НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
КАФЕДРА ІНФОРМАЦІЙНОЇ БЕЗПЕКИ

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри

____
(підпис)
М. В. Грайворонський
(ініціали, прізвище)
“____” ____________ 2015 р.

Диплома робота

освітньо-кваліфікаційного рівня “бакалавр”

з напряму підготовки 6.040301 «Прикладна математика»
на тему «Ідентифікація випадкових відображень точкових множин в скінченновимірних просторах»

Виконала студентка 4 курсу групи ФІ-41
Лавягіна Ольга Олексіївна ________ (підпис)
Керівник кандидат ф.-м. наук Рябов Георгій Валентинович ________ (підпис)
Рецензент ________ (підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент _______

Київ — 2018 року

ЗМІСТ

ВСТУП

Значною мірою робота завдячує Андрію Анатолійовичу Дороговцеву — професору, доктору фізико-математичних наук, завідувачу відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України.

Актуальність роботи. Оцінка положення камери по хмарам точок (або точковим множинам) лежить в основі сканування об'єктів за допомогою 3D сканера, одночасній локалізації і картографування. Для розв'язання цих задач використовується ітеративний алгоритм найближчих точок і його модифікації. У зв'язку з розвитком та компактизацією обчислювальної техніки з'явилась можливість реалізовувати алгоритм на маленьких компьютерах (наприклад, бортові компьютери дронів). Оскільки потрібно, щоб такі пристрої працювали надійно, треба ретельно вивчити властивості алгоритму, що використовується.

Об'єкт дослідження — методи оцінки параметрів камери.

Предмет дослідження — алгоритми співставлення точкових множин.

Мета дослідження. Аналіз алгоритму співставлення двох точкових множин та отриманих за його допомогою оцінок невідомих параметрів.

Завдання наступні:

1) застосувати метод найменших квадратів для розв'язання задачі;
2) ознайомитися з ітеративним алгоритмом найближчих точок, що використовується для співставлення двох точкових множин;
3) проаналізувати властивості роботи алгоритму;
4) розробити програмний комплекс для співставлення двох точкових множин на основі алгоритму, що досліджується;
5) ознайомитися з поняттям відстані Хаусдорфа для можливості застосування алгоритму до неперервних множин.

Практичне значення одержаних результатів.

Ітеративний алгоритм найближчих точок можна використовувати для відновлення двовимірних або тривимірних поверхонь, отриманих за допомогою 3D сканера. Результати дослідження вказують напрям подальшої роботи для розроблення кращого алгоритму співставлення двох точкових множин.

Публікації.

XVI Всеукраїнська науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Теоретичні і прикладні проблеми фізики, математики та інформатики».

1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Є дві множини: вихідна $S \subset \mathbb{R}^3$ та цільова $T \subset \mathbb{R}^3$. Точки вихідної множини $\boldsymbol{s} \in S$ повернули за допомогою матриці повороту

$$R \in \mathbb{R}^{3\times3},\ R^T = R^{-1}, \det R = 1$$

та зсунули за допомогою вектора $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$. Також в процесі сканування з'явився адитивний ґаусів шум з невідомою дисперсією

$$\boldsymbol{k_s} = R \cdot \boldsymbol{s} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\xi_s}, \qquad \boldsymbol{\xi_s} \sim N\left(\mathbf{0}, \sigma^2 \cdot I\right), \tag{1.1}$$

де $k : S \to T$ — розмітка, тобто функція, яка співставляє кожну точку вихідної множини з точкою з цільової множини.

Задача полягає в такому виборі матриці R та вектора $\boldsymbol{b}$, при яких відстань між $\boldsymbol{k_s}$ та $R \cdot \boldsymbol{s} + \boldsymbol{b}$ для всіх $\boldsymbol{s} \in S$ була б найменшою.

2 МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

В тому випадку, коли S і T скінченні, можна скористатися звичайним методом найменших квадратів [1]. Виконаємо оцінку невідомих параметрів у виразі (1.1). Для цього вимагаємо, щоб сума квадратів похибок досягала мінімуму. Іншими словами, знайдемо мінімум величини

$$E\left(k, R, \boldsymbol{b}\right) = \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \left\|\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{s}}\right\|^2 = \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \left\|\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}} - R \cdot \boldsymbol{s} - \boldsymbol{b}\right\|^2 \to \min_{k,R,\boldsymbol{b}}. \tag{2.1}$$

Сума квадратів відхилень між векторами — це те ж саме, що і сума квадратів відхилень між проекціями по кожній координаті

$$E\left(k, R, \boldsymbol{b}\right) = E_x\left(k, R, \boldsymbol{b}\right) + E_y\left(k, R, \boldsymbol{b}\right) + E_z\left(k, R, \boldsymbol{b}\right) \to \min_{k,R,\boldsymbol{b}}.$$

Знайдемо, чому дорівнює добуток матриці R та вектора $\boldsymbol{s}$

$$R \cdot \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & r_{xz} \\ r_{yx} & r_{yy} & r_{yz} \\ r_{zx} & r_{zy} & r_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx} \cdot s_x + r_{xy} \cdot s_y + r_{xz} \cdot s_z \\ r_{yx} \cdot s_x + r_{yy} \cdot s_y + r_{yz} \cdot s_z \\ r_{zx} \cdot s_x + r_{zy} \cdot s_y + r_{zz} \cdot s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{r}_y \cdot \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{r}_z \cdot \boldsymbol{s} \end{bmatrix}.$$

Розпишему суму квадратів відхилень через проекції

$$E\left(k, R, \boldsymbol{b}\right) = \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \left(\boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{s} + \boldsymbol{r}_y \cdot \boldsymbol{s} + \boldsymbol{r}_z \cdot \boldsymbol{s} + b_x + b_y + b_z - k_{s_x} - k_{s_y} - k_{s_z}\right)^2 =$$
$$= \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \left[\left(\boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{s} + b_x - k_{s_x}\right) + \left(\boldsymbol{r}_y \cdot \boldsymbol{s} + b_y - k_{s_y}\right) + \left(\boldsymbol{r}_z \cdot \boldsymbol{s} + b_z - k_{s_z}\right)\right]^2 =$$
$$= \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \left(\boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{s} + b_x - k_{s_x}\right)^2 + \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \left(\boldsymbol{r}_y \cdot \boldsymbol{s} + b_y - k_{s_y}\right)^2 + \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \left(\boldsymbol{r}_z \cdot \boldsymbol{s} + b_z - k_{s_z}\right)^2.$$

Множини параметрів, які входять в кожну з трьох сум, різні, тому можемо мінімізувати суми квадратів проекцій відхилень на кожну координату окремо

$$\begin{cases} E_x = \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} \left(\boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{s} + b_x - k_{s_x}\right)^2 & \to \min\limits_{\boldsymbol{r}_x, b_x}, \\ E_y = \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} \left(\boldsymbol{r}_y \cdot \boldsymbol{s} + b_y - k_{s_y}\right)^2 & \to \min\limits_{\boldsymbol{r}_y, b_y}, \\ E_z = \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} \left(\boldsymbol{r}_z \cdot \boldsymbol{s} + b_z - k_{s_z}\right)^2 & \to \min\limits_{\boldsymbol{r}_z, b_z}. \end{cases}$$

Маємо лінійні функції точок вихідної множини, які підносяться до квадрату. Це випуклі функції. Отже, можна взяти часткові похідні по $\boldsymbol{r}_i$ та b_i для всіх $i \in \{x, y, z\}$ та прирівняти їх до нуля. Отримаємо по чотири рівняння для кожної координати. Без втрати загальності запишемо ці рівняння для E_x. Таким чином, экстремальне значення E_x отримаємо в результаті розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial b_x} = \sum\limits_{s\in S} 2\left(\boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{s} + b_x - k_{s_x}\right) = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xx}} = \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} 2\left(\boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{s} + b_x - k_{s_x}\right) \cdot s_x = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xy}} = \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} 2\left(\boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{s} + b_x - k_{s_x}\right) \cdot s_y = 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial r_{xz}} = \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} 2\left(\boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{s} + b_x - k_{s_x}\right) \cdot s_z = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо перше рівняння відносно b_x

$$\sum_{\boldsymbol{s}\in S} b_x = \sum_{\boldsymbol{s}\in S} \left(k_{s_x} - \boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{s}\right).$$

b_x не залежить від $\boldsymbol{b}$

$$|S| \cdot b_x + \boldsymbol{r}_x \sum_{\boldsymbol{s}\in S} \boldsymbol{s} = \sum_{\boldsymbol{s}\in S} k_{s_x}.$$

Розпишемо скалярний добуток

$$|S| \cdot b_x + \sum_{\boldsymbol{s} \in S} r_{xx} \cdot s_x + \sum_{\boldsymbol{s} \in S} r_{xy} \cdot s_y + \sum_{\boldsymbol{s} \in S} r_{xz} \cdot s_z = \sum_{\boldsymbol{s} \in S} k_{s_x}.$$

Розв'язуємо інші рівняння відносно r_{xi} для $i \in \{x, y, z\}$. Без втрати загальності знаходимо розв'язок тольки для r_{xx}

$$\boldsymbol{r}_x \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \boldsymbol{s} \cdot s_x = \sum_{\boldsymbol{s} \in S} (k_{s_x} - b_x) \cdot s_x.$$

Розпишемо скалярний добуток

$$\sum_{\boldsymbol{s} \in S} r_{xx} \cdot s_x^2 + \sum_{\boldsymbol{s} \in S} r_{xy} \cdot s_x \cdot s_y + \sum_{\boldsymbol{s} \in S} r_{xz} \cdot s_x \cdot s_z + \sum_{\boldsymbol{s} \in S} b_x \cdot s_x = \sum_{\boldsymbol{s} \in S} k_{s_x} \cdot s_x.$$

Маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} |S| \cdot b_x + \sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} r_{xx} \cdot s_x + \sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} r_{xy} \cdot s_y + \sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} r_{xz} \cdot s_z = \sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} k_{s_x}, \\ \sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} r_{xx} \cdot s_x^2 + \sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} r_{xy} \cdot s_x \cdot s_y + \sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} r_{xz} \cdot s_x \cdot s_z + \sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} b_x \cdot s_x = \sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} k_{s_x} \cdot s_x, \\ \sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} r_{xx} \cdot s_x \cdot s_y + \sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} r_{xy} \cdot s_y^2 + \sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} r_{xz} \cdot s_y \cdot s_z + \sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} b_x \cdot s_y = \sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} k_{s_x} \cdot s_y, \\ \sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} r_{xx} \cdot s_x \cdot s_z + \sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} r_{xy} \cdot s_y \cdot s_z + \sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} r_{xz} \cdot s_z^2 + \sum\limits_{s \in S} b_x \cdot s_z = \sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} k_{s_x} \cdot s_z. \end{cases}$$

