

Anfängerpraktikum Versuch V351

Fourier-Analyse und -Synthese

Helena Nawrath
helena.nawrath@tu-dortmund.de

Carl Arne Thomann
arnethomann@me.com

Durchführung: 13. Januar 2015

Abgabe: 20. Januar 2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

Ziel

Ziel des Versuchs ist es, die FOURIER-Transformation kennenzulernen. Hierzu wird zum Einen eine bekannte periodische Funktion durch FOURIER-Transformation in die Elementarschwingung zerlegt und zum Anderen eine periodische Funktion aus Elementarschwingungen gebildet.

1 Theorie

1.1 Fourier-Reihenentwicklung, harmonische Analyse

Für eine periodische Funktionen, beispielsweise eine T-periodische Funktion $F(t)$ der Zeit, gilt

$$F(t) = F(t + T) \quad \forall t. \quad (1)$$

Bis Abschnitt 1.3 werden nur solche periodischen Funktionen betrachtet. Nach dem FOURIER'schen Theorem lassen sich periodische Funktionen als Linearkombination aus den Elementarschwingungen

$$a_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \text{und} \quad b_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (2)$$

zusammenfügen. Das bedeutet, dass die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin(\underbrace{n \frac{2\pi}{T} t}_{\omega}) + b_n \cos(\underbrace{n \frac{2\pi}{T} t}_{\omega}) \right) \quad (3)$$

mit $\omega = 2\pi \cdot f$ eine T-periodische Funktion F der Zeit darstellt, sofern die Reihe konvergent ist. Gleichmäßige Konvergenz der FOURIER-Reihe ist gegeben, wenn die Funktion F auf ihrem Definitionsbereich stetig ist.

Für die Koeffizienten in 3 gilt

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(2n\pi t) dt \quad (4a)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(2n\pi t) dt. \quad (4b)$$

Die Schwingung wird für $n = 0$ Grundschwingung und die Schwingungen für $n > 1$ Oberschwingungen bezeichnet. Für gerade Funktionen F , also mit $F(x) = F(-x)$, sind alle $b_n = 0$; analog sind für ungerade Funktionen F , also mit $-F(x) = F(-x)$, alle $a_n = 0$.

Durch diese Formeln ist allgemein das Beschreiben einer T-periodischen Funktion als konvergente FOURIER-Reihe möglich. Dies wird als *harmonische Analyse* oder *FOURIER-Analyse* bezeichnet. Sind andererseits die FOURIER-Koeffizienten einer periodischen Schwingung bekannt, so kann die Funktion aus den Elementarschwingungen zusammengesetzt werden. Dies wird als *Synthese* bezeichnet.

Werden eine begrenzte Anzahl von Elementarschwingungen benutzt, um eine periodische Funktion zusammenzusetzen, kommt es bei unstetigen Funktionen zum GIBBS'schen Phänomen. Es kommt bei der Unstetigkeitsstelle und in ihrer Umgebung zu sichtbaren Abweichungen.

1.2 Linienspektrum der Frequenzen, Spektralanalyse

Werden die FOURIER-Koeffizienten in Gleichungen (4) als Funktionen der Frequenzen f aufgetragen, so ergeben sich Frequenzspektren. In diesen ist abgezeichnet, aus welchen Elementarschwingungen die Funktion F besteht und welchen Wert die FOURIER-Koeffizienten (4) aufweisen. Bei konvergenten FOURIER-Reihen (3) geht die Höhe

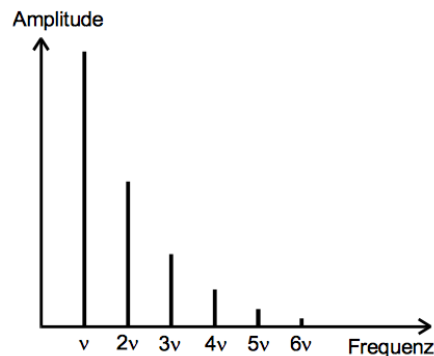


Abbildung 1: Beispiel eines Frequenzspektrums bei konvergenter FOURIER-Reihe. [1]

der diskreten Linien für $f \rightarrow \infty$ gegen Null.

1.3 Nicht-periodische Funktionen, Fourier-Transformation

Nicht-periodische Funktionen F zeigen bei Spektralanalyse 1 ein kontinuierliches Spektrum, weiter gilt nicht $a_n, b_n \xrightarrow{f \rightarrow \infty} 0$ im Allgemeinen. Für diese Funktionen ohne konvergenten FOURIER-Reihen wird eine FOURIER-Transformation angewandt.

