

ОГЛАВЛЕНИЕ

Вступление	2
1 Теория	3
1.1 Постановка задачи.	3
1.2 Существующие решения.	10
1.2.1 Итеративный алгоритм ближайших точек	10
1.2.2 Итеративный алгоритм ближайших точек с нормальями	19
1.3 Идеи	20
1.3.1 Полный перебор вершин	20
1.3.2 Симметричный итеративный алгоритм ближайших точек	20
1.3.3 Выбор исходного и целевого облаков точек	20
2 Расстояние Хаусдорфа	21
2.1 Теоретические основы	21
2.2 Расстояние Хаусдорфа	21
2.2.1 Пример 1.	23
2.2.2 Пример 2.	24
2.3 Случайные величины.	25
Список литературы	27

ВСТУПЛЕНИЕ

Актуальность работы Оценка положения камеры по облакам точек лежит в основе сканирования объектов с помощью 3D сканера. Для решения этой задачи используется итеративный алгоритм ближайших точек и его модификации, однако они учитывают только расстояния между точками двух множеств. Взаимосвязь между точками одного облака содержит дополнительную информацию, которая может повысить качество оценки перемещения камеры.

Объект исследования — методы оценки параметров камеры.

Предмет исследования — алгоритмы сопоставления облаков точек.

Цель исследования. Разработка эффективного алгоритма сопоставления двух облаков точек.

Задания следующие:

- 1) исследовать существующие алгоритмы сопоставления облаков точек;
- 2) предложить альтернативный алгоритм сопоставления облаков точек.

1 ТЕОРИЯ

1.1 Постановка задачи.

Есть два множества: исходное $S \subset \mathbb{R}^3$ (source) и целевое $T \subset \mathbb{R}^3$ (target). К точкам исходного множества $\vec{s} \in S$ применили поворот $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\det R = 1$ и перемещение $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$, а также в процессе сканирования появился аддитивный гауссовский шум с неизвестной дисперсией

$$\vec{k}_s = R \cdot \vec{s} + \vec{b} + \vec{\xi}_s, \quad \vec{\xi}_s \sim N(\vec{0}, \sigma^2 \cdot I)$$

где $k : S \rightarrow T$ — разметка, то есть функция, которая сопоставляет каждой точке из исходного множества точку из целевого множества.

Задача состоит в таком выборе матрицы R и вектора \vec{b} , при которых расстояние между \vec{k}_s и $R \cdot \vec{s} + \vec{b}$ для всех $\vec{s} \in S$ было бы наименьшим.

В том случае, когда S и T конечны, можно воспользоваться обычным методом наименьших квадратов

$$E(k, R, \vec{b}) = \sum_{s \in S} \left\| \vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b} \right\|^2 \rightarrow \min_{k, R, b}. \quad (1.1)$$

Сумма квадратов отклонений между векторами — это то же самое, что сумма квадратов отклонений между проекциями по каждой координате

$$E(k, R, \vec{b}) = E_x(k, R, \vec{b}) + E_y(k, R, \vec{b}) + E_z(k, R, \vec{b}) \rightarrow \min_{k, R, b}.$$

Найдём, чему равна проекция произведения матрицы R на вектор s на

все координаты

$$R \cdot \vec{s} = \begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & r_{yy} & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{zy} & r_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx} \cdot s_x + r_{xy} \cdot s_y + r_{xz} \cdot s_z \\ r_{yx} \cdot s_x + r_{yy} \cdot s_y + r_{yz} \cdot s_z \\ r_{zx} \cdot s_x + r_{zy} \cdot s_y + r_{zz} \cdot s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_x \cdot \vec{s} \\ \vec{r}_y \cdot \vec{s} \\ \vec{r}_z \cdot \vec{s} \end{bmatrix},$$

где первая строка получившегося вектора — проекция $R \cdot \vec{s}$ на ось x , вторая строка — проекция на ось y , третья — на ось z .

Распишем сумму квадратов отклонений через проекции

$$\begin{aligned} E(k, R, \vec{b}) &= \sum_{s \in S} (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + \vec{r}_y \cdot \vec{s} + \vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_x + b_y + b_z - k_{s_x} - k_{s_y} - k_{s_z})^2 = \\ &= \sum_{s \in S} [(\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) + (\vec{r}_y \cdot \vec{s} + b_y - k_{s_y}) + (\vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_z - k_{s_z})]^2 = \\ &= \sum_{s \in S} (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x})^2 + \sum_{s \in S} (\vec{r}_y \cdot \vec{s} + b_y - k_{s_y})^2 + \sum_{s \in S} (\vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_z - k_{s_z})^2. \end{aligned}$$

Множество параметров, которые входят в каждую из трёх сумм, разные. Тогда можем минимизировать проекции суммы квадратов отклонений на все координаты отдельно

$$\begin{cases} E_x = \sum_{s \in S} (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x})^2 \rightarrow \min_{r_x, b_x}, \\ E_y = \sum_{s \in S} (\vec{r}_y \cdot \vec{s} + b_y - k_{s_y})^2 \rightarrow \min_{r_y, b_y}, \\ E_z = \sum_{s \in S} (\vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_z - k_{s_z})^2 \rightarrow \min_{r_z, b_z}. \end{cases}$$

Имеем линейную функцию, которая возводится в квадрат. Это выпуклая функция. Значит, можно взять частные производные по r_i и b_i для всех $i \in \{x, y, z\}$ и приравнять их к нулю. Получим 4 уравнения для каждой коор-

динаты. Запишем для E_x , для остальных — аналогично

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial b_x} = \sum_{s \in S} 2 (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xx}} = \sum_{s \in S} 2 (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) \cdot s_x = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xy}} = \sum_{s \in S} 2 (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) \cdot s_y = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xz}} = \sum_{s \in S} 2 (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) \cdot s_z = 0. \end{array} \right.$$

