

ОГЛАВЛЕНИЕ

Вступление	2
1 Теория	3
1.1 Постановка задачи.	3
1.2 Существующие решения.	10
1.2.1 Итеративный алгоритм ближайших точек	10
1.2.2 Итеративный алгоритм ближайших точек с нормальями	10
1.3 Идеи	11
1.3.1 Симметричный итеративный алгоритм ближайших точек	11
1.3.2 Выбор исходного и целевого облаков точек	11
1.3.3 Использование инвариантов	12
2 Расстояние Хаусдорфа	13
2.1 Теоретические основы	13
2.2 Расстояние Хаусдорфа	13
2.2.1 Пример 1.	15
2.2.2 Пример 2.	16
2.3 Случайные величины.	17
Список литературы	19

ВСТУПЛЕНИЕ

Актуальность работы Оценка положения камеры по облакам точек лежит в основе сканирования объектов с помощью 3D сканера. Для решения этой задачи используется итеративный алгоритм ближайших точек и его модификации, однако они учитывают только расстояния между точками двух множеств. Взаимосвязь между точками одного облака содержит дополнительную информацию, которая может повысить качество оценки перемещения камеры.

Объект исследования — методы оценки параметров камеры.

Предмет исследования — алгоритмы сопоставления облаков точек.

Цель исследования. Разработка эффективного алгоритма сопоставления двух облаков точек.

Задания следующие:

- 1) исследовать существующие алгоритмы сопоставления облаков точек;
- 2) предложить альтернативный алгоритм сопоставления облаков точек.

1 ТЕОРИЯ

1.1 Постановка задачи.

Есть два облака точек: исходное S (source) и целевое T (target). К точкам исходного множества $\vec{s} \in S$ применили поворот $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ и перемещение $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$, а также в процессе сканирования появился аддитивный гауссовый шум с неизвестной дисперсией

$$\vec{k}_s = R \cdot \vec{s} + \vec{b} + \xi_s, \quad \xi_s \sim N(\vec{0}, \sigma^2 \cdot I) \quad (1.1)$$

где $k : S \rightarrow T$ — разметка, то есть функция, которая сопоставляет каждой точке из исходного множества точку из целевого множества.

Задача состоит в таком выборе матрицы R и вектора \vec{b} , при которых расстояние между множествами \vec{k}_s и $R \cdot \vec{s} + \vec{b}$ было бы наименьшим. В том случае, когда S и T — конечны, можно воспользоваться обычным методом наименьших квадратов

$$E(k, R, b) = \sum_{s \in S} \left(\vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b} \right)^2 \rightarrow \min_{k, R, b}. \quad (1.2)$$

Сумма квадратов отклонений между векторами — это то же самое, что сумма квадратов отклонений между проекциями по каждой координате

$$E(k, R, b) = E_x(k, R, b) + E_y(k, R, b) + E_z(k, R, b) \rightarrow \min_{k, R, b}.$$

Найдём, чему равна проекция произведения матрицы R на вектор s на

все координаты

$$R \cdot \vec{s} = \begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & r_{yy} & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{zy} & r_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx} \cdot s_x + r_{xy} \cdot s_y + r_{xz} \cdot s_z \\ r_{yx} \cdot s_x + r_{yy} \cdot s_y + r_{yz} \cdot s_z \\ r_{zx} \cdot s_x + r_{zy} \cdot s_y + r_{zz} \cdot s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_x \cdot \vec{s} \\ \vec{r}_y \cdot \vec{s} \\ \vec{r}_z \cdot \vec{s} \end{bmatrix},$$

где первая строка получившегося вектора — проекция $R \cdot \vec{s}$ на ось x , вторая строка — проекция на ось y , третья — на ось z .

