

Zusammenfassung*Lineare Algebra II

gehalten von Prof. Dr. Stefan Schwede, Universität Bonn
im Sommersemester 2013

Robert Hemstedt, Jens Krewald
`r@twopi.eu`

19. April 2013

Hinweise zur Verwendung

Die stets aktuelle Version dieser Zusammenfassung lässt sich finden unter
<http://github.com/euklid/Zusf-LinAII> .

Dort sind auch die `.tex`-Dateien zu finden, wenn man selbst Veränderungen vornehmen möchte.
Bitte beachtet die **Lizenzhinweise**.

Werter Kommilitone, diese Zusammenfassung basiert zum größten Teil auf meinen Mitschriften unserer LA-Vorlesungen bei Prof. Dr. Schwede sowie teilweise auf dem Fischer¹.

Was die Nummerierung der Sätze und Kapitelabschnitte angeht, so ist sie nicht mit der aus dem Fischer identisch.

Gedacht ist diese Zusammenfassung explizit als Prüfungsvorbereitung und wird daher auch noch bis zur letzten Vorlesung weiterhin ergänzt. Wenn du Anmerkungen, Ergänzungen, Lob oder Kritik haben solltest, dann sprich mich einfach an, schick mir eine E-Mail oder, was das beste wohl ist, benutze github.com, um mir eine *pull*-Request zu schicken.

Ich haften weder für „fehlende“ Inhalte noch für inhaltliche oder sprachliche Fehler.

Ich hoffe, dass diese Zusammenfassung und der damit verbundene Aufwand sich nicht nur für mich als Verfasser, sondern auch noch für dich als Kommilitone lohnen wird und der Aufwand auch in Form einer möglichst guten Klausurnote entlohnt wird.

Viel Spaß beim Lernen!

Lizenz

Ich veröffentliche dieses Dokument unter der Beerware-Lizenz:

„THE BEER-WARE LICENSE“ (Revision 42):
<r@twopi.eu> schrieb diese Datei. Solange Sie diesen Vermerk nicht entfernen, können Sie mit dem Material machen, was Sie möchten. Wenn wir uns eines Tages treffen und Sie denken, das Material ist es wert, können Sie mir dafür ein Bier ausgeben. Robert Hemstedt

*nach meinen persönlichen Aufzeichnungen

¹Gerd Fischer, Lineare Algebra, 17.Auflage, Vieweg+Teubner Verlag

1 Eigenwerte

1.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Nun: $F : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Gesucht ist eine Basis \mathcal{B} von V , so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ eine möglichst einfache Form hat. Äquivalentes Problem: zu $A \in M(n \times n, K)$ finde man $S \in GL(n, K)$, sodass $S \cdot A \cdot S^{-1}$ „einfache“ Form hat. Mit anderen Worten: $M(n, K)$ verstehen bis auf Ähnlichkeit.

Beispiel 1.1: Sei $\dim(V) = 1$ und $F : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Sei $v \in V, v \neq 0$, dann gibt es genau ein $\lambda \in K$ mit $F(v) = \lambda v$. Dieses λ ist unabhängig von v .

Definition 1.2: Sei F ein Endomorphismus eines K -Vektorraums V . Ein $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** von F , falls es $v \in V, v \neq 0$ gibt mit $F(v) = \lambda \cdot v$. v heißt **Eigenvektor** zum Eigenwert λ . Beachte: Der Eigenwert $\lambda = 0$ ist zulässig, aber Eigenvektoren sind immer $\neq 0$.

Bemerkung 1.3: Sei $\lambda = 0$ Eigenwert und Eigenvektor $v \neq 0$, also $F(v) = 0, v \neq 0 \Rightarrow 0$ ist Eigenwert von $F \Leftrightarrow F$ ist nicht injektiv.

1.2 Diagonalisierung von Endomorphismen

Definition 1.4: Ein Endomorphismus eines Vektorraums heißt **diagonalisierbar**, falls es eine Basis aus Eigenvektoren gibt.

Bemerkung 1.5: Sei $\dim(V) < \infty$, dann ist $F : V \rightarrow V$ genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis \mathcal{B} von V gibt mit $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$.

