

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Вступление . . . . .	2
1 Теория . . . . .	3
1.1 Постановка задачи. . . . .	3
1.2 Существующие решения. . . . .	10
1.2.1 Итеративный алгоритм ближайших точек . . . . .	10
1.2.2 Итеративный алгоритм ближайших точек с нормалями . . . . .	18
1.3 Идеи . . . . .	19
1.3.1 Полный перебор вершин . . . . .	19
1.3.2 Симметричный итеративный алгоритм ближайших точек . . . . .	19
1.3.3 Выбор исходного и целевого облаков точек . . . . .	20
2 Расстояние Хаусдорфа . . . . .	21
2.1 Теоретические основы . . . . .	21
2.2 Расстояние Хаусдорфа . . . . .	21
2.2.1 Пример 1. . . . .	23
2.2.2 Пример 2. . . . .	24
2.3 Случайные величины . . . . .	25
Список литературы . . . . .	27

## ВСТУПЛЕНИЕ

**Актуальность работы** Оценка положения камеры по облакам точек лежит в основе сканирования объектов с помощью 3D сканера. Для решения этой задачи используется итеративный алгоритм ближайших точек и его модификации, однако они учитывают только расстояния между точками двух множеств. Взаимосвязь между точками одного облака содержит дополнительную информацию, которая может повысить качество оценки перемещения камеры.

*Объект исследования* — методы оценки параметров камеры.

*Предмет исследования* — алгоритмы сопоставления облаков точек.

**Цель исследования.** Разработка эффективного алгоритма сопоставления двух облаков точек.

Задания следующие:

- 1) исследовать существующие алгоритмы сопоставления облаков точек;
- 2) предложить альтернативный алгоритм сопоставления облаков точек.

# 1 ТЕОРИЯ

## 1.1 Постановка задачи.

Есть два множества: исходное  $S$  (source) и целевое  $T$  (target). К точкам исходного множества  $\vec{s} \in S$  применили поворот  $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  и перемещение  $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ , а также в процессе сканирования появился аддитивный гауссовский шум с неизвестной дисперсией

$$\vec{k}_s = R \cdot \vec{s} + \vec{b} + \vec{\xi}_s, \quad \vec{\xi}_s \sim N(\vec{0}, \sigma^2 \cdot I)$$

где  $k : S \rightarrow T$  — разметка, то есть функция, которая сопоставляет каждой точке из исходного множества точку из целевого множества.

Задача состоит в таком выборе матрицы  $R$  и вектора  $\vec{b}$ , при которых расстояние между множествами  $\vec{k}_s$  и  $R \cdot \vec{s} + \vec{b}$  было бы наименьшим. В том случае, когда  $S$  и  $T$  — конечны, можно воспользоваться обычным методом наименьших квадратов

$$E(k, R, b) = \sum_{s \in S} (\vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b})^2 \rightarrow \min_{k, R, b} .$$

Сумма квадратов отклонений между векторами — это то же самое, что сумма квадратов отклонений между проекциями по каждой координате

$$E(k, R, b) = E_x(k, R, b) + E_y(k, R, b) + E_z(k, R, z) \rightarrow \min_{k, R, b} .$$

Найдём, чему равна проекция произведения матрицы  $R$  на вектор  $s$  на

все координаты

$$R \cdot \vec{s} = \begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & r_{yy} & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{zy} & r_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx} \cdot s_x + r_{xy} \cdot s_y + r_{xz} \cdot s_z \\ r_{yx} \cdot s_x + r_{yy} \cdot s_y + r_{yz} \cdot s_z \\ r_{zx} \cdot s_x + r_{zy} \cdot s_y + r_{zz} \cdot s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_x \cdot \vec{s} \\ \vec{r}_y \cdot \vec{s} \\ \vec{r}_z \cdot \vec{s} \end{bmatrix},$$

где первая строка получившегося вектора — проекция  $R \cdot \vec{s}$  на ось  $x$ , вторая строка — проекция на ось  $y$ , третья — на ось  $z$ .

Распишем сумму квадратов отклонений через проекции

$$\begin{aligned} E(k, R, b) &= \sum_{s \in S} (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + \vec{r}_y \cdot \vec{s} + \vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_x + b_y + b_z - k_{s_x} - k_{s_y} - k_{s_z})^2 = \\ &= \sum_{s \in S} [(\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) + (\vec{r}_y \cdot \vec{s} + b_y - k_{s_y}) + (\vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_z - k_{s_z})]^2 = \\ &= \sum_{s \in S} (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x})^2 + \sum_{s \in S} (\vec{r}_y \cdot \vec{s} + b_y - k_{s_y})^2 + \sum_{s \in S} (\vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_z - k_{s_z})^2. \end{aligned}$$

Множество параметров, которые входят в каждую из трёх сумм, разные. Тогда можем минимизировать проекции суммы квадратов отклонений на все координаты отдельно

$$\begin{cases} E_x = \sum_{s \in S} (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x})^2 \rightarrow \min_{r_x, b_x}, \\ E_y = \sum_{s \in S} (\vec{r}_y \cdot \vec{s} + b_y - k_{s_y})^2 \rightarrow \min_{r_y, b_y}, \\ E_z = \sum_{s \in S} (\vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_z - k_{s_z})^2 \rightarrow \min_{r_z, b_z}. \end{cases}$$

Имеем линейную функцию, которая возводится в квадрат. Это выпуклая функция. Значит, можно взять частные производные по  $r_i$  и  $x_i$  для всех  $i \in \{x, y, z\}$  и приравнять их к нулю. Получим 4 уравнения для каждой коор-