Распишем сумму квадратов отклонений через проекции

$$\begin{aligned} E(k, R, b) &= \sum_{s \in S} (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + \vec{r}_y \cdot \vec{s} + \vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_x + b_y + b_z - k_{s_x} - k_{s_y} - k_{s_z})^2 = \\ &= \sum_{s \in S} [(\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) + (\vec{r}_y \cdot \vec{s} + b_y - k_{s_y}) + (\vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_z - k_{s_z})]^2 = \\ &= \sum_{s \in S} (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x})^2 + \sum_{s \in S} (\vec{r}_y \cdot \vec{s} + b_y - k_{s_y})^2 + \sum_{s \in S} (\vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_z - k_{s_z})^2. \end{aligned}$$

Множество параметров, которые входят в каждую из трёх сумм, разные. Тогда можем минимизировать проекции суммы квадратов отклонений на все координаты отдельно

$$\begin{cases} E_x = \sum_{s \in S} (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x})^2 \rightarrow \min, \\ E_y = \sum_{s \in S} (\vec{r}_y \cdot \vec{s} + b_y - k_{s_y})^2 \rightarrow \min, \\ E_z = \sum_{s \in S} (\vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_z - k_{s_z})^2 \rightarrow \min. \end{cases}$$

Имеем линейную функцию, которая возводится в квадрат. Это выпуклая функция. Значит, можно взять частные производные по r_i и x_i для всех $i \in \{x, y, z\}$ и приравнять их к нулю. Получим 4 уравнения для каждой коор-

динаты. Запишем для E_x , для остальных — аналогично

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial b_x} = \sum_{s \in S} 2 (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xx}} = \sum_{s \in S} 2 (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) \cdot s_x = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xy}} = \sum_{s \in S} 2 (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) \cdot s_y = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xz}} = \sum_{s \in S} 2 (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) \cdot s_z = 0. \end{array} \right.$$

Решаем первое уравнение относительно b_x . Получаем

$$\sum_{s \in S} b_x = \sum_{s \in S} (k_{s_x} - \vec{r}_x \cdot \vec{s}).$$

Слева получили сумму одинаковых слагаемых

$$|S| \cdot b_x + \vec{r}_x \sum_{s \in S} \vec{s} = \sum_{s \in S} k_{s_x}.$$

Распишем скалярное произведение

$$|S| \cdot b_x + \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_z = \sum_{s \in S} k_{s_x}.$$

Решаем остальные уравнения относительно r_{xi} для $i \in \{x, y, z\}$. Видим, что для разных i производная по r_{xi} одинаковая, потому находим решение для r_{xx} , а для остальных решение будет аналогичным

$$\vec{r}_x \sum_{s \in S} \vec{s} \cdot s_x = \sum_{s \in S} (k_{s_x} - b_x) \cdot s_x.$$

Распишем скалярное произведение

$$\sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x^2 + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_x \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_x \cdot s_z + \sum_{s \in S} b_x \cdot s_x = \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_x.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |S| \cdot b_x + \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_z = \sum_{s \in S} k_{s_x}, \\ \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x^2 + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_x \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_x \cdot s_z + \sum_{s \in S} b_x \cdot s_x = \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_x, \\ \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_y^2 + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_y \cdot s_z + \sum_{s \in S} b_x \cdot s_y = \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_y, \\ \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x \cdot s_z + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_y \cdot s_z + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_z^2 + \sum_{s \in S} b_x \cdot s_z = \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_z. \end{cases}$$

Запишем её в матричном виде

$$\begin{bmatrix} |S| & \sum_{s \in S} s_x & \sum_{s \in S} s_y & \sum_{s \in S} s_z \\ \sum_{s \in S} s_x & \sum_{s \in S} s_x^2 & \sum_{s \in S} s_x \cdot s_y & \sum_{s \in S} s_x \cdot s_z \\ \sum_{s \in S} s_y & \sum_{s \in S} s_x \cdot s_y & \sum_{s \in S} s_y^2 & \sum_{s \in S} s_y \cdot s_z \\ \sum_{s \in S} s_z & \sum_{s \in S} s_x \cdot s_z & \sum_{s \in S} s_y \cdot s_z & \sum_{s \in S} s_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ r_{xx} \\ r_{xy} \\ r_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{s \in S} k_{s_x} \\ \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_x \\ \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_y \\ \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_z \end{bmatrix}.$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned}\sum_{s \in S} s_i &= S_i, & i \in \{x, y, z\}, \\ \sum_{s \in S} s_i s_j &= S_{ij}, & i, j \in \{x, y, z\}, \\ \sum_{s \in S} k_{s_x} &= k, \\ \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_i &= k_i, & i \in \{x, y, z\}.\end{aligned}$$