Решаем первое уравнение относительно b_x . Получаем

$$\sum_{s \in S} b_x = \sum_{s \in S} (k_{s_x} - \vec{r}_x \cdot \vec{s}).$$

Слева получили сумму одинаковых слагаемых

$$|S| \cdot b_x + \vec{r}_x \sum_{s \in S} \vec{s} = \sum_{s \in S} k_{s_x}.$$

Распишем скалярное произведение

$$|S| \cdot b_x + \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_z = \sum_{s \in S} k_{s_x}.$$

Решаем остальные уравнения относительно r_{xi} для $i \in \{x, y, z\}$. Видим, что для разных i производная по r_{xi} одинаковая, потому находим решение для r_{xx} , а для остальных решение будет аналогичным

$$\vec{r}_x \sum_{s \in S} \vec{s} \cdot s_x = \sum_{s \in S} (k_{s_x} - b_x) \cdot s_x.$$

Распишем скалярное произведение

$$\sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x^2 + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_x \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_x \cdot s_z + \sum_{s \in S} b_x \cdot s_x = \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_x.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |S| \cdot b_x + \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_z = \sum_{s \in S} k_{s_x}, \\ \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x^2 + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_x \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_x \cdot s_z + \sum_{s \in S} b_x \cdot s_x = \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_x, \\ \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_y^2 + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_y \cdot s_z + \sum_{s \in S} b_x \cdot s_y = \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_y, \\ \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x \cdot s_z + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_y \cdot s_z + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_z^2 + \sum_{s \in S} b_x \cdot s_z = \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_z. \end{cases}$$

Запишем её в матричном виде

$$\begin{bmatrix} |S| & \sum_{s \in S} s_x & \sum_{s \in S} s_y & \sum_{s \in S} s_z \\ \sum_{s \in S} s_x & \sum_{s \in S} s_x^2 & \sum_{s \in S} s_x \cdot s_y & \sum_{s \in S} s_x \cdot s_z \\ \sum_{s \in S} s_y & \sum_{s \in S} s_x \cdot s_y & \sum_{s \in S} s_y^2 & \sum_{s \in S} s_y \cdot s_z \\ \sum_{s \in S} s_z & \sum_{s \in S} s_x \cdot s_z & \sum_{s \in S} s_y \cdot s_z & \sum_{s \in S} s_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ r_{xx} \\ r_{xy} \\ r_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{s \in S} k_{s_x} \\ \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_x \\ \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_y \\ \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_z \end{bmatrix}.$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned}\sum_{s \in S} s_i &= S_i, & i \in \{x, y, z\}, \\ \sum_{s \in S} s_i s_j &= S_{ij}, & i, j \in \{x, y, z\}, \\ \sum_{s \in S} k_{s_x} &= k, \\ \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_i &= k_i, & i \in \{x, y, z\}.\end{aligned}$$

Уравнение приняло следующий вид

$$\begin{bmatrix} |S| & S_x & S_y & S_z \\ S_x & S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_y & S_{xy} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_z & S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ r_{xx} \\ r_{xy} \\ r_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}.$$

Используем метод Крамера для решения системы линейных уравнений. Определитель Δ

$$\begin{aligned}\Delta &= |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - \sum_{i \in \{x, y, z\}} L_i + 2 \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - \\ &- \sum_{i, j, k \in \{x, y, z\}} L_{ijk} + 2 \sum_{i, j \in \{x, y, z\}} L_{ij},\end{aligned}$$

где введены обозначения при $i, j, k \in \{x, y, z\}$, $i \neq j \neq k$

$$\begin{aligned} L_i &= S_{jk} \cdot (|S| \cdot S_{ii} - S_i^2), \\ L_{ij} &= S_i \cdot S_j \cdot (S_{ij} \cdot S_k - S_{ik} \cdot S_{jk}), \\ L_{ijk} &= S_i^2 \cdot S_{jj} \cdot S_{kk}. \end{aligned}$$

Определитель Δ_b

$$\begin{aligned} \Delta_b &= k \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - \sum_{i \in \{x, y, z\}} L_i^b + 2 \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - \sum_{i, j, k \in \{x, y, z\}} L_{ijk}^b + \\ &+ \sum_{i, j \in \{x, y, z\}} L_{ij}^b + \sum_{i, j \in \{x, y, z\}} (L_{ij}^b)', \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} L_{ij}^b &= S_{ij}^2 \cdot S_k \cdot k_k, \\ L_{ijk}^b &= S_i \cdot S_{jj} \cdot S_{kk}, \\ (L_{ij}^b)' &= (S_i \cdot k_j + S_k \cdot k_i) \cdot (S_{ij} \cdot S_{kk} - S_{jk} \cdot S_{ik}) \end{aligned}$$

при $i, j, k \in \{x, y, z\}$, $i \neq j \neq k$. Определитель Δ_{xx}

$$\begin{aligned} \Delta_{xx} &= -k \cdot S_x \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} + k \cdot S_x \cdot S_{yz}^2 + k \cdot S_y \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} - k \cdot S_y \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - \\ &- k \cdot S_z \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} + k \cdot S_z \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} + k_x \cdot |S| \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - k_x \cdot |S| \cdot S_{yz}^2 - \\ &- k_x \cdot S_y^2 \cdot S_{zz} + 2 \cdot k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{yz} - k_x \cdot S_z^2 \cdot S_{yy} - k_y \cdot |S| \cdot S_{yz} \cdot S_{zz} + \\ &+ k_y \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} + k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{zz} - k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} - k_y \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xz} + \\ &+ k_y \cdot S_z^2 \cdot S_{xy} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} - k_z \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} - k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} + \\ &+ k_z \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{yy} + k_z \cdot S_y^2 \cdot S_{xz} - k_z \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xy}. \end{aligned}$$