Запишемо її в матричному вигляді

$$\begin{bmatrix} |S| & \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} s_x & \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} s_y & \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} s_z \\ \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} s_x & \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} s_x^2 & \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} s_x \cdot s_y & \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} s_x \cdot s_z \\ \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} s_y & \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} s_x \cdot s_y & \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} s_y^2 & \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} s_y \cdot s_z \\ \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} s_z & \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} s_x \cdot s_z & \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} s_y \cdot s_z & \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} s_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ r_{xx} \\ r_{xy} \\ r_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} k_{s_x} \\ \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} k_{s_x} \cdot s_x \\ \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} k_{s_x} \cdot s_y \\ \sum\limits_{\boldsymbol{s}\in S} k_{s_x} \cdot s_z \end{bmatrix}.$$

Введемо позначення

$$\sum_{\boldsymbol{s}\in S} s_i = S_i, \qquad i \in \{x, y, z\},$$

$$\sum_{\boldsymbol{s}\in S} s_i s_j = S_{ij}, \qquad i, j \in \{x, y, z\},$$

$$\sum_{\boldsymbol{s}\in S} k_{s_x} = K,$$

$$\sum_{\boldsymbol{s}\in S} k_{s_x} \cdot s_i = k_i, \qquad i \in \{x, y, z\}.$$

Рівняння прийняло наступний вигляд

$$\begin{bmatrix} |S| & S_x & S_y & S_z \\ S_x & S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_y & S_{xy} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_z & S_{xz} & S_{yz} & S_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ r_{xx} \\ r_{xy} \\ r_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}.$$

Використовуємо метод Крамера для розв'язання системи лінійних рівнянь.

Визначник Δ

$$\Delta = |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - \sum_{i \in \{x,y,z\}} L_i + 2 \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} -$$
$$- \sum_{i,j,k \in \{x,y,z\}} L_{ijk} + 2 \sum_{i,j \in \{x,y,z\}} L_{ij},$$

де введені позначення при $i, j, k \in \{x, y, z\}$, $i \neq j \neq k$

$$L_i = S_{jk} \cdot \left(|S| \cdot S_{ii} - S_i^2 \right),$$
$$L_{ij} = S_i \cdot S_j \cdot \left(S_{ij} \cdot S_k - S_{ik} \cdot S_{jk} \right),$$
$$L_{ijk} = S_i^2 \cdot S_{jj} \cdot S_{kk}.$$

Визначник Δ_b

$$\Delta_b = k \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - \sum_{i \in \{x,y,z\}} L_i^b + 2 \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - \sum_{i,j,k \in \{x,y,z\}} L_{ijk}^b +$$
$$+ \sum_{i,j \in \{x,y,z\}} L_{ij}^b + \sum_{i,j \in \{x,y,z\}} \left(L_{ij}^b \right)',$$

де введені позначення

$$L_{ij}^b = S_{ij}^2 \cdot S_k \cdot k_k,$$
$$L_{ijk}^b = S_i \cdot S_{jj} \cdot S_{kk},$$
$$\left(L_{ij}^b \right)' = \left(S_i \cdot k_j + S_k \cdot k_i \right) \cdot \left(S_{ij} \cdot S_{kk} - S_{jk} \cdot S_{ik} \right)$$

при $i, j, k \in \{x, y, z\}$, $i \neq j \neq k$. Визначник Δ_{xx}

$$\Delta_{xx} = -K \cdot S_x \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} + K \cdot S_x \cdot S_{yz}^2 + K \cdot S_y \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} - K \cdot S_y \cdot_{xz} \cdot S_{yz} -$$
$$-K \cdot S_z \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} + K \cdot S_z \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} + k_x \cdot |S| \cdot S_{yy} \cdot S_{zz} - k_x \cdot |S| \cdot S_{yz}^2 -$$
$$-k_x \cdot S_y^2 \cdot S_{zz} + 2 \cdot k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{yz} - k_x \cdot S_z^2 \cdot S_{yy} - k_y \cdot |S| \cdot S_{yz} \cdot S_{zz} +$$
$$+k_y \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} + k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{zz} - k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} - k_y \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xz} +$$
$$+k_y \cdot S_z^2 \cdot S_{xy} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} - k_z \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} - k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} +$$
$$+k_z \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{yy} + k_z \cdot S_y^2 \cdot S_{xz} - k_z \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xy}.$$

Визначник Δ_{xy}

$$\Delta_{xy} = K \cdot S_x \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} - K \cdot S_x \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} - K \cdot S_y \cdot S_{xx} \cdot S_{zz} + K \cdot S_y \cdot S_{xz}^2 +$$
$$+K \cdot S_z \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} - K \cdot S_z \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} - k_x \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{zz} + k_x \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yz} +$$
$$+k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{zz} - k_x \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{yz} - k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xz} + k_x \cdot S_z^2 \cdot S_{xy} +$$
$$+k_y \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{zz} - k_y \cdot |S| \cdot S_{xz}^2 - k_y \cdot S_x^2 \cdot S_{zz} + 2 \cdot k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xz} -$$
$$-k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xz} - k_y \cdot S_z^2 \cdot S_{xx} - k_z \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} +$$
$$+k_z \cdot S_x^2 \cdot S_{yz} - k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xz} - k_z \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xy} + k_z \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xx}.$$

Визначник Δ_{xz}

$$\Delta_{xz} = -K \cdot S_x \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} + K \cdot S_x \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} + K \cdot S_y \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} -$$
$$-K \cdot S_y \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} - K \cdot S_z \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} + K \cdot S_z \cdot S_{xy}^2 + S_x \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{yz} -$$
$$-k_x \cdot |S| \cdot S_{xz} \cdot S_{yy} - k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yz} + k_x \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{yy} + k_x \cdot S_y^2 \cdot S_{xz} -$$
$$-k_x \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xy} - k_y \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yz} + k_y \cdot |S| \cdot S_{xy} \cdot S_{xz} + k_y \cdot S_x^2 \cdot S_{yz} -$$
$$-k_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xz} - k_y \cdot S_x \cdot S_z \cdot S_{xy} + k_y \cdot S_y \cdot S_z \cdot S_{xx} + k_z \cdot |S| \cdot S_{xx} \cdot S_{yy} -$$
$$-k_z \cdot |S| \cdot S_{xy}^2 - k_z \cdot S_x^2 \cdot S_{yy} + 2 \cdot k_z \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_{xy} - k_z \cdot S_y^2 \cdot S_{xx}.$$

Відомо, що розв'язком є наступні вирази [2]

$$b_x = \frac{\Delta_b}{\Delta},\ r_{xx} = \frac{\Delta_{xx}}{\Delta},\ r_{xy} = \frac{\Delta_{xy}}{\Delta},\ r_{xz} = \frac{\Delta_{xz}}{\Delta}.$$

Інші проекції знаходимо аналогічним чином, прирівнюючи часткові похідні від E_x та E_y до нуля.

Нехай $|S| = n$. Якщо ввести конструкційну матрицю

$$A = \begin{bmatrix} 1 & s_{1x} & s_{1y} & s_{1z} \\ 1 & s_{2x} & s_{2y} & s_{2z} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & s_{nx} & s_{ny} & s_{nx} \end{bmatrix}$$

та позначити невідомий вектор через

$$\boldsymbol{\theta}^T = \begin{bmatrix} b_x, r_{xx}, r_{xy}, r_{xz} \end{bmatrix},$$

то розв'язок можна записати у більш компактному вигляді. Перепишемо функцію, яку мінімізуємо, через введені позначення

$$E_x = (\boldsymbol{k}_x - A \cdot \boldsymbol{\theta})^T \cdot (\boldsymbol{k}_x - A \cdot \boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{k}_x^T \cdot \boldsymbol{k}_x - 2\boldsymbol{\theta}^T \cdot A^T \cdot \boldsymbol{k}_x + \boldsymbol{\theta}^T \cdot A^T \cdot A \cdot \boldsymbol{\theta}, \quad (2.2)$$

де $\boldsymbol{k}_x = (k_{s_1x}, k_{s_2x}, \dots, k_{s_nx})^T$. Якщо продиференціювати останній вираз по кожному θ_i, то отримаємо систему рівнянь у матричному вигляді

$$-2A^T \cdot \boldsymbol{k}_x + 2A^T \cdot A \cdot \boldsymbol{\theta} = 0,$$

яку перепишемо

$$\left(A^T \cdot A\right) \cdot \boldsymbol{\theta} = A^T \cdot \boldsymbol{k}_x. \tag{2.3}$$

Звідки маємо оцінку

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot \boldsymbol{k}_x. \tag{2.4}$$

Таким чином,

$$\min_{\boldsymbol{\theta}} E_x(\boldsymbol{\theta}) = E_x\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right).$$

Якщо $A^T \cdot A$ є матрицею з ненульовим визначником, то оцінка найменших квадратів $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ єдина. Щоб довести це, припустимо, що $\boldsymbol{\theta}^*$ — довільне фіксоване значення $\boldsymbol{\theta}$. Тоді з (2.2) маємо

$$E_x\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) = \left[\boldsymbol{k}_x - A \cdot \boldsymbol{\theta}^* + A\left(\boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\theta}\right)\right]^T \cdot \left[\boldsymbol{k}_x - A \cdot \boldsymbol{\theta}^* + A\left(\boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\theta}\right)\right] =$$
$$= E_x\left(\boldsymbol{\theta}^*\right) + 2\left(\boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\theta}\right)^T \cdot \left(A^T \cdot \boldsymbol{k}_x - A^T \cdot A \cdot \boldsymbol{\theta}^*\right) + \left(\boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\theta}\right)^T \cdot A^T \cdot A \cdot \left(\boldsymbol{\theta}^* - \boldsymbol{\theta}\right).$$

Якщо $\boldsymbol{\theta}^* = \hat{\boldsymbol{\theta}}$, то

$$E_x(\boldsymbol{\theta}) = E_x\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right) + \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right)^T \cdot A^T \cdot A \cdot \left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right) \geq E_x\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right),$$

оскільки матриця $A^T \cdot A$ невід'ємно визначена. Таким чином, мінімум $E_x(\boldsymbol{\theta})$ дорівнює $E_x\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)$, він досягається при $\boldsymbol{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}$.

