

## ANFÄNGERPRAKTIKUM V101

# Das Trägheitsmoment

Helena Nawrath  
h.nawrath@yahoo.de

Carl Arne Thomann  
arnethomann@me.com

Durchführung: 28. Oktober 2014      Abgabe: 04. November 2014

TU Dortmund – Fakultät Physik

## 1 Ziel

Es werden die Trägheitsmomente verschiedener Körper gemessen und anschließend mit den theoretisch errechneten Werten verglichen. Hierzu werden die Winkelrichtgröße  $D$  und das Trägheitsmoment der Drillachse  $I_D$  bestimmt.

## 2 Theorie

Translation und Rotation verbinden Analogien. Bei Rotationen sind das Drehmoment  $\vec{M}$ , das Trägheitsmoment  $I$  und die Winkelbeschleunigung  $\dot{\vec{\omega}}$  maßgebliche Größen. Das Drehmoment  $\vec{M}$  mit  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$  ist abhängig von der Kraft  $\vec{F}$ , welche im Abstand  $|\vec{r}|$  von der Drehachse angreift. Ausgedrückt über die Winkelrichtgröße  $D$  und die Auslenkung des Winkels  $\phi$  ist der Betrag des Drehmomentes ebenfalls

$$|\vec{M}| = D\phi. \quad (1)$$

Das Trägheitsmoment  $I$  ist, analog zur Masse  $m$  in Translationen, der Widerstand eines Drehmoments  $\vec{M}$ . Es gilt für Drehachsen durch den Masseschwerpunkt  $S$

$$I_S = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2 \quad (2)$$

für diskrete Massestücke  $m_i$  im Abstand  $r_i$  von der Rotationsachse und

$$I_S = \int_{m_K} r_i^2 dm \quad (3)$$

$$= \int_{V_K} \rho(\vec{r}) \cdot r_{\perp}^2 dV \quad (4)$$

für kontinuierliche Masseverteilungen mit Massenverteilung  $\rho(\vec{r})$ . Ist die Drehachse um  $a$  parallel zur Achse durch den Schwerpunkt verschoben, so kann das Trägheitsmoment  $I_a$  unter Zuhilfenahme des Satzes von Steiner berechnet werden,

$$I_a = I_S + m_K \cdot a^2. \quad (5)$$

Mechanische Drehschwingungen führen harmonische Schwingungen mit der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad (6)$$

für kleine Auslenkungswinkel  $\phi$  aus. Die Winkelrichtgröße  $D$  berechnet sich bei  $\vec{F} \perp \vec{r}$  mit Formel (1) und (6) zu

$$D = \frac{F \cdot r}{\phi} \quad (7)$$

$$= 4\pi^2 \cdot \frac{I}{T^2}. \quad (8)$$

### 3 Aufbau und Durchführung

In diesem Versuch wird die in gezeigte Apparatur verwendet: Eine drehbar gelagerte Achse ist über eine Spiralfeder an einen festen Rahmen gekoppelt. In das obere Ende der Drillachse können verschiedene Körper eingespannt werden; in vertreten durch die Kugel. [ Unterhalb des Körpers befindet sich ein Auslenkungswinkelskalaablesdingsbums. ]

#### 3.1 Bestimmung der Winkelrichtgröße $D$

Zur Bestimmung der Winkelrichtgröße  $D$  wird eine im folgenden als masselos angenommene Metallstange mittig und senkrecht zur Drehachse in die Vorrichtung eingespannt, sodass die Drehachse durch den Stangenschwerpunkt verläuft. Eine im Abstand  $r$  zum Drehzentrum angehängte Federwaage misst die Kraft  $F$  des rücktreibenden Drehmomentes bei Auslenkung der Metallstange um einen bestimmten Winkel  $\phi$ . Zu beachten ist, dass die Federwaage bestenfalls senkrecht zum Stab und zur Rotationsachse gehalten wird. Dadurch kann der Betrag des Drehmoments  $M$  durch

$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = rF \sin(\angle(\vec{r}, \vec{F})) = rF \quad (9)$$

berechnet werden. Diese Messung wird für 10 verschiedene Winkel  $\phi$  zwischen 0 und  $2\pi$  durchgeführt.