Уравнение приняло следующий вид

$$\begin{bmatrix} |S| & S_x & S_y & S_z \\ S_x & S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_y & S_{xy} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_z & S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ r_{xx} \\ r_{xy} \\ r_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}.$$

Используем метод Крамера для решения системы линейных уравнений. Определитель Δ

$$\begin{aligned}\Delta &= |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - \sum_{i \in \{x, y, z\}} L_i + 2 \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - \\ &- \sum_{i, j, k \in \{x, y, z\}} L_{ijk} + 2 \sum_{i, j \in \{x, y, z\}} L_{ij},\end{aligned}$$

где введены обозначения при $i, j, k \in \{x, y, z\}$, $i \neq j \neq k$

$$\begin{aligned} L_i &= S_{jk} \cdot (|S| \cdot S_{ii} - S_i^2), \\ L_{ij} &= S_i \cdot S_j \cdot (S_{ij} \cdot S_k - S_{ik} \cdot S_{jk}), \\ L_{ijk} &= S_i^2 \cdot S_{jj} \cdot S_{kk}. \end{aligned}$$

Определитель Δ_b

$$\begin{aligned} \Delta_b &= k \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - \sum_{i \in \{x, y, z\}} L_i^b + 2 \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - \sum_{i, j, k \in \{x, y, z\}} L_{ijk}^b + \\ &+ \sum_{i, j \in \{x, y, z\}} L_{ij}^b + \sum_{i, j \in \{x, y, z\}} (L_{ij}^b)', \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} L_{ij}^b &= S_{ij}^2 \cdot S_k \cdot k_k, \\ L_{ijk}^b &= S_i \cdot S_{jj} \cdot S_{kk}, \\ (L_{ij}^b)' &= (S_i \cdot k_j + S_k \cdot k_i) \cdot (S_{ij} \cdot S_{kk} - S_{jk} \cdot S_{ik}) \end{aligned}$$

при $i, j, k \in \{x, y, z\}$, $i \neq j \neq k$. Определитель Δ_{xx}

$$\begin{aligned} \Delta_{xx} &= -k \cdot S_x \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} + k \cdot S_x \cdot S_{yz}^2 + k \cdot S_y \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} - k \cdot S_y \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - \\ &- k \cdot S_z \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} + k \cdot S_z \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} + k_x \cdot |S| \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - k_x \cdot |S| \cdot S_{yz}^2 - \\ &- k_x \cdot S_y^2 \cdot S_{zz} + 2 \cdot k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{yz} - k_x \cdot S_z^2 \cdot S_{yy} - k_y \cdot |S| \cdot S_{yz} \cdot S_{zz} + \\ &+ k_y \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} + k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{zz} - k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} - k_y \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xz} + \\ &+ k_y \cdot S_z^2 \cdot S_{xy} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} - k_z \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} - k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} + \\ &+ k_z \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{yy} + k_z \cdot S_y^2 \cdot S_{xz} - k_z \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xy}. \end{aligned}$$

Определитель Δ_{xy}

$$\begin{aligned}\Delta_{xy} = & k \cdot S_x \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} - k \cdot S_x \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - k \cdot S_y \cdot S_{xx} \cdot S_{zz} + k \cdot S_y \cdot S_{xz}^2 + \\ & + k \cdot S_z \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} - k \cdot S_z \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} - k_x \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} + k_x \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} + \\ & + k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{zz} - k_x \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{yz} - k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xz} + k_x \cdot S_z^2 \cdot S_{xy} + \\ & + k_y \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{zz} - k_y \cdot |S| \cdot S_{xz}^2 - k_y \cdot S_x^2 \cdot S_{zz} + 2 \cdot k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xz} - \\ & - k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xz} - k_y \cdot S_z^2 \cdot S_{xx} - k_z \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} + \\ & + k_z \cdot S_x^2 \cdot S_{yz} - k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xz} - k_z \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xy} + k_z \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xx}.\end{aligned}$$