динаты. Запишем для  $E_x$ , для остальных — аналогично

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial b_x} = \sum_{s \in S} 2 (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xx}} = \sum_{s \in S} 2 (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) \cdot s_x = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xy}} = \sum_{s \in S} 2 (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) \cdot s_y = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xz}} = \sum_{s \in S} 2 (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) \cdot s_z = 0. \end{array} \right.$$

Решаем первое уравнение относительно  $b_x$ . Получаем

$$\sum_{s \in S} b_x = \sum_{s \in S} (k_{s_x} - \vec{r}_x \cdot \vec{s}).$$

Слева получили сумму одинаковых слагаемых

$$|S| \cdot b_x + \vec{r}_x \sum_{s \in S} \vec{s} = \sum_{s \in S} k_{s_x}.$$

Распишем скалярное произведение

$$|S| \cdot b_x + \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_z = \sum_{s \in S} k_{s_x}.$$

Решаем остальные уравнения относительно  $r_{xi}$  для  $i \in \{x, y, z\}$ . Видим, что для разных  $i$  производная по  $r_{xi}$  одна и та же, потому находим решение для  $r_{xx}$ , а для остальных решение будет аналогичным

$$\vec{r}_x \sum_{s \in S} \vec{s} \cdot s_x = \sum_{s \in S} (k_{s_x} - b_x) \cdot s_x.$$

Распишем скалярное произведение

$$\sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x^2 + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_x \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_x \cdot s_z + \sum_{s \in S} b_x \cdot s_x = \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_x.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |S| \cdot b_x + \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_z = \sum_{s \in S} k_{s_x}, \\ \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x^2 + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_x \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_x \cdot s_z + \sum_{s \in S} b_x \cdot s_x = \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_x, \\ \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_y^2 + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_y \cdot s_z + \sum_{s \in S} b_x \cdot s_y = \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_y, \\ \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x \cdot s_z + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_y \cdot s_z + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_z^2 + \sum_{s \in S} b_x \cdot s_z = \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_z. \end{cases}$$

Запишем её в матричном виде

$$\begin{bmatrix} |S| & \sum_{s \in S} s_x & \sum_{s \in S} s_y & \sum_{s \in S} s_z \\ \sum_{s \in S} s_x & \sum_{s \in S} s_x^2 & \sum_{s \in S} s_x \cdot s_y & \sum_{s \in S} s_x \cdot s_z \\ \sum_{s \in S} s_y & \sum_{s \in S} s_x \cdot s_y & \sum_{s \in S} s_y^2 & \sum_{s \in S} s_y \cdot s_z \\ \sum_{s \in S} s_z & \sum_{s \in S} s_x \cdot s_z & \sum_{s \in S} s_y \cdot s_z & \sum_{s \in S} s_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ r_{xx} \\ r_{xy} \\ r_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{s \in S} k_{s_x} \\ \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_x \\ \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_y \\ \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_z \end{bmatrix}.$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned}\sum_{s \in S} s_i &= S_i, \quad i \in \{x, y, z\}, \\ \sum_{s \in S} s_i s_j &= S_{ij}, \quad i, j \in \{x, y, z\}, \\ \sum_{s \in S} k_{s_x} &= k, \\ \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_i &= k_i, \quad i \in \{x, y, z\}.\end{aligned}$$

Уравнение приняло следующий вид

$$\begin{bmatrix} |S| & S_x & S_y & S_z \\ S_x & S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_y & S_{xy} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_z & S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ r_{xx} \\ r_{xy} \\ r_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}.$$

Используем метод Крамера для решения системы линейных уравнений. Определитель  $\Delta$

$$\begin{aligned}\Delta &= |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - \sum_{i \in \{x, y, z\}} L_i + 2 \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - \\ &\quad - \sum_{i, j, k \in \{x, y, z\}} L_{ijk} + 2 \sum_{i, j \in \{x, y, z\}} L_{ij},\end{aligned}$$

где введены обозначения при  $i, j, k \in \{x, y, z\}$ ,  $i \neq j \neq k$

$$\begin{aligned} L_i &= S_{jk} \cdot (|S| \cdot S_{ii} - S_i^2), \\ L_{ij} &= S_i \cdot S_j \cdot (S_{ij} \cdot S_k - S_{ik} \cdot S_{jk}), \\ L_{ijk} &= S_i^2 \cdot S_{jj} \cdot S_{kk}. \end{aligned}$$

Определитель  $\Delta_b$

$$\begin{aligned} \Delta_b = k \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - \sum_{i \in \{x, y, z\}} L_i^b + 2 \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - \sum_{i, j, k \in \{x, y, z\}} L_{ijk}^b + \\ + \sum_{i, j \in \{x, y, z\}} L_{ij}^b + \sum_{i, j \in \{x, y, z\}} (L_{ij}^b)', \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} L_{ij}^b &= S_{ij}^2 \cdot S_k \cdot k_k, \\ L_{ijk}^b &= S_i \cdot S_{jj} \cdot S_{kk}, \\ (L_{ij}^b)' &= (S_i \cdot k_j + S_k \cdot k_i) \cdot (S_{ij} \cdot S_{kk} - S_{jk} \cdot S_{ik}) \end{aligned}$$

