

Anfängerpraktikum V408

Geometrische Optik

Helena Nawrath
helena.nawrath@tu-dortmund.de

Carl Arne Thomann
arnethomann@me.com

Durchführung: 14. April 2015 Abgabe: 21. April 2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

1 Ziel

Versuchsziel ist es, Brennweiten verschiedener Linsen sowohl mit Hilfe der Linsengleichung als auch mit der Methode nach BESSEL zu berechnen. Außerdem werden Brennweite und Lage der Hauptebenen eines Linsensystems mit der Methode nach ABBE bestimmt.

2 Theorie

Nach der geometrischen Optik breitet sich Licht in Form von Strahlen aus. Dies ist eine gültige Näherung, wenn alle Abmessungen einer Apparatur groß gegenüber der Wellenlänge des Lichtes sind. Tritt ein Lichtstrahl in ein Medium mit anderer optischer Dichte, wird er nach dem SNELLIUS'schen Brechungsgesetz gebrochen. Diese Brechung wird für die Konstruktion von Linsen, deren Material die Dichte von Luft überschreitet, benutzt. In Abhängigkeit von der Dicke und Krümmung weisen Linsen verschiedene Eigenschaften auf.

Sammellinsen sind konvex gekrümmt und bündeln parallel eintreffende Lichtstrahlen im Brennpunkt. Dieser Brennpunkt befindet sich im Abstand f , der Brennweite, von der Mittelebene entfernt. Wird ein Gegenstand im Abstand der doppelten Brennweite von der Linse aufgestellt, entsteht im gleichen Abstand auf der anderen Seite der Linse ein reelles Bild von dem Objekt. Im Allgemeinen wird der Abstand zwischen Linsenmittellachse und Bild als *Bildweite* b , der Abstand zwischen Linsenmittellachse und Gegenstand als *Gegenstandsweite* g bezeichnet. Beide Größen sind bei Sammellinsen positiv.

Zerstreuungslinsen sind konkav gekrümmt und zerstreuen parallel auftreffende Lichtstrahlen. Der virtuelle Schnittpunkt der Lichtstrahlen, die als parallele Lichtstrahlen von der Linse zerstreut wurden, ist der virtuelle Brennpunkt der Linse. Bei Zerstreuungslinsen sind Gegenstands-, Bild- und Brennweite negativ. Zeichnerisch wird der Strahlengang durch Parallel-, Brennpunkt- und Mittelpunktstrahl wie in Abbildung 1 dargestellt.

Durchquert ein Lichtstrahl eine dünne Linse, wird er an der Mittelebene gebrochen. Die Brechkraft D – der Kehrwert der Brennweite f mit der Einheit $\text{dpt} = \frac{1}{\text{m}}$ – kann für dünne Linsen berechnet werden mit der *Linsengleichung*

$$D = \frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g}. \quad (1)$$

Über das *Abbildungsgesetz*

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g} \quad (2)$$

mit Bildgröße B und Gegenstandsgröße G kann die Vergrößerung V des Bildes bestimmt werden.

Anders als bei dünnen Linsen geschieht die Brechung bei einer dicken Linse an zwei Hauptebenen, H und H' , da der Strahl einen weiteren Weg im Medium zurücklegt.

Relativ zu den Hauptebenen sind, wie in Abbildung 1 erkennbar, b , b' und g , g' die kennzeichnenden Größen der Linse.

Es treten bei der Verwendung von Linsen *Abbildungsfehler* auf. Die Näherung der geometrischen Optik gilt nur für achsennahe Strahlen, achsenferne Strahlen befinden sich weit von der optischen Achse eines Systems entfernt und werden stärker gebrochen. Dadurch liegt der Brennpunkt der achsenfernen Strahlen nicht auf dem Brennpunkt der achsen-nahen Strahlen, wodurch nicht das gesamte Licht durch die Linse scharf abgebildet wird. Dieses Phänomen wird *sphärische Aberration* genannt.

Ist die optische Dichte von dem Linsenmaterial abhängig von der Wellenlänge des Lichtes, kommt es zur *chromatischen Aberration*. Wird nicht-monochromatisches Licht durch eine Linse geschickt, liegen die Brennpunkte der einzelnen Lichtfarben nicht übereinander, wodurch ein unscharfes Bild entsteht.

