

Anfängerpraktikum V354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Helena Nawrath
helena.nawrath@tu-dortmund.de

Carl Arne Thomann
arnethomann@me.com

Durchführung: 16. Dezember 2014 Abgabe: 6. Januar 2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

1 Zielsetzung

Ziel des Experimentes ist, anhand einer elektrischen Schaltung das Verhalten eines schwingfähigen Systems zu erkunden. Betrachtet werden eine reine Schwingung und eine erzwungene Schwingung jeweils mit Dämpfung.

2 Theorie

Kann ein schwingfähiges System, nachdem es angeregt wurde, ohne weiteren Einfluss von außen oszillieren, so handelt es sich um eine freie Schwingung. Bleibt der von außen gegebene Antrieb über lange Zeit erhalten, so handelt es sich um eine erzwungene Schwingung. [2]

2.1 Freie Schwingung mit Dämpfung

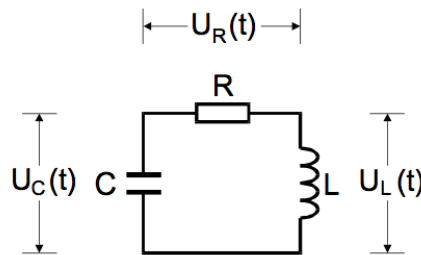


Abbildung 1: Schaltskizze des untersuchten Systems. [v354]

Das System wird in 1 gezeigt, die jeweiligen Spannungsabfälle und -quellen sind eingezeichnet. Nach der Zweiten Kirchhoffschen Regel ist in einer Masche die Summe aller Spannungen gleich Null. Daraus folgt für das System

$$U_R(t) + U_C(t) - U_L(t) = 0 \quad (1)$$

unter Beachtung der Stromrichtung der Komponenten. Mit den allgemeinen Formeln für die Spannung der jeweiligen Schaltkreiskomponente,

$$U_R(t) = RI(t) \quad (2)$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (3)$$

$$U_L(t) = -L \frac{dI(t)}{dt}, \quad (4)$$

und der Substitution $I = \frac{dQ(t)}{dt}$, wird das System mit der Differentialgleichung für den Strom $I(t)$ beschrieben. Es gilt

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC}. \quad (5)$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist

$$I(t) = A_1 \cdot e^{\omega_1 t} + A_2 \cdot e^{\omega_2 t} \quad (6)$$

mit der Abkürzung

$$\omega_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante}}} \quad (7)$$

Durch den Radikanten als Diskriminante sind drei Fälle möglich.

Für $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0$

ist ω in (7) komplex. Es ergibt sich als Lösung für ω

$$\omega_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (8)$$

woraus

$$I(t) = e^{-\frac{R}{2L} t} (A_1 \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t\right) + A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t\right)) \quad (9)$$

folgt. Es kommt zu einer Schwingung, deren Amplitude mit der Zeit abnimmt. Für die Schwingperiode gilt die Thomsonsche Schwingformel

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi LC; \quad (10)$$

die Zeit, in welcher die Amplitude auf den e-Teil des Anfangswertes absinkt, ist

$$T_{\text{ex}} = \frac{2L}{R}. \quad (11)$$

Für $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$

verschwindet der Wurzelterm von ω in (7). Die so vereinfachte Lösung heißt aperiodischer Grenzfall und beschreibt den ausgezeichneten Stromverlauf, der nach Auslenkung die Ruhelage - hier $I(t) = 0 \quad \forall t$ - am Schnellsten wieder erreicht.

Zur allgemeinen Lösung für diesen Fall wird eine zusätzliche Fundamentallösung benötigt. Es gilt

$$I(t) = A_1 e^{-\frac{R}{2L} t} + A_2 t e^{-\frac{R}{2L} t} \quad (12)$$

Für $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0$

ist der Wurzelterm von ω in (7) rein reell. Die so vereinfachte Lösung ist eine exponentielle Abnahme. Es gilt

$$I(t) = A_1 e^{\omega_1 t} + A_2 e^{\omega_2 t} \quad (13)$$

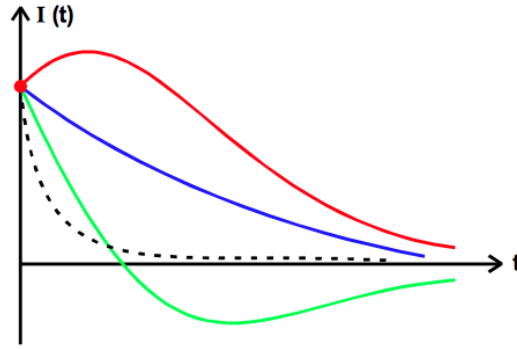


Abbildung 2: Darstellung aller möglichen Stromverläufe. [v354]