Определитель Δ_{xy}

$$\begin{aligned}\Delta_{xy} = & k \cdot S_x \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} - k \cdot S_x \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - k \cdot S_y \cdot S_{xx} \cdot S_{zz} + k \cdot S_y \cdot S_{xz}^2 + \\ & + k \cdot S_z \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} - k \cdot S_z \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} - k_x \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} + k_x \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} + \\ & + k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{zz} - k_x \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{yz} - k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xz} + k_x \cdot S_z^2 \cdot S_{xy} + \\ & + k_y \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{zz} - k_y \cdot |S| \cdot S_{xz}^2 - k_y \cdot S_x^2 \cdot S_{zz} + 2 \cdot k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xz} - \\ & - k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xz} - k_y \cdot S_z^2 \cdot S_{xx} - k_z \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} + \\ & + k_z \cdot S_x^2 \cdot S_{yz} - k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xz} - k_z \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xy} + k_z \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xx}.\end{aligned}$$

Определитель Δ_{xz}

$$\begin{aligned}\Delta_{xz} = & -k \cdot S_x \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} + k \cdot S_x \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} + k \cdot S_y \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} - \\ & - k \cdot S_y \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} - k \cdot S_z \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} + k \cdot S_z \cdot S_{xy}^2 + S_x \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} - \\ & - k_x \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} - k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} + k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yy} + k_x \cdot S_y^2 \cdot S_{xz} - \\ & - k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xy} - k_y \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} + k_y \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} + k_y \cdot S_x^2 \cdot S_{yz} - \\ & - k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xz} - k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xy} + k_y \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xx} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} - \\ & - k_z \cdot |S| \cdot S_{xy}^2 - k_z \cdot S_x^2 \cdot S_{yy} + 2 \cdot k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xy} - k_z \cdot S_y^2 \cdot S_{xx}.\end{aligned}$$

Известно, что решениями есть следующие выражения

$$b_x = \frac{\Delta_b}{\Delta}, r_{xx} = \frac{\Delta_{xx}}{\Delta}, r_{xy} = \frac{\Delta_{xy}}{\Delta}, r_{xz} = \frac{\Delta_{xz}}{\Delta}.$$

Остальные проекции находим аналогичным образом, приравняв частные производные от E_x и E_y к нулю.

Два множества зачастую не имеют взаимно-однозначного отображения. Это может приводить к тому, что два отрезка, расположенные под прямым углом в одном облаке точек, могут соответствовать трём отрезкам в другом

облаке точек, между соседними парами которых углы по 45 градусов.

1.2 Существующие решения.

1.2.1 Итеративный алгоритм ближайших точек

Итеративный алгоритм ближайших точек (Iterative Closest Points, ICP) [1] состоит из двух чередующихся операций. Инициализируется алгоритм единичной матрицей поворота $R = I$ и нулевым вектором смещения $\vec{b} = \vec{0}$. Первая итерация состоит в поиске такой разметки $k : S \rightarrow T$, чтобы

$$\sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right\|^2 \rightarrow \min_k,$$

где R и \vec{b} фиксированы. Функция k — это множество упорядоченных пар $(s, t) \in S \times T$, таких, что пары существуют для всех элементов множества S , и, если первые элементы пар совпадают, то совпадают и вторые элементы. Тогда можем искать такой набор $\left\{ \vec{k}_s \mid \vec{s} \in S \right\}$, чтобы

$$\sum_{s \in S} \left\| R\vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right\|^2 \rightarrow \min_{k_s}.$$

Запишем сумму явно (пусть множество S содержит n точек)

$$\left\| R \cdot \vec{s}_1 + \vec{b} - \vec{k}_{s_1} \right\|^2 + \left\| R \cdot \vec{s}_2 + \vec{b} - \vec{k}_{s_2} \right\|^2 + \dots + \left\| R \cdot \vec{s}_n + \vec{b} - \vec{k}_{s_n} \right\|^2 \rightarrow \min_{k_{s_1}, k_{s_2}, \dots, k_{s_n} \in T}.$$

Параметры, которые входят в каждое слагаемое, разные, так что

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| R \cdot \vec{s}_1 + \vec{b} - \vec{k}_{s_1} \right\|^2 \rightarrow \min_{k_{s_1} \in T}, \\ \left\| R \cdot \vec{s}_2 + \vec{b} - \vec{k}_{s_2} \right\|^2 \rightarrow \min_{k_{s_2} \in T}, \\ \vdots \\ \left\| R \cdot \vec{s}_n + \vec{b} - \vec{k}_{s_n} \right\|^2 \rightarrow \min_{k_{s_n} \in T}. \end{array} \right.$$

Таким образом, для каждой точки $\vec{s} \in S$ находим точку $\vec{t} \in T$ такую, чтобы расстояние между парами $R \cdot \vec{s} + \vec{b}$ и \vec{t} для всех $\vec{s} \in S$ было наименьшим

$$\left\| R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{t} \right\|^2 = \min_{t_i \in T} \left\| R \vec{s} + \vec{b} - \vec{t}_i \right\|^2.$$

На следующей итерации происходит поиск поворота R и смещения \vec{b} при текущей разметке $\left\{ \vec{k}_s \mid \vec{s} \in S \right\}$

$$\sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right\|^2 \rightarrow \min_{R, b}. \quad (1.2)$$

При этом матрица $R \in SO(3)$, то есть ортогональна матрица размерности 3×3 с определителем $+1$, которая в качестве линейного преобразования действует как поворот, и пусть $|S| = n < \infty$.

