Versuch 101: Das Trägheitsmoment

durchgeführt am 14. 10. 2014

Vukan Jevtic und Lars Hoffmann

Email-Adressen angeben

Ziel

Ziel des Versuchs ist es, Trägheitsmomente verschiedener Körper experimentell zu bestimmen und den Steinerschen Satz zu verifizieren.

Theorie

Auf einen Massepunkt, der im Abstand r auf einer Kreisbahn um einen Punkt rotiert, wirkt die tangentiale Kraft $F_{tang} = ma = mr\ddot{\varphi}$ und damit das Drehmoment $M = mr^2\ddot{\varphi}$.

Die Größe $m r^2$ wird dabei als Trägheitsmoment I des Massepunktes definiert.

Entsprechend ergibt sich für einen ausgedehnten Körper aus n Punktmassen, die sich alle mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit bewegen, das Trägheitsmoment

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2,$$

welches für einen starren Körper mit der Masseverteilung $\rho(\vec{r})$ in folgendes Integral übergeht:

$$I = \int \rho(\vec{r}) \cdot r^2 \, dV.$$

...

Wenn nun das Trägheitsmoment I_S eines Körpers für eine bestimmte Drehachse (z.B. durch den Schwerpunkt) bekannt ist, berechnet sich das Trägheitsmoment I des gleichen Körpers, aber für eine Rotationsachse im Abstand a parallel zur ursprünglichen Achse durch

$$I = I_S + ma^2.$$

Dies wird als Satz von Steiner bezeichnet.

Wird die Spiralfeder der Messapparatur um den Winkel φ ausgelenkt, führt dies zu einem rücktreibenden Drehmoment

$M = D\,\varphi$,

wobei D als Winkelrichtgröße bezeichnet wird.

Daraus folgt, dass der Körper für kleine Auslenkungen harmonische Schwingungen mit der Schwingungsdauer

$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}$

ausführt.

Durchführung

Zur Bestimmung der Winkelrichtgröße D wird auf der Drillachse eine leichte (und später als masselos angenommene) Metallstange befestigt, um einen Winkel φ ausgelenkt und an einem Punkt im Abstand r von der Drehachse wird rechtwinklig zum Radius die zur Auslenkung notwendige Kraft gemessen.
Die Winkelrichtgröße D ergibt sich dann über den Zusammenhang

$$D = \frac{Fr}{\varphi}.$$

Um das Eigenträgheitsmoment I_D der Drillachse zu bestimmen, wird eine Metallstange mit zwei Gewichten, die als Punktmassen angenommen werden, jeweils im Abstand a vom Rotationszentrum auf der Drillachse befestigt. Die Stange wird ausgelenkt und die Schwingungsperiodendauer mit einer Stoppuhr gemessen.
Das Eigenträgheitsmoment I_D wird anschließend rechnerisch mit linearer Regression bestimmt.

Ein Zylinder und eine Kugel werden nacheinander auf der Drillachse befestigt und ausgelenkt. Auch hier wird mithilfe einer Stoppuhr die jeweilige Schwingungsperiodendauer bestimmt.

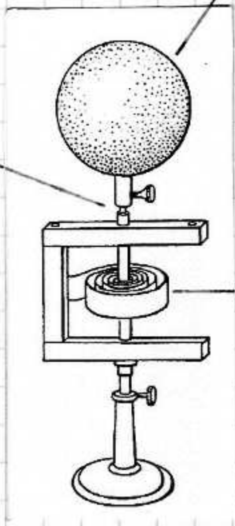
Danach wird eine Holzpuppe auf der Drillachse befestigt und zum Schwingen gebracht. Analog zu dem vorhergehenden Versuchsteil wird die Schwingungsperiodendauer jeweils für zwei verschiedene Körperhaltungen gemessen.
Anschließend wird das Verhältnis der errechneten Trägheitsmomente mit dem Quotienten der gemessenen Trägheitsmomente verglichen.

Aufbau der Messapparatur (Fig. 1)

~~[illegible]~~ Abb. referenzieren
Quelle?

aufgeschraubter Probekörper

Drillachse



Spiralfeder

AUSWERTUNG

Annahme: Alle untersuchten Körper besitzen eine konstante Massendichtefunktion und sind somit homogen. Gut!

