

ОГЛАВЛЕНИЕ

Вступление	2
1 Теория	3
1.1 Постановка задачи.	3
1.2 Существующие решения.	10
1.2.1 Итеративный алгоритм ближайших точек	10
1.2.2 Итеративный алгоритм ближайших точек с нормалями	16
1.3 Идеи	16
1.3.1 Симметричный итеративный алгоритм ближайших точек	16
1.3.2 Выбор исходного и целевого облаков точек	17
2 Расстояние Хаусдорфа	18
2.1 Теоретические основы	18
2.2 Расстояние Хаусдорфа	18
2.2.1 Пример 1	20
2.2.2 Пример 2	21
2.3 Случайные величины	22
Список литературы	24

ВСТУПЛЕНИЕ

Актуальность работы Оценка положения камеры по облакам точек лежит в основе сканирования объектов с помощью 3D сканера. Для решения этой задачи используется итеративный алгоритм ближайших точек и его модификации, однако они учитывают только расстояния между точками двух множеств. Взаимосвязь между точками одного облака содержит дополнительную информацию, которая может повысить качество оценки перемещения камеры.

Объект исследования — методы оценки параметров камеры.

Предмет исследования — алгоритмы сопоставления облаков точек.

Цель исследования. Разработка эффективного алгоритма сопоставления двух облаков точек.

Задания следующие:

- 1) исследовать существующие алгоритмы сопоставления облаков точек;
- 2) предложить альтернативный алгоритм сопоставления облаков точек.

1 ТЕОРИЯ

1.1 Постановка задачи.

Есть два облака точек: исходное S (source) и целевое T (target). К точкам исходного множества $\vec{s} \in S$ применили поворот $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ и перемещение $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$, а также в процессе сканирования появился аддитивный гауссовый шум с неизвестной дисперсией

$$\vec{k}_s = R \cdot \vec{s} + \vec{b} + \vec{\xi}_s, \quad \vec{\xi}_s \sim N(\vec{0}, \sigma^2 \cdot I)$$

где $k : S \rightarrow T$ — разметка, то есть функция, которая сопоставляет каждой точке из исходного множества точку из целевого множества.

Задача состоит в таком выборе матрицы R и вектора \vec{b} , при которых расстояние между множествами \vec{k}_s и $R \cdot \vec{s} + \vec{b}$ было бы наименьшим. В том случае, когда S и T — конечны, можно воспользоваться обычным методом наименьших квадратов

$$E(k, R, b) = \sum_{s \in S} (\vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b})^2 \rightarrow \min_{k, R, b} .$$

Сумма квадратов отклонений между векторами — это то же самое, что сумма квадратов отклонений между проекциями по каждой координате

$$E(k, R, b) = E_x(k, R, b) + E_y(k, R, b) + E_z(k, R, z) \rightarrow \min_{k, R, b} .$$

Найдём, чему равна проекция произведения матрицы R на вектор s на

все координаты

$$R \cdot \vec{s} = \begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & r_{yy} & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{zy} & r_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx} \cdot s_x + r_{xy} \cdot s_y + r_{xz} \cdot s_z \\ r_{yx} \cdot s_x + r_{yy} \cdot s_y + r_{yz} \cdot s_z \\ r_{zx} \cdot s_x + r_{zy} \cdot s_y + r_{zz} \cdot s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_x \cdot \vec{s} \\ \vec{r}_y \cdot \vec{s} \\ \vec{r}_z \cdot \vec{s} \end{bmatrix},$$

где первая строка получившегося вектора — проекция $R \cdot \vec{s}$ на ось x , вторая строка — проекция на ось y , третья — на ось z .

Распишем сумму квадратов отклонений через проекции

$$\begin{aligned} E(k, R, b) &= \sum_{s \in S} (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + \vec{r}_y \cdot \vec{s} + \vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_x + b_y + b_z - k_{s_x} - k_{s_y} - k_{s_z})^2 = \\ &= \sum_{s \in S} [(\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) + (\vec{r}_y \cdot \vec{s} + b_y - k_{s_y}) + (\vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_z - k_{s_z})]^2 = \\ &= \sum_{s \in S} (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x})^2 + \sum_{s \in S} (\vec{r}_y \cdot \vec{s} + b_y - k_{s_y})^2 + \sum_{s \in S} (\vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_z - k_{s_z})^2. \end{aligned}$$

Множество параметров, которые входят в каждую из трёх сумм, разные. Тогда можем минимизировать проекции суммы квадратов отклонений на все координаты отдельно

$$\begin{cases} E_x = \sum_{s \in S} (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x})^2 \rightarrow \min_{r_x, b_x}, \\ E_y = \sum_{s \in S} (\vec{r}_y \cdot \vec{s} + b_y - k_{s_y})^2 \rightarrow \min_{r_y, b_y}, \\ E_z = \sum_{s \in S} (\vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_z - k_{s_z})^2 \rightarrow \min_{r_z, b_z}. \end{cases}$$