при  $i, j, k \in \{x, y, z\}$ ,  $i \neq j \neq k$ . Определитель  $\Delta_{xx}$

$$\begin{aligned} \Delta_{xx} = -k \cdot S_x \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} + k \cdot S_x \cdot S_{yz}^2 + k \cdot S_y \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} - k \cdot S_y \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - \\ - k \cdot S_z \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} + k \cdot S_z \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} + k_x \cdot |S| \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - k_x \cdot |S| \cdot S_{yz}^2 - \\ - k_x \cdot S_y^2 \cdot S_{zz} + 2 \cdot k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{yz} - k_x \cdot S_z^2 \cdot S_{yy} - k_y \cdot |S| \cdot S_{yz} \cdot S_{zz} + \\ + k_y \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} + k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{zz} - k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} - k_y \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xz} + \\ + k_y \cdot S_z^2 \cdot S_{xy} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} - k_z \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} - k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} + \\ + k_z \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{yy} + k_z \cdot S_y^2 \cdot S_{xz} - k_z \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xy}. \end{aligned}$$

Определитель  $\Delta_{xy}$

$$\begin{aligned}\Delta_{xy} = & k \cdot S_x \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} - k \cdot S_x \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - k \cdot S_y \cdot S_{xx} \cdot S_{zz} + k \cdot S_y \cdot S_{xz}^2 + \\ & + k \cdot S_z \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} - k \cdot S_z \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} - k_x \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} + k_x \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} + \\ & + k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{zz} - k_x \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{yz} - k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xz} + k_x \cdot S_z^2 \cdot S_{xy} + \\ & + k_y \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{zz} - k_y \cdot |S| \cdot S_{xz}^2 - k_y \cdot S_x^2 \cdot S_{zz} + 2 \cdot k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xz} - \\ & - k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xz} - k_y \cdot S_z^2 \cdot S_{xx} - k_z \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} + \\ & + k_z \cdot S_x^2 \cdot S_{yz} - k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xz} - k_z \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xy} + k_z \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xx}.\end{aligned}$$

Определитель  $\Delta_{xz}$

$$\begin{aligned}\Delta_{xz} = & -k \cdot S_x \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} + k \cdot S_x \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} + k \cdot S_y \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} - \\ & - k \cdot S_y \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} - k \cdot S_z \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} + k \cdot S_z \cdot S_{xy}^2 + S_x \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} - \\ & - k_x \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} - k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} + k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yy} + k_x \cdot S_y^2 \cdot S_{xz} - \\ & - k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xy} - k_y \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} + k_y \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} + k_y \cdot S_x^2 \cdot S_{yz} - \\ & - k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xz} - k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xy} + k_y \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xx} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} - \\ & - k_z \cdot |S| \cdot S_{xy}^2 - k_z \cdot S_x^2 \cdot S_{yy} + 2 \cdot k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xy} - k_z \cdot S_y^2 \cdot S_{xx}.\end{aligned}$$

Известно, что решениями есть следующие выражения

$$b_x = \frac{\Delta_b}{\Delta}, r_{xx} = \frac{\Delta_{xx}}{\Delta}, r_{xy} = \frac{\Delta_{xy}}{\Delta}, r_{xz} = \frac{\Delta_{xz}}{\Delta}.$$

Остальные проекции находим аналогичным образом, приравняв частные производные от  $E_x$  и  $E_y$  к нулю.

Два множества зачастую не имеют взаимно-однозначного отображения. Это может приводить к тому, что два отрезка, расположенные под прямым углом в одном облаке точек, могут соответствовать трём отрезкам в другом

облаке точек, между соседними парами которых углы по 45 градусов.

## 1.2 Существующие решения.

### 1.2.1 Итеративный алгоритм ближайших точек

Итеративный алгоритм ближайших точек (Iterative Closest Points, ICP) [1] состоит из двух чередующихся операций. Инициализируется алгоритм единичной матрицей поворота  $R = I$  и нулевым вектором смещения  $\vec{b} = \vec{0}$ . Первая итерация состоит в поиске такой разметки  $k : S \rightarrow T$ , чтобы

$$\sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right\|^2 \rightarrow \min_k,$$

где  $R$  и  $\vec{b}$  фиксированы. Функция  $k$  — это множество упорядоченных пар  $(s, t) \in S \times T$ , таких, что пары существуют для всех элементов множества  $S$ , и, если первые элементы пар совпадают, то совпадают и вторые элементы. Тогда можем искать такой набор  $\left\{ \vec{k}_s \mid \vec{s} \in S \right\}$ , чтобы

$$\sum_{s \in S} \left\| R \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right\|^2 \rightarrow \min_{k_s} .$$

Запишем сумму явно (пусть множество  $S$  содержит  $n$  точек)

$$\left\| R \cdot \vec{s}_1 + \vec{b} - \vec{k}_{s_1} \right\|^2 + \left\| R \cdot \vec{s}_2 + \vec{b} - \vec{k}_{s_2} \right\|^2 + \dots + \left\| R \cdot \vec{s}_n + \vec{b} - \vec{k}_{s_n} \right\|^2 \rightarrow \min_{k_{s_1}, k_{s_2}, \dots, k_{s_n} \in T} .$$

Параметры, которые входят в каждое слагаемое, разные, так что

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| R \cdot \vec{s}_1 + \vec{b} - \vec{k}_{s_1} \right\|^2 \rightarrow \min_{k_{s_1} \in T}, \\ \left\| R \cdot \vec{s}_2 + \vec{b} - \vec{k}_{s_2} \right\|^2 \rightarrow \min_{k_{s_2} \in T}, \\ \vdots \\ \left\| R \cdot \vec{s}_n + \vec{b} - \vec{k}_{s_n} \right\|^2 \rightarrow \min_{k_{s_n} \in T}. \end{array} \right.$$

Таким образом, для каждой точки  $\vec{s} \in S$  находим точку  $\vec{t} \in T$  такую, чтобы расстояние между множеством  $R \cdot \vec{s} + \vec{b}$  и множеством  $T$  было наименьшим

$$d(R \cdot \vec{s} - \vec{b}, \vec{t}) = \min_{t_i \in T} d(R\vec{s} - \vec{b}, \vec{t}_i).$$

На следующей итерации происходит поиск поворота  $R$  и смещения  $\vec{b}$  при текущей разметке  $\{\vec{k}_s \mid \vec{s} \in S\}$

$$\sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right\|^2 \rightarrow \min_{R, b}.$$

При этом матрица  $R \in SO(3)$ , то есть ортогональна матрица размерности  $3 \times 3$  с определителем  $+1$ , которая в качестве линейного преобразования действует как поворот.

