ОГЛАВЛЕНИЕ

ВСТУПЛЕНИЕ

Актуальность работы Оценка положения камеры по облакам точек лежит в основе сканирования объектов с помощью 3D сканера. Для решения этой задачи используется итеративный алгоритм ближайших точек и его модификации, однако они учитывают только расстояния между точками двух множеств. Взаимосвязь между точками одного облака содержит дополнительную информацию, которая может повысить качество оценки перемещения камеры.

Объект исследования — методы оценки параметров камеры.

Предмет исследования — алгоритмы сопоставления облаков точек.

Цель исследования. Разработка эффективного алгоритма сопоставления двух облаков точек.

Задания следующие:

1) исследовать существующие алгоритмы сопоставления облаков точек;
2) предложить альтернативный алгоритм сопоставления облаков точек.

1 ТЕОРИЯ

1.1 Постановка задачи.

Есть два множества: исходное S (source) и целевое T (target). К точкам исходного множества $\vec{s} \in S$ применили поворот $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ и перемещение $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$, а также в процессе сканирования появился аддитивный гауссовский шум с неизвестной дисперсией

$$\vec{k}_s = R \cdot \vec{s} + \vec{b} + \vec{\xi}_s, \qquad \vec{\xi}_s \sim N\left(\vec{0}, \sigma^2 \cdot I\right)$$

где $k : S \to T$ — разметка, то есть функция, которая сопоставляет каждой точке из исходного множества точку из целевого множества.

Задача состоит в таком выборе матрицы R и вектора $\vec{b}$, при которых расстояние между множествами $\vec{k}_s$ и $R \cdot \vec{s} + \vec{b}$ было бы наименьшим. В том случае, когда S и T — конечны, можно воспользоваться обычным методом наименьших квадратов

$$E\left(k, R, b\right) = \sum_{s \in S} \left(\vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b}\right)^2 \to \min_{k,R,b}. \qquad (1.1)$$

Сумма квадратов отклонений между векторами — это то же самое, что сумма квадратов отклонений между проекциями по каждой координате

$$E\left(k, R, b\right) = E_x\left(k, R, b\right) + E_y\left(k, R, b\right) + E_z\left(k, R, z\right) \to \min_{k,R,b}.$$

Найдём, чему равна проекция произведения матрицы R на вектор s на все координаты

$$R \cdot \vec{s} = \begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & r_{yy} & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{zy} & r_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx} \cdot s_x + r_{xy} \cdot s_y + r_{xz} \cdot s_z \\ r_{yx} \cdot s_x + r_{yy} \cdot s_y + r_{yz} \cdot s_z \\ r_{zx} \cdot s_x + r_{zy} \cdot s_y + r_{zz} \cdot s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_x \cdot \vec{s} \\ \vec{r}_y \cdot \vec{s} \\ \vec{r}_z \cdot \vec{s} \end{bmatrix},$$

где первая строка получившегося вектора — проекция $R \cdot \vec{s}$ на ось x, вторая строка — проекция на ось y, третья — на ось z.

Распишем сумму квадратов отклонений через проекции

$$E(k, R, b) = \sum_{s \in S} \left(\vec{r}_x \cdot \vec{s} + \vec{r}_y \cdot \vec{s} + \vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_x + b_y + b_z - k_{s_x} - k_{s_y} - k_{s_z} \right)^2 =$$
$$= \sum_{s \in S} \left[(\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) + \left(\vec{r}_y \cdot \vec{s} + b_y - k_{s_y} \right) + (\vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_z - k_{s_z}) \right]^2 =$$
$$= \sum_{s \in S} (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x})^2 + \sum_{s \in S} \left(\vec{r}_y \cdot \vec{s} + b_y - k_{s_y} \right)^2 + \sum_{s \in S} (\vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_z - k_{s_z})^2 .$$

Множество параметров, которые входят в каждую из трёх сумм, разные. Тогда можем минимизировать проекции суммы квадратов отклонений на все координаты отдельно

$$\begin{cases} E_x = \sum\limits_{s \in S} (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x})^2 \to \min\limits_{r_x, b_x}, \\ E_y = \sum\limits_{s \in S} \left(\vec{r}_y \cdot \vec{s} + b_y - k_{s_y} \right)^2 \to \min\limits_{r_y, b_y}, \\ E_z = \sum\limits_{s \in S} (\vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_z - k_{s_z})^2 \to \min\limits_{r_z, b_z}. \end{cases}$$

Имеем линейную функциию, которая возводится в квадрат. Это выпуклая фунция. Значит, можно взять частные производные по r_i и x_i для всех $i \in \{x, y, z\}$ и приравнять их к нулю. Получим 4 уравнения для каждой координаты. Запишем для E_x, для остальных — аналогично

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial b_x} = \sum\limits_{s \in S} 2\left(\vec{r_x} \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}\right) = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xx}} = \sum\limits_{s \in S} 2\left(\vec{r_x} \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}\right) \cdot s_x = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xy}} = \sum\limits_{s \in S} 2\left(\vec{r_x} \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}\right) \cdot s_y = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xz}} = \sum\limits_{s \in S} 2\left(\vec{r_x} \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}\right) \cdot s_z = 0. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение относительно b_x. Получаем

$$\sum_{s \in S} b_x = \sum_{s \in S} \left(k_{s_x} - \vec{r_x} \cdot \vec{s}\right).$$

Слева получили сумму одинаковых слагаемых

$$|S| \cdot b_x + \vec{r}_x \sum_{s \in S} \vec{s} = \sum_{s \in S} k_{s_x}.$$

Распишем скалярное произведение

$$|S| \cdot b_x + \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_z = \sum_{s \in S} k_{s_x}.$$

