

ANFÄNGERPRAKTIKUM V101

## Das Trägheitsmoment

Helena Nawrath  
helena.nawrath@tu-dortmund.de

Carl Arne Thomann  
arnethomann@me.com

Durchführung: 28. Oktober 2014      Abgabe: 04. November 2014

TU Dortmund – Fakultät Physik

## 1 Ziel

Es werden die Trägheitsmomente verschiedener Körper gemessen und anschließend mit den theoretisch errechneten Werten verglichen. Hierzu werden die Winkelrichtgröße  $D$  und das Trägheitsmoment der Drillachse  $I_D$  bestimmt.

## 2 Theorie

Translation und Rotation verbinden Analogien. Bei Rotationen sind das Drehmoment  $\vec{M}$ , das Trägheitsmoment  $I$  und die Winkelbeschleunigung  $\dot{\vec{\omega}}$  maßgebliche Größen. Das Drehmoment  $\vec{M}$  mit  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  ist abhängig von der Kraft  $\vec{F}$ , welche im Abstand  $|\vec{r}|$  von der Drehachse angreift. Ausgedrückt über die Winkelrichtgröße  $D$  und die Auslenkung des Winkels  $\phi$  ist der Betrag des Drehmomentes ebenfalls

$$|\vec{M}| = D\phi. \quad (1)$$

Das Trägheitsmoment  $I$  ist, analog zur trägen Masse  $m$  in Translationen, der Widerstand eines Drehmoments  $\vec{M}$ . Es gilt für Drehachsen durch den Masseschwerpunkt  $S$

$$I_S = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2 \quad (2)$$

für diskrete Massestücke  $m_i$  im Abstand  $r_i$  von der Rotationsachse und

$$I_S = \int_{m_K} r_i^2 dm \quad (3)$$

$$= \int_{V_K} \rho(\vec{r}) \cdot r_{\perp}^2 dV \quad (4)$$

für kontinuierliche Masseverteilungen mit Massenverteilung  $\rho(\vec{r})$ . Ist die Drehachse um  $a$  parallel zur Achse durch den Schwerpunkt verschoben, so kann das Trägheitsmoment  $I_a$  unter Zuhilfenahme des Satzes von Steiner berechnet werden,

$$I_a = I_S + m_K \cdot a^2. \quad (5)$$

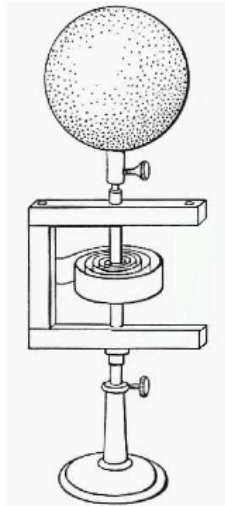
Mechanische Drehschwingungen führen harmonische Schwingungen mit der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad (6)$$

für kleine Auslenkungswinkel  $\phi$  aus. Die Winkelrichtgröße  $D$  berechnet sich bei  $\vec{F} \perp \vec{r}$  mit Formel (1) und (6) zu

$$D = \frac{F \cdot r}{\phi} \quad (7)$$

$$= 4\pi^2 \cdot \frac{I}{T^2}. \quad (8)$$



**Abbildung 1:** Skizze des Versuchsaufbaus mit Kugel als Probekörper

### 3 Aufbau und Durchführung

In diesem Versuch wird die gezeigte Apparatur verwendet. Eine drehbar gelagerte Achse ist über eine Spiralfeder an einen festen Rahmen gebunden. In das obere Ende der Drillachse können verschiedene Körper eingespannt und der Auslenkwinkel  $\phi$  anhand einer Skala abgelesen werden.

#### 3.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße $D$

Zur Bestimmung der Winkelrichtgröße  $D$  wird gemäß (1) das Drehmoment  $\vec{M}$  und der Auslenkwinkel  $\phi$  ermittelt. Hierzu wird eine Metallstange so in die Vorrichtung eingespannt, dass die Drehachse durch den Stangenschwerpunkt verläuft senkrecht zur Drehachse steht. Eine im Abstand  $r$  zum Drehzentrum angehängte Federwaage misst die Kraft  $F$  ausgehend vom rücktreibenden Drehmomentes bei Auslenkung der Metallstange um einen ausgewählten Winkel  $\phi$ . Zu beachten ist, dass die Federwaage senkrecht zum Stab und zur Rotationsachse sein muss. Dadurch kann der Betrag des Drehmoments  $M$  durch

$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin(\angle(\vec{r})) \quad (9)$$

berechnet werden. Diese Messung wird für 10 verschiedene Winkel  $\phi$  zwischen 0 und  $2\pi$  durchgeführt. Neben der vorherig beschriebenen statischen Methode, kann  $D$  ebenfalls über die Messung der Schwingungsdauer  $T$  - die dynamische Methode - bestimmt werden. Diese wird jedoch nicht durchgeführt.

