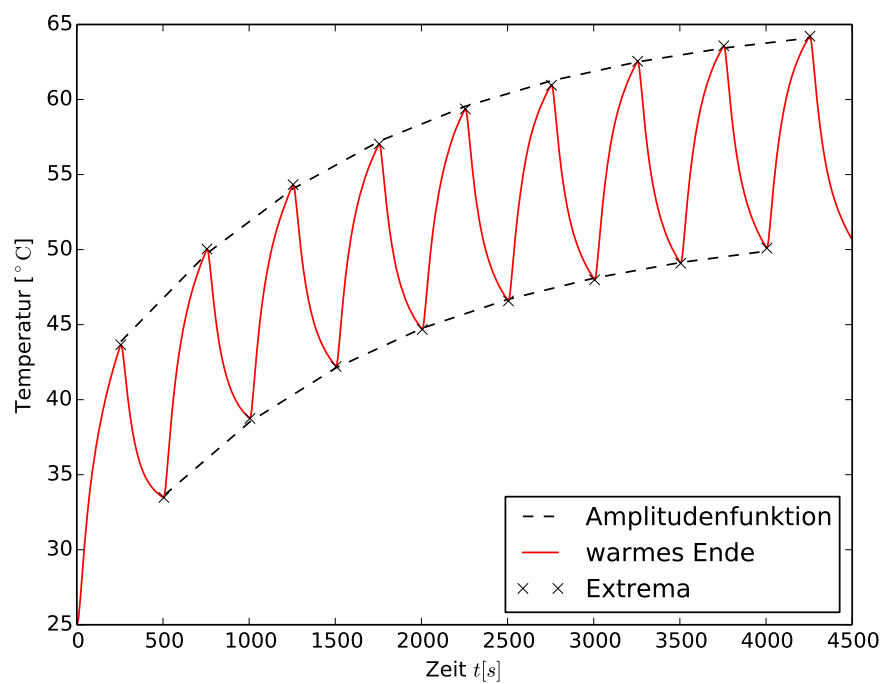
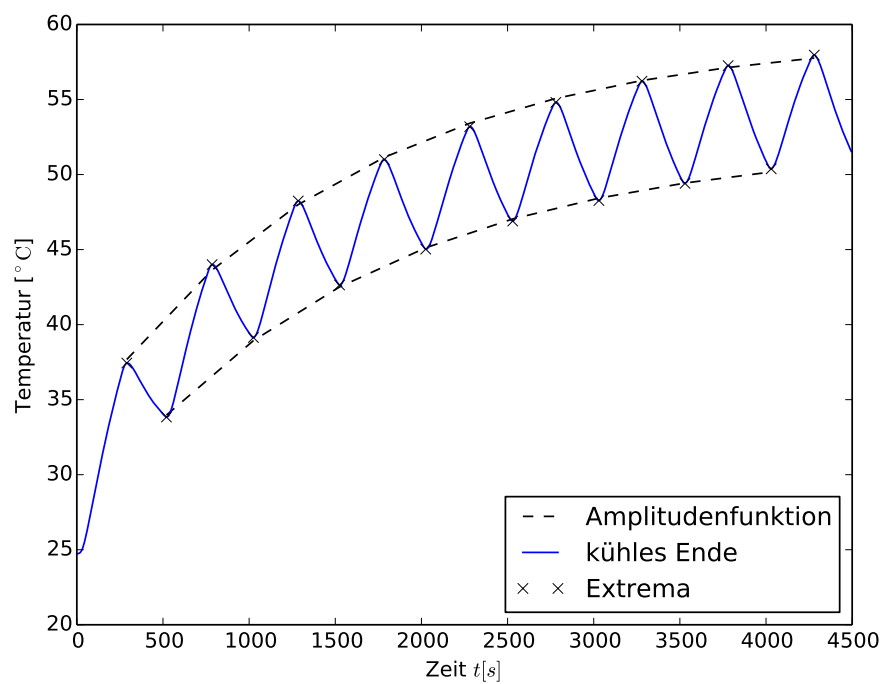
**Abbildung 8:** Periodische Messung bei Aluminium mit 80 Sekunden-Periode.