Решаем остальные уравнения относительно r_{xi} для $i \in \{x, y, z\}$. Видим, что для разных i производная по r_{xi} одинаковая, потому находим решение для r_{xx}, а для остальных решение будет аналогичным

$$\vec{r}_x \sum_{s \in S} \vec{s} \cdot s_x = \sum_{s \in S} \left(k_{s_x} - b_x\right) \cdot s_x.$$

Распишем скалярное произведение

$$\sum_{s\in S} r_{xx}\cdot s_x^2+\sum_{s\in S} r_{xy}\cdot s_x\cdot s_y+\sum_{s\in S} r_{xz}\cdot s_x\cdot s_z+\sum_{s\in S} b_x\cdot s_x=\sum_{s\in S} k_{s_x}\cdot s_x.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases}
|S|\cdot b_x+\sum\limits_{s\in S} r_{xx}\cdot s_x+\sum\limits_{s\in S} r_{xy}\cdot s_y+\sum\limits_{s\in S} r_{xz}\cdot s_z=\sum\limits_{s\in S} k_{s_x},\\
\sum\limits_{s\in S} r_{xx}\cdot s_x^2+\sum\limits_{s\in S} r_{xy}\cdot s_x\cdot s_y+\sum\limits_{s\in S} r_{xz}\cdot s_x\cdot s_z+\sum\limits_{s\in S} b_x\cdot s_x=\sum\limits_{s\in S} k_{s_x}\cdot s_x,\\
\sum\limits_{s\in S} r_{xx}\cdot s_x\cdot s_y+\sum\limits_{s\in S} r_{xy}\cdot s_y^2+\sum\limits_{s\in S} r_{xz}\cdot s_y\cdot s_z+\sum\limits_{s\in S} b_x\cdot s_y=\sum\limits_{s\in S} k_{s_x}\cdot s_y,\\
\sum\limits_{s\in S} r_{xx}\cdot s_x\cdot s_z+\sum\limits_{s\in S} r_{xy}\cdot s_y\cdot s_z+\sum\limits_{s\in S} r_{xz}\cdot s_z^2+\sum\limits_{s\in S} b_x\cdot s_z=\sum\limits_{s\in S} k_{s_x}\cdot s_z.
\end{cases}$$

Запишем её в матричном виде

$$\begin{bmatrix}
|S| & \sum\limits_{s\in S} s_x & \sum\limits_{s\in S} s_y & \sum\limits_{s\in S} s_z\\
\sum\limits_{s\in S} s_x & \sum\limits_{s\in S} s_x^2 & \sum\limits_{s\in S} s_x\cdot s_y & \sum\limits_{s\in S} s_x\cdot s_z\\
\sum\limits_{s\in S} s_y & \sum\limits_{s\in S} s_x\cdot s_y & \sum\limits_{s\in S} s_y^2 & \sum\limits_{s\in S} s_y\cdot s_z\\
\sum\limits_{s\in S} s_z & \sum\limits_{s\in S} s_x\cdot s_z & \sum\limits_{s\in S} s_y\cdot s_z & \sum\limits_{s\in S} s_z^2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_x\\ r_{xx}\\ r_{xy}\\ r_{xz}\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\sum\limits_{s\in S} k_{s_x}\\
\sum\limits_{s\in S} k_{s_x}\cdot s_x\\
\sum\limits_{s\in S} k_{s_x}\cdot s_y\\
\sum\limits_{s\in S} k_{s_x}\cdot s_z
\end{bmatrix}.$$

Введём обозначения:

$$\sum_{s\in S} s_i = S_i, \qquad i \in \{x, y, z\},$$

$$\sum_{s\in S} s_i s_j = S_{ij}, \qquad i, j \in \{x, y, z\},$$

$$\sum_{s\in S} k_{s_x} = k,$$

$$\sum_{s\in S} k_{s_x} \cdot s_i = k_i, \qquad i \in \{x, y, z\}.$$

Уравнение приняло следующий вид

$$\begin{bmatrix} |S| & S_x & S_y & S_z \\ S_x & S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_y & S_{xy} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_z & S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ r_{xx} \\ r_{xy} \\ r_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}.$$

Используем метод Крамера для решения системы линейных уранений. Определитель Δ

$$\Delta = |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - \sum_{i\in\{x,y,z\}} L_i + 2 \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} -$$
$$- \sum_{i,j,k\in\{x,y,z\}} L_{ijk} + 2 \sum_{i,j\in\{x,y,z\}} L_{ij},$$

где введены обозначения при $i, j, k \in \{x, y, z\}$, $i \neq j \neq k$

$$L_i = S_{jk} \cdot \left(|S| \cdot S_{ii} - S_i^2 \right),$$

$$L_{ij} = S_i \cdot S_j \cdot \left(S_{ij} \cdot S_k - S_{ik} \cdot S_{jk} \right),$$

$$L_{ijk} = S_i^2 \cdot S_{jj} \cdot S_{kk}.$$

Определитель Δ_b

$$\Delta_b = k \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - \sum_{i \in \{x,y,z\}} L_i^b + 2 \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - \sum_{i,j,k \in \{x,y,z\}} L_{ijk}^b + \\ + \sum_{i,j \in \{x,y,z\}} L_{ij}^b + \sum_{i,j \in \{x,y,z\}} \left(L_{ij}^b \right)',$$

где введены обозначения

$$L_{ij}^b = S_{ij}^2 \cdot S_k \cdot k_k,$$

$$L_{ijk}^b = S_i \cdot S_{jj} \cdot S_{kk},$$

$$\left(L_{ij}^b \right)' = \left(S_i \cdot k_j + S_k \cdot k_i \right) \cdot \left(S_{ij} \cdot S_{kk} - S_{jk} \cdot S_{ik} \right)$$

