

Anfängerpraktikum V408

Geometrische Optik

Helena Nawrath
helena.nawrath@tu-dortmund.de

Carl Arne Thomann
arnethomann@me.com

Durchführung: 14. April 2015 Abgabe: 21. April 2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

1 Ziel

Versuchsziel ist es, Brennweiten verschiedener Linsen sowohl mit Hilfe der Linsengleichung als auch mit der Methode nach BESSEL zu berechnen. Außerdem werden Brennweite und Lage der Hauptebenen eines Linsensystems mit der Methode nach ABBE bestimmt.

2 Theorie

Nach der geometrischen Optik breitet sich Licht in Form von Strahlen aus. Dies ist eine gültige Näherung, wenn alle Abmessungen einer Apparatur groß gegenüber der Wellenlänge des Lichtes sind. Tritt ein Lichtstrahl in ein Medium mit anderer optischer Dichte, wird er nach dem SNELLIUS'schen Brechungsgesetz gebrochen. Diese Brechung wird für die Konstruktion von Linsen, deren Material die Dichte von Luft übersteigt, benutzt. In Abhängigkeit von der Dicke und Krümmung weisen Linsen verschiedene Eigenschaften auf.

Sammellinsen sind konvex gekrümmt und bündeln parallel eintreffende Lichtstrahlen im Brennpunkt. Dieser Brennpunkt befindet sich im Abstand f , der Brennweite, von der Mittelebene entfernt. Wird ein Gegenstand im Abstand der doppelten Brennweite von der Linse aufgestellt, entsteht im gleichen Abstand auf der anderen Seite der Linse ein reelles Bild von dem Objekt. Im Allgemeinen wird der Abstand zwischen Linsenmittelachse und Bild als *Bildweite* b , der Abstand zwischen Linsenmittelachse und Gegenstand als *Gegenstandsweite* g bezeichnet. Beide Größen b , g sind Projektionsweiten und sind bei Sammellinsen positiv.

Zerstreuungslinsen sind konkav gekrümmt und zerstreuen parallel auftreffende Lichtstrahlen. Der virtuelle Schnittpunkt der Lichtstrahlen, die als parallele Lichtstrahlen von der Linse zerstreut wurden, ist der virtuelle Brennpunkt der Linse. Bei Zerstreuungslinsen sind Projektions- und Brennweite negativ. Der Strahlengang wird durch Parallel-, Brennpunkt- und Mittelpunktstrahl wie in Abbildung 2 dargestellt.

Durchquert ein Lichtstrahl eine dünne Linse, wird er an der Mittelebene gebrochen. Die Brechkraft D – der Kehrwert der Brennweite f mit der Einheit $\text{dpt} = 1/\text{m}$ – kann für dünne Linsen berechnet werden mit der *Linsengleichung*

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}. \quad (1)$$

Über das *Abbildungsgesetz*

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (2)$$

mit Bildgröße B und Gegenstandsgröße G wird die Bildvergrößerung V bestimmt.

Anders als bei dünnen Linsen geschieht die Brechung bei einer dicken Linse an zwei Hauptebenen, H und H' , da der Strahl einen weiteren Weg im Medium zurücklegt.

Relativ zu den Hauptebenen sind, wie in Abbildung 2 erkennbar, b , b' und g , g' die kennzeichnenden Größen der Linse.

Es treten bei der Verwendung von Linsen *Abbildungsfehler* auf. Die Näherung der geometrischen Optik gilt nur für achsennahe Strahlen, achsenferne Strahlen befinden sich weit von der optischen Achse eines Systems entfernt und werden stärker gebrochen. Dadurch liegt der Brennpunkt der achsenfernen Strahlen nicht auf dem Brennpunkt der achsen-nahen Strahlen, wodurch nicht das gesamte Licht durch die Linse scharf abgebildet wird. Dieses Phänomen wird *sphärische Aberration* genannt.

Ist die optische Dichte von dem Linsenmaterial abhängig von der Wellenlänge des Lichtes, kommt es zur *chromatischen Aberration*. Wird nicht-monochromatisches Licht durch eine Linse geschickt, liegen die Brennpunkte der einzelnen Lichtfarben nicht übereinander, wodurch ein unscharfes Bild entsteht.