Определитель Δ_{xz}

$$\begin{aligned}\Delta_{xz} = & -k \cdot S_x \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} + k \cdot S_x \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} + k \cdot S_y \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} - \\ & - k \cdot S_y \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} - k \cdot S_z \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} + k \cdot S_z \cdot S_{xy}^2 + S_x \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} - \\ & - k_x \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} - k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} + k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yy} + k_x \cdot S_y^2 \cdot S_{xz} - \\ & - k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xy} - k_y \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} + k_y \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} + k_y \cdot S_x^2 \cdot S_{yz} - \\ & - k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xz} - k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xy} + k_y \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xx} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} - \\ & - k_z \cdot |S| \cdot S_{xy}^2 - k_z \cdot S_x^2 \cdot S_{yy} + 2 \cdot k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xy} - k_z \cdot S_y^2 \cdot S_{xx}.\end{aligned}$$

Известно, что решениями есть следующие выражения

$$b_x = \frac{\Delta_b}{\Delta}, r_{xx} = \frac{\Delta_{xx}}{\Delta}, r_{xy} = \frac{\Delta_{xy}}{\Delta}, r_{xz} = \frac{\Delta_{xz}}{\Delta}.$$

Остальные проекции находим аналогичным образом, приравняв частные производные от E_x и E_y к нулю.

Два множества зачастую не имеют взаимно-однозначного отображения. Это может приводить к тому, что два отрезка, расположенные под прямым углом в одном облаке точек, могут соответствовать трём отрезкам в другом

облаке точек, между соседними парами которых углы по 45 градусов.

1.2 Существующие решения.

1.2.1 Итеративный алгоритм ближайших точек

Итеративный алгоритм ближайших точек (Iterative Closest Points, ICP) [1] состоит из двух чередующихся операций. Инициализируется алгоритм единичной матрицей $R = I$ и нулевым вектором смещения $\vec{b} = \vec{0}$. Первая итерация состоит в поиске разметки с фиксированной трансформацией

$$\sum_{s \in S} \left\| \vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b} \right\|^2 \rightarrow \min_k. \quad (1.3)$$

На следующей итерации происходит поиск поворота и смещения при текущей разметке

$$\sum_{s \in S} \left\| \vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b} \right\|^2 \rightarrow \min_{R, \vec{b}}. \quad (1.4)$$

Эти два шага повторяются, пока не будет достигнут желаемый результат, то есть пока расстояние между двумя облаками точек не будет сведено к минимуму.

1.2.2 Итеративный алгоритм ближайших точек с нормальными

Отличием данного алгоритма (Normal ICP) [2] является то, что он рассматривает каждую точку вместе с локальными особенностями поверхности

$$E(k, R, b) = \sum_{s \in S} \alpha_{point} \cdot \left\| \vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b} \right\|^2 + \alpha_{plane} \cdot \left| \vec{n}_s^T \cdot (\vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b}) \right| \rightarrow \min_{k, R, b}, \quad (1.5)$$

где α_{point} и α_{plane} — константы, а \vec{n}_s — нормаль к точке \vec{s} на исходном облаке.

Для улучшения работы алгоритма убираются

- 1) вершины, нормали которых слишком отличаются от нормалей ближайших соседей из целевого облака;
- 2) вершины, которые находятся далеко от соседей из целевого облака;
- 3) вершины, которые находятся на краю объектов.

1.3 Идеи

1.3.1 Симметричный итеративный алгоритм ближайших точек

Для каждой точки из исходного облака ищем ближайшую точку на целевом облаке. Вычисляем матрицу поворота и вектор смещения для исходного облака. Далее для каждой точки из целевого облака находим ближайшую точку на исходном облаке, оцениваем матрицу поворота и вектор смещения для целевого облака и повторяем все действия снова.