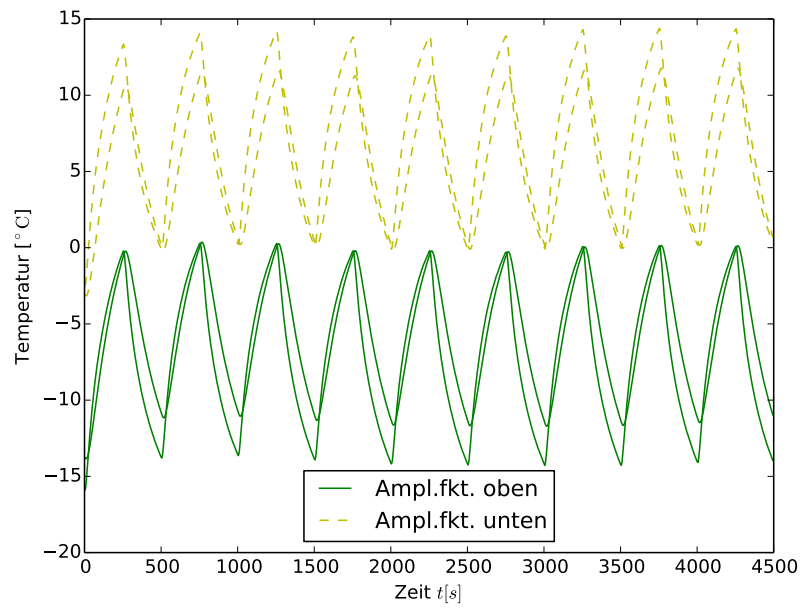
**Abbildung 9:** Normierung von Diagramm 8 auf Grundschiwingung.



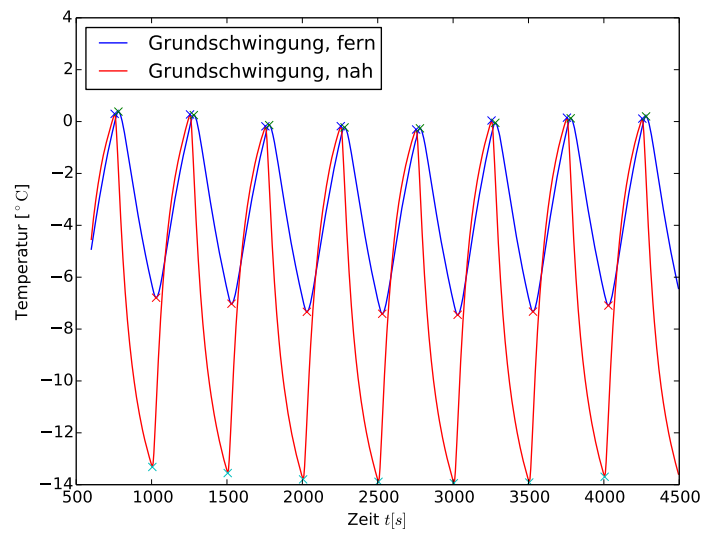
**Abbildung 10:** Ausgewählter Teil der Grundschiwingung von Aluminium bei 80 Sekunden-Periode.