Mit der FOURIER-Transformierten $\tilde{F}(\omega)$ und der Funktion $F(t)$ ist die FOURIER-Transformation als uneigentliches Integral beschreibbar. Es gilt

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cdot e^{i\omega t} dt \quad (5)$$

Die von der Frequenz abhängigen Funktion $\tilde{F}(\omega)$ beschreibt das in Abschnitt 1.2 gezeigte Frequenzspektrum. Für reale Systeme kann nicht in den geforderten Zeitgrenzen $-\infty$ und ∞ integriert werden; durch vorzeitiges Abbrechen der Integration kommt es zu Abweichungen. Diese Abweichungen bestehen beispielsweise darin, dass eventuell erwartete diskrete Linien (vgl. Abb. 1) als Peaks mit endlicher Breite dargestellt werden und es neben den erwarteten Maxima auch zu Nebenmaxima kommt.

Die Umkehrformel der FOURIER-Transformation ist gegeben durch

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \quad (6)$$

2 Durchführung

2.1 Fourier-Analyse

Es werden periodische elektrische Schwingungen in ihre Fourier-Komponenten zerlegt und die gemessenen Fourier-Koeffizienten mit den nach Fourierschen Theorem erwarteten Werten nach Gleichung 4 verglichen.

Es wird das Signal eines Funktionsgenerators mit den Kenndaten in Tabelle ?? auf ein

Oszilloskop gegeben. Die Signalform wird gewählt aus Rechteck-, Sägezahn- und Dreiecksspannung. Dieses Oszilloskop wird im *Math*-Modus betrieben, welcher über eine endliche Zeit eine *Fast-Fourier-Transformation* [**FFT**] durchführt. Nach Abschnitt 1.3 werden für die periodischen Signale anstelle von diskreten Linien Peaks mit endlicher Breite erwartet. Die Höhe der Peaks nehmen im Frequenzspektrum mit wachsender Frequenz ab.

Die Amplitude der Elementarschwingung und damit die Fourier-Koeffizienten 4 entsprechen der Höhe der Peaks. Anschließend wird das Verfahren mit einer anderen Signalform wiederholt, sodass alle drei Signalformen analysiert werden.

2.2 Fourier-Synthese

Aus den Gleichungen 4 sind für periodische Signalformen, etwa Rechteck-, Sägezahn- oder Dreiecksspannungen, die Fourier-Koeffizienten bekannt. Mit Hilfe einer Vorrichtung wird die Signalform aus den Elementarschwingungen mit berechneter Amplitude additiv zusammengesetzt.

Die Vorrichtung besteht aus einem Funktionsgenerator, der eine feste Grundschwingung $f = \text{const.}$ für $n = 0$ und deren Oberschwingungen für $n \in \{2, \dots, 9\}$ ausgibt. Diese Elementarschwingungen sind in ihrer Amplitude und in ihrer Phase einstellbar, weiter

kann das Summensignal ausgegeben werden. Die einzelnen Oberschwingungen und die Grundschiwingung können wahlweise dem Summensignal zugeschaltet werden.

Die aus den Gleichungen 4 bekannten Amplituden werden an der Vorrichtung eingestellt und die einzelnen Phase so versetzt, dass die Schwingungen in Phase sind. Bei $a_n, b_n < 0$ kann ein Phasenversatz von $\phi = 180^\circ$ eingestellt werden, es gilt

$$-\sin(x) = \sin(x + 180^\circ). \quad (7a)$$

$$-\cos(x) = \cos(x + 180^\circ) \quad (7b)$$

3 Auswertung

3.1 Fouriertransformation

n	$\frac{U_1}{n} / \text{mV}$	U_n / mV	Abweichung /%
1	920	—	—
3	300	288	4
5	170	168	1
7	116	112	4
9	86	80	8
11	64	56	14

Tabelle 1: Fourieranalyse der Rechtecksspannung.

n	$\frac{U_1}{n^2} / \text{mV}$	U_n / mV	Abweichung /%
1	580	—	—
3	63	61,6	2,3
5	21	20,8	1,0
7	10	10,4	3,9
9	6	5,6	7,1
11	4	4,0	0,0

Tabelle 2: Fourieranalyse der Dreiecksspannung.

