IME - USP

MAP 2321 - Técnicas em Teoria de Controle

Lista 1

By:
Erik Davino Vincent
Henrique Reis Berquo
Guilherme Byon Cheol Kang
December 3, 2020

Exercício 1

Uma **partícula** de massa unitária está sob ação de um campo de aceleração **central** newtoniano. Além disso temos dois controles independentes, um na direção **radial** e outro na direção **tangencial** $u_r e_r$ e $u_\theta e_\theta$ respectivamente.

$e_r,\ e_\theta \subset \mathbb{R}^2$ formam um referencial móvel unitário.

a) Use a Lei de Newton para justificar a equação abaixo como um modelo para a dinâmica do problema acima descrito:

$$\ddot{r} = (-\frac{k}{r^2} + u_r)e_r + u_\theta e_\theta$$

b) Use coordenadas polares para re-escrever o modelo na maneira a seguir:

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{k}{r^2} + u_r$$
$$r\ddot{\theta} = -2\dot{r}\dot{\theta} + u_\theta$$

c) Suponha $u_r = u_\theta = 0$. Determine os valores de k para os quais as órbitas circulares $r(t) = \sigma$ e $\theta(t) = \omega t$ sejam soluções do sistema acima.

d) Defina as seguintes variáveis de estado:

$x_1 = r - \sigma$, $x_2 = \dot{r}$, $x_3 = \sigma(\theta - \omega t)$ e $x_4 = \sigma(\dot{\theta} - \omega)$

Verifique que a equação linearizada do sistema anterior, tomando $\sigma = 1$, sobre as órbitas circulares é:

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

e) Calcule:

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\omega & 0 & 0 \end{pmatrix}(t-t_0)}$$

Exercício 2

Sejam k e $b > 0$. Considere o oscilador harmônico dado pela seguinte equação:

$$\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \cos t$$

a) Escreva a equação de estado deste sistema e encontre sua solução para qualquer condição inicial dada.

b) Seja $\Phi(t,\ t_0)$ a matriz de transição deste sistema. Mostre que:

$$\lim_{t \to +\infty} \Phi(t,\ t_0) = 0$$

c) Prove que existe uma única solução 2π-periódica $\varphi_{2\pi}(t)$ para este sistema.

d) Mostre que a solução 2π-periódica do item c) é atratora, i.e., se $x(t)$ é solução, então $\|x(t) - \varphi_{2\pi}(t)\| \to 0$ quando $t \to +\infty$.

Exercício 3

Seja $x(t)$ a posição de um corpo num instante t sujeito a uma força f dada por:

$$f(t) = \begin{cases} f_0, & t \in [0, t_1] \\ 0, & t > t_1 \end{cases}$$

para alguma constante $f_0 > 0$. Se o corpo possui massa m e sofre resistência, temos;

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) = f(t)$$

para algum $b > 0$.

a) Calcule a matriz de transição deste sistema.

b) Encontre a saída $x(t)$ com condições iniciais $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 1$.

c) Analise $\lim_{t \to +\infty} x(t)$ assumindo $x(t_0) = x_0$ e $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$.