

Anfängerpraktikum V354

Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Helena Nawrath
helena.nawrath@tu-dortmund.de

Carl Arne Thomann
arnethomann@me.com

Durchführung: 16. Dezember 2014 Abgabe: 6. Januar 2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

1 Zielsetzung

Ziel des Experimentes ist, anhand einer elektrischen Schaltung das Verhalten eines schwingfähigen Systems zu erkunden. Betrachtet werden eine freie Schwingung und eine erzwungene Schwingung jeweils mit Dämpfung.

2 Theorie

Kann ein schwingfähiges System, nachdem es angeregt wurde, ohne weiteren Einfluss von außen oszillieren, so handelt es sich um eine freie Schwingung. Bleibt der von außen gegebene Antrieb über lange Zeit erhalten, so handelt es sich um eine erzwungene Schwingung. [2]

2.1 Freie Schwingung mit Dämpfung

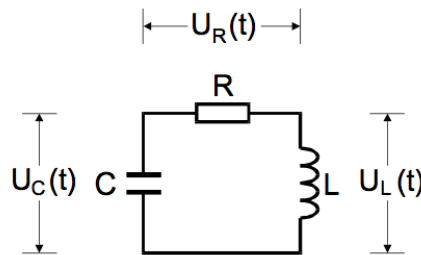


Abbildung 1: Schaltskizze eines freien Serienschwingkreises. [v354]

Das System wird in 1 gezeigt, die jeweiligen Spannungsabfälle und -quellen sind eingezeichnet. Nach der Zweiten Kirchhoffschen Regel ist in einer Masche die Summe aller Spannungen gleich Null. Daraus folgt für das System

$$U_R(t) + U_C(t) - U_L(t) = 0 \quad (1)$$

unter Beachtung der Stromrichtung der Komponenten. Mit den allgemeinen Formeln für die Spannung der jeweiligen Schaltkreiskomponente,

$$U_R(t) = RI(t) \quad (2a)$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} \quad (2b)$$

$$U_L(t) = -L \frac{dI(t)}{dt}, \quad (2c)$$

und der Substitution $I = \frac{dQ(t)}{dt}$, wird das System mit der Differentialgleichung für den Strom $I(t)$ beschrieben. Es gilt

$$\frac{d^2 I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC} I(t). \quad (3)$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist

$$I(t) = A_1 \cdot e^{\omega_1 t} + A_2 \cdot e^{\omega_2 t} \quad (4)$$

mit der Abkürzung

$$\omega_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}_{\text{Diskriminante}}} \quad (5)$$

Durch den Radikanten als Diskriminante sind drei Fälle möglich.

Für $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} < 0$ ist ω in (5) komplex. Es ergibt sich

$$\omega_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (6)$$

und

$$I(t) = e^{-\frac{R}{2L} t} (A_1 \sin\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t\right) + A_2 \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} t\right)). \quad (7)$$

Es kommt zu einer Schwingung, deren Amplitude mit der Zeit abnimmt. Für die Schwingperiode gilt die Thomsonsche Schwingformel

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}; \quad (8)$$

die Zeit, in welcher die Amplitude auf den e-Teil des Anfangswertes absinkt, ist

$$T_{\text{ex}} = \frac{2L}{R}. \quad (9)$$

Für $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$ verschwindet der Wurzelterm von ω in (5). Die so vereinfachte Lösung heißt aperiodischer Grenzfall und beschreibt den ausgezeichneten Stromverlauf, der nach Auslenkung die Ruhelage - hier $I(t) = 0 \quad \forall t$ - am Schnellsten wieder erreicht.

Zur allgemeinen Lösung für diesen Fall wird eine zusätzliche Fundamentallösung benötigt. Es gilt

$$I(t) = A_1 e^{-\frac{R}{2L} t} + A_2 t e^{-\frac{R}{2L} t}. \quad (10)$$

Für $\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC} > 0$ ist der Wurzelterm von ω in (5) rein reell. Die so vereinfachte Lösung ist eine exponentielle Abnahme. Es gilt

$$I(t) = A_1 e^{\omega_1 t} + A_2 e^{\omega_2 t}. \quad (11)$$

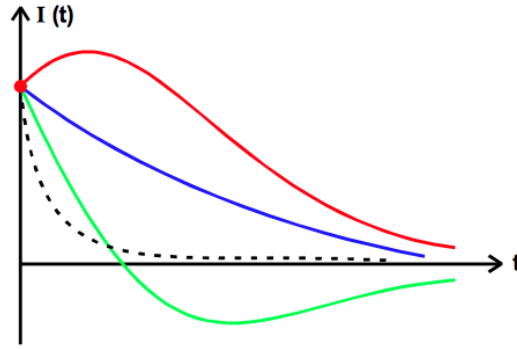


Abbildung 2: Darstellung aller möglichen Stromverläufe. [v354]