2.2 Erzwungene Schwingung mit Dämpfung

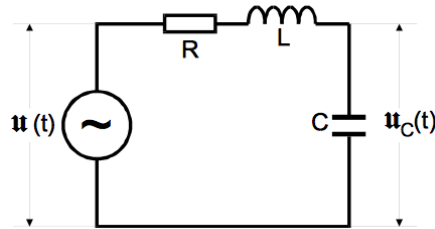


Abbildung 3: Schaltskizze des untersuchten Systems. [v354]

In diesem System wird die Spannung U_C , die am Kondensator anliegt, betrachtet. Analog zu Abschnitt 2.1 beschreibt die Gleichung

$$U_R(t) + U_C(t) - U_L(t) = U(t) \quad (14)$$

mit der Generatorspannung $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$ das System. Mit der Substitution $I = \frac{dQ(t)}{dt}$ und $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$, wird das System mit der Differentialgleichung

$$LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = U_0 e^{i\omega t} \quad (15)$$

beschrieben. Die Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung setzt sich aus homogener und inhomogener Lösung zusammen. Es ist aus Abschnitt 2.1 bekannt, dass die homogene Lösung für große Zeiten gegen Null geht. Mithilfe des Ansatzes $U_C(\omega, t) = \tilde{U}_\omega(\omega) \cdot e^{i\omega t}$, $\tilde{U}_\omega(\omega) \in \mathbb{C}$ ist die komplexe Amplitude mit Phasenwinkel $\arg(\tilde{U}_\omega) = \phi$ und Betrag $|\tilde{U}_\omega| = U_\omega$, ist die inhomogene Lösung von Differentialgleichung (15)

$$U_0 = -LC\omega^2 \tilde{U}_\omega(\omega) + i\omega RC \tilde{U}_\omega(\omega) + \tilde{U}_\omega(\omega) \quad (16)$$

$$U_\omega = U_0 \frac{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}{\left(\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}\right)^2} \quad (17a)$$

$$\tan(\phi) = \frac{\text{Im}(\tilde{U}_\omega)}{\text{Re}(\tilde{U}_\omega)} = \frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2} \quad (17b)$$

Aus (17a) und dem gewählten Ansatz folgt für die Amplitude der Lösungsfunktion der Differentialgleichung (15)

$$|U_C| = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (18)$$

Bei der komplexen Amplitude \tilde{U}_ω treten insbesondere die Sonderfälle

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \tilde{U}_\omega = 0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \tilde{U}_\omega \quad (19)$$

auf. Des Weiteren existiert eine Resonanzfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC - \frac{R^2}{4L^2}}}$, die durch Dämpfung und Eigenfrequenz gegebene neue Schwingfrequenz des Systems. Bei Erregung des Systems mit dieser Frequenz kommt es zur Resonanz; das System schwingt mit einer Spannungsamplitude größer als die Erregeramplitude U_0 . Es gilt dabei, dass die maximale Spannung

$$U_{C,\max} = \underbrace{\frac{1}{\omega_0 RC}}_{\text{Spannungsüberhöhung}} U_0 \quad (20)$$

3 Durchführung

- Man untersuche die Zeitabhängigkeit der Amplitude einer gedämpften Schwingung und bestimme daraus den effektiven Dämpfungswiderstand.
- Man bestimme den Dämpfungswiderstand R , bei dem der aperiodische Grenzfall vorliegt.
- Man messe die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung an einem Serienresonanzkreis.
- Man bestimme die Frequenzabhängigkeit des Phasenwinkels bei erzwungener Schwingung.
- Ehrlich? e) Man messe die Frequenzabhängigkeit des Scheinwiderstandes eines Serienresonanzkreises.

4 Auswertung

In diesem Versuch wird eine Schaltung – Gerät 1 – verwendet, welche aus verschiedenen Bauteilen besteht. Die in Tabelle ?? angegebenen Werte bestimmen maßgeblich die Eigenschaften der Schaltung.

Daten von Gerät 1		
Induktivität L	16,78 mH	$\pm 0,09$ mH
Kapazität C	2,066 nF	$\pm 0,006$ nF
Widerstand R_1	67,2 Ω	$\pm 0,2$ Ω
Widerstand R_2	682 Ω	± 1 Ω

Tabelle 1: Daten der in Gerät 1 verwendeten Bauteile.

Da alle Größen fehlerbehaftet sind fließen diese nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta u = \sqrt{\left(\frac{du}{dv} \Delta v\right)^2 + \left(\frac{du}{dw} \Delta w\right)^2} \quad (21)$$

in die folgenden Rechnungen ein. Alle Grafiken und Ausgleichsrechnungen werden mit PROGRAMM ausgeführt.