1.3.2 Выбор исходного и целевого облаков точек

В качестве исходного облака можно брать то, где точек меньше, а в качестве целевой — то, где точек больше. Таким образом нужно будет найти меньше соответствующих пар точек.

1.3.3 Использование инвариантов

Некоторые характеристики облака точек сохраняются при поворотах и перемещениях, то есть являются инвариантными относительно них. Значит, что по этим признакам можно совмещать два облака точек, не беря во внимание сами трансформации, которые можно будет быстро найти при наличии разметки k . К таким свойствам относятся длины отрезков и площади замкнутых фигур [3].

2 РАССТОЯНИЕ ХАУСДОРФА

2.1 Теоретические основы

Метрическое пространство — это пара (S, d) , состоящая из множества S и метрики $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$, то есть для любых $x, y, z \in S$ выполняется

- 1) $d(x, y) \geq 0$;
- 2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ — аксиома тождества;
- 3) $d(x, y) = d(y, x)$ — аксиома симметрии;
- 4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ — неравенство треугольника.

Метрическое пространство (S, d) называется сепарабельным, если существует не более чем счётное множество $\Gamma \subset S$ такое, что

$$(\forall x \in S) (\forall \varepsilon > 0) (\exists y \in \Gamma) : d(x, y) < \varepsilon.$$

Метрическое пространство (S, d) называется полным, если в нём любая фундаментальная последовательность сходится. Примером полного сепарабельного метрического пространства есть \mathbb{R}^n с евклидовым расстоянием.

2.2 Расстояние Хаусдорфа

Расстояние Хаусдорфа определяется на множестве всех непустых замкнутых подмножеств пространства \mathbb{R}^n .

Пусть E и F — непустые замкнутые подмножества \mathbb{R}^n . Расстояние Хаусдорфа между E и F определяется как

$$H(E, F) = \inf \{ \varepsilon \geq 0 \mid E \subset F + \varepsilon, F \subset E + \varepsilon \}, \quad (2.1)$$

где $E + \varepsilon$ — объединение замкнутых шаров с радиусом ε и центром в точке $x \in E$

$$E + \varepsilon = \bigcup_{x \in E} \{\overline{B}_\varepsilon(x)\}.$$

Проверим аксиомы метрики для расстояния Хаусдорфа $H(E, F)$, заданного формулой (2.1).

- 1) $H(E, F) \geq 0$. Это следует из определения (2.1), так как точная нижняя грань величины $\varepsilon \geq 0$ неотрицательна.
- 2) $H(E, F) = 0$ тогда и только тогда, когда $E = F$. Последнее равенство равносильно двум условиям: $E \subset F$ и $F \subset E$. Это можно записать через элементы множеств: если $x \in E$, то $x \in F$, и если $x \in F$, то $x \in E$.

Пусть $x \in E$ и $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $F + \varepsilon \supset E$, то есть $x \in F + \varepsilon$. Воспользуемся определением (2.2)

$$x \in \bigcup_{y \in F} \overline{B}_\varepsilon(y).$$

Если x принадлежит объединению множеств, то он принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Значит, найдётся такой $y_\varepsilon \in F$, что $x \in \overline{B}_\varepsilon(y_\varepsilon)$, то есть $d(y_\varepsilon, x) \leq \varepsilon$. Это выполнено при любом $\varepsilon \geq 0$, следовательно, x либо лежит в F , либо является его предельной точкой. Но F — замкнутое множество, откуда следует, что $x \in F$.

Вторая часть доказывается аналогично.

С другой стороны, если $E = F$, то $E \subset F$ и $F \subset E$, значит $\varepsilon = 0$ и $H(E, F) = 0$.