2.1 Methode nach Bessel

Ist der Abstand $e = g + b$ zwischen Gegenstand und Schirm konstant und größer als die vierfache Brennweite f der Linse, lassen sich zwei Linsenpositionen finden, die ein scharfes Bild erzeugen. Dabei sind die zwei paarweise gefundenen Gegenstands- und Bildweiten symmetrisch, es gilt

$$b_1 = g_2 \quad \text{und} \quad b_2 = g_1. \quad (3)$$

Ist außerdem der Abstand $d = g - b$ zwischen beiden Linsenpositionen bekannt, kann die Brennweite mit der Formel

$$f = \frac{e^2 - d^2}{4e} \quad (4)$$

berechnet werden.

2.2 Methode nach Abbe

Über die Methode von ABBE können dicke Linsen oder Linsensysteme auf die Lage der Hauptachsen H , H' und Brennweite f untersucht werden. Es gelten die Beziehungen

$$g' = g + h = f \cdot \left(1 + \frac{1}{V}\right) + h \quad (5a)$$

$$b' = b + h' = f \cdot (1 + V) + h', \quad (5b)$$

welche bei bekannter Vergrößerung V sowie Bild- und Gegenstandsweiten g' und b' bezogen auf einen festen Punkt des Linsensystems, Aussagen über die Lage der Hauptachsen zulassen.

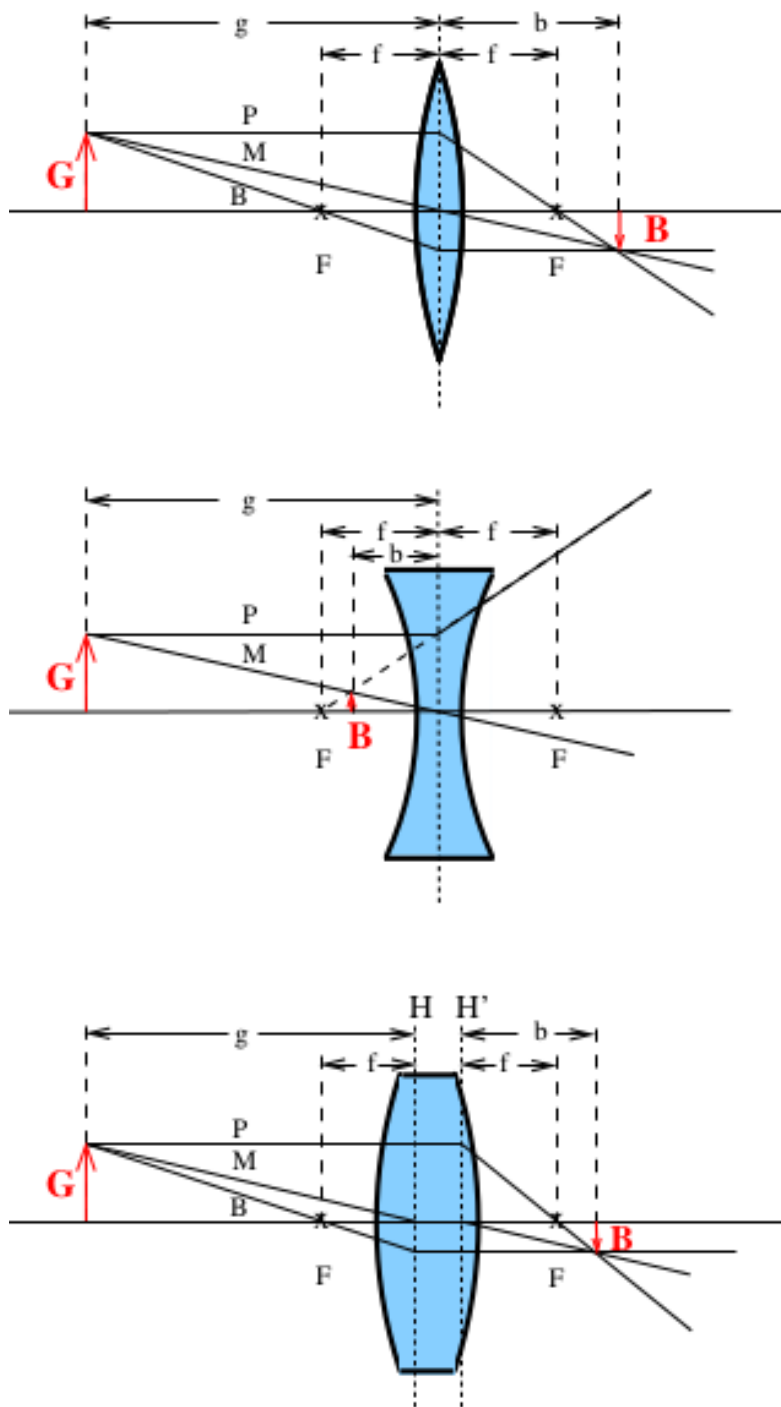


Abbildung 1: Strahlengänge verschiedener Linsen. [skript]