4.1 Zeitabhängigkeit der Spannungsamplitude und Dämpfungswiderstand

$t / \mu\text{s}$	$U_{C,\min} / \text{V}$	$t / \mu\text{s}$	$U_{C,\max} / \text{V}$
42	62,60	23	−67,00
80	54,60	61	−57,40
117	45,80	98	−49,40
155	39,40	136	−42,20
193	34,60	175	−36,60
232	29,80	212	−31,00
269	25,00	250	−27,00
306	21,00	288	−23,80
346	19,40	327	−20,60
381	15,40	363	−17,40
421	13,80	402	−15,00
457	11,40	438	−13,40

Tabelle 2: Extrema der Spannungswerte.

In Abbildung 4 ist die Amplitude der Kondensatorspannung U_C gegen die Zeit t aufgetragen, nachdem der Stromkreis durch einen elektrischen Impuls zur Schwingung angeregt

wurde. Mit den eingezeichneten Extremwerten der Spannung, angegeben in Tabelle 2 kann die Schwingungskurve berechnet werden. Die Einhüllende, die nur die Minima und Maxima mit der Schwingungskurve gemein hat, zeigt den für den Schwingfall typischen zeitlichen Verlauf der Spannung. Diese nimmt mit der Zeit exponentiell ab. Dies wird noch

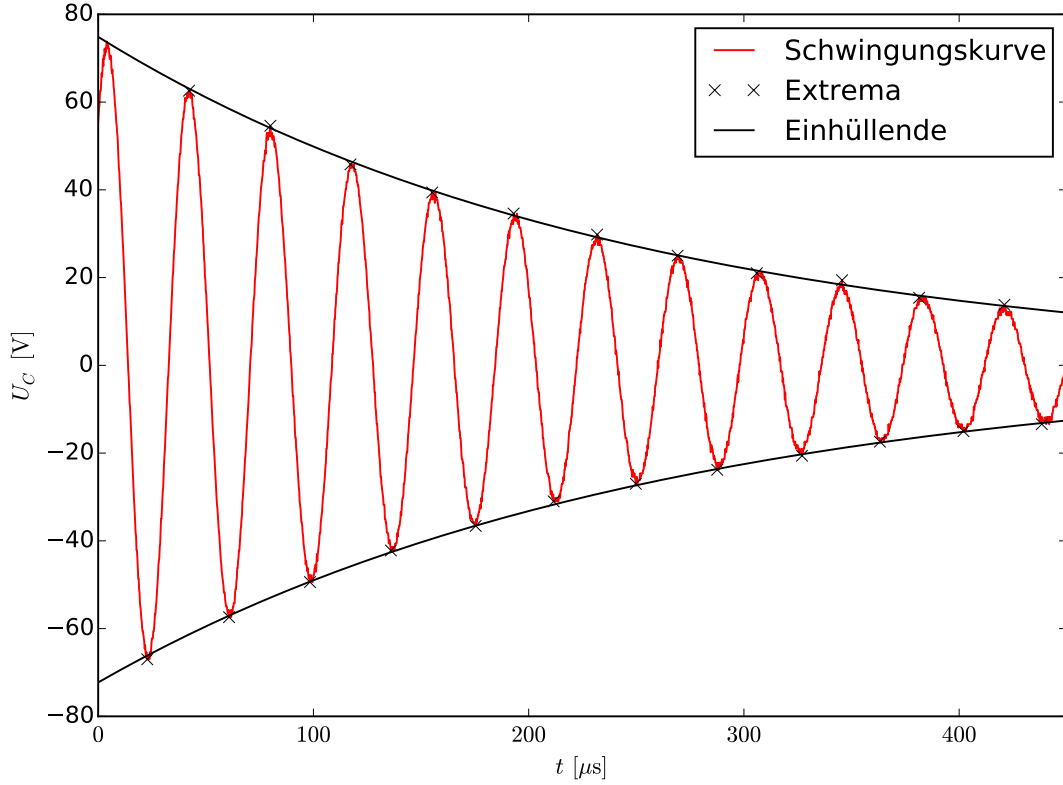


Abbildung 4: Verhalten der Spannung für den Schwingfall.

deutlicher, wenn die Schwingung halblogarithmisch aufgetragen wird. Dafür werden die Minima an der t -Achse gespiegelt. Durch lineare Regression kann mit

$$\ln U_C(t) = \underbrace{\left(-\frac{R}{2L}\right)}_m \cdot t + b \quad (22)$$

eine Ausgleichsgerade

$$g(t) = (-3978.365 \pm 36.562) \frac{1}{s} t + (4.298 \pm 0.010) \quad (23)$$

durch die Messpunkte gelegt werden. m ist dabei die Steigung der Geraden und b der y-Achsenabschnitt. Damit lässt sich $R_{\text{eff}} = (134 \pm 1)\Omega$ berechnen.