Имеем линейную функцию, которая возводится в квадрат. Это выпуклая функция. Значит, можно взять частные производные по r_i и x_i для всех $i \in \{x, y, z\}$ и приравнять их к нулю. Получим 4 уравнения для каждой коор-

динаты. Запишем для E_x , для остальных — аналогично

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_x}{\partial b_x} = \sum_{s \in S} 2 (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xx}} = \sum_{s \in S} 2 (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) \cdot s_x = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xy}} = \sum_{s \in S} 2 (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) \cdot s_y = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xz}} = \sum_{s \in S} 2 (\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}) \cdot s_z = 0. \end{array} \right.$$

Решаем первое уравнение относительно b_x . Получаем

$$\sum_{s \in S} b_x = \sum_{s \in S} (k_{s_x} - \vec{r}_x \cdot \vec{s}).$$

Слева получили сумму одинаковых слагаемых

$$|S| \cdot b_x + \vec{r}_x \sum_{s \in S} \vec{s} = \sum_{s \in S} k_{s_x}.$$

Распишем скалярное произведение

$$|S| \cdot b_x + \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_z = \sum_{s \in S} k_{s_x}.$$

Решаем остальные уравнения относительно r_{xi} для $i \in \{x, y, z\}$. Видим, что для разных i производная по r_{xi} одна и та же, потому находим решение для r_{xx} , а для остальных решение будет аналогичным

$$\vec{r}_x \sum_{s \in S} \vec{s} \cdot s_x = \sum_{s \in S} (k_{s_x} - b_x) \cdot s_x.$$

Распишем скалярное произведение

$$\sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x^2 + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_x \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_x \cdot s_z + \sum_{s \in S} b_x \cdot s_x = \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_x.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |S| \cdot b_x + \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_z = \sum_{s \in S} k_{s_x}, \\ \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x^2 + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_x \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_x \cdot s_z + \sum_{s \in S} b_x \cdot s_x = \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_x, \\ \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_y^2 + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_y \cdot s_z + \sum_{s \in S} b_x \cdot s_y = \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_y, \\ \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x \cdot s_z + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_y \cdot s_z + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_z^2 + \sum_{s \in S} b_x \cdot s_z = \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_z. \end{cases}$$

Запишем её в матричном виде

$$\begin{bmatrix} |S| & \sum_{s \in S} s_x & \sum_{s \in S} s_y & \sum_{s \in S} s_z \\ \sum_{s \in S} s_x & \sum_{s \in S} s_x^2 & \sum_{s \in S} s_x \cdot s_y & \sum_{s \in S} s_x \cdot s_z \\ \sum_{s \in S} s_y & \sum_{s \in S} s_x \cdot s_y & \sum_{s \in S} s_y^2 & \sum_{s \in S} s_y \cdot s_z \\ \sum_{s \in S} s_z & \sum_{s \in S} s_x \cdot s_z & \sum_{s \in S} s_y \cdot s_z & \sum_{s \in S} s_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ r_{xx} \\ r_{xy} \\ r_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{s \in S} k_{s_x} \\ \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_x \\ \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_y \\ \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_z \end{bmatrix}.$$

Введём обозначения:

$$\begin{aligned}\sum_{s \in S} s_i &= S_i, \quad i \in \{x, y, z\}, \\ \sum_{s \in S} s_i s_j &= S_{ij}, \quad i, j \in \{x, y, z\}, \\ \sum_{s \in S} k_{s_x} &= k, \\ \sum_{s \in S} k_{s_x} \cdot s_i &= k_i, \quad i \in \{x, y, z\}.\end{aligned}$$

Уравнение приняло следующий вид

$$\begin{bmatrix} |S| & S_x & S_y & S_z \\ S_x & S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_y & S_{xy} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_z & S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ r_{xx} \\ r_{xy} \\ r_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}.$$

Используем метод Крамера для решения системы линейных уравнений. Определитель Δ

$$\begin{aligned}\Delta &= |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - \sum_{i \in \{x, y, z\}} L_i + 2 \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - \\ &\quad - \sum_{i, j, k \in \{x, y, z\}} L_{ijk} + 2 \sum_{i, j \in \{x, y, z\}} L_{ij},\end{aligned}$$

где введены обозначения при $i, j, k \in \{x, y, z\}$, $i \neq j \neq k$

$$\begin{aligned} L_i &= S_{jk} \cdot (|S| \cdot S_{ii} - S_i^2), \\ L_{ij} &= S_i \cdot S_j \cdot (S_{ij} \cdot S_k - S_{ik} \cdot S_{jk}), \\ L_{ijk} &= S_i^2 \cdot S_{jj} \cdot S_{kk}. \end{aligned}$$