при $i, j, k \in \{x, y, z\}$, $i \neq j \neq k$. Определитель Δ_{xx}

$$\Delta_{xx} = -k \cdot S_x \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} + k \cdot S_x \cdot S_{yz}^2 + k \cdot S_y \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} - k \cdot S_y \cdot_{xz} \cdot S_{yz} - \\ -k \cdot S_z \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} + k \cdot S_z \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} + k_x \cdot |S| \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - k_x \cdot |S| \cdot S_{yz}^2 - \\ -k_x \cdot S_y^2 \cdot S_{zz} + 2 \cdot k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{yz} - k_x \cdot S_z^2 \cdot S_{yy} - k_y \cdot |S| \cdot S_{yz} \cdot S_{zz} + \\ +k_y \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} + k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{zz} - k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} - k_y \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xz} + \\ +k_y \cdot S_z^2 \cdot S_{xy} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} - k_z \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} - k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} + \\ +k_z \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{yy} + k_z \cdot S_y^2 \cdot S_{xz} - k_z \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xy}.$$

Определитель Δ_{xy}

$$\Delta_{xy} = k \cdot S_x \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} - k \cdot S_x \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - k \cdot S_y \cdot S_{xx} \cdot S_{zz} + k \cdot S_y \cdot S_{xz}^2 +$$
$$+ k \cdot S_z \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} - k \cdot S_z \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} - k_x \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} + k_x \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} +$$
$$+ k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{zz} - k_x \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{yz} - k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xz} + k_x \cdot S_z^2 \cdot S_{xy} +$$
$$+ k_y \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{zz} - k_y \cdot |S| \cdot S_{xz}^2 - k_y \cdot S_x^2 \cdot S_{zz} + 2 \cdot k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xz} -$$
$$- k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xz} - k_y \cdot S_z^2 \cdot S_{xx} - k_z \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} +$$
$$+ k_z \cdot S_x^2 \cdot S_{yz} - k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xz} - k_z \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xy} + k_z \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xx}.$$

Определитель Δ_{xz}

$$\Delta_{xz} = -k \cdot S_x \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} + k \cdot S_x \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} + k \cdot S_y \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} -$$
$$- k \cdot S_y \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} - k \cdot S_z \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} + k \cdot S_z \cdot S_{xy}^2 + S_x \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} -$$
$$- k_x \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} - k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} + k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yy} + k_x \cdot S_y^2 \cdot S_{xz} -$$
$$- k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xy} - k_y \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} + k_y \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} + k_y \cdot S_x^2 \cdot S_{yz} -$$
$$- k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xz} - k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xy} + k_y \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xx} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} -$$
$$- k_z \cdot |S| \cdot S_{xy}^2 - k_z \cdot S_x^2 \cdot S_{yy} + 2 \cdot k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xy} - k_z \cdot S_y^2 \cdot S_{xx}.$$

Известно, что решениями есть следующие выражения

$$b_x = \frac{\Delta_b}{\Delta},\ r_{xx} = \frac{\Delta_{xx}}{\Delta},\ r_{xy} = \frac{\Delta_{xy}}{\Delta},\ r_{xz} = \frac{\Delta_{xz}}{\Delta}.$$

Остальные проекции находим аналогичным образом, приравняв частные производные от E_x и E_y к нулю.

Два множества зачастую не имеют взаимно-однозначного отображения. Это может приводить к тому, что два отрезка, расположенные под прямым углом в одном облаке точек, могут соответствовать трём отрезкам в другом облаке точек, между соседними парами которых углы по 45 градусов.

1.2 Существующие решения.

1.2.1 Итеративный алгоритм ближайших точек

Итеративный алгоритм ближайших точек (Iterative Closest Points, ICP) [1] состоит из двух чередующихся операций. Инициализируется алгоритм единичной матрицей поворота $R = I$ и нулевым вектором смещения $\vec{b} = \vec{0}$. Первая итерация состоит в поиске такой разметки $k : S \to T$, чтобы

$$\sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{k_s} \right\|^2 \to \min_k,$$

где R и $\vec{b}$ фиксированы. Функция k — это множество упорядоченных пар $(s, t) \in S \times T$, таких, что пары существуют для всех элементов множества S, и, если первые элементы пар совпадают, то совпадают и вторые элементы. Тогда можем искать такой набор $\left\{ \vec{k_s} \;\middle|\; \vec{s} \in S \right\}$, чтобы

$$\sum_{s \in S} \left\| R\vec{s} + \vec{b} - \vec{k_s} \right\|^2 \to \min_{k_s}.$$

Запишем сумму явно (пусть множество S содержит n точек)

$$\left\| R \cdot \vec{s}_1 + \vec{b} - \vec{k}_{s_1} \right\|^2 + \left\| R \cdot \vec{s}_2 + \vec{b} - \vec{k}_{s_2} \right\|^2 + \ldots + \left\| R \cdot \vec{s}_n + \vec{b} - \vec{k}_{s_n} \right\|^2 \to \min_{k_{s_1}, k_{s_2}, \ldots, k_{s_n} \in T}.$$

Параметры, которые входят в каждое слагаемое, разные, так что

$$
\begin{cases}
\left\| R \cdot \vec{s}_1 + \vec{b} - \vec{k}_{s_1} \right\|^2 \to \min\limits_{k_{s_1} \in T}, \\
\left\| R \cdot \vec{s}_2 + \vec{b} - \vec{k}_{s_2} \right\|^2 \to \min\limits_{k_{s_2} \in T}, \\
\vdots \\
\left\| R \cdot \vec{s}_n + \vec{b} - \vec{k}_{s_n} \right\|^2 \to \min\limits_{k_{s_n} \in T}.
\end{cases}
$$