Die Abklingdauer T_{ex} wird aus dem negativen Kehrwert der Steigung m gebildet, sodass $T_{\text{ex}} = (0.251 \pm 0.002)\text{s}$ ist. Der theoretische Wert $T_{\text{ex,t}} = \frac{2L}{R}$ ergibt sich zu $T_{\text{ex,t}} = (0.499 \pm 0.003)\text{s}$.

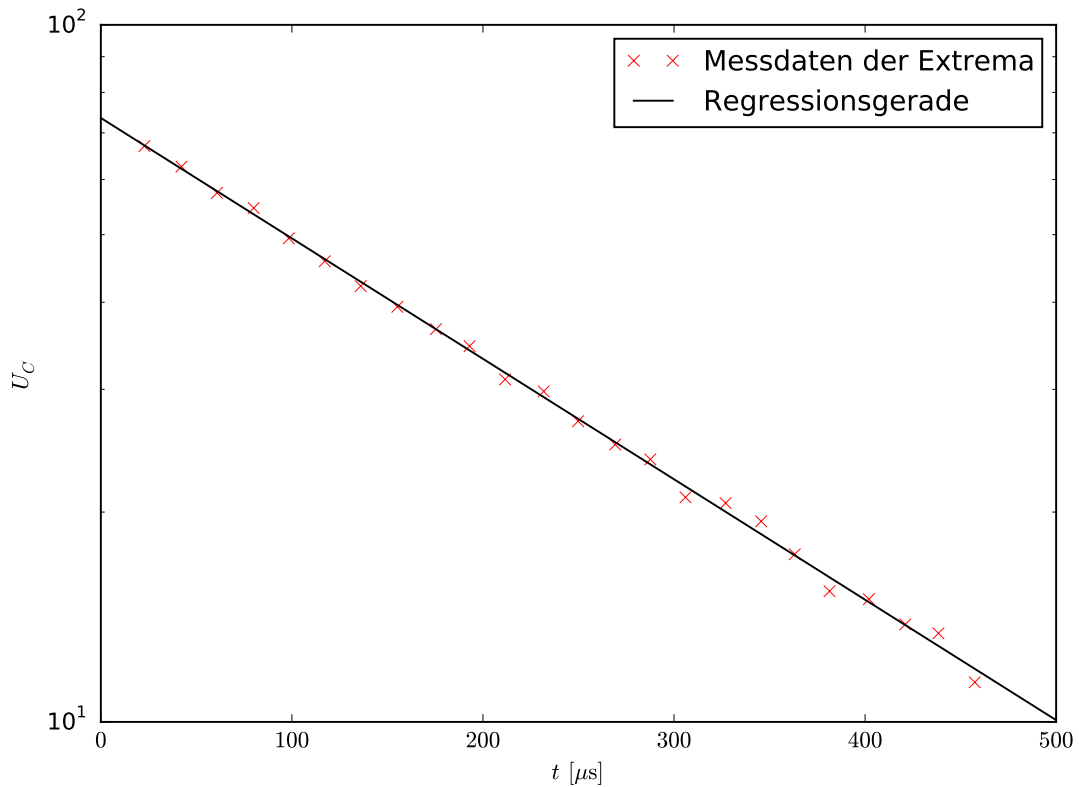


Abbildung 5: Einhüllende der Schwingungskurve, aufgetragen auf halblogarithmischer Skala.

4.2 Aperiodischer Grenzfall im gedämpften Schwingkreis

Der Spannungsverlauf für den aperiodischen Grenzfall wird durch einen Widerstand von $R_{\text{ap}} \approx 4500\Omega$ realisiert. Der Theoriewert ergibt sich aus der Formel $R_{\text{ap,t}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ zu $R_{\text{ap,t}} = (5700 \pm 15)\Omega$. Zum Vergleich sind ebenfalls Schwing- und Kriechfall dargestellt.

4.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Das Verhältnis der Spannungen $\frac{U_C}{U_0}$ wird gegen die Frequenz f aufgetragen. Es ergibt sich eine Resonanzkurve, deren Maximum bei $f_{\text{res}} \approx 26\text{kHz}$ liegt. Bei dieser Frequenz ist die Kondensatorspannung größer als die angelegte Spannung U_0 . Für die Resonanzüberhöhung ergibt sich aus der Messung $q = \frac{U_{C,\text{max}}}{U_0}$ der Wert $q = 5.556$ bei einer maximalen Kondensatorspannung $U_{C,\text{max}} = 160\text{V}$. Theoretisch ergibt sich $q_t = \frac{1}{R_2} \sqrt{\frac{L}{C}}$ zu $q_t = 5 \pm 1$.