Die Tabellen 1,2 und 3 enthalten die gemessenen Amplituden U_n der n -ten Oberschwingung. Nach Gleichung (4b) wurden in der Versuchsvorbereitung die Koeffizienten a_n, b_n

n	$\frac{U_1}{n} / \text{mV}$	U_n / mV	Abweichung /%
1	460	—	—
2	230	224	3
3	152	144	6
4	112	112	0
5	88	88	0
6	74	74	0
7	64	64	0
8	56	56	0
9	50	48	4
10	44	46	5
11	40	40	0

Tabelle 3: Fourieranalyse der Sägezahnspannung.

der verschiedenen Spannungsformen berechnet. Es gilt

$$\text{Rechteck : } a_n = 0, \quad b_n = \frac{4U_0}{\pi n} \quad (8)$$

$$\text{Sägezahn : } a_n = 0, \quad b_n = (-1)^{n+1} \frac{2U_0}{\pi n} \quad (9)$$

$$\text{Dreieck : } a_n = \frac{8U_0}{n^2\pi^2}, \quad b_n = 0, \quad (10)$$

mit Rechteck- und Sägezahnspannung als gerade Funktionen; die Dreiecksspannung ist ungerade. Nach diesen Formeln wird die theoretisch erwartete Amplitude $\frac{U_1}{n}$ berechnet, in dem die erste gemessene Amplitude als gegeben vorausgesetzt wird und anschließend durch n bzw. n^2 geteilt wird, um die restlichen Theoriewerte zu erhalten. Die Abweichung zwischen Messung und Theorie ist ebenfalls angegeben.

In den Abbildungen 3 und 2 werden die Amplituden der Koeffizienten dargestellt. Nach (10) sollen alle geraden Koeffizienten wegfallen. Verleicht man die Theorie mit den Abbildungen fällt auf, dass dies – bedingt durch die verwendeten Bauteile in der Messung – nicht der Fall ist. Es treten Spannungen $U \geq 0$ auf. Diese Abweichungen lassen sich für größere n nur schwierig von den Amplituden der ungeraden Koeffizienten unterscheiden. Die Abbildung 4 stimmt mit der Theorie überein.

3.2 Fouriersynthese

Bei der Fouriersynthese sollen die in Kapitel 3.1 untersuchten Schwingungen aus einzelnen Koeffizienten hergestellt werden. Dazu werden die Amplituden der verschiedenen Oberschwingungen am Oberwellengenerator eingestellt und die Phase so geändert, dass die auf dem Oszilloskopbildschirm dargestellte Summenspannung dem gewählten

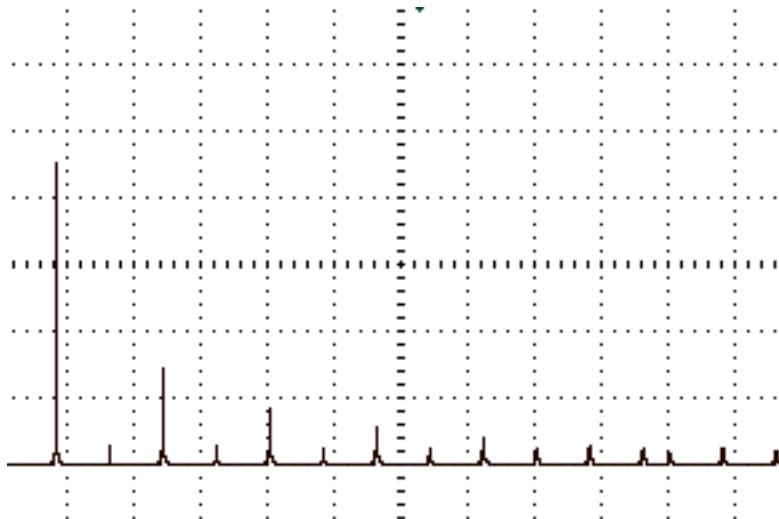


Abbildung 2: Fourieranalyse der Rechteckspannung.

Spannungsverlauf entspricht. In Tabelle 4 sind die Amplituden der unterschiedlichen Oberwellen für Rechteck-, Dreieck- und Sägezahnspannung aufgetragen.

n	U_n / mV		
	Rechteck	Sägezahn	Dreieck
1	634.8	634.8	634.80
2	0	318.00	0
3	216.73	212.00	70.72
4	0	159.76	0
5	130.20	127.65	25.48
6	0	106.45	0
7	92.90	91.20	13.27
8	0	79.49	0
9	72.08	70.55	7.95

Tabelle 4: Fouriersynthese drei verschiedener Spannungen.