FEHLERRECHNUNG

Der Fehler des Mittelwerts wird im Folgenden als $\Delta\bar{x}$ bezeichnet, der Mittelwert selbst als $\bar{x}$.

$$\Delta\bar{x} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i-\bar{x})^2}{N(N-1)}} \quad (1)$$

Der Wert einer fehlerbehafteten Größe wird mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung ermittelt:

$$(2) \quad \sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 \Delta x_i^2} \quad , \Delta x_i = \text{Fehler der i-ten Messgröße (im Folgenden wird } \Delta\bar{x}_i \text{ verwendet)}$$

<u>Bestimmung der Winkelrichtgröße D</u> Formel ?

Tabelle 1 zeigt die gemessenen Größen $r[m], F[N], \varphi[RAD], D[10^{-2}Nm]$

$\bar{d} = 0{,}02096\,Nm$

$$\Delta\bar{d} = \sqrt{\left(0{,}04\bar{5}^2 + 0{,}10\bar{6}^2 + 0{,}081\bar{6}^2 + 0{,}09\bar{3}^2 + 0{,}12\bar{3}^2 + 0{,}42\bar{3}^2 + \cdots + 0{,}34\bar{3}^2 + 0{,}27\bar{3}^2 + 0{,}19\bar{3}^2 + 0{,}12\bar{3}^2 + 0{,}14\bar{3}^2\right)\frac{1}{132}} \cdot 10^{-2}\,Nm$$

$$\approx 0{,}118 \cdot 10^{-2}\,Nm$$

$$D = \bar{d} \pm \Delta\bar{d} = (2{,}097 \pm 0{,}118) \cdot 10^{-2}\,Nm$$

schön

<u>Bestimmung des Eigenträgheitsmoments der Drillachse</u>

Zunächst wird der Stab als dünner Stab genähert, sein Trägheitsmoment I_{Stab} berechnet sich zu $I_{Stab} = \frac{1}{12} m l^2$

Der verwendete Stab hat eine Länge von 0,6 m und wiegt 96,29 g, damit beträgt sein Trägheitsmoment $2{,}89 \cdot 10^{-3}\,kgm^2$.

Die Messwerte sind auf Tab. 2/3 der Datensätze einzusehen.

Die Messwerte sind in Fig 2 aufgezeichnet.

Lineare Regression:

a_i^2 = i-ter quadrierter Abstand der Masseklötze zur Drillachse

m = Steigung der Fit-Geraden

b = y-Achsen-Abschnitt der Fit-Geraden

T_i^2 = i-te quadrierte Zeitspanne

r_i = i-ter Abstand zur Fit-Geraden

Das Gleichungssystem $\{ m a_1^2 + b - T_1^2 = r_1 ; m a_2^2 + b - T_2^2 ; \cdots \}$ ist zu minimieren. Zunächst schreibt man das Gleichungssystem um in: $\left\| A \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} - \vec{T} \right\| = \|r\|$, $A = \begin{pmatrix} a_1^2 & 1 \\ a_2^2 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ a_{10}^2 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{T} = \begin{pmatrix} T_1^2 \\ T_2^2 \\ \vdots \\ T_{10}^2 \end{pmatrix}$

$$A^T A \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = A^T \vec{T} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1215312 & 2436 \\ 2436 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106582 \\ 241{,}7 \end{pmatrix}$$

falsche Größenordnung

Mit $m = 0{,}076707 \frac{s^2}{m^2}$ und $b = 5{,}48428\ s^2$, Fehler?

Das gesamte Trägheitsmoment der Apparatur berechnet sich zu:

$I_{ges} = (m_1 + m_2) a^2 + I_D + I_{stab}$, m_1, m_2 sind die Massen der verwendeten Gewichte. Aus dem Zusammenhang $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}$ bzw. $T^2 = 4\pi^2 \frac{I}{D}$ ergibt sich durch Koeffizientenvergleich mit der Ausgleichsgeraden $T^2 = m a_i^2 + b$ der Zusammenhang

$$T^2 = \underbrace{4\pi^2 \frac{(m_1 + m_2)}{D}}_{m} a_{eff}^2 + \underbrace{4\pi^2 D^{-1} (I_D + I_{stab})}_{b} \quad ✓$$

$$a_{eff} = 0 \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{D} (I_D + I_{stab}) \overset{T^2 = b}{\Leftrightarrow} b = \frac{4\pi^2}{D} (I_D + I_{stab})$$

$$\Leftrightarrow \frac{Db}{4\pi^2} - I_S = I_D \qquad I_D = (2 \cdot 10^{-5} \pm 2{,}5 \cdot 10^{-4})\ kgm^2$$

