

## Versuch 107: Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler

### Ziel

Die dynamische Viskosität von destilliertem Wasser und ihre Temperaturabhängigkeit sollen mit Hilfe des Kugelfall-Viskosimeters nach Höppler bestimmt werden.

### 1) Theorie

Das Verhalten eines Fluids, in dem sich ein bewegter Körper befindet, wird unter anderem durch die dynamische Viskosität  $\eta$  beschrieben, welche ein Maß für die Zähflüssigkeit ist. Diese ist bei konstanter Temperatur durch die Fallzeit  $t$  des Körpers, der Apparaturkonstante  $k$  und die Dichten des Fallkörpers  $\rho_k$  und der Flüssigkeit  $\rho_f$  bestimmbar. Es gilt

$$\eta = t (\rho_k - \rho_f) k. \quad (1)$$

Die Temperaturabhängigkeit der Viskosität beschreibt das Andradesche Gesetz für die meisten Fluide mit

$$\eta(T) = A \exp\left(\frac{B}{T}\right), \quad (2)$$

wobei  $A$  und  $B$  Konstanten sind und  $T$  die Temperatur ist.

Anwendung findet die Viskosität bei der Betrachtung von Kräften.

Bewegt sich der Körper im Fluid, so wirken im Wesentlichen die Stokes'sche Reibung  $F_s$  und der Auftrieb  $F_A$  entgegen der Gravitation  $F_G$ . Die Stokes'sche Reibung mit  $F_s = 6\pi r v \eta$  ist <sup>hier</sup> linear abhängig von der Geschwindigkeit  $v$  des Körpers durch das Fluid, während die Auftriebskraft mit  $F_A = \rho_f V_B g$  abhängig von dem Volumen und der Dichte des Fluides ist.

Befinden sich diese zwei Kräfte im Gleichgewicht mit der Gravitation  $F_G = mg$ , so ist die Geschwindigkeit  $v$  konstant.

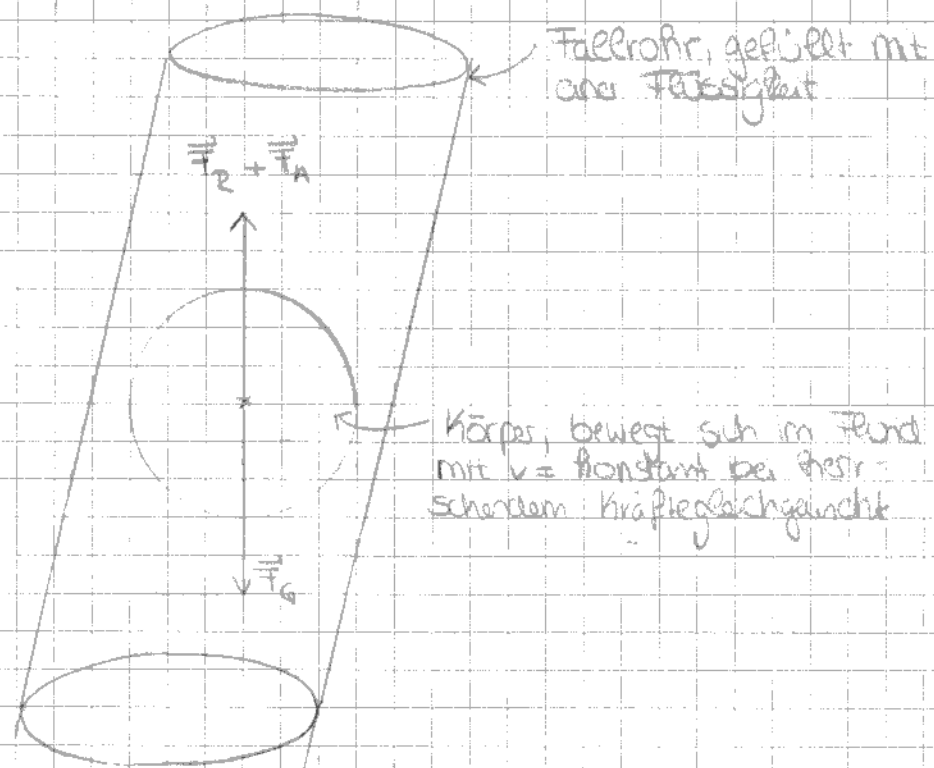


Abbildung 1: Die Kräfte auf einen Körper in einem Fluid.