2.1 Brennweitenbestimmung nach Bessel

Ist der Abstand $e = g + b$ zwischen Gegenstand und Schirm konstant und größer als die vierfache Brennweite f der Linse, lassen sich zwei Linsenpositionen finden, die ein scharfes Bild erzeugen. Dabei sind die zwei paarweise gefundenen Gegenstands- und Bildweiten symmetrisch, es gilt

$$b_1 = g_2 \quad \text{und} \quad b_2 = g_1. \quad (3)$$

Mit der Differenz der Projektionsweiten $d = g - b$ gilt weiter

$$f = \frac{e^2 - d^2}{4e}. \quad (4)$$

2.2 Bestimmung der Lage von Hauptachsen nach Abbe

Über die Methode von ABBE können dicke Linsen oder Linsensysteme auf die Lage der Hauptachsen H , H' und Gesamtbrennweite f untersucht werden. Es gelten die Beziehungen

$$g' = g + h = f \cdot \left(1 + \frac{1}{V}\right) + h \quad (5a)$$

$$b' = b + h' = f \cdot (1 + V) + h', \quad (5b)$$

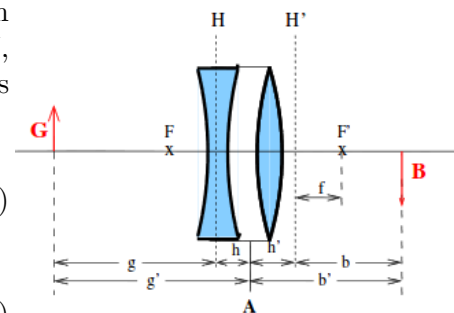


Abbildung 1: Unterschrift

welche bei bekannter Vergrößerung V sowie Bild- und Gegenstandsweiten g' und b' bezogen auf einen festen Punkt des Linsensystems, Aussagen über die Lage der Hauptachsen zulassen.

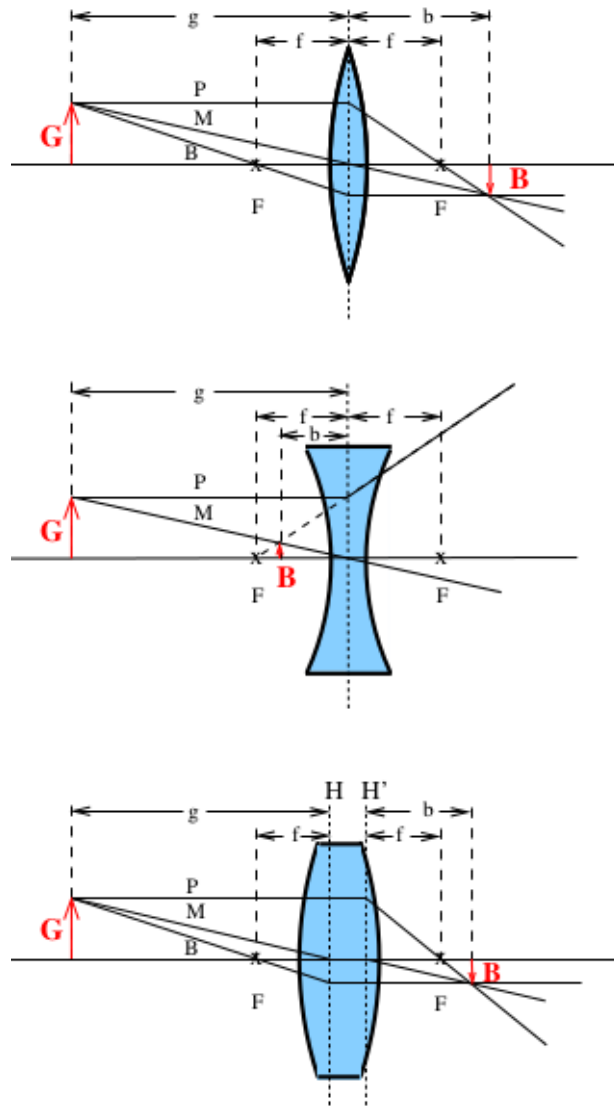


Abbildung 2: Strahlengänge verschiedener Linsen. [1]

3 Durchführung

3.1 Verifikation der Linsengleichung

Die Brennweite f einer dünnen Linse wird mithilfe der Linsengleichung bestimmt und mit der Herstellerangabe verglichen. Dazu wird auf einer optischen Bank eine Halogenlampe, ein Gegenstand "Pearl L", eine Linse mit der Brennweite $\tilde{f}_1 = 100 \text{ mm}$ und ein Schirm gestellt.