Вычислим смещение \vec{b} . Пусть R — фиксирована. Минимизируем

$$E(\vec{b}) = \sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right\|^2.$$

Можем найти оптимальное смещение, взяв производную от E по \vec{b} и прирав-

няв её к нулю

$$0 = \frac{dE}{d\vec{b}} = \sum_{s \in S} 2 \left(R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right) = 2\vec{b} \cdot |S| + 2R \sum_{s \in S} \vec{s} - 2 \sum_{s \in S} \vec{k}_s. \quad (1.3)$$

Обозначим

$$\bar{s} = \frac{\sum_{s \in S} \vec{s}}{|S|}, \quad \bar{k}_s = \frac{\sum_{s \in S} \vec{k}_s}{|S|}.$$

Перепишем (1.3) в терминах введённых обозначений

$$\vec{b} = \bar{k}_s - R \cdot \bar{s}. \quad (1.4)$$

Нашли оптимальный вектор \vec{b} для любой матрицы поворота R . Подставим его в выражение (1.2)

$$\begin{aligned} \sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right\|^2 &= \sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{s} + \bar{k}_s - R \cdot \bar{s} - \vec{k}_s \right\|^2 = \\ &= \sum_{s \in S} \left\| R \cdot (\vec{s} - \bar{s}) - (\vec{k}_s - \bar{k}_s) \right\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, ищем оптимальный поворот R , переформулируя задачу так, чтобы смещение было равно нулю. Пусть

$$\tilde{k}_s = \vec{s} - \bar{s}, \quad \tilde{s} = \vec{k}_s - \bar{k}_s,$$

тогда

$$R = \arg \min_{R \in SO(3)} \sum_{s \in S} \left\| R \cdot \tilde{s} - \tilde{k}_s \right\|^2. \quad (1.5)$$

Упростим выражение, которое минимизируем в (1.5)

$$\begin{aligned}
 \|R \cdot \tilde{s} - \tilde{k}_s\|^2 &= (R \cdot \tilde{s} - \tilde{k}_s)^T (R \cdot \tilde{s} - \tilde{k}_s) = (\tilde{s}^T \cdot R^T - \tilde{k}_s^T) (R \cdot \tilde{s} - \tilde{k}_s) = \\
 &= \tilde{s}^T \cdot R^T \cdot R \cdot \tilde{s} - \tilde{k}_s^T \cdot \tilde{s}^T \cdot R \cdot \tilde{s} - \tilde{s}^T \cdot R^T \cdot \tilde{k}_s + \tilde{k}_s^T \cdot \tilde{k}_s = \\
 &= \tilde{s}^T \cdot \tilde{s} - \tilde{k}_s^T \cdot R \cdot \tilde{s} - \tilde{s}^T \cdot R^T \cdot \tilde{k}_s + \tilde{k}_s^T \cdot \tilde{k}_s.
 \end{aligned}$$

Использовали ортогональность матрицы R , то есть что $R^T \cdot R = I$ — единичная матрица.

Заметим, что $\tilde{s}^T \cdot R^T \cdot \tilde{k}_s$ — это скаляр: \tilde{s}^T имеет размерность 1×3 , R^T имеет размерность 3×3 и \tilde{k}_s — 3×1 . Для любого скаляра $a = a^T$, поэтому

$$\tilde{s}^T \cdot R^T \cdot \tilde{k}_s = \left(\tilde{s}^T \cdot R^T \cdot \tilde{k}_s \right)^T = \tilde{k}_s^T \cdot R \cdot \tilde{s}.$$

Имеем

$$\|R \cdot \tilde{s} - \tilde{k}_s\|^2 = \tilde{s}^T \cdot \tilde{s} - 2\tilde{k}_s^T \cdot R \cdot \tilde{s} + \tilde{k}_s^T \cdot \tilde{k}_s.$$

Подставим полученное выражение в (1.5)

$$\begin{aligned}
 R &= \arg \min_{R \in SO(3)} \sum_{s \in S} \left(\tilde{s}^T \cdot \tilde{s} - 2\tilde{k}_s^T \cdot R \cdot \tilde{s} + \tilde{k}_s^T \cdot \tilde{k}_s \right) = \\
 &= \arg \min_{R \in SO(3)} \left(\sum_{s \in S} \tilde{s}^T \cdot \tilde{s} - 2 \sum_{s \in S} \tilde{k}_s^T \cdot R \cdot \tilde{s} + \sum_{s \in S} \tilde{k}_s^T \cdot \tilde{k}_s \right) = \\
 &= \arg \min_{R \in SO(3)} \left(-2 \sum_{s \in S} \tilde{k}_s^T \cdot R \cdot \tilde{s} \right).
 \end{aligned}$$

Отбросили суммы $\tilde{s}^T \cdot \tilde{s}$ и $\tilde{k}_s^T \cdot \tilde{k}_s$ по всем $s \in S$, потому что эти выражения не зависят от R и не влияют на минимизацию. То же самое справедливо для

константы, на которую умножается сумма, поэтому

$$R = \arg \max_{R \in SO(3)} \sum_{s \in S} \tilde{k}_s^T \cdot R \cdot \tilde{s}.$$

Заметим, что

$$\sum_{s \in S} \tilde{k}_s^T \cdot R \cdot \tilde{s} = \text{tr} \left(\tilde{K}^T \cdot R \cdot \tilde{S} \right),$$

где \tilde{K} и \tilde{S} — это матрицы размерности $3 \times n$ со столбцами \tilde{s} и \tilde{k}_s соответственно

$$\tilde{K}^T \cdot R \cdot \tilde{S} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1^T \\ \tilde{k}_2^T \\ \vdots \\ \tilde{k}_n^T \end{bmatrix} \cdot R \cdot \begin{bmatrix} \tilde{s}_1 & \tilde{s}_2 & \dots & \tilde{s}_n \end{bmatrix}.$$

След квадратной матрицы равен сумме её диагональных элементов. Ищем такую матрицу R , которая будет максимизировать выражение $\text{tr} \left(\tilde{K}^T \cdot R \cdot \tilde{S} \right)$.

