ОГЛАВЛЕНИЕ

Вступление 2

1 Теория 3

1.1 Постановка задачи. 3

1.2 Существующие решения. 4

1.2.1 Итеративный алгоритм ближайших точек 4

1.2.2 Итеративный алгоритм ближайших точек с нормалями 4

1.3 Идеи 5

1.3.1 Симметричный итеративный алгоритм ближайших точек 5

1.3.2 Выбор исходного и целевого облаков точек 5

1.3.3 Использование инвариантов 6

2 Расстояние Хаусдорфа 7

2.1 Теоретические основы 7

2.2 Расстояние Хаусдорфа 7

2.2.1 Пример 1 9

2.2.2 Пример 2 10

2.3 Случайные величины 11

Список литературы 13

ВСТУПЛЕНИЕ

Актуальность работы Оценка положения камеры по облакам точек лежит в основе сканирования объектов с помощью 3D сканера. Для решения этой задачи используется итеративный алгоритм ближайших точек и его модификации, однако они учитывают только расстояния между точками двух множеств. Взаимосвязь между точками одного облака содержит дополнительную информацию, которая может повысить качество оценки перемещения камеры.

Объект исследования — методы оценки параметров камеры.

Предмет исследования — алгоритмы сопоставления облаков точек.

Цель исследования. Разработка эффективного алгоритма сопоставления двух облаков точек.

Задания следующие:

1) исследовать существующие алгоритмы сопоставления облаков точек;
2) предложить альтернативный алгоритм сопоставления облаков точек.

1 ТЕОРИЯ

1.1 Постановка задачи.

Есть два облака точек: исходное S (source) и целевое T (target). К точкам исходного множества $\vec{s} \in S$ применили поворот $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ и перемещение $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$, а также в процессе сканирования появился аддитивный гауссовый шум с неизвестной дисперсией

$$\vec{k}_s = R \cdot \vec{s} + \vec{b} + \vec{\xi}_s, \qquad \vec{\xi}_s \sim N\left(\vec{0}, \sigma^2 \cdot I\right) \tag{1.1}$$

где $k : S \to T$ — разметка, то есть функция, которая сопоставляет каждой точке из исходного множества точку из целевого множества.

Задача состоит в таком выборе матрицы R и вектора $\vec{b}$, при которых расстояние между множествами $\vec{k}_s$ и T было бы наименьшим. В том случае, когда S и T — конечны, можно воспользоваться обычным методом наименьших квадратов.

Воспользовавшись методом максимального правдоподобия, получаем оптимизационую задачу

$$P\left(k, R, \vec{b}\right) = \prod_{\vec{s}\in S} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{\left\|\vec{k}_s - R\cdot\vec{s} - \vec{b}\right\|^2}{2\sigma^2}} \to \max_{k,R,\vec{b}}. \tag{1.2}$$

После логарифмирования, умножения на константу и отбрасывания постоянных слагаемых и множителей получаем задачу минимизации

$$E\left(k, R, b\right) = \sum_{\vec{s}\in S} \left\|\vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b}\right\|^2 \to \min_{k,R,b}. \tag{1.3}$$

Два множества зачастую не имеют взаимно-однозначного отображения. Это может приводить к тому, что два отрезка, расположенные под прямым углом в одном облаке точек, могут соответствовать трём отрезкам в другом облаке точек, между соседними парами которых углы по 45 градусов.

1.2 Существующие решения.

1.2.1 Итеративный алгоритм ближайших точек

Итеративный алгоритм ближайших точек (Iterative Closest Points, ICP) [1] состоит из двух чередующихся операций. Инициализируется алгоритм единичной матрицей $R = I$ и нулевым вектором смещения $\vec{b} = \vec{0}$. Первая итерация состоит в поиске разметки с фиксированной трансформацией

$$\sum_{\vec{s} \in S} \left\| \vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b} \right\|^2 \to \min_{k} . \tag{1.4}$$

На следующей итерации происходит поиск поворота и смещения при текущей разметке

$$\sum_{\vec{s} \in S} \left\| \vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b} \right\|^2 \to \min_{R, \vec{b}} . \tag{1.5}$$

Эти два шага повторяются, пока не будет достигнут желаемый результат, то есть пока расстояние между двумя облаками точек не будет сведено к минимуму.