Определитель Δ_b

$$\begin{aligned} \Delta_b &= k \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - \sum_{i \in \{x, y, z\}} L_i^b + 2 \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - \sum_{i, j, k \in \{x, y, z\}} L_{ijk}^b + \\ &\quad + \sum_{i, j \in \{x, y, z\}} L_{ij}^b + \sum_{i, j \in \{x, y, z\}} (L_{ij}^b)', \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} L_{ij}^b &= S_{ij}^2 \cdot S_k \cdot k_k, \\ L_{ijk}^b &= S_i \cdot S_{jj} \cdot S_{kk}, \\ (L_{ij}^b)' &= (S_i \cdot k_j + S_k \cdot k_i) \cdot (S_{ij} \cdot S_{kk} - S_{jk} \cdot S_{ik}) \end{aligned}$$

при $i, j, k \in \{x, y, z\}$, $i \neq j \neq k$. Определитель Δ_{xx}

$$\begin{aligned} \Delta_{xx} &= -k \cdot S_x \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} + k \cdot S_x \cdot S_{yz}^2 + k \cdot S_y \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} - k \cdot S_y \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - \\ &\quad - k \cdot S_z \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} + k \cdot S_z \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} + k_x \cdot |S| \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - k_x \cdot |S| \cdot S_{yz}^2 - \\ &\quad - k_x \cdot S_y^2 \cdot S_{zz} + 2 \cdot k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{yz} - k_x \cdot S_z^2 \cdot S_{yy} - k_y \cdot |S| \cdot S_{yz} \cdot S_{zz} + \\ &\quad + k_y \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} + k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{zz} - k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} - k_y \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xz} + \\ &\quad + k_y \cdot S_z^2 \cdot S_{xy} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} - k_z \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} - k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} + \\ &\quad + k_z \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{yy} + k_z \cdot S_y^2 \cdot S_{xz} - k_z \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xy}. \end{aligned}$$

Определитель Δ_{xy}

$$\begin{aligned}\Delta_{xy} = & k \cdot S_x \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} - k \cdot S_x \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - k \cdot S_y \cdot S_{xx} \cdot S_{zz} + k \cdot S_y \cdot S_{xz}^2 + \\ & + k \cdot S_z \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} - k \cdot S_z \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} - k_x \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} + k_x \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} + \\ & + k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{zz} - k_x \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{yz} - k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xz} + k_x \cdot S_z^2 \cdot S_{xy} + \\ & + k_y \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{zz} - k_y \cdot |S| \cdot S_{xz}^2 - k_y \cdot S_x^2 \cdot S_{zz} + 2 \cdot k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xz} - \\ & - k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xz} - k_y \cdot S_z^2 \cdot S_{xx} - k_z \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} + \\ & + k_z \cdot S_x^2 \cdot S_{yz} - k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xz} - k_z \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xy} + k_z \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xx}.\end{aligned}$$

Определитель Δ_{xz}

$$\begin{aligned}\Delta_{xz} = & -k \cdot S_x \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} + k \cdot S_x \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} + k \cdot S_y \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} - \\ & - k \cdot S_y \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} - k \cdot S_z \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} + k \cdot S_z \cdot S_{xy}^2 + S_x \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} - \\ & - k_x \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} - k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} + k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yy} + k_x \cdot S_y^2 \cdot S_{xz} - \\ & - k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xy} - k_y \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} + k_y \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} + k_y \cdot S_x^2 \cdot S_{yz} - \\ & - k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xz} - k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xy} + k_y \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xx} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} - \\ & - k_z \cdot |S| \cdot S_{xy}^2 - k_z \cdot S_x^2 \cdot S_{yy} + 2 \cdot k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xy} - k_z \cdot S_y^2 \cdot S_{xx}.\end{aligned}$$

Известно, что решениями есть следующие выражения

$$b_x = \frac{\Delta_b}{\Delta}, r_{xx} = \frac{\Delta_{xx}}{\Delta}, r_{xy} = \frac{\Delta_{xy}}{\Delta}, r_{xz} = \frac{\Delta_{xz}}{\Delta}.$$

Остальные проекции находим аналогичным образом, приравняв частные производные от E_x и E_y к нулю.

Два множества зачастую не имеют взаимно-однозначного отображения. Это может приводить к тому, что два отрезка, расположенные под прямым углом в одном облаке точек, могут соответствовать трём отрезкам в другом

облаке точек, между соседними парами которых углы по 45 градусов.

1.2 Существующие решения.