In Abbildung 5 ist die synthetisierte Dreieckspannung abgebildet. Die Flanken sind nicht gerade, sondern weisen Schwingungsbäuche auf. Die Spannungsspitzen sind abgerundet. Trotzdem ist die maßgebliche, dreieckige Form gut erkennbar.

Die Rechteckspannung ist ebenfalls gut zu erkennen, weist aber – hauptsächlich an den Maximalwerten der Spannung vorzufindende – Abweichungen auf.

Abbildung 7 zeigt die Sägezahnspannung. Diese unterscheidet sich vom idealen Aussehen durch nicht ganz senkrecht abfallende Flanken und Schwingungen an steigenden Flanken.

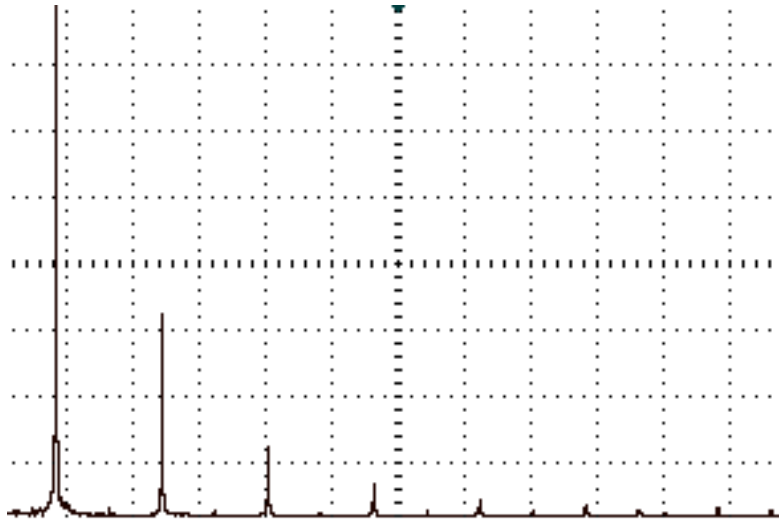


Abbildung 3: Fourieranalyse der Dreiecksspannung.

Die relativ starken Abweichungen werden erzeugt, da die Fourier-Synthese nach $n = 10$ Oberschwingungen abgebrochen wird. Durch größere Werte für n , sowie noch genaueres einstellen der Phasen kann der Fehler weiter minimiert werden.

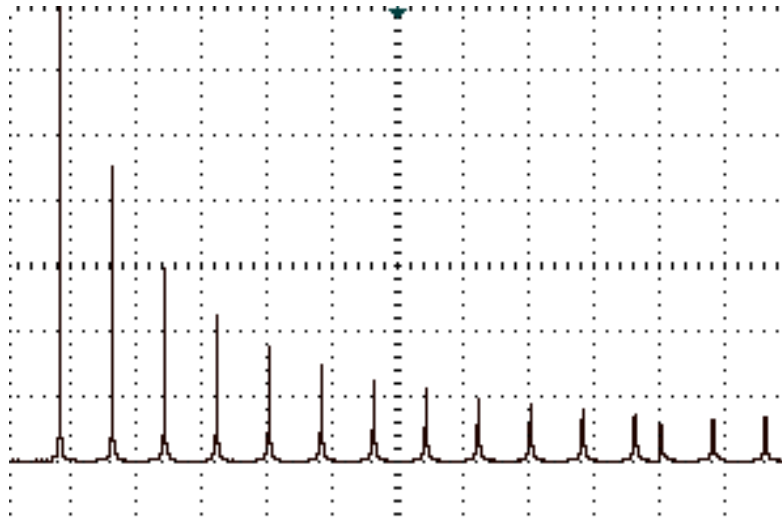


Abbildung 4: Fourieranalyse der Sägezahnspannung.