- 3) $H(E, F) = H(F, E)$ следует из симметричности определения расстояния Хаусдорфа.
- 4) $H(E, F) \leq H(E, F) + H(F, G)$ для любых замкнутых множеств E, F, G

из \mathbb{R}^n . Нужно проверить, выполняется ли следующее следствие

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{E,G} \geq H(E, G), \\ \varepsilon_{G,F} \geq H(G, F) \end{array} \right\} \stackrel{?}{\Rightarrow} E \subset F + \varepsilon_{G,F} + \varepsilon_{G,E}.$$

Используем те же действия, что и при проверке второго условия. Для первой строки системы получаем, что из того, что $x \in E$ и $G + \varepsilon_{E,G} \supset E$, следует что $x \in G$. Используя условие из второй строки, получаем, что при этом $F + \varepsilon_{G,F} \supset G$, то есть $x \in F + \varepsilon_{G,F}$, следовательно, при $\varepsilon_{E,G} \geq 0$ выполняется и $x \in F + \varepsilon_{G,F} + \varepsilon_{E,G}$. Вспоминая, что изначально x лежал в множестве E , видим, что следствие (4) выполняется, то есть неравенство треугольника справедливо.

Аксиомы метрики выполняются, значит, расстояние Хаусдорфа — метрика на замкнутых множествах из \mathbb{R}^n .

2.2.1 Пример 1

Найдём расстояние Хаусдорфа между двумя эллипсами (рис. 2.1) [4]

$$\begin{aligned} E &: \frac{x^2}{4} + 4y^2 = 1, \\ F &: 4(x-2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1. \end{aligned}$$

Пунктиром нарисованы эллипсы $E + \varepsilon$ и $F + \varepsilon$ такие, чтобы выполнялось (2.1). В данном случае ε — это расстояние между точками A и B , которое равно $\varepsilon = 1.5 - (-2) = 3.5$. Поэтому $H(E, D) = 3.5$.