1.2.1 Итеративный алгоритм ближайших точек

Итеративный алгоритм ближайших точек (Iterative Closest Points, ICP) [1] состоит из двух чередующихся операций. Инициализируется алгоритм единичной матрицей поворота $R = I$ и нулевым вектором смещения $\vec{b} = \vec{0}$. Первая итерация состоит в поиске такой разметки $k : S \rightarrow T$, чтобы

$$\sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right\|^2 \rightarrow \min_k,$$

где R и \vec{b} фиксированы. Функция k — это множество упорядоченных пар $(s, t) \in S \times T$, таких, что пары существуют для всех элементов множества S , и, если первые элементы пар совпадают, то совпадают и вторые элементы. Тогда можем искать такой набор $\left\{ \vec{k}_s \mid \vec{s} \in S \right\}$, чтобы

$$\sum_{s \in S} \left\| R \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right\|^2 \rightarrow \min_{k_s} .$$

Запишем сумму явно (пусть множество S содержит n точек)

$$\left\| R \cdot \vec{s}_1 + \vec{b} - \vec{k}_{s_1} \right\|^2 + \left\| R \cdot \vec{s}_2 + \vec{b} - \vec{k}_{s_2} \right\|^2 + \dots + \left\| R \cdot \vec{s}_n + \vec{b} - \vec{k}_{s_n} \right\|^2 \rightarrow \min_{k_{s_1}, k_{s_2}, \dots, k_{s_n} \in T} .$$

Параметры, которые входят в каждое слагаемое, независимы, так что

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\| R \cdot \vec{s}_1 + \vec{b} - \vec{k}_{s_1} \right\|^2 \rightarrow \min_{k_{s_1} \in T}, \\ \left\| R \cdot \vec{s}_2 + \vec{b} - \vec{k}_{s_2} \right\|^2 \rightarrow \min_{k_{s_2} \in T}, \\ \vdots \\ \left\| R \cdot \vec{s}_n + \vec{b} - \vec{k}_{s_n} \right\|^2 \rightarrow \min_{k_{s_n} \in T}. \end{array} \right.$$

Таким образом, для каждой точки $\vec{s} \in S$ находим точку $\vec{t} \in T$ такую, чтобы расстояние между множеством $R \cdot \vec{s} + \vec{b}$ и множеством T было наименьшим

$$d(R \cdot \vec{s} - \vec{b}, \vec{t}) = \min_{t_i \in T} d(R\vec{s} - \vec{b}, \vec{t}_i).$$

На следующей итерации происходит поиск поворота R и смещения \vec{b} при текущей разметке $\{\vec{k}_s \mid \vec{s} \in S\}$

$$\sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right\|^2 \rightarrow \min_{R, b}.$$

При этом матрица $R \in SO(3)$, то есть ортогональна матрица размерности 3×3 с определителем $+1$, которая в качестве линейного преобразования действует как поворот.

Вычислим смещение \vec{b} . Пусть R – фиксирована, обозначим

$$E(\vec{b}) = \sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right\|^2.$$

Можем найти оптимальное смещение, взяв производную E по \vec{b} и приравняв

к нулю

$$0 = \frac{dE}{d\vec{b}} = \sum_{s \in S} 2 \left(R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right) = 2\vec{b} \cdot |S| + 2R \sum_{s \in S} \vec{s} - 2 \sum_{s \in S} \vec{k}_s. \quad (1.1)$$

Обозначим

$$\bar{s} = \frac{\sum_{s \in S} \vec{s}}{|S|}, \quad \bar{k}_s = \frac{\sum_{s \in S} \vec{k}_s}{|S|}.$$

Перепишем (1.1) в терминах введённых обозначений

$$\vec{b} = \bar{k}_s - R \cdot \bar{s}.$$

Подставим найденный вектор \vec{b} в функцию E

$$\begin{aligned} \sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{s} + \vec{b} - \vec{k}_s \right\|^2 &= \sum_{s \in S} \left\| R \cdot \vec{s} + \bar{k}_s - R \cdot \bar{s} - \vec{k}_s \right\|^2 = \\ &= \sum_{s \in S} \left\| R \cdot (\vec{s} - \bar{s}) - (\bar{k}_s - \vec{k}_s) \right\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, вычисляем поворот R , переформулируя задачу так, чтобы смещение было равно нулю

$$\vec{x}_s = \vec{s} - \bar{s}, \quad \vec{y}_s = \vec{k}_s - \bar{k}_s.$$

Ищем оптимальный поворот R такой, что

$$R = \arg \min_{R \in SO(3)} \sum_{s \in S} \|R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s\|^2. \quad (1.2)$$

Упростим выражение, которое пытаемся минимизировать в (1.2)

$$\begin{aligned}\|R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s\|^2 &= (R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s)^T (R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s) = (\vec{x}_s^T \cdot R^T - \vec{y}_s^T) (R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s) = \\ &= \vec{x}_s^T \cdot R^T \cdot R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s - \vec{x}_s^T \cdot R^T \cdot \vec{y}_s + \vec{y}_s^T \cdot \vec{y}_s = \\ &= \vec{x}_s^T \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s - \vec{x}_s^T \cdot R^T \cdot \vec{y}_s + \vec{y}_s^T \cdot \vec{y}_s.\end{aligned}$$

Использовали то, что для матрицы поворота $R^T \cdot R = I$ — единичная матрица.