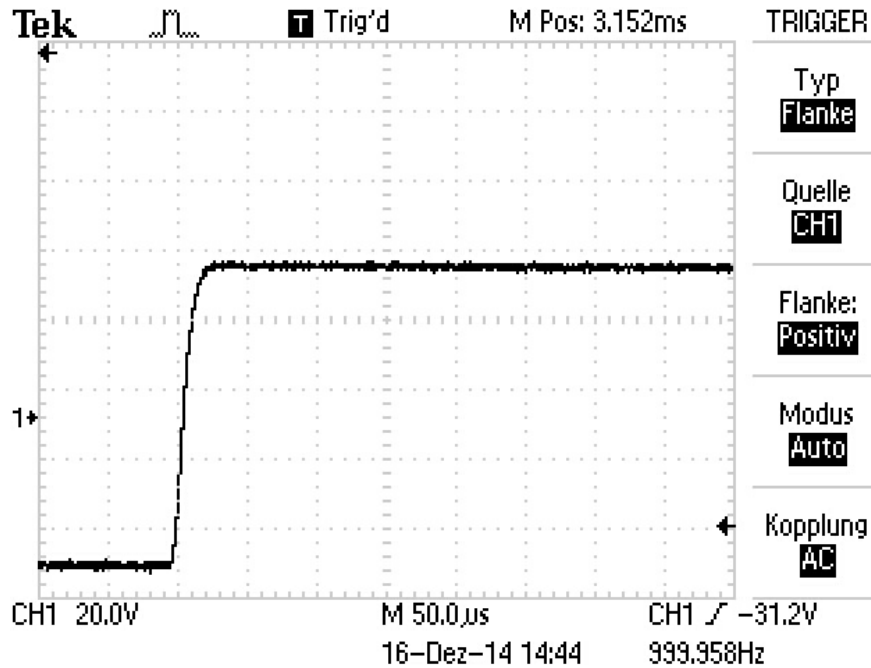
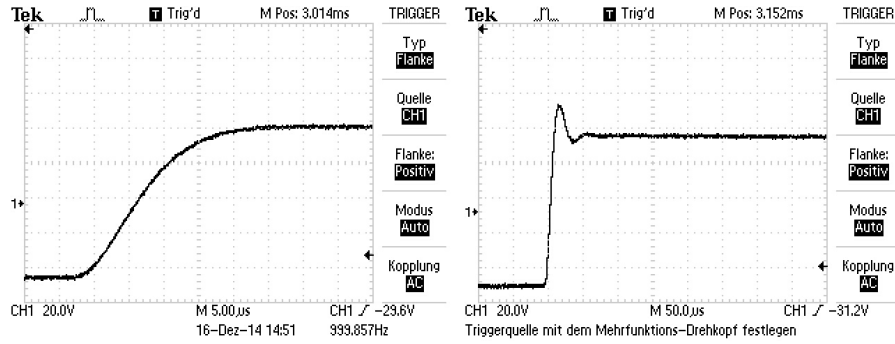


Abbildung 6: Screenshot des aperiodischen Grenzfalls.

Für die Breite der Resonanzkurve werden $f_{\pm} = \frac{U_{C,\max}}{\sqrt{2}}$ berechnet und anschließend die Differenz $f_{+} - f_{-}$ gebildet. Damit sind $f_{+} = 29\text{kHz}$, $f_{-} = 22\text{kHz}$ und $\Delta f = 7\text{kHz}$. Die theoretische Resonanzbreite ist $\Delta f_t = (6500 \pm 40)\text{kHz}$.

4.4 Frequenzabhängigkeit der Phasendifferenz

In Tabelle ?? ist die frequenzabhängige Zeitdifferenz Δt zwischen den Nulldurchgängen der Sinusspannung des Frequenzgenerators und der Kondensatorspannung. Die Phase φ ist in Abbildung SPAAASS gegen die Frequenz aufgetragen. Phase und Zeitdifferenz sind über $\varphi(f) = \Delta t f 2\pi$ verknüpft. Für große Frequenzen nähert sich die Phase dem stationären Wert π an. In der Abbildung ist zu erkennen, dass die Phasendifferenz erst langsam wächst, um mit zunehmender Frequenz schneller anzusteigen. Je näher die Frequenz an der Resonanzfrequenz liegt, desto steiler ist die Kurve. Es ist ersichtlich, dass um die Resonanzfrequenz die Kurve als linear angenähert werden kann. Die Linearität erstreckt sich über $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$. Dieser Bereich wird in Abbildung XY linear dargestellt.