Sei $A \in M(n \times n, K)$, aufgefasst als Endomorphismus von K^n . Dann ist A diagonalisierbar, wenn es ein $S \in GL(n, K)$ gibt, mit $S \cdot A \cdot S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \Leftrightarrow A \cdot S^{-1} = S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Die Spalten von S^{-1} sind die Basis aus Eigenvektoren.

Vorsicht: Wenn F diagonalisierbar ist, so ist i.A. trotzdem nicht jeder Vektor ein Eigenvektor.

Lemma 1.6: Sei $F : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus und (v_1, \dots, v_m) Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten. Dann ist (v_1, \dots, v_m) linear unabhängig. Insbesondere gilt $m \leq \dim(V)$.

Satz 1.7: Sei $F \in \text{End}(V)$ mit $n = \dim(V) < \infty$. Angenommen F hat n paarweise verschiedene Eigenwerte. Dann ist F diagonalisierbar.

Definition 1.8: Sei F ein Endomorphismus eines Vektorraums V und $\lambda \in K$. Der **Eigenraum** $\text{Eig}(F; \lambda)$ von F zu λ ist definiert als

$$\text{Eig}(F; \lambda) = \{v \in V : F(v) = \lambda \cdot v\} = \{\text{Eigenvektoren von } F \text{ zum Eigenwert } \lambda\} \cup \{0\}$$

Bemerkung 1.9:

- a) $\text{Eig}(F; \lambda)$ ist ein Untervektorraum von V .
- b) λ ist Eigenwert von $F \Leftrightarrow \text{Eig}(F; \lambda) \neq \{0\}$.
- c) $\text{Eig}(F; \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert λ .
- d) $\text{Eig}(F; \lambda) = \text{Ker}(F - \lambda \text{Id}_V)$.
- e) Sind λ_1, λ_2 verschieden, so ist $\text{Eig}(F; \lambda_1) \cap \text{Eig}(F; \lambda_2) = \{0\}$.

1.3 Methode zur Bestimmung von Eigenwerten: Das charakteristische Polynom

Bemerkung 1.10: Sei $F : V \rightarrow V$ Endomorphismus und $\lambda \in K, \dim(V) < \infty$. Dann sind äquivalent:

- i) λ ist Eigenwert von F .
- ii) $\det(F - \lambda \cdot \text{Id}_V) = 0$.

Mit anderen Worten, die Eigenwerte von F sind genau die Nullstellen der Funktion $\tilde{P}_F : K \rightarrow K, \lambda \mapsto \det(F - \lambda \cdot \text{Id}_V)$, die **charakteristische Funktion** von F .

Ziel: \tilde{P}_F ist die Polynomfunktion eines bestimmten Polynoms $P_F \in K[t]$.

Sei $F : V \rightarrow V$ Endomorphismus, $\dim(V) < \infty$, sei \mathcal{A} eine Basis von V . Sei $M(n \times n, K) \ni A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)$ die darstellende Matrix. Betrachte K als Unterring von $K[t]$ und dann auch A als Matrix mit Einträgen in $K[t]$. Bilde die Matrix $A - t \cdot E_n \in M(n \times n, K[t])$.

$$A - t \cdot E_n = \begin{pmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - t \end{pmatrix}$$

Definition 1.11: Das charakteristische Polynom von $F \in \text{End}(V)$ (bezüglich der Basis \mathcal{A}) ist definiert als $P_F = \det(A - t \cdot E_n) \in K[t]$, wobei $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)$.

1.3.1 Exkurs Quotientenkörper

Sei R ein kommutativer, nullteilerfreier Ring mit $1 \neq 0$. Wir konstruieren den **Quotientenkörper** $\text{Quot}(R)$ mit injektivem Ringhomomorphismus $R \rightarrow \text{Quot}(R)$.

Beispiel: $\text{Quot}(K[t]) = K(t)$ (Körper der rationalen Funktionen), $\text{Quot}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$, $\text{Quot}(K) \cong K$.

