实验 1 误差与插值法

1）已知$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$，令$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$，则$x_n$构成逼近 ln2 的数列。根据交错级数和截断误差的知识，有估计式$|x_n - \ln 2| < \frac{1}{n+1}$。

记$|x_n - \ln 2| < \varepsilon$，若取 $\varepsilon = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$，试用单精度 float 计算$x_n$，问 n 为何值时能满足精度要求？理论上的 n 值与实际计算的 n 值是否存在不同？为什么？

令 ln2 的准确值为 0.693147190546。

利用已知数据ln2=0.693147190546，设计算法。我使用泰勒公式，循环计算得到ln2前n项的值，运用它与ln2准确值的差的绝对值与epsilon进行比较，作为循环判断。

代码：

```
double ln2 = 0.693147190546, epsilon = 0.00005, result = 0, n = 1, m = -1, q = -1;
while(abs(ln2 - result) > epsilon) {
        q = q * m;
        result += q / n;
        n++;
}
return 0;
```

得到结果：n=9014 `float result:9014`。这与理论计算值 10000 有不少差距。这是因为 float 精度有限，`C4305 "初始化": 从"double"到"float"截断`，float 小数点前后加起来有效数字只有 6 位，无法准确表示 ln2。而使用 double 类型可以得到准确的 10000 `double result:10000`。

2）对[-5,5]作等距划分 $x_i = -5 + ih$， $h = 10/n$， $i = 0,1,\cdots,n$，并对 Runge 给出的函数

$$f(x) = \frac{1}{1+16x^2}$$

作 Lagrange 插值和三次样条插值，观察 Runge 现象并思考改进策略。

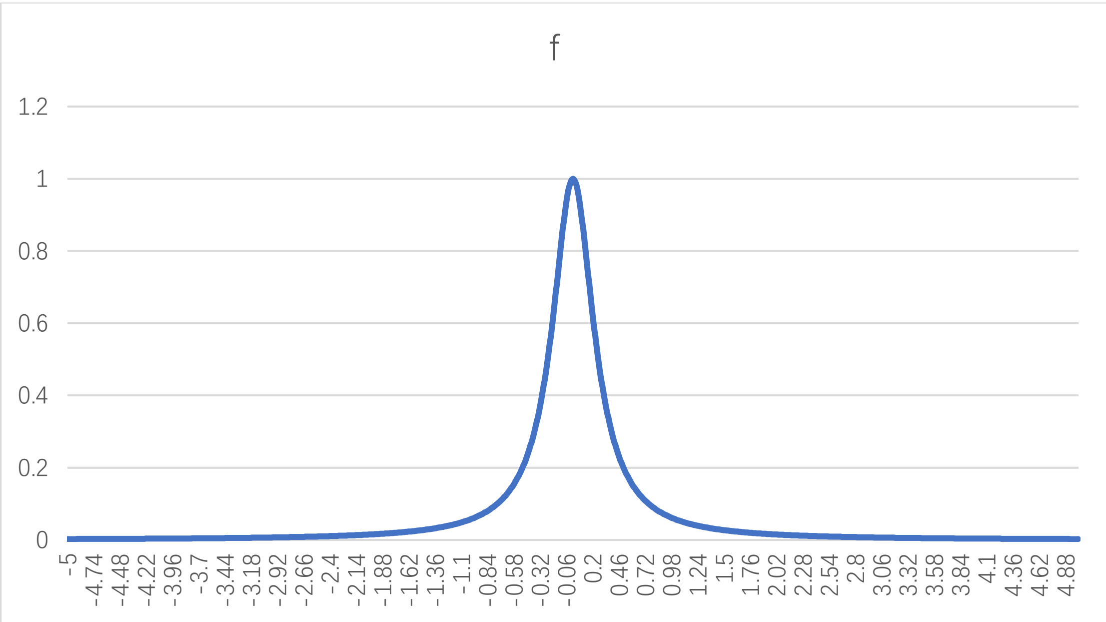
<1>分别取 $n = 10, 20$ 作 Lagrange 代数插值 $L_{10}(x)$ 与 $L_{20}(x)$。