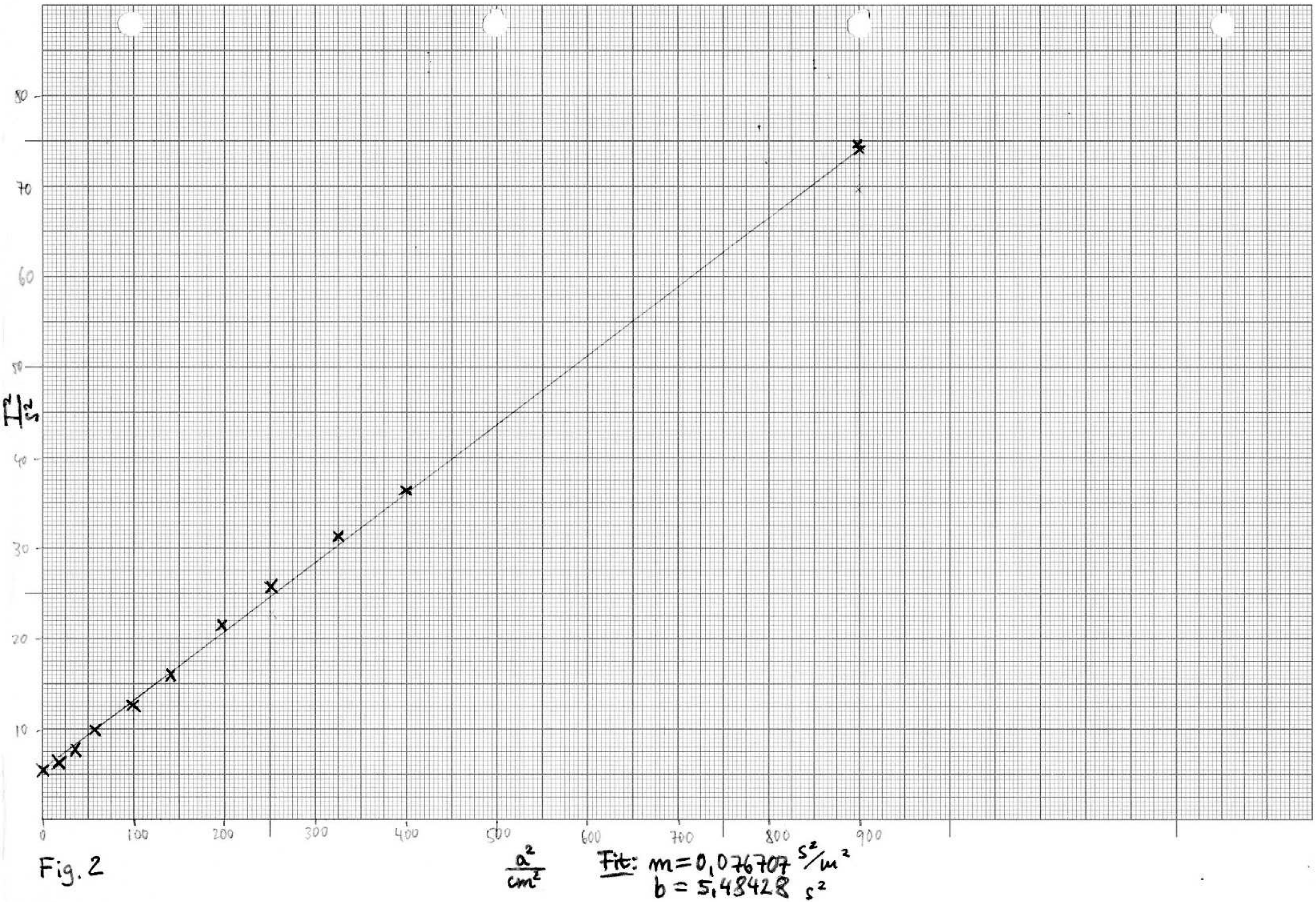


Fig. 2

<u>Fit:</u> $m = 0{,}076707 \ s^2/m^2$
$b = 5{,}48428 \ s^2$

Bestimmung des Trägheitsmoments eines Zylinders

$\overline{m} = 1525{,}5\,g$ $\overline{h} = 0{,}1393\,m$ $\overline{d} = 0{,}08\,m$ $\overline{r} = 0{,}04\,m$

$\overline{T} = 2{,}328$ $\Delta T = \sqrt{(0{,}002^2 + 0{,}018^2 + 0{,}012^2 + 0{,}008^2 + 0{,}012^2)\frac{1}{20}}$

$T = (2{,}328 \pm 0{,}006)\,s$

Berechnung des Erwartungswerts ← bzw. Theoriewert Position des Zylinders? senkrecht oder horizontal?