След матрицы имеет свойство [2]

$$\text{tr} (A \cdot B) = \text{tr} (B \cdot A)$$

для любых матриц A и B совместимых размерностей.

Приведём доказательство этого свойства. Пусть матрица A имеет размерность $n \times m$, а матрица B — $m \times n$. Тогда матрица $C = A \cdot B$ — матрица размерности $n \times n$ состоит из элементов

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} \cdot b_{rj}.$$

Аналогично, матрица $D = B \cdot A$ имеет размерность $m \times m$ и состоит из элементов

$$d_{ij} = \sum_{r=1}^n b_{ir} \cdot a_{rj}.$$

Диагональные элементы матриц C и D имеют вид

$$c_{ii} = \sum_{r=1}^m a_{ir} \cdot b_{ri}, \quad d_{ii} = \sum_{r=1}^n b_{ir} \cdot a_{ri}.$$

Запишем след для произведений

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A \cdot B) &= \operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m a_{ir} \cdot b_{ri}, \\ \operatorname{tr}(B \cdot A) &= \operatorname{tr}(D) = \sum_{i=1}^m d_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^n b_{ir} \cdot a_{ri}. \end{aligned}$$

Получившиеся двойные суммы одинаковы с точностью до переименования индексов суммирования. Это означает, что $\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A)$.

Таким образом,

$$\operatorname{tr}(\tilde{K}^T \cdot R \cdot \tilde{S}) = \operatorname{tr}(\tilde{K}^T \cdot (R \cdot \tilde{S})) = \operatorname{tr}(R \cdot \tilde{S} \cdot \tilde{K}^T).$$

Обозначим $X = \tilde{S} \cdot \tilde{K}^T$ — матрица размерности 3×3 . Возьмём сингулярное разложение [3] матрицы X

$$X = U \cdot \Sigma \cdot V^T,$$

где $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ и $V \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ — ортогональные матрицы, а $\Sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ — диагональная матрица с неотрицательными элементами, причём $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$.

Подставим разложение в след

$$\text{tr} (R \cdot X \cdot Y^T) = \text{tr} (R \cdot S) = \text{tr} (R \cdot U \cdot \Sigma \cdot V^T) = \text{tr} (\Sigma \cdot V^T \cdot R \cdot U) .$$

Заметим, что V , R и U — ортогональные матрицы, поэтому матрица

$$M = V^T \cdot R \cdot U$$

также ортогональная. Это означает, что $\vec{m}_i \cdot \vec{m}_i^T = 1$ для каждой строки \vec{m}_i матрицы M . Следовательно, модули всех элементов m_{ij} матрицы M не превосходят единицы

$$1 = \vec{m}_i \cdot \vec{m}_i^T = \sum_{j=1}^3 m_{ij}^2 \Rightarrow m_{ij}^2 \leq 1 \Rightarrow |m_{ij}| \leq 1.$$

Вспомним, что Σ — диагональная матрица с неотрицательными элементами $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$. Поэтому

$$\text{tr} (\Sigma \cdot M) = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \right) = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \cdot m_{ii} \leq \sum_{i=1}^3 \sigma_i.$$

Поэтому след максимизируется при $m_{ii} = 1 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$. Так как M — ортогональная матрица, то она должна быть единичной

$$I = M = V^T \cdot R \cdot U \Rightarrow V = R \cdot U \Rightarrow R = V \cdot U^T.$$

Если матрица Σ имеет нулевые элементы на диагонали, то это никак не влияет на результат. Все элементы матрицы M ограничиваются единицами, поэтому для тех m_{ii} , где $\sigma_i = 0$, берём максимальное значение, то есть $m_{ii} = 1$. Снова получаем единичную матрицу.

Заметим, что сейчас R — это ортогональная матрица, но при этом возможны две ситуации: когда $\det R = \det(V \cdot U^T) = 1$, то есть матрица R действует как поворот, и $\det R = \det(V \cdot U^T) = -1$, то есть матрица R действует как поворот и отражение. Предположим, что $\det(V \cdot U^T) = -1$. Это эквивалентно тому, что $\det M = -1$. Ищем такую матрицу M , которая максимизирует выражение

$$\text{tr}(\Sigma \cdot M) = \sigma_1 \cdot m_{11} + \sigma_2 \cdot m_{22} + \sigma_3 \cdot m_{33}.$$

Рассматриваем переменные (m_{11}, m_{22}, m_{33}) . Это множество всех диагоналей ортогональной матрицы порядка 3. Альфред Хорн доказал [4], что вектор (d_1, \dots, d_n) — это диагональ матрицы поворота порядка n тогда и только тогда, когда он лежит в выпуклой оболочке точек $(\pm 1, \dots, \pm 1)$, где чётное число значений (в том числе 0) равно -1 . Для нашего случая эта теорема принимает вид: M — матрица поворота тогда и только тогда, когда её диагональ (m_{11}, m_{22}, m_{33}) лежит в выпуклой оболочке точек $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, где чётное число координат (в том числе 0) равно -1 . Матрица M — матрица поворота и отражения, потому для неё оптимальная диагональ имеет вид $(1, 1, -1)$, когда нечётное число значений равно -1 , соответственно,

$$\text{tr}(\Sigma \cdot M) = \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3.$$

Это значение больше любого другого вектора из $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ за исключением $(1, 1, 1)$, потому что σ_3 — это наименьшее сингулярное значение.