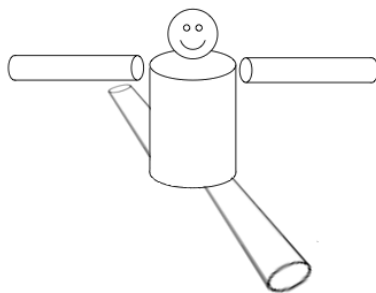
### 3.2 Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes $I_D$ der Drillachse

Auf die Metallstange aus Kapitel 3.1 wird beidseitig im Abstand  $a$  von der Drehachse je eine Masse befestigt. Die Stange wird um  $\phi$  ausgelenkt und mittels einer Stoppuhr die Schwingungsdauer  $T$  für 2 Perioden gemessen. Es wird ein neuer Abstand  $a$  gewählt und das Verfahren wiederholt, sodass insgesamt 10 Messwerte für Schwingungsdauer  $T$  aufgenommen werden. Masse und Abmessungen der Massestücke werden mit Waage und Schieblehre bestimmt.

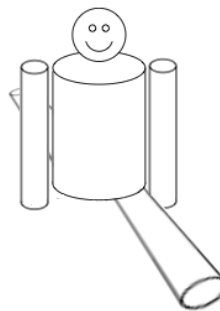
### 3.3 Bestimmung der Trägheitsmomente $I$ verschiedener Körper

Als erster Körper wird ein Styroporzylinder gewählt, welcher senkrecht auf die Drillachse gesteckt wird. Anschließend wird der Körper in Schwingung versetzt und die Schwingungsdauer  $T$  für 5 Schwingungen insgesamt 10 Mal gemessen. Das Verfahren wird für den zweiten Körper, eine Kugel, analog wiederholt. Abmessungen und Masse der Probekörper werden mittels Schieblehre und Waage bestimmt.

### 3.4 Bestimmung der Trägheitsmomente $I$ der Modellpuppe für zwei verschiedene Positionen



(a) Position (1) der Modellpuppe



(b) Position (2) der Modellpuppe

Die Puppe wird jeweils in Position (1) und in Position (2) in die Messvorrichtung eingespannt und der Messvorgang analog zu Kapitel 3.3 durchgeführt. Es folgen die Bestimmung des Gewichtes mit einer Waage und die Vermessung der einzelnen Körperteile der Puppe. Es werden Durchmesser und ggf. die Länge von Armen, Beinen, Kopf und Rumpf mit einer Schieblehre vermessen.

## 4 Auswertung

### 4.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße $D$

| Winkel |                     | Kraft          |
|--------|---------------------|----------------|
| $\phi$ | $\phi / \text{rad}$ | $F / \text{N}$ |
| 45°    | $\frac{\pi}{4}$     | 0.22           |
| 90°    | $\frac{\pi}{2}$     | 0.40           |
| 120°   | $\frac{2\pi}{3}$    | 0.52           |
| 135°   | $\frac{3\pi}{4}$    | 0.60           |
| 180°   | $\pi$               | 0.78           |
| 225°   | $\frac{5\pi}{4}$    | 0.92           |
| 240°   | $\frac{4\pi}{3}$    | 0.90           |
| 270°   | $\frac{3\pi}{2}$    | 1.08           |
| 315°   | $\frac{7\pi}{4}$    | 1.26           |
| 360°   | $2\pi$              | 1.42           |

**Tabelle 1:** Messung zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes der Drillachse

Mit den Messwerten und  $r = 0.09965\text{m}$  lässt sich die Winkelrichtgröße  $D$  mit der Gleichung (7) bestimmen. Die Unsicherheit ist die Standardabweichung des Mittelwertes  $\sigma_D$  mit

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} := \sqrt{\frac{1}{n^2 - n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (10a)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (10b)$$

für  $x = D$ . Es ergibt sich

$$D = (0.0757 \pm 0.0019) \text{Nm} \quad (11)$$

### 4.2 Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes $I_D$

Zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes  $I_D$  wird die verwendete Stange als nahezu masselos angenommen, wodurch ihr Anteil am Trägheitsmoment vernachlässigbar ist. Das gemessene Trägheitsmoment setzt sich aufgrund der Linearität des Trägheitsmomentes aus den Trägheitsmomenten der Massestücke  $m_1$  und  $m_2$  als Punktmassen, sowie dem Eigenträgheitsmoment  $I_D$  zusammen,[5]

