

Anfängerpraktikum Versuch V351

## **Fourier-Analyse und -Synthese**

Helena Nawrath  
helena.nawrath@tu-dortmund.de

Carl Arne Thomann  
arnethomann@me.com

Durchführung: 13. Januar 2015

Abgabe: 20. Januar 2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

## Ziel

Ziel des Versuchs ist es, die Fourier-Transformation kennenzulernen. Hierzu wird zum Einen eine bekannte periodische Funktion durch Fourier-Transformation in die Elementarschwingung zerlegt und zum Anderen eine periodische Funktion aus Elementarschwingungen gebildet.

## 1 Theorie

### 1.1 Fourier-Reihenentwicklung, harmonische Analyse

Für eine T-periodische Funktion  $F$  der Zeit gilt

$$F(t) = F(t + T) \quad \forall t, \quad (1)$$

für eine Q-periodische Funktion  $G$  des Ortes gilt

$$G(x) = G(x + Q) \quad \forall x. \quad (2)$$

Bis Abschnitt 1.3 werden nur solche periodischen Funktionen betrachtet. Nach dem Fourier'schen Theorem lassen sich periodische Funktionen, etwa Wellenfunktionen, als Linearkombination aus den Elementarschwingungen

$$a_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad \text{und} \quad b_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (3)$$

zusammenfügen. Das bedeutet, dass die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \underbrace{\sin\left(n \frac{2\pi}{T}t\right)}_{\omega} + b_n \underbrace{\cos\left(n \frac{2\pi}{T}t\right)}_{\omega} \right) \quad (4)$$

mit  $\omega = 2\pi \cdot f$  eine T-periodische Funktion  $F$  der Zeit darstellt, sofern die Reihe konvergent ist. Gleichmäßige Konvergenz der Fourier-Reihe ist gegeben, wenn die Funktion  $F$  auf ihrem Definitionsbereich stetig ist.

Für die Koeffizienten in 4 gilt

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos(2n\pi t) dt \quad (5a)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin(2n\pi t) dt. \quad (5b)$$

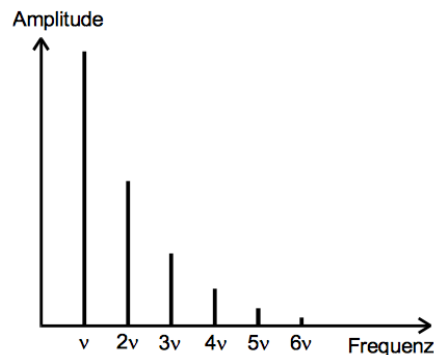
Die Schwingung wird für  $n = 0$  Grundschwingung und die Schwingungen für  $n > 1$  Oberschwingungen bezeichnet. Für gerade Funktionen  $F$ , also mit  $F(x) = F(-x)$ , sind

alle  $b_n = 0$ ; analog sind für ungerade Funktionen  $F$ , also mit  $-F(x) = F(-x)$ , alle  $a_n = 0$ .

Durch diese Formeln ist allgemein das Beschreiben einer T-periodischen Funktion als konvergente Fourier-Reihe möglich. Dies wird als harmonische Analyse oder Fourier-Analyse bezeichnet.

## 1.2 Linienpektrum der Frequenzen, Spektralanalyse

Werden die Fourier-Koeffizienten in Gleichungen (5) als Funktionen der Frequenzen  $f$  aufgetragen, so ergeben sich Frequenzspektren. In diesen ist abgezeichnet, aus welchen Elementarschwingungen die Funktion  $F$  besteht und welchen Wert die Fourier-Koeffizienten (5) aufweisen. Bei konvergenten Fourier-Reihen (4) geht die Höhe der dis-



**Abbildung 1:** Beispiel eines Frequenzspektrums bei konvergenter Fourier-Reihe. [1]

kreten Linien für  $f \rightarrow \infty$  gegen Null.

## 1.3 Nicht-periodische Funktionen, Fourier-Transformation

Nicht-periodische Funktionen  $F$  zeigen bei Spektralanalyse 1 ein kontinuierliches Spektrum, weiter gilt nicht  $a_n, b_n \xrightarrow{f \rightarrow \infty} 0$  im Allgemeinen. Für diese Funktionen ohne konvergenten Fourier-Reihen wird eine Fourier-Transformation angewandt.

Mit der Fourier-Transformierten  $\tilde{F}(\omega)$  und der Funktion  $F(t)$  ist die Fourier-Transformation als uneigentliches Integral beschreibbar. Es gilt

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \cdot e^{i\omega t} dt \quad (6)$$

Die von der Frequenz abhängigen Funktion  $\tilde{F}(\omega)$  beschreibt das in Abschnitt 1.2 gezeigte Frequenzspektrum. Für reale Systeme kann nicht in den geforderten Zeitgrenzen  $-\infty$

und  $\infty$  integriert werden; durch vorzeitiges Abbrechen der Integration kommt es zu Abweichungen. Diese Abweichungen bestehen beispielsweise darin, dass eventuell erwartete diskrete Linien (vgl. Abb. 1) als Peaks mit endlicher Breite dargestellt werden und es neben den erwarteten Maxima auch zu Nebenmaxima kommt.