3 Durchführung

3.1 Verifikation der Linsengleichung

Die Brennweite f einer dünnen Linse wird mithilfe der Linsengleichung bestimmt und mit der Herstellerangabe verglichen. Dazu wird auf einer optischen Bank eine Halogenlampe, ein Gegenstand "Pearl L", eine Linse mit der Brennweite $f_1 = 100 \text{ mm}$ und ein Schirm gestellt.

Indem die Gegenstandsweite g festgelegt und die Bildweite b so variiert wird, dass der Gegenstand auf dem Schirm scharf abgebildet wird, wird die Bildweite b_i für jeweils zehn verschiedene Gegenstandsweiten g_i gemessen. Um die Messgenauigkeit graphisch darzustellen, werden in einem b - g -Diagramm die ermittelten Werte eingezeichnet und linear verbunden. Dies wird für eine Linse mit einer Brennweite von $f_2 = 50 \text{ mm}$ wiederholt.

3.2 Brennweitenbestimmung nach Bessel

Die Messvorrichtung wird analog zum ersten Teil aufgebaut. Der Abstand $e = b + g$ zwischen Gegenstand und Schirm wird festgehalten und zur Abbildung eine Linse bekannter Brennweite f benutzt, wobei

$$e \geq 4f \quad (6)$$

gelten muss. Für zehn verschiedene Abstände e_i werden jeweils die beiden Linsenpositionen gesucht, die ein scharfes Bild erzeugen. Die beiden Wertepaare (b_i, g_i) pro Abstand e_i werden aufgenommen.

3.3 Bestimmung der Lage von Hauptachsen nach Abbe

Die Messvorrichtung wird analog zum ersten Teil aufgebaut, zusätzlich wird eine Zerstreuungslinse unmittelbar vor der Sammellinse aufgebaut. Die Zerstreuungslinse wird zum Gegenstand gerichtet, das Linsenpaar wird als ein festes Linsensystem betrachtet und der Mittelpunkt der Sammellinse als Messpunkt A betrachtet.

Ausgehend vom Messpunkt A werden die Gegenstands- und Bildweitenpaar (b', g') sowie die Vergrößerung V des Gegenstandes bei scharfer Abbildung gemessen. Mithilfe der Gleichungen (5) kann die Lage der Hauptachsen h und h' ausgehend vom Messpunkt A bestimmt werden. Hierzu werden in einem Diagramm g' gegen $(1 + \frac{1}{V})$ und b' gegen $(1 + V)$ aufgetragen und mittels Regression die Brennweite f und die relativen Lagen h und h' bestimmt.

4 Auswertung

4.1 Verifikation der Linsengleichung

Die Ergebnisse der ersten Messung sind in Tabelle 2 aufgetragen. Für die berechnete

Linse mit $\tilde{f} = 100$ mm			Linse mit $\tilde{f} = 50$ mm		
g_1 / mm	b_1 / mm	f_1 / mm	g_2 / mm	b_2 / mm	f_2 / mm
120	525	98,09	60	2700	124,14
130	390	98,64	70	1570	117,98
140	319	97,59	80	1210	111,22
150	277	96,96	90	1040	104,35
160	251	95,63	100	920	97,65
170	227	97,20	110	870	90,20
180	204	97,71	120	800	82,83
190	198	97,31	130	770	75,04
200	192	97,30	140	750	67,01
210	186	97,50	150	720	58,70
220	177	97,67			

Abbildung 2: Messung der Bildweiten b_i bei festgelegter Gegenstandsweite g_i sowie die daraus berechneten Brennweiten nach der Linsengleichung.

Brennweite ergeben sich Werte von

$$f_1 = (0,104 \pm 0,006) \text{ m} \quad (7)$$

$$f_2 = (0,087 \pm 0,011) \text{ m}. \quad (8)$$

Das b - g -Diagramm 3 zeigt dadurch, dass sich die Linien auf einem nicht-punktförmigen Gebiet untereinander schneiden, die Unsicherheit der Messergebnisse an. Die Mittelwerte weichen von der Herstellerangabe, $\tilde{f}_1 = 0,1$ m und $\tilde{f}_2 = 0,05$ m, um

$$\Delta f_1 = 4\% \quad (9)$$

$$\Delta f_2 = 42.5\% \quad (10)$$

ab. Daher ist für die Linse f_1 die Brennweite f über die Linsengleichung (??) verifizierbar, für die Linse f_2 weicht die berechnete Brennweite stark ab.