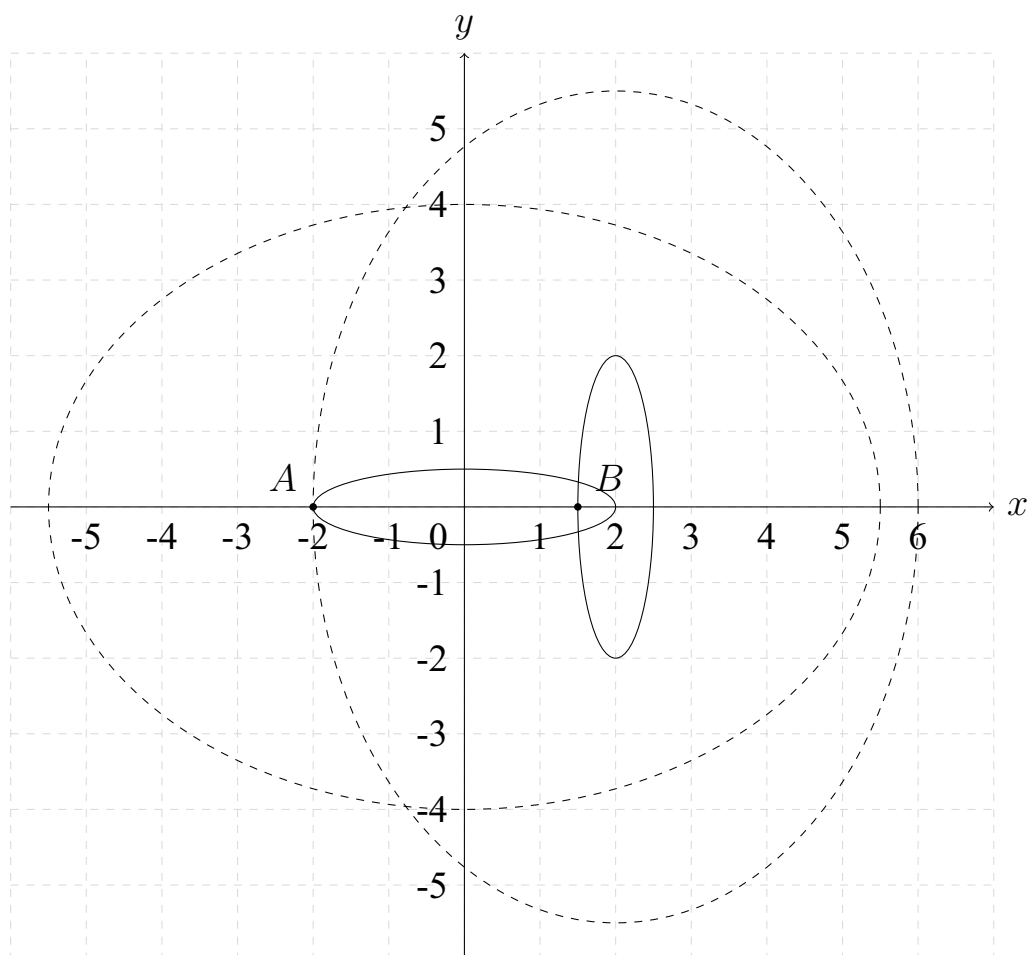


Рисунок 2.1 — Эллипсы, между которыми ищем расстояние Хаусдорфа

2.2.2 Пример 2

Пусть (X, d) — метрическое пространство, $Y \subseteq X$ и $\varepsilon > 0$. Подмножество $S \subseteq X$ называется ε -сетью для Y , если для каждого $y \in Y$ найдётся такой $s \in S$, что $d(y, s) < \varepsilon$. Если $Y = X$, то S называется ε -сетью в X .

Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство. В X возьмём конечную ε -сеть. Это значит, что $(\forall x \in X) (\exists s \in S) : d(x, s) < \varepsilon$. Тогда расстояние Хаусдорфа между компактом X и ε -сетью равно $H(X, S) = \varepsilon$.

2.3 Случайные величины

Имеем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ — борелевская σ -алгебра на \mathbb{R}^n , \mathbb{P} — вероятностная мера на \mathcal{F} .

Есть два определения случайной величины:

1) функция $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется случайной величиной, если

$$\forall \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \quad \xi^{-1}(\Delta) = \{\omega \mid \xi(\omega) \in \Delta\} \in \mathcal{F};$$

2) функция $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется случайной величиной, если

$$\forall c \in \mathbb{R} : \quad \{\omega \mid \xi(\omega) \leq c\} = \xi^{-1}((-\infty, c]) \in \mathcal{F}.$$

Проверим, является ли расстояние Хаусдорфа

$$\gamma = H(AE + \vec{b} + \vec{\xi}, F) = H(\xi(E), F)$$

случайной величиной, где ξ — случайное отображение из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n .

По определению (2.1)

$$\begin{aligned} \gamma &= \inf \{ \varepsilon \geq 0 \mid \xi(E) + \varepsilon \subset F, F + \varepsilon \subset \xi(E) \} = \\ &= \inf \left\{ \varepsilon \geq 0 \mid \bigcup_{x \in \xi(E)} \overline{B}_\varepsilon(x) \subset F, \bigcup_{x \in F} \overline{B}_\varepsilon(x) \subset \xi(E) \right\}. \end{aligned}$$

Чтобы это проверить, нужно выяснить, является ли случайной величи-

ной число $\varepsilon_n > 0$. Если получится, то

$$\forall c \in \mathbb{R} : \quad \left\{ \omega \mid \inf_n \varepsilon_n(\omega) \leq c \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ \omega \mid \varepsilon_n(\omega) \leq c \}.$$

Каждое множество, которые стоит под знаком объединения по определению принадлежит σ -алгебре \mathcal{F} , и их счётное объединение принадлежит σ -алгебре \mathcal{F} , так как она замкнута относительно счётной операции объединения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Zhang, Zhengyou. Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces / Zhengyou Zhang // *International journal of computer vision*. — 1994. — October. — Vol. 13. — Pp. 119–152.
- 2 Li, Hao. Global Correspondence Optimization for Non-Rigid Registration of Depth Scans / Hao Li, Robert W. Sumner, Mark Pauly // *Computer Graphics Forum (Proc. SGP'08)*. — 2008. — July. — Vol. 27, no. 5.
- 3 Hartley, R. Multiple View Geometry in Computer Vision / R. Hartley, A. Zisserman. — Cambridge University Press, 2004.
- 4 Crownover, R.M. Introduction to fractals and chaos / R.M. Crownover // Jones and Bartlett books in mathematics. — Jones and Bartlett, 1995.