$$I = I_D + I_{m_1} + I_{m_2}. \quad (12)$$

Nach Einsetzen in Gleichung (7) wird der lineare Zusammenhang von  $T^2$  und  $a^2$  ersichtlich. Es gilt

$$\begin{aligned}
D &= 4\pi^2 \cdot \frac{I}{T^2} \\
&= 4\pi^2 \cdot \frac{I_D + I_{m_1} + I_{m_2}}{T^2} \\
&= 4\pi^2 \cdot \frac{I_D + a^2(m_1 + m_2)}{T^2} \\
T^2 &= 4\pi^2 \frac{I_D}{D} + 4\pi^2 \frac{a^2(m_1 + m_2)}{D} \\
\\
T^2 &= \underbrace{4\pi^2 \frac{(m_1 + m_2)}{D}}_{m_{\text{Reg}}} \cdot a^2 + \underbrace{4\pi^2 \frac{I_D}{D}}_{b_{\text{Reg}}} \quad (13)
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung des Eigenträgheitsmoments  $I_D$  werden die gemittelten Schwingperioden-Quadrate  $T^2$  gegen das Abstandsquadrat  $a^2$  aufgetragen. Aus der Regression mittels der Formeln

$$\Delta = N \sum x^2 - (\sum x)^2 \quad (14a)$$

$$m_{\text{Reg}} = \frac{N \sum x \cdot y - \sum x \cdot \sum y}{\Delta} \quad (14b)$$

$$b_{\text{Reg}} = \frac{\sum x^2 \cdot \sum y - \sum x \cdot \sum x \cdot y}{\Delta} \quad (14c)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y - m_{\text{Reg}} \cdot x - b_{\text{Reg}})^2}{N - 2}} \quad (14d)$$

$$\sigma_m = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}} \quad (14e)$$

$$\sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}} \quad (14f)$$

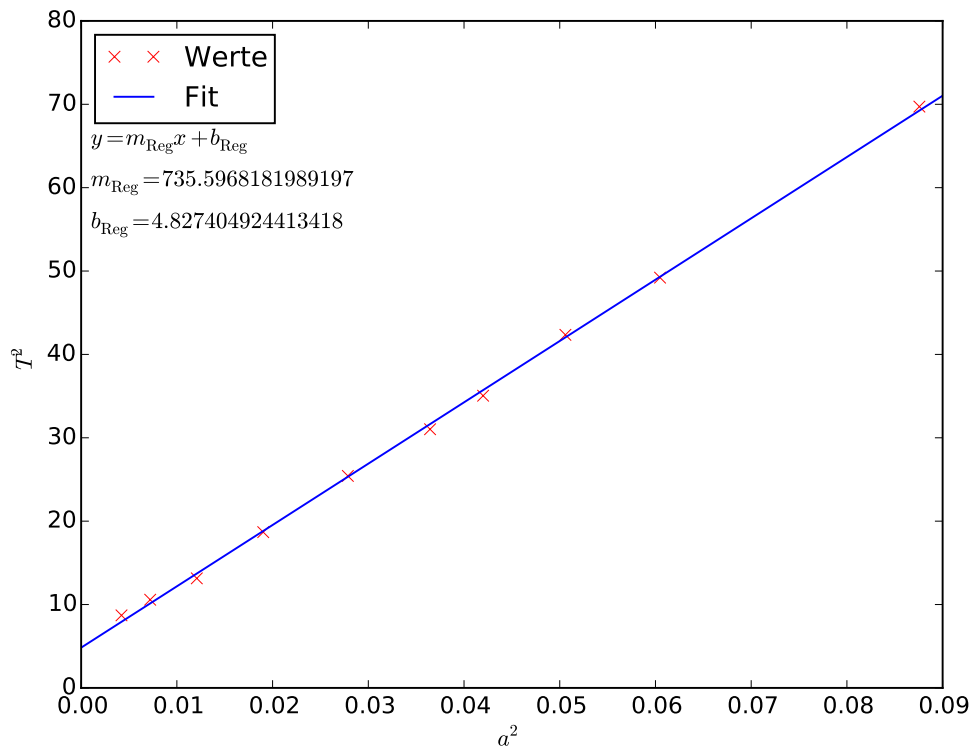
für  $x = a^2$ ,  $y = T^2$  und der Identität aus Gleichung (13), wird das Eigenträgheitsmoment  $I_D$  berechnet

$$\begin{aligned}
I_D &= \frac{D}{4\pi^2} b_{\text{Reg}} \\
&= (9.26 \pm 0.23) 10^{-3} \text{ kg m}^2 \quad (15)
\end{aligned}$$

Da dieses Trägheitsmoment größer ist als die Ergebnisse der folgenden Messungen, wird von dem Abzug des Eigenträgheitsmomentes abgesehen (vgl. Kapitel 5.1).