Таким образом, для каждой точки $\vec{s} \in S$ находим точку $\vec{t} \in T$ такую, чтобы расстояние между множеством $R \cdot \vec{s} + \vec{b}$ и множеством T было наименьшим

$$
d\left(R \cdot \vec{s} + \vec{b}, \vec{t}\right) = \min_{t_i \in T} d\left(R\vec{s} + \vec{b}, \vec{t_i}\right).
$$

На следующей итерации происходит поиск поворота R и смещения $\vec{b}$ при текущей разметке $\left\{ \vec{k}_s \;\middle|\; \vec{s} \in S \right\}$

$$
\sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right\|^2 \to \min_{R, b}.
$$

При этом матрица $R \in SO\left(3\right)$, то есть ортогональна матрица размерности 3×3 с определителем $+1$, которая в качестве линейного преобразования действует как поворот.

Вычислим смещение $\vec{b}$. Пусть R — фиксирована. Минимизируем

$$
E\left(\vec{b}\right) = \sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right\|^2.
$$

Можем найти оптимальное смещение, взяв производную от E по $\vec{b}$ и приравняв её к нулю

$$0 = \frac{dE}{d\vec{b}} = \sum_{s \in S} 2\left(R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s\right) = 2\vec{b} \cdot |S| + 2R \sum_{s \in S} \vec{s} - 2 \sum_{s \in S} \vec{k}_s. \tag{1.2}$$

Обозначим

$$\overline{s} = \frac{\sum\limits_{s \in S} \vec{s}}{|S|},\ \overline{k}_s = \frac{\sum\limits_{s \in S} \vec{k}_s}{|S|}.$$

Перепишем (1.2) в терминах введённых обозначений

$$\vec{b} = \overline{k}_s - R \cdot \overline{s}. \tag{1.3}$$

Подставим найденный вектор $\vec{b}$ в функцию E

$$\sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right\|^2 = \sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{s} + \overline{k}_s - R \cdot \overline{s} - \vec{k}_s \right\|^2 =$$
$$= \sum_{s \in S} \left\| R \cdot (\vec{s} - \overline{s}) - \left(\vec{k}_s - \overline{k}_s\right) \right\|^2.$$

Таким образом, ищем оптимальный поворот R, переформулируя задачу так, чтобы смещение было равно нулю. Пусть

$$\vec{x}_s = \vec{s} - \overline{s},\ \vec{y}_s = \vec{k}_s - \overline{k}_s,$$

тогда

$$R = \arg \min_{R \in SO(3)} \sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s \right\|^2. \tag{1.4}$$

Упростим выражение, которое минимизируем в (1.4)

$$\begin{gathered}
\|R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s\|^2 = (R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s)^T (R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s) = \left(\vec{x}_s^T \cdot R^T - \vec{y}_s^T\right)(R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s) = \\
= \vec{x}_s^T \cdot R^T \cdot R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s - \vec{x}_s^T \cdot R^T \cdot \vec{y}_s + \vec{y}_s^T \cdot \vec{y}_s = \\
= \vec{x}_s^T \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s - \vec{x}_s^T \cdot R^T \cdot \vec{y}_s + \vec{y}_s^T \cdot \vec{y}_s.
\end{gathered}$$

Использовали ортогональность матрицы R, то есть что $R^T \cdot R = I$ — единичная матрица.

Заметим, что $\vec{x}_s^T \cdot R^t \cdot \vec{y}_s$ — это скаляр: $\vec{x}_s^T$ имеет размерность 1×3, R^T имеет размерность 3×3 и $\vec{y}_s$ — 3×1. Для любого скаляра $a = a^T$, поэтому

$$\vec{x}_s^T \cdot R^T \cdot \vec{y}_s = \left(\vec{x}_s^T \cdot R^T \cdot \vec{y}_s\right)^T = \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s.$$

Имеем

$$\|R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s\|^2 = \vec{x}_s^T \cdot \vec{x}_s - 2\vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s + \vec{y}_s^T \cdot \vec{y}_s.$$

Подставим полученное выражение в (1.4)

$$\begin{gathered}
R = \arg \min_{R \in SO(3)} \sum_{s \in S} \left(\vec{x}_s^T \cdot \vec{x}_s - 2\vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s + \vec{y}_s^T \cdot \vec{y}_s\right) = \\
= \arg \min_{R \in SO(3)} \left(\sum_{s \in S} \vec{x}_s^T \cdot \vec{x}_s - 2 \sum_{s \in S} \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s + \sum_{s \in S} \vec{y}_s \cdot \vec{y}_s\right) = \\
= \arg \min_{R \in SO(3)} \left(-2 \sum_{s \in S} \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s\right).
\end{gathered}$$

Отбросили суммы $\vec{x}_s^T \cdot \vec{x}_s$ и $\vec{y}_s^T \cdot \vec{y}_s$ по всем $s \in S$, потому что эти выражения не зависят от R и не влияют на минимизацию. То же самое справедливо для константы, на которую умножается сумма, поэтому

$$R = \arg \max_{R \in SO(3)} \sum_{s \in S} \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s.$$

Заметим, что

$$\sum_{s \in S} \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s = tr\left(Y^T \cdot R \cdot X\right),$$

где X и Y — это матрицы $3 \times |S| = 3 \times n$ со столбцами $\vec{x}_s$ и $\vec{y}_s$ соответсвенно

$$Y^T \cdot R \cdot X = \begin{bmatrix} \vec{y}_1^T \\ \vec{y}_2^T \\ \vdots \\ \vec{y}_n^T \end{bmatrix} \cdot R \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \end{bmatrix}.$$

След квадратной матрицы равен сумме её диагональных элементов. Ищем такую матрицу R, которая будет максимизировать выражение $tr\left(Y^T \cdot R \cdot X\right)$. След матрицы имеет свойство [2]

$$tr\left(A \cdot B\right) = tr\left(B \cdot A\right)$$

для любых матриц A и B совместимых размерностей.