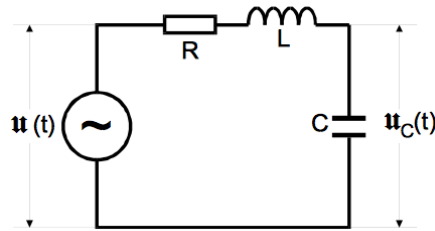


Abbildung 3: Schaltskizze eines Serienschwingkreises mit äußerer Anregung. [v354]

2.2 Erzwungene Schwingung mit Dämpfung

In diesem System wird die Spannung U_C , die am Kondensator anliegt, betrachtet. Analog zu Abschnitt 2.1 beschreibt die Gleichung

$$U_R(t) + U_C(t) - U_L(t) = U(t) \quad (12)$$

mit der Generatorspannung $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$ das System. Mit der Substitution $I = \frac{dQ(t)}{dt}$ und $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$ sowie den Gleichungen (2), wird das System mit der Differentialgleichung

$$LC \frac{d^2 U_C}{dt^2} + RC \frac{dU_C}{dt} + U_C = U_0 e^{i\omega t} \quad (13)$$

beschrieben. Die Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung setzt sich aus homogener und inhomogener Lösung zusammen. Es ist aus Abschnitt 2.1 bekannt, dass die homogene Lösung für große Zeiten gegen Null geht. Mithilfe des Ansatzes $U_C(\omega, t) = \tilde{U}_\omega(\omega) \cdot e^{i\omega t}$, $\tilde{U}_\omega(\omega) \in \mathbb{C}$ ist die komplexe Amplitude mit Phasenwinkel $\arg(\tilde{U}_\omega) = \phi$ und Betrag $|\tilde{U}_\omega| = U_\omega$, ist die inhomogene Lösung von Differentialgleichung (13)

$$U_0 = -LC\omega^2 \tilde{U}_\omega(\omega) + i\omega RC \tilde{U}_\omega(\omega) + \tilde{U}_\omega(\omega) \quad (14)$$

$$U_\omega = U_0 \frac{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}{\left(\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}\right)^2} \quad (15a)$$

$$\tan(\phi) = \frac{\text{Im}(\tilde{U}_\omega)}{\text{Re}(\tilde{U}_\omega)} = \frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2} \quad (15b)$$

Aus (15a) und dem gewählten Ansatz folgt für die Amplitude der Lösungsfunktion der Differentialgleichung (13)

$$|U_C| = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}. \quad (16)$$

Bei der komplexen Amplitude \tilde{U}_ω treten insbesondere die Sonderfälle

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \tilde{U}_\omega = 0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \tilde{U}_\omega \quad (17)$$

auf, weiter existiert eine Resonanzfrequenz $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ - die durch Dämpfung und Eigenfrequenz gegebene neue Schwingfrequenz des Systems. Bei Erregung des Systems mit $\omega \approx \omega_0$ kommt es zur Resonanz; das System schwingt mit einer Spannungsamplitude $U_{C,\max}$ größer als die Erregeramplitude U_0 . Dabei ist die maximale Spannungsamplitude

$$U_{C,\max} = \underbrace{\frac{1}{\omega_0 RC}}_{\text{Güte } q} U_0. \quad (18)$$

Zur Charakterisierung des Resonanzverhaltens werden die Grenzwerte ω_\pm betrachtet, bei welchen die Spannung U_C auf den $1/\sqrt{2}$ -Teil des Maximalwertes $U_{C,\max}$ nach Gleichung (18) abfallen. Für die so beschriebene Breite gilt im Falle schwacher Dämpfung bzw. im Schwingfall

$$\Delta f = \omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L}. \quad (19)$$

Im Falle von Überdämpfung wird die Breite der Resonanzkurve nicht betrachtet. Ausgehend von der Erregerspannung U_0 fällt der Betrag der Spannung U_C mit $\frac{1}{\omega^2}$ ab. Betrachtet wird außerdem die Phasenwinkel ϕ zwischen der Kondensatorspannung $U_C(t)$ und der Erregerspannung $U(t)$.

Für die Frequenz $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ besteht zwischen der Kondensatorspannung U_C und der Erregerspannung U ein Winkel von $\phi = -\frac{\pi}{2}$. Für große Frequenzen nähert sich die Phasenwinkel ϕ dem stationären Wert π an.

3 Durchführung

Im ersten Teil wird die freie, gedämpfte Schwingung mit einem Serienschwingkreis gemäß Abbildung 1 untersucht. Es wird die Zeitabhängigkeit der Kondensatorspannung $U_C(\omega, t)$ betrachtet und der Verlauf diskutiert.

Hierzu wird eine Schaltung wie in Abbildung 3 angesetzt. Der Generator wird auf Rechteckspannung mit einer solch geringen Frequenz eingestellt, dass innerhalb einer Periode des Generator das System frei oszillieren und abklingen kann, ehe es durch eine weitere Periode erneut angeregt wird. Es wird nach der Gleichung (9) die systembeschreibende Abklingzeit berechnet und mit dem gemessenen Wert verglichen.