Заметим, что $\vec{x}_s^T \cdot R^T \cdot \vec{y}_s$ — это скаляр: \vec{x}_s^T имеет размерность 1×3 , R^T имеет размерность 3×3 и \vec{y}_s — 3×1 . Для любого скаляра $a = a^T$, поэтому

$$\vec{x}_s^T \cdot R^T \cdot \vec{y}_s = (\vec{x}_s^T \cdot R^T \cdot \vec{y}_s)^T = \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s.$$

Имеем

$$\|R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s\|^2 = \vec{x}_s^T \cdot \vec{x}_s - 2\vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s + \vec{y}_s^T \cdot \vec{y}_s.$$

Подставим полученное выражение в (1.2)

$$\begin{aligned}\arg \min_{R \in SO(3)} \sum_{s \in S} \|R \cdot \vec{x}_s - \vec{y}_s\|^2 &= \\ &= \arg \min_{R \in SO(3)} \sum_{s \in S} (\vec{x}_s^T \cdot \vec{x}_s - 2\vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s + \vec{y}_s^T \cdot \vec{y}_s) = \\ &= \arg \min_{R \in SO(3)} \left(\sum_{s \in S} \vec{x}_s^T \cdot \vec{x}_s - 2 \sum_{s \in S} \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s + \sum_{s \in S} \vec{y}_s^T \cdot \vec{y}_s \right) = \\ &= \arg \min_{s \in S} \left(-2 \sum_{s \in S} \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s \right).\end{aligned}$$

Отбросили суммы $\vec{x}_s^T \cdot \vec{x}_s$ и $\vec{y}_s^T \cdot \vec{y}_s$ по всем $s \in S$, потому что эти выражения не зависят от R и не влияют на минимизацию. То же самое справедливо для

константы, на которую, поэтому

$$\arg \min_{R \in SO(3)} \left(-2 \sum_{s \in S} \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s \right) = \arg \max_{R \in SO(3)} \sum_{R \in SO(3)} \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s.$$

Заметим, что

$$\sum_{s \in S} \vec{y}_s^T \cdot R \cdot \vec{x}_s = \text{tr} (Y^T \cdot R \cdot X),$$

где X и Y — это матрицы $3 \times |S| = 3 \times n$ со столбцами \vec{x}_s и \vec{y}_s соответственно

$$Y^T \cdot R \cdot X = \begin{bmatrix} \vec{y}_1^T \\ \vec{y}_2^T \\ \vdots \\ \vec{y}_n^T \end{bmatrix} \cdot R \cdot \begin{bmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \end{bmatrix}.$$

След квадратной матрицы равен сумме её диагональных элементов. Ищем такой поворот, который будет давать максимум выражению $\text{tr} (Y^T \cdot R \cdot X)$.

След матрицы имеет свойство

$$\text{tr} (A \cdot B) = \text{tr} (B \cdot A)$$

для любых матриц A, B совместимых размерностей. Поэтому

$$\text{tr} (Y^T \cdot R \cdot X) = \text{tr} (Y^T \cdot (R \cdot X)) = \text{tr} (R \cdot X \cdot Y^T).$$

Обозначим $S = X \cdot Y^T$ — матрица размерности 3×3 . Возьмём сингулярное разложение матрицы S

$$S = U \cdot \Sigma \cdot V^T,$$

где U и V — унитарные матрицы размерности 3×3 , а Σ — диагональная матрица размерности 3×3 с неотрицательными элементами. Подставим разложение в след

$$\operatorname{tr}(R \cdot X \cdot Y^T) = \operatorname{tr}(R \cdot S) = \operatorname{tr}(R \cdot U \cdot \Sigma \cdot V^T) = \operatorname{tr}(\Sigma \cdot V^T \cdot R \cdot U).$$

Заметим, что V , R и U — ортогональные матрицы, поэтому $M = V^T \cdot R \cdot U$ — также ортогональная. Это означает, что $\vec{m}_j^T \cdot \vec{m}_j = 1$ для каждого столбца \vec{m}_j матрицы M . Следовательно, все элементы m_{ij} матрицы M не превосходят единицы

$$1 = \vec{m}_j^T \cdot \vec{m}_j = \sum_{i=1}^3 m_{ij}^2 \Rightarrow m_{ij}^2 \leq 1 \Rightarrow |m_{ij}| \leq 1.$$

Вспомним, что Σ — диагональная матрица с неотрицательными элементами $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \geq 0$. Поэтому

$$\operatorname{tr}(\Sigma \cdot M) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \cdot m_{ii} \leq \sum_{i=1}^3 \sigma_i.$$

Поэтому след максимизируется при $m_{ii} = 1 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$. Так как M — ортогональная матрица, то она должна быть единичной [2]

$$I = M = V^T \cdot R \cdot U \Rightarrow V = R \cdot U \Rightarrow R = V \cdot U^T.$$

Эти два шага повторяются, пока не будет достигнут желаемый результат, то есть пока расстояние между двумя множествами \vec{k}_s и $R \cdot \vec{s} + \vec{b}$ для всех $\vec{s} \in S$ не будет сведено к минимуму.