(a) Kriechfall.

(b) Schwingfall.

Abbildung 7: Schwing- und Kriechfall zum Vergleich.

f /kHz	U_C /V	U_0 /V	f /kHz	U_C /V	U_0 /V
10,0	48	44,0	28,0	136,0	40,8
11,0	52	44,0	28,5	128,0	41,6
12,0	54	44,0	29,0	118,0	41,6
13,0	58	44,0	29,5	108,0	41,6
14,0	60	44,0	30,0	100,0	41,6
15,0	64	44,0	30,5	94,0	41,6
16,0	66	44,0	31,0	88,0	42,4
17,0	72	44,0	32,0	76,0	43,2
18,0	78	44,0	33,0	66,0	43,2
19,0	84	44,0	34,0	56,0	43,2
20,0	92	43,2	35,0	49,0	43,2
20,5	96	43,2	36,0	44,8	43,2
21,0	102	43,2	37,0	40,8	43,2
21,5	108	43,2	38,0	36,8	43,2
22,0	114	43,2	39,0	33,6	43,2
22,5	120	42,4	40,0	30,8	43,2
23,0	128	42,4	41,0	28,4	43,2
23,5	136	42,4	42,0	26,4	43,2
24,0	142	42,4	43,0	24,4	43,2
24,5	150	42,4	44,0	22,8	43,2
25,0	156	41,6	45,0	21,6	43,2
25,5	158	41,6	46,0	20,0	43,2
26,0	160	41,6	47,0	18,8	43,2
26,5	158	40,8	48,0	18,0	43,2
27,0	152	40,8	49,0	16,8	43,2
27,5	144	40,8	50,0	16,0	43,2

Tabelle 3: Messdaten der Kondensator- und Generatorspannung zu verschiedenen Frequenzen.

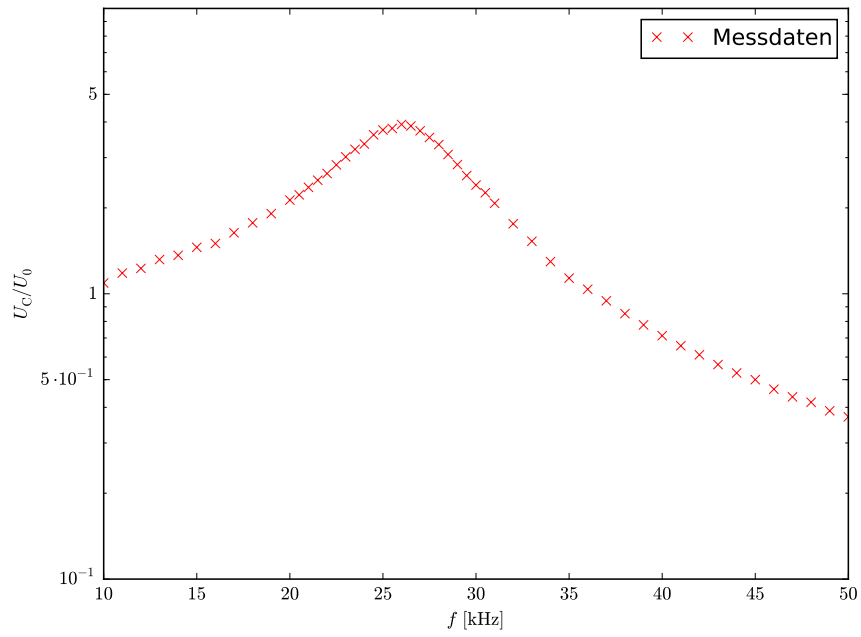


Abbildung 8: Screenshot des aperiodischen Grenzfalls.