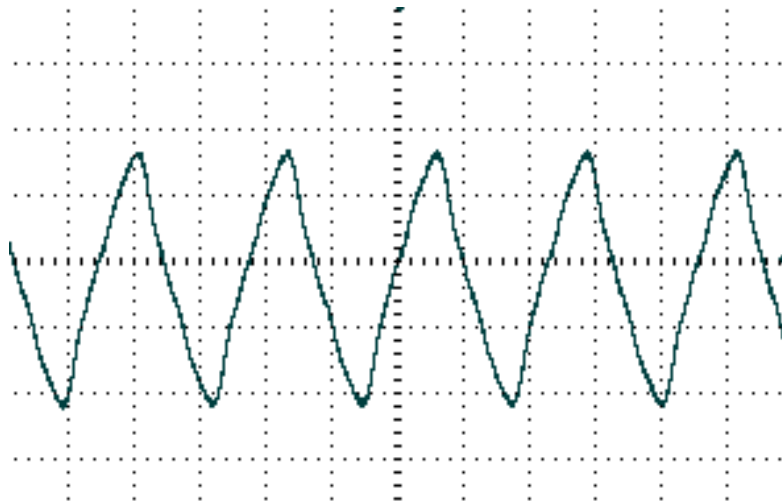


Abbildung 5: Fouriersynthese der Dreiecksspannung.

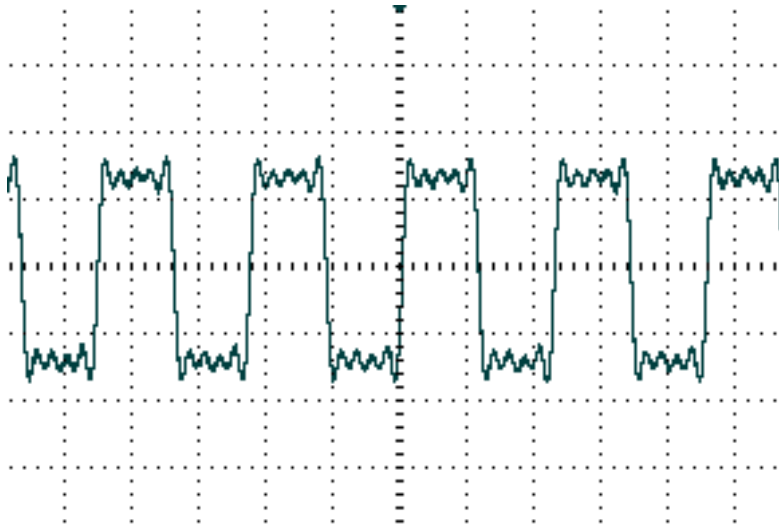


Abbildung 6: Fouriersynthese der Rechteckspannung.

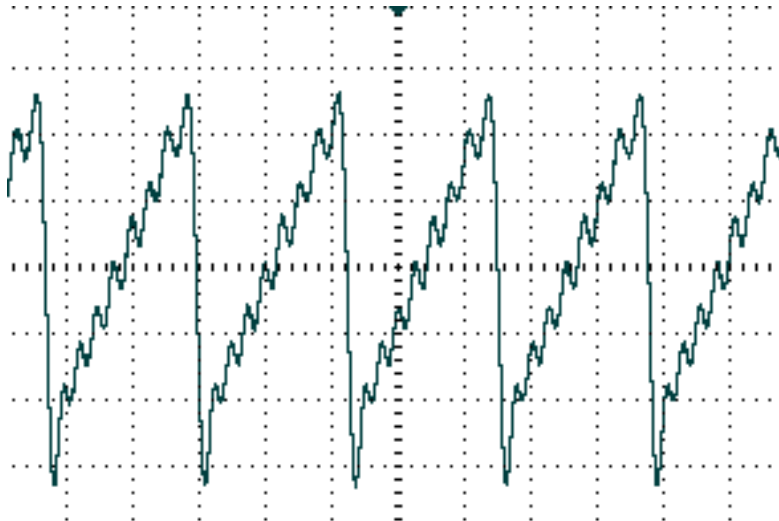


Abbildung 7: Fouriersynthese der Sägezahnspannung.

4 Diskussion

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch V351: Fourier-Analyse und -Synthese*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V351.pdf> (besucht am 13.01.2015).
- [2] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001. URL: <http://www.scipy.org/>. Version 0.14.0.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>. Version 2.4.5.
- [4] Travis E. Oliphant. „Python for Scientific Computing“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/10/1>. Version 1.8.1.
- [5] The GIMP Team. *GIMP: GNU Image Manipulation Program*. URL: <http://www.gimp.org/>. Version 2.8.10.

Die Grafiken wurden mit *GIMP*[5] bearbeitet sowie die Berechnungen mit *Python-Numpy*, [4], *-Scipy*[2] und *-uncertainties*[3] durchgeführt.