Для невиродженої матриці $A^T \cdot A$ рівняння (2.3) однозначно розв'язується, отже, в цьому випадку оцінка найменших квадратів єдина та має вигляд (2.4).

2.1 Властивості оцінки найменших квадратів

Оцінка $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ є незміщеною оцінкою параметра $\boldsymbol{\theta}$. З постановки методу відомо, що $M\boldsymbol{k}_x = A \cdot \boldsymbol{\theta}$. Отже, $M\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot M\boldsymbol{k}_x = \left(A^T \cdot A\right) \cdot A^T \cdot A \cdot \boldsymbol{\theta}$, тобто $M\hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}$.

Серед класу оцінок $\boldsymbol{\theta}^*$ величини $\boldsymbol{\theta}$, які

1) є незміщеними оцінками,
2) представляють собою лінійні комбінації вихідних даних $\boldsymbol{k}_x$,

за допомогою критерія найменших квадратів можна знайти таку оцінку невідомого параметра $\boldsymbol{\theta}$, що $D\hat{\boldsymbol{\theta}}_j \leq D\boldsymbol{\theta}^*_j$ для будь-якого j. Іншими словами, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ є найбільш точною (або оптимальною) оцінкою $\boldsymbol{\theta}$ з усіх можливих, що належать даному класу.

Щоб довести це, насамперед треба знайти вираз для $D\boldsymbol{\theta}_j$. З постановки задачі відомо, що $D\boldsymbol{k}_x = \sigma^2 \cdot I$. З (2.4) отримуємо

$$D\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(A^T \cdot A\right)^{-1} \cdot A^T \cdot D\boldsymbol{k}_x \cdot A \cdot \left(A^T \cdot A\right)^{-1} = \sigma^2 \cdot \left(A^T \cdot A\right)^{-1}.$$

Нехай $\boldsymbol{\theta}^*$ — якась інша оцінка $\boldsymbol{\theta}$, яка є лінійною комбінацією вихідних даних, тобто $\boldsymbol{\theta}^* = U \cdot \boldsymbol{k}_x$. Вимагаємо, щоб вона була незміщеною:

$$M\boldsymbol{\theta}^* = U \cdot M\boldsymbol{k}_x = U \cdot A \cdot \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}.$$

Остання рівність виконується для всіх $\boldsymbol{\theta}$, отже, можемо стверджувати, що

$$U \cdot A = I.$$

Знайдемо коваріаційну матрицю $D\boldsymbol{\theta}^* = U \cdot D\boldsymbol{k}_x \cdot U^T = \sigma^2 \cdot U \cdot U^T$. Порівняємо $U \cdot U^T$ з $\left(A^T \cdot A\right)^{-1}$. Нехай $K = \left(A^T \cdot A\right)^{-1}$. Тоді можемо записати

$$U \cdot U^T = K + \left(U - K \cdot A^T\right) \cdot \left(U - K \cdot A^T\right)^T.$$

Ця рівність справедлива завдяки тому, що $U \cdot A = I$. Таким чином,

$$D\boldsymbol{\theta}^* = D\hat{\boldsymbol{\theta}} + \sigma^2 \left(U - K \cdot A^T\right) \cdot \left(U - K \cdot A^T\right)^T.$$

Для $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ маємо $U = K \cdot A^T$, тому другий доданок обертається в нуль. Для будь-якої іншої оцінки цей доданок невід'ємний, отже, кожен діагональний елемент матриці $D\boldsymbol{\theta}^*$ не менше відповідного діагонального елемента матриці $D\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

3 ІТЕРАТИВНИЙ АЛГОРИТМ НАЙБЛИЖЧИХ ТОЧОК

Ітеративний алгоритм найближчих точок (Iterative Closest Points, ICP) [3] складається з двох операцій, що чергуються. Ініціюється алгоритм одиничною матрицею повороту $R = I$ та нульовим вектором зсуву $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. Перша ітерація полягає в пошуку такої розмітки $k : S \to T$, щоб

$$\sum_{s \in S} \|R \cdot \boldsymbol{s} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{k_s}\|^2 \to \min_k,$$

де R і $\boldsymbol{b}$ фіксовані, k — сюр'єктивне відображення із S в T. Тоді можемо шукати такий набір $\{\boldsymbol{k_s} \mid \boldsymbol{s} \in S\}$, щоб

$$\sum_{\boldsymbol{s} \in S} \|R\boldsymbol{s} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{k_s}\|^2 \to \min_{\boldsymbol{k_s}}.$$

Запишемо суму явно (нехай множина S має n точок)

$$\|R \cdot \boldsymbol{s_1} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{k_{s_1}}\|^2 + \|R \cdot \boldsymbol{s_2} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{k_{s_2}}\|^2 + \ldots + \|R \cdot \boldsymbol{s}_n + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{k_{s_n}}\|^2 \to \min_{\boldsymbol{k_{s_1}}, \boldsymbol{k_{s_2}}, \ldots, \boldsymbol{k_{s_n}} \in T}.$$

Параметри, що входять у кожний доданок, різні, тож

$$\begin{cases} \|R \cdot \boldsymbol{s_1} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{k}_{s_1}\|^2 \to \min\limits_{\boldsymbol{k_{s_1}} \in T}, \\ \|R \cdot \boldsymbol{s_2} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{k}_{s_2}\|^2 \to \min\limits_{\boldsymbol{k_{s_2}} \in T}, \\ \vdots \\ \|R \cdot \boldsymbol{s_n} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{k}_{s_n}\|^2 \to \min\limits_{\boldsymbol{k_{s_n}} \in T}. \end{cases}$$

Таким чином, для кожної точки $\boldsymbol{s} \in S$ знаходимо точку $\boldsymbol{t} \in T$ таку, щоб відстані між парами $R \cdot \boldsymbol{s} + \boldsymbol{b}$ та $\boldsymbol{t}$ для всіх $\boldsymbol{s} \in S$ були найменшими

$$\|R \cdot \boldsymbol{s} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{t}\|^2 = \min_{\boldsymbol{t_i} \in T} \|R\boldsymbol{s} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{t_i}\|^2 .$$

На наступній ітерації виконується пошук повороту R та зсуву $\boldsymbol{b}$ за поточною розміткою $\{\boldsymbol{k_s} \mid \boldsymbol{s} \in S\}$

$$\sum_{\boldsymbol{s} \in S} \|R \cdot \boldsymbol{s} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{k_s}\|^2 \to \min_{R, \boldsymbol{b}} . \tag{3.1}$$

При цьому матриця $R \in SO\left(3\right)$, тобто ортогональна матриця розмірності 3×3 з визначником $+1$, яка в якості лінійного перетворення діє як поворот. Тому звичайний метод найменших квадратів не підходить.

Обчислимо зсув $\boldsymbol{b}$. Нехай R — фіксована. Мінімізуємо

$$E\left(\boldsymbol{b}\right) = \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \|R \cdot \boldsymbol{s} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{k_s}\|^2 .$$

Можемо знайти оптимальний зсув, взявши похідну від E по $\boldsymbol{b}$ та прирівнявши її до нуля

$$0 = \frac{dE}{d\boldsymbol{b}} = \sum_{\boldsymbol{s} \in S} 2\left(R \cdot \boldsymbol{s} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{k_s}\right) = 2\boldsymbol{b} \cdot |S| + 2R \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \boldsymbol{s} - 2 \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \boldsymbol{k_s}. \tag{3.2}$$

Позначимо

$$\overline{\boldsymbol{s}} = \frac{\sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} \boldsymbol{s}}{|S|},\ \overline{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}} = \frac{\sum\limits_{\boldsymbol{s} \in S} \boldsymbol{k_s}}{|S|}.$$

Перепишемо (3.2) в термінах введених позначень

$$\boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}} - R \cdot \overline{\boldsymbol{s}}. \tag{3.3}$$

Знайшли оптимальний вектор $\boldsymbol{b}$ для будь-якої матриці повороту R. Підставимо його у вираз (3.1)

$$\sum_{\boldsymbol{s} \in S} \|R \cdot \boldsymbol{s} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}}\|^2 = \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \left\| R \cdot \boldsymbol{s} + \overline{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}} - R \cdot \overline{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}} \right\|^2 =$$
$$= \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \left\| R \cdot (\boldsymbol{s} - \overline{\boldsymbol{s}}) - \left(\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}} - \overline{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}} \right) \right\|^2.$$

Таким чином, шукаємо оптимальний поворот R, переформулювавши задачу так, щоб зсуб був рівний нулю. Нехай

$$\tilde{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{s} - \overline{\boldsymbol{s}},\ \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}}} = \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}} - \overline{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}},$$

тоді

$$R = \arg \min_{R \in SO(3)} \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \left\| R \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} - \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}}} \right\|^2. \tag{3.4}$$

Спростимо вираз, який мінімізується в (3.4)

$$\left\| R \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} - \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}}} \right\|^2 = \left(R \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} - \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}}} \right)^T \cdot \left(R \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} - \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}}} \right) = \left(\tilde{\boldsymbol{s}}^T \cdot R^T - \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}}}^T \right) \cdot \left(R \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} - \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}}} \right) =$$
$$= \tilde{\boldsymbol{s}}^T \cdot R^T \cdot R \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} - \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}}} \cdot \tilde{\boldsymbol{s}}^T \cdot R \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} - \tilde{\boldsymbol{s}}^T \cdot R^T \cdot \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}}} + \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}}}^T \cdot \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}}} =$$
$$= \tilde{\boldsymbol{s}}^T \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} - \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}}}^T \cdot R \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} - \tilde{\boldsymbol{s}}^T \cdot R^T \cdot \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}}} + \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}}}^T \cdot \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}}}.$$

Використали ортогональність матриці R: $R^T = R^{-1}$.