<2>分别取 $n = 10, 20$ 作第一类(一阶)边界条件的三次样条差值 $S_{10}(x)$ 与 $S_{20}(x)$。

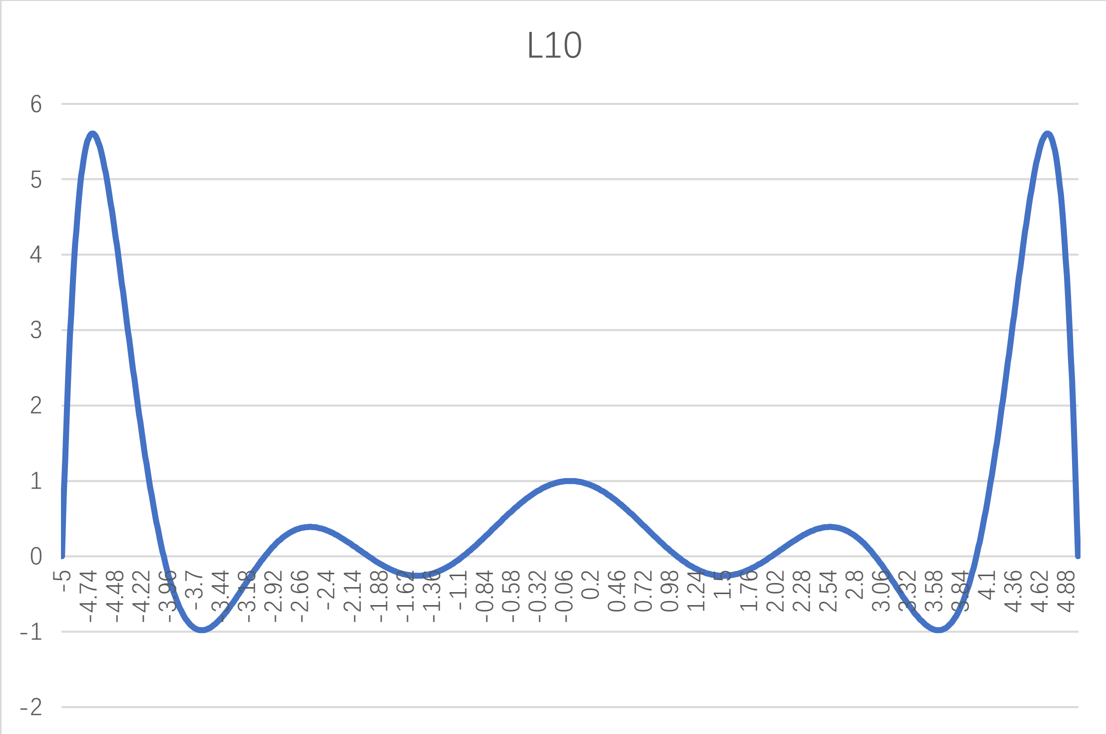
<3>给出 $f(x)$ 及 $L_{10}(x)$、$L_{20}(x)$、$S_{10}(x)$、$S_{20}(x)$ 在区间[-5,5]的函数图像，观察其不同（绘图部分可以采用 matlab 等来绘制图像）。