Indem die Gegenstandsweite g festgelegt und die Bildweite b so variiert wird, dass der Gegenstand auf dem Schirm scharf abgebildet wird, wird die Bildweite b_i für jeweils zehn verschiedene Gegenstandsweiten g_i gemessen. Um die Messgenauigkeit graphisch darzustellen, werden in einem g - b -Diagramm die ermittelten Werte als $(0, b_i)$ und $(g_i, 0)$ mit $i \in \{0, \dots, 10\}$ eingezeichnet und linear verbunden. Dies wird für eine Linse mit einer Brennweite von $\tilde{f}_2 = 50 \text{ mm}$ wiederholt.

3.2 Methode nach Bessel

Die Messvorrichtung wird analog zum ersten Teil aufgebaut. Der Abstand $e = b + g$ zwischen Gegenstand und Schirm wird festgehalten und zur Abbildung eine Linse bekannter Brennweite $\tilde{f}_1 = 100 \text{ mm}$ benutzt, wobei $e \geq 4\tilde{f}$ gelten muss. Für zehn verschiedene Abstände e_i werden jeweils die beiden Linsenpositionen gesucht, die ein scharfes Bild erzeugen. Die beiden Wertepaare (b_i, g_i) pro Abstand e_i werden aufgenommen und der Vorgang für weitere Abstände e_i wiederholt, sodass insgesamt 20 Wertepaare mit je zwei Projektionsweiten aufgenommen werden.

Mit der Sammellinse \tilde{f}_1 wird im Anschluss das Verfahren für blaues und für rotes Licht wiederholt. Hierzu werden nebst der Halogenlampe Farbfilter verwendet.

3.3 Methode nach Abbe

Die Messvorrichtung wird analog zum ersten Teil aufgebaut, zusätzlich wird eine Zerstreuungslinse $\tilde{f}_3 = -100 \text{ mm}$ zwischen Sammellinse und Gegenstand gesetzt. Der Abstand zwischen den Linsen ist kleinstmöglich zu wählen. Das Linsenpaar wird als ein festes Linsensystem betrachtet und der Mittelpunkt der Sammellinse als Messpunkt A betrachtet.

Ausgehend vom Messpunkt A wird das Projektionsweitenpaar (b', g') sowie die Vergrößerung V des Gegenstandes bei scharfer Abbildung gemessen. Mithilfe der Gleichungen (5) kann die relative Lage h und h' der Hauptachsen bezogen auf den Messpunkt A bestimmt werden. Hierzu werden in einem Diagramm g' gegen $(1 + \frac{1}{V})$ und b' gegen $(1 + V)$ aufgetragen und mittels linearer Regression die Gesamtbrennweite f und die relativen Lagen h und h' bestimmt.

4 Auswertung

4.1 Verifikation der Linsengleichung

Die Ergebnisse der ersten Messung sind in Tabelle 3 aufgetragen. Für die berechnete

| Linse mit $\tilde{f} = 100$ mm | | | Linse mit $\tilde{f} = 50$ mm | | |
|--------------------------------|------------|------------|-------------------------------|------------|------------|
| g_1 / mm | b_1 / mm | f_1 / mm | g_2 / mm | b_2 / mm | f_2 / mm |
| 120 | 525 | 97,67 | 60 | 2700 | 58,70 |
| 130 | 390 | 97,50 | 70 | 1570 | 67,01 |
| 140 | 319 | 97,30 | 80 | 1210 | 75,04 |
| 150 | 277 | 97,31 | 90 | 1040 | 82,83 |
| 160 | 251 | 97,71 | 100 | 920 | 90,20 |
| 170 | 227 | 97,20 | 110 | 870 | 97,65 |
| 180 | 204 | 95,63 | 120 | 800 | 104,35 |
| 190 | 198 | 96,96 | 130 | 770 | 111,22 |
| 200 | 192 | 97,59 | 140 | 750 | 117,98 |
| 210 | 186 | 98,64 | 150 | 720 | 124,14 |
| 220 | 177 | 98,09 | | | |

Abbildung 3: Messung der Bildweiten b_i bei festgelegter Gegenstandsweite g_i sowie die daraus berechneten Brennweiten nach der Linsengleichung.