Anders als die newtonsche Reibung behandelt die stokesche Reibung laminare Strömungen, aufgrund dessen kleine Geschwindigkeiten  $v$  vorausgesetzt werden. Eine Strömung wird laminar genannt, wenn die Flüssigkeitsschichten verschiedener Tiefgeschwindigkeiten nicht turbulent vermischen und ein Geschwindigkeitsgradient existiert. Um turbulente und laminare Strömungen rechnerisch zu unterscheiden, wird die Reynoldszahl  $Re$  mit

$$(3) \quad Re = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta}$$

definiert, wobei die charakteristische Länge  $d$  eine ausgezeichnete Länge im Strömungssystem ist und im Röhrenverhältnis zur effektiven Fläche steht; hier entspricht  $d$  dem Durchmesser der Kugel. Erreicht die Geschwindigkeit  $v$  des Körpers einen kritischen Wert  $v_{krit}$  und steigt die Reynoldszahl über einen kritischen Wert  $Re \approx 2000$ , so ist der Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung wahrscheinlich. In diesem Fall ist die newtonsche Reibung der stokeschen Reibung vorzuziehen.

## 2) Aufbau und Durchführung

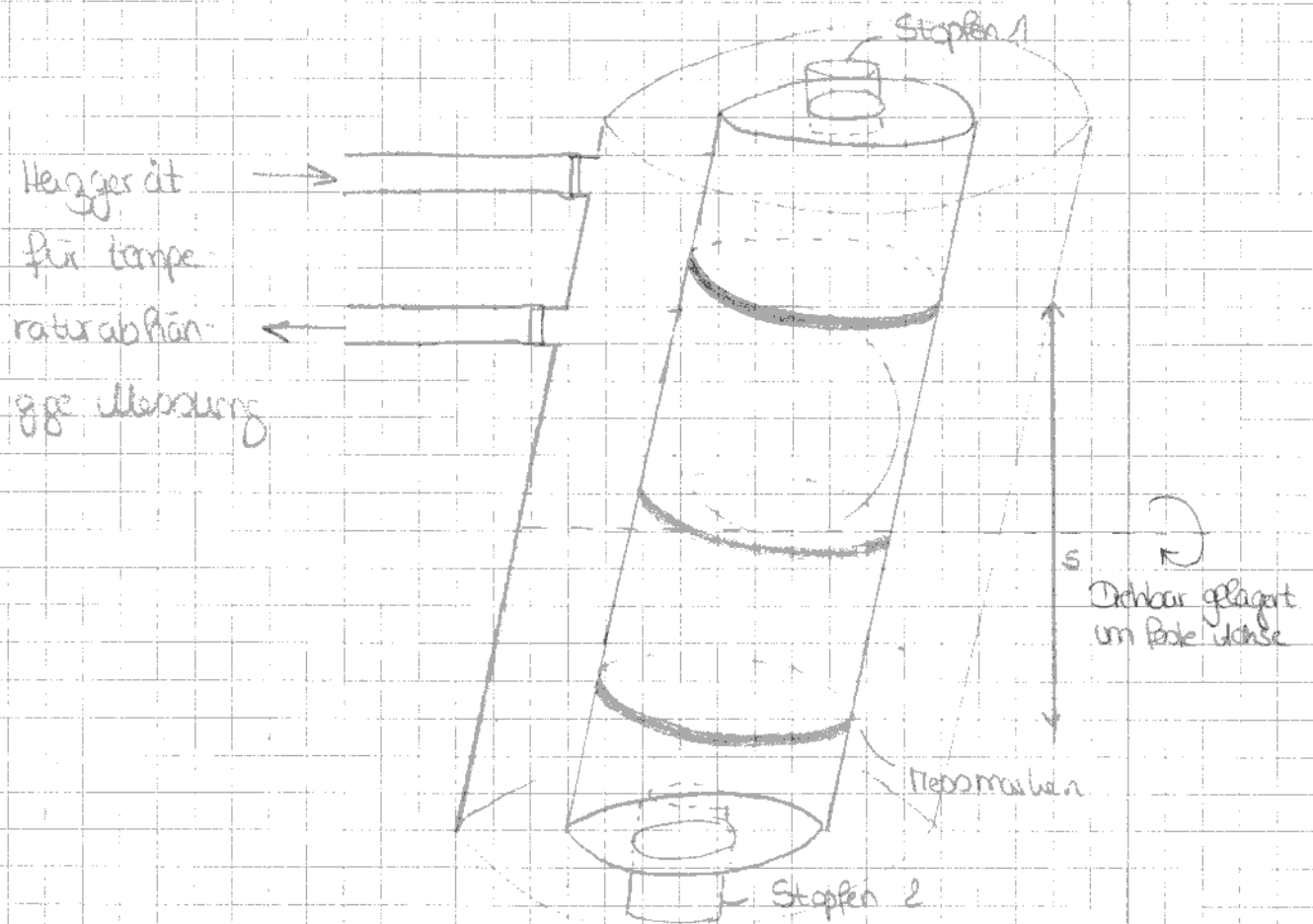


Abbildung 2: Höppler-Viskosimeter [3]

Der innere Zylinder wird so mit bidentilliertem Wasser gefüllt, dass keine Luftblasen eingeschlossen werden, bevor die gereinigte und polierte Kugel eingelassen wird. Es werden für die Messreihen zwei Glas-Kugeln verschiedener Größe ausgewählt, deren Durchmesser nur geringfügig kleiner sind als der des Fallrohrs. Die Temperatur des Wassers im Fallrohr kann mit temperierter Heizflüssigkeit im Heizzylinder kontrolliert werden; die Temperatur der Heizflüssigkeit ist anhand eines Thermometers und eines Thermostates ables- und regulierbar.