Приведём доказательство этого свойства. Пусть матрица A имеет размерность $n \times m$, а матрица B — $m \times n$. Тогда матрица $C = A \cdot B$ — матрица размерности $n \times n$ состоит из элементов

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} \cdot b_{rj}.$$

Аналогично, матрица $D = B \cdot A$ имеет размерность $m \times m$ и состоит из элементов

$$d_{ij} = \sum_{r=1}^{n} b_{ir} \cdot a_{rj}.$$

Диагональные элементы матриц C и D имеют вид

$$c_{ii} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} \cdot b_{ri},\ d_{ii} = \sum_{r=1}^{n} b_{ir} \cdot a_{ri}.$$

Запишем след для произведений

$$tr\,(A \cdot B) = tr\,(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{m} a_{ir} \cdot b_{ri},$$
$$tr\,(B \cdot A) = tr\,(D) = \sum_{i=1}^{m} d_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} b_{ir} \cdot a_{ri}.$$

Получившиеся двойные суммы одинаковы с точностью до переименования индексов суммирования. Это означает, что $tr\,(A \cdot B) = tr\,(B \cdot A)$.

Таким образом,

$$tr\left(Y^T \cdot R \cdot X\right) = tr\left(Y^T \cdot (R \cdot X)\right) = tr\left(R \cdot X \cdot Y^T\right).$$

Обозначим $S = X \cdot Y^T$ – матрица размерности 3×3. Возьмём сингулярное разложение [3] матрицы S

$$S = U \cdot \Sigma \cdot V^T,$$

где $U \in \mathbb{R}^{3\times3}$ и $V \in \mathbb{R}^{3\times3}$ – ортогональные матрицы, а $\Sigma \in \mathbb{R}^{3\times3}$ – диагональная матрица с неотрицательными элементами, причём $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$. Подставим разложение в след

$$tr\left(R \cdot X \cdot Y^T\right) = tr\,(R \cdot S) = tr\left(R \cdot U \cdot \Sigma \cdot V^T\right) = tr\left(\Sigma \cdot V^T \cdot R \cdot U\right).$$

Заметим, что V, R и U — ортогональные матрицы, поэтому матрица

$$M = V^T \cdot R \cdot U$$

также ортогональная. Это означаает, что $\vec{m}_j^T \cdot \vec{m}_j = 1$ для каждого столбца $\vec{m}_j$ матрицы M. Следовательно, все элементы m_{ij} матрицы M не превосходят единицы

$$1 = \vec{m}_j^T \cdot \vec{m}_j = \sum_{i=1}^{3} m_{ij}^2 \Rightarrow m_{ij}^2 \leq 1 \Rightarrow |m_{ij}| \leq 1.$$

Вспомним, что Σ — диагональная матрица с неотрицательными элементами $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$. Поэтому

$$tr\left(\Sigma \cdot M\right) = tr\left(\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \cdot m_{ii} \leq \sum_{i=1}^{3} \sigma_i.$$

Поэтому след максимизируется при $m_{ii} = 1 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$. Так как M — ортогональная матрица, то она должна быть единичной

$$I = M = V^T \cdot R \cdot U \Rightarrow V = R \cdot U \Rightarrow R = V \cdot U^T.$$

Если матрица Σ имеет нулевые элементы на диагонали, то это никак не влияет на результат. Все элементы матрицы M ограничиваются единицами, поэтому для тех m_{ii}, где $\sigma_i = 0$, берём максимальное значение, то есть $m_{ii} = 1$. Снова получаем единичную матрицу.

Заметим, что сейчас R — это ортогональная матрица, но при этом возможны две ситуации: когда $detR = det\left(V \cdot U^T\right) = 1$, то есть матрица R действует как поворот, и $detR = det\left(V \cdot U^T\right) = -1$, то есть матрица R действует как поворот и отражение. Предположим, что $det\left(V \cdot U^T\right) = -1$. Это эквивалентно тому, что $detM = -1$. Ищем такую матрицу M, которая максимизирует выражение

$$tr\left(\Sigma \cdot M\right) = \sigma_1 \cdot m_{11} + \sigma_2 \cdot m_{22} + \sigma_3 \cdot m_{33}.$$

Рассматриваем переменные (m_{11}, m_{22}, m_{33}). Это множество всех диагоналей ортогональной матрицы порядка 3. Альфред Хорн доказал [4], что вектор $(d_1, \ldots, d_n)$ — это диагональ матрицы поворота порядка n тогда и только тогда, когда он лежит в выпуклой оболочке точек $(\pm 1, \ldots, \pm 1)$, где чётное число значений (в том числе 0) равно -1. Для нашего случая эта теорема принимает вид: M — матрица поворота тогда и только тогда, когда её диагональ (m_{11}, m_{22}, m_{33}) лежит в выпуклой оболочке точек $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, где чётное число координат (в том числе 0) равно -1. Матрица M — матрица поворота и отражения, потому для неё оптимальная диагональ имеет вид $(1, 1, -1)$, когда нечётное число значений равно -1, соответственно,

$$tr\left(\Sigma \cdot M\right) = \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3.$$

Это значение больше любого другого вектора из $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ за исключением $(1, 1, 1)$, потому что σ_3 — это наименьшее сингулярное значение.