1.2.2 Итеративный алгоритм ближайших точек с нормалями

Отличием данного алгоритма (Normal ICP) [3] является то, что он рассматривает каждую точку вместе с локальными особенностями поверхности

$$E(k, R, b) = \sum_{s \in S} \alpha_{point} \cdot \left\| \vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b} \right\|^2 + \alpha_{plane} \cdot \left| \vec{n}_s^T \cdot (\vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b}) \right| \rightarrow \min_{k, R, b},$$

где α_{point} и α_{plane} — константы, а \vec{n}_s — нормаль к точке \vec{s} на исходном облаке. Для улучшения работы алгоритма убираются

- 1) вершины, нормали которых слишком отличаются от нормалей ближайших соседей из целевого облака;
- 2) вершины, которые находятся далеко от соседей из целевого облака;
- 3) вершины, которые находятся на краю объектов.

1.3 Идеи

1.3.1 Симметричный итеративный алгоритм ближайших точек

Для каждой точки из исходного облака ищем ближайшую точку на целевом облаке. Вычисляем матрицу поворота и вектор смещения для исходного облака. Далее для каждой точки из целевого облака находим ближайшую точку на исходном облаке, оцениваем матрицу поворота и вектор смещения для целевого облака и повторяем все действия снова.

1.3.2 Выбор исходного и целевого облаков точек

В качестве исходного облака можно брать то, где точек меньше, а в качестве целевой — то, где точек больше. Таким образом нужно будет найти меньше соответствующих пар точек.

2 РАССТОЯНИЕ ХАУСДОРФА

2.1 Теоретические основы

Метрическое пространство — это пара (S, d) , состоящая из множества S и метрики $d : S \times S \rightarrow \mathbb{R}$, то есть для любых $x, y, z \in S$ выполняется

- 1) $d(x, y) \geq 0$;
- 2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ — аксиома тождества;
- 3) $d(x, y) = d(y, x)$ — аксиома симметрии;
- 4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ — неравенство треугольника.

Метрическое пространство (S, d) называется сепарабельным, если существует не более чем счётное множество $\Gamma \subset S$ такое, что

$$(\forall x \in S) (\forall \varepsilon > 0) (\exists y \in \Gamma) : d(x, y) < \varepsilon.$$

Метрическое пространство (S, d) называется полным, если в нём любая фундаментальная последовательность сходится. Примером полного сепарабельного метрического пространства есть \mathbb{R}^n с евклидовым расстоянием.

2.2 Расстояние Хаусдорфа

Расстояние Хаусдорфа определяется на множестве всех непустых замкнутых подмножеств пространства \mathbb{R}^n .

Пусть E и F — непустые замкнутые подмножества \mathbb{R}^n . Расстояние Хаусдорфа между E и F определяется как

$$H(E, F) = \inf \{\varepsilon \geq 0 \mid E \subset F + \varepsilon, F \subset E + \varepsilon\}, \quad (2.1)$$

где $E + \varepsilon$ — объединение замкнутых шаров с радиусом ε и центром в точке $x \in E$

$$E + \varepsilon = \bigcup_{x \in E} \{\overline{B}_\varepsilon(x)\}.$$

Проверим асиомы метрики для расстояния Хаусдорфа $H(E, F)$, заданного формулой (2.1).

- 1) $H(E, F) \geq 0$. Это следует из определения (2.1), так как точная нижняя грань величины $\varepsilon \geq 0$ неотрицательна.
- 2) $H(E, F) = 0$ тогда и только тогда, когда $E = F$. Последнее равенство равносильно двум условиям: $E \subset F$ и $F \subset E$. Это можно записать через элементы множеств: если $x \in E$, то $x \in F$, и если $x \in F$, то $x \in E$.

Пусть $x \in E$ и $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $F + \varepsilon \supset E$, то есть $x \in F + \varepsilon$.

Воспользуемся определением (2.2)

$$x \in \bigcup_{y \in F} \overline{B}_\varepsilon(y).$$

Если x принадлежит объединению множеств, то он принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Значит, найдётся такой $y_\varepsilon \in F$, что $x \in \overline{B}_\varepsilon(y_\varepsilon)$, то есть $d(y_\varepsilon, x) \leq \varepsilon$. Это выполнено при любом $\varepsilon \geq 0$, следовательно, x либо лежит в F , либо является его предельной точкой. Но F — замкнутое множество, откуда следует, что $x \in F$.