Die Vorrichtung ist drehbar und verfügt über Messmarken im inneren Zylinder im Abstand  $s = 100 \text{ mm}$ .

1. Messung bei Raumtemperatur mit großer und kleiner Kugel  
Mit der Kugel am unteren Ende des Fallzylinders wird zu Beginn der Messung die Vorrichtung um  $180^\circ$  gedreht und die Fallzeit  $t$  aufgenommen, die die Kugel benötigt, um von der oberen zur unteren Messmarke zu gelangen. Hierzu wird die Fallzeit zweimal unabhängig voneinander aufgenommen und ~~der~~ der Vorgang wiederholt, sodass 10 Wertepaare ermittelt werden. Dies wird analog mit der zweiten Kugel durchgeführt. Die Raumtemperatur wird am Thermometer abgelesen.

## 2. Messung der Temperaturabhängigkeit mit großer Kugel

Die Temperatur wird zwischen den Messungen ~~mindestens~~ von  $293,15^\circ\text{K}$  auf  $343,15^\circ\text{K}$  in  $5^\circ\text{K}$ -Schritten erhöht, sodass für 10 verschiedene Temperaturen Messwerte bestimmt werden. Nach kurzer Aufheizphase des inneren Zylinders wird für jede Temperaturstufe die Fallzeit  $t$  der großen Kugel zweifach unabhängig voneinander bestimmt und das Verfahren wiederholt, bis ~~mindestens~~ schließlich 2 Wertepaare aufgenommen sind.

✓

### Messung 1: Große Kugel bei Raumtemperatur

| $t_1/s$ | $t_2/s$ |
|---------|---------|
| 82,78   | 82,83   |
| 83,50   | 83,70   |
| 83,36   | 83,41   |
| 83,90   | 83,78   |
| 83,21   | 83,21   |
| 83,67   | 83,78   |
| 83,23   | 83,13   |
| 84,18   | 84,47   |
| 83,20   | 83,46   |
| 83,90   | 83,86   |

