ОГЛАВЛЕНИЕ

ВСТУПЛЕНИЕ

Актуальность работы Оценка положения камеры по облакам точек лежит в основе сканирования объектов с помощью 3D сканера. Для решения этой задачи используется итеративный алгоритм ближайших точек и его модификации, однако они учитывают только расстояния между точками двух множеств. Взаимосвязь между точками одного облака содержит дополнительную информацию, которая может повысить качество оценки перемещения камеры.

Объект исследования — методы оценки параметров камеры.

Предмет исследования — алгоритмы сопоставления облаков точек.

Цель исследования. Разработка эффективного алгоритма сопоставления двух облаков точек.

Задания следующие:

1) исследовать существующие алгоритмы сопоставления облаков точек;
2) предложить альтернативный алгоритм сопоставления облаков точек.

1 ТЕОРИЯ

1.1 Постановка задачи.

Есть два облака точек: исходное S (source) и целевое T (target). К точкам исходного множества $\vec{s} \in S$ применили поворот $R \in \mathbb{R}^{3\times3}$ и перемещение $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$, а также в процессе сканирования появился аддитивный гауссовый шум с неизвестной дисперсией

$$\vec{k}_s = R \cdot \vec{s} + \vec{b} + \vec{\xi}_s, \qquad \vec{\xi}_s \sim N\left(\vec{0}, \sigma^2 \cdot I\right) \tag{1.1}$$

где $k\ :\ S \to T$ — разметка, то есть функция, которая сопоставляет каждой точке из исходного множества точку из целевого множества.

Задача состоит в таком выборе матрицы R и вектора $\vec{b}$, при которых расстояние между множествами $\vec{k}_s$ и $R \cdot \vec{s} + \vec{b}$ было бы наименьшим. В том случае, когда S и T — конечны, можно воспользоваться обычным методом наименьших квадратов

$$E\left(k, R, b\right) = \sum_{s\in S} \left(\vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b}\right)^2 \to \min_{k,R,b}. \tag{1.2}$$

Сумма квадратов отклонений между векторами — это то же самое, что сумма квадратов отклонений между проекциями по каждой координате

$$E\left(k, R, b\right) = E_x\left(k, R, b\right) + E_y\left(k, R,b\right) + E_z\left(k, R, z\right) \to \min_{k,R,b}.$$

Найдём, чему равна проекция произведения матрицы R на вектор s на все координаты

$$R \cdot \vec{s} = \begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & r_{yy} & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{zy} & r_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx} \cdot s_x + r_{xy} \cdot s_y + r_{xz} \cdot s_z \\ r_{yx} \cdot s_x + r_{yy} \cdot s_y + r_{yz} \cdot s_z \\ r_{zx} \cdot s_x + r_{zy} \cdot s_y + r_{zz} \cdot s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_x \cdot \vec{s} \\ \vec{r}_y \cdot \vec{s} \\ \vec{r}_z \cdot \vec{s} \end{bmatrix},$$

где первая строка получившегося вектора — проекция $R \cdot \vec{s}$ на ось x, вторая строка — проекция на ось y, третья — на ось z.

Распишем сумму квадратов отклонений через проекции

$$E\left(k, R, b\right) = \sum_{s \in S} \left(\vec{r}_x \cdot \vec{s} + \vec{r}_y \cdot \vec{s} + \vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_x + b_y + b_z - k_{s_x} - k_{s_y} - k_{s_z}\right)^2 =$$
$$= \sum_{s \in S} \left[\left(\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}\right) + \left(\vec{r}_y \cdot \vec{s} + b_y - k_{s_y}\right) + \left(\vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_z - k_{s_z}\right)\right]^2 =$$
$$= \sum_{s \in S} \left(\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}\right)^2 + \sum_{s \in S} \left(\vec{r}_y \cdot \vec{s} + b_y - k_{s_y}\right)^2 + \sum_{s \in S} \left(\vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_z - k_{s_z}\right)^2.$$

Множество параметров, которые входят в каждую из трёх сумм, разные. Тогда можем минимизировать проекции суммы квадратов отклонений на все координаты отдельно

$$\begin{cases} E_x = \sum\limits_{s \in S} \left(\vec{r}_x \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}\right)^2 \to \min, \\ E_y = \sum\limits_{s \in S} \left(\vec{r}_y \cdot \vec{s} + b_y - k_{s_y}\right)^2 \to \min, \\ E_z = \sum\limits_{s \in S} \left(\vec{r}_z \cdot \vec{s} + b_z - k_{s_z}\right)^2 \to \min. \end{cases}$$