Помітимо, що $\tilde{\boldsymbol{s}}^T \cdot R^t \cdot \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s}}}$ — це скаляр: $\tilde{\boldsymbol{s}}^T$ має розмірність 1×3, R^T має розмірність 3×3 та $\tilde{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}} - 3 \times 1$. Для будь-якого скаляру $a = a^T$, тому

$$\tilde{\boldsymbol{s}}^T \cdot R^T \cdot \tilde{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}} = \left(\tilde{\boldsymbol{s}}^T \cdot R^T \cdot \tilde{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}}\right)^T = \tilde{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}}^{\ T} \cdot R \cdot \tilde{\boldsymbol{s}}.$$

Маємо

$$\left\| R \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} - \tilde{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}} \right\|^2 = \tilde{\boldsymbol{s}}^T \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} - 2\tilde{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}}^{\ T} \cdot R \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} + \tilde{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}}^{\ T} \cdot \tilde{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}}.$$

Підставимо отриманий вираз у (3.4)

$$\begin{aligned} R = \arg \min_{R \in SO(3)} \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \left(\tilde{\boldsymbol{s}}^T \cdot \tilde{s} - 2\tilde{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}}^{\ T} \cdot R \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} + \tilde{k}_s^T \cdot \tilde{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}}\right) = \\ = \arg \min_{R \in SO(3)} \left(\sum_{\boldsymbol{s} \in S} \tilde{s}^T \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} - 2 \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \tilde{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}}^{\ T} \cdot R \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} + \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \tilde{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}} \cdot \tilde{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}} \right) = \\ = \arg \min_{R \in SO(3)} \left(-2 \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \tilde{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}}^{\ T} \cdot R \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} \right). \end{aligned}$$

Відкинемо суми $\tilde{\boldsymbol{s}}^T \cdot \tilde{\boldsymbol{s}}$ та $\tilde{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}}^{\ T} \cdot \tilde{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}}$ по всім $\boldsymbol{s} \in S$, бо ці вирази не залежать від R та не впливають на мінімізацію. Те саме справедливо для константи, на яку множиться сума, тому

$$R = \arg \max_{R \in SO(3)} \sum_{\boldsymbol{s} \in S} \tilde{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}}^{\ T} \cdot R \cdot \tilde{\boldsymbol{s}}.$$

Помітимо, що

$$\sum_{\boldsymbol{s} \in S} \tilde{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}}^{\ T} \cdot R \cdot \tilde{\boldsymbol{s}} = tr\left(\tilde{K}^T \cdot R \cdot \tilde{S}\right),$$

де $\tilde{K}$ і $\tilde{S}$ — це матриці розмірності $3 \times n$ зі стовпцями $\tilde{\boldsymbol{s}}$ та $\tilde{\boldsymbol{k}_s}$ відповідно

$$\tilde{K}^T \cdot R \cdot \tilde{S} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{k}_{s_1}}^T \\ \tilde{\boldsymbol{k}_{s_2}}^T \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{k}_{s_n}}^T \end{bmatrix} \cdot R \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{s}_1} & \tilde{\boldsymbol{s}_2} & \dots & \tilde{\boldsymbol{s}_n} \end{bmatrix}.$$

Слід квадратної матриці дорівнює сумі її діагональних елементів. Шукаємо таку матрицю R, яка буде максимізувати вираз $tr\left(\tilde{K}^T \cdot R \cdot \tilde{S}\right)$. Слід матриці має властивість [4]

$$tr\,(A \cdot B) = tr\,(B \cdot A) \tag{3.5}$$

для будь-яких матриць A та B сумісних розмірностей.

Доведемо цю властивість. Нехай матриця A має розмірність $n \times m$, а матриця B — $m \times n$. Тоді матриця $C = A \cdot B$ — матриця розмірності $n \times n$ складається з елементів

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} \cdot b_{rj}.$$

Аналогічно, матриця $D = B \cdot A$ має розмірність $m \times m$ і складається з елементів

$$d_{ij} = \sum_{r=1}^{n} b_{ir} \cdot a_{rj}.$$

Діагональні елементи матриць C та D мають вигляд

$$c_{ii} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} \cdot b_{ri},\ d_{ii} = \sum_{r=1}^{n} b_{ir} \cdot a_{ri}.$$

Запишемо слід для добутків

$$
\begin{aligned}
tr\left(A\cdot B\right) = tr\left(C\right) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{m} a_{ir}\cdot b_{ri},\\
tr\left(B\cdot A\right) = tr\left(D\right) = \sum_{i=1}^{m} d_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} b_{ir}\cdot a_{ri}.
\end{aligned}
$$

Дві отримані суми однакові з точністю до перейменування індексів сумування. Це означає, що $tr\left(A\cdot B\right) = tr\left(B\cdot A\right)$.

Таким чином,

$$
tr\left(\tilde{K}^T\cdot R\cdot \tilde{S}\right) = tr\left(\tilde{K}^T\cdot\left(R\cdot\tilde{S}\right)\right) = tr\left(R\cdot\tilde{S}\cdot\tilde{K}^T\right).
$$

Позначимо

$$
\begin{aligned}
X = \tilde{S}\cdot\tilde{K}^T = \sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}^T = \sum_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}}\cdot\left(\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}} - \overline{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}}\right)^T = \\
= \begin{bmatrix}
\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}x}\cdot\widetilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}_x^T & \sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}x}\cdot\widetilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}_y^T & \sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}x}\cdot\widetilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}_z^T \\
\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}y}\cdot\tilde{k}_{s_ix}^T & \sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}y}\cdot\widetilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}_y^T & \sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}y}\cdot\widetilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}_z^T \\
\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}z}\cdot\tilde{k}_{s_ix}^T & \sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}z}\cdot\widetilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}_y^T & \sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}z}\cdot\widetilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}_z^T
\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Візьмемо сингулярний розклад [5] матриці X

$$
X = U\cdot\Sigma\cdot V^T, \tag{3.6}
$$

де $U\in\mathbb{R}^{3\times3}$ та $V\in\mathbb{R}^{3\times3}$ — ортогональні матриці, а $\Sigma\in\mathbb{R}^{3\times3}$ — діагональна матриця з невід'ємними елементами, причому $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\sigma_3\geq 0$. Ранг матриці

Σ менше трьох, якщо [6]

$$rank\, X = rank\left(\tilde{S}\cdot\tilde{K}^T\right) \le \min\left\{rank\,\tilde{S}, rank\,\tilde{K}^T\right\} < 3.$$

Таке можливо, якщо $\det X = \det\left(\tilde{S}\cdot\tilde{K}^T\right) = 0$ [7].

Розкриємо цей визначник

$$\begin{gathered}\det X = \\ = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}x} \cdot \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}^T_x \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}y} \cdot \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}^T_y \cdot \sum_{i=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}z} \cdot \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}^T_z - \sum_{i=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}z} \cdot \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}^T_y \cdot \sum_{i=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}y} \cdot \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}^T_z\right) - \\ - \sum_{i=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}y} \cdot \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}^T_x \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}x} \cdot \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}^T_y \cdot \sum_{i=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}z} \cdot \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}^T_z - \sum_{i=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}z} \cdot \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}^T_y \cdot \sum_{i=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}x} \cdot \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}^T_z\right) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}z} \cdot \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}^T_x \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}x} \cdot \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}^T_y \cdot \sum_{i=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}x} \cdot \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}^T_z - \sum_{i=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}x} \cdot \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}^T_y \cdot \sum_{i=1}^{n} \tilde{\boldsymbol{s}}_{\boldsymbol{i}y} \cdot \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_i}}}^T_z\right) = \\ = P\left(\tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_1}}}^T_x, \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_1}}}^T_y, \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_1}}}^T_z, \ldots, \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_n}}}^T_x, \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_n}}}^T_y, \tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_n}}}^T_z\right),\end{gathered}$$

де P — многочлен. Покажемо, що ймовірність того, що визначник дорівнює нулю, дорівнює нулю. Випишемо окремо одну змінну многочлену P

$$\begin{gathered}\tilde{\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{s_1}}}^T_x = \left[R\cdot\boldsymbol{s_1} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\xi_{s_1}} - \frac{1}{|S|}\sum_{\boldsymbol{s}\in S}\left(R\cdot\boldsymbol{s} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\xi_s}\right)\right]^T_x = \\ = \left[R\cdot\boldsymbol{s_1} + \boldsymbol{b} - \frac{1}{|S|}\sum_{\boldsymbol{s}\in S}\left(R\cdot\boldsymbol{s} + \boldsymbol{b}\right)\right]^T_x + \left[\boldsymbol{\xi_{s_1}} - \frac{1}{|S|}\sum_{\boldsymbol{s}\in S}\boldsymbol{\xi_s}\right]^T_x \sim \\ \sim N\left(\left[R\cdot\boldsymbol{s_1} + \boldsymbol{b} - \frac{1}{|S|}\sum_{\boldsymbol{s}\in S}\left(R\cdot\boldsymbol{s} + \boldsymbol{b}\right)\right]^T_x, \frac{|S|-1}{|S|}\cdot\sigma^2\cdot I\right).\end{gathered} \tag{3.7}$$

Це гаусова випадкова величина, тобто величина, що має неперервний розподіл. Тоді

$$P\left(\det X=0\right)=MP\left(\det X=0\left|\tilde{\boldsymbol{k_{s_1}}}_y^T,\tilde{\boldsymbol{k_{s_1}}}_z^T,\ldots,\tilde{\boldsymbol{k_{s_n}}}_x^T,\tilde{\boldsymbol{k_{s_n}}}_y^T,\tilde{\boldsymbol{k_{s_n}}}_z^T\right.\right)=$$
$$=M\mathbb{1}\left\{F_{\tilde{\boldsymbol{k_{s_1}}}_y^T,\tilde{\boldsymbol{k_{s_1}}}_z^T,\ldots,\tilde{\boldsymbol{k_{s_n}}}_x^T,\tilde{\boldsymbol{k_{s_n}}}_y^T,\tilde{\boldsymbol{k_{s_n}}}_z}\left(\tilde{\boldsymbol{k_{s_1}}}_x\right)=0\right\},$$

де $F_{a,b,c,\ldots,d}\left(\cdot\right)$ — многочлен. Фіксуємо елементи, які стоять в його індексі. Тоді

$$P\left\{F_{a,b,c,\ldots,d}\left(\tilde{\boldsymbol{k_{s_1}}}_x\right)=0\right\}=0.$$

Так як $\tilde{\boldsymbol{k_{s_1}}}_x$ — випадкова величина з неперервним розподілом, то вона приймає фіксоване значення з нульовою йкомірністю. Таким чином,

$$P\left(\det X=0\right)=M0=0,$$

і матриця Σ буде мати ранг 3 з ймовірністю 1, тобто має місце нерівність $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\sigma_3>0$. Це означає, що сингулярний розклад матриці буде єдиним.