Tabelle 1

Masse der Kugel:  $m_g = 4,61g$

Durchmesser:  $d_g = 15,8mm$

### Messung 2: Kleine Kugel bei Raumtemperatur

| $t_1/s$ | $t_2/s$ |
|---------|---------|
| 11,95   | 11,70   |
| 11,93   | 12,01   |
| 12,09   | 11,78   |
| 12,01   | 11,96   |
| 11,96   | 11,70   |
| 11,93   | 12,04   |
| 12,01   | 11,87   |
| 11,78   | 11,87   |
| 12,04   | 11,95   |
| 12,02   | 11,75   |

Tabelle 2

Masse der Kugel:  $m_k = 4,44g$

Durchmesser:  $d_k = 15,65mm$

# Messung 3: Temperaturabhängigkeit (große Kugel)

| $T / ^\circ K$ | $t_1 / s$ | $t_2 / s$ | $t_3 / s$ | $t_4 / s$ |
|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 298,15         | 76,35     | 76,45     | 74,91     | 75,35     |
| 303,15         | 67,56     | 67,84     | 66,36     | 68,35     |
| 308,15         | 62,09     | 62,07     | 60,38     | 60,47     |
| 313,15         | 55,27     | 55,18     | 54,93     | 54,84     |
| 318,15         | 50,73     | 50,73     | 50,44     | 50,30     |
| 323,15         | 46,84     | 47,29     | 46,00     | 46,36     |
| 328,15         | 44,27     | 44,32     | 43,29     | 43,80     |
| 333,15         | 40,43     | 40,89     | 40,52     | 40,56     |
| 338,15         | 37,89     | 37,70     | 37,50     | 37,66     |
| 343,15         | 35,36     | 35,49     | 35,67     | 35,62     |

Tabelle 3

### 3. Auswertung

#### 3.1 Bestimmung der Apparaturkonstante $k_G$ der großen Kugel

Zuerst soll die Apparaturkonstante  $k_G$  bestimmt werden. Dies geschieht über Formel (1). Masse und Masse der Kugeln ergeben mit  $\rho = \frac{m}{V} = m \cdot \left( \frac{4}{3} \pi \cdot \left( \frac{d}{2} \right)^3 \right)^{-1}$  die beiden Kugel-

dichten (Tabelle 1)  $\rho_G = 2232,19 \text{ kg/m}^3$  und  $\rho_k = 2212,29 \text{ kg/m}^3$ .

Mit angegebenes  $\eta_k = 0,07640 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  <sup>②</sup>, der mittleren Fall-

$k_k \neq k_G$

zeit der kleinen Kugel  $t_k = (11,918 \pm 0,027) \text{ s}$  und dem Lite-

raturwert für die Dichte des destillierten Wassers  $\rho_w = 998,20 \text{ kg/m}^3$  <sup>③</sup>

kann nun durch Gleichung (1) die Viskosität des Fluids berechnet

werden:  $\eta = (0,001060 \pm 0,0000025) \text{ Pa} \cdot \text{s}$ .

$\eta$  wird durch die kleinen Kugel berechnet

Wird Gleichung (1) anschließend nach  $k_G$  umgeformt, so ergibt

sich mit mittlerer Fallzeit  $t_G = (23,53 \pm 0,10) \text{ s}$  für die Appa-

ratorkonstante  $k_G = (1,0725 \pm 0,027) \cdot 10^{-4} \text{ s}$ . Alle Fehler wurden

mittels Gauß'scher Fehlerfortpflanzung berechnet.

#### 3.2 Bestimmung der Konstanten in der Arrhenius-Gleichung

Um die Viskosität nach der Arrhenius-Gleichung in Abhängigkeit von der Temperatur bestimmen zu können, müssen die

Konstanten A und B berechnet werden. Dafür wird Gleichung

(2) wie folgt linearisiert:

$$\eta(T) = A \exp\left(\frac{B}{T}\right) \quad | \ln()$$

$$\ln(\eta(T)) = \ln\left(A \exp\left(\frac{B}{T}\right)\right)$$

$$\ln(\eta(T)) = \ln A + \ln\left(\exp\left(\frac{B}{T}\right)\right)$$

$$\ln(\eta(T)) = \ln A + \frac{B}{T} = \textcircled{B} \cdot \left(\frac{1}{T}\right) + \textcircled{\ln A}$$