Имеем линейную функциию, которая возводится в квадрат. Это выпуклая фунция. Значит, можно взять частные производные по r_i и x_i для всех $i \in \{x, y, z\}$ и приравнять их к нулю. Получим 4 уравнения для каждой координаты. Запишем для E_x, для остальных — аналогично

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial b_x} = \sum\limits_{s \in S} 2\left(\vec{r_x} \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}\right) = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xx}} = \sum\limits_{s \in S} 2\left(\vec{r_x} \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}\right) \cdot s_x = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xy}} = \sum\limits_{s \in S} 2\left(\vec{r_x} \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}\right) \cdot s_y = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xz}} = \sum\limits_{s \in S} 2\left(\vec{r_x} \cdot \vec{s} + b_x - k_{s_x}\right) \cdot s_z = 0. \end{cases}$$

Решаем первое уравнение относительно b_x. Получаем

$$\sum_{s \in S} b_x = \sum_{s \in S} \left(k_{s_x} - \vec{r_x} \cdot \vec{s}\right).$$

Слева получили сумму одинаковых слагаемых

$$|S| \cdot b_x + \vec{r}_x \sum_{s \in S} \vec{s} = \sum_{s \in S} k_{s_x}.$$

Распишем скалярное произведение

$$|S| \cdot b_x + \sum_{s \in S} r_{xx} \cdot s_x + \sum_{s \in S} r_{xy} \cdot s_y + \sum_{s \in S} r_{xz} \cdot s_z = \sum_{s \in S} k_{s_x}.$$

Решаем остальные уравнения относительно r_{xi} для $i \in \{x, y, z\}$. Видим, что для разных i производная по r_{xi} одинаковая, потому находим решение для r_{xx}, а для остальных решение будет аналогичным

$$\vec{r}_x \sum_{s \in S} \vec{s} \cdot s_x = \sum_{s \in S} \left(k_{s_x} - b_x\right) \cdot s_x.$$

Распишем скалярное произведение

$$\sum_{s\in S} r_{xx}\cdot s_x^2+\sum_{s\in S} r_{xy}\cdot s_x\cdot s_y+\sum_{s\in S} r_{xz}\cdot s_x\cdot s_z+\sum_{s\in S} b_x\cdot s_x=\sum_{s\in S} k_{s_x}\cdot s_x.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} |S|\cdot b_x+\sum\limits_{s\in S} r_{xx}\cdot s_x+\sum\limits_{s\in S} r_{xy}\cdot s_y+\sum\limits_{s\in S} r_{xz}\cdot s_z=\sum\limits_{s\in S} k_{s_x}, \\ \sum\limits_{s\in S} r_{xx}\cdot s_x^2+\sum\limits_{s\in S} r_{xy}\cdot s_x\cdot s_y+\sum\limits_{s\in S} r_{xz}\cdot s_x\cdot s_z+\sum\limits_{s\in S} b_x\cdot s_x=\sum\limits_{s\in S} k_{s_x}\cdot s_x, \\ \sum\limits_{s\in S} r_{xx}\cdot s_x\cdot s_y+\sum\limits_{s\in S} r_{xy}\cdot s_y^2+\sum\limits_{s\in S} r_{xz}\cdot s_y\cdot s_z+\sum\limits_{s\in S} b_x\cdot s_y=\sum\limits_{s\in S} k_{s_x}\cdot s_y, \\ \sum\limits_{s\in S} r_{xx}\cdot s_x\cdot s_z+\sum\limits_{s\in S} r_{xy}\cdot s_y\cdot s_z+\sum\limits_{s\in S} r_{xz}\cdot s_z^2+\sum\limits_{s\in S} b_x\cdot s_z=\sum\limits_{s\in S} k_{s_x}\cdot s_z. \end{cases}$$