Brennweite ergeben sich Werte von

$$f_1 = (0,104 \pm 0,006) \text{ m} \quad (6)$$

$$f_2 = (0,087 \pm 0,011) \text{ m}. \quad (7)$$

Das b - g -Diagramm 4 zeigt dadurch, dass sich die Linien auf einem nicht-punktförmigen Gebiet untereinander schneiden, die Unsicherheit der Messergebnisse an. Die Mittelwerte weichen von der Herstellerangabe, $\tilde{f}_1 = 0,1$ m und $\tilde{f}_2 = 0,05$ m, um

$$\Delta f_1 = 4\% \quad (8)$$

$$\Delta f_2 = 42.5\% \quad (9)$$

ab. Daher ist für die Linse f_1 die Brennweite f über die Linsengleichung (??) verifizierbar, für die Linse f_2 weicht die berechnete Brennweite stark ab.

4.2 Methode nach Bessel

Die Ergebnisse der Messung nach dem Bessel-Verfahren sind in Tabelle 1 aufgetragen. Für die berechnete Brennweite ergibt sich ein Wert von

$$f = (0,168 \pm 0,012) \text{ m} \quad (10)$$

| Abstand | Linsenposition 1 | | | Linsenposition 2 | | |
|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| e / mm | g_1 / mm | b_1 / mm | f_1 / mm | g_2 / mm | b_2 / mm | f_2 / mm |
| 450 | 14,4 | 30,6 | 112,36 | 14,2 | 30,8 | 112,35 |
| 500 | 13,4 | 36,6 | 124,73 | 13,5 | 36,5 | 124,74 |
| 550 | 12,7 | 42,3 | 137,10 | 12,7 | 42,3 | 137,10 |
| 600 | 12,2 | 47,8 | 149,47 | 12,3 | 47,7 | 149,48 |
| 650 | 11,9 | 53,1 | 161,85 | 12,0 | 53,0 | 161,85 |
| 700 | 11,8 | 48,2 | 174,53 | 11,7 | 58,3 | 174,24 |
| 750 | 11,6 | 73,4 | 186,23 | 11,5 | 73,5 | 186,22 |
| 800 | 11,4 | 68,8 | 198,98 | 11,6 | 68,8 | 198,99 |
| 850 | 11,4 | 73,6 | 211,36 | 11,4 | 73,6 | 211,36 |
| 900 | 11,3 | 78,7 | 223,74 | 11,3 | 78,8 | 223,73 |

Tabelle 1: Messung der Bild- und Gegenstandsweiten b_i und g_i bei festgelegtem Abstand e nach Bessel; weißes Licht.

Der berechnete Mittelwert weicht von der Herstellerangabe $\tilde{f} = 0,1 \text{ m}$ um 68% ab.

Die Ergebnisse der Messung mit einfarbigem Licht sind in den Tabellen 2 und 3 aufgetragen. Die ermittelten Brennweiten betragen

$$f_{\text{Rot}} = (0,1141 \pm 0,0007) \text{ m} \quad (11a)$$

$$f_{\text{Blau}} = (0,073 \pm 0,016) \text{ m} \quad (11b)$$

und zeigen damit die Abhängigkeit der Brechung von der Wellenlänge des Lichtes.

4.3 Methode nach Abbe

Die Linearisierung der Gleichungen

$$\underbrace{g'}_{y_{\text{lin}}} = \underbrace{\underbrace{f}_{m_{\text{lin}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{V}\right)}_{x_{\text{lin}}} + \underbrace{h}_{b_{\text{lin}}} \quad (12a)$$

$$\underbrace{b'}_{y_{\text{lin}}} = \underbrace{\underbrace{f}_{m_{\text{lin}}} \cdot (1 + V)}_{x_{\text{lin}}} + \underbrace{h'}_{b_{\text{lin}}} \quad (12b)$$

mit den Werten der Tabelle 4 sind in Abbildung 5 und 6 dargestellt.