Weiter wird als Grenze zwischen Kriechfall und Schwingfall, beide Fälle mit charakteristischen Verläufen, der aperiodische Grenzfall mittels Bisektion angenähert. Der auf diese Weise ermittelte Dämpfungswiderstand R_{ap} wird mit dem theoretischen Wert $R_{ap,t}$ aus 2.1 verglichen.

Im zweiten Teil wird die erzwungene gedämpfte Schwingung untersucht. Gemessen wird die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung $U_C(\omega, t)$ eines Serienschwingkreises gemäß Abbildung 3 sowie der Phasenwinkel ϕ zwischen der Erregerspannung $U(t)$ und der Kondensatorspannung $U_C(\omega, t)$. Weiter wird zur Charakterisierung des Resonanzverhaltens die Güte q und die Resonanzbreite Δf bestimmt.

4 Auswertung

In diesem Versuch wird eine Schaltung – Gerät 1 – verwendet, welche aus verschiedenen Bauteilen besteht. Die in Tabelle 1 angegebenen Werte bestimmen maßgeblich die Eigenschaften der Schaltung.

Daten von Gerät 1		
Induktivität L	16,78 mH	$\pm 0,09$ mH
Kapazität C	2,066 nF	$\pm 0,006$ nF
Widerstand R_1	67,2 Ω	$\pm 0,2$ Ω
Widerstand R_2	682 Ω	± 1 Ω

Tabelle 1: Daten der in Gerät 1 verwendeten Bauteile.

Da alle Größen fehlerbehaftet sind fließen diese nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta u = \sqrt{\left(\frac{du}{dv}\Delta v\right)^2 + \left(\frac{du}{dw}\Delta w\right)^2} \quad (20)$$

in die folgenden Rechnungen ein. Alle Grafiken und Ausgleichsrechnungen werden mit PROGRAMM ausgeführt.

4.1 Zeitabhängigkeit der Amplitude einer gedämpften Schwingung

$t / \mu\text{s}$	$U_{C,\min} / \text{V}$	$t / \mu\text{s}$	$U_{C,\max} / \text{V}$
42	62,60	23	−67,00
80	54,60	61	−57,40
117	45,80	98	−49,40
155	39,40	136	−42,20
193	34,60	175	−36,60
232	29,80	212	−31,00
269	25,00	250	−27,00
306	21,00	288	−23,80
346	19,40	327	−20,60
381	15,40	363	−17,40
421	13,80	402	−15,00
457	11,40	438	−13,40

Tabelle 2: Extrema der Spannungswerte.

In Abbildung 4 ist die Amplitude der Kondensatorspannung U_C gegen die Zeit t aufgetragen, nachdem der Stromkreis durch einen elektrischen Impuls zur Schwingung angeregt

wurde. Mit den eingezeichneten Extremwerten der Spannung, angegeben in Tabelle 2 kann die Schwingungskurve berechnet werden. Die Einhüllende, die nur die Minima und Maxima mit der Schwingungskurve gemein hat, zeigt den für den Schwingfall typischen zeitlichen Verlauf der Spannung. Diese nimmt exponentiell ab. Noch deutlicher wird es, wenn

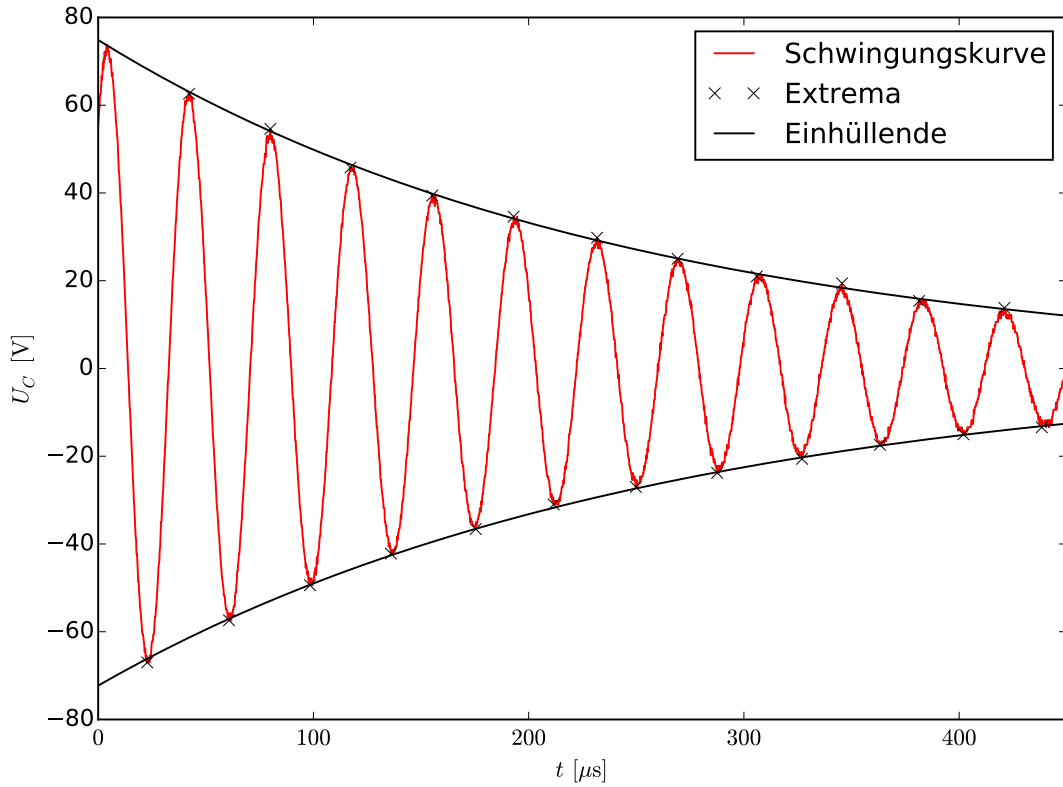


Abbildung 4: Verhalten der Spannung für den Schwingfall.

