ANFÄNGERPRAKTIKUM V101

Das Trägheitsmoment

Helena Nawrath
helena.nawrath@tu-dortmund.de

Carl Arne Thomann
arnethomann@me.com

Durchführung: 28. Oktober 2014 Abgabe: 04. November 2014

TU Dortmund – Fakultät Physik

1 Ziel

Es werden die Trägheitsmomente verschiedener Körper gemessen und anschließend mit den theoretisch errechneten Werten verglichen. Hierzu werden die Winkelrichtgröße D und das Trägheitsmoment der Drillachse I_{D} bestimmt.

2 Theorie

Translation und Rotation verbinden Analogien. Bei Rotationen sind das Drehmoment $\vec{M}$, das Trägheitsmoment I und die Winkelbeschleunigung $\dot{\vec{\omega}}$ maßgebliche Größen. Das Drehmoment $\vec{M}$ mit $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ ist abhängig von der Kraft $\vec{F}$, welche im Abstand $|\vec{r}|$ von der Drehachse angreift. Ausgedrückt über die Winkelrichtgröße D und die Auslenkung des Winkels ϕ ist der Betrag des Drehmomentes ebenfalls

$$|\vec{M}| = D\phi. \tag{1}$$

Das Trägheitsmoment I ist, analog zur trägen Masse m in Translationen, der Widerstand eines Drehmoments $\vec{M}$. Es gilt für Drehachsen durch den Masseschwerpunkt S

$$I_{\mathrm{S}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2 \tag{2}$$

für diskrete Massestücke m_i im Abstand r_i von der Rotationsachse und

$$I_{\mathrm{S}} = \int_{m_{\mathrm{K}}} r_i^2 \mathrm{d}m \tag{3}$$

$$= \int_{V_{\mathrm{K}}} \rho(\vec{r}) \cdot r_{\perp}^2 \mathrm{d}V \tag{4}$$

für kontinuierliche Masseverteilungen mit Massenverteilung $\rho(\vec{r})$. Ist die Drehachse um a parallel zur Achse durch den Schwerpunkt verschoben, so kann das Trägheitsmoment I_a unter Zuhilfenahme des Satzes von Steiner berechnet werden,

$$I_a = I_{\mathrm{S}} + m_{\mathrm{K}} \cdot a^2. \tag{5}$$

Mechanische Drehschwingungen führen harmonische Schwingungen mit der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \tag{6}$$

für kleine Auslenkungswinkel ϕ aus. Die Winkelrichtgröße D berechnet sich bei $\vec{F} \perp \vec{r}$ mit Formel (1) und (6) zu

$$D = \frac{F \cdot r}{\phi} \tag{7}$$

$$= 4\pi^2 \cdot \frac{I}{T^2}. \tag{8}$$

3 Aufbau und Durchführung

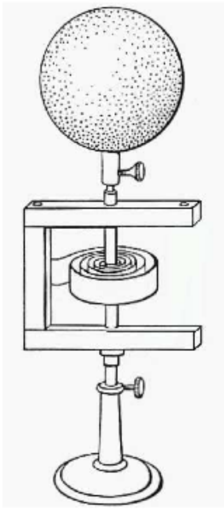


Abbildung 1: Skizze des Versuchsaufbaus mit Kugel als Probekörper

In diesem Versuch wird die gezeigte Apparatur verwendet. Eine drehbar gelagerte Achse ist über eine Spiralfeder an einen festen Rahmen gebunden. In das obere Ende der Drillachse können verschiedene Körper eingespannt und der Auslenkwinkel ϕ anhand einer Skala abgelesen werden.

3.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße D

Zur Bestimmung der Winkelrichtgröße D wird gemäß (1) das Drehmoment $\vec{M}$ und der Auslenkwinkel ϕ ermittelt. Hierzu wird eine Metallstange so in die Vorrichtung eingespannt, dass die Drehachse durch den Stangenschwerpunkt verläuft senkrecht zur Drehachse steht. Eine im Abstand r zum Drehzentrum angehängte Federwaage misst die Kraft F ausgehend vom rücktreibenden Drehmomentes bei Auslenkung der Metallstange um einen ausgewählten Winkel ϕ. Zu beachten ist, dass die Federwaage senkrecht zum Stab und zur Rotationsachse sein muss. Dadurch kann der Betrag des Drehmoments M durch

$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin(\angle(\vec{r}) \tag{9}$$

berechnet werden. Diese Messung wird für 10 verschiedene Winkel ϕ zwischen 0 und 2π durchgeführt.