„Brüche“ Wir betrachten Paare $(r, s) \in R^2$ mit $s \neq 0$. Wir betrachten die Äquivalenzrelation auf solchen Paaren: $(r, s) \sim (r', s') \Leftrightarrow r \cdot s' = r' \cdot s$.

Wir definieren $\text{Quot}(R)$ als die Menge der Äquivalenzklassen von solchen Paaren $\frac{r}{s}$ für die Äquivalenzklasse von (r, s) :

$$\text{Quot}(R) = \left\{ \frac{r}{s} : r, s \in R, s \neq 0 \right\}.$$

Addition: $\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} := \frac{r \cdot s' + r' \cdot s}{s \cdot s'}$; Multiplikation: $\frac{r}{s} \cdot \frac{r'}{s'} := \frac{r \cdot r'}{s \cdot s'}$, wobei immer $s \cdot s' \neq 0$.

Diese Operationen sind wohldefiniert und erfüllen die Eigenschaften kommutativer Ringe. Neutrales Element bezüglich $+$: $0 = \frac{0}{1}$

Neutrales Element bezüglich \cdot : $\frac{1}{1}$, $1 \neq 0$.

Inverses bezüglich \cdot : Ist $0 \neq \frac{r}{s} \in \text{Quot}(R)$, dann ist $\frac{s}{r} \in \text{Quot}(R)$ das multiplikative Inverse.

Wir betrachten die Abbildung $\eta: R \rightarrow R; r \mapsto \frac{r}{1}$. η ist injektiv. Wir können also R als Unterring des Körpers $\text{Quot}(R)$ auffassen.

Sei K ein Körper, dann ist $K(t) = \text{Quot}(K[t])$ der Körper der rationalen Funktionen.

Sei jetzt $A \in M(n \times n; K)$. Dann ist $A - t \cdot E_n \in M(n \times n; K[t])$ die Matrix mit den Koeffizienten $(A - t \cdot E_n)_{ij} = a_{ij} - t \cdot \delta_{ij}$, wobei δ das Kronecker-Delta bezeichnet.

Definition 1.12: Das charakteristische Polynom von $A \in M(n \times n, K)$ ist $P_A = \det(A - t \cdot E_n) \in K[t]$.

Lemma 1.13: Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom.

Definition 1.14: Sei $\dim(V) = n < \infty$ und $F \in \text{End}(V)$. Sei \mathcal{B} eine Basis von V . Dann ist das Polynom $P_F = P_{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)} = \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) - t \cdot E_n) \in K[t]$ unabhängig von \mathcal{B} und heißt das charakteristische Polynom von F .

Satz 1.15: Sei $F \in \text{End}(V)$, $\dim(V) = n$. Dann hat das charakteristische Polynom die folgenden Eigenschaften:

- 1) $\deg(P_F) = n$.
- 2) P_F beschreibt die Abbildung $K \rightarrow K, \lambda \mapsto P_F(\lambda) = \det(F - \lambda \text{Id}_V)$. Dies benutzt: für $C \in M(n \times n; K[t])$ und $\lambda \in K$ gilt $\underbrace{\det(C)}_{\in K[t]}(\lambda) = \det(\underbrace{C(\lambda)}_{\in M(n \times n; K)})$, wobei $(C(\lambda))_{ij} = (c_{ij}(\lambda))$.
- 3) Die Nullstellen von P_F sind die Eigenwerte von F .
- 4) Ist A eine darstellende Matrix von F , dann gilt $P_F = \det(A - \lambda \cdot E_n)$.

Zusammengefasst $F \in \text{End}(V)$, $\dim(V) \leq n < \infty$

P_F ist das Produkt von n verschiedene Linearfaktoren ($\Leftrightarrow P_F$ hat n verschiedene Nullstellen) $\Rightarrow F$ diagonalisierbar $\Rightarrow P_F$ zerfällt in Linearfaktoren (nicht notwendigerweise verschieden) $\Leftrightarrow F$ ist trigonalisierbar.

Es bleibt, den Fall zu untersuchen, dass P_F in Linearfaktoren zerfällt, aber nicht (notwendig) in verschiedene.

Sei $P_F = \pm(t - \lambda_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (t - \lambda_k)^{r_k}$ mit paarweise verschiedenen λ_i 's, $r_i \geq 1$.