die Schwingung halblogarithmisch aufgetragen wird. Dafür werden die Minima an der t -Achse gespiegelt. Ein linearer Zusammenhang ist erkennbar. Durch lineare Regression kann mit

$$\ln U_C(t) = \underbrace{\left(-\frac{R}{2L}\right)}_m \cdot t + b \quad (21)$$

eine Ausgleichsgerade

$$g(t) = (-3978.365 \pm 36.562) \frac{1}{s} t + (4.298 \pm 0.010) \quad (22)$$

durch die Messpunkte gelegt werden. m ist dabei die Steigung der Geraden und b der y-Achsenabschnitt. Damit lässt sich $R_{\text{eff}} = -2m/L = (134 \pm 1) \Omega$, der für die in der Schaltung auftretende Dämpfungswiderstand, berechnen.

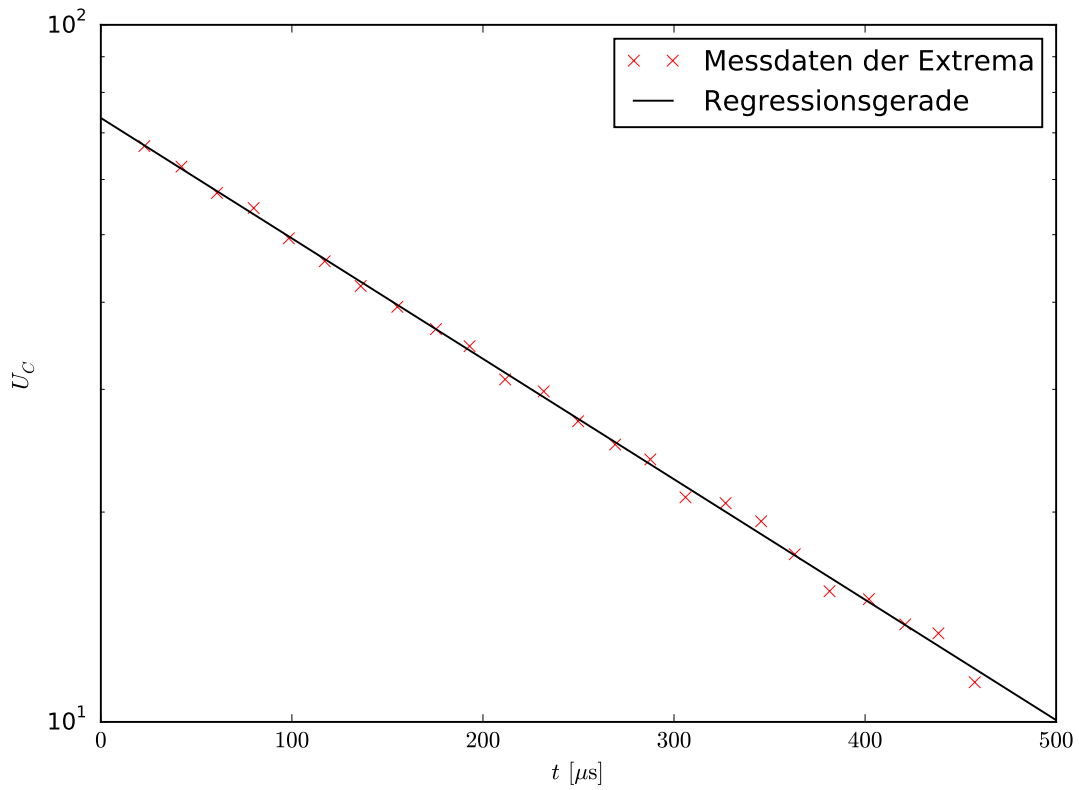


Abbildung 5: Einhüllende der Schwingungskurve, aufgetragen auf halblogarithmischer Skala.

Die Abklingdauer T_{ex} wird aus dem negativen Kehrwert der Steigung m gebildet, sodass $T_{\text{ex}} = (251 \pm 2) \mu\text{s}$ ist. Der theoretische Wert $T_{\text{ex,t}} = \frac{2L}{R}$ ergibt sich zu $T_{\text{ex,t}} = (499 \pm 3) \mu\text{s}$.