Підставимо сингулярний розклад в слід

$$tr\left(R\cdot\tilde{S}\cdot\tilde{K}^T\right)=tr\left(R\cdot X\right)=tr\left(R\cdot U\cdot\Sigma\cdot V^T\right)=tr\left(\Sigma\cdot V^T\cdot R\cdot U\right).$$

Помітимо, що V, R и U — ортогональні матриці, тому матриця

$$M=V^T\cdot R\cdot U$$

меж ортогональна. Це означає, що $\boldsymbol{m}_i\cdot\boldsymbol{m}_i^T=1$ для кожного рядка $\boldsymbol{m}_i$ матриці

M. Отже, модулі всіх елементів m_{ij} матриці M не перевищують одиниці

$$1 = \boldsymbol{m}_i \cdot \boldsymbol{m}_i^T = \sum_{j=1}^{3} m_{ij}^2 \Rightarrow m_{ij}^2 \leq 1 \Rightarrow |m_{ij}| \leq 1.$$

Згадаємо, що Σ — діагональна матриця з невід'ємними елементами

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0.$$

Тому

$$tr\left(\Sigma \cdot M\right) = tr\left(\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{3} \sigma_i \cdot m_{ii} \leq \sum_{i=1}^{3} \sigma_i.$$

Тому слід максимізується при $m_{ii} = 1$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$. Так як M — ортогональна матриця, то вона має бути одиничною

$$I = M = V^T \cdot R \cdot U \Rightarrow V = R \cdot U \Rightarrow R = V \cdot U^T.$$

Помітимо, що зараз R — це ортогональна матриця, але при цьому можливі дві ситуації: коли $\det R = \det\left(V \cdot U^T\right) = 1$, тобто матриця R діє як поворот, і $\det R = \det\left(V \cdot U^T\right) = -1$, тобто матриця R діє як поворот і дзеркальне відображення. Припустимо, що $\det\left(V \cdot U^T\right) = -1$. Це еквівалентно тому, що $\det M = -1$. Шукаємо таку матрицю M, яка максимізує вираз

$$tr\left(\Sigma \cdot M\right) = \sigma_1 \cdot m_{11} + \sigma_2 \cdot m_{22} + \sigma_3 \cdot m_{33}.$$

Розглядаємо змінні (m_{11}, m_{22}, m_{33}). Це множина всіх діагоналей ортогональної матриці порядка 3. Альфред Хорн довів [8], що вектор $(d_1, \ldots, d_n)$ — це діагональ матриці повороту порядка n тоді й тільки тоді, коли він лежить у випуклій оболонці точок $(\pm 1, \ldots, \pm 1)$, де парне число значень (в тому числі жодне) дорівнює -1. Для нашого випадку ця теорема приймає такий вигляд: M — матриця повороту тоді й тільки тоді, коли її діагональ (m_{11}, m_{22}, m_{33}) лежить у випуклій оболонці точок $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, де парна кількість координат (в тому числі жодна) дорівнює -1. Матриця M — матриця повороту та дзеркального відображення, тому для неї оптимальна діагональ має вигляд $(1, 1, -1)$, коли непарна кількість значень дорівнює -1, відповідно,

$$tr\left(\Sigma \cdot M\right) = \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3.$$

Це значення більше будь-якого іншого вектора з $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ за виключенням $(1, 1, 1)$, бо σ_3 — це найменше сингулярне значення.

Таким чином, якщо $\det\left(V \cdot U^T\right) = -1$, то

$$M = V^T \cdot R \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow R = V \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot U^T.$$

Таким чином, шукана матриця повороту R має вигляд [9]

$$R = V \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \det\left(V \cdot U^T\right) \end{bmatrix} \cdot U^T, \tag{3.8}$$

а оптимальний вектор зсуву обчислюється за формулою (3.3).

Алгоритм полягає в почерговому виконанні двох кроків:

1) пошук найкращої розмітки k при фіксованих R і $\boldsymbol{b}$;

2) пошук матриці повороту R і вектора зсуву $\boldsymbol{b}$ при фіксованій розмітці k,

поки не буде досягнений мінімум в (2.1).

3.1 Збіжність алгоритму

Покажемо, що ітеративний алгоритм найближчих точок завжди збігається. Припустимо, що алгоритм нікуди не збігається. Тоді існує така скінченна множина S, матриця повороту R, вектор зсуву $\boldsymbol{b}$ та шум $\boldsymbol{\xi_s}$, що алгоритм буде виконувати нескінченно багато ітерацій і ніколи не зупиниться.

Нехай алгоритм перебрав усі можливі розмітки, тобто виконав $|T|^{|S|}$ ітерацій, і не зупинився. В цьому випадку на наступному кроці буде вибрана розмітка, яка вже вибиралась на одному з попередніх кроків. Тоді вираз (2.1) або збільшиться (що неможливо), або не зміниться, і алгоритм закінчить свою роботу. Це означає, що алгоритм завжди збігається.

3.2 Розподіл оцінок

Теорема. Асимптотично матриця $X = \tilde{S} \cdot \tilde{K}^T = U \cdot \Sigma \cdot V^T$ має нормальний розподіл, причому елементи матриці незалежні.

Те, що елементи матриці X мають нормальний розподіл, випливає з (3.7). Доведемо незалежність. Для цього знайдемо кореляцію двох довільних елементів матриці X

$$cor\left(x_{ij}, x_{kr}\right) = \frac{cov\left(x_{ij}, x_{kr}\right)}{\sqrt{Dx_{ij} \cdot Dx_{kr}}}, \tag{3.9}$$

де i, k — індекси рядків матриці X, j, r — індекси стовпців матриці X. Знайдемо окремо коваріацію

$$cov\left(x_{ij}, x_{kr}\right) = cov\left[\sum_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti} \cdot \left(\xi^T_{s_t i} - \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \xi^T_{s_p j}\right), \sum_{q=1}^{n} \tilde{s}_{qk} \cdot \left(\xi^T_{s_q r} - \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{n} \xi^T_{s_g r}\right)\right].$$

Винесемо суми та константи

$$cov\left(x_{ij}, x_{kr}\right) = \sum_{t=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \tilde{s}_{ti} \cdot \tilde{s}_{qk} \cdot cov\left(\xi^T_{s_t j} - \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \xi^T_{s_p j}, \xi^T_{s_q r} - \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{n} \xi^T_{s_g r}\right).$$

Розкриємо дужки

$$\begin{aligned} cov\left(x_{ij}, x_{kr}\right) = \sum_{t=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \tilde{s}_{ti} \cdot \tilde{s}_{qk} \cdot cov\left(\xi^T_{s_t j}, \xi^T_{s_q r}\right) + \\ + \sum_{t=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \tilde{s}_{ti} \cdot \tilde{s}_{qk} \cdot cov\left(\xi^T_{s_t j}, -\frac{1}{n}\sum_{g=1}^{n} \xi^T_{s_g r}\right) + \\ + \sum_{t=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \tilde{s}_{ti} \cdot \tilde{s}_{qk} \cdot cov\left(-\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \xi^T_{s_p j}, \xi^T_{s_1 r}\right) + \\ + \sum_{t=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \tilde{s}_{ti} \cdot \tilde{s}_{qk} \cdot cov\left(-\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \xi^T_{s_p j}, -\frac{1}{n}\sum_{g=1}^{n} \xi^T_{s_g r}\right) \equiv A + B + C + D, \end{aligned}$$

де за A, B, C, D позначені доданки. Обчислимо кожний з них окремо. Почнемо з першого доданку

$$A = \begin{cases} \sum_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti} \cdot \tilde{s}_{tk} \cdot \sigma^2 = \sigma^2 \sum_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti} \cdot \tilde{s}_{tk}, & j = r, \\ 0, & j \neq r. \end{cases}$$

Другий доданок

$$B = -\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\tilde{s}_{ti}\cdot\tilde{s}_{qk}\sum_{g=1}^{n}cov\left(\xi^T_{s_t j},\xi^T_{s_g r}\right) = \begin{cases} -\frac{\sigma^2}{n}\sum\limits_{t=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n}\tilde{s}_{ti}\cdot\tilde{s}_{qk}, & j = r, \\ 0, \quad j \neq r. \end{cases}$$

Третій доданок

$$C = -\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\tilde{s}_{ti}\cdot\tilde{s}_{qk}\sum_{p=1}^{n}cov\left(\xi^T_{s_p j},\xi^T_{s_q r}\right) = \begin{cases} -\frac{\sigma^2}{n}\sum\limits_{t=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n}\tilde{s_{ti}}\cdot\tilde{s}_{qk}, & j = r, \\ 0, \quad j \neq r. \end{cases}$$

Четвертий доданок

$$D = \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}\tilde{s}_{ti}\cdot\tilde{s}_{qk}\sum_{p=1}^{n}\sum_{g=1}^{n}cov\left(\xi^T_{s_p j},\xi^T_{s_g r}\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{\sigma^2}{n^2}\sum\limits_{t=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n}\tilde{s}_{ti}\cdot\tilde{s}_{qk}\cdot n = \frac{\sigma^2}{n}\sum\limits_{t=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n}\tilde{s}_{ti}\cdot\tilde{s}_{qk}, & j = r, \\ 0, \quad j \neq r. \end{cases}$$

Бачимо, що другий і третій доданки рівні, а четверний співпадає з ними з протилежним знаком. Отже, отримуємо

$$cov\left(x_{ij}, x_{kr}\right) = A + B = \begin{cases} \sigma^2\sum\limits_{t=1}^{n}\tilde{s}_{ti}\cdot\tilde{s}_{tk} - \frac{\sigma^2}{n}\sum\limits_{t=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n}\tilde{s}_{ti}\cdot\tilde{s}_{qk}, & j = r, \\ 0, \quad j \neq r. \end{cases}$$