$I = \frac{1}{4}\overline{m}\,\overline{r}^2 + \frac{1}{12}\overline{m}\,\overline{l}^2 = \frac{1}{4}\cdot 1{,}5255\,kg \cdot 0{,}04^2\,m^2 + \frac{1}{12}\cdot 1{,}5255\,kg \cdot 0{,}1393^2\,m^2$

$I = 3{,}08 \cdot 10^{-3}\,kgm^2$

Bestimmung des Trägheitsmoments über die Schwingungsdauer

Aus dem Zusammenhang $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}$ folgt für das

Trägheitsmoment: $I = \frac{T^2 D}{4\pi^2}$, $D = (0{,}02097 \pm 0{,}0018)\,Nm$, $T = (2{,}328 \pm 0{,}006)\,s$

$\partial_D I = \frac{T^2}{4\pi^2}$ $\partial_T I = \frac{TD}{2\pi^2}$

Nach (2) folgt: $\Delta I = \sqrt{\left(\frac{2{,}328^2 s^2}{4\pi^2}\cdot 0{,}0018\,Nm\right)^2 + \left(\frac{2{,}328\,s \cdot 0{,}02097\,Nm}{2\pi \cdot 0{,}006^{-1}\,s^{-1}}\right)^2}$

$= 1{,}627 \cdot 10^{-4}\,kgm^2$

$I = \frac{T^2 D}{4\pi^2} = \frac{2{,}328^2 s^2 \cdot 0{,}02097\,Nm}{4\pi^2} = 2{,}879 \cdot 10^{-3}\,kgm^2$

$I = (2{,}879 \pm 0{,}163)\cdot 10^{-3}\,kgm^2$

Dieser Wert enthält noch das Eigenträgheitsmoment der Drillachse. ✓

Der Ermittelte Wert ist somit $I = (2{,}86 \pm 0{,}3)\cdot 10^{-3}\,kgm^2$

Bestimmung des Trägheitsmoments einer Kugel

$d = (0{,}1363 \pm 0{,}0002)\,m \qquad r = (0{,}0682 \pm 0{,}0001)\,m$

$\Delta \bar{d} = \sqrt{(0{,}0009^2 + 0{,}0002^2 + 0{,}0003^2 + 0{,}0003^2 + 0{,}0004^2)\frac{1}{30}}$

$= 2 \cdot 10^{-4}\,m$

$T = (1{,}714 \pm 0{,}002)\,s$

$\Delta \bar{T} = \sqrt{(0{,}004^2 \cdot 3 + 0{,}006^2 \cdot 2)\frac{1}{20}} = 2 \cdot 10^{-3}\,s$

$m_{Kugel} = 0{,}8128\,kg$

Berechnung des Erwartungswerts ← bzw. theoretische / Theoriewert

$I_K = \frac{2}{5} m r^2 \quad \partial_r I = \frac{4}{5} m r \Rightarrow \Delta I = \frac{4}{5} \cdot 0{,}8128\,kg \cdot 0{,}0682\,m \cdot 0{,}0001\,m$

$= 4{,}43 \cdot 10^{-6}\,kgm^2$

$I_K = \frac{2}{5} \cdot 0{,}8128\,kg \cdot 0{,}0682^2\,m^2$

$= 1{,}5122 \cdot 10^{-3}\,kgm^2$

$I_K = (1{,}5122 \pm 0{,}0044) \cdot 10^{-3}\,kgm^2$

Bestimmung des Trägheitsmoments über die Schwingungsdauer

$\frac{DT^2}{4\pi^2} = I \qquad \Delta I = \sqrt{\left(\frac{1{,}714\,s \cdot 0{,}02097\,Nm}{2\pi^2} \cdot 0{,}002\,s\right)^2 + \left(\frac{1{,}714^2\,s^2}{4\pi^2} \cdot 0{,}00118\,Nm\right)^2}$, nicht linear in Formel