Таким образом, если $\det(V \cdot U^T) = -1$, то

$$M = V^T \cdot R \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow R = V \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot U^T.$$

Таким образом, искомая матрица поворота R имеет вид [5]

$$R = V \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \det(V \cdot U^T) \end{bmatrix} \cdot U^T,$$

а оптимальный вектор сдвига вычисляется по формуле (1.4)

Алгоритм состоит в поочерёдном выполнении двух шагов:

- 1) поиск наилучшей разметки k при фиксированных R и b ;
- 2) поиск матрицы поворота R и вектора сдвига \vec{b} при фиксированной разметке k ,

пока не будет достигнут минимум в (1.1). Таким образом, имеем покоординатный спуск, который останавливается в стационарной точке и не гарантирует достижения даже локального минимума. Метод имеет ограниченное применение и хорошо работает только в том случае, если шум, а также начальный угол поворота и сдвиг множества S относительно множества T малы. На рисунке 1.1 изображён пример двух множеств, для которых алгоритм не даёт ожидаемого результата.

Множества представляют собой два идентичных треугольника, отличающихся поворотом и смещением. Множество T изображено пунктиром, а множество S — сплошной линией. Правильным результатом были бы такие пово-

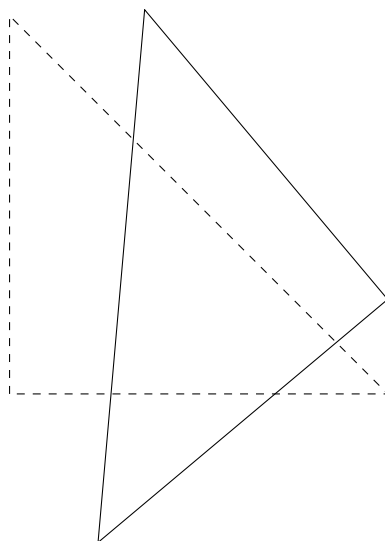


Рисунок 1.1 — Множества, для которых ICP не даёт ожидаемого результата
рот и смещение, когда все соответствующие точки двух треугольников имели бы одинаковое положение. Из-за того, что ближайшие точки не являются соответствующими, глобальный минимум не достигается.

1.2.2 Итеративный алгоритм ближайших точек с нормальными

Отличием данного алгоритма (Normal ICP) [6] является то, что он рассматривает каждую точку вместе с локальными особенностями поверхности

$$E(k, R, b) = \sum_{s \in S} \alpha_{point} \cdot \left\| \vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b} \right\|^2 + \alpha_{plane} \cdot \left| \vec{n}_s^T \cdot (\vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b}) \right| \rightarrow \min_{k, R, b},$$

где α_{point} и α_{plane} — константы, а \vec{n}_s — нормаль к точке \vec{s} на исходном облаке. Для улучшения работы алгоритма убираются

- 1) вершины, нормали которых слишком отличаются от нормалей ближайших соседей из целевого облака;
- 2) вершины, которые находятся далеко от соседей из целевого облака;
- 3) вершины, которые находятся на краю объектов.

1.3 Идеи

1.3.1 Полный перебор вершин

Для каждой точки из исходного множества ищем не ближайшую точку на целевом множестве, а рассматриваем все возможные разметки. В данном случае алгоритм находит глобальный минимум, однако вычислительно неэффективен, так как его сложность — n^n , где n — количество вершин в исходном множестве.

1.3.2 Симметричный итеративный алгоритм ближайших точек

Для каждой точки из исходного облака ищем ближайшую точку на целевом облаке. Вычисляем матрицу поворота и вектор смещения для исходного облака. Далее для каждой точки из целевого облака находим ближайшую точку на исходном облаке, оцениваем матрицу поворота и вектор смещения для целевого облака и повторяем все действия снова.

1.3.3 Выбор исходного и целевого облаков точек

В качестве исходного облака можно брать то, где точек меньше, а в качестве целевой — то, где точек больше. Таким образом нужно будет найти меньше соответствующих пар точек.

2 РАССТОЯНИЕ ХАУСДОРФА

2.1 Теоретические основы

Метрическое пространство — это пара (S, d) , состоящая из множества S и метрики $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$, то есть для любых $x, y, z \in S$ выполняется

- 1) $d(x, y) \geq 0$;
- 2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ — аксиома тождества;
- 3) $d(x, y) = d(y, x)$ — аксиома симметрии;
- 4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ — неравенство треугольника.

Метрическое пространство (S, d) называется сепарабельным, если существует не более чем счётное множество $\Gamma \subset S$ такое, что

$$(\forall x \in S) (\forall \varepsilon > 0) (\exists y \in \Gamma) : d(x, y) < \varepsilon.$$

Метрическое пространство (S, d) называется полным, если в нём любая фундаментальная последовательность сходится. Примером полного сепарабельного метрического пространства есть \mathbb{R}^n с евклидовым расстоянием.

2.2 Расстояние Хаусдорфа

Расстояние Хаусдорфа определяется на множестве всех непустых замкнутых подмножеств пространства \mathbb{R}^n .

Пусть E и F — непустые замкнутые подмножества \mathbb{R}^n . Расстояние Хаусдорфа между E и F определяется как

$$H(E, F) = \inf \{ \varepsilon \geq 0 \mid E \subset F + \varepsilon, F \subset E + \varepsilon \}, \quad (2.1)$$

где $E + \varepsilon$ — объединение замкнутых шаров с радиусом ε и центром в точке $x \in E$

$$E + \varepsilon = \bigcup_{x \in E} \{\overline{B}_\varepsilon(x)\}.$$

Проверим аксиомы метрики для расстояния Хаусдорфа $H(E, F)$, заданного формулой (2.1).