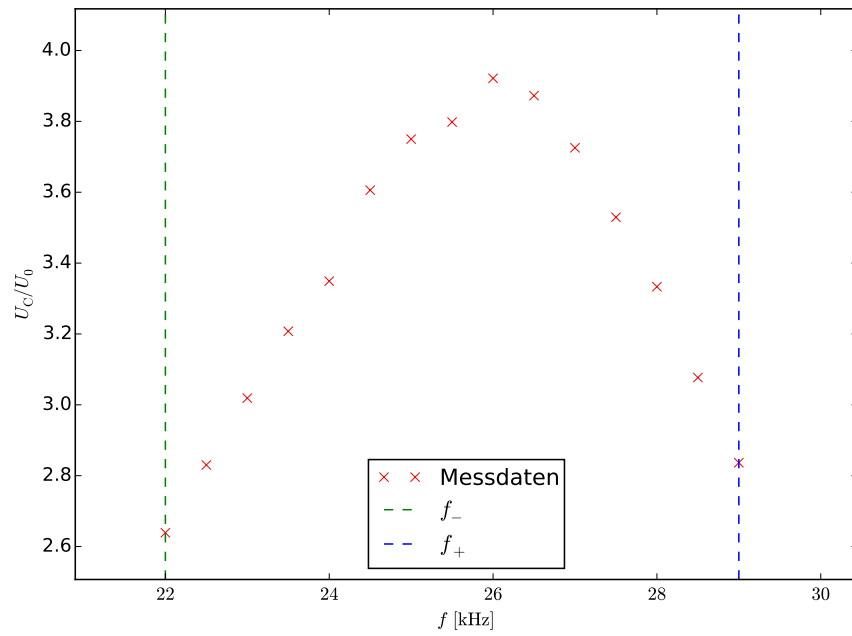


Abbildung 9: Screenshot des aperiodischen Grenzfalls.

f /kHz	Δt / μ s	f /kHz	Δt / μ s
10,0	2,0	28,0	11,6
11,0	2,0	28,5	11,8
12,0	2,0	29,0	12,4
13,0	2,4	29,5	12,2
14,0	2,4	30,0	12,8
15,0	2,8	30,5	13,0
16,0	2,8	31,0	12,4
17,0	2,8	32,0	12,6
18,0	3,2	33,0	12,4
19,0	3,2	34,0	12,6
20,0	3,6	35,0	12,2
20,5	4,0	36,0	11,8
21,0	4,0	37,0	11,6
21,5	4,2	38,0	12,0
22,0	4,6	39,0	11,6
22,5	4,8	40,0	11,4
23,0	5,4	41,0	11,4
23,5	5,4	42,0	11,2
24,0	6,0	43,0	11,0
24,5	6,4	44,0	10,8
25,0	7,6	45,0	10,4
25,5	8,2	46,0	10,2
26,0	9,2	47,0	10,2
26,5	9,6	48,0	9,6
27,0	10,4	49,0	9,6
27,5	11,2	50,0	9,6

Tabelle 4: Messdaten der Phasendifferenz zu verschiedenen Frequenzen.

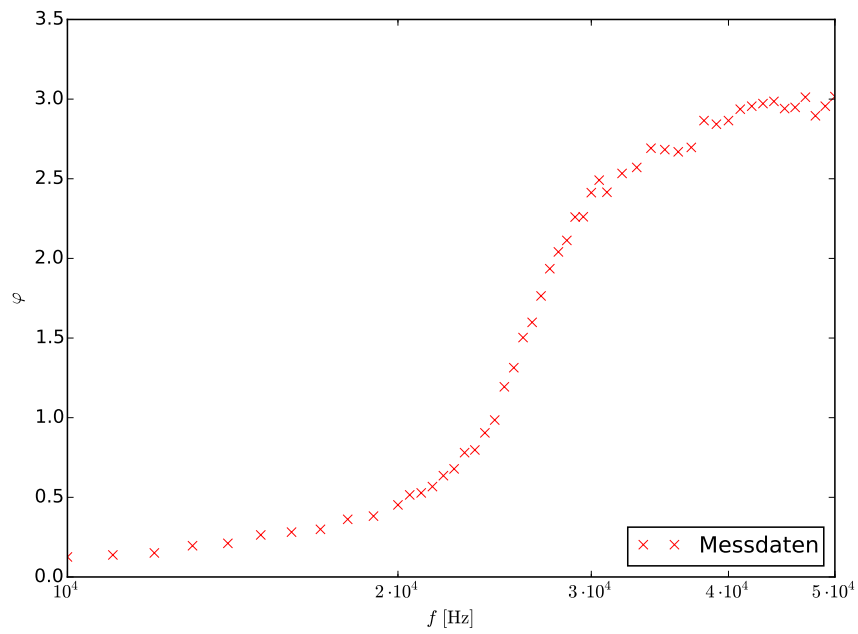


Abbildung 10: Screenshot des aperiodischen Grenzfalls.