Farbe nicht nötig

Die linearisierte Gleichung der Form  $y(x) = \textcircled{m}x + \textcircled{b}$  ist eine

Geradengleichung, B entspricht der Steigung m,  $\ln(A)$  dem y-

Achsenabschnitt b und  $\frac{1}{T}$  dem linearisierten x  $\textcircled{x_{lin}}$

Die Regression erfolgt unter Zuhilfenahme von Rechner und

unter Verwendung der Formeln

$$\Delta = N \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2$$

$$m = N \cdot \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N y_i : \frac{1}{\Delta}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \cdot \sum_{i=1}^N x_i \cdot y_i}{\Delta} \cdot \frac{1}{\Delta}$$

$$\Delta m = \sigma_y \cdot \sqrt{\frac{1}{\Delta}} \\ \Delta b = \sigma_y \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{\Delta}} \cdot \frac{1}{\Delta} \quad \text{mit } \sigma_y = \sqrt{\frac{1}{N-2} \left[ \sum_{i=1}^N (y_i - m x_i - b)^2 \right]}$$

Die Linearisierung <sup>der Viskosität</sup> mit  $A = (13,85 \pm 0,3699) \cdot 10^6 \frac{\text{mPa} \cdot \text{s}}{\text{K}}$  und

$B = (1712,979 \pm 37,718) \text{K}$  wird gegen den Kehrwert der Temperatur aufgetragen. Wie in Diagramm 1 ersichtlich ist, zeigt sich ein linearer Zusammenhang. Die Fehler der errechneten Viskositäten sind kleiner als die eingezeichneten Meßpunkte.

### 3.3 Strömungsart

Um die Strömungsart zu charakterisieren wird die Reynoldszahl

$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta}$  der Strömung bestimmt. Maßgebliche Größen sind die Dichte und die Geschwindigkeit des Fluides, eine charakteristische Länge  $d$  und die Viskosität. Die Länge ist bei der hier ausgewerkten Rohrströmung der Durchmesser der Kugel, was ungefähr dem Durchmesser des Fallrohrs entspricht.

Die Geschwindigkeit  $v$  berechnet sich über das Weg-Zeit-Gesetz nach  $s = v \cdot t$ .  $s = 100 \text{ mm}$  ist die zurückgelegte Fallstrecke der Kugel,  $t$  entspricht dem Mittelwert der gemessenen Fallzeiten.

Die große Kugel mit der Geschwindigkeit  $v_g = 0,001199 \text{ m/s}$  hat  $Re = 17,069$  bei Raumtemperatur.

Für die kleine Kugel mit  $v = 0,008347 \text{ m/s}$  beträgt die Reynoldszahl  $Re = 118,506$ .



Die Reynoldszahl  $Re$  für die temperaturabhängige Viskosität bei der größten Kugel ist für die jeweilige Temperatur in Tabelle (4) aufgetragen.

| $T / ^\circ K$ | $\bar{t} / s \pm \Delta t / s$ | $v \pm \Delta v (m/s)$  |
|----------------|--------------------------------|-------------------------|
| 298,15         | $75,77 \pm 0,38$               | $0,001320 \pm 0,000007$ |
| 303,15         | $68,03 \pm 0,20$               | $0,001470 \pm 0,000004$ |
| 308,15         | $61,25 \pm 0,48$               | $0,001633 \pm 0,000013$ |
| 313,15         | $55,05 \pm 0,10$               | $0,001816 \pm 0,000003$ |
| 318,15         | $50,55 \pm 0,11$               | $0,001978 \pm 0,000004$ |
| 323,15         | $46,62 \pm 0,28$               | $0,002145 \pm 0,000013$ |
| 328,15         | $43,92 \pm 0,24$               | $0,002277 \pm 0,000012$ |
| 333,15         | $40,60 \pm 0,10$               | $0,002463 \pm 0,000006$ |
| 338,15         | $37,69 \pm 0,08$               | $0,002653 \pm 0,000006$ |
| 343,15         | $35,53 \pm 0,07$               | $0,002814 \pm 0,000006$ |