Die Regression mithilfe der Formeln 15 ergibt

$$f_1 = (183 \pm 5) \text{ mm} \quad f_2 = (195 \pm 4) \text{ mm} \quad (13)$$

$$h_1 = (55 \pm 14) \text{ mm} \quad h_2 = (72 \pm 7) \text{ mm} \quad (14)$$

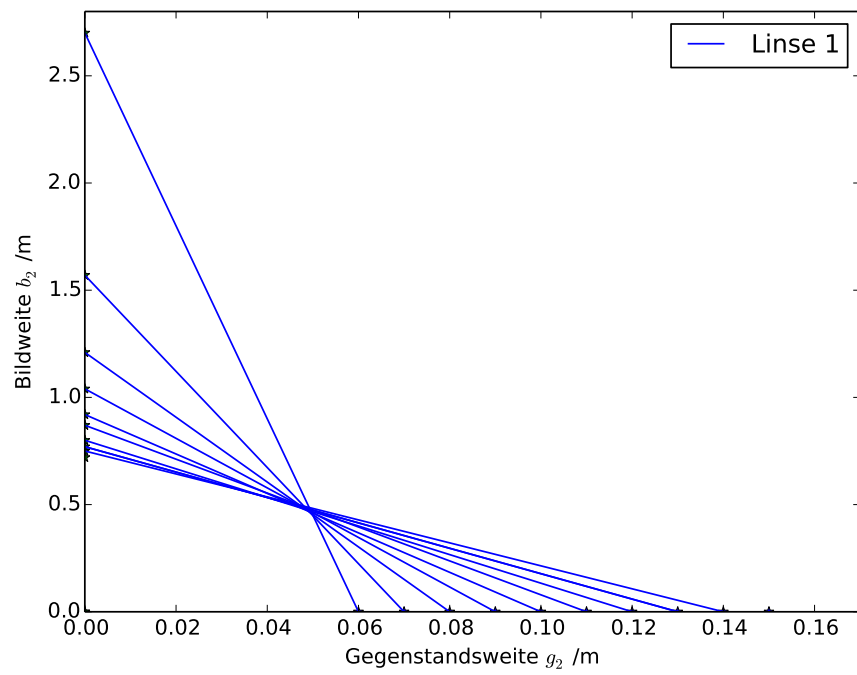
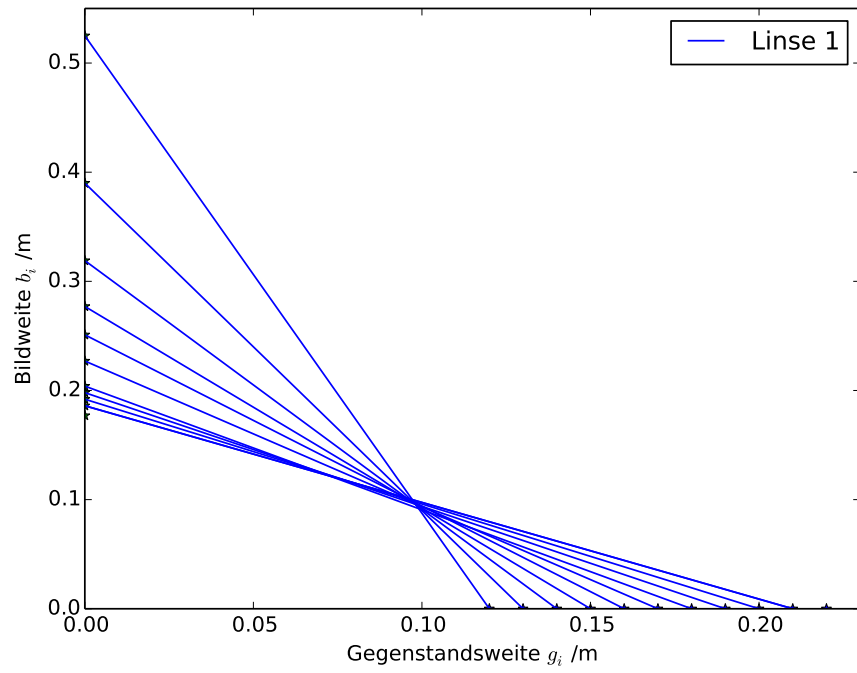


Abbildung 4: b - g -Diagramme zur Darstellung der Messgenauigkeit.