| Abstand       | Schwingungsdauer |                |                 |                | Masse          |                |
|---------------|------------------|----------------|-----------------|----------------|----------------|----------------|
| $a/\text{cm}$ | $2T_1/\text{s}$  | $T_1/\text{s}$ | $2T_2/\text{s}$ | $T_2/\text{s}$ | $m_1/\text{g}$ | $m_2/\text{g}$ |
| 6,4925        | 5,90             | 2,950          | 5,90            | 2,950          | 221,74         | 221,73         |
| 8,4925        | 6,55             | 3,275          | 6,46            | 3,230          | 221,74         | 221,73         |
| 10,9925       | 7,29             | 3,645          | 7,21            | 3,605          | 221,75         | 221,73         |
| 13,7925       | 8,66             | 4,330          | 8,63            | 4,315          | 221,76         | 221,75         |
| 16,6925       | 10,07            | 5,035          | 10,10           | 5,050          | 221,75         | 221,74         |
| 19,0925       | 11,13            | 5,565          | 11,15           | 5,575          | 221,75         | 221,74         |
| 20,4925       | 11,92            | 5,960          | 11,76           | 5,880          | 221,75         | 221,73         |
| 22,4925       | 13,03            | 6,515          | 13,00           | 6,500          | 221,76         | 221,74         |
| 24,5925       | 14,10            | 7,050          | 13,96           | 6,980          | 221,75         | 221,75         |
| 29,5925       | 16,67            | 8,335          | 16,73           | 8,365          | 221,76         | 221,74         |

**Tabelle 2:** Messung zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes der Drillachse



**Abbildung 3:** Regression von  $T^2$  gegen  $a^2$

### 4.3 Trägheitsmoment $I_Z$ eines Zylinders

| Schwingungsdauer |              | Abmessungen        |                           | Masse        |
|------------------|--------------|--------------------|---------------------------|--------------|
| $5T/\text{s}$    | $T/\text{s}$ | Höhe $H/\text{cm}$ | Durchmesser $D/\text{cm}$ | $M/\text{g}$ |
| 4,41             | 0,882        | 10,120             | 9,848                     | 368,57       |
| 4,35             | 0,870        | 10,150             | 9,850                     | 368,57       |
| 4,44             | 0,888        | 10,120             | 9,844                     | 368,57       |
| 4,44             | 0,888        | 10,102             | 9,840                     | 368,57       |
| 4,36             | 0,872        | 10,112             | 9,844                     | 368,57       |
| 4,41             | 0,882        | 10,112             | 9,850                     | 368,58       |
| 4,32             | 0,864        | 10,058             | 9,850                     | 368,59       |
| 4,40             | 0,880        | 10,070             | 9,844                     | 368,57       |
| 4,33             | 0,886        | 10,068             | 9,844                     | 368,58       |
| 4,39             | 0,878        | 10,072             | 9,850                     | 368,57       |

**Tabelle 3:** Messung zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes eines Zylinders

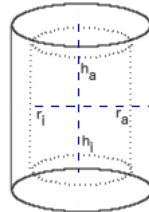
Mit bekannter Winkelrichtgröße  $D$  wird die Gleichung (7) benutzt, um das Trägheitsmoment aus der Schwingungsdauer  $T$  zu berechnen. Der Fehler des Trägheitsmomentes wird mithilfe der Gausschen Fehlerfortpflanzung mit

$$\sigma = \sqrt{\sum_i^N \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \Delta x_i^2} \quad (16)$$

bestimmt. Es ergibt sich

$$I_Z = (1.48 \pm 0.04) 10^{-3} \text{kg m}^2 \quad (17)$$

Das sichtbare Material der Zylinders ist Styropor-ähnlich. [1] Da die gemessene Masse des Zylinders,  $m_Z = (368.5740 \pm 0.0022)\text{g}$ , stark von der theoretischen Masse eines Styropor-Zylinders gleicher Maße,  $m_{\text{Theorie}} = \rho_{\text{Styropor}} V = (807.4 \pm 0.8)\text{g}$ , abweicht, wird die Vermutung angestellt, dass der Körper ein Hohlzylinder ist oder dass der Körper nicht vollständig aus Styropor besteht. Zur Bestimmung der Geometrie des vermuteten Styropor-Hohlzylinders wird die Formel für Hohlzylinder-Volumen mit der Dichte  $\rho_{\text{Styropor}}$  multipliziert und mit der gemessenen Masse gleichgesetzt. Dabei gilt die Annahme, dass die Stärke des Hohlzylinders für Mantel, Deckel und Boden gleich sind,