4.2 Methode nach Bessel

Die Ergebnisse der Messung nach dem Bessel-Verfahren sind in Tabelle 1 aufgetragen. Für die berechnete Brennweite ergibt sich ein Wert von

$$f = (0,168 \pm 0,012) \text{ m} \quad (11)$$

e/mm	Linsenposition 1			Linsenposition 2		
	g_1/mm	b_1/mm	f_1/mm	g_2/mm	b_2/mm	f_2/mm
450	14,4	30,6	112,36	14,2	30,8	112,35
500	13,4	36,6	124,73	13,5	36,5	124,74
550	12,7	42,3	137,10	12,7	42,3	137,10
600	12,2	47,8	149,47	12,3	47,7	149,48
650	11,9	53,1	161,85	12,0	53,0	161,85
700	11,8	48,2	174,53	11,7	58,3	174,24
750	11,6	73,4	186,23	11,5	73,5	186,22
800	11,4	68,8	198,98	11,6	68,8	198,99
850	11,4	73,6	211,36	11,4	73,6	211,36
900	11,3	78,7	223,74	11,3	78,8	223,73

Tabelle 1: Messung der Bild- und Gegenstandsweiten b_i und g_i bei festgelegtem Abstand e nach Bessel; weißes Licht.

Der berechnete Mittelwert weicht von der Herstellerangabe $\tilde{f} = 0,1\text{ m}$ um 68% ab.

Die Ergebnisse der Messung mit einfarbigem Licht sind in den Tabellen 2 und 3 aufgetragen. Die ermittelten Brennweiten betragen

$$f_{\text{Rot}} = (0,1141 \pm 0,0007)\text{ m} \quad (12)$$

$$f_{\text{Blau}} = (0,073 \pm 0,016)\text{ m} \quad (13)$$

und zeigen damit die Abhängigkeit der Brechung von der Wellenlänge des Lichtes.

4.3 Methode nach Abbe

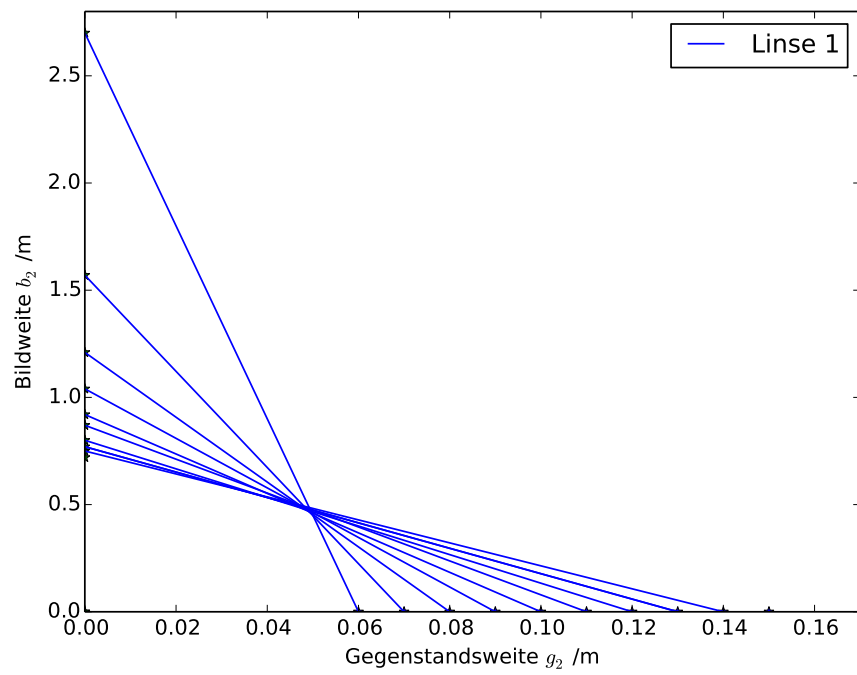
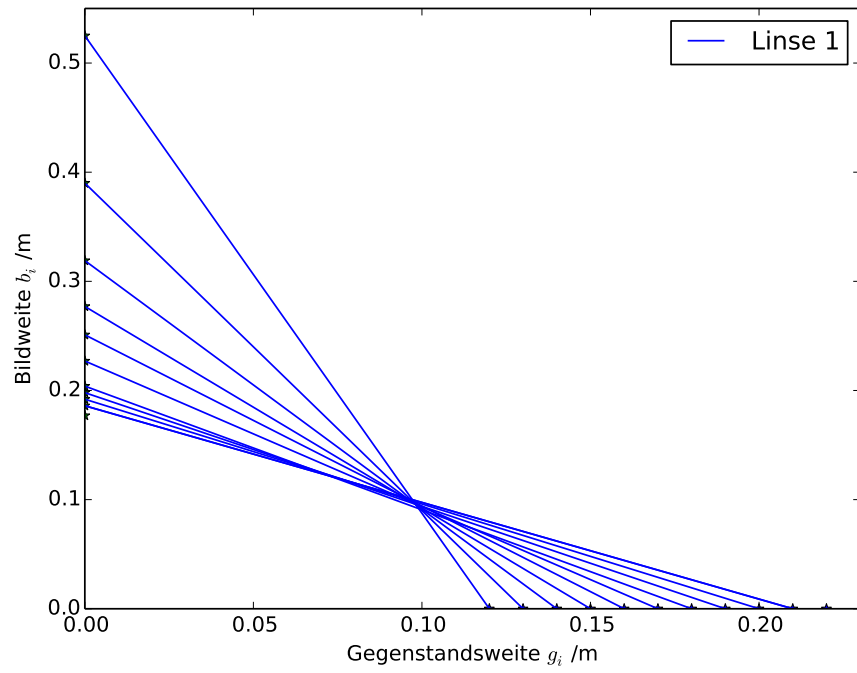