Вычислим смещение  $\vec{b}$ . Пусть  $R$  – фиксирована. Минимизируем

$$E(\vec{b}) = \sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right\|^2.$$

Можем найти оптимальное смещение, взяв производную от  $E$  по  $\vec{b}$  и прирав-

няв её к нулю

$$0 = \frac{dE}{d\vec{b}} = \sum_{s \in S} 2 \left( R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right) = 2\vec{b} \cdot |S| + 2R \sum_{s \in S} \vec{s} - 2 \sum_{s \in S} \vec{k}_s. \quad (1.1)$$

Обозначим

$$\bar{s} = \frac{\sum_{s \in S} \vec{s}}{|S|}, \quad \bar{k}_s = \frac{\sum_{s \in S} \vec{k}_s}{|S|}.$$

Перепишем (1.1) в терминах введённых обозначений

$$\vec{b} = \bar{k}_s - R \cdot \bar{s}. \quad (1.2)$$

Подставим найденный вектор  $\vec{b}$  в функцию  $E$

$$\begin{aligned} \sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right\|^2 &= \sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{s} + \bar{k}_s - R \cdot \bar{s} - \vec{k}_s \right\|^2 = \\ &= \sum_{s \in S} \left\| R \cdot (\vec{s} - \bar{s}) - (\bar{k}_s - \vec{k}_s) \right\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, ищем оптимальный поворот  $R$ , переформулируя задачу так, чтобы смещение было равно нулю. Пусть

$$\vec{x}_s = \vec{s} - \bar{s}, \quad \vec{y}_s = \vec{k}_s - \bar{k}_s,$$

тогда

$$R = \arg \min_{R \in SO(3)} \sum_{s \in S} \|R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s\|^2. \quad (1.3)$$

Упростим выражение, которое минимизируем в (1.3)

$$\begin{aligned}\|R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s\|^2 &= (R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s)^T (R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s) = (\vec{x}_s^T \cdot R^T - \vec{y}_s^T) (R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s) = \\ &= \vec{x}_s^T \cdot R^T \cdot R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s - \vec{x}_s^T \cdot R^T \cdot \vec{y}_s + \vec{y}_s^T \cdot \vec{y}_s = \\ &= \vec{x}_s^T \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s - \vec{x}_s^T \cdot R^T \cdot \vec{y}_s + \vec{y}_s^T \cdot \vec{y}_s.\end{aligned}$$

Использовали ортогональность матрицы  $R$ , то есть что  $R^T \cdot R = I$  — единичная матрица.

Заметим, что  $\vec{x}_s^T \cdot R^t \cdot \vec{y}_s$  — это скаляр:  $\vec{x}_s^T$  имеет размерность  $1 \times 3$ ,  $R^T$  имеет размерность  $3 \times 3$  и  $\vec{y}_s$  —  $3 \times 1$ . Для любого скаляра  $a = a^T$ , поэтому

$$\vec{x}_s^T \cdot R^T \cdot \vec{y}_s = (\vec{x}_s^T \cdot R^T \cdot \vec{y}_s)^T = \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s.$$

Имеем

$$\|R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s\|^2 = \vec{x}_s^T \cdot \vec{x}_s - 2\vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s + \vec{y}_s^T \cdot \vec{y}_s.$$

Подставим полученное выражение в (1.3)

$$\begin{aligned}R &= \arg \min_{R \in SO(3)} \sum_{s \in S} (\vec{x}_s^T \cdot \vec{x}_s - 2\vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s + \vec{y}_s^T \cdot \vec{y}_s) = \\ &= \arg \min_{R \in SO(3)} \left( \sum_{s \in S} \vec{x}_s^T \cdot \vec{x}_s - 2 \sum_{s \in S} \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s + \sum_{s \in S} \vec{y}_s^T \cdot \vec{y}_s \right) = \\ &= \arg \min_{R \in SO(3)} \left( -2 \sum_{s \in S} \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s \right).\end{aligned}$$

Отбросили суммы  $\vec{x}_s^T \cdot \vec{x}_s$  и  $\vec{y}_s^T \cdot \vec{y}_s$  по всем  $s \in S$ , потому что эти выражения не зависят от  $R$  и не влияют на минимизацию. То же самое справедливо для

константы, на которую умножается сумма, поэтому

$$R = \arg \max_{R \in SO(3)} \sum_{s \in S} \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s.$$

Заметим, что

$$\sum_{s \in S} \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s = \text{tr} (Y^T \cdot R \cdot X),$$

где  $X$  и  $Y$  — это матрицы  $3 \times |S| = 3 \times n$  со столбцами  $\vec{x}_s$  и  $\vec{y}_s$  соответственно

$$Y^T \cdot R \cdot X = \begin{bmatrix} \vec{y}_1^T \\ \vec{y}_2^T \\ \vdots \\ \vec{y}_n^T \end{bmatrix} \cdot R \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \end{bmatrix}.$$

След квадратной матрицы равен сумме её диагональных элементов. Ищем такую матрицу  $R$ , которая будет максимизировать выражение  $\text{tr} (Y^T \cdot R \cdot X)$ .