Таким образом, если $det\left(V \cdot U^T\right) = -1$, то

$$M = V^T \cdot R \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow R = V \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot U^T.$$

Таким образом, искомая матрица поворота R имеет вид [5]

$$R = V \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & det\left(V \cdot U^T\right) \end{bmatrix} \cdot U^T,$$

а оптимальный вектор сдвига вычисляется по формуле (1.3)

Алгоритм состоит в поочерёдном выполнении двух шагог:

1) поиск наилучшей разметки k при фикчированных R и b;
2) поиск матрицы поворота R и вектора сдвига $\vec{b}$ при фиксированной k,

пока не будет достигнут минимум в (1.1). Таким образом, имеем покоординатный спуск, который не гарантирует достижение минимума. Метод имеет ограниченное применение и хорошо работает только в том случае, когда нет шума, то есть $\vec{\xi_s} = 0$ для всех точек $\vec{s} \in S$, а также когда угол поворота и сдвиг можества S относительно множества T малы. На рисунке 1.1 изображён пример двух множеств, для которых алгоритм не даёт ожидаемого результата.

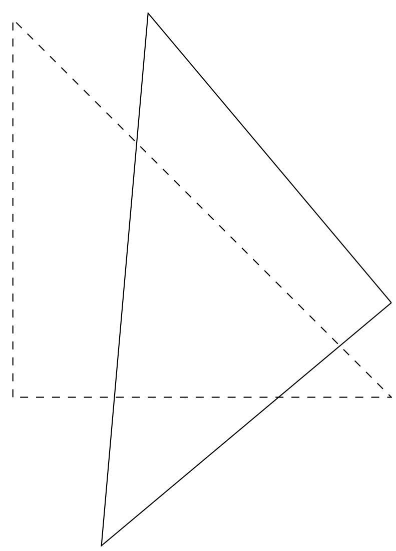

Рисунок 1.1 — Множества, для которых ICP не даёт ожидаемого результата

Множества представляют собой два идентичных треугольника, отличающихся поворотом и смещением. Множество T изображено пунктиром, а множество S — сплошной линией. Правильным результатом были бы такие поворот и смещение, когда все соответствующие точки двух треугольников имели бы одинаковое положение. Из-за того, что ближайшие точки не являются соответствующими, глобальный минимум не достигается.

1.2.2 Итеративный алгоритм ближайших точек с нормалями

Отличием данного алгоритма (Normal ICP) [6] является то, что он рассматривает каждую точку вместе с локальными особенностями поверхности

$$E\left(k, R, b\right) = \sum_{s \in S} \alpha_{point} \cdot \left\| \vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b} \right\|^2 + \alpha_{plane} \cdot \left| \vec{n}_s^T \cdot \left(\vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b} \right) \right| \to \min_{k,R,b},$$

где α_{point} и α_{plane} — константы, а $\vec{n}_s$ — нормаль к точке $\vec{s}$ на исходном облаке. Для улучшения работы алгоритма убираются

1) вершины, нормали которых слишком отличаются от нормалей ближайших соседей из целевого облака;
2) вершины, которые находятся далеко от соседей из целевого облака;
3) вершины, которые находятся на краю объектов.

1.3 Идеи

1.3.1 Полный перебор вершин

Для каждой точки из исходного множества ищем не ближайшую точку на целевом множестве, а рассматриваем все возможные разметки. В данном случае алгоритм находит глобальный минимум, однако вычислительно неэффективен, так как его сложность — n^n, где n — количество вершин в исходном множестве.

1.3.2 Симметричный итеративный алгоритм ближайших точек

Для каждой точки из исходного облака ищем ближайшую точку на целевом облаке. Вычисляем матрицу поворота и вектор смещения для исходного облака. Далее для каждой точки из целевого облака находим ближайшую точку на исходном облаке, оцениваем матрицу поворота и вектор смещения для целевого облака и повторяем все действия снова.

1.3.3 Выбор исходного и целевого облаков точек

В качетсве исходного облака можно брать то, где точек меньше, а в качестве целевой — то, где точек больше. Таким образом нужно будет найти меньше соответствующих пар точек.

2 РАССТОЯНИЕ ХАУСДОРФА

2.1 Теоретические основы

Метрическое пространство — это пара (S, d), состоящая из множества S и метрики $d\ :\ S \times S \to \mathbb{R}$, то есть для любых $x, y, z \in S$ выполняется

1) $d(x, y) \geq 0$;
2) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ — аксиома тождества;
3) $d(x, y) = d(y, x)$ — аксиома симметрии;
4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ — неравенство треугольника.

Метрическое пространство (S, d) называется сепарабельным, если существует не более чем счётное множество $\Gamma \subset S$ такое, что

$$(\forall x \in S)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists y \in \Gamma)\ : \qquad d(x, y) < \varepsilon.$$

Метрическое пространство (S, d) называется полным, если в нём любая фундаментальная последовательность сходится. Примером полного сепарабельного метрического пространства есть $\mathbb{R}^n$ с евклидовым расстоянием.

2.2 Расстояние Хаусдорфа

Расстояние Хаусдорфа определяется на множестве всех непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть E и F — непустые замкнутые подмножества $\mathbb{R}^n$. Расстояние Хаусдорфа между E и F определяется как

$$H(E, F) = \inf \{\varepsilon \geq 0 \mid E \subset F + \varepsilon,\ F \subset E + \varepsilon\}, \tag{2.1}$$

где $E+\varepsilon$ — объединение замкнутых шаров с радиусом ε и центром в точке $x \in E$

$$E+\varepsilon = \bigcup_{x \in E} \left\{ \overline{B}_\varepsilon (x) \right\}.$$

Проверим асиомы метрики для расстояния Хаусдорфа $H(E, F)$, заданного формулой (2.1).