Вторая часть доказывается аналогично.

С другой стороны, если $E = F$, то $E \subset F$ и $F \subset E$, значит $\varepsilon = 0$ и $H(E, F) = 0$.

- 3) $H(E, F) = H(F, E)$ следует из симметричности определения расстояния Хаусдорфа.
- 4) $H(E, F) \leq H(E, F) + H(F, G)$ для любых замкнутых множеств E, F, G

из \mathbb{R}^n . Нужно проверить, выполняется ли следующее следствие

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{E,G} \geq H(E, G), \\ \varepsilon_{G,F} \geq H(G, F) \end{array} \right\} \stackrel{?}{\Rightarrow} E \subset F + \varepsilon_{G,F} + \varepsilon_{E,G}.$$

Используем те же действия, что и при проверке второго условия. Для первой строки системы получаем, что из того, что $x \in E$ и $G + \varepsilon_{E,G} \supset E$, следует что $x \in G$. Используя условие из второй строки, получаем, что при этом $F + \varepsilon_{G,F} \supset G$, то есть $x \in F + \varepsilon_{G,F}$, следовательно, при $\varepsilon_{E,G} \geq 0$ выполняется и $x \in F + \varepsilon_{G,F} + \varepsilon_{E,G}$. Вспоминая, что изначально x лежал в множестве E , видим, что следствие (4) выполняется, то есть неравенство треугольника справедливо.

Аксиомы метрики выполняются, значит, расстояние Хаусдорфа — метрика на замкнутых множествах из \mathbb{R}^n .

2.2.1 Пример 1

Найдём расстояние Хаусдорфа между двумя эллипсами (рис. 2.1) [4]

$$\begin{aligned} E : \frac{x^2}{4} + 4y^2 = 1, \\ F : 4(x - 2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1. \end{aligned}$$

Пунктиром нарисованы эллипсы $E + \varepsilon$ и $F + \varepsilon$ такие, чтобы выполнялось (2.1). В данном случае ε — это расстояние между точками A и B , которое равно $\varepsilon = 1.5 - (-2) = 3.5$. Поэтому $H(E, D) = 3.5$.