Запишем её в матричном виде

$$\begin{bmatrix} |S| & \sum\limits_{s\in S} s_x & \sum\limits_{s\in S} s_y & \sum\limits_{s\in S} s_z \\ \sum\limits_{s\in S} s_x & \sum\limits_{s\in S} s_x^2 & \sum\limits_{s\in S} s_x\cdot s_y & \sum\limits_{s\in S} s_x\cdot s_z \\ \sum\limits_{s\in S} s_y & \sum\limits_{s\in S} s_x\cdot s_y & \sum\limits_{s\in S} s_y^2 & \sum\limits_{s\in S} s_y\cdot s_z \\ \sum\limits_{s\in S} s_z & \sum\limits_{s\in S} s_x\cdot s_z & \sum\limits_{s\in S} s_y\cdot s_z & \sum\limits_{s\in S} s_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ r_{xx} \\ r_{xy} \\ r_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{s\in S} k_{s_x} \\ \sum\limits_{s\in S} k_{s_x}\cdot s_x \\ \sum\limits_{s\in S} k_{s_x}\cdot s_y \\ \sum\limits_{s\in S} k_{s_x}\cdot s_z \end{bmatrix}.$$

Введём обозначения:

$$\sum_{s\in S} s_i = S_i, \qquad i \in \{x, y, z\},$$

$$\sum_{s\in S} s_i s_j = S_{ij}, \qquad i, j \in \{x, y, z\},$$

$$\sum_{s\in S} k_{s_x} = k,$$

$$\sum_{s\in S} k_{s_x} \cdot s_i = k_i, \qquad i \in \{x, y, z\}.$$

Уравнение приняло следующий вид

$$\begin{bmatrix} |S| & S_x & S_y & S_z \\ S_x & S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_y & S_{xy} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_z & S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ r_{xx} \\ r_{xy} \\ r_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}.$$

Используем метод Крамера для решения системы линейных уранений. Определитель Δ

$$\Delta = |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - \sum_{i\in\{x,y,z\}} L_i + 2 \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} -$$
$$- \sum_{i,j,k\in\{x,y,z\}} L_{ijk} + 2 \sum_{i,j\in\{x,y,z\}} L_{ij},$$

где введены обозначения при $i, j, k \in \{x, y, z\}$, $i \neq j \neq k$

$$L_i = S_{jk} \cdot \left(|S| \cdot S_{ii} - S_i^2\right),$$
$$L_{ij} = S_i \cdot S_j \cdot \left(S_{ij} \cdot S_k - S_{ik} \cdot S_{jk}\right),$$
$$L_{ijk} = S_i^2 \cdot S_{jj} \cdot S_{kk}.$$

Определитель Δ_b

$$\Delta_b = k \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - \sum_{i \in \{x,y,z\}} L_i^b + 2 \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - \sum_{i,j,k \in \{x,y,z\}} L_{ijk}^b +$$
$$+ \sum_{i,j \in \{x,y,z\}} L_{ij}^b + \sum_{i,j \in \{x,y,z\}} \left(L_{ij}^b\right)',$$

где введены обозначения

$$L_{ij}^b = S_{ij}^2 \cdot S_k \cdot k_k,$$
$$L_{ijk}^b = S_i \cdot S_{jj} \cdot S_{kk},$$
$$\left(L_{ij}^b\right)' = \left(S_i \cdot k_j + S_k \cdot k_i\right) \cdot \left(S_{ij} \cdot S_{kk} - S_{jk} \cdot S_{ik}\right)$$

при $i, j, k \in \{x, y, z\}$, $i \neq j \neq k$. Определитель Δ_{xx}

$$\Delta_{xx} = -k \cdot S_x \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} + k \cdot S_x \cdot S_{yz}^2 + k \cdot S_y \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} - k \cdot S_y \cdot_{xz} \cdot S_{yz} -$$
$$-k \cdot S_z \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} + k \cdot S_z \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} + k_x \cdot |S| \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - k_x \cdot |S| \cdot S_{yz}^2 -$$
$$-k_x \cdot S_y^2 \cdot S_{zz} + 2 \cdot k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{yz} - k_x \cdot S_z^2 \cdot S_{yy} - k_y \cdot |S| \cdot S_{yz} \cdot S_{zz} +$$
$$+k_y \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} + k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{zz} - k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} - k_y \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xz} +$$
$$+k_y \cdot S_z^2 \cdot S_{xy} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} - k_z \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} - k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} +$$
$$+k_z \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{yy} + k_z \cdot S_y^2 \cdot S_{xz} - k_z \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xy}.$$