1) $H(E, F) \geq 0$. Это следует из определения (2.1), так как точная нижняя грань величины $\varepsilon \geq 0$ неотрицательна.

2) $H(E, F) = 0$ тогда и только тогда, когда $E = F$. Последнее равенство равносильно двум условиям: $E \subset F$ и $F \subset E$. Это можно записать через элементы множеств: если $x \in E$, то $x \in F$, и если $x \in F$, то $x \in E$.

   Пусть $x \in E$ и $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $F + \varepsilon \supset E$, то есть $x \in F + \varepsilon$. Воспользуемся определением (2.2)

$$x \in \bigcup_{y \in F} \overline{B}_\varepsilon (y).$$

   Если x принадлежит объединению множеств, то он принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Значит, найдётся такой $y_\varepsilon \in F$, что $x \in \overline{B}_\varepsilon (y_\varepsilon)$, то есть $d(y_\varepsilon, x) \leq \varepsilon$. Это выполнено при любом $\varepsilon \geq 0$, следовательно, x либо лежит в F, либо является его предельной точкой. Но F — замкнутое множество, откуда следует, что $x \in F$.

   Вторая часть доказывается аналогично.

   С другой стороны, если $E = F$, то $E \subset F$ и $F \subset E$, значит $\varepsilon = 0$ и $H(E, F) = 0$.

3) $H(E, F) = H(F, E)$ следует из симметричности определения расстояния Хаусдорфа.

4) $H(E, F) \leq H(E, F) + H(F, G)$ для любых замкнутых множеств E, F, G

из $\mathbb{R}^n$. Нужно проверить, выполняется ли следуеющее следствие

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{E,G} \geq H\left(E,G\right), \\ \varepsilon_{G,F} \geq H\left(G,F\right) \end{aligned}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} E \subset F + \varepsilon_{G,F} + \varepsilon_{G,E}.$$

Используем те же действия, что и при проверке второго условия. Для первой стоки системы получаем, что из того, что $x \in E$ и $G + \varepsilon_{E,G} \supset E$, следует что $x \in G$. Используя условие из второй строки, получаем, что при этом $F + \varepsilon_{G,F} \supset G$, то есть $x \in F + \varepsilon_{G,F}$, следовательно, при $\varepsilon_{E,G} \geq 0$ выполняется и $x \in F + \varepsilon_{G,F} + \varepsilon_{E,G}$. Вспоминая, что изначально x лежал в множестве E, видим, что следствие (4) выполняется, то есть неравенство треугольника справделиво.

Аксиомы метрики выполняются, значит, расстояние Хаусдорфа — метрика на замкнутых множествах из $\mathbb{R}^n$.

2.2.1 Пример 1

Найдём расстояние Хаусдорфа между двумя эллипсами (рис. 2.1) [7]

$$\begin{aligned} E\,:\,\frac{x^2}{4} + 4y^2 = 1, \\ F\,:\,4\left(x-2\right)^2 + \frac{y^2}{4} = 1. \end{aligned}$$

Пунктиром нарисованы эллипсы $E + \varepsilon$ и $F + \varepsilon$ такие, чтобы выполнялось (2.1). В данном случае ε — это расстояние между точками A и B, которое равно $\varepsilon = 1.5 - (-2) = 3.5$. Поэтому $H\left(E,D\right) = 3.5$.