4.2 Aperiodischer Grenzfall im gedämpften Schwingkreis

Der Spannungsverlauf für den aperiodischen Grenzfall wird durch einen Widerstand von $R_{\text{ap}} \approx 4500 \Omega$ realisiert. Der Theoriewert ergibt sich aus der Formel $R_{\text{ap,t}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ zu $R_{\text{ap,t}} = (5700 \pm 15) \Omega$. Zum Vergleich sind ebenfalls Schwing- und Kriechfall dargestellt.

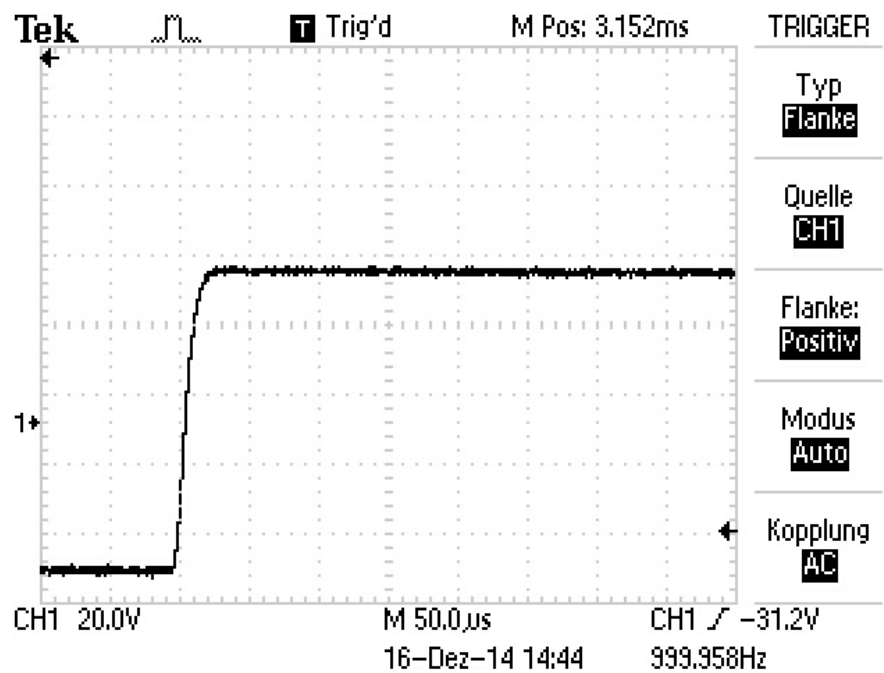
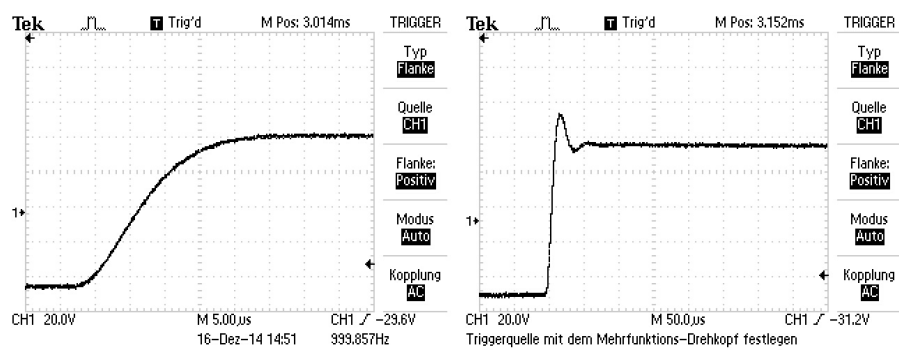


Abbildung 6: Screenshot des aperiodischen Grenzfalls.



(a) Kriechfall.

(b) Schwingfall.

Abbildung 7: Schwing- und Kriechfall zum Vergleich.

4.3 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

f /kHz	U_C /V	U_0 /V	f /kHz	U_C /V	U_0 /V
10,0	48	44,0	28,0	136,0	40,8
11,0	52	44,0	28,5	128,0	41,6
12,0	54	44,0	29,0	118,0	41,6
13,0	58	44,0	29,5	108,0	41,6
14,0	60	44,0	30,0	100,0	41,6
15,0	64	44,0	30,5	94,0	41,6
16,0	66	44,0	31,0	88,0	42,4
17,0	72	44,0	32,0	76,0	43,2
18,0	78	44,0	33,0	66,0	43,2
19,0	84	44,0	34,0	56,0	43,2
20,0	92	43,2	35,0	49,0	43,2
20,5	96	43,2	36,0	44,8	43,2
21,0	102	43,2	37,0	40,8	43,2
21,5	108	43,2	38,0	36,8	43,2
22,0	114	43,2	39,0	33,6	43,2
22,5	120	42,4	40,0	30,8	43,2
23,0	128	42,4	41,0	28,4	43,2
23,5	136	42,4	42,0	26,4	43,2
24,0	142	42,4	43,0	24,4	43,2
24,5	150	42,4	44,0	22,8	43,2
25,0	156	41,6	45,0	21,6	43,2
25,5	158	41,6	46,0	20,0	43,2
26,0	160	41,6	47,0	18,8	43,2
26,5	158	40,8	48,0	18,0	43,2
27,0	152	40,8	49,0	16,8	43,2
27,5	144	40,8	50,0	16,0	43,2

Tabelle 3: Messdaten der Kondensator- und Generatorspannung zu verschiedenen Frequenzen.