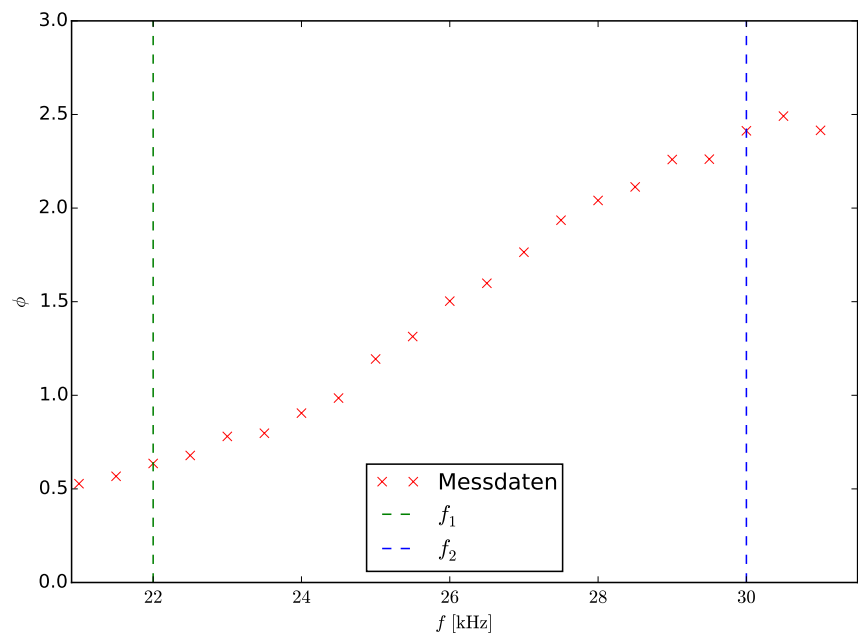


Abbildung 11: Screenshot des aperiodischen Grenzfalls.

5 Diskussion

Im Fall der gedämpften Schwingung fällt die Spannung exponentiell ab. Die einhüllende Exponentialfunktion in Abbildung XY stimmt gut mit den Messwerten überein. Der Dämpfungswiderstand $R_{\text{eff}} = (134 \pm 1)\Omega$ weist eine Abweichung von 99.40% vom Gerätewiderstand $R_1 = (67.2 \pm 0.2)\Omega$ auf. Der relativ große Fehler wird durch in der Rechnung nicht betrachtete Leitungs-, Bauteil- und Generatorinnenwiderstände hervorgerufen. Unter Berücksichtigung dieser Widerstände würde sich für den Gesamtwiderstand ein größerer Wert ergeben. Vergleicht man die gemessene und theoretische Abklingdauer miteinander ergibt sich eine Abweichung von 49.70% bei $T_{\text{ex}} = (0.251 \pm 0.002)\text{s}$ und $T_{\text{ex,theo}} = (0.499 \pm 0.003)\text{s}$.

Der aperiodische Grenzfall wird bei einem gemessenen Widerstand von $R_{\text{ap}} = 4500\Omega$ realisiert. Der theoretisch ermittelte Widerstand $R_{\text{ap,theo}} = 5700\Omega$ weicht um 26.67% ab.

Zwischen den experimentell bestimmten und theoretisch errechneten Resonanzüberhöhungen liegt nur eine geringe Abweichung vor, obwohl viele fehlerbehaftete Größen in deren Berechnung einfließen. $q = 5.556$ und $q_{\text{theo}} = (5 \pm 1)$ unterscheiden sich um 11.12%.

Wegen der schwankenden Amplitude U_0 lässt sich der Maximalwert der Kondensatorspannung eher ungenau bestimmen. Der ermittelte Wert gibt Informationen über Güte und daher die maximal erreichbare Spannung wider.

Die Schärfe der Resonanz wird über die Resonanzbreite dargestellt. Die Abweichung von 7.69% zwischen ist gering trotz der Tatsache, dass f_+ und f_- sich durch Auswählen der Messwerte ergeben, zugehörig zu den Bruchteilen der Maximalspannung. Das heißt, dass die Genauigkeit durch die Auflösung der Messwertbestimmung und der Genauigkeit der Messwerte gegeben ist.

Bei geringen Frequenzen – gegenüber der Resonanzfrequenz – tritt ein geringer Phasenunterschied auf, der mit steigender Frequenz zunimmt. Auch hier stimmt die experimentelle Tatsache mit dem theoretischen arctan-Zusammenhang überein. Eine lineare Darstellung im Resonanzbereich gelingt gut; an den Rändern ergeben sich geringe Abweichungen durch einen etwas zu groß gewählten Resonanzbereich.

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/90/1>. Version 1.3.1.
- [2] Horst Kuchling. *Taschenbuch der Physik*. Hanser Verlag, 2011.

- [3] Travis E. Oliphant. „Python for Scientific Computing“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/10/1>. Version 1.8.1.
- [4] The GIMP Team. *GIMP: GNU Image Manipulation Program*. URL: <http://www.gimp.org/>. Version 2.8.10.

Die verwendeten Plots wurden mit *matplotlib*[1] und die Grafiken mit *GIMP*[4] erstellt und/oder bearbeitet. Die Berechnungen wurden mit *Python-Numpy*, [3] durchgeführt.