- 1) $H(E, F) \geq 0$. Это следует из определения (2.1), так как точная нижняя грань величины $\varepsilon \geq 0$ неотрицательна.
- 2) $H(E, F) = 0$ тогда и только тогда, когда $E = F$. Последнее равенство равносильно двум условиям: $E \subset F$ и $F \subset E$. Это можно записать через элементы множеств: если $x \in E$, то $x \in F$, и если $x \in F$, то $x \in E$.

Пусть $x \in E$ и $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $F + \varepsilon \supset E$, то есть $x \in F + \varepsilon$. Воспользуемся определением (2.2)

$$x \in \bigcup_{y \in F} \overline{B}_\varepsilon(y).$$

Если x принадлежит объединению множеств, то он принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Значит, найдётся такой $y_\varepsilon \in F$, что $x \in \overline{B}_\varepsilon(y_\varepsilon)$, то есть $d(y_\varepsilon, x) \leq \varepsilon$. Это выполнено при любом $\varepsilon \geq 0$, следовательно, x либо лежит в F , либо является его предельной точкой. Но F — замкнутое множество, откуда следует, что $x \in F$.

Вторая часть доказывается аналогично.

С другой стороны, если $E = F$, то $E \subset F$ и $F \subset E$, значит $\varepsilon = 0$ и $H(E, F) = 0$.

- 3) $H(E, F) = H(F, E)$ следует из симметричности определения расстояния Хаусдорфа.
- 4) $H(E, F) \leq H(E, F) + H(F, G)$ для любых замкнутых множеств E, F, G

из \mathbb{R}^n . Нужно проверить, выполняется ли следующее следствие

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{E,G} \geq H(E, G), \\ \varepsilon_{G,F} \geq H(G, F) \end{array} \right\} \stackrel{?}{\Rightarrow} E \subset F + \varepsilon_{G,F} + \varepsilon_{G,E}.$$

Используем те же действия, что и при проверке второго условия. Для первой строки системы получаем, что из того, что $x \in E$ и $G + \varepsilon_{E,G} \supset E$, следует что $x \in G$. Используя условие из второй строки, получаем, что при этом $F + \varepsilon_{G,F} \supset G$, то есть $x \in F + \varepsilon_{G,F}$, следовательно, при $\varepsilon_{E,G} \geq 0$ выполняется и $x \in F + \varepsilon_{G,F} + \varepsilon_{E,G}$. Вспоминая, что изначально x лежал в множестве E , видим, что следствие (4) выполняется, то есть неравенство треугольника справедливо.

Аксиомы метрики выполняются, значит, расстояние Хаусдорфа — метрика на замкнутых множествах из \mathbb{R}^n .

2.2.1 Пример 1

Найдём расстояние Хаусдорфа между двумя эллипсами (рис. 2.1) [7]

$$\begin{aligned} E : \frac{x^2}{4} + 4y^2 &= 1, \\ F : 4(x - 2)^2 + \frac{y^2}{4} &= 1. \end{aligned}$$

Пунктиром нарисованы эллипсы $E + \varepsilon$ и $F + \varepsilon$ такие, чтобы выполнялось (2.1). В данном случае ε — это расстояние между точками A и B , которое равно $\varepsilon = 1.5 - (-2) = 3.5$. Поэтому $H(E, D) = 3.5$.