**Abbildung 4:** Bezeichnungen des Hohlzylinders



$r_a - r_i = h_a - h_i$ . Die so von zwei Unbekannten  $r_i$  und  $h_i$  auf eine Unbekannte  $r_i$  reduzierte Gleichung

$$m_Z = \rho(-2\pi * (r_i)^3 + (r_i)^2 * (2\pi r_a - \pi h_a) + (\pi h_a r_a^2)) \quad (18)$$

ergibt für den Innenradius  $r_i = 0.0401012\text{m} \pm 0.0898\%$ . Das Trägheitsmoment eines solchen Hohlzylinders setzt sich zusammen aus den Trägheitsmomenten eines Zylindermantels und zwei Kreisscheiben, die um ihren Mittelpunkt rotieren. [5] Es gilt

|                                   | Mantel                    | Kreisscheibe                 |
|-----------------------------------|---------------------------|------------------------------|
| Volumen / $\text{m}^3$            | $0.0002588 \pm 0.0000010$ | $(4.613 \pm 0.010)10^{-5}$   |
| Masse / kg                        | $0.2717 \pm 0.0010$       | $0.04844 \pm 0.00011$        |
| Trägheitsmoment / $\text{kg m}^2$ | $0.0005478 \pm 0.0000017$ | $(3.8945 \pm 0.0028)10^{-5}$ |

**Tabelle 4:** Daten des angenommenen Hohlzylinders

$$\begin{aligned} I_{\text{HZ, Theorie}} &= I_{\text{Zylindermantel}} + 2I_{\text{Kreisscheibe}} \\ &= m_{\text{Mantel}} \frac{r_i^2 + r_a^2}{2} + m_{\text{Kreisscheibe}} r_i^2 \end{aligned}$$

und es ergibt sich

$$I_{\text{HZ, Theorie}} = (6.257 \pm .0017)10^{-4} \text{kg m}^2 \quad (19)$$

#### 4.4 Trägheitsmoment $I_K$ einer Kugel

| Schwingungsdauer |              | Abmessungen               | Masse        |
|------------------|--------------|---------------------------|--------------|
| $5T/\text{s}$    | $T/\text{s}$ | Durchmesser $D/\text{cm}$ | $M/\text{g}$ |
| 8,60             | 1,720        | 13,745                    | 812,7        |
| 8,56             | 1,721        | 13,730                    | 812,7        |
| 8,61             | 1,722        | 13,720                    | 812,7        |
| 8,58             | 1,716        | 13,745                    | 812,7        |
| 8,56             | 1,721        | 13,750                    | 812,7        |
| 8,61             | 1,722        | 13,740                    | 812,7        |
| 8,55             | 1,710        | 13,750                    | 812,7        |
| 8,61             | 1,722        | 13,710                    | 812,7        |
| 8,60             | 1,720        | 13,745                    | 812,7        |
| 8,61             | 1,722        | 13,730                    | 812,7        |

**Tabelle 5:** Messung zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes einer Kugel

Analog zu 4.3 wird über die Schwingungsdauer  $T$  das Trägheitsmoment  $I_K$  der Kugel zu

$$I_K = (5.67 \pm 0.14)10^{-3} \text{kg m}^2 \quad (20)$$

bestimmt. Für die theoretische Berechnung des Trägheitsmomentes wird die gemessene Masse der Kugel benutzt. Mit  $I_K = \frac{2}{5}m_{\text{Kugel}}r^2$  [5] ist

$$I_{K, \text{Theorie}} = (1.5335 \pm 0.0010)10^{-3}\text{kg m}^2 \quad (21)$$

#### 4.5 Trägheitsmoment $I_{\text{Puppe}}$

| Position (1)/s | Position (2)/s |
|----------------|----------------|
| 0,974          | 0,768          |
| 0,956          | 0,778          |
| 0,974          | 0,772          |
| 0,960          | 0,772          |
| 0,972          | 0,774          |
| 0,992          | 0,786          |
| 0,960          | 0,768          |
| 0,980          | 0,780          |
| 0,980          | 0,768          |
| 0,974          | 0,774          |