Das Verhältnis der Spannungen $\frac{U_C}{U_0}$, deren Werte in Tabelle 3 gelistet sind, wird gegen die Frequenz f halblogarithmisch aufgetragen. Es ergibt sich eine Resonanzkurve, deren Maximum bei $f_{\text{res}} \approx 26 \text{ kHz}$ liegt. Bei dieser Frequenz ist die Kondensatorspannung um ein Vielfaches größer als die angelegte Spannung U_0 . Für die Resonanzüberhöhung $q = \frac{U_{C,\text{max}}}{U_0}$, auch Güte genannt, ergibt sich aus der Messung der Wert $q = 5.556$ bei einer maximalen Kondensatorspannung $U_{C,\text{max}} = 160 \text{ V}$. Theoretisch ergibt sich $q_t = \frac{1}{R_2} \sqrt{\frac{L}{C}}$ zu $q_t = 5 \pm 1$.

Für die Breite der Resonanzkurve werden die Grenzfrequenzen $f_{\pm} = \frac{U_{C,\text{max}}}{\sqrt{2}}$ berechnet.

Es ergeben sich zwei Lösungen, deren Differenz $f_+ - f_-$ anschließend gebildet wird. Damit sind $f_+ = 29$ kHz, $f_- = 22$ kHz und $\Delta f = 7$ kHz. Die theoretische Resonanzbreite ist $\Delta f_t = \frac{R_2}{L \cdot 2\pi} = (6.5 \pm 0.04)$ kHz.

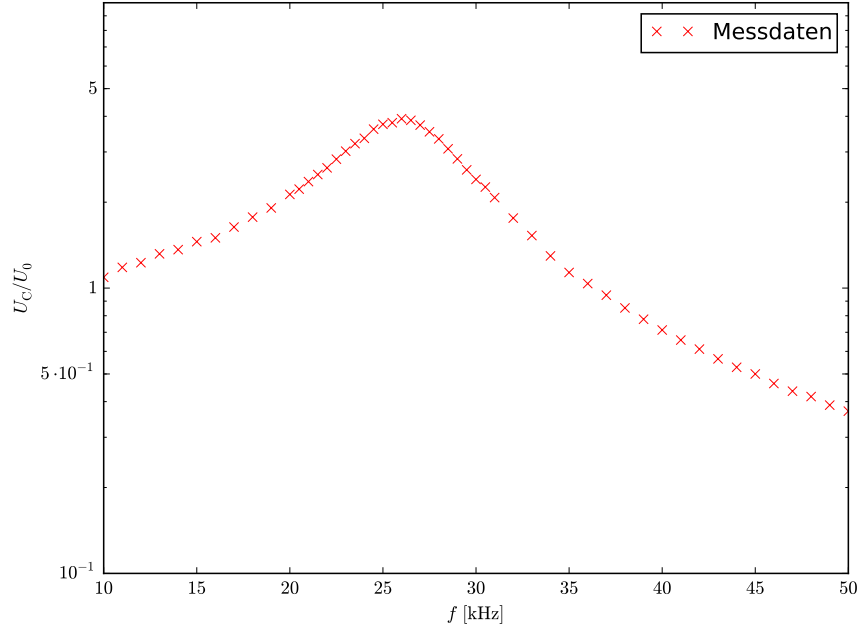


Abbildung 8: Resonanzkurve der erzwungenen Schwingungen in halblogarithmischer Skala.

4.4 Frequenzabhängigkeit der Phasendifferenz

In Tabelle 4 ist die frequenzabhängige Zeitdifferenz Δt zwischen den Nulldurchgängen der Sinusspannung des Frequenzgenerators und der Kondensatorspannung aufgetragen. Die Phase φ ist in Abbildung 10 gegen die Frequenz aufgetragen. Phase und Zeitdifferenz sind über $\varphi(f) = \Delta t f 2\pi$ verknüpft. Für große Frequenzen nähert sich die Phase dem stationären Wert π an. In der Abbildung ist zu erkennen, dass die Phasendifferenz erst langsam wächst, um mit zunehmender Frequenz schneller anzusteigen. Je näher die Frequenz an der Resonanzfrequenz liegt, desto steiler ist die Kurve. Es ist ersichtlich, dass um die Resonanzfrequenz $f_{\text{res}} \approx 25$ kHz die Kurve als linear angenähert werden kann, wie in Abbildung 11 gezeigt. Die Linearität erstreckt sich über $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$, was den Frequenzen $f_1 = 22$ kHz und $f_2 = 28$ kHz entspricht.