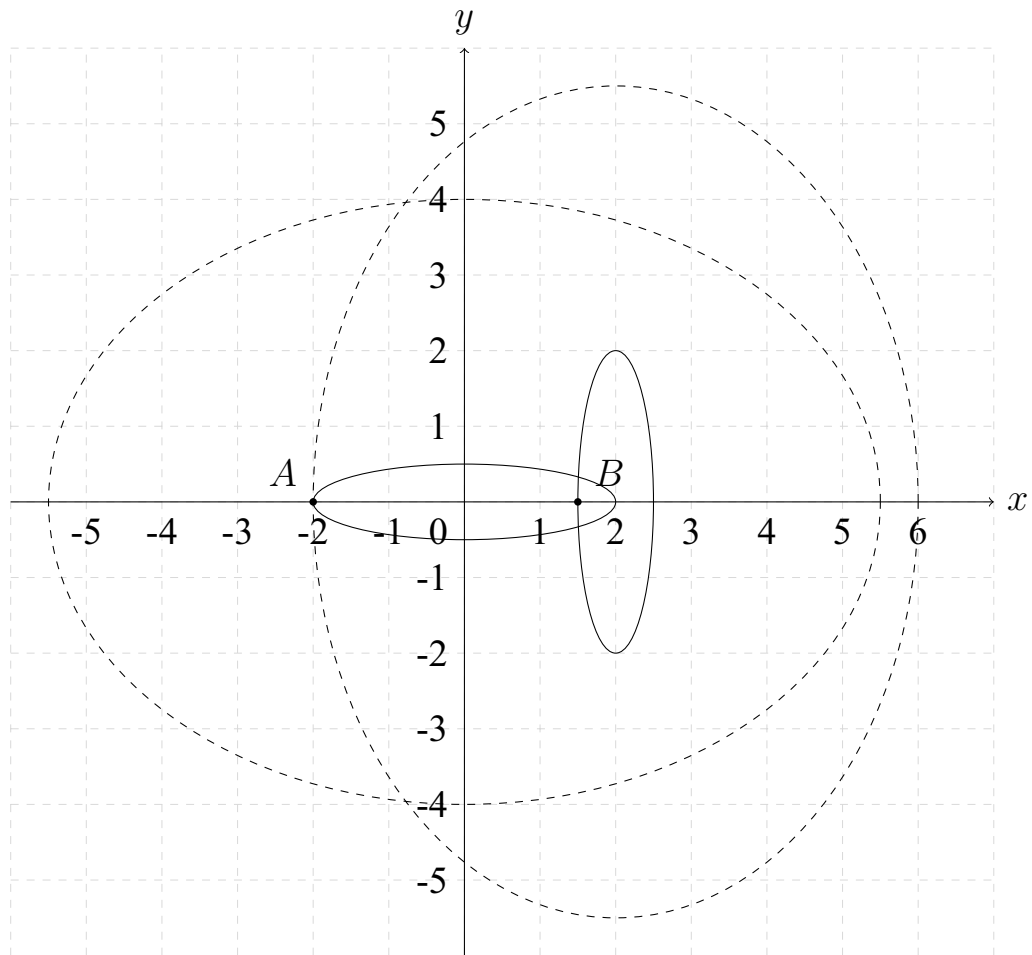


Рисунок 2.1 — Эллипсы, между которыми ищем расстояние Хаусдорфа

2.2.2 Пример 2

Пусть (X, d) — метрическое пространство и $A \subset X$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Множество C — ε -сеть для множества A , если для каждого $x \in A$ найдётся такой $y \in C$, что $d(x, y) < \varepsilon$ или

$$\bigcup_{y \in C} B(y, \varepsilon) \supset A.$$

Тогда расстояние Хаусдорфа между множеством A и ε -сетью C на нём равно $H(C, A) = \varepsilon$.

Покажем это. Найдём расстояние Хаусдорфа

$$H(C, A) = \inf \{ \varepsilon \geq 0 \mid C + \varepsilon \supset A, A + \varepsilon \supset C \}.$$

По определению

$$C + \varepsilon = \bigcup_{y \in C} \overline{B}(y, \varepsilon) \supset \bigcup_{y \in C} B(y, \varepsilon) \supset A.$$

С другой стороны,

$$A + \varepsilon = \bigcup_{x \in A} \overline{B}(x, \varepsilon) \supset A \supset C.$$

Получили, что $C + \varepsilon \supset A$ и $A + \varepsilon \supset C$, то есть $H(C, A) = \varepsilon$.

2.3 Случайные величины

Имеем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ — борелевская σ -алгебра на \mathbb{R}^n , \mathbb{P} — вероятностная мера на \mathcal{F} .

Есть два определения случайной величины:

1) функция $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется случайной величиной, если

$$\forall \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \quad \xi^{-1}(\Delta) = \{ \omega \mid \xi(\omega) \in \Delta \} \in \mathcal{F};$$

2) функция $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется случайной величиной, если

$$\forall c \in \mathbb{R} : \quad \{ \omega \mid \xi(\omega) \leq c \} = \xi^{-1}((-\infty, c]) \in \mathcal{F}.$$

Проверим, является ли расстояние Хаусдорфа

$$\gamma = H \left(AE + \vec{b} + \vec{\xi}, F \right) = H \left(\xi(E), F \right)$$

случайной величиной, где ξ — случайное отображение из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n .

По определению (2.1)

$$\begin{aligned} \gamma &= \inf \{ \varepsilon \geq 0 \mid \xi(E) + \varepsilon \subset F, F + \varepsilon \subset \xi(E) \} = \\ &= \inf \left\{ \varepsilon \geq 0 \mid \bigcup_{x \in \xi(E)} \overline{B}_\varepsilon(x) \subset F, \bigcup_{x \in F} \overline{B}_\varepsilon(x) \subset \xi(E) \right\}. \end{aligned}$$

Чтобы это проверить, нужно выяснить, является ли случайной величиной число $\varepsilon > 0$. Если получится, то

$$\forall c \in \mathbb{R} : \quad \{ \omega \mid \inf \varepsilon(\omega) \leq c \} = \bigcup_{\varepsilon} \{ \omega \mid \varepsilon(\omega) \leq c \}.$$

Каждое множество, которые стоит под знаком объединения по определению принадлежит σ -алгебре \mathcal{F} , и их счётное объединение принадлежит σ -алгебре \mathcal{F} , так как она замкнута относительно счётной операции объединения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Zhang, Zhengyou. Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces / Zhengyou Zhang // *International journal of computer vision*. — 1994. — October. — Vol. 13. — Pp. 119–152.
- 2 Fukunaga, K. Introduction to Statistical Pattern Recognition / K. Fukunaga // Computer science and scientific computing. — Elsevier Science, 2013.
- 3 Golub, Gene H. Matrix Computations / Gene H. Golub, Charles F. Van Loan. — Third edition. — The Johns Hopkins University Press, 1996.
- 4 Horn, Alfred. Doubly Stochastic Matrices and the Diagonal of a Rotation Matrix / Alfred Horn // *American Journal of Mathematics*. — 1954. — July. — Vol. 76. — Pp. 620–630.
- 5 Sorkine-Hornung, Olga. Least-Squares Rigid Motion Using SVD / Olga Sorkine-Hornung, Michael Rabinovich. — 2017. — January. — Technical note.
- 6 Li, Hao. Global Correspondence Optimization for Non-Rigid Registration of Depth Scans / Hao Li, Robert W. Sumner, Mark Pauly // *Computer Graphics Forum (Proc. SGP'08)*. — 2008. — July. — Vol. 27, no. 5.
- 7 Crownover, R.M. Introduction to fractals and chaos / R.M. Crownover // Jones and Bartlett books in mathematics. — Jones and Bartlett, 1995.