**Tabelle 6:** Schwingungsdauer der Puppe

Analog zu 4.3 wird über die Schwingungsdauer  $T$  das Trägheitsmoment  $I_{\text{Puppe}}$  für beide Positionen zu

$$I_{\text{Puppe},1} = (1.81 \pm 0.04)10^{-3}\text{kg m}^2 \quad (22a)$$

$$I_{\text{Puppe},2} = (1.149 \pm 0.028)10^{-3}\text{kg m}^2 \quad (22b)$$

bestimmt. Für die theoretische Berechnung werden die Volumina der Körperteile, die Dichte der Puppe  $\rho_{\text{Puppe}}$  mit  $\rho_{\text{Puppe}} = \frac{m_{\text{Puppe}}}{V_{\text{Puppe, Gesamt}}}$  und dadurch die Massen der Körperteile bestimmt. Die Daten sind der Tabelle 6 zu entnehmen. Für die Einzelträgheitsmomente, deren Summe das Trägheitsmoment der Puppe ist, gelten die Formeln

$$\begin{aligned}
I_{\text{Arm},1} &= \frac{m_{\text{Arm}}}{2} \left( \frac{d_{\text{Arm}}}{2} \right)^2 + \underbrace{m_{\text{Arm}} \left( \frac{d_{\text{Rumpf}}}{2} + \frac{d_{\text{Arm}}}{2} \right)^2}_{\text{Satz von Steiner}} \\
I_{\text{Arm},2} &= \frac{m_{\text{Arm}}}{2} \left( \frac{d_{\text{Arm}}}{2} \right)^2 \\
I_{\text{Bein}} &= m_{\text{Bein}} \left( \frac{(d_{\text{Bein}})^2}{16} + \frac{(h_{\text{Bein}})^2}{12} \right) + \underbrace{m_{\text{Bein}} \left( \frac{h_{\text{Bein}}}{2} \right)^2}_{\text{Satz von Steiner}} \\
I_{\text{Kopf}} &= \frac{2m_{\text{Kopf}}}{5} \left( \frac{d_{\text{Kopf}}}{2} \right)^2 \\
I_{\text{Rumpf}} &= \frac{m_{\text{Rumpf}}}{2} \left( \frac{d_{\text{Rumpf}}}{2} \right)^2
\end{aligned}$$

| Armdurchmesser  |                 | Armlänge        |                 | Beindurchmesser |                 | Beinlänge       |                 | Kopf          | Rumpf         |               | Masse        |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|---------------|---------------|---------------|--------------|
| links           | rechts          | links           | rechts          | links           | rechts          | links           | rechts          |               |               |               |              |
| $d_A/\text{cm}$ | $d_A/\text{cm}$ | $l_A/\text{cm}$ | $l_A/\text{cm}$ | $d_B/\text{cm}$ | $d_B/\text{cm}$ | $l_B/\text{cm}$ | $l_B/\text{cm}$ | $d/\text{cm}$ | $d/\text{cm}$ | $l/\text{cm}$ | $M/\text{g}$ |
| 1,7             | 1,5             | 14,1            | 14,0            | 1,6             | 1,6             | 15,0            | 15,5            | 3,0           | 3,9           | 9,9           | 162,60       |
| 1,3             | 1,4             | 14,2            | 14,1            | 1,7             | 2,1             | 14,9            | 15,4            | 3,0           | 3,6           | 10,0          | 162,61       |
| 1,6             | 1,6             | 14,0            | 14,0            | 2,0             | 1,8             | 15,0            | 15,4            | 3,1           | 3,6           | 9,9           | 162,62       |
| 1,0             | 1,2             | 13,9            | 14,1            | 1,2             | 1,6             | 15,0            | 15,6            | 3,1           | 3,9           | 9,9           | 162,65       |
| 1,4             | 1,1             | 14,0            | 13,9            | 1,7             | 1,1             | 14,9            | 15,6            | 3,0           | 4,1           | 9,9           | 162,63       |
| 0,9             | 1,4             | 13,8            | 14,1            | 1,4             | 1,5             | 14,9            | 15,6            | 3,1           | 3,5           | 10,0          | 162,63       |
| 1,6             | 1,3             | 13,9            | 14,0            | 1,3             | 1,3             | 15,0            | 15,3            | 3,0           | 3,7           | 9,8           | 162,61       |
| 1,5             | 1,1             | 14,1            | 14,1            | 1,9             | 1,0             | 14,9            | 15,4            | 3,1           | 3,5           | 9,9           | 162,62       |
| 1,6             | 0,9             | 13,8            | 14,1            | 1,5             | 1,7             | 15,0            | 15,6            | 3,0           | 3,6           | 9,7           | 162,61       |
| 1,7             | 1,4             | 13,9            | 14,2            | 1,3             | 1,6             | 15,0            | 15,6            | 3,1           | 3,2           | 9,8           | 162,64       |

**Tabelle 7:** Abmessungen und Masse der Modellpuppe

|                              | Arm                 |                     | Beine               |                     | Kopf                | Rumpf             |
|------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|-------------------|
|                              | links               | rechts              | links               | rechts              |                     |                   |
| Volumen/ $10^{-5}\text{m}^3$ | $2.24 \pm 0.28$     | $1.84 \pm 0.19$     | $2.86 \pm 0.31$     | $2.8 \pm 0.4$       | $1.486 \pm 0.024$   | $9.8 \pm 0.7$     |
| Masse/kg                     | $0.0173 \pm 0.0021$ | $0.0142 \pm 0.0015$ | $0.0220 \pm 0.0023$ | $0.0220 \pm 0.0027$ | $0.0114 \pm 0.0005$ | $0.076 \pm 0.004$ |