Abbildung 3: b - g -Diagramme zur Darstellung der Messgenauigkeit.

e/mm	Linsenposition 1			Linsenposition 2		
	$g_{1,r}/\text{mm}$	$b_{1,r}/\text{mm}$	$f_{1,r}/\text{mm}$	$g_{2,r}/\text{mm}$	$b_{2,r}/\text{mm}$	$f_{2,r}/\text{mm}$
50	143	307	111,88	306	144	111,89
60	126	424	113,00	424	126	113,00
70	118	532	114,38	531	119	114,38
80	117	633	115,82	636	117	115,82
90	115	735	115,45	739	111	115,45

Tabelle 2: Messung der Bild- und Gegenstandsweiten b_i und g_i bei festgelegtem Abstand e nach Bessel; rotes Licht.

e/mm	Linsenposition 1			Linsenposition 2		
	$g_{1,b}/\text{mm}$	$b_{1,b}/\text{mm}$	$f_{1,b}/\text{mm}$	$g_{2,b}/\text{mm}$	$b_{2,b}/\text{mm}$	$f_{2,b}/\text{mm}$
50	366	134	97,15	132	368	97,15
60	477	123	97,19	122	478	97,19
70	782	118	15,63	116	784	15,63
80	784	116	58,88	114	786	58,89
90	788	112	97,31	111	789	97,31

Tabelle 3: Messung der Bild- und Gegenstandsweiten b_i und g_i bei festgelegtem Abstand e nach Bessel; blaues Licht.

g'/mm	b'/mm	B/mm	V/mm
200	790	80	2,67
250	551	44	1,47
300	480	31	1,03
350	416	25	0,83
400	398	20	0,67
450	380	17	0,57
500	370	15	0,50
550	346	13	0,43
600	348	11	0,37
650	336	11	0,37

Tabelle 4: Messwerte zur Bestimmung der Brennweite des Linsensystems nach Abbe.

5 Diskussion

Literatur

- [1] John D. Hunter. „Matplotlib: A 2D Graphics Environment“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 90–95. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/90/1>. Version 1.3.1.
- [2] Eric Jones, Travis Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. 2001. URL: <http://www.scipy.org/>. Version 0.14.0.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>. Version 2.4.5.
- [4] Travis E. Oliphant. „Python for Scientific Computing“. In: *Computing in Science and Engineering* 9.3 (2007), S. 10–20. URL: <http://link.aip.org/link/?CSX/9/10/1>. Version 1.8.1.
- [5] The GIMP Team. *GIMP: GNU Image Manipulation Program*. URL: <http://www.gimp.org/>. Version 2.8.10.

Die verwendeten Plots wurden mit *matplotlib*[1] und die Grafiken mit *GIMP*[5] erstellt sowie die Berechnungen mit *Python-Python-Numpy*, [4], *Python-Scipy*[2] und *Python-uncertainties*[3] durchgeführt.