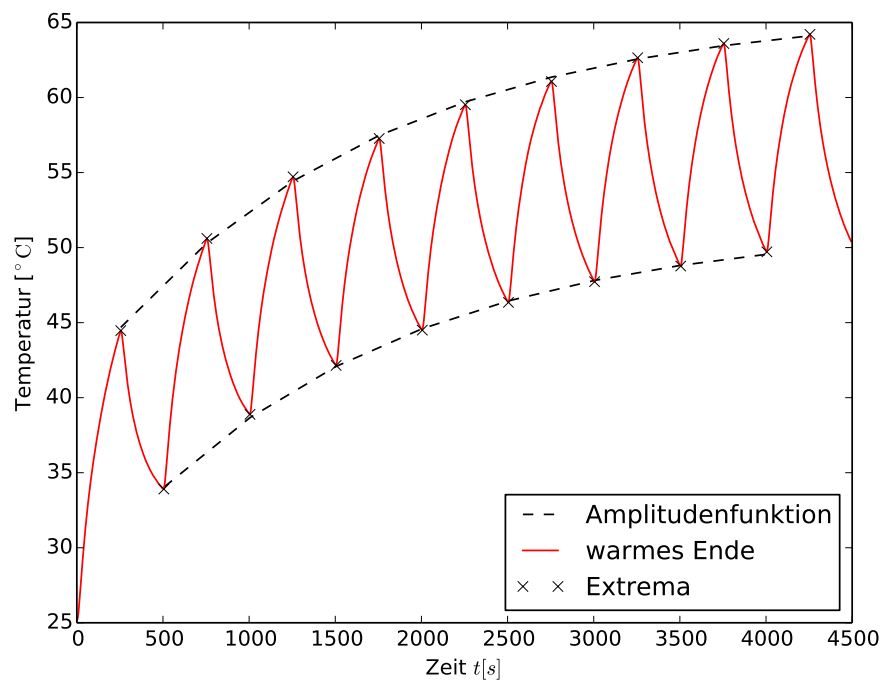
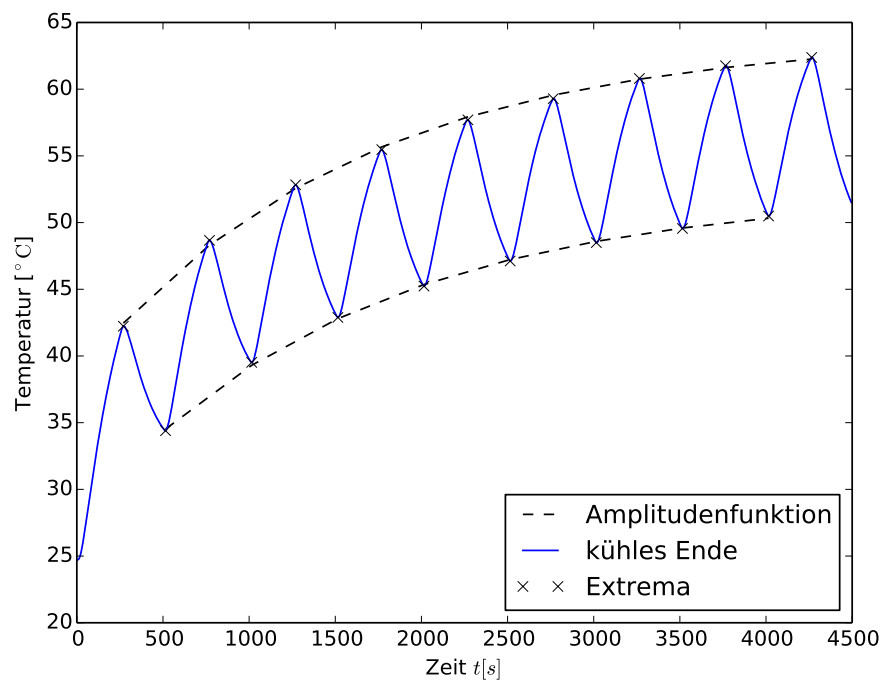
**Abbildung 11:** Periodische Messung bei Messing mit 200 Sekunden-Periode.