Определитель Δ_{xy}

$$\Delta_{xy} = k \cdot S_x \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} - k \cdot S_x \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - k \cdot S_y \cdot S_{xx} \cdot S_{zz} + k \cdot S_y \cdot S_{xz}^2 +$$
$$+ k \cdot S_z \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} - k \cdot S_z \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} - k_x \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} + k_x \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} +$$
$$+ k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{zz} - k_x \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{yz} - k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xz} + k_x \cdot S_z^2 \cdot S_{xy} +$$
$$+ k_y \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{zz} - k_y \cdot |S| \cdot S_{xz}^2 - k_y \cdot S_x^2 \cdot S_{zz} + 2 \cdot k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xz} -$$
$$- k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xz} - k_y \cdot S_z^2 \cdot S_{xx} - k_z \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} +$$
$$+ k_z \cdot S_x^2 \cdot S_{yz} - k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xz} - k_z \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xy} + k_z \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xx}.$$

Определитель Δ_{xz}

$$\Delta_{xz} = -k \cdot S_x \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} + k \cdot S_x \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} + k \cdot S_y \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} -$$
$$- k \cdot S_y \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} - k \cdot S_z \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} + k \cdot S_z \cdot S_{xy}^2 + S_x \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} -$$
$$- k_x \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} - k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} + k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yy} + k_x \cdot S_y^2 \cdot S_{xz} -$$
$$- k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xy} - k_y \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} + k_y \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} + k_y \cdot S_x^2 \cdot S_{yz} -$$
$$- k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xz} - k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xy} + k_y \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xx} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} -$$
$$- k_z \cdot |S| \cdot S_{xy}^2 - k_z \cdot S_x^2 \cdot S_{yy} + 2 \cdot k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xy} - k_z \cdot S_y^2 \cdot S_{xx}.$$

Известно, что решениями есть следующие выражения

$$b_x = \frac{\Delta_b}{\Delta},\ r_{xx} = \frac{\Delta_{xx}}{\Delta},\ r_{xy} = \frac{\Delta_{xy}}{\Delta},\ r_{xz} = \frac{\Delta_{xz}}{\Delta}.$$

Остальные проекции находим аналогичным образом, приравняв частные производные от E_x и E_y к нулю.

Два множества зачастую не имеют взаимно-однозначного отображения. Это может приводить к тому, что два отрезка, расположенные под прямым углом в одном облаке точек, могут соответствовать трём отрезкам в другом облаке точек, между соседними парами которых углы по 45 градусов.

1.2 Существующие решения.

1.2.1 Итеративный алгоритм ближайших точек

Итеративный алгоритм ближайших точек (Iterative Closest Points, ICP) [1] состоит из двух чередующихся операций. Инициализируется алгоритм единичной матрицей $R = I$ и нулевым вектором смещения $\vec{b} = \vec{0}$. Первая итерация состоит в поиске разметки с фиксированной трансформацией

$$\sum_{s \in S} \left\| \vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b} \right\|^2 \to \min_{k} . \tag{1.3}$$

На следующей итерации происходит поиск поворота и смещения при текущей разметке

$$\sum_{s \in S} \left\| \vec{k}_s - R \cdot \vec{s} - \vec{b} \right\|^2 \to \min_{R, \vec{b}} . \tag{1.4}$$

Эти два шага повторяются, пока не будет достигнут желаемый результат, то есть пока расстояние между двумя облаками точек не будет сведено к минимуму.

1.2.2 Итеративный алгоритм ближайших точек с нормалями

Отличием данного алгоритма (Normal ICP) [2] является то, что он рассматривает каждую точку вместе с локальными особенностями поверхности

$$E\left(k,R,b\right)=\sum_{s\in S}\alpha_{point}\cdot\left\|\vec{k}_s-R\cdot\vec{s}-\vec{b}\right\|^2+\alpha_{plane}\cdot\left|\vec{n}_s^T\cdot\left(\vec{k}_s-R\cdot\vec{s}-\vec{b}\right)\right|\to\min_{k,R,b},\tag{1.5}$$

где α_{point} и α_{plane} — константы, а $\vec{n}_s$ — нормаль к точке $\vec{s}$ на исходном облаке. Для улучшения работы алгоритма убираются

1) вершины, нормали которых слишком отличаются от нормалей ближайших соседей из целевого облака;
2) вершины, которые находятся далеко от соседей из целевого облака;
3) вершины, которые находятся на краю объектов.