Die Umkehrformel der Fourier-Transformation ist gegeben durch

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) \cdot e^{-i\omega t} d\omega \quad (7)$$

## 2 Durchführung

### 2.1 Fourier-Analyse

Es werden periodische elektrische Schwingungen in ihre Fourier-Komponenten zerlegt und die gemessenen Fourier-Koeffizienten mit den nach Fourierschen Theorem erwarteten Werten nach Gleichung 5 verglichen.

Es wird ein Signal mit den Kenndaten

b) Man setze einfache periodische Schwingungen aus ihren Fourier-Komponenten zusammen und dokumentiere die Ergebnisse durch einen Ausdruck des zeitlichen Verlaufs der Summenspannung.

## 3 Auswertung

### 3.1 Fouriertransformation

$n$	$U_n / \text{mV}$	$\frac{U_1}{n} / \text{mV}$	Abweichung / %
1	920	912	1
3	300	288	4
5	170	168	1
7	116	112	4
9	86	80	8
11	64	56	14

**Tabelle 1:** Fourieranalyse der Rechteckspannung.

Die Tabellen 1,2 und 3 enthalten die gemessenen Amplituden  $\frac{U_1}{n}$  beziehungsweise  $\frac{U_1}{n^2}$  der  $n$ -ten Oberschwingung. Ebenfalls aufgetragen sind die theoretisch nach GLEICHUNG FOURIERKOEFFIZIENTEN zur Berechnung der Fourierkoeffizienten bestimmten Amplituden  $U_n$ , deren Abweichung zur Messung in Prozent angegeben wird.

$n$	$U_n / \text{mV}$	$\frac{U_1}{n} / \text{mV}$	Abweichung /%
1	580	576,0	0,7
3	63	61,6	2,3
5	21	20,8	1,0
7	10	10,4	3,9
9	6	5,6	7,1
11	4	4,0	0,0

**Tabelle 2:** Fourieranalyse der Dreiecksspannung.

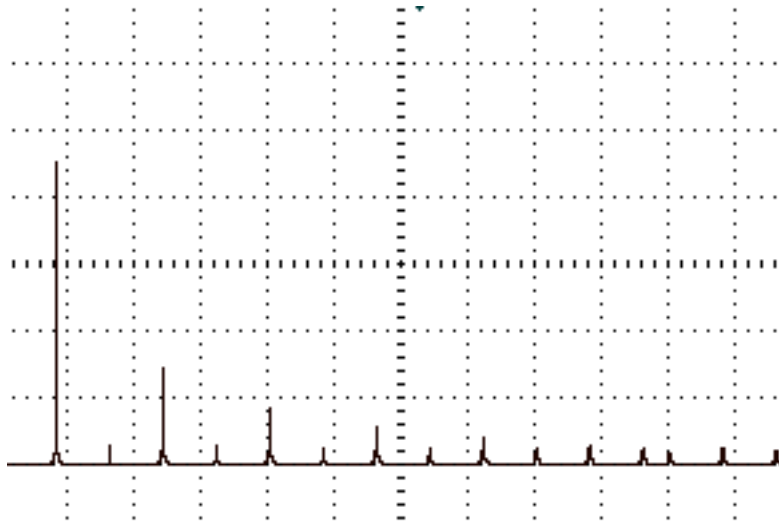
$n$	$U_n / \text{mV}$	$\frac{U_1}{n} / \text{mV}$	Abweichung /%
1	460	456	1
2	230	224	3
3	152	144	6
4	112	112	0
5	88	88	0
6	74	74	0
7	64	64	0
8	56	56	0
9	50	48	4
10	44	46	5
11	40	40	0