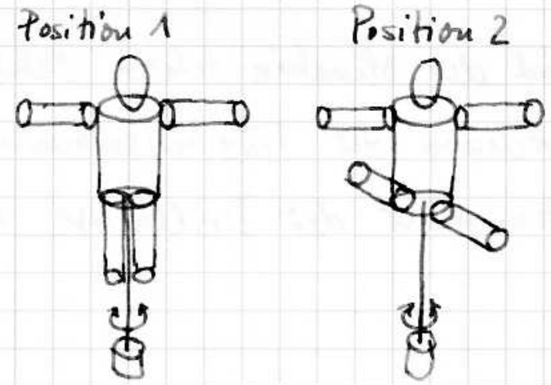
$= 8{,}79 \cdot 10^{-5}\,kgm^2$

$I = \frac{0{,}02097\,Nm \cdot 1{,}714^2\,s^2}{4\pi^2} = 1{,}560 \cdot 10^{-3}\,kgm^2$

Damit beträgt das Trägheitsmoment der Kugel mit Drehachse $(1{,}560 \pm 0{,}09) \cdot 10^{-3}\,kgm^2$

und ohne Drehachse: $(1{,}54 \pm 0{,}27) \cdot 10^{-3}\,kgm^2$

BRUNNEN



Trägheitsmoment einer Puppe

Berechnung der Dichte

Die Form ~~der~~ Puppe wird im Folgenden mit 5 Zylindern und einer Kugel approximiert.

Das Volumen der Puppe ist $V=(2r_B^2\pi l_B+2r_A^2\pi l_A+r_R^2\pi l_R+\frac{4}{3}\pi r_K^3)$ $=2{,}397\cdot10^{-4}\,m^3$. Bei einer Masse von 163,15 g beträgt die Dichte der Puppe in etwa 680 kgm^{-3}.

Trägheitsmomente der Körperteile (Erwartungswerte)

A = Arm
B = Bein
R = Rumpf
K = Kopf

$$I_A=\frac{1}{4}m_A r_A^2+\frac{1}{12}m_A l_A^2+m_A\left(\frac{l_A}{2}+r_R\right)^2=1{,}55\cdot10^{-4}\,kgm^2$$

$$I_B=\frac{1}{2}m_B r_B^2+\frac{m_B r_R^2}{16}=1{,}22\cdot10^{-6}\,kgm^2 \quad ?\; m_B \underline{r_B^2}$$

$$I_R=\frac{1}{2}m_R r_R^2=7{,}62\cdot10^{-6}\,kgm^2$$

$$I_R=\frac{2}{5}m_K r_K^2=3{,}68\cdot10^{-6}\,kgm^2$$

Demnach hat die Puppe ein Trägheitsmoment von $I_{P1}=3{,}23\cdot10^{-\cancel{3}4}\,kgm^2$

In der zweiten Anordnung ist nur die Ausrichtung der Beine anders

$$I_{B_2}=\frac{1}{4}m_B r_B^2+\frac{1}{12}m_B l_B^2+m_B\left(\frac{l_B}{2}+r_R\right)^2=2{,}36\cdot10^{-4}\,kgm^2$$

Demnach beträgt das Trägheitsmoment der Puppe in Position 2: $7{,}93\cdot10^{-4}\,kgm^2$. Der Quotient dieser beiden Werte ist 2,45.

Bestimmung des Trägheitsmoments der Puppe über die Schwingungsdauer

Aus den Messwerten auf Blatt 6 folgt für die Schwingungsdauern: $T_1=(6{,}515\pm0{,}013)\,s$ und $T_2=(9{,}670\pm0{,}015)\,s$ für jeweils 10 Perioden. Es folgt für die Trägheitsmomente:

$$I_1=(2{,}25\cdot10^{-4}\pm0{,}13\cdot10^{-4})\,kgm^2 \quad I_2=(4{,}97\cdot10^{-4}\pm0{,}28\cdot10^{-4})\,kgm^2$$

Der gemessene Quotient beträgt demnach: $2{,}21\pm0{,}18$

Vergleicht man die Änderung des Trägheitsmoments in der Theorie und im Experiment ergibt sich eine Übereinstimmung von

$90\%\pm7\%$

Aufgrund der ohnehin schon sehr groben Näherungen wurde bei der Berechnung des Trägheitsmoments der Puppe von dem Eigen-trägheitsmoment der Drillachse abgesehen.

Diskussion

Trotz der relativ großen Ungenauigkeit des Eigenträgheitsmoments der Drillachse sind große Übereinstimmungen zwischen den Erwartungswerten und den gemessenen Werten festzustellen, was auf die Richtigkeit der Theorie hindeutet.