1.3 Идеи

1.3.1 Симметричный итеративный алгоритм ближайших точек

Для каждой точки из исходного облака ищем ближайшую точку на целевом облаке. Вычисляем матрицу поворота и вектор смещения для исходного облака. Далее для каждой точки из целевого облака находим ближайшую точку на исходном облаке, оцениваем матрицу поворота и вектор смещения для целевого облака и повторяем все действия снова.

1.3.2 Выбор исходного и целевого облаков точек

В качетсве исходного облака можно брать то, где точек меньше, а в качестве целевой — то, где точек больше. Таким образом нужно будет найти меньше соответствующих пар точек.

2 РАССТОЯНИЕ ХАУСДОРФА

2.1 Теоретические основы

Метрическое пространство — это пара (S, d), состоящая из множества S и метрики $d\ :\ S \times S \to \mathbb{R}$, то есть для любых $x, y, z \in S$ выполняется

1) $d\left(x, y\right) \geq 0$;
2) $d\left(x, y\right) = 0 \iff x = y$ — аксиома тождества;
3) $d\left(x, y\right) = d\left(y, x\right)$ — аксиома симметрии;
4) $d\left(x, z\right) \leq d\left(x, y\right) + d\left(y, z\right)$ — неравенство треугольника.

Метрическое пространство (S, d) называется сепарабельным, если существует не более чем счётное множество $\Gamma \subset S$ такое, что

$$(\forall x \in S)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists y \in \Gamma)\ : \qquad d\left(x, y\right) < \varepsilon.$$

Метрическое пространство (S, d) называется полным, если в нём любая фундаментальная последовательность сходится. Примером полного сепарабельного метрического пространства есть $\mathbb{R}^n$ с евклидовым расстоянием.

2.2 Расстояние Хаусдорфа

Расстояние Хаусдорфа определяется на множестве всех непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть E и F — непустые замкнутые подмножества $\mathbb{R}^n$. Расстояние Хаусдорфа между E и F определяется как

$$H\left(E, F\right) = \inf\left\{\varepsilon \geq 0 \mid E \subset F + \varepsilon,\ F \subset E + \varepsilon\right\}, \qquad (2.1)$$

где $E + \varepsilon$ — объединение замкнутых шаров с радиусом ε и центром в точке $x \in E$

$$E + \varepsilon = \bigcup_{x \in E} \left\{ \overline{B}_\varepsilon \left(x \right) \right\}.$$

Проверим асиомы метрики для расстояния Хаусдорфа $H\left(E, F\right)$, заданного формулой (2.1).

1) $H\left(E, F\right) \geq 0$. Это следует из определения (2.1), так как точная нижняя грань величины $\varepsilon \geq 0$ неотрицательна.

2) $H\left(E, F\right) = 0$ тогда и только тогда, когда $E = F$. Последнее равенство равносильно двум условиям: $E \subset F$ и $F \subset E$. Это можно записать через элементы множеств: если $x \in E$, то $x \in F$, и если $x \in F$, то $x \in E$.

   Пусть $x \in E$ и $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $F + \varepsilon \supset E$, то есть $x \in F + \varepsilon$. Воспользуемся определением (2.2)

$$x \in \bigcup_{y \in F} \overline{B}_\varepsilon \left(y \right).$$

   Если x принадлежит объединению множеств, то он принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Значит, найдётся такой $y_\varepsilon \in F$, что $x \in \overline{B}_\varepsilon \left(y_\varepsilon \right)$, то есть $d\left(y_\varepsilon, x\right) \leq \varepsilon$. Это выполнено при любом $\varepsilon \geq 0$, следовательно, x либо лежит в F, либо является его предельной точкой. Но F — замкнутое множество, откуда следует, что $x \in F$.

   Вторая часть доказывается аналогично.

   С другой стороны, если $E = F$, то $E \subset F$ и $F \subset E$, значит $\varepsilon = 0$ и $H\left(E, F\right) = 0$.

3) $H\left(E, F\right) = H\left(F, E\right)$ следует из симметричности определения расстояния Хаусдорфа.