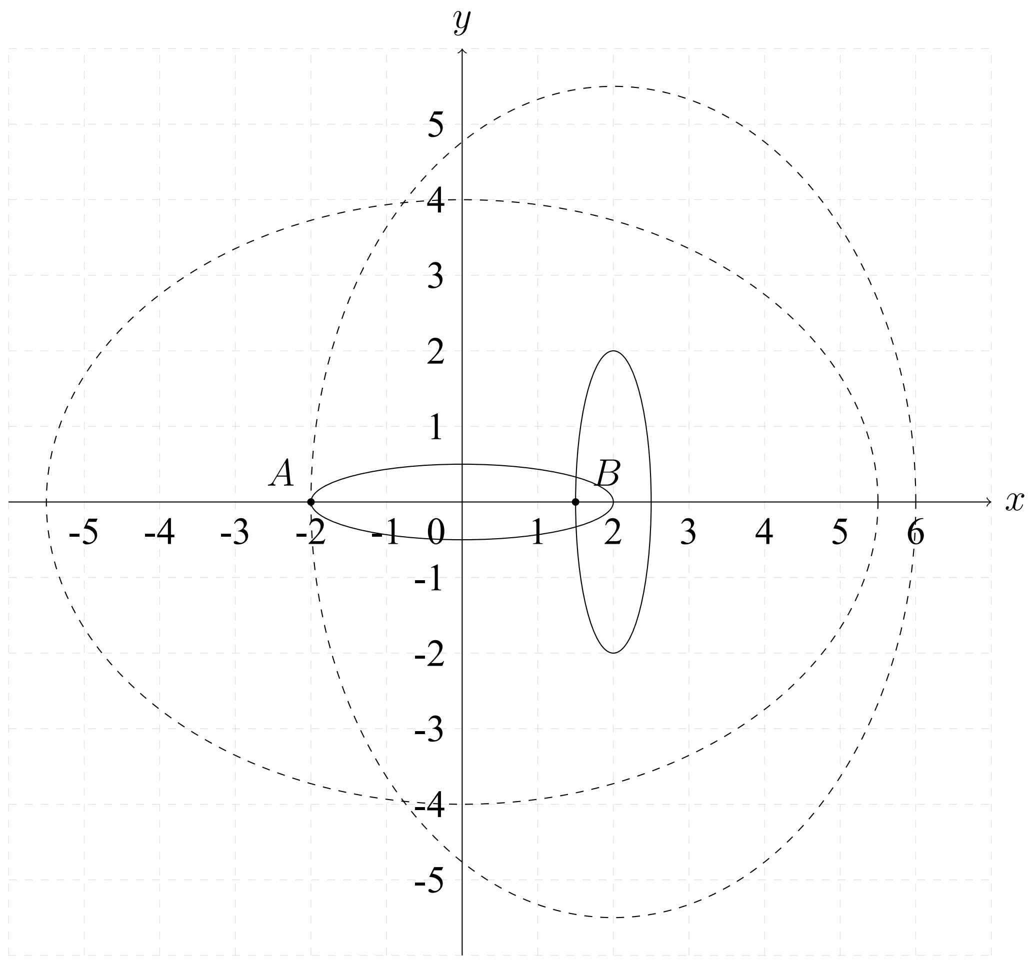

Рисунок 2.1 — Эллипсы, между которыми ищем расстояние Хаусдорфа

2.2.2 Пример 2

Пусть (X, d) — метрическое пространство и $A \subset X$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Множество C — ε-сеть для множества A, если для каждого $x \in A$ найдётся такой $y \in C$, что $d(x, y) < \varepsilon$ или

$$\bigcup_{y \in C} B(y, \varepsilon) \supset A.$$

Тогда расстояние Хаусдорфа между множеством A и ε-сетью C на нём равно $H(C, A) = \varepsilon$.

Покажем это. Найдём расстояне Хаусдорфа

$$H(C, A) = \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid C + \varepsilon \supset A,\ A + \varepsilon \supset C\}.$$

По определению

$$C + \varepsilon = \bigcup_{y \in C} \overline{B}(y, \varepsilon) \supset \bigcup_{y \in C} B(y, \varepsilon) \supset A.$$

С другой стороны,

$$A + \varepsilon = \bigcup_{x \in A} \overline{B}(x, \varepsilon) \supset A \supset C.$$

Получили, что $C + \varepsilon \supset A$ и $A + \varepsilon \supset C$, то есть $H(C, A) = \varepsilon$.

2.3 Случайные величины

Имеем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ — борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}$ — вероятностная мера на $\mathcal{F}$.

Есть два определения случайной величины:

1) функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется случайной величиной, если

$$\forall \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \qquad \xi^{-1}(\Delta) = \{\omega \mid \xi(\omega) \in \Delta\} \in \mathcal{F};$$

2) функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется случайной величиной, если

$$\forall c \in \mathbb{R} : \qquad \{\omega \mid \xi(\omega) \leq c\} = \xi^{-1}((-\infty, c]) \in \mathcal{F}.$$

Проверим, является ли расстояние Хаусдорфа

$$\gamma = H\left(AE + \vec{b} + \vec{\xi}, F\right) = H\left(\xi\left(E\right), F\right)$$

случайной величиной, где ξ — случайное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

По определению (2.1)

$$\gamma = \inf\left\{\varepsilon \geq 0 \mid \xi\left(E\right) + \varepsilon \subset F,\, F + \varepsilon \subset \xi\left(E\right)\right\} =$$
$$= \inf\left\{\varepsilon \geq 0 \;\middle|\; \bigcup_{x \in \xi(E)} \overline{B}_{\varepsilon}\left(x\right) \subset F,\, \bigcup_{x \in F} \overline{B}_{\varepsilon}\left(x\right) \subset \xi\left(E\right)\right\}.$$

Чтобы это проверить, нужно выяснить, является ли случайной величиной число $\varepsilon > 0$. Если получится, то

$$\forall c \in \mathbb{R}: \qquad \left\{\omega \mid \inf \varepsilon\left(\omega\right) \leq c\right\} = \bigcup_{\varepsilon} \left\{\omega \mid \varepsilon\left(\omega\right) \leq c\right\}.$$

Каждое множество, которые стоит под знаком объединения по определению принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}$, и их счётное объединение принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}$, так как она замкнута относительно счётной операции объединения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Zhang, Zhengyou. Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces / Zhengyou Zhang // *International journal of computer vision*. — 1994. — October. — Vol. 13. — Pp. 119–152.

2 Fukunaga, K. Introduction to Statistical Pattern Recognition / K. Fukunaga // Computer science and scientific computing. — Elsevier Science, 2013.

3 Golub, Gene H. Matrix Computations / Gene H. Golub, Charles F. Van Loan. — Third edition. — The Johns Hopkins University Press, 1996.

4 Horn, Alfred. Doubly Stochastic Matrices and the Diagonal of a Rotation Matrix / Alfred Horn // *American Journal of Mathematics*. — 1954. — July. — Vol. 76. — Pp. 620–630.

5 Sorkine-Hornung, Olga. Least-Squares Rigid Motion Using SVD / Olga Sorkine-Hornung, Michael Rabinovich. — 2017. — January. — Technical note.

6 Li, Hao. Global Correspondence Optimization for Non-Rigid Registration of Depth Scans / Hao Li, Robert W. Sumner, Mark Pauly // *Computer Graphics Forum (Proc. SGP'08)*. — 2008. — July. — Vol. 27, no. 5.

7 Crownover, R.M. Introduction to fractals and chaos / R.M. Crownover // Jones and Bartlett books in mathematics. — Jones and Bartlett, 1995.