**Tabelle 3:** Fourieranalyse der Sägezahnspannung.

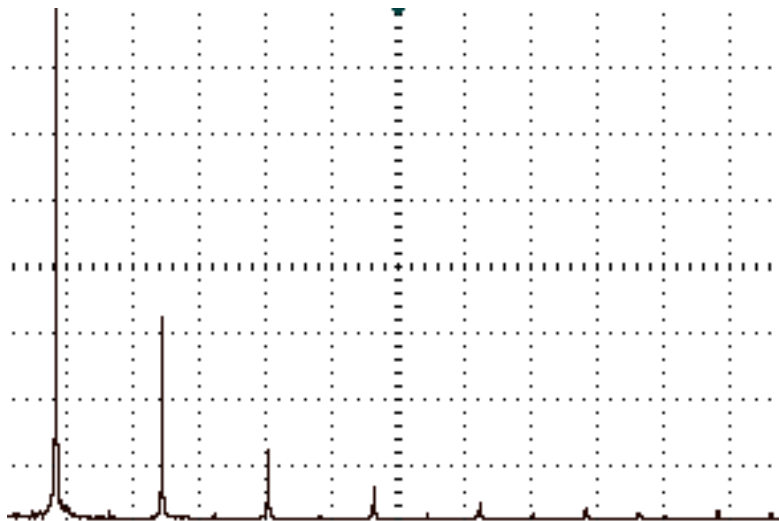
Da Rechteck- und Dreiecksspannung gerade bzw. ungerade Funktionen sind gilt für die Koeffizienten  $a_n = 0$  bzw.  $b_n = 0$ . Für die in Abbildung 3 und 2 dargestellten Amplituden der geraden Koeffizienten gilt  $a_n \geq 0\text{V}, b_n \geq 0\text{V}$ , bedingt durch die verwendeten Bauteile in der Messung. Diese Abweichungen lassen sich für größere  $n$  nur schwierig von den Amplituden der ungeraden Koeffizienten unterscheiden.

### 3.2 Fouriersynthese

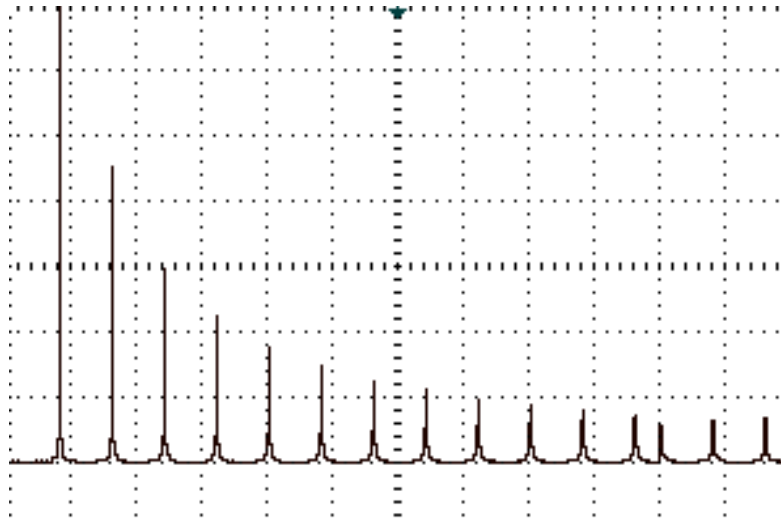
Bei der Fouriersynthese sollen die in Kapitel ?? untersuchten Schwingungen aus einzelnen Koeffizienten hergestellt werden. Dazu werden die Amplituden der verschiedenen Oberschwingungen am Oberwellengenerator eingestellt und die Phase so geändert, dass die auf dem Oszilloskopbildschirm dargestellte Summenspannung dem gewählten Spannungsverlauf entspricht. In Tabelle 4 sind die Amplituden der unterschiedlichen Oberwellen für Rechteck-, Dreieck- und Sägezahnspannung aufgetragen.



**Abbildung 2:** Fourieranalyse der Rechteckspannung.



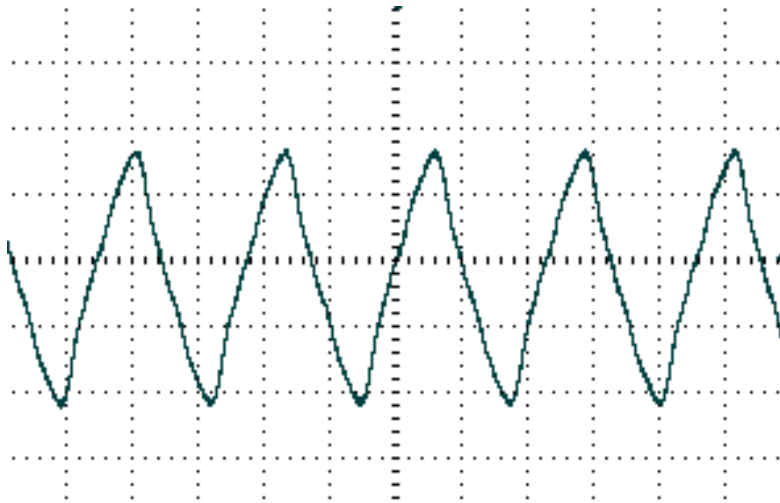
**Abbildung 3:** Fourieranalyse der Dreieckspannung.