**Abbildung 12:** Zwei Eich-Möglichkeiten von Diagramm 11 auf Grundschiwingung.

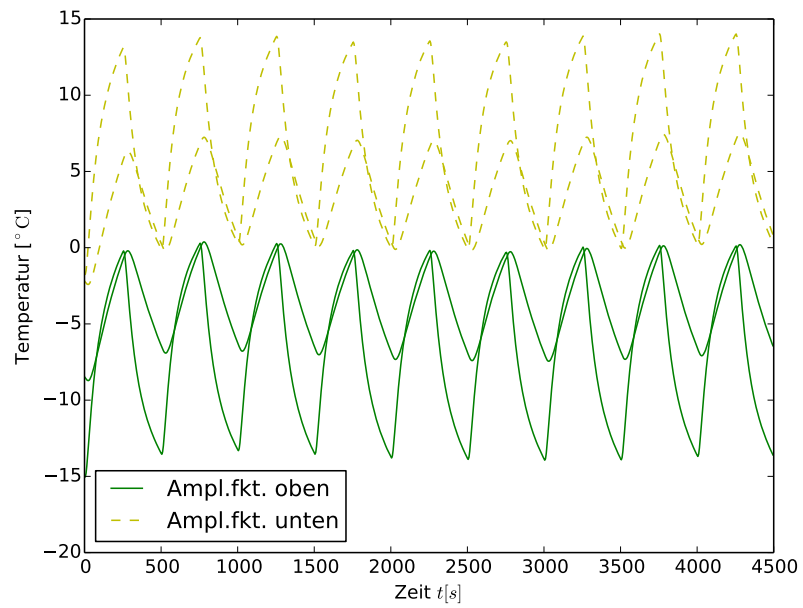


**Abbildung 13:** Ausgewählter Teil der Grundschiwingung von Messing bei 200 Sekunden-Periode.

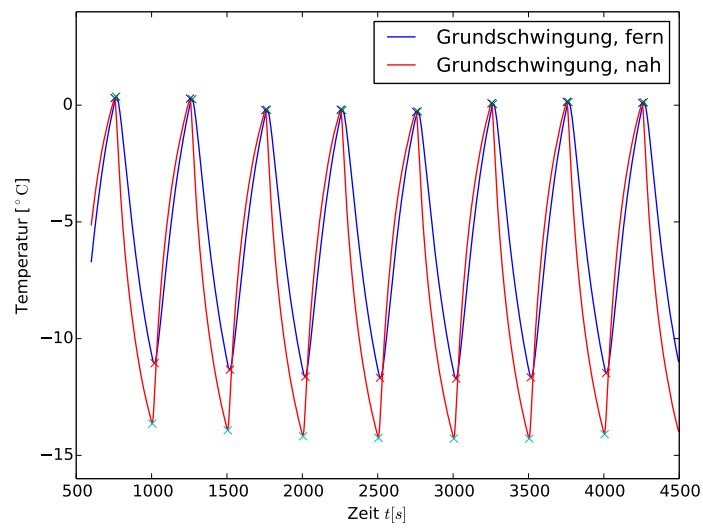


**Abbildung 14:** Periodische Messung bei Aluminium mit 200 Sekunden-Periode.

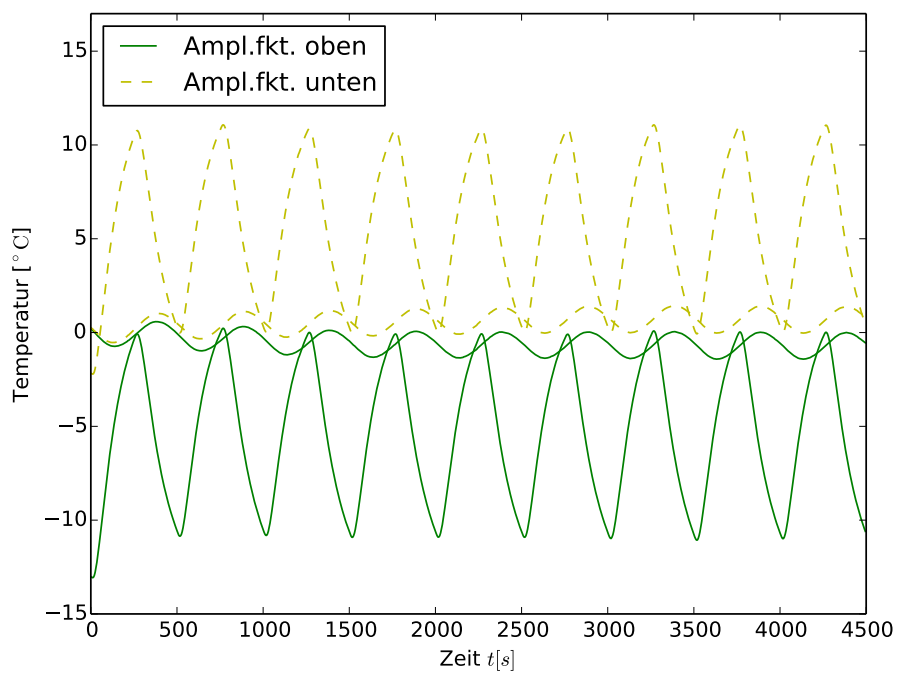
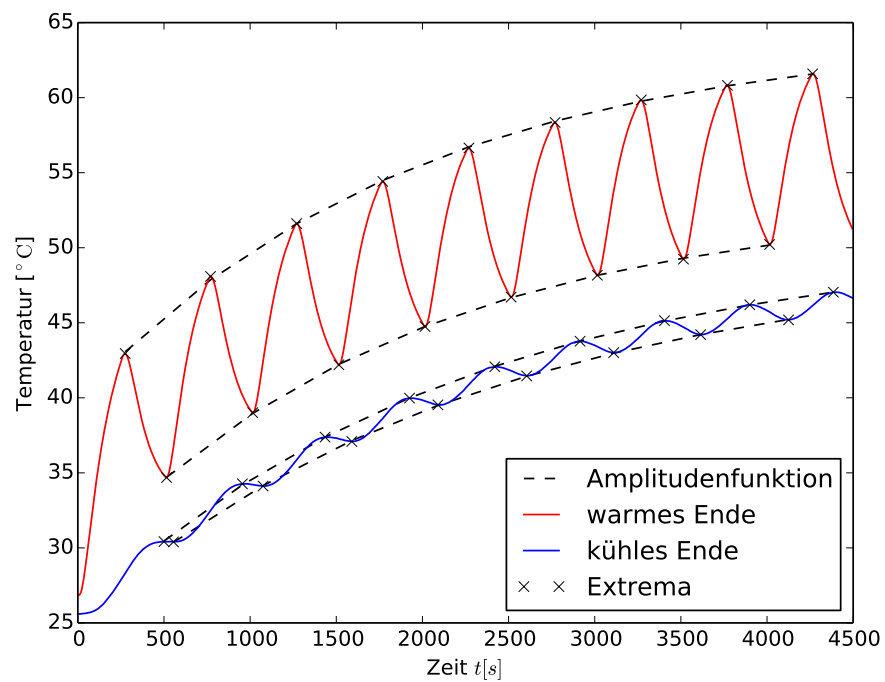