1.2.2 Итеративный алгоритм ближайших точек с нормалями

Отличием данного алгоритма (Normal ICP) [2] является то, что он рассматривает каждую точку вместе с локальными особенностями поверхности

$$E\left(k,R,b\right)=\sum_{\vec{s}\in S}\alpha_{point}\cdot\left\|\vec{k}_s-R\cdot\vec{s}-\vec{b}\right\|^2+\alpha_{plane}\cdot\left|\vec{n}_s^T\cdot\left(\vec{k}_s-R\cdot\vec{s}-\vec{b}\right)\right|\to\min_{k,R,b},\tag{1.6}$$

где α_{point} и α_{plane} — константы, а $\vec{n}_s$ — нормаль к точке $\vec{s}$ на исходном облаке. Для улучшения работы алгоритма убираются

1) вершины, нормали которых слишком отличаются от нормалей ближайших соседей из целевого облака;
2) вершины, которые находятся далеко от соседей из целевого облака;
3) вершины, которые находятся на краю объектов.

1.3 Идеи

1.3.1 Симметричный итеративный алгоритм ближайших точек

Для каждой точки из исходного облака ищем ближайшую точку на целевом облаке. Вычисляем матрицу поворота и вектор смещения для исходного облака. Далее для каждой точки из целевого облака находим ближайшую точку на исходном облаке, оцениваем матрицу поворота и вектор смещения для целевого облака и повторяем все действия снова.

1.3.2 Выбор исходного и целевого облаков точек

В качетсве исходного облака можно брать то, где точек меньше, а в качестве целевой — то, где точек больше. Таким образом нужно будет найти меньше соответствующих пар точек.

1.3.3 Использование инвариантов

Некоторые характеристики облака точек сохраняются при поворотах и перемещениях, то есть являются инвариантными относительно них. Значит, что по этим признакам можно совмещать два облака точек, не беря во внимание сами трансформации, которые можно будет быстро найти при наличии разметки k. К таким свойствам относятся длины отрезков и площади замкнутых фигур [3].

2 РАССТОЯНИЕ ХАУСДОРФА

2.1 Теоретические основы

Метрическое пространство — это пара (S, d), состоящая из множества S и метрики $d : S \times S \to \mathbb{R}$, то есть для любых $x, y, z \in S$ выполняется

1) $d(x, y) \geq 0$;
2) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ — аксиома тождества;
3) $d(x, y) = d(y, x)$ — аксиома симметрии;
4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ — неравенство треугольника.

Метрическое пространство (S, d) называется сепарабельным, если существует не более чем счётное множество $\Gamma \subset S$ такое, что

$$(\forall x \in S)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists y \in \Gamma) : \qquad d(x, y) < \varepsilon.$$

Метрическое пространство (S, d) называется полным, если в нём любая фундаментальная последовательность сходится. Примером полного сепарабельного метрического пространства есть $\mathbb{R}^n$ с евклидовым расстоянием.

2.2 Расстояние Хаусдорфа

Расстояние Хаусдорфа определяется на множестве всех непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть E и F — непустые замкнутые подмножества $\mathbb{R}^n$. Расстояние Хаусдорфа между E и F определяется как

$$H(E, F) = \inf \{\varepsilon \geq 0 \mid E \subset F + \varepsilon,\ F = E + \varepsilon\}, \tag{2.1}$$

где $E + \varepsilon$ — объединение замкнутых шаров с радиусом ε и центром в точке $x \in E$

$$E + \varepsilon = \bigcup_{x \in E} \left\{ \overline{B}_{\varepsilon}(x) \right\}.$$

Проверим асиомы метрики для расстояния Хаусдорфа $H(E, F)$, заданного формулой (2.1).

1) $H(E, F) \geq 0$. Это следует из определения (2.1), так как точная нижняя грань величины $\varepsilon \geq 0$ неотрицательна.

2) $H(E, F) = 0$ тогда и только тогда, когда $E = F$. Последнее равенство равносильно двум условиям: $E \subset F$ и $F \subset E$. Это можно записать через элементы множеств: если $x \in E$, то $x \in F$, и если $x \in F$, то $x \in E$.

   Пусть $x \in E$ и $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $F + \varepsilon \supset E$, то есть $x \in F + \varepsilon$. Воспользуемся определением (2.2)

$$x \in \bigcup_{y \in F} \overline{B}_{\varepsilon}(y).$$

   Если x принадлежит объединению множеств, то он принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Значит, найдётся такой $y_{\varepsilon} \in F$, что $x \in \overline{B}_{\varepsilon}(y_{\varepsilon})$, то есть $d(y_{\varepsilon}, x) \leq \varepsilon$. Это выполнено при любом $\varepsilon \geq 0$, следовательно, x либо лежит в F, либо является его предельной точкой. Но F — замкнутое множество, откуда следует, что $x \in F$.