4) $H\left(E, F\right) \leq H\left(E, F\right) + H\left(F, G\right)$ для любых замкнутых множеств E, F, G

из $\mathbb{R}^n$. Нужно проверить, выполняется ли следуеющее следствие

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{E,G} \geq H\left(E,G\right), \\ \varepsilon_{G,F} \geq H\left(G,F\right) \end{aligned}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} E \subset F + \varepsilon_{G,F} + \varepsilon_{G,E}.$$

Используем те же действия, что и при проверке второго условия. Для первой стоки системы получаем, что из того, что $x \in E$ и $G + \varepsilon_{E,G} \supset E$, следует что $x \in G$. Используя условие из второй строки, получаем, что при этом $F + \varepsilon_{G,F} \supset G$, то есть $x \in F + \varepsilon_{G,F}$, следовательно, при $\varepsilon_{E,G} \geq 0$ выполняется и $x \in F + \varepsilon_{G,F} + \varepsilon_{E,G}$. Вспоминая, что изначально x лежал в множестве E, видим, что следствие (4) выполняется, то есть неравенство треугольника справделиво.

Аксиомы метрики выполняются, значит, расстояние Хаусдорфа — метрика на замкнутых множествах из $\mathbb{R}^n$.

2.2.1 Пример 1

Найдём расстояние Хаусдорфа между двумя эллипсами (рис. 2.1) [3]

$$E\ :\ \frac{x^2}{4} + 4y^2 = 1,$$
$$F\ :\ 4\left(x-2\right)^2 + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Пунктиром нарисованы эллипсы $E+\varepsilon$ и $F+\varepsilon$ такие, чтобы выполнялось (2.1). В данном случае ε — это расстояние между точками A и B, которое равно $\varepsilon = 1.5 - (-2) = 3.5$. Поэтому $H\left(E,D\right) = 3.5$.