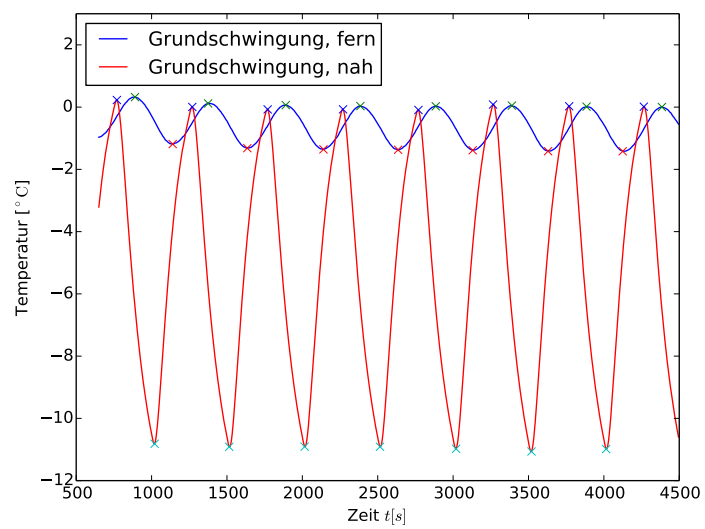
**Abbildung 15:** Zwei Eich-Möglichkeiten von Diagramm 14 auf Grundschiwingung.



**Abbildung 16:** Ausgewählter Teil der Grundschiwingung von Aluminium bei 200 Sekunden-Periode.



**Abbildung 17:** Periodische Messung bei Edelstahl mit 200 Sekunden-Periode sowie Eich-Möglichkeiten auf Grundschwingung.