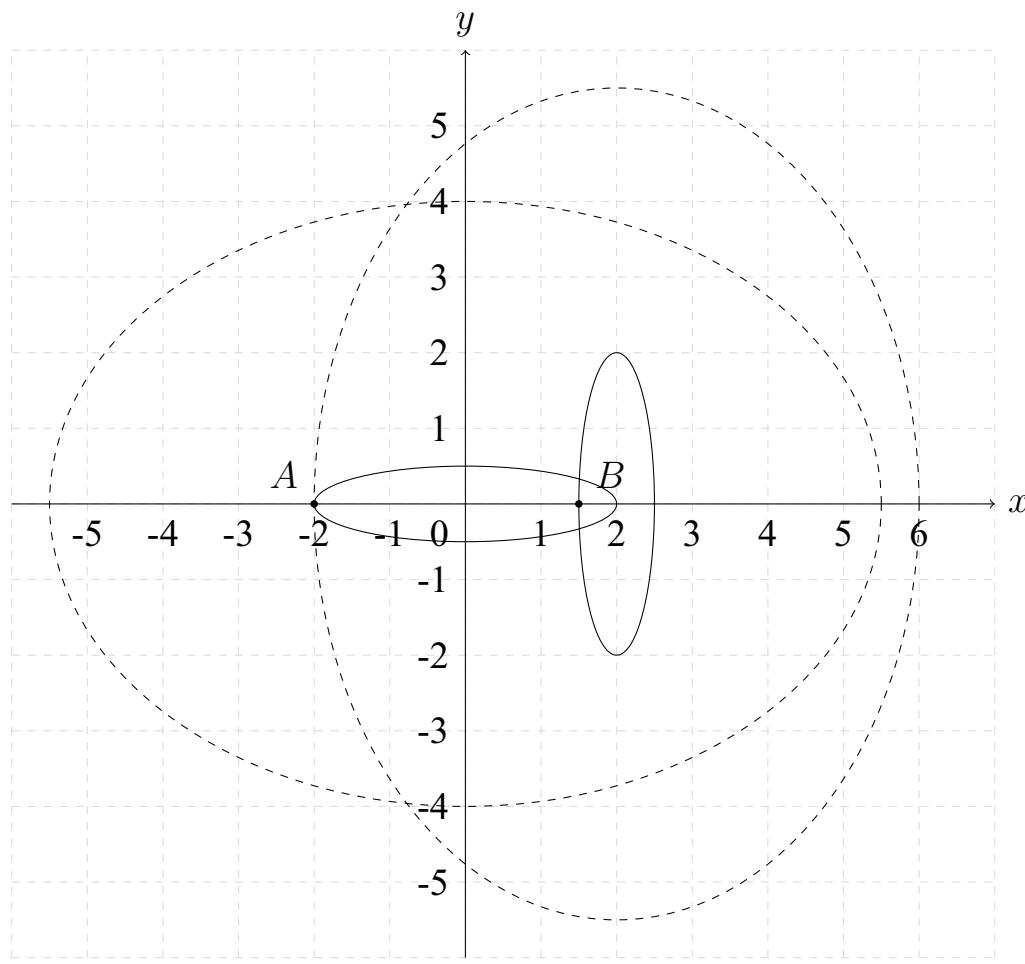


Рисунок 2.1 – Эллипсы, между которыми ищем расстояние Хаусдорфа

2.2.2 Пример 2

Пусть (X, d) — метрическое пространство и $A \subset X$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Множество C — ε -сеть для множества A , если для каждого $x \in A$ найдётся такой $y \in C$, что $d(x, y) < \varepsilon$ или

$$\bigcup_{y \in C} B(y, \varepsilon) \supset A.$$

Тогда расстояние Хаусдорфа между множеством A и ε -сетью C на нём равно $H(C, A) = \varepsilon$.

Покажем это. Найдём расстояние Хаусдорфа

$$H(C, A) = \inf \{\varepsilon \geq 0 \mid C + \varepsilon \supset A, A + \varepsilon \supset C\}.$$

По определению

$$C + \varepsilon = \bigcup_{y \in C} \overline{B}(y, \varepsilon) \supset \bigcup_{y \in C} B(y, \varepsilon) \supset A.$$

С другой стороны,

$$A + \varepsilon = \bigcup_{x \in A} \overline{B}(x, \varepsilon) \supset A \supset C.$$

Получили, что $C + \varepsilon \supset A$ и $A + \varepsilon \supset C$, то есть $H(C, A) = \varepsilon$.

2.3 Случайные величины

Имеем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ – борелевская σ -алгебра на \mathbb{R}^n , \mathbb{P} – вероятностная мера на \mathcal{F} .

Есть два определения случайной величины:

1) функция $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется случайной величиной, если

$$\forall \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \quad \xi^{-1}(\Delta) = \{\omega \mid \xi(\omega) \in \Delta\} \in \mathcal{F};$$

2) функция $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется случайной величиной, если

$$\forall c \in \mathbb{R} : \quad \{\omega \mid \xi(\omega) \leq c\} = \xi^{-1}((-\infty, c]) \in \mathcal{F}.$$

Проверим, является ли расстояние Хаусдорфа

$$\gamma = H \left(AE + \vec{b} + \vec{\xi}, F \right) = H \left(\xi(E), F \right)$$

случайной величиной, где ξ — случайное отображение из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n .

По определению (2.1)

$$\begin{aligned} \gamma &= \inf \{ \varepsilon \geq 0 \mid \xi(E) + \varepsilon \subset F, F + \varepsilon \subset \xi(E) \} = \\ &= \inf \left\{ \varepsilon \geq 0 \mid \bigcup_{x \in \xi(E)} \overline{B}_\varepsilon(x) \subset F, \bigcup_{x \in F} \overline{B}_\varepsilon(x) \subset \xi(E) \right\}. \end{aligned}$$

Чтобы это проверить, нужно выяснить, является ли случайной величиной число $\varepsilon > 0$. Если получится, то

$$\forall c \in \mathbb{R} : \quad \{ \omega \mid \inf \varepsilon(\omega) \leq c \} = \bigcup_{\varepsilon} \{ \omega \mid \varepsilon(\omega) \leq c \}.$$

Каждое множество, которые стоит под знаком объединения по определению принадлежит σ -алгебре \mathcal{F} , и их счётное объединение принадлежит σ -алгебре \mathcal{F} , так как она замкнута относительно счётной операции объединения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Zhang, Zhengyou. Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces / Zhengyou Zhang // *International journal of computer vision*. — 1994. — October. — Vol. 13. — Pp. 119–152.
- 2 Sorkine-Hornung, Olga. Least-Squares Rigid Motion Using SVD / Olga Sorkine-Hornung, Michael Rabinovich. — 2017. — January. — Technical note.
- 3 Li, Hao. Global Correspondence Optimization for Non-Rigid Registration of Depth Scans / Hao Li, Robert W. Sumner, Mark Pauly // *Computer Graphics Forum (Proc. SGP'08)*. — 2008. — July. — Vol. 27, no. 5.
- 4 Crownover, R.M. Introduction to fractals and chaos / R.M. Crownover // Jones and Bartlett books in mathematics. — Jones and Bartlett, 1995.