| Abstand e/mm | Linsenposition 1 | | | Linsenposition 2 | | |
|--------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| | $g_{1,r}/\text{mm}$ | $b_{1,r}/\text{mm}$ | $f_{1,r}/\text{mm}$ | $g_{2,r}/\text{mm}$ | $b_{2,r}/\text{mm}$ | $f_{2,r}/\text{mm}$ |
| 50 | 143 | 307 | 111,88 | 306 | 144 | 111,89 |
| 60 | 126 | 424 | 113,00 | 424 | 126 | 113,00 |
| 70 | 118 | 532 | 114,38 | 531 | 119 | 114,38 |
| 80 | 117 | 633 | 115,82 | 636 | 117 | 115,82 |
| 90 | 115 | 735 | 115,45 | 739 | 111 | 115,45 |

Tabelle 2: Messung der Bild- und Gegenstandsweiten b_i und g_i bei festgelegtem Abstand e nach Bessel; rotes Licht.

| Abstand e/mm | Linsenposition 1 | | | Linsenposition 2 | | |
|--------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| | $g_{1,b}/\text{mm}$ | $b_{1,b}/\text{mm}$ | $f_{1,b}/\text{mm}$ | $g_{2,b}/\text{mm}$ | $b_{2,b}/\text{mm}$ | $f_{2,b}/\text{mm}$ |
| 50 | 366 | 134 | 97,15 | 132 | 368 | 97,15 |
| 60 | 477 | 123 | 97,19 | 122 | 478 | 97,19 |
| 70 | 782 | 118 | 15,63 | 116 | 784 | 15,63 |
| 80 | 784 | 116 | 58,88 | 114 | 786 | 58,89 |
| 90 | 788 | 112 | 97,31 | 111 | 789 | 97,31 |

Tabelle 3: Messung der Bild- und Gegenstandsweiten b_i und g_i bei festgelegtem Abstand e nach Bessel; blaues Licht.

| Linsensystem | | | |
|----------------|----------------|---------------|---------------|
| g'/mm | b'/mm | B/mm | V/mm |
| 200 | 790 | 80 | 2,67 |
| 250 | 551 | 44 | 1,47 |
| 300 | 480 | 31 | 1,03 |
| 350 | 416 | 25 | 0,83 |
| 400 | 398 | 20 | 0,67 |
| 450 | 380 | 17 | 0,57 |
| 500 | 370 | 15 | 0,50 |
| 550 | 346 | 13 | 0,43 |
| 600 | 348 | 11 | 0,37 |
| 650 | 336 | 11 | 0,37 |

Tabelle 4: Messwerte zur Bestimmung der Brennweite des Linsensystems nach Abbe.

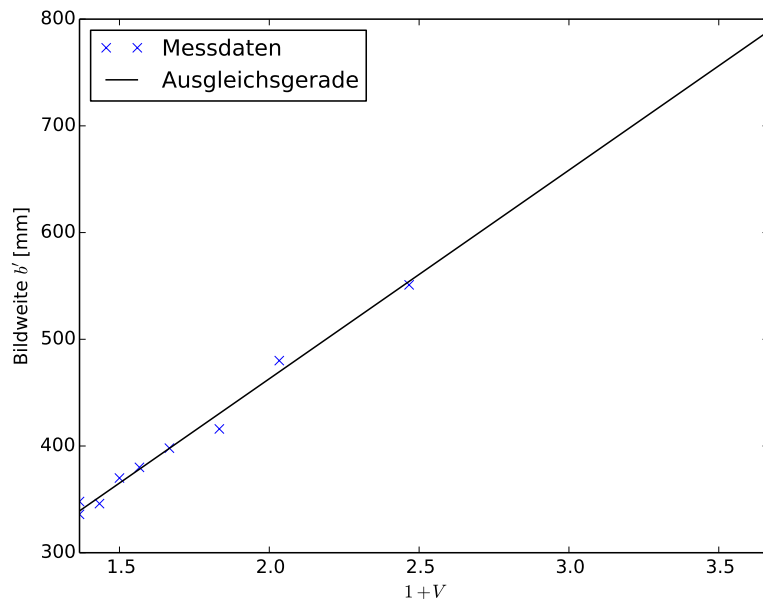


Abbildung 5: Messwerte für ABBE-Methode und Regression der Gleichung (12a).