$r_1 + \dots + r_k = n = \dim(V)$, $r_i = \mu(P_F, \lambda_i)$

Lemma 1.16: Ist λ ein Eigenwert von $F \in \text{End}(V)$, dann gilt $1 \leq \dim(\text{Eig}(F; \lambda)) \leq \mu(P_F; \lambda)$.

Satz 1.17: Sei $\dim(V) = n < \infty$, $F \in \text{End}(V)$. Dann sind äquivalent:

- i) F ist diagonalisierbar.
- ii)
 - a) P_F zerfällt in Linearfaktoren und
 - b) Für alle Eigenwerte λ von F gilt $\dim(\text{Eig}(F; \lambda)) = \mu(P_F; \lambda)$.
- iii) Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von F , dann gilt $V = \text{Eig}(F, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \text{Eig}(F, \lambda_k)$.

Methode zur Diagonalisierung eines Endomorphismus F

- Bestimme eine Basis \mathcal{B} von V .
- Berechne die darstellende Matrix $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$.
- Berechne das charakteristische Polynom $P_F = \det(A - t \cdot E_n)$.
- Bestimme die Nullstellen von P_F (mit Vielfachheiten).
- Für alle Nullstellen λ von P_F bestimme $\text{Ker}(F - \lambda \cdot \text{Id}_V) = \text{Eig}(F; \lambda)$.
- Falls für alle Eigenwerte λ gilt: $\dim(\text{Eig}(F; \lambda)) = \mu(F; \lambda)$, dann ist F diagonalisierbar, sonst nicht.

1.3.2 Simultane Diagonalisierung

Frage: Seien $A, B \in M(n \times n, K)$ diagonalisierbar. Gibt es $S \in GL(n, K)$, sodass $S \cdot A \cdot S^{-1} = D$ und $S \cdot B \cdot S^{-1} = \tilde{D}$ Diagonalmatrizen sind?

Wenn das gilt, dann gilt: $A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow A$ und B kommutieren.

Satz 1.18: Seien F und G zwei diagonalisierbare Endomorphismen eines endlichdimensionalen Vektorraums. Dann sind äquivalent:

- F und G sind simultan diagonalisierbar \Leftrightarrow es gibt eine Basis \mathcal{B} von F , die aus Eigenvektoren von F und G besteht.
- $F \circ G = G \circ F$.

Definition 1.19: Sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum und $F \in \text{End}(V)$. W heißt **F-invariant**, falls $F(W) \subseteq W$.

1.4 Trigonalisierbarkeit

Beispiel 1.20: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat $P_A = t^2$ ist eben nicht diagonalisierbar.

Bemerkung 1.21: Sei $W \subseteq V$ ein F -invarianter Untervektorraum und $F \in \text{End}(V)$. Dann ist $P_{F|_W}$ ein Teiler von P_F .

Definition 1.22: Eine **Fahne** in einem Vektorraum V , $\dim(V) = n$, ist die Kette geschachtelter Vektorräume

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_i \subseteq \dots \subseteq V_n = V$$

mit $\dim(V_i) = i$. Für $F \in \text{End}(V)$ heißt die Fahne F -invariant, falls $F(V_i) \subseteq V_i$ für alle $i = 0, \dots, n$.

Bemerkung 1.23: Für $F \in \text{End}(K)$ sind äquivalent:

- Es gibt eine F -invariante Fahne von V .
- F ist trigonalisierbar, d.h. es gibt eine Basis \mathcal{B} in V , so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Definition 1.24: Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ heißt trigonalisierbar, falls es $S \in GL(n, K)$ gibt, so dass $S \cdot A \cdot S^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix ist. $\Leftrightarrow A$ ist trigonalisierbar als Endomorphismus von K^n .

Satz 1.25 Trigonalisierungssatz: Für einen Endomorphismus F eines n -dimensionalen Vektorraums V sind äquivalent:

- i) F ist trigonalisierbar.
- ii) Das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren.

Korollar 1.26: Jeder Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums über einen algebraisch abgeschlossenen Körper (z.B. \mathbb{C}) ist trigonalisierbar.