   Вторая часть доказывается аналогично.

   С другой стороны, если $E = F$, то $E \subset F$ и $F \subset E$, значит $\varepsilon = 0$ и $H(E, F) = 0$.

3) $H(E, F) = H(F, E)$ следует из симметричности определения расстояния Хаусдорфа.

4) $H(E, F) \leq H(E, F) + H(F, G)$ для любых замкнутых множеств E, F, G

из $\mathbb{R}^n$. Нужно проверить, выполняется ли следуеющее следствие

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{E,G} \geq H(E,G), \\ \varepsilon_{G,F} \geq H(G,F) \end{aligned}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} E \subset F + \varepsilon_{G,F} + \varepsilon_{G,E}.$$

Используем те же действия, что и при проверке второго условия. Для первой стоки системы получаем, что из того, что $x \in E$ и $G + \varepsilon_{E,G} \supset E$, следует что $x \in G$. Используя условие из второй строки, получаем, что при этом $F + \varepsilon_{G,F} \supset G$, то есть $x \in F + \varepsilon_{G,F}$, следовательно, при $\varepsilon_{E,G} \geq 0$ выполняется и $x \in F + \varepsilon_{G,F} + \varepsilon_{E,G}$. Вспоминая, что изначально x лежал в множестве E, видим, что следствие (4) выполняется, то есть неравенство треугольника справделиво.

Аксиомы метрики выполняются, значит, расстояние Хаусдорфа — метрика на замкнутых множествах из $\mathbb{R}^n$.

2.2.1 Пример 1

Найдём расстояние Хаусдорфа между двумя эллипсами (рис. 2.1) [4]

$$E \,:\, \frac{x^2}{4} + 4y^2 = 1,$$
$$F \,:\, 4(x-2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Пунктиром нарисованы эллипсы $E + \varepsilon$ и $F + \varepsilon$ такие, чтобы выполнялось (2.1). В данном случае ε — это расстояние между точками A и B, которое равно $\varepsilon = 1.5 - (-2) = 3.5$. Поэтому $H(E,D) = 3.5$.