**Tabelle 8:** Abmessungen und Masse der Puppenteile

| Trägheitsmoment / $10^{-5} \cdot \text{kg m}^2$ |                   |
|---|-------------------|
| Linker Arm Pos.1                                | $16.1 \pm 1.9$    |
| Rechter Arm Pos.1                               | $13.3 \pm 1.4$    |
| Linker Arm Pos.2                                | $1.12 \pm 0.17$   |
| Rechter Arm Pos.2                               | $.86 \pm .11$     |
| Linkes Bein                                     | $16.5 \pm 1.7$    |
| Rechtes Bein                                    | $17.6 \pm 2.2$    |
| Kopf  | $0.106 \pm 0.006$ |
| Rumpf   | $1.20 \pm 0.14$   |

**Tabelle 9:** Trägheitsmomente der Puppenteile

Damit ergeben sich die theoretischen Gesamtträgheitsmomente

$$I_{\text{Puppe},1,\text{Theorie}} = (6.48 \pm 0.27)10^{-4}\text{kg m}^2, \quad (23a)$$

$$I_{\text{Puppe},2,\text{Theorie}} = (3.74 \pm 0.24)10^{-4}\text{kg m}^2. \quad (23b)$$

Der Quotient  $\alpha$  der theoretischen Trägheitsmomente aus (23) ist

$$\alpha = \frac{I_{\text{Puppe},1,\text{Theorie}}}{I_{\text{Puppe},2,\text{Theorie}}} = 1.73 \pm 0.08, \quad (24a)$$

analog ist der Quotient  $\beta$  der gemessenen Trägheitsmomente aus (22a) und (22b)

$$\beta = \frac{I_{\text{Puppe},1}}{I_{\text{Puppe},2}} \approx 1.58. \quad (24b)$$

Ausgehend von der Unsicherheit von  $D$  (vgl. Gleichung (11)) und in  $T$  (vgl. Gleichung (6)), ist die Unsicherheit von mit  $2.0 \cdot 10^{-15}\%$  ist vernachlässigbar.

## 5 Diskussion

### 5.1 Winkelrichtgröße $D$ und Eigenträgheitsmoment $I_D$ der Drillachse

Mit einer relativen Ungenauigkeit von 2.51% kann die Winkelrichtgröße über die angewandte Methode für weitere Berechnungen ausreichend genau bestimmt werden. Die größte Fehlerquelle liegt im Ablesen der Auslenkungswinkel.

Das Trägheitsmoment  $I$  in Messung 2 (vgl. 3.2) setzt sich aus dem Eigenträgheitsmoment  $I_D$  der Drillachse und den Trägheitsmomenten  $I_{m_i}$  der als punktförmig angenommenen Massestücke zusammen. Der verwendete Stab wird als masselos angesehen und daraus resultierend das Trägheitsmoment  $I_S$  vernachlässigt. Wird die Annahme eines masselosen Stabes nicht getroffen, so ergibt sich nach Abzug von hier unbekanntem  $I_{\text{Stab}}$  ein deutlich kleinerer Wert für  $I_D$ . Dies zeigt, dass, anders als der errechnete Wert (15), der tatsächliche Wert  $I_D$  wahrscheinlich in einer Größenordnung liegt, sodass er bei Messungen von Trägheitsmomenten berücksichtigt werden kann. Berücksichtigt man

den errechneten Wert für  $I_D$  in den Rechnungen ab Kapitel 4.3, so werden die Ergebnisse negativ und damit unbrauchbar.

Dies widerlegt die Korrektheit vom errechneten Eigenträgheitsmoment  $I_D$ ; der Wert weicht wahrscheinlich stark von der Realität ab.

## 5.2 Bestimmung der Trägheitsmomente zweier Körper

Für die Berechnung des Trägheitsmomentes  $I_Z$  wird angenommen, dass es sich um einen Hohlzylinder aus Styropor handelt. Es ist davon zusätzlich von der zweiten Annahme in 4.3 auszugehen, dass der theoretische Wert nicht korrekt ist, da der Zylinder nicht ausschließlich aus Styropor bestehen könnte. Befindet sich zur Stabilisierung ein Lack auf dem Zylinder oder ein Gerüst im Zylindermantel, ist bei gleicher Gesamtmasse ein größerer Teil der Masse weiter von der Drehachse entfernt, als hier angenommen wird. Dies liefert ein größeres Trägheitsmoment und nähert sich dadurch dem gemessenen Wert an. Dies erklärt die Abweichung von 81.84%. Das gemessene Trägheitsmoment  $I_Z$  des Zylinders hat eine relative Unsicherheit von 2.7%, kann also hinreichend genau gemessen werden.