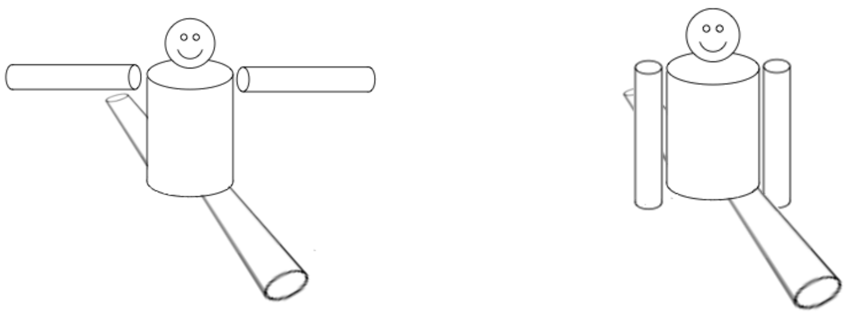
3.2 Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes I_{D} der Drillachse

Auf die Metallstange aus Kapitel 3.1 wird beidseitig im Abstand a von der Drehachse je eine Masse befestigt. Die Stange wird um ϕ ausgelenkt und mittels einer Stoppuhr die Schwingungsdauer T für 2 Perioden gemessen. Es wird ein neuer Abstand a gewählt und das Verfahren wiederholt, sodass insgesamt 10 Messwerte für Schwingungsdauer T aufgenommen werden. Masse und Abmessungen der Massestücke werden mit Waage und Schieblehre bestimmt.

3.3 Bestimmung der Trägheitsmomente I verschiedener Körper

Als erster Körper wird ein Styroporzylinder gewählt, welcher senkrecht auf die Drillachse gesteckt wird. Anschließend wird der Körper in Schwingung versetzt und die Schwingungsdauer T für 5 Schwingungen insgesamt 10 Mal gemessen. Das Verfahren wird für den zweiten Körper, eine Kugel, analog wiederholt. Abmessungen und Masse der Probekörper werden mittels Schieblehre und Waage bestimmt.

3.4 Bestimmung der Trägheitsmomente I der Modellpuppe für zwei verschiedene Positionen



(a) Position (1) der Modellpuppe

(b) Position (2) der Modellpuppe

Die Puppe wird jeweils in Position (1) und in Position (2) in die Messvorrichtung eingespannt und der Messvorgang analog zu Kapitel 3.3 durchgeführt. Es folgen die Bestimmung des Gewichtes mit einer Waage und die Vermessung der einzelnen Körperteile der Puppe. Es werden Durchmesser und ggf. die Länge von Armen, Beinen, Kopf und Rumpf mit einer Schieblehre vermessen.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße D

Winkel		Kraft
ϕ	ϕ/ rad	F/ N
45°	$\frac{\pi}{4}$	0.22
90°	$\frac{\pi}{2}$	0.40
120°	$\frac{2\pi}{3}$	0.52
135°	$\frac{3\pi}{4}$	0.60
180°	π	0.78
225°	$\frac{5\pi}{4}$	0.92
240°	$\frac{4\pi}{3}$	0.90
270°	$\frac{3\pi}{2}$	1.08
315°	$\frac{7\pi}{4}$	1.26
360°	2π	1.42

Tabelle 1: Messung zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes der Drillachse

Mit den Messwerten aus Tabelle **??** und $r = 0.09965$m lässt sich die Winkelrichtgröße D mit der Gleichung (**??**) bestimmen. Die Unsicherheit ist die Standardabweichung des Mittelwertes σ_D mit

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} := \sqrt{\frac{1}{n^2 - n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2} \tag{10a}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i . \tag{10b}$$

für $x = D$. Es ergibt sich

$$D = (0.0757 \pm 0.0019)\mathrm{N\,m} \tag{11}$$

4.2 Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes I_D

Zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes I_D wird die verwendete Stange als nahezu masselos angenommen, wodurch ihr Anteil am Trägheitsmoment vernachlässigbar ist. Das gemessene Trägheitsmoment setzt sich aufgrund der Linearität des Trägheitsmomentes aus den Trägheitsmomenten der Massestücke m_1 und m_2 als Punktmassen, sowie dem Eigenträgheitsmoment I_D zusammen,

$$I = I_D + I_{m_1} + I_{m_2} . \tag{12}$$

Nach Einsetzen in Gleichung (7) wird der lineare Zusammenhang von T^2 und a^2 ersichtlich. Es gilt

$$\begin{aligned}
D &= 4\pi^2 \cdot \frac{I}{T^2} \\
&= 4\pi^2 \cdot \frac{I_D + I_{m_1} + I_{m_2}}{T^2} \\
&= 4\pi^2 \cdot \frac{I_D + a^2(m_1 + m_2)}{T^2} \\
T^2 &= 4\pi^2 \frac{I_D}{D} + 4\pi^2 \frac{a^2(m_1 + m_2)}{D}
\end{aligned}$$

$$T^2 = \underbrace{4\pi^2 \frac{(m_1 + m_2)}{D}}_{m_{\text{Reg}}} \cdot a^2 + \underbrace{4\pi^2 \frac{I_D}{D}}_{b_{\text{Reg}}} \tag{13}$$

Zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments I_D werden die gemittelten Schwingperioden-Quadrate T^2 gegen das Abstandsquadrat a^2 aufgetragen. Aus der Regression mittels der Formeln

$$\mathit{\Delta} = N \sum x^2 - \left(\sum x\right)^2 \tag{14a}$$

$$m_{\text{Reg}} = \frac{N \sum x \cdot y - \sum x \cdot \sum y}{\mathit{\Delta}} \tag{14b}$$

$$b_{\text{Reg}} = \frac{\sum x^2 \cdot \sum y - \sum x \cdot \sum x \cdot y}{\mathit{\Delta}} \tag{14c}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y - m_{\text{Reg}} \cdot x - b_{\text{Reg}})^2}{N - 2}} \tag{14d}$$

$$\sigma_m = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\mathit{\Delta}}} \tag{14e}$$

$$\sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\mathit{\Delta}}} \tag{14f}$$

für $x = a^2$, $y = T^2$ und der Identität aus Gleichung (**??**), wird das Eigenträgheitsmoment I_D berechnet

$$I_D = \frac{D}{4\pi^2} b_{\text{Reg}} \tag{15}$$

$$= (9.26 \pm 0.23) 10^{-3} \text{kg}\,\text{m}^2 \tag{16}$$

Abstand	Schwingungsdauer				Masse	
a / cm	$2T_1$ / s	T_1 / s	$2T_2$ / s	T_2 / s	m_1 / g	m_2 / g
6,4925	5,90	2,950	5,90	2,950	221,74	221,73
8,4925	6,55	3,275	6,46	3,230	221,74	221,73
10,9925	7,29	3,645	7,21	3,605	221,75	221,73
13,7925	8,66	4,330	8,63	4,315	221,76	221,75
16,6925	10,07	5,035	10,10	5,050	221,75	221,74
19,0925	11,13	5,565	11,15	5,575	221,75	221,74
20,4925	11,92	5,960	11,76	5,880	221,75	221,73
22,4925	13,03	6,515	13,00	6,500	221,76	221,74
24,5925	14,10	7,050	13,96	6,980	221,75	221,75
29,5925	16,67	8,335	16,73	8,365	221,76	221,74

Tabelle 2: Messung zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes der Drillachse