**Abbildung 18:** Ausgewählter Teil der Grundschiwingung von Edelstahl bei 200 Sekunden-Periode.

## 5 Diskussion

### 5.1 Von der Eichung

Um mit höherer Fehlersicherheit die Amplituden und Phasendifferenzen bestimmen zu können, wird die Temperaturwelle als Überlagerung zweier Funktionen angenommen.

$$f_{\text{Schwingung}} = f_{\text{Grundschiwingung}} + f_{\text{Amplitude}} \quad (11)$$

Die in Abschnitt 4 als Amplitudenfunktion genannte  $e$ -Funktion  $f_{\text{Amplitude}}$  beschreibt das Ansteigen der Schwingung (durch Erwärmung des Stabes im Ganzen), die Grundschiwingung ist im Idealfall eine reine trigonometrische Funktion. Da die Amplitudenfunktionen oben und unten sehr ähnlich sind und sich im Wesentlichen durch  $y$ -Achsenabschnitt voneinander unterscheiden, kann in guter Näherung die Schwingung wie angegeben aufgespalten werden, wodurch die wahre Amplitude  $T_{\text{max}}$  der Grundschiwingung gut angenähert wird. Dies rechtfertigt die Annahme, die Temperaturwelle 5 durch (11) anzunähern.

Würden sich die Amplitudenfunktionen stark unterscheiden, würde dies zu großen Abweichungen führen, da die echte Temperaturwelle 5 keine Superposition von Funktionen ist.

### 5.2 Von der Wärmekapazität

Vergleicht man die Literaturwerte der Wärmekapazitäten für Aluminium, Messing und Edelstahl mit den experimentell gewonnenen Werten wie in Tabelle 4, ergeben sich Abweichungen von  $\approx 60\%$  bei jeder Probe. Trotz der starken Abweichung vom Literaturwert kann eine gute Aussage über das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeiten getroffen werden, wenn die Stäbe untereinander verglichen werden und der absolute Wert nicht interessiert. Die Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  in Abschnitt 4.4 verifiziert somit die Behauptung in Abschnitt 4.1, dass Aluminium in der Auswahl der Metalle die größte und Edelstahl die geringste Wärmeleitfähigkeit aufweist.

### 5.3 Von den Messfehlern und Fehlerrechnung

Wesentliche Fehlerquellen liegen im Ablesen des Abstands  $\Delta x$  der Thermoelemente voneinander und im Einfluss der Raumtemperatur. Das Ablesen geschieht mit einem handelsüblichen Lineal und exaktes Abmessen ist aufgrund der Bauart der Platine schwierig. Gegen den Einfluss der Raumtemperatur wird mit einer Abschirmung benutzt, welche ein übermäßiges, unbeabsichtigtes Abkühlen auf ein vertretbares Maß reduziert. Des Weiteren ist die Präzision der Thermoelemente unbekannt, weshalb eine Fehlerrechnung seitens der Temperatur nicht möglich ist. Eventuelle Unsicherheiten werden in der Auswertung nicht betrachtet. Liegen Verunreinigungen in den Metallen vor, die nicht nachgewiesen werden können, so kann die Vergleich der gemessenen Wärmeleitfähigkeiten mit der Literatur kritisch sein, da die Verunreinigungen Einfluss auf thermodynamische Parameter haben könnten.

Wegen der Unkenntnis über Unsicherheiten in den Temperaturen, der unbeabsichtigten Abkühlung und der sich ergebenden großen Abweichung von dem Literaturwert, wird auf

eine Fehlerbetrachtung verzichtet. Bewandtnis hat der Versuch dann, wenn von zwei Metallen das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeiten bestimmt werden soll. Im Speziellen eignet sich hierzu die statische Messung nach Abschnitt 4.1.

## 6 Daten

### Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/90/1>. Version 1.3.1.
- [2] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001. URL: <http://www.scipy.org/>. Version 0.14.0.
- [3] Travis E. Oliphant. „Python for Scientific Computing“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/10/1>. Version 1.8.1.

Die verwendeten Plots wurden mit *matplotlib*[1] erstellt sowie die Berechnungen mit Python-*Python-Numpy*, [3] durchgeführt. Die Regressionen wurden mithilfe von *curve\_fit* unter *Scipy*[2] erstellt.

Für die Berechnung der Extrema wurde das freie Python-Package *peakdetect* benutzt, dass auf der Internet-Adresse von Eli Billauer als Abwandlung eines *MATLAB*-Skriptes 2012 veröffentlicht wurde.

Die Messwert-Reihen wurden von Maik Becker und Kevin Sedlaczek **nach Rücksprache** mit dem Praktikumsbetreuer übernommen, da Daten wegen **Datenkorruption** verloren wurden.