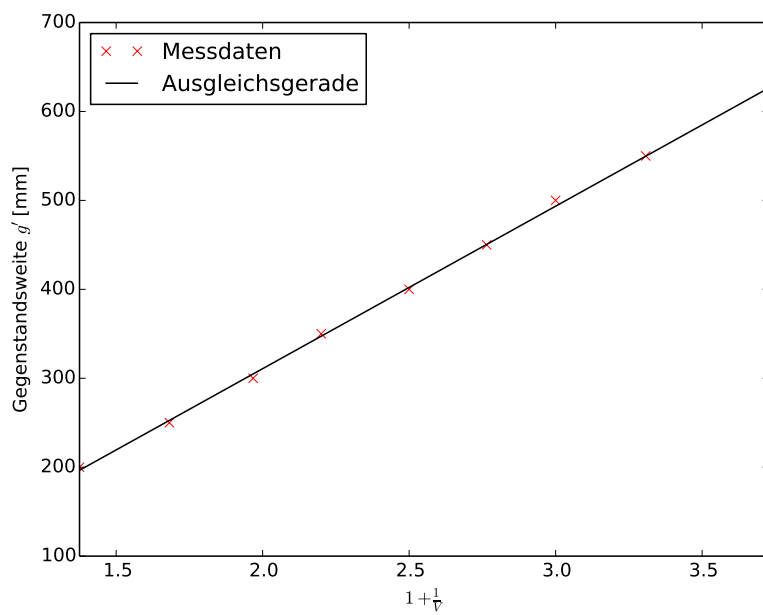


Abbildung 6: Messwerte für ABBE-Methode und Regression der Gleichung (12b).

Regression nach

$$\Delta = N \sum x^2 - \left(\sum x \right)^2, \quad (15a)$$

$$a_{\text{Reg}} = \frac{N \sum x \cdot y - \sum x \cdot \sum y}{\Delta}, \quad (15b)$$

$$b_{\text{Reg}} = \frac{\sum x^2 \cdot \sum y - \sum x \cdot \sum x \cdot y}{\Delta}, \quad (15c)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y - a_{\text{Reg}} \cdot x - b_{\text{Reg}})^2}{N - 2}}, \quad (15d)$$

$$\sigma_a = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}}, \quad (15e)$$

$$\sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}} \quad (15f)$$

mit den im Auswertungsteil definierten Abkürzungen und der Anzahl der Datenpaare N .

5 Diskussion

5.1 Fehlerdiskussion

Über die einzelnen Teile des Experimentes hinweg wird eine scharfe Abbildung des Gegenstandes "Perl L" gefordert. Die in Abschnitt ?? genannten Abbildungsfehler, insbesondere die in Abschnitt ?? bestätigte chromatische Abberation, erschweren das Finden der richtigen Projektionsweiten. Das exakte Bestimmen der Projektionsweiten ist ohne weitere Maßnahmen oder geräte-unterstützte Messung, etwa durch einen CCD-Chip, nicht möglich. Durch Bisektion kann die Größenordnung und die Umgebung von b und g bestimmt werden; es treten dabei starke Unsicherheiten auf. Im Abschnitt ?? wird die Unsicherheit in b und g besonders durch das Diagramm 4 erkennbar.

5.2 Linsengleichung

Der erste Abschnitt der Messung bestätigt die Gültigkeit der Linsengleichung. Wegen der starken Abweichung der zweiten Linse im Kontrast zur ersten Linse muss das Auftreten von systematischen Fehlern diskutiert werden.

5.3 Methode nach Bessel

Die Methode von Bessel kann mit der konventionellen Methode über die Linse 1 verglichen werden.

Die Abweichung des Mittelwertes von der Herstellerangabe ist ein direktes Maß für die Fehleranfälligkeit der Methoden. Es ist erkennbar, dass die Methode nach Bessel für die in diesem Experiment durchgeführte Bestimmung der konventionelle Methode unterlegen ist.

Für die Methode nach Bessel werden der Abstand von Gegenstand und Schirm sowie die Differenz der Projektionslängen benötigt. Da diese in abgewandelter Form ebenfalls für die Referenzmethode gilt, kann von systematischen Fehlern im Verlauf der Messung ausgegangen werden.

5.4 Methode nach Abbe

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch V1:1*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/hgj>.