След матрицы имеет свойство [2]

$$\text{tr} (A \cdot B) = \text{tr} (B \cdot A)$$

для любых матриц  $A$  и  $B$  совместимых размерностей.

Приведём доказательство этого свойства. Пусть матрица  $A$  имеет размерность  $n \times m$ , а матрица  $B — m \times n$ . Тогда матрица  $C = A \cdot B$  — матрица размерности  $n \times n$  состоит из элементов

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} \cdot b_{rj}.$$

Аналогично, матрица  $D = B \cdot A$  имеет размерность  $m \times m$  и состоит из элементов

$$d_{ij} = \sum_{r=1}^n b_{ir} \cdot a_{rj}.$$

Диагональные элементы матриц  $C$  и  $D$  имеют вид

$$c_{ii} = \sum_{r=1}^m a_{ir} \cdot b_{ri}, \quad d_{ii} = \sum_{r=1}^n b_{ir} \cdot a_{ri}.$$

Запишем след для произведений

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A \cdot B) &= \operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^m a_{ir} \cdot b_{ri}, \\ \operatorname{tr}(B \cdot A) &= \operatorname{tr}(D) = \sum_{i=1}^m d_{ii} = \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^n b_{ir} \cdot a_{ri}. \end{aligned}$$

Получившиеся двойные суммы одинаковы с точностью до переименования индексов суммирования. Это означает, что  $\operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A)$ .

Таким образом,

$$\operatorname{tr}(Y^T \cdot R \cdot X) = \operatorname{tr}(Y^T \cdot (R \cdot X)) = \operatorname{tr}(R \cdot X \cdot Y^T).$$

Обозначим  $S = X \cdot Y^T$  — матрица размерности  $3 \times 3$ . Возьмём сингулярное разложение [3] матрицы  $S$

$$S = U \cdot \Sigma \cdot V^T,$$

где  $U \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  и  $V \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  — ортогональные матрицы, а  $\Sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  — диагональная матрица с неотрицательными элементами, причём  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$ .

Подставим разложение в след

$$\operatorname{tr}(R \cdot X \cdot Y^T) = \operatorname{tr}(R \cdot S) = \operatorname{tr}(R \cdot U \cdot \Sigma \cdot V^T) = \operatorname{tr}(\Sigma \cdot V^T \cdot R \cdot U).$$

Заметим, что  $V$ ,  $R$  и  $U$  — ортогональные матрицы, поэтому матрица  $M = V^T \cdot R \cdot U$  — также ортогональная. Это означает, что  $\vec{m}_j^T \cdot \vec{m}_j = 1$  для каждого столбца  $\vec{m}_j$  матрицы  $M$ . Следовательно, все элементы  $m_{ij}$  матрицы  $M$  не превосходят единицы

$$1 = \vec{m}_j^T \cdot \vec{m}_j = \sum_{i=1}^3 m_{ij}^2 \Rightarrow m_{ij}^2 \leq 1 \Rightarrow |m_{ij}| \leq 1.$$

Вспомним, что  $\Sigma$  — диагональная матрица с неотрицательными элементами  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$ . Поэтому

$$\operatorname{tr}(\Sigma \cdot M) = \operatorname{tr} \left( \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \right) = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \cdot m_{ii} \leq \sum_{i=1}^3 \sigma_i.$$

Поэтому след максимизируется при  $m_{ii} = 1 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$ . Так как  $M$  — ортогональная матрица, то она должна быть единичной

$$I = M = V^T \cdot R \cdot U \Rightarrow V = R \cdot U \Rightarrow R = V \cdot U^T.$$

Заметим, что сейчас  $R$  — это ортогональная матрица, но при этом возможны две ситуации: когда  $\det R = \det(V \cdot U^T) = 1$ , то есть матрица  $R$  действует как поворот, и  $\det R = \det(V \cdot U^T) = -1$ , то есть матрица  $R$  действует как поворот и отражение. Предположим, что  $\det(V \cdot U^T) = -1$ . Это эквивалентно тому, что  $\det M = -1$ . Ищем такую матрицу  $M$ , которая максимизирует выражение

$$\operatorname{tr}(\Sigma \cdot M) = \sigma_1 \cdot m_{11} + \sigma_2 \cdot m_{22} + \sigma_3 \cdot m_{33}.$$

Рассматриваем переменные  $(m_{11}, m_{22}, m_{33})$ . Это множество всех диагоналей

ортогональной матрицы порядка 3. Альфред Хорн доказал [4], что вектор  $(d_1, \dots, d_n)$  — это диагональ матрицы поворота порядка  $n$  тогда и только тогда, когда он лежит в выпуклой оболочке точек  $(\pm 1, \dots, \pm 1)$ , где чётное число значений (в том числе 0) равно  $-1$ . Для нашего случая эта теорема принимает вид:  $M$  — матрица поворота тогда и только тогда, когда её диагональ  $(m_{11}, m_{22}, m_{33})$  лежит в выпуклой оболочке точек  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ , где чётное число координат (в том числе 0) равно  $-1$ . Матрица  $M$  — матрица поворота и отражения, потому для неё оптимальная диагональ имеет вид  $(1, 1, -1)$ , когда нечётное число значений равно  $-1$ , соответственно,

$$\operatorname{tr}(\Sigma \cdot M) = \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3.$$

Это значение больше любого другого вектора из  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  за исключением  $(1, 1, 1)$ , потому что  $\sigma_3$  — это наименьшее сингулярное значение.