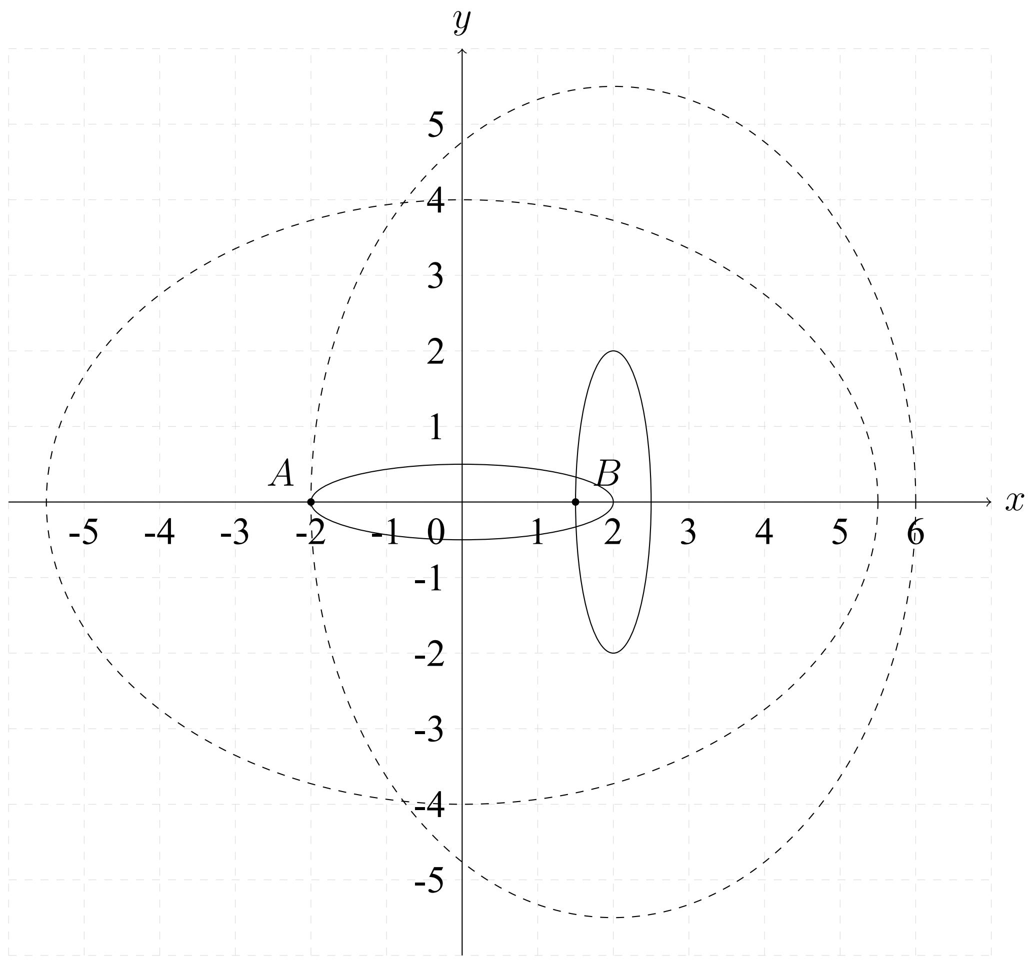

Рисунок 2.1 — Эллипсы, между которыми ищем расстояние Хаусдорфа

2.2.2 Пример 2

Пусть (X, d) — метрическое пространство и $A \subset X$. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Множество C — ε-сеть для множества A, если для каждого $x \in A$ найдётся такой $y \in C$, что $d\left(x, y\right) < \varepsilon$ или

$$\bigcup_{y \in C} B\left(y, \varepsilon\right) \supset A.$$

Тогда расстояние Хаусдорфа между множеством A и ε-сетью C на нём равно $H\left(C, A\right) = \varepsilon$.

Покажем это. Найдём расстояне Хаусдорфа

$$H\left(C,A\right)=\inf\left\{\varepsilon\geq 0\mid C+\varepsilon\supset A,\ A+\varepsilon\supset C\right\}.$$

По определению

$$C+\varepsilon=\bigcup_{y\in C}\overline{B}\left(y,\varepsilon\right)\supset\bigcup_{y\in C}B\left(y,\varepsilon\right)\supset A.$$

С другой стороны,

$$A+\varepsilon=\bigcup_{x\in A}\overline{B}\left(x,\varepsilon\right)\supset A\supset C.$$

Получили, что $C+\varepsilon\supset A$ и $A+\varepsilon\supset C$, то есть $H\left(C,A\right)=\varepsilon$.

2.3 Случайные величины

Имеем вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, где $\Omega=\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}=\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^n\right)$ — борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}$ — вероятностная мера на $\mathcal{F}$.

Есть два определения случайной величины:

1) функция $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ называется случайной величиной, если

$$\forall\Delta\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right):\qquad\xi^{-1}\left(\Delta\right)=\left\{\omega\mid\xi\left(\omega\right)\in\Delta\right\}\in\mathcal{F};$$

2) функция $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ называется случайной величиной, если

$$\forall c\in\mathbb{R}:\qquad\left\{\omega\mid\xi\left(\omega\right)\leq c\right\}=\xi^{-1}\left((-\infty,c]\right)\in\mathcal{F}.$$

Проверим, является ли расстояние Хаусдорфа

$$\gamma = H\left(AE + \vec{b} + \vec{\xi}, F\right) = H\left(\xi\left(E\right), F\right)$$

случайной величиной, где ξ — случайное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

По определению (2.1)

$$\gamma = \inf\left\{\varepsilon \geq 0 \mid \xi\left(E\right) + \varepsilon \subset F,\, F + \varepsilon \subset \xi\left(E\right)\right\} =$$
$$= \inf\left\{\varepsilon \geq 0 \;\middle|\; \bigcup_{x \in \xi(E)} \overline{B}_{\varepsilon}\left(x\right) \subset F,\, \bigcup_{x \in F} \overline{B}_{\varepsilon}\left(x\right) \subset \xi\left(E\right)\right\}.$$

Чтобы это проверить, нужно выяснить, является ли случайной величиной число $\varepsilon_n > 0$. Если получится, то

$$\forall c \in \mathbb{R}: \qquad \left\{\omega \;\middle|\; \inf_n \varepsilon_n\left(\omega\right) \leq c\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\omega \mid \varepsilon_n\left(\omega\right) \leq c\right\}.$$

Каждое множество, которые стоит под знаком объединения по определению принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}$, и их счётное объединение принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}$, так как она замкнута относительно счётной операции объединения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Zhang, Zhengyou. Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces / Zhengyou Zhang // *International journal of computer vision*. — 1994. — October. — Vol. 13. — Pp. 119–152.

2 Li, Hao. Global Correspondence Optimization for Non-Rigid Registration of Depth Scans / Hao Li, Robert W. Sumner, Mark Pauly // *Computer Graphics Forum (Proc. SGP'08)*. — 2008. — July. — Vol. 27, no. 5.

3 Crownover, R.M. Introduction to fractals and chaos / R.M. Crownover // Jones and Bartlett books in mathematics. — Jones and Bartlett, 1995.