#### 3.2 Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes $I_D$ der Drillachse

Auf die Metallstange aus Kapitel 2.1 wird links und rechts des Drehzentrums je eine als punktförmig angesehene Masse befestigt, deren Abstand  $a$  zum Stangenschwerpunkt variabel ist. Nun wird die Stange ausgelenkt und mit einer Stoppuhr die Schwingungsdauer  $T$  für 5 Perioden gemessen. Das Verfahren wird für 9 weitere Messwerte wiederholt, wobei vor jeder Messung einer neuer Abstand  $a$  eingestellt und notiert wird. Zu beachten ist, dass die links- und rechtsseitige Masse gleichweit vom Mittelpunkt entfernt sind. Im Anschluss an die Messung der Schwingungsdauer werden Gewicht und Abmessungen der Massen mit Waage und Schieblehre bestimmt.

#### 3.3 Bestimmung der Trägheitsmomente verschiedener Körper

Als erster Körper wird ein Styroporzylinder gewählt, welcher senkrecht auf die Drillachse gesteckt wird, nachdem sowohl die Massen, als auch die Metallstange aus vorherigen Messungen von der Apparatur geschraubt wurden. Anschließend wird dieser ebenfalls zur Schwingung gebracht und die Schwingungsdauer  $T$  für 5 Schwingungen insgesamt 10 Mal gemessen. Das Verfahren wiederholt sich für die Kugel, den zweiten Körper. Auch diese Körper werden nach der Messung gewogen und mit einer Schieblehre vermessen - Länge und Durchmesser des Zylinders, als auch Durchmesser der Kugel.

### 3.4 Bestimmung der Trägheitsmomente der Modellpuppe für 2 verschiedene Positionen

Die Puppe wird in die Messvorrichtung eingespannt und in Position (a), abgebildet in gebracht. Der Messvorgang verläuft analog zu den vorherigen. Die Zeit  $T$  für 5 Schwingungen wird 10 Mal mit einer Stoppuhr gemessen. Danach wird die Puppe in Position (b), ebenfalls in ersichtlich, gebracht und erneut gemessen. Es folgen die Bestimmung des Gewichtes mit einer Waage und die Vermessung der einzelnen Körperteile der Puppe. Es werden Durchmesser und ggf. die Länge von Armen, Beinen, Kopf und Rumpf mit einer Schieblehre vermessen.

## 4 Auswertung

Ein Trägheitsmoment könnte existieren.

**Tabelle 1:** Messung zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes der Drillachse

Winkel		Kraft	Drehmoment
$\phi$	$\phi / \text{rad}$	$F / \text{N}$	$D / \text{N m}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	0.22	0.02791
90°	$\frac{\pi}{2}$	0.40	0.02538
120°	$\frac{2\pi}{3}$	0.52	0.02474
135°	$\frac{3\pi}{4}$	0.60	0.02538
180°	$\pi$	0.78	0.02474
225°	$\frac{5\pi}{4}$	0.92	0.02335
240°	$\frac{4\pi}{3}$	0.90	0.02141
270°	$\frac{3\pi}{2}$	1.08	0.02284
315°	$\frac{7\pi}{4}$	1.26	0.02284
360°	$2\pi$	1.42	0.02252