Знайдемо дисперсію

$$Dx_{ij} = D\left[\sum_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti} \cdot \left(\xi_{s_t j}^T - \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \xi_{s_p j}^T\right)\right] =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti}^2 \cdot \left[D\xi_{s_t j}^T + D\left(-\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \xi_{s_p j})^T\right) + 2cov\left(\xi_{s_t j}^T, -\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \xi_{s_p j}^T\right)\right] =$$

$$= \sum_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti}^2 \cdot \left(\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2\sigma^2}{n}\right) = \sigma^2 \sum_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Аналогічно,

$$Dx_{kr} = \sigma^2 \sum_{t=1}^{n} \tilde{s}_{tk} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Підставимо отримані вирази в формулу для кореляції (3.9)

$$cor\left(x_{ij}, x_{kr}\right) = \frac{\sigma^2 \left(\sum\limits_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti} \cdot \tilde{s}_{tk} - \frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n} \tilde{s}_{ti} \cdot \tilde{s}_{qk}\right)}{\left[\sigma^2 \sum\limits_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \sigma^2 \sum\limits_{q=1}^{n} \tilde{s}_{qk}^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \leq$$
$$\leq \frac{\left|\sum\limits_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti} \cdot \tilde{s}_{tk} - \frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n} \tilde{s}_{ti} \cdot \tilde{s}_{qk}\right|}{\frac{n-1}{n} \cdot \left(\sum\limits_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti}^2 \sum\limits_{q=1}^{n} \tilde{s}_{qk}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\left|\sum\limits_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti} \cdot \tilde{s}_{tk}\right| + \frac{1}{n}\left|\sum\limits_{t=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n} \tilde{s}_{ti} \cdot \tilde{s}_{qk}\right|}{\frac{n-1}{n}\left(\sum\limits_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti}^2 \sum\limits_{q=1}^{n} \tilde{s}_{qk}^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3.10}$$

Поділимо почленно чисельник на знаменник та розглянемо окремо перший доданок. Використовуємо нерівність Коші-Буняковського

$$\frac{\left|\sum\limits_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti} \cdot \tilde{s}_{tk}\right|}{\frac{n-1}{n}\sqrt{\sum\limits_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti}^2 \sum\limits_{q=1}^{n} \tilde{s}_{qk}^2}} \leq \frac{\sqrt{\sum\limits_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti}^2 + \sum\limits_{t=1}^{n} \tilde{s}_{tk}^2}}{\frac{n-1}{n}\sqrt{\sum\limits_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti}^2 \sum\limits_{q=1}^{n} \tilde{s}_{qk}^2}} \leq \frac{\sqrt{\sum\limits_{t=1}^{n} \left(\tilde{s}_{ti} + \tilde{s}_{tk}\right)^2}}{\frac{n-1}{n}\sqrt{\sum\limits_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti}^2 \sum\limits_{q=1}^{n} \tilde{s}_{qk}^2}}.$$

Використаємо частковий випадок нерівності Мінковського. Отримаємо, що цей вираз не перевищує

$$\frac{\sqrt{\sum\limits_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti}^2} + \sqrt{\sum\limits_{t=1}^{n} \tilde{s}_{tk}^2}}{\frac{n-1}{n}\sqrt{\sum\limits_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti}^2 \sum\limits_{q=1}^{n} \tilde{s}_{qk}^2}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\sqrt{\sum\limits_{t=1}^{n} \tilde{s}_{tk}^2}} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\sqrt{\sum\limits_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti}^2}}.$$

З ростом n сума квадратів координат точок множини $\tilde{S}$ буде тільки збільшуватись. Отже, цей вираз прямує до нуля при $n \to \infty$.

Розглянемо другий доданок у виразі (3.10)

$$\frac{\left|\sum\limits_{t=1}^{n}\sum\limits_{q=1}^{n} \tilde{s}_{ti} \cdot \tilde{s}_{qk}\right|}{(n-1)\sqrt{\sum\limits_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti}^2 \sum\limits_{q=1}^{n} \tilde{s}_{qk}^2}} \leq \frac{1}{n-1} \cdot \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n} |\tilde{s}_{ti}| \cdot \frac{1}{n}\sum\limits_{q=1}^{n} |\tilde{s}_{qk}| \cdot n^2}{(n-1)\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n} \tilde{s}_{ti}^2 \cdot \frac{1}{n}\sum\limits_{q=1}^{n} \tilde{s}_{qk}^2 \cdot n^4}}.$$

Використаємо нерівність між середнім квадратичним та середнім арифметичним. Тоді наступний вираз не менше попереднього

$$\frac{1}{n-1} \cdot \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n} |\tilde{s}_{ti}| \cdot \frac{1}{n}\sum\limits_{q=1}^{n} |\tilde{s}_{qk}|}{\frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n} |\tilde{s}_{ti}| \cdot \frac{1}{n}\sum\limits_{q=1}^{n} |\tilde{s}_{qk}| \cdot n^2} = \frac{1}{n^2 \cdot (n-1)} \to 0,\, n \to \infty.$$

Таким чином, доведення теореми завершено. Отже, в асимптотиці елементи матриці X незалежні.

Далі нам треба знайти розподіл матриць U та V в сингулярному розкладі матриці X. В розподілі ймовірностей елементів матриці X зробимо заміну

$$\prod_{i=1}^{9} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{x_i^2} dx_i = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^9} \cdot e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9} x_i^2} dx_1 \cdot \ldots \cdot dx_9 = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^9} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot tr\left(X \cdot X^T\right)} dX.$$

Зробимо заміну $X = U \cdot \Sigma \cdot V^T$ та скористаємось властивістю сліду (3.5)

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^9} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot tr\left(U \cdot \Sigma \cdot V^T \cdot V \cdot \Sigma^T \cdot U^T\right)} dX = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^9} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot tr\left(\Sigma^T \cdot \Sigma\right)} dX.$$

Диференціали dX та $dUd\Sigma dV$ пов'язані співвідношенням [10]

$$dX = \prod_{1 \le i < j \le 3} \left(\sigma_i^2 - \sigma_j^2\right) d\Sigma dU dV.$$

Таким чином, розподіл ймовірностей елементів матриці X має вигляд

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^9} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot tr\left(\Sigma^T \cdot \Sigma\right)} \prod_{1 \le i < j \le 3} \left(\sigma_i - \sigma_j\right) d\Sigma dU dV.$$

Останній вираз — це добуток трьох розподілів ймовірностей:

$$e^{-\frac{1}{2}\cdot tr\left(\Sigma^T \cdot \Sigma\right)} \prod_{1 \le i < j \le 3} \left(\sigma_i - \sigma_j\right) d\Sigma$$

для Σ, dU для U та dV для V з точністю до константи. Отже, елементи матриць U та V незалежні та мають рівномірний розподіл.

Шукаємо розподіл елементів матриці $R = V \cdot U^T$, де

$$r_{ij} = \sum_{s=1}^{3} v_{is} \cdot u_{sj}^T = \sum_{s=1}^{3} r_s.$$

Щільність розподілу випадкових величин

$$p_{v_{is}}(x) = p_{u_{sj}^T}(x) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}\left\{x \in [-1,1]\right\}.$$

При цьому модулі випадкових величин v_{is} та u_{sj}^T мають стандартний рівномірний розподіл, тобто $p_{|v_{is}|}(x) = p_{\left|u_{sj}^T\right|}(x) = \mathbb{1}\left\{x \in [0,1]\right\}$. Знайдемо розподіл величини $|r_s| = |v_{is}| \cdot \left|u_{sj}^T\right|$. Візьмемо логарифм від правої і лівої частин останньої рівності

$$\ln|r_s| = \ln|v_{is}| + \ln\left|u_{sj}^T\right|.$$

Так як v_{is} і u_{sj}^T — незалежні, то $\ln|v_{is}|$ і $\ln\left|u_{sj}^T\right|$ — теж незалежні. Виразимо функції розподілу логарифмів модулів випадкових величин

$$F_{ln|v_{is}|}(x) = P\left(\ln|v_{is}| \le x\right) = P\left(|v_{is}| \le e^x\right) = F_{|v_{is}|}\left(e^x\right).$$

Тоді щільність розподілу

$$p_{\ln|v_{is}|}(x) = \left[F_{\ln|v_{is}|}(x)\right]' = e^x \cdot p_{|v_{is}|}\left(e^x\right) = e^x \cdot \mathbb{1}\left\{e^x \in [0,1]\right\} = e^x \cdot \mathbb{1}\left\{x \le 0\right\}.$$

Аналогічно, $p_{\ln\left|u_{sj}^T\right|}(x) = e^x \cdot \mathbb{1}\left\{x \le 0\right\}$. Отримуємо щільність розподілу суми незалежних випадкових величин

$$p_{\ln|r_s|}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\ln|v_{is}|}(x-y) \cdot p_{\ln\left|u_{sj}^T\right|} dy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{x-y} \cdot \mathbb{1}\left\{x-y \le 0\right\} \cdot e^y \cdot \mathbb{1}\left\{y \le 0\right\} dy = e^x \int\limits_{\min(x,0)}^{0} dy = -e^x \cdot \min(x,0).$$

Перейдемо від розподілу логарифму випадкової величини $\ln|r_s|$ до розподілу самої випадкової величини $|r_s|$

$$p_{|r_s|}(x) = \frac{1}{x} \cdot p_{\ln|r_s|}(\ln\, x) = -\frac{1}{x} \cdot e^{\ln\, x} \cdot \min(\ln\, x, 0) = -\ln\, x,\; 0 \leq x \leq 1.$$

Замінюємо x на $|x|$ в останньому виразі та ділимо його на 2, щоб отримати щільність розподілу випадкової величини r_s. Маємо

$$p_{r_s}(x) = -\frac{1}{2} \cdot \ln|x| \cdot \mathbb{1}\{x \in [-1, 1]\}\,.$$

Знайдемо математичне сподівання цієї випадкової величини

$$Mr_s = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x{\cdot}p(x)\,dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} x{\cdot}\ln|x|\,dx = -\frac{1}{2}{\cdot}\ln|x| \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}{\cdot}\frac{1}{x}dx = 0.$$

Тоді математичне сподівання елементу знайденої матриці повороту дорівнює $Mr_{ij} = M(r_1 + r_2 + r_3) = 0$.

3.3 Аналіз алгоритму

Алгоритм має обмежене застосування та добре працює тільки в тому випадку, якщо шум, а також початковий поворот та зсув множини S відносно множини T малі. На рисунку 3.1 зображено приклад двох множин, для яких алгоритм не дає очікуваного результату.