Таким образом, если  $\det(V \cdot U^T) = -1$ , то

$$M = V^T \cdot R \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow R = V \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot U^T.$$

Таким образом, искомая матрица поворота  $R$  имеет вид [5]

$$R = V \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \det(V \cdot U^T) \end{bmatrix} \cdot U^T,$$

а оптимальный вектор сдвига вычисляется по формуле (1.2)

Эти два шага повторяются, пока не будет достигнут желаемый результат, то есть пока расстояние между двумя множествами  $\vec{k}_s$  и  $R \cdot \vec{s} + \vec{b}$  для всех  $\vec{s} \in S$  не будет сведено к минимуму.

Однако данный алгоритм хорошо работает только в том случае, когда нет шума и отклонение между множествами мало. На рисунке 1.1 изображён пример двух множеств, для которых алгоритм не даёт ожидаемого результата.

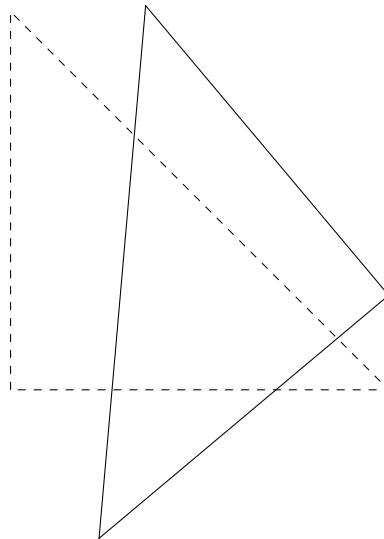


Рисунок 1.1 — Множества, для которых ICP не даёт ожидаемого результата

Множества представляют собой два идентичных треугольника, отличающихся поворотом и смещением. Правильным результатом были бы такие поворот и смещение, когда все соответствующие точки двух треугольников имели бы одинаковое положение. Из-за того, что ближайшие точки не являются соответствующими, глобальный минимум не достигается.

### 1.2.2 Итеративный алгоритм ближайших точек с нормалями

Отличием данного алгоритма (Normal ICP) [6] является то, что он рассматривает каждую точку вместе с локальными особенностями поверхности

$$E(k, R, b) = \sum_{s \in S} \alpha_{point} \cdot \left\| \vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b} \right\|^2 + \alpha_{plane} \cdot \left| \vec{n}_s^T \cdot (\vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b}) \right| \rightarrow \min_{k, R, b}$$

где  $\alpha_{point}$  и  $\alpha_{plane}$  — константы, а  $\vec{n}_s$  — нормаль к точке  $\vec{s}$  на исходном облаке. Для улучшения работы алгоритма убираются

- 1) вершины, нормали которых слишком отличаются от нормалей ближайших соседей из целевого облака;
- 2) вершины, которые находятся далеко от соседей из целевого облака;
- 3) вершины, которые находятся на краю объектов.

## 1.3 Идеи

### 1.3.1 Полный перебор вершин

Для каждой точки из исходного множества ищем не ближайшую точку на целевом множестве, а рассматриваем все возможные разметки. В данном случае алгоритм находит глобальный минимум, однако вычислительно неэффективен, так как его сложность —  $n^n$ , где  $n$  — количество вершин в исходном множестве.

### 1.3.2 Симметричный итеративный алгоритм ближайших точек

Для каждой точки из исходного облака ищем ближайшую точку на целевом облаке. Вычисляем матрицу поворота и вектор смещения для исходного облака. Далее для каждой точки из целевого облака находим ближайшую точку на исходном облаке, оцениваем матрицу поворота и вектор смещения для целевого облака и повторяем все действия снова.

### **1.3.3 Выбор исходного и целевого облаков точек**

В качестве исходного облака можно брать то, где точек меньше, а в качестве целевой — то, где точек больше. Таким образом нужно будет найти меньше соответствующих пар точек.

## 2 РАССТОЯНИЕ ХАУСДОРФА

### 2.1 Теоретические основы

Метрическое пространство — это пара  $(S, d)$ , состоящая из множества  $S$  и метрики  $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ , то есть для любых  $x, y, z \in S$  выполняется

- 1)  $d(x, y) \geq 0$ ;
- 2)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$  — аксиома тождества;
- 3)  $d(x, y) = d(y, x)$  — аксиома симметрии;
- 4)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  — неравенство треугольника.

Метрическое пространство  $(S, d)$  называется сепарабельным, если существует не более чем счётное множество  $\Gamma \subset S$  такое, что

$$(\forall x \in S) (\forall \varepsilon > 0) (\exists y \in \Gamma) : d(x, y) < \varepsilon.$$

Метрическое пространство  $(S, d)$  называется полным, если в нём любая фундаментальная последовательность сходится. Примером полного сепарабельного метрического пространства есть  $\mathbb{R}^n$  с евклидовым расстоянием.

### 2.2 Расстояние Хаусдорфа

Расстояние Хаусдорфа определяется на множестве всех непустых замкнутых подмножеств пространства  $\mathbb{R}^n$ .

Пусть  $E$  и  $F$  — непустые замкнутые подмножества  $\mathbb{R}^n$ . Расстояние Хаусдорфа между  $E$  и  $F$  определяется как

$$H(E, F) = \inf \{\varepsilon \geq 0 \mid E \subset F + \varepsilon, F \subset E + \varepsilon\}, \quad (2.1)$$

где  $E + \varepsilon$  — объединение замкнутых шаров с радиусом  $\varepsilon$  и центром в точке  $x \in E$

$$E + \varepsilon = \bigcup_{x \in E} \{\overline{B}_\varepsilon(x)\}.$$

Проверим асиомы метрики для расстояния Хаусдорфа  $H(E, F)$ , заданного формулой (2.1).