**Tabelle 2:** Messung zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes der Drillachse

$A/\text{cm}$	Schwingungsdauer				Masse	
	$2T_1/\text{s}$	$T_1/\text{s}$	$2T_2/\text{s}$	$T_2/\text{s}$	$m_1/\text{kg}$	$M_2/\text{g}$
6,4925	5,90	2,950	5,90	2,950	221,74	221,73
8,4925	6,55	3,275	6,46	3,230	221,74	221,73
10,9925	7,29	3,645	7,21	3,605	221,75	221,73
13,7925	8,66	4,330	8,63	4,315	221,76	221,75
16,6925	10,07	5,035	10,10	5,050	221,75	221,74
19,0925	11,13	5,565	11,15	5,575	221,75	221,74
20,4925	11,92	5,960	11,76	5,880	221,75	221,73
22,4925	13,03	6,515	13,00	6,500	221,76	221,74
24,5925	14,10	7,050	13,96	6,980	221,75	221,75
29,5925	16,67	8,335	16,73	8,365	221,76	221,74

**Tabelle 3:** Messung zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes eines Zylinders

Schwingungsdauer		Abmessungen		Masse
$5T/\text{s}$	$T/\text{s}$	Höhe $H/\text{cm}$	Durchmesser $D/\text{cm}$	$M/\text{g}$
4,41	0,882	10,120	9,848	368,57
4,35	0,870	10,150	9,850	368,57
4,44	0,888	10,120	9,844	368,57
4,44	0,888	10,102	9,840	368,57
4,36	0,872	10,112	9,844	368,57
4,41	0,882	10,112	9,850	368,58
4,32	0,864	10,058	9,850	368,59
4,40	0,880	10,070	9,844	368,57
4,33	0,886	10,068	9,844	368,58
4,39	0,878	10,072	9,850	368,57

**Tabelle 4:** Messung zur Bestimmung des Eigenträgheitsmomentes einer Kugel

Schwingungsdauer		Abmessungen	Masse
$5T/\text{s}$	$T/\text{s}$	Durchmesser $D/\text{cm}$	$M/\text{g}$
8,60	1,720	13,745	812,7
8,56	1,721	13,730	812,7
8,61	1,722	13,720	812,7
8,58	1,716	13,745	812,7
8,56	1,721	13,750	812,7
8,61	1,722	13,740	812,7
8,55	1,710	13,750	812,7
8,61	1,722	13,710	812,7
8,60	1,720	13,745	812,7
8,61	1,722	13,730	812,7

**Tabelle 5:** Abmessungen und Masse der Modellpuppe

Armdurchmesser		Armlänge		Beindurchmesser		Beinlänge		Kopf	Rumpf	Masse
links	rechts	links	rechts	links	rechts	links	rechts	d/cm	l/cm	M/g
$d_A$ /cm	$d_A$ /cm	$l_A$ /cm	$l_A$ /cm	$d_B$ /cm	$d_B$ /cm	$l_B$ /cm	$l_B$ /cm	$d$ /cm	$l$ /cm	$M$ /g
1,7	1,5	14,1	14,0	1,6	1,6	15,0	15,5	3,0	3,9	9,9
1,3	1,4	14,2	14,1	1,7	2,1	14,9	15,4	3,0	3,6	10,0
1,6	1,6	14,0	14,0	2,0	1,8	15,0	15,4	3,1	3,6	9,9
1,0	1,2	13,9	14,1	1,2	1,6	15,0	15,6	3,1	3,9	9,9
1,4	1,1	14,0	13,9	1,7	1,1	14,9	15,6	3,0	4,1	9,9
0,9	1,4	13,8	14,1	1,4	1,5	14,9	15,6	3,1	3,5	10,0
1,6	1,3	13,9	14,0	1,3	1,3	15,0	15,3	3,0	3,7	9,8
1,5	1,1	14,1	14,1	1,9	1,0	14,9	15,4	3,1	3,5	9,9
1,6	0,9	13,8	14,1	1,5	1,7	15,0	15,6	3,0	3,6	9,7
1,7	1,4	13,9	14,2	1,3	1,6	15,0	15,6	3,1	3,2	9,8

## 5 Diskussion

Ja, es existiert.