Множини представляють собою два ідентичних прямокутник трикутника з катетами, які дорівнюють одиниці, що відрізняються кутом повороту π та

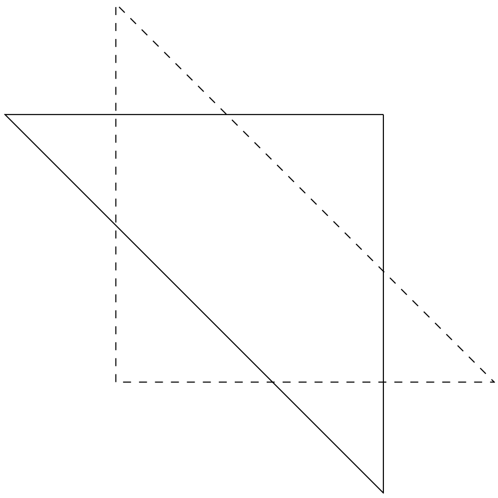

Рисунок 3.1 — Два трикутника, при співставленні яких ICP не дає очікуваного результату

зсувом

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Множину T зображено пунктиром. Це трикутник з вершинами $(0,0)\,,(0,1)$ і $(1,0)$. Множину $S = R \cdot \boldsymbol{t} + \boldsymbol{b}$ — суцільною лінією, де $\boldsymbol{t}$ — точки множини T, а матриця повороту

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Таким чином, множини T і S мають вигляд

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Рахуємо відстані від кожної точки з множини S до кожної точки з множини T

$$d\left(\boldsymbol{s_1},\boldsymbol{t_1}\right)=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)^2}=1,$$

$$d\left(\boldsymbol{s_1},\boldsymbol{t_2}\right)=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2}\approx 0.77,$$

$$d\left(\boldsymbol{s_1},\boldsymbol{t_3}\right)=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)^2}\approx 0.77,$$

$$d\left(\boldsymbol{s_2},\boldsymbol{t_1}\right)=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1-0\right)^2}\approx 0.77,$$

$$d\left(\boldsymbol{s_2},\boldsymbol{t_2}\right)=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1-1\right)^2}\approx 1.47,$$

$$d\left(\boldsymbol{s_2},\boldsymbol{t_3}\right)=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1-0\right)^2}\approx 0.41,$$

$$d\left(\boldsymbol{s_3},\boldsymbol{t_1}\right)=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1-0\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)^2}\approx 0.77,$$

$$d\left(\boldsymbol{s_3},\boldsymbol{t_2}\right)=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1-0\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2}\approx 0.41,$$

$$d\left(\boldsymbol{s_3},\boldsymbol{t_3}\right)=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)^2}\approx 1.47.$$

Вибираємо мінімальну відстань для кожної точки $\boldsymbol{s}\in S$. Таким образом, разметка имеет вид

$$\boldsymbol{k_{s_1}}=\boldsymbol{t_2},\ \boldsymbol{k_{s_2}}=\boldsymbol{t_3},\ \boldsymbol{k_{s_3}}=\boldsymbol{t_2}.$$

Знаходимо

$$\bar{\boldsymbol{s}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.37 \\ 0.37 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 + 1 + 0 \\ 1 + 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.33 \\ 0.67 \end{bmatrix}.$$

Знаходимо матриці

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}2}{+}\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} \end{bmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} 0.33 & 0.33 & -0.67 \\ 0.33 & -0.67 & 0.33 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{K}_s = \begin{bmatrix} 0 - \frac{1}{3} & 1 - \frac{1}{3} & 0 - \frac{1}{3} \\ 1 - \frac{2}{3} & 0 - \frac{2}{3} & 1 - \frac{2}{3} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.33 & 0.67 & -0.33 \\ 0.33 & -0.67 & 0.33 \end{bmatrix}.$$

Обчислюємо матрицю X і беремо від неї сингулярний розклад

$$X = \tilde{S} \cdot \tilde{K}_s^T = \begin{bmatrix} 0.33 & -0.33 \\ -0.67 & 0.67 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.4472136 & 0.89442719 \\ 0.89442719 & 0.4472136 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.05409255 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -0.70710678 & -0.70710678 \\ -0.70710678 & -0.70710678 \end{bmatrix} = U \cdot \Sigma \cdot V^T.$$

Обчислюємо матрицю повороту

$$R = V \cdot U^T = \begin{bmatrix} 0.9486833 & -0.31622777 \\ 0.31622777 & 0.9486833 \end{bmatrix}.$$

Визначник цієї матриці дорівнює одиниці, тому R — матриця повороту. Знаходимо зсув

$$\boldsymbol{b} = \overline{\boldsymbol{k}}_{\boldsymbol{s}} - R \cdot \overline{\boldsymbol{s}} = \begin{bmatrix} 0.09693825 \\ 0.1938765 \end{bmatrix}.$$

Знаходимо нову множину S

$$S = \begin{bmatrix} 0.54 & 0.86 & -0.4 \\ 1.09 & 0.14 & 0.77 \end{bmatrix}.$$

Нова розмітка співпадає зі старою, отже, можемо закінчити обчислення. Отримані взаємні розміщення множин зображені на рисунку 3.2.

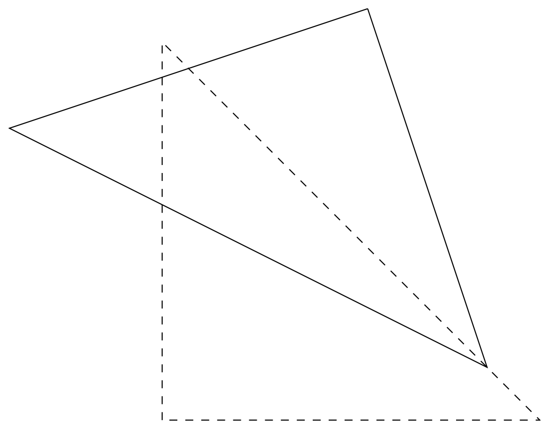

Рисунок 3.2 — Результат ICP для трикутників

Правильним результатом були б такі поворот і зсув, коли всі відповідні точки двох трикутників мали б однакові положення. Через те, що найближчі точки не є відповідними, глобальний мінімум не досягається.

4 ВІДСТАНЬ ХАУСДОРФА

4.1 Теоретичні основи

Метричний простір [11] — це пара (S, d), яка складається з множини S і метрики $d : S \times S \to \mathbb{R}$, тобто для будь-яких $x, y, z \in S$ виконується

1) $d(x, y) \geq 0$;
2) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ — аксиома тотожності;
3) $d(x, y) = d(y, x)$ — аксиома симетрії;
4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ — нерівність трикутника.

Метричний простір (S, d) називається сепарабельним, якщо існує не більше ніж зліченна множина $\Gamma \subset S$ така, що

$$(\forall x \in S)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists y \in \Gamma) : \qquad d(x, y) < \varepsilon.$$

Метричний простір (S, d) називається повним, якщо в ньому збігається будь-яка фундаментальна послідовність. Прикладом повного сепарабельного метричного простору є $\mathbb{R}^n$ з евклідовою відстанню.

4.2 Відстань Хаусдорфа

Відстань Хаусдорфа визначається на множині всіх непустих замкнених підмножин простору $\mathbb{R}^n$.

Нехай S і T — непусті замкнені підмножини $\mathbb{R}^n$. Відстань Хаусдорфа між S і T визначається як

$$H(S, T) = \inf \{\varepsilon \geq 0 \mid S \subset T + \varepsilon,\ T \subset S + \varepsilon\}, \tag{4.1}$$

де $S+\varepsilon$ — об'єднання замкнених шарів з радіусом ε і центром в точці $x \in S$

$$S+\varepsilon = \bigcup_{x\in S} \left\{ \overline{B}_{\varepsilon}\left(x\right) \right\}.$$

Перевіримо аксіоми метрики для відстані Хаусдорфа $H\left(S,T\right)$, яка задана формулою (4.1).

1) $H\left(S,T\right) \geq 0$. Це випливає з означення (4.1), бо точна нижня межа величини $\varepsilon \geq 0$ невід'ємна.
2) $H\left(S,T\right) = 0$ тоді та тільки тоді, коли $S = T$. Остання рівність рівносильна двом умовам: $S \subset T$ та $T \subset S$. Це можна записати через елементи множин: якщо $x \in S$, то $x \in T$, та якщо $x \in T$, то $x \in S$.

   Нехай $x \in S$ і $\forall \varepsilon > 0$ виконується $T+\varepsilon \supset S$, тобто $x \in T+\varepsilon$. Використаємо означення (4.2)
   $$x \in \bigcup_{y\in T} \overline{B}_{\varepsilon}\left(y\right).$$
   Якщо x належить об'єднанню множин, то x належить хоча б однієї з цих множин. Отже, знайдеться такий $y_{\varepsilon} \in T$, що $x \in \overline{B}_{\varepsilon}\left(y_{\varepsilon}\right)$, тобто $d\left(y_{\varepsilon},x\right) \leq \varepsilon$. Це виконується для будь-якого $\varepsilon \geq 0$, отже, x або лежить в T, або є його граничною точкою. Але T — замкнена множина, звідки випливає, що $x \in T$.

   Друга частина доводиться аналогічно.

   З іншого боку, якщо $S = T$, то $S \subset T$ та $T \subset S$, отже, $\varepsilon = 0$ та $H\left(S,T\right) = 0$.
3) $H\left(S,T\right) = H\left(T,S\right)$ випливає з симетричності означення відстані Хаусдорфа.
4) $H\left(S,T\right) \leq H\left(S,T\right) + H\left(T,G\right)$ для будь-яких замкнених множин S, T, G

з $\mathbb{R}^n$. Треба перевірити, чи виконується наступне

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{S,G} \geq H(S,G), \\ \varepsilon_{G,T} \geq H(G,T) \end{aligned}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} S \subset T + \varepsilon_{G,T} + \varepsilon_{G,S}.$$

Виконуємо ті ж дії, що й при перевірці другої умови. Для першого рядка системи отримуємо, що з того, що $x \in S$ і $G + \varepsilon_{S,G} \supset S$, випливає, що $x \in G$. Використовуючи умову з другого рядка, отримуємо, що при цьому $T + \varepsilon_{G,T} \supset G$, тобто $x \in T + \varepsilon_{G,T}$, отже, при $\varepsilon_{S,G} \geq 0$ вконується й $x \in T + \varepsilon_{G,T} + \varepsilon_{S,G}$. Згадуючи, що з самого початку x належав множині S, бачимо, що наслідок (4) виконується, тобто нерівність трикутника справедлива.

Аксиоми метрики виконуються, отже, відстань Хаусдорфа — метрика на замкнених множинах з $\mathbb{R}^n$.

4.2.1 Приклад 1

Знайдемо відстань Хаусдорфа між двома еліпсами (рис. 4.1) [12]

$$S : \frac{x^2}{4} + 4y^2 = 1,$$
$$T : 4(x-2)^2 + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Пунктиром нарисовані еліпси $S + \varepsilon$ і $T + \varepsilon$ такі, щобб виконувалось (4.1). У даному випадку ε — це відстань між точками A та B, яка дорівнює $\varepsilon = 1.5 - (-2) = 3.5$. Тому $H(S, D) = 3.5$.