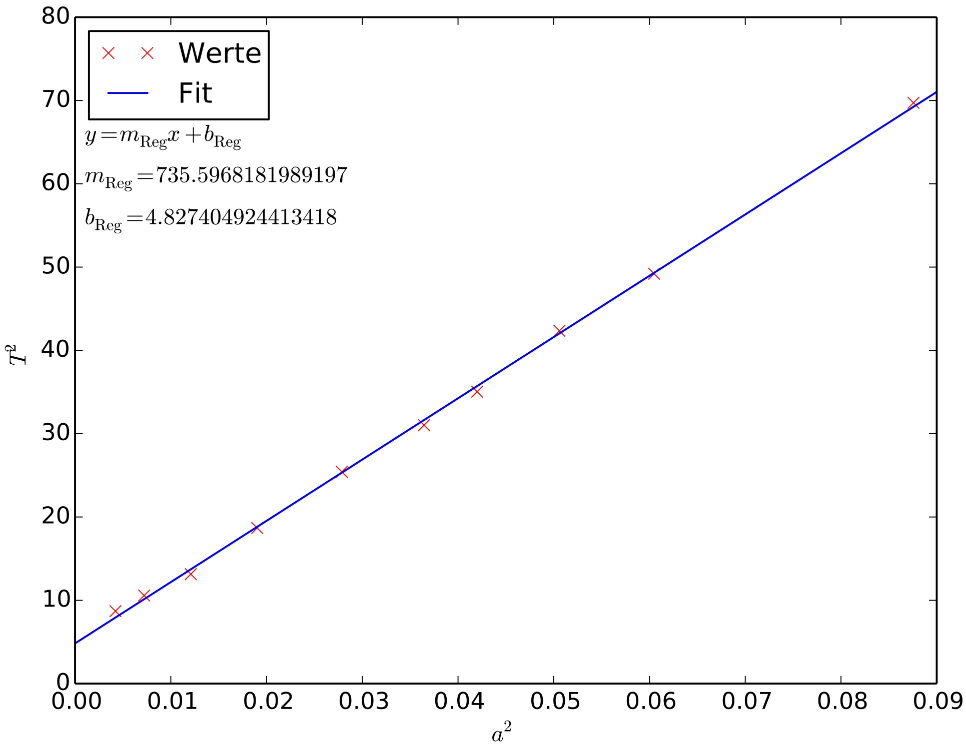


Abbildung 3: Regression von T^2 gegen a^2

4.3 Trägheitsmoment I_Z eines Zylinders

Schwingungsdauer		Abmessungen		Masse
$5T/$ s	$T/$ s	Höhe $H/$ cm	Durchmesser $D/$ cm	$M/$ g
4,41	0,882	10,120	9,848	368,57
4,35	0,870	10,150	9,850	368,57
4,44	0,888	10,120	9,844	368,57
4,44	0,888	10,102	9,840	368,57
4,36	0,872	10,112	9,844	368,57
4,41	0,882	10,112	9,850	368,58
4,32	0,864	10,058	9,850	368,59
4,40	0,880	10,070	9,844	368,57
4,33	0,886	10,068	9,844	368,58
4,39	0,878	10,072	9,850	368,57

Tabelle 3: Messung zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes eines Zylinders

Mit bekannter Winkelrichtgröße D wird die Gleichung (7) benutzt, um das Trägheitsmoment aus der Schwingungsdauer T zu berechnen. Der Fehler des Trägheitsmomentes wird mithilfe der Gausschen Fehlerfortpflanzung mit

$$\sigma = \sqrt{\sum_i^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \Delta x_i^2} \tag{17}$$

bestimmt Es ergibt sich

$$I_Z = (1.48 \pm 0.04)10^{-3}\mathrm{kg\,m^2} \tag{18}$$

Das sichtbare Material der Zylinders ist Styropor-ähnlich. Da die gemessene Masse des Zylinders, $m_Z = (368.5740 \pm 0.0022)$g, stark von der theoretischen Masse eines Styropor-Zylinders gleicher Maße, $m_{\text{Theorie}} = \rho_{\text{Styropor}} V = (807.4 \pm 0.8)$g, abweicht, wird die Vermutung angestellt, dass der Körper ein Hohlzylinder ist oder dass der Körper nicht vollständig aus Styropor besteht. Zur Bestimmung der Geometrie des vermuteten Styropor-Hohlzylinders wird die Formel für Hohlzylinder-Volumen mit der Dichte ρ_{Styropor} multipliziert und mit der gemessenen Masse gleichgesetzt. Dabei gilt die Annahme, dass die

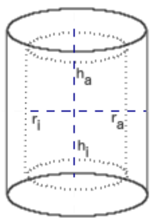


Abbildung 4: Bezeichnungen des Hohlzylinders

Stärke des Hohlzylinders für Mantel, Deckel und Boden gleich sind, $r_a - r_i = h_a - h_i$. Die so von zwei Unbekannten r_i und h_i auf eine Unbekannte r_i reduzierte Gleichung

$$m_{\mathrm{Z}} = \rho(-2\pi * (r_i)^3 + (r_i)^2 * (2\pi r_a - \pi h_a) + (\pi h_a r_a^2) \tag{19}$$

ergibt für den Innenradius $r_i = 0.0401012\mathrm{m}$.

Das Trägheitsmoment eines solchen Hohlzylinders setzt sich zusammen aus den Trägheitsmomenten eines Zylindermantels und zwei Kreisscheiben, die um ihren Mittelpunkt rotieren.

$$I_{\text{HZ, Theorie}} = I_{\text{Zylindermantel}} + 2I_{\text{Kreisscheibe}}$$
$$I_{\text{HZ, Theorie}} = m_{\text{Mantel}}\frac{r_i^2 + r_a^2}{2} + m_{\text{Kreisscheibe}} r_i^2$$

Man erhält

$$I_{\text{HZ, Theorie}} = (6.256306729 \pm Fehler)10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2} \tag{20}$$

4.4 Trägheitsmoment I_{K} einer Kugel

Schwingungsdauer		Abmessungen	Masse
$5T$/ s	T/ s	Durchmesser D/ cm	M/ g
8,60	1,720	13,745	812,7
8,56	1,721	13,730	812,7
8,61	1,722	13,720	812,7
8,58	1,716	13,745	812,7
8,56	1,721	13,750	812,7
8,61	1,722	13,740	812,7
8,55	1,710	13,750	812,7
8,61	1,722	13,710	812,7
8,60	1,720	13,745	812,7
8,61	1,722	13,730	812,7

Tabelle 4: Messung zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes einer Kugel

Analog zu 4.3 wird über die Schwingungsdauer T das Trägheitsmoment I_{K} der Kugel zu

$$I_K = (5.67 \pm 0.14)10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2} \tag{21}$$

Das sichtbare Material der Kugel ist Styropor-ähnlich. Für die theoretische Berechnung des Trägheitsmomentes wird eine Styropor-Vollkugel angenommen. Mit $I_K = \frac{2}{5} m_{\text{Kugel}} r^2$ ist

$$I_{\text{K, Theorie}} = (1.5335 \pm 0.0010)10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2} \tag{22}$$

5 Diskussion

Ja, es existiert.