Tabelle 4

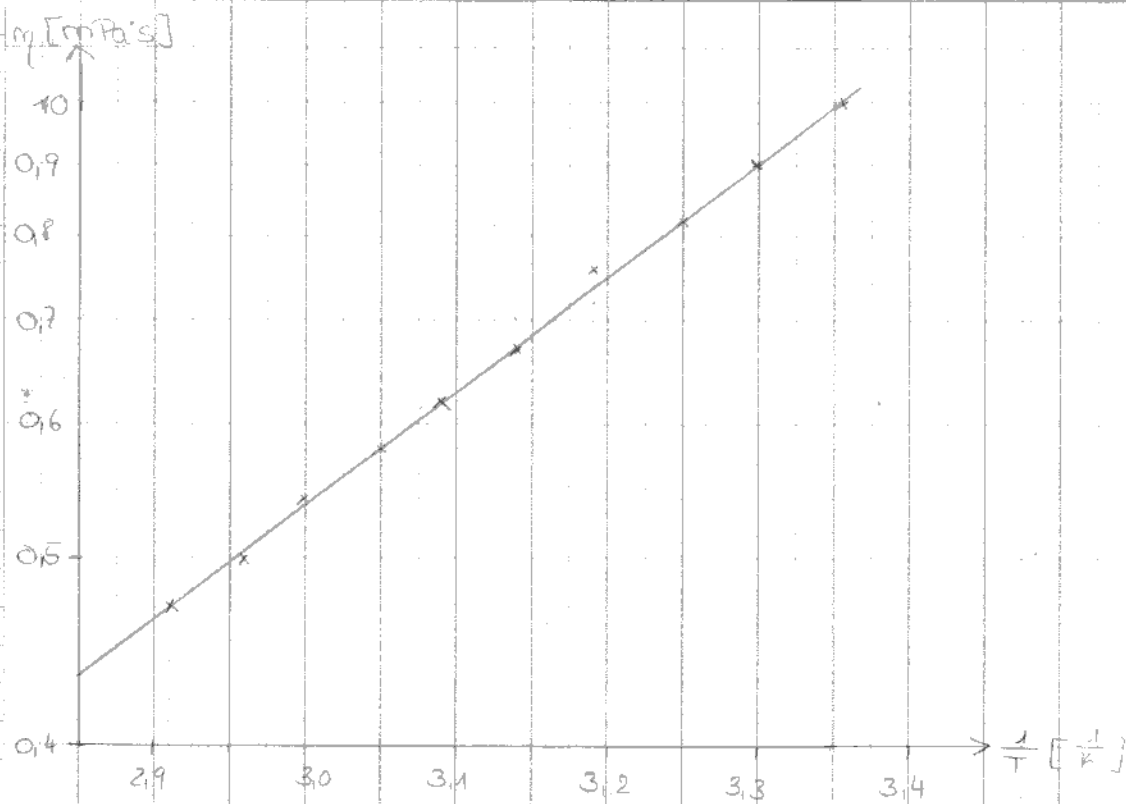


Diagramm 1: Die Viskosität  $\eta$  auf logarithmischer Skala aufgetragen gegen  $1/T$ . 6/10

| $\eta$ / mPa $\pm \Delta\eta$ / mPa | Reynoldszahl $Re \pm \Delta Re$ | Tabelle 4 |
|-------------------------------------|---------------------------------|-----------|
| 1,00323 $\pm$ 0,0056                | 20,74 $\pm$ 0,21                |           |
| 0,90078 $\pm$ 0,0035                | 25,72 $\pm$ 0,16                |           |
| 0,81107 $\pm$ 0,0066                | 31,73 $\pm$ 0,50                |           |
| 0,72900 $\pm$ 0,0023                | 39,27 $\pm$ 0,18                |           |
| 0,66935 $\pm$ 0,0022                | 46,58 $\pm$ 0,23                |           |
| 0,61734 $\pm$ 0,0040                | 54,76 $\pm$ 0,67                |           |
| 0,58156 $\pm$ 0,0035                | 61,71 $\pm$ 0,69                |           |
| 0,53760 $\pm$ 0,0019                | 72,21 $\pm$ 0,40                |           |
| 0,49903 $\pm$ 0,0016                | 83,80 $\pm$ 0,14                |           |
| 0,47053 $\pm$ 0,0015                | 94,26 $\pm$ 0,44                |           |