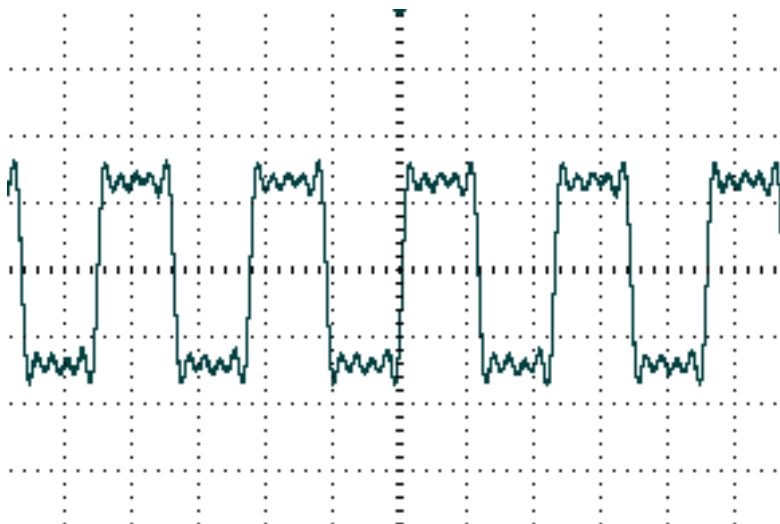
**Abbildung 4:** Fourieranalyse der Sägezahnspannung.

n	$U_n$ /mV		
	Rechteck	Sägezahn	Dreieck
1	634.8	634.8	634.80
2	0	318.00	0
3	216.73	212.00	70.72
4	0	159.76	0
5	130.20	127.65	25.48
6	0	106.45	0
7	92.90	91.20	13.27
8	0	79.49	0
9	72.08	70.55	7.95

**Tabelle 4:** Fouriersynthese drei verschiedener Spannungen.

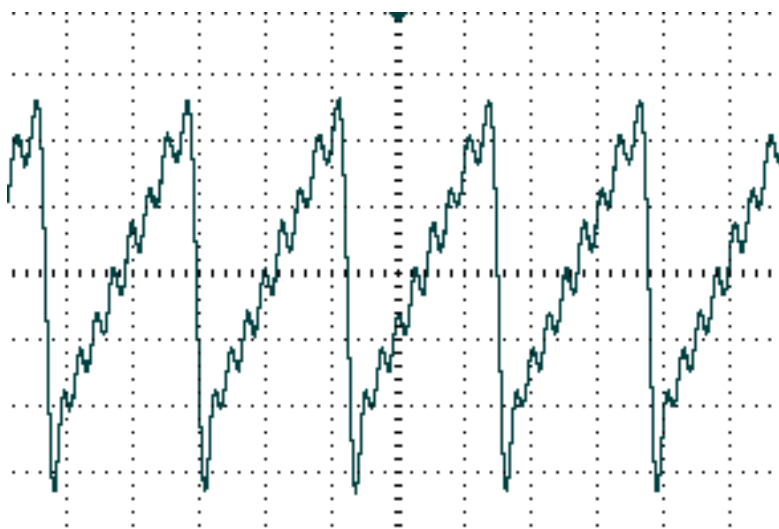


**Abbildung 5:** Fouriersynthese der Dreiecksspannung.



**Abbildung 6:** Fouriersynthese der Rechtecksspannung.





**Abbildung 7:** Fouriersynthese der Sägezahnspannung.

## 4 Diskussion

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Etiam lobortis facilisis sem. Nullam nec mi et neque pharetra sollicitudin. Praesent imperdiet mi nec ante. Donec ullamcorper, felis non sodales commodo, lectus velit ultrices augue, a dignissim nibh lectus placerat pede. Vivamus nunc nunc, molestie ut, ultricies vel, semper in, velit. Ut porttitor. Praesent in sapien. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis fringilla tristique neque. Sed interdum libero ut metus. Pellentesque placerat. Nam rutrum augue a leo. Morbi sed elit sit amet ante lobortis sollicitudin. Praesent blandit blandit mauris. Praesent lectus tellus, aliquet aliquam, luctus a, egestas a, turpis. Mauris lacinia lorem sit amet ipsum. Nunc quis urna dictum turpis accumsan semper.

## Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuch V351: Fourier-Analyse und -Synthese*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V351.pdf> (besucht am 13.01.2015).
- [2] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001. URL: <http://www.scipy.org/>. Version 0.14.0.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>. Version 2.4.5.
- [4] Travis E. Oliphant. „Python for Scientific Computing“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/10/1>. Version 1.8.1.
- [5] The GIMP Team. *GIMP: GNU Image Manipulation Program*. URL: <http://www.gimp.org/>. Version 2.8.10.

Die Grafiken wurden mit *GIMP*[5] bearbeitet sowie die Berechnungen mit *Python-Numpy*, [4], *-Scipy*[2] und *-uncertainties*[3] durchgeführt.