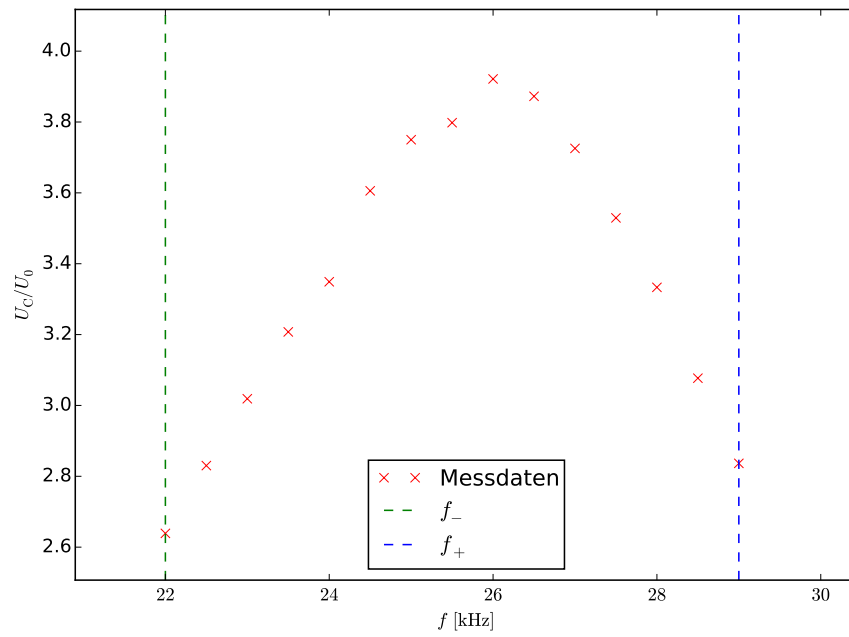


Abbildung 9: Lineare Darstellung des Spannungsverhältnissen in Abhängigkeit der Frequenz zwischen den Grenzfrequenzen.

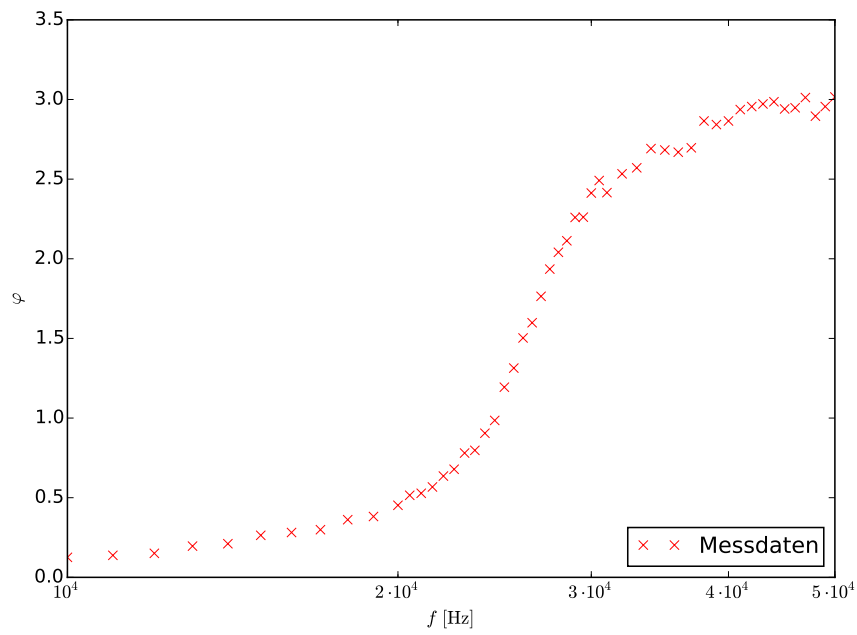


Abbildung 10: Screenshot des aperiodischen Grenzfalls.

f /kHz	Δt / μ s	f /kHz	Δt / μ s
10,0	2,0	28,0	11,6
11,0	2,0	28,5	11,8
12,0	2,0	29,0	12,4
13,0	2,4	29,5	12,2
14,0	2,4	30,0	12,8
15,0	2,8	30,5	13,0
16,0	2,8	31,0	12,4
17,0	2,8	32,0	12,6
18,0	3,2	33,0	12,4
19,0	3,2	34,0	12,6
20,0	3,6	35,0	12,2
20,5	4,0	36,0	11,8
21,0	4,0	37,0	11,6
21,5	4,2	38,0	12,0
22,0	4,6	39,0	11,6
22,5	4,8	40,0	11,4
23,0	5,4	41,0	11,4
23,5	5,4	42,0	11,2
24,0	6,0	43,0	11,0
24,5	6,4	44,0	10,8
25,0	7,6	45,0	10,4
25,5	8,2	46,0	10,2
26,0	9,2	47,0	10,2
26,5	9,6	48,0	9,6
27,0	10,4	49,0	9,6
27,5	11,2	50,0	9,6

Tabelle 4: Messdaten der Phasendifferenz zu verschiedenen Frequenzen.