- 1)  $H(E, F) \geq 0$ . Это следует из определения (2.1), так как точная нижняя грань величины  $\varepsilon \geq 0$  неотрицательна.
- 2)  $H(E, F) = 0$  тогда и только тогда, когда  $E = F$ . Последнее равенство равносильно двум условиям:  $E \subset F$  и  $F \subset E$ . Это можно записать через элементы множеств: если  $x \in E$ , то  $x \in F$ , и если  $x \in F$ , то  $x \in E$ .

Пусть  $x \in E$  и  $\forall \varepsilon > 0$  выполняется  $F + \varepsilon \supset E$ , то есть  $x \in F + \varepsilon$ .

Воспользуемся определением (2.2)

$$x \in \bigcup_{y \in F} \overline{B}_\varepsilon(y).$$

Если  $x$  принадлежит объединению множеств, то он принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Значит, найдётся такой  $y_\varepsilon \in F$ , что  $x \in \overline{B}_\varepsilon(y_\varepsilon)$ , то есть  $d(y_\varepsilon, x) \leq \varepsilon$ . Это выполнено при любом  $\varepsilon \geq 0$ , следовательно,  $x$  либо лежит в  $F$ , либо является его предельной точкой. Но  $F$  — замкнутое множество, откуда следует, что  $x \in F$ .

Вторая часть доказывается аналогично.

С другой стороны, если  $E = F$ , то  $E \subset F$  и  $F \subset E$ , значит  $\varepsilon = 0$  и  $H(E, F) = 0$ .

- 3)  $H(E, F) = H(F, E)$  следует из симметричности определения расстояния Хаусдорфа.
- 4)  $H(E, F) \leq H(E, F) + H(F, G)$  для любых замкнутых множеств  $E, F, G$

из  $\mathbb{R}^n$ . Нужно проверить, выполняется ли следующее следствие

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{E,G} \geq H(E, G), \\ \varepsilon_{G,F} \geq H(G, F) \end{array} \right\} \stackrel{?}{\Rightarrow} E \subset F + \varepsilon_{G,F} + \varepsilon_{E,G}.$$

Используем те же действия, что и при проверке второго условия. Для первой строки системы получаем, что из того, что  $x \in E$  и  $G + \varepsilon_{E,G} \supset E$ , следует что  $x \in G$ . Используя условие из второй строки, получаем, что при этом  $F + \varepsilon_{G,F} \supset G$ , то есть  $x \in F + \varepsilon_{G,F}$ , следовательно, при  $\varepsilon_{E,G} \geq 0$  выполняется и  $x \in F + \varepsilon_{G,F} + \varepsilon_{E,G}$ . Вспоминая, что изначально  $x$  лежал в множестве  $E$ , видим, что следствие (4) выполняется, то есть неравенство треугольника справедливо.

Аксиомы метрики выполняются, значит, расстояние Хаусдорфа — метрика на замкнутых множествах из  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.2.1 Пример 1

Найдём расстояние Хаусдорфа между двумя эллипсами (рис. 2.1) [7]

$$\begin{aligned} E : \frac{x^2}{4} + 4y^2 = 1, \\ F : 4(x - 2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1. \end{aligned}$$

Пунктиром нарисованы эллипсы  $E + \varepsilon$  и  $F + \varepsilon$  такие, чтобы выполнялось (2.1). В данном случае  $\varepsilon$  — это расстояние между точками  $A$  и  $B$ , которое равно  $\varepsilon = 1.5 - (-2) = 3.5$ . Поэтому  $H(E, D) = 3.5$ .