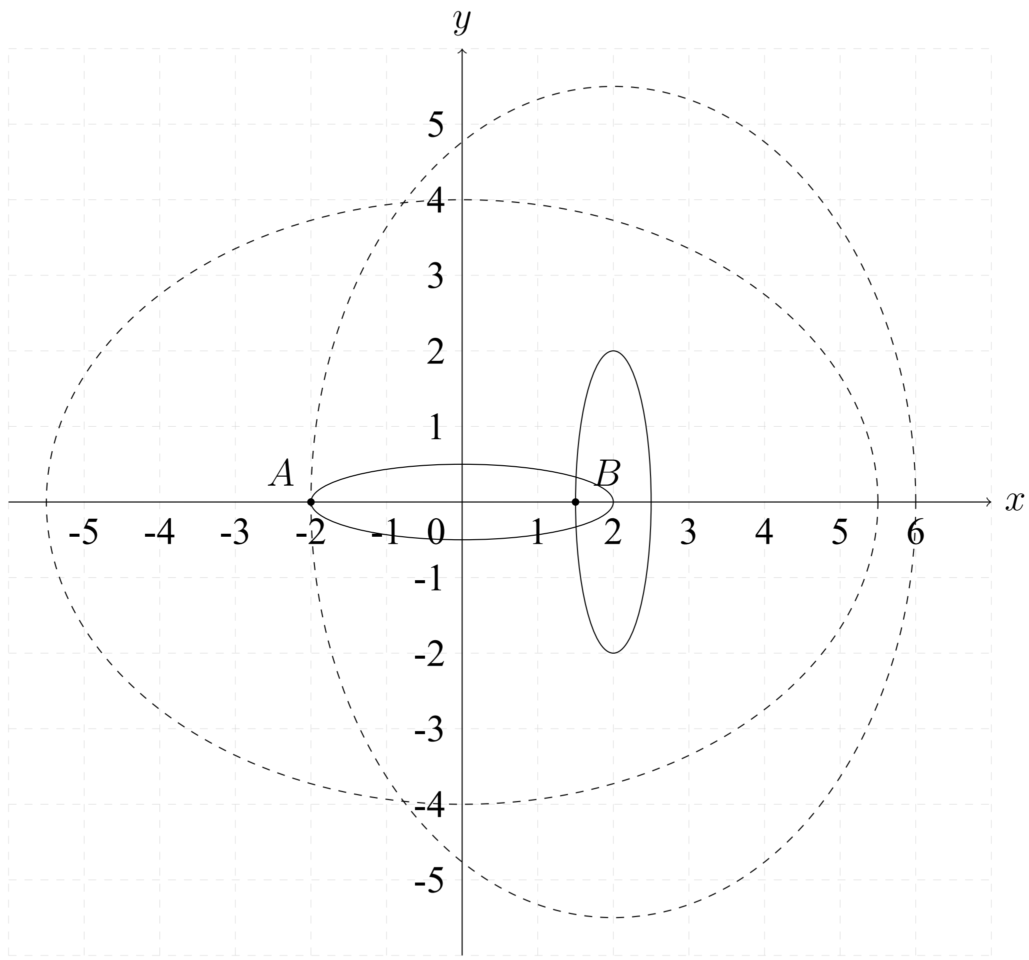

Рисунок 2.1 — Эллипсы, между которыми ищем расстояние Хаусдорфа

2.2.2 Пример 2

Пусть (X, d) — метрическое пространство, $Y \subseteq X$ и $\varepsilon > 0$. Подмножество $S \subseteq X$ называется ε-сетью для Y, если для каждого $y \in Y$ найдётся такой $s \in S$, что $d(y, s) < \varepsilon$. Если $Y = X$, то S называется ε-сетью в X.

Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство. В X возьмём конечную ε-сеть. Это значит, что $(\forall x \in X)\ (\exists s \in S)\ :\quad d(x, s) < \varepsilon$. Тогда расстояние Хаусдорфа между компактом X и ε-сетью равно $H(X, S) = \varepsilon$.

2.3 Случайные величины

Имеем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^n\right)$ — борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}$ — вероятностная мера на $\mathcal{F}$.

Есть два определения случайной величины:

1) функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется случайной величиной, если

$$\forall \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \qquad \xi^{-1}(\Delta) = \{\omega \mid \xi(\omega) \in \Delta\} \in \mathcal{F};$$

2) функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ называется случайной величиной, если

$$\forall c \in \mathbb{R} : \qquad \{\omega \mid \xi(\omega) \leq c\} = \xi^{-1}((-\infty, c]) \in \mathcal{F}.$$

Проверим, является ли расстояние Хаусдорфа

$$\gamma = H\left(AE + \vec{b} + \vec{\xi}, F\right) = H(\xi(E), F)$$

случайной величиной, где ξ — случайное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

По определению (2.1)

$$\gamma = \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid \xi(E) + \varepsilon \subset F,\ F + \varepsilon \subset \xi(E)\} =$$
$$= \inf\left\{\varepsilon \geq 0 \,\middle|\, \bigcup_{x \in \xi(E)} \overline{B}_\varepsilon(x) \subset F,\ \bigcup_{x \in F} \overline{B}_\varepsilon(x) \subset \xi(E)\right\}.$$

Чтобы это проверить, нужно выяснить, является ли случайной величиной число $\varepsilon_n > 0$. Если получится, то

$$\forall c \in \mathbb{R} : \qquad \left\{\omega \;\middle|\; \inf_n \varepsilon_n(\omega) \le c\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega \mid \varepsilon_n(\omega) \le c\}.$$

Каждое множество, которые стоит под знаком объединения по определению принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}$, и их счётное объединение принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}$, так как она замкнута относительно счётной операции объединения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Zhang, Zhengyou. Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces / Zhengyou Zhang // *International journal of computer vision*. — 1994. — October. — Vol. 13. — Pp. 119–152.

2 Li, Hao. Global Correspondence Optimization for Non-Rigid Registration of Depth Scans / Hao Li, Robert W. Sumner, Mark Pauly // *Computer Graphics Forum (Proc. SGP'08)*. — 2008. — July. — Vol. 27, no. 5.

3 Hartley, R. Multiple View Geometry in Computer Vision / R. Hartley, A. Zisserman. — Cambridge University Press, 2004.

4 Crownover, R.M. Introduction to fractals and chaos / R.M. Crownover // Jones and Bartlett books in mathematics. — Jones and Bartlett, 1995.