Das gemessene Trägheitsmoment  $I_K$  der Kugel mit einer relativen Unsicherheit von 2.45% liegt in der Größenordnung des theoretischen Wertes, welcher eine Unsicherheit von 0.65% aufweist. Der theoretische Wert weicht um 27.05% von der Messung ab.

## 5.3 Bestimmung der Trägheitsmomente der Modellpuppe

### 5.3.1 Gemessene Trägheitsmomente

Das über die gemessene Periodendauer berechnete Gesamtträgheitsmoment der ersten Position ist 36.52% größer als das der Zweiten, da in Position 1 sich mehr Masse weiter von der Drehachse entfernt befindet. Die relativen Unsicherheiten von 2.21% (Position 1) und 2.44% (Position 2) liegen in einem vertretbaren Rahmen.

Größte Fehlerquelle ist die manuelle und einmalige Zeitmessung. Bei der Fehlerrechnung wird die Reaktionszeit des Laboranten nicht berücksichtigt. Der Fehler könnte minimiert werden, wenn anstelle von einer Schwingungsperiode grundsätzlich die Zeit für mehrere Schwingungen gemessen und anschließend durch deren Anzahl dividiert würde. Zusätzlich ist, insbesondere bei schnellen Schwingungen, ein genaues Bestimmen der Periodendauer schwierig.

### 5.3.2 Theoretische Trägheitsmomente

Die berechneten Trägheitsmomente von Kopf und Rumpf der Puppe weisen eine relative Unsicherheit von 5.66% bzw. 11.67% auf. Die Trägheitsmomente der Arme unterscheiden sich untereinander in Position 1 um 21.05% und in Position 2 um 30.23%. Die Trägheitsmomente der Beine mit relativer Unsicherheit von 10.33% (links) und 12.50% unterscheiden sich voneinander um 6,67%. Dies ist erklärbar mit den nicht genau bestimmbaren Abmessungen der Puppe aufgrund der unregelmäßigen Form.

Wegen der zu groben Näherung des Puppenkörpers durch einzelne Zylinder und Kugeln lassen sich nur die Verhältnisse der Momente, nicht aber diese selbst, vergleichen. Aus den Quotienten (24a) der theoretischen Werte  $\alpha = 1.73 \pm 0.08$  und dem Quotienten (24b) der gemessenen Werte  $\beta = 1.58$  folgt eine Übereinstimmung von  $109.96 \pm 5.13\%$ . Die Abweichung resultiert aus der Tatsache, dass die Position von Armen und Beinen sich während der Schwingung verändert, sodass sie sich am Ende der Messung nicht senkrecht zur Drehachse befinden, sondern in einem unbestimmten Winkel geneigt sind.

## 5.4 Zusammenfassung

Die Annahmen zur Bestimmung System-bestimmender Größen (vgl. 5.1) und die Näherungen der Körper, im Einzelnen Geometrie und Masseverteilung, sind sehr grob. Daher eignet sich das Ermitteln des Trägheitsmomentes durch Messung der Schwingperioden nur bei großen Trägheitsmomenten mit leicht bestimmbarer Schwingungsperioden.

Unter Beachtung der Fehlerquellen stimmen theoretische und gemessene Werte in vertretbarem Maß überein, sodass die angewandten Formeln sowie der Satz von Steiner als verifiziert betrachtet werden können.

## Literatur

- [1] URL: <http://www.chemie.de/lexikon/Polystyrol.html>.
- [2] TU Dortmund. *Versuch V101: Das Trägheitsmoment*. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Traegheit.pdf> (besucht am 01.11.2014).
- [3] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/90/1>. Version 1.3.1.
- [4] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001. URL: <http://www.scipy.org/>. Version 0.14.0.
- [5] Horst Kuchling. *Taschenbuch der Physik*. Hanser Verlag, 2011.
- [6] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>. Version 2.4.5.
- [7] Travis E. Oliphant. „Python for Scientific Computing“. In: *Computing in Science & Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/10/1>. Version 1.8.1.
- [8] The GIMP Team. *GIMP: GNU Image Manipulation Program*. URL: <http://www.gimp.org/>. Version 2.8.10.

Die verwendeten Plots wurden mit *matplotlib*[3] und die Grafiken mit *GIMP*[8] erstellt sowie die Berechnungen mit Python-*Numpy*[7], *-Scipy*[4] und *-uncertainties*[6] durchgeführt.