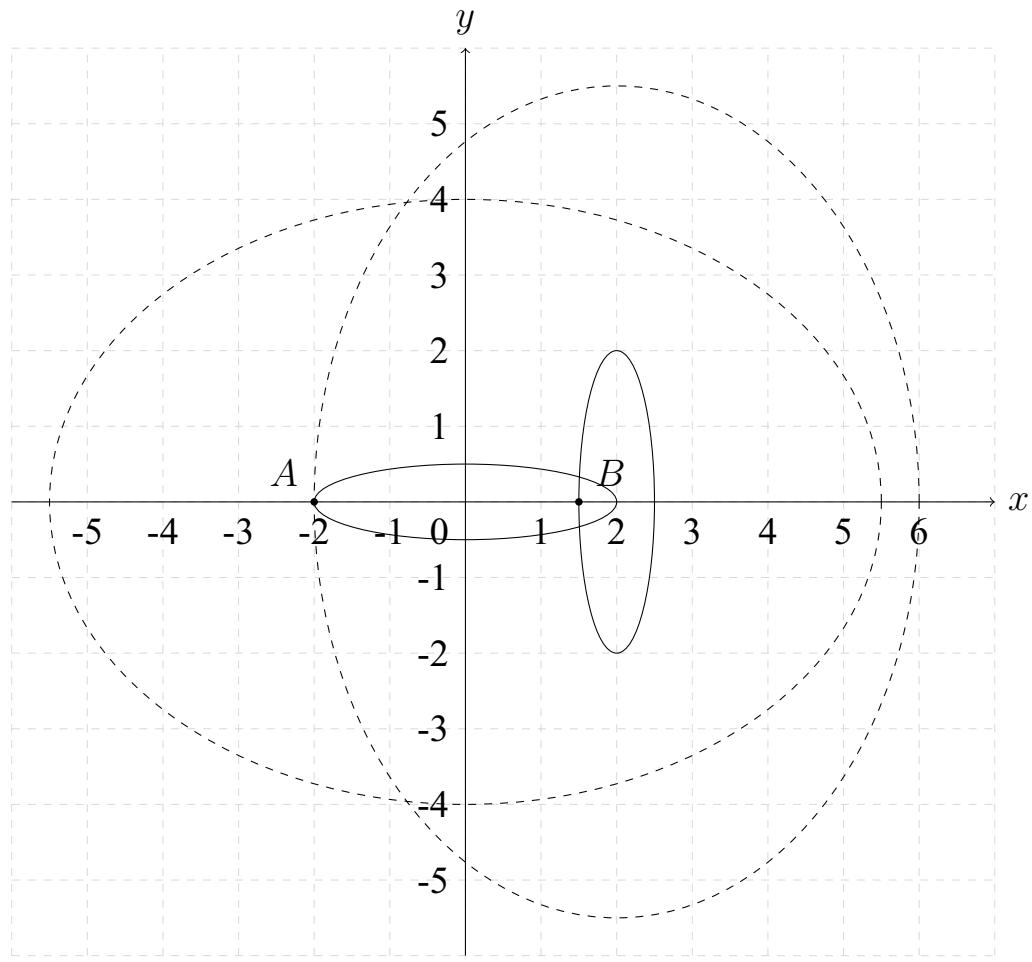


Рисунок 2.1 – Эллипсы, между которыми ищем расстояние Хаусдорфа

### 2.2.2 Пример 2

Пусть  $(X, d)$  — метрическое пространство и  $A \subset X$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  задано. Множество  $C$  —  $\varepsilon$ -сеть для множества  $A$ , если для каждого  $x \in A$  найдётся такой  $y \in C$ , что  $d(x, y) < \varepsilon$  или

$$\bigcup_{y \in C} B(y, \varepsilon) \supset A.$$

Тогда расстояние Хаусдорфа между множеством  $A$  и  $\varepsilon$ -сетью  $C$  на нём равно  $H(C, A) = \varepsilon$ .

Покажем это. Найдём расстояние Хаусдорфа

$$H(C, A) = \inf \{\varepsilon \geq 0 \mid C + \varepsilon \supset A, A + \varepsilon \supset C\}.$$

По определению

$$C + \varepsilon = \bigcup_{y \in C} \overline{B}(y, \varepsilon) \supset \bigcup_{y \in C} B(y, \varepsilon) \supset A.$$

С другой стороны,

$$A + \varepsilon = \bigcup_{x \in A} \overline{B}(x, \varepsilon) \supset A \supset C.$$

Получили, что  $C + \varepsilon \supset A$  и  $A + \varepsilon \supset C$ , то есть  $H(C, A) = \varepsilon$ .

### 2.3 Случайные величины

Имеем вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , где  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  – борелевская  $\sigma$ -алгебра на  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{P}$  – вероятностная мера на  $\mathcal{F}$ .

Есть два определения случайной величины:

1) функция  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется случайной величиной, если

$$\forall \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \quad \xi^{-1}(\Delta) = \{\omega \mid \xi(\omega) \in \Delta\} \in \mathcal{F};$$

2) функция  $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется случайной величиной, если

$$\forall c \in \mathbb{R} : \quad \{\omega \mid \xi(\omega) \leq c\} = \xi^{-1}((-\infty, c]) \in \mathcal{F}.$$

Проверим, является ли расстояние Хаусдорфа

$$\gamma = H \left( AE + \vec{b} + \vec{\xi}, F \right) = H \left( \xi(E), F \right)$$

случайной величиной, где  $\xi$  — случайное отображение из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^n$ .

По определению (2.1)

$$\begin{aligned} \gamma &= \inf \{ \varepsilon \geq 0 \mid \xi(E) + \varepsilon \subset F, F + \varepsilon \subset \xi(E) \} = \\ &= \inf \left\{ \varepsilon \geq 0 \mid \bigcup_{x \in \xi(E)} \overline{B}_\varepsilon(x) \subset F, \bigcup_{x \in F} \overline{B}_\varepsilon(x) \subset \xi(E) \right\}. \end{aligned}$$

Чтобы это проверить, нужно выяснить, является ли случайной величиной число  $\varepsilon > 0$ . Если получится, то

$$\forall c \in \mathbb{R} : \quad \{ \omega \mid \inf \varepsilon(\omega) \leq c \} = \bigcup_{\varepsilon} \{ \omega \mid \varepsilon(\omega) \leq c \}.$$

Каждое множество, которые стоит под знаком объединения по определению принадлежит  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}$ , и их счётное объединение принадлежит  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}$ , так как она замкнута относительно счётной операции объединения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Zhang, Zhengyou. Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces / Zhengyou Zhang // *International journal of computer vision*. — 1994. — October. — Vol. 13. — Pp. 119–152.
- 2 Fukunaga, K. Introduction to Statistical Pattern Recognition / K. Fukunaga // Computer science and scientific computing. — Elsevier Science, 2013.
- 3 Golub, Gene H. Matrix Computations / Gene H. Golub, Charles F. Van Loan. — Third edition. — The Johns Hopkins University Press, 1996.
- 4 Horn, Alfred. Doubly Stochastic Matrices and the Diagonal of a Rotation Matrix / Alfred Horn // *American Journal of Mathematics*. — 1954. — July. — Vol. 76. — Pp. 620–630.
- 5 Sorkine-Hornung, Olga. Least-Squares Rigid Motion Using SVD / Olga Sorkine-Hornung, Michael Rabinovich. — 2017. — January. — Technical note.
- 6 Li, Hao. Global Correspondence Optimization for Non-Rigid Registration of Depth Scans / Hao Li, Robert W. Sumner, Mark Pauly // *Computer Graphics Forum (Proc. SGP'08)*. — 2008. — July. — Vol. 27, no. 5.
- 7 Crownover, R.M. Introduction to fractals and chaos / R.M. Crownover // Jones and Bartlett books in mathematics. — Jones and Bartlett, 1995.