$\eta_{literatur}$  / mPa <sup>©</sup>

0,894  
 0,801  
 0,723  
 0,656  
 0,599  
 0,549  
 0,506  
 0,468  
 0,436  
 0,406

## 4. Diskussion

### 4.1 Vergleich der Viskosität mit der Literatur

In Diagramm 1 ist  $\ln(\eta)$  gegen den Kehrwert der Temperatur aufgetragen. Aus der Regressionsrechnung folgt  $A = (3,135 \pm 0,3699) \cdot 10^6$  und  $B = 1712,979 \pm 37,718$ . Es ist ein linearer Zusammenhang zwischen dem natürlichen Logarithmus der Viskosität und  $1/T$  zu erkennen. Vergleicht man die in Tabelle (4) angegebenen Viskositäten für die spezifische Temperatur mit den Literaturwerten<sup>①</sup>, so liegen die Abweichungen zwischen 0,063 mPas und 0,109 mPas.<sup>1</sup>

Da die Abweichungen in der gleichen Größenordnung liegen, ist es möglich, dass das verwendete Wasser eine grundsätzlich größere Viskosität aufweist, als die Flüssigkeit für die Literaturwerte. Weiter könnte ein systematischer Fehler vorliegen, da die Fallzeit manuell gemessen wurde und die Wassertemperatur im Rohr indirekt bestimmt wurde. Zu erkennen ist, dass mit steigender Temperatur die Viskosität, also die Zähflüssigkeit, des Fluids abnimmt. Durch erhöhte Molekülbewegung und größerem molekularem Abstand wird beim Erhitzen die intermolekulare Bindung des Wassers, etwa durch Wasserstoffbrücken- und Dipol-Dipol-Wechselwirkung<sup>②</sup> geschwächt. Dementsprechend wird die Bewegung der Kugel ein geringerer Reibungswiderstand entgegengesetzt und so die Geschwindigkeit erhöht.

### 4.2 Diskussion der Strömung

Bei Raumtemperatur liegt die Reynoldszahl der großen Kugel mit  $Re = 17,07$  weit unter dem in der Literatur angegebenen Grenzwert von  $Re \approx 2300$ <sup>③</sup>. Auch die kleine Kugel mit einer wesentlich höheren Geschwindigkeit und mit einer Reynoldszahl  $Re = 118,51$ ,

Zum direkten Vergleich wurden die Werte in Tabelle (4) aufgetragen.

welche etwa das 7-fache des Wertes der großen Kugel ist, liegt im Bereich laminarer Strömungen. Die Wahrscheinlichkeit für eventuelle Verwirbelungen ist vernachlässigbar klein.

Für höhere Temperaturen sind in Tabelle (4) die Reynoldszahlen für die jeweilig gemessene Temperatur aufgelistet. Mit wachsender Temperatur steigt der Wert der Reynoldszahl von 29,74 bis zum errechneten Höchstwert von 94,26 bei  $343,15^\circ\text{K}$ . Auch in diesem Versuchsteil bleibt die Strömung mit hoher Wahrscheinlichkeit rein laminar.

### Literaturverzeichnis

- a) Kershn Avila, David Moxey, Hans Avila, Alberto de Laza, Björn Hof: Onset of Turbulence in Pipe Flow. 2011
- b) Paula, Y. Brice - Organische Chemie - Studien kompakt, Pearson, 2001 (vgl. S. 92, 93)
- c) Skript zum Versuch 107, physikalisches Anfängerpraktikum Tu Do.  
<http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP1/SHR1DT/Viskositaet.pdf>
- d) Hendrik Kuhnemann, Strömungsmechanik, Pearson 2007 (vgl. S. 20)
- e) D. Gesche, Physikalisches Praktikum, B. G. Teubner, 9. Auflage, Stuttgart 1992 (vgl. S. 276)