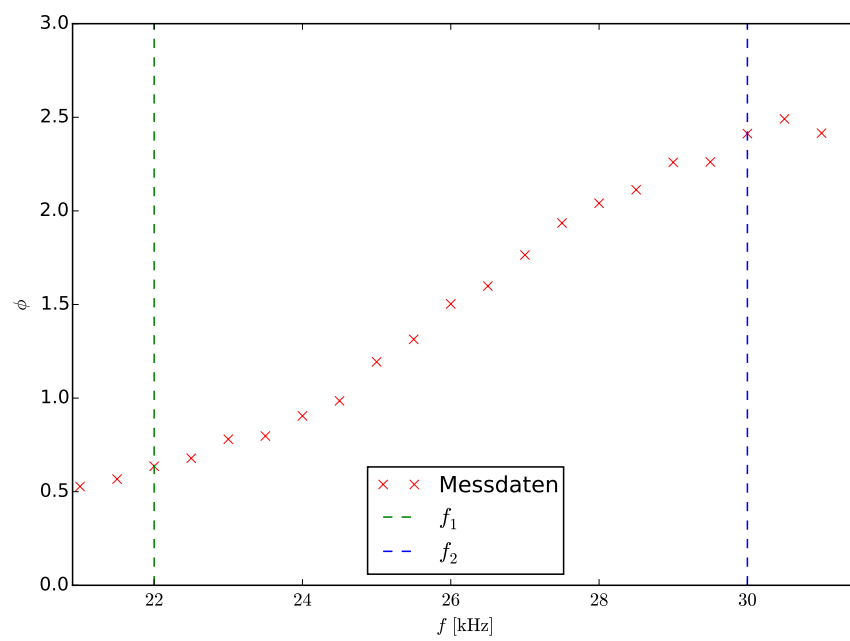


Abbildung 11: Screenshot des aperiodischen Grenzfalls.

5 Diskussion

Im Fall der gedämpften Schwingung fällt die Spannung exponentiell ab. Die einhüllende Exponentialfunktion in Abbildung 2 stimmt gut mit den Messwerten überein. Der Dämpfungswiderstand $R_{\text{eff}} = (134 \pm 1) \Omega$ weist eine Abweichung von 99.40% vom Gerätewiderstand $R_1 = (67.2 \pm 0.2) \Omega$ auf. Der relativ große Fehler wird durch in der Rechnung nicht betrachtete Leitungs-, Bauteil- und Generatorinnenwiderstände hervorgerufen. Unter Berücksichtigung dieser Widerstände würde sich für den Gesamtwiderstand ein größerer Wert ergeben und der Fehler minimiert. Vergleich von gemessener und theoretischer Abklingdauer ergibt eine Abweichung von 49.70% bei $T_{\text{ex}} = (251 \pm 2) \mu\text{s}$ und $T_{\text{ex,t}} = (499 \pm 3) \text{s}$. Der aperiodische Grenzfall wird bei einem gemessenen Widerstand von $R_{\text{ap}} = 4500 \Omega$ realisiert. Der theoretisch ermittelte Widerstand $R_{\text{ap,theo}} = 5700 \Omega$ weicht um 26.67% ab. Zwischen den experimentell bestimmten und theoretisch errechneten Resonanzüberhöhungen liegt nur eine geringe Abweichung vor, obwohl viele fehlerbehaftete Größen in deren Berechnung einfließen. $q = 5.556$ und $q_t = (5 \pm 1)$ unterscheiden sich um 11.12%. Wegen der schwankenden Amplitude U_0 lässt sich der Maximalwert der Kondensatorspannung eher ungenau bestimmen. Der ermittelte Wert gibt Informationen über Güte und daher die maximal erreichbare Spannung wider. Die Schärfe der Resonanz wird über die Resonanzbreite dargestellt. Die Abweichung von 7.69% zwischen $\Delta f = 7 \text{ kHz}$ und $\Delta f_t = 6.5 \text{ kHz}$ ist gering trotz der Tatsache, dass f_+ und f_- sich durch Auswählen der Messwerte ergeben, zugehörig zu den Bruchteilen der Maximalspannung. Das heißt, dass die Genauigkeit durch die Auflösung der Messwertbestimmung und der Genauigkeit der Messwerte gegeben ist. Bei geringen Frequenzen – gegenüber der Resonanzfrequenz – tritt ein kleiner Phasenunterschied auf, der mit steigender Frequenz zunimmt. Auch hier stimmt die experimentelle Tatsache mit dem theoretischen arctan-Zusammenhang überein. Eine lineare Darstellung im Resonanzbereich gelingt gut; an den Rändern ergeben sich geringe Abweichungen durch einen etwas zu groß gewählten Resonanzbereich.

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/90/1>. Version 1.3.1.
- [2] Horst Kuchling. *Taschenbuch der Physik*. Hanser Verlag, 2011.
- [3] Travis E. Oliphant. „Python for Scientific Computing“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/10/1>. Version 1.8.1.
- [4] The GIMP Team. *GIMP: GNU Image Manipulation Program*. URL: <http://www.gimp.org/>. Version 2.8.10.

Die verwendeten Plots wurden mit *matplotlib*[1] und die Grafiken mit *GIMP*[4] erstellt und/oder bearbeitet. Die Berechnungen wurden mit Python-*Numpy*, [3] durchgeführt.