Die Abweichungen können zum größten Teil auf die Ungenauigkeit der Zeitmessung zurückgeführt werden: Es wurde die menschliche Reaktionszeit weder bestimmt noch herausgerechnet. gut

Bei der Puppe lassen sich größere Abweichungen feststellen, die einerseits durch die grobe Approximation (z.B. hat der Torus einen trapezförmigen Querschnitt, er ist also kein Zylinder; dasselbe gilt für Arme und Beine), andererseits durch schlecht funktionierende Gelenke (der Arm senkte sich während der Messung) erklärt werden können. Weiterhin schwingt die Puppe vergleichsweise schnell, wodurch die Zeitmessung schwieriger und damit ungenauer wurde.

Die rel. Fehler nochmal erwähnen (90%.) ...

...

Literatur

TU Dortmund, Skript zu Versuch 101 „Das Trägheitsmoment"

http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Traegheit.pdf

Eigenträgheitsmoment I_D der Drillachse (Tabelle 2)

a) Masse des Stabs m_S	b) Länge des Stabs l_S
96,28 g	0,6000 m
96,29 g	0,5998 m
96,29 g	0,6000 m
96,29 g	0,6002 m
96,30 g	0,6000 m

c) Masse des Gewichtes H: m_H	D: m_D
221,75 g	221,75 g
221,77 g	221,74 g
221,76 g	221,74 g
221,77 g	221,73 g
221,74 g	221,73 g

Eigenträgheitsmoment I_D der Drillachse (Tabelle 3)

d) Messung der Schwingungsdauer

$\frac{a}{m}$	$\frac{5T}{s}$	$\frac{T}{s}$	$\frac{T^2}{s^2}$
0,30	43,07	8,61	74,20
0,30	43,20	8,64	74,65
0,20	30,13	6,03	36,31
0,20	30,13	6,03	36,31
0,18	27,55	5,51	30,36
0,18	27,49	5,50	30,23
0,16	24,96	4,99	24,92
0,16	25,12	5,02	25,24
0,14	22,55	4,51	20,34
0,14	22,44	4,49	20,14
0,12	20,07	4,01	16,11
0,12	20,18	4,04	16,29
0,10	17,84	3,57	12,73
0,10	17,64	3,53	12,45
0,08	15,75	3,15	9,92
0,08	15,67	3,13	9,82
0,06	13,83	2,77	7,65
0,06	14,03	2,81	7,87
0,04	12,50	2,50	6,25
0,04	12,46	2,49	6,21

Trägheitsmoment eines Zylinders (Tabelle 4)

a) Masse des Zylinders m_z

1525,5 g
1525,5 g
1525,5 g
1525,5 g
1525,5 g
1525,5 g

b) Höhe des Zylinders h_z

0,1394 m
0,1394 m
0,1393 m
0,1394 m
0,1392 m
0,1393 m

c) Durchmesser d_z

0,0800 m
0,0799 m
0,0800 m
0,0800 m
0,0800 m

d) Schwingungsdauer

$\frac{5T}{s}$	$\frac{T}{s}$
11,66	2,33
11,55	2,31
11,70	2,34
11,60	2,32
11,69	2,34

Trägheitsmoment einer Kugel (Tabelle 5)

a) Masse der Kugel m_K

812,8 g

812,8 g

812,7 g

812,8 g

812,8 g

b) Durchmesser d_K

0,1354 m

0,1363 m

0,1365 m

0,1360 m

0,1366 m

0,1367 m

c) Schwingungsdauer

$\frac{5T}{s}$	$\frac{T}{s}$
8,55	1,71
8,60	1,72
8,53	1,71
8,52	1,71
8,60	1,72

Trägheitsmoment einer Puppe (Tabelle 6)

Masse der Puppe: $m_P = 163{,}15\,g$

Arm: Durchmesser: 0,0160 m

Länge: 0,1350 m

Bein: Durchmesser: 0,0170 m

Länge: 0,1500 m

Kopf: Durchmesser: 0,0310 m

Höhe: 0,0550 m

Torso: Durchmesser: 0,0330 m

Höhe: 0,0980 m

Schwingungsdauer (Position 1) $\frac{10T}{s}$	$\frac{T}{s}$	Schwingungsdauer (Position 2) $\frac{10T}{s}$	$\frac{T}{s}$
6,49	0,649	9,69	0,969
6,46	0,646	9,61	0,961
6,52	0,652	9,60	0,960
6,46	0,646	9,73	0,973
6,60	0,660	9,73	0,973
6,55	0,655	9,66	0,966
6,53	0,653	9,64	0,964
6,52	0,652	9,67	0,967
6,52	0,652	9,64	0,964
6,50	0,650	9,73	0,973