# V354: Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

## Stichworte

Analogie: Schwingfähige Systeme in Mechanik und Elektrik.

Komplexe Amplitude, Phasenwinkel $\phi$, Güte $q$, Resonanzbreite

## Zielsetzung

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen und deren Verhalten studieren. Hierfür werden elektrische Schaltungen in Analogie gebaut und Spannungen gemessen.

## Theorie

### Dämpfung

Anstelle von mechanischen Systemen werden elektrische Schaltungen betrachtet. Mit einem Serienschwingkreis, bestehend aus Widerstand $R$, Kondensator $C$ und Spule $L$, wird ein gedämpftes System simuliert.

$$U_\mathrm{R}(t) + U_\mathrm{C}(t) - U_\mathrm{L}(t) = 0 \tag{1}$$

$$U_\mathrm{R}(t) = R \cdot I(t) \qquad U_\mathrm{C}(t) = \frac{Q(t)}{C} \qquad U_\mathrm{L}(t) = -L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{2}$$

Es gilt die Systemgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 I(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}I(t) = 0, \tag{3}$$

ihre allgmeinen Lösung

$$I(t) = A_1 \cdot e^{\omega_1 t} + A_2 \cdot e^{\omega_2 t} \tag{4}$$

mit der Abkürzung

$$\omega_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante}}}. \tag{5}$$

Durch die Diskriminante sind folgende Fälle bestimmbar

**Schwingfall**

$$I(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}\left(A_1 \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t\right) + A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t\right)\right). \tag{6}$$

**ap. Grenzfall**

$$I(t) = A_1 e^{-\frac{R}{2L}t} + A_2 t e^{-\frac{R}{2L}t}. \tag{7}$$

#### Kriechfall

$$I(t) = A_1 e^{\omega_1 t} + A_2 e^{\omega_2 t}. \tag{8}$$

Für die Schwingperiode gilt die Thomsonsche Schwingungsgleichung und die Abklingdauer

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}\,; \qquad T_{\text{ex}} = \frac{2L}{R}. \tag{9}$$

## Zwang

Betrachtet wird die am Kondensator anliegende Spannung $U_{\text{C}}$. Zusätzlich zur Systemgleichung (1) kommt die äußere Zwangsspannung $U_{\text{Zwang}}(t)$

$$LC\frac{d^2U_{\text{C}}}{dt^2} + RC\frac{dU_{\text{C}}}{dt} + U_{\text{C}} = U_{\text{Zwang}}(t) = U_0 \cdot \exp i\omega t. \tag{10}$$

Die Lösung setzt sich aus homogener und inhomogener Lösung zusammen, die homogene Lösung klingt in kurzer Zeit ab und wird vernachlässigt. Bei dem nun gewählten *komplexe Amplitude*-Ansatz $U_C(\omega, t) = \tilde{U}_\omega(\omega) \cdot e^{i\omega t}$, $\tilde{U}_\omega(\omega) \in \mathbb{C}$, ist der Phasenwinkel $\arg(\tilde{U}_\omega) = \phi$ und Betrag $|\tilde{U}_\omega| \in \mathbb{R}$. Dies führt nach Einsatz und Kürzen der Exponentialfunktion zu

$$U_0 = -LC\omega^2\tilde{U}_\omega(\omega) + i\omega RC\tilde{U}_\omega(\omega) + \tilde{U}_\omega(\omega). \tag{11}$$

und damit schließlich zu

$$|\tilde{U}_\omega(\omega)| = \frac{U_0}{\left(\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2R^2C^2}\right)} \tag{12a}$$

$$\tan(\phi) = \frac{\text{Im}(\tilde{U}_\omega)}{\text{Re}(\tilde{U}_\omega)} = \frac{\omega RC}{LC\omega^2 - 1} \tag{12b}$$

Sonderfälle:

$$\lim_{\omega\to\infty} \tilde{U}_\omega = 0, \qquad \lim_{\omega\to 0} \tilde{U}_\omega = U_0 \tag{13}$$

auf.

Es existiert eine Resonanzfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$, die durch Dämpfung und Eigenfrequenz gegeben ist. Sie ist die neue Schwingfrequenz des Systems. Bei Erregung des Systems mit $\omega \approx \omega_0$ kommt es zur Resonanz; das System schwingt mit einer Spannungsamplitude $U_{\text{C,max}}$ größer als die Erregeramplitude $U_0$,

$$U_{\text{C,max}} = \underbrace{\frac{1}{\omega_0 RC}}_{\text{Güte } q} U_0. \tag{14}$$

Zur Charakterisierung des *Resonanzverhaltens* (nur im Schwingfall) werden die Grenzwerte $\omega_\pm$ betrachtet, bei welchen die Spannung $U_{\text{C}}$ auf den $1/\sqrt{2}$-Teil des Maximalwertes $U_{\text{C,max}}$ abfallen. Für die so beschriebene *Resonanzbreite* gilt

$$2\pi\Delta f = \omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L}. \tag{15}$$

Ausgehend von der Erregerspannung $U_0$ fällt der Betrag der Spannung $U_{\mathrm{C}}$ mit $\frac{1}{\omega^2}$ ab.