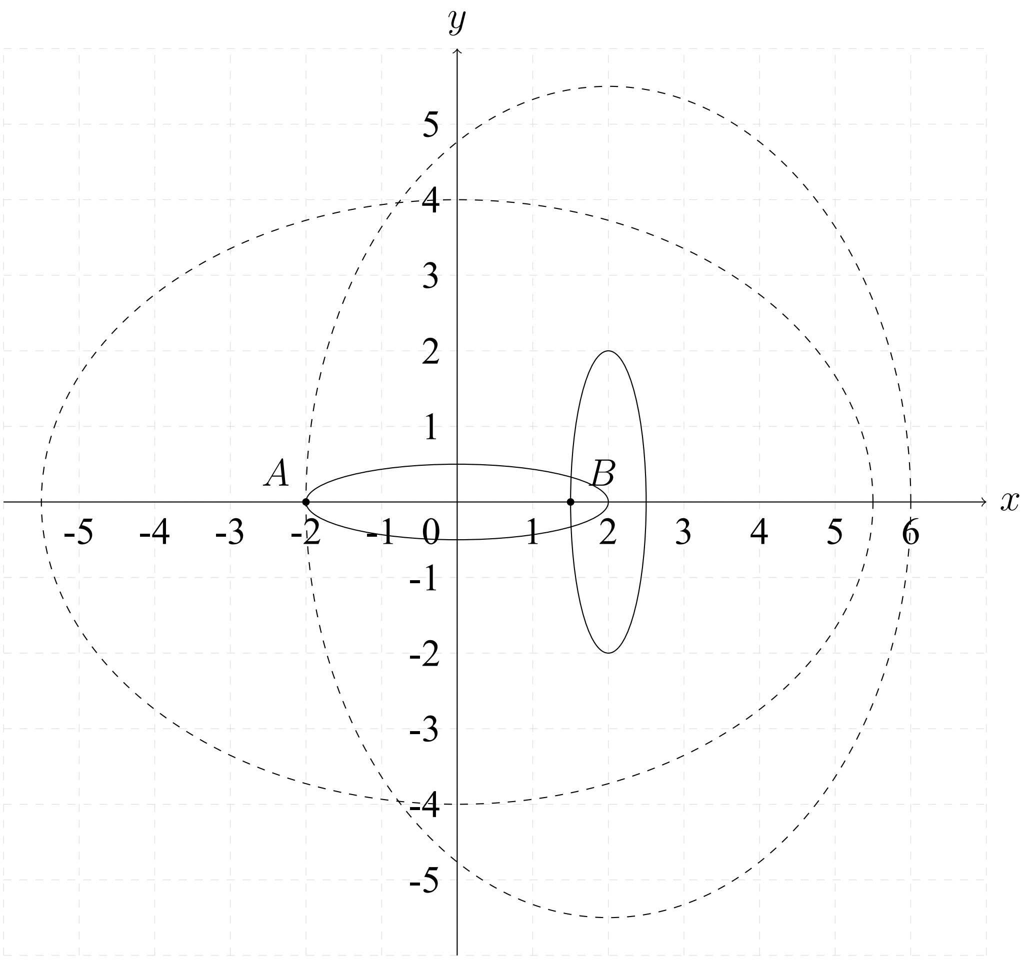

Рисунок 4.1 — Еліпси, між якими шукаємо відстань Хаусдорфа

4.2.2 Приклад 2

Нехай (X, d) — метричний простір і $A \subset X$. Нехай $\varepsilon > 0$ задано. Множина C — ε-сітка для множини A, якщо для кожного $x \in A$ знайдеться такий $y \in C$, що $d(x, y) < \varepsilon$ або

$$\bigcup_{y \in C} B(y, \varepsilon) \supset A.$$

Тоді відстань Хаусдорфа між множиною A й ε-сіткою C на ній $H(C, A) = \varepsilon$.

Покажемо це. Знайдемо відстань Хаусдорфа

$$H(C, A) = \inf \{\varepsilon \geq 0 \mid C + \varepsilon \supset A,\ A + \varepsilon \supset C\}.$$

За означенням

$$C+\varepsilon=\bigcup_{y\in C}\overline{B}\left(y,\varepsilon\right)\supset\bigcup_{y\in C}B\left(y,\varepsilon\right)\supset A.$$

З іншого боку,

$$A+\varepsilon=\bigcup_{x\in A}\overline{B}\left(x,\varepsilon\right)\supset A\supset C.$$

Отримали, що $C+\varepsilon\supset A$ й $A+\varepsilon\supset C$, тобто $H\left(C,A\right)=\varepsilon$.

Таким чином, на неперервній множині можна задавати ε-сітку та отримувати точкову множину, яка відрізняється від початкової не меньше ніж на ε.

ВИСНОВКИ

В ході роботи було досліджено метод найменших квадратів. З деякими змінами цей метод дозволяє розв'язати поставлену задачу та показує коректність ітеративного алгоритму найближчих точок.

Було з'ясовано, що звичайний метод найменших квадратів не дає оптимального розв'язку в даному випадку, адже на шукані параметри накладені нелінійні обмеження: матриця повороту R має бути ортогональною, а її визначник повинен дорівнювати одиниці. Також за допомогою цього методу ми не можемо оцінити оптимальну розмітку k, адже це дискретна функція.

Саме через ці зауваження алгоритм складається з двох кроків, які виконуються почергово. На першому кроці алгоритму відбувається пошук найкращої розмітки k при фіксованих R і $\boldsymbol{b}$. На другому — пошук матриці повороту R і вектора зсуву $\boldsymbol{b}$ при фіксованій розмітці k. Щоб забезпечити ортогональність матриці повороту, застосовується сингулярний розклад.

Була досліджена відстань Хаусдорфа та ε-сітка для компактних множин в повному сепарабельному метричному просторі, завдяки чому можна вибирати точки на неперервних множинах та використовувати для них ітеративний алгоритм найближчих точок.

Було доведено, що ітеративний алгоритм найближчих точок завжди збігається. Подальша робота полягає у дослідженні властивостей оцінки параметрів, отриманої за допомогою алгоритму.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1 Hudson, D.J. Статистика для физиков: лекции по теории вероятностей и элементарной статистике / D.J. Hudson, В.Ф. Грушин, Е.М. Лейкин. — Мир, 1967.

2 Воеводин, В.В. Линейная алгебра / В.В. Воеводин. — Издательство "Наука Главная редакция физико-математической литературы, 1974.

3 Zhang, Zhengyou. Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces / Zhengyou Zhang // *International journal of computer vision*. — 1994. — October. — Vol. 13. — Pp. 119–152.

4 Fukunaga, K. Introduction to Statistical Pattern Recognition / K. Fukunaga // Computer science and scientific computing. — Elsevier Science, 2013.

5 Golub, Gene H. Matrix Computations / Gene H. Golub, Charles F. Van Loan. — Third edition. — The Johns Hopkins University Press, 1996.

6 Винберг, Э. Курс алгебры / Э. Винберг. — ЛитРес, 2017.

7 Фаддеев, Д.К. Лекции по алгебре / Д.К. Фаддеев. — "Наука,"Глав. ред. физико-математической лит-ры, 1984.

8 Horn, Alfred. Doubly Stochastic Matrices and the Diagonal of a Rotation Matrix / Alfred Horn // *American Journal of Mathematics*. — 1954. — July. — Vol. 76. — Pp. 620–630.

9 Sorkine-Hornung, Olga. Least-Squares Rigid Motion Using SVD / Olga Sorkine-Hornung, Michael Rabinovich. — 2017. — January. — Technical note.

10 Mathai, A.M. Jacobians of Matrix Transformations and Functions of Matrix Argument / A.M. Mathai. — World Scientific Pub., 1997.

11 Дороговцев, А. Я. Математический анализ. Краткий курс в современном изложении / А. Я. Дороговцев. — Киев: Факт, 2004. — 560 с.

12 Crownover, R.M. Introduction to fractals and chaos / R.M. Crownover // Jones and Bartlett books in mathematics. — Jones and Bartlett, 1995.

ДОДАТОК А

Лістинг коду програми з реалізацією ітеративного алгоритму найближчих точок та відображенням результатів

```
from numpy.random import random, normal
from numpy import array, matrix, mean, allclose, ones, diag
from scipy.stats import special_ortho_group
from scipy.spatial import cKDTree
from numpy import linalg
from matplotlib import pyplot
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Set cardinality
n = 100
# Generate set T
target = random((n, 3))
target = array(target)
# Generate rotation matrix
R = special_ortho_group.rvs(3)
R = matrix(R)
# Generate shift vector
b = random((3, 1)) * 2 - 1
# Generate random noise
xi = normal(0, .005, target.shape)
# Transform set T into set S
source = array((R * target.T).T + b.T + xi)

# Plot sets
fig = pyplot.figure()
ax = Axes3D(fig)
ax.scatter(-target[:,0], -target[:,2], target[:,1], c='b')
ax.scatter(-source[:,0], -source[:,2], source[:,1], c='r')
pyplot.show()

# Function for finding labeling
tree = cKDTree(target)
def find_labeling(target, source):
    return target[tree.query(source)[1]]

# Function for finding transformation
def find_transformation(nearest_neighbours, source):
    centroid_target = mean(nearest_neighbours, axis=0)
    centroid_source = mean(source, axis=0)
    H = ((nearest_neighbours - centroid_target).T).dot(source - centroid_source)
    U, S, V = linalg.svd(H)
    R = ((U.T).dot(diag([1, 1, linalg.det(U.T.dot(V.T))]))).dot(V.T)
    t = centroid_target - R.dot(centroid_source.T).T
    return R.dot(source.T).T + t

```

```
# Function with ICP algorithms
def icp(target, source, max_iterations=400):
    labelings = []
    transformations = []
    labelings.append(find_labeling(target, source))
    transformations.append(find_transformation(labelings[0], source))
    i = 1
    while (len(labelings) < 2 or not allclose(labelings[-1], labelings[-2])) and i < max_iterations:
        i += 1
        labelings.append(find_labeling(target, transformations[-1]))
        transformations.append(find_transformation(labelings[-1], source))
    print 'Number of iterations:', i
    return transformations

# Running the algorithm
result = icp(data, source)[-1]

# Plot result
fig = pyplot.figure()
ax = Axes3D(fig)
ax.scatter(-data[:,0], -data[:,2], data[:,1], c='b')
ax.scatter(-result[:,0], -result[:,2], result[:,1], c='r')
pyplot.show()
```