Der *Phasenwinkel* $\phi$ zwischen der Kondensatorspannung $U_{\mathrm{C}}(t)$ und der Erregerspannung $U(t)$. Für die Frequenz $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ besteht zwischen der Kondensatorspannung $U_{\mathrm{C}}$ und der Erregerspannung $U$ ein Winkel von $\phi = -\frac{\pi}{2}$. Für große Frequenzen nähert sich die Phasenwinkel $\phi$ dem stationären Wert $\pi$ an.

## Durchführung

Es wird auf einem Oszilloskop die am Kondensator anliegende Spannung angezeigt.

*Dämpfung*: Es wird an den Kondensator ein Generator angeschlossen, der mit einer so geringer Frequenz eine Rechteckspannung liefert, dass der Schwingkreis frei schwingen kann.

*Zwang*: Es wird an den Kondensator ein Generator für vers. Frequenzen angeschlossen. Gemessen wird die Abhängigkeit der Kondensatorspannung $U_{\mathrm{C}}(t)$ und des Phasenwinkels $\phi$ von der Frequenz der Erregerspannung. Hierzu wird mit einer Reihe von vers. Generatorfrequenzen der Betrag $U_{\mathrm{C}}(t)$ direkt gemessen und der Phasenwinkel $\phi$ durch den Zeitversatz der Nulldurchgänge von Generator und Kondensator bestimmt.

## Auswertung

- Im Fall der gedämpften Schwingung fällt die Amplitude (sehr genau) exponentiell mit der Zeit ab.
- Der ap. Grenzfall lässt sich durch Bisektion finden.
- Die Bilder für Schwingfall, ap. Grenzfall und Kriechfall sind im Appendix zu finden.
- Die experimentell ermittelten Widerstände sind geringer als die theoretisch benötigten Werte.
- Die *Resonanzkurve* ist im Appendix zu finden.
- Die *Versatzkurve* ist im Appendix zu finden.

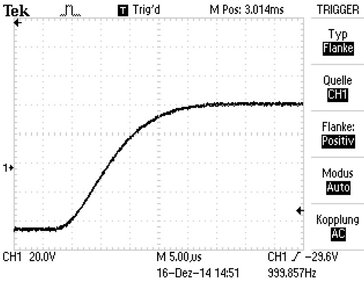
## Diskussion

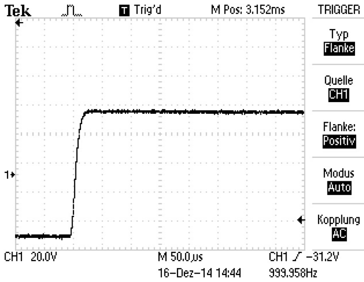
- Große Messunsicherheiten: viele, fehlerbehafteten Größen
- Analogie zwischen Mechanik und Elektrik ist sicher.

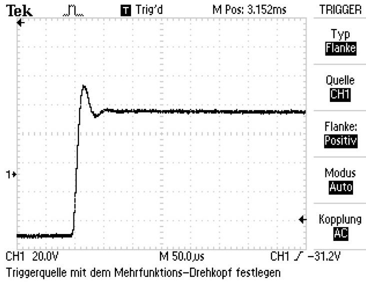
## Merke

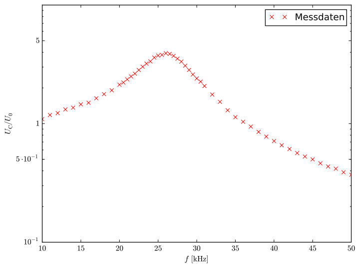
Unbedingt die Resonanz- und Versatzkurve einprägen.

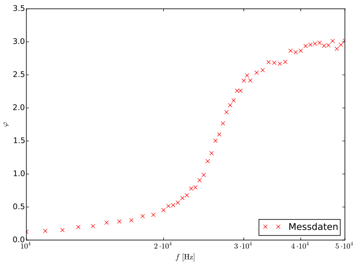
# Appendix

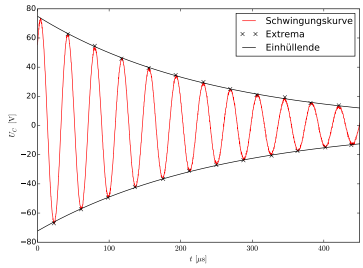

Tek
Trig'd
M Pos: 3.014ms
TRIGGER
Typ
Flanke
Quelle
CH1
Flanke:
Positiv
Modus
Auto
Kopplung
AC
CH1 20.0V
M 5.00µs
CH1 ∫ −29.6V
16−Dez−14 14:51
999.857Hz


Tek
Trig'd
M Pos: 3.152ms
TRIGGER
Typ
Flanke
Quelle
CH1
Flanke:
Positiv
Modus
Auto
Kopplung
AC
CH1 20.0V
M 50.0µs
CH1 ∫ −31.2V
16−Dez−14 14:44
999.958Hz


Tek
Trig'd
M Pos: 3.152ms
TRIGGER
Typ
Flanke
Quelle
CH1
Flanke:
Positiv
Modus
Auto
Kopplung
AC
CH1 20.0V
M 50.0µs
CH1 ∫ −31.2V
Triggerquelle mit dem Mehrfunktions−Drehkopf festlegen


Messdaten


Messdaten


Schwingungskurve
Extrema
Einhüllende