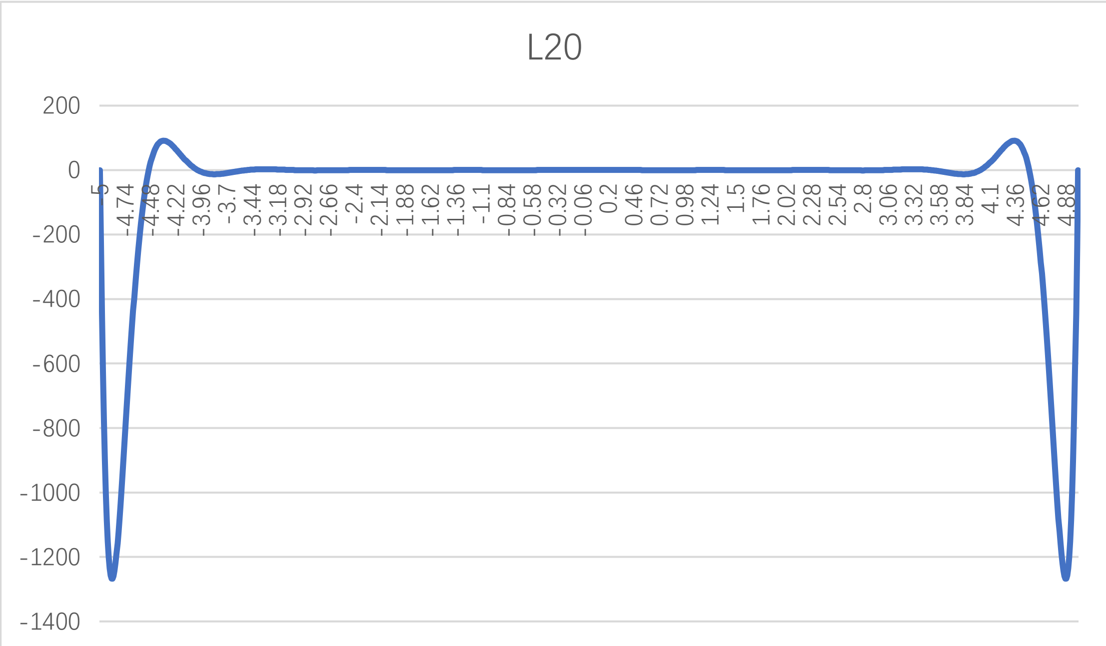
<4>考察上述两种差值函数在 x=4.8 处的误差，并作分析和思考。

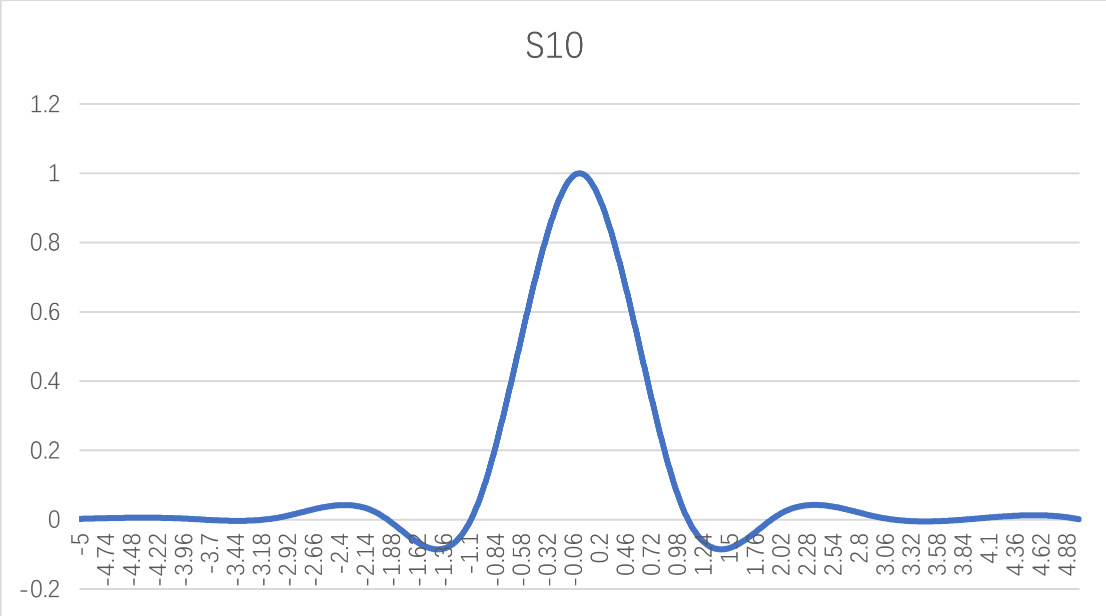
利用拉格朗日插值法和三次样条差值法在课本上的公式，我使用代码还原了两者的算法。对拉格朗日插值法，我先计算插值基函数，再写出 L(x)；对于后者，我使用了 2.6.2 中的公式完成[1]。然后我以 0.01 为间隔求出他们各自的值，用 Excel 绘制出图表。

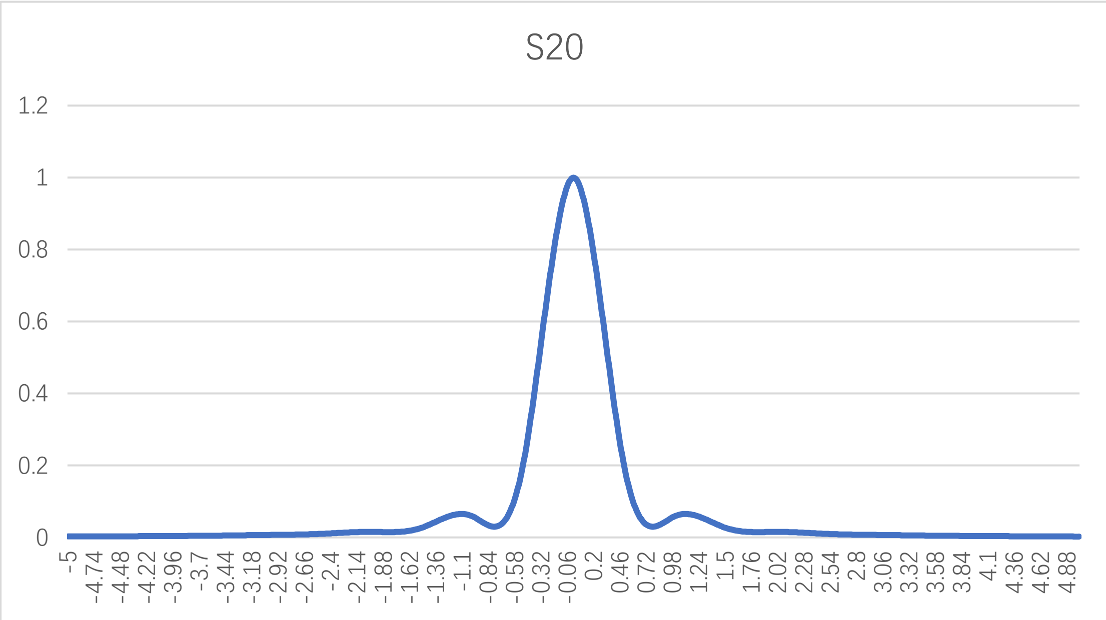


1 参考了网上的实现方式 https://blog.csdn.net/u012856866/article/details/23952819 https://blog.csdn.net/twicave/article/details/2808038 https://wenku.baidu.com/view/10f75481f01dc281e53af0fa.html


L10
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2


L20
200
0
-200
-400
-600
-800
-1000
-1200
-1400






```
f-L10:-5.14861
f-L20:1080.74
f-S10:-0.00699585
f-S20:4.00549e-05
```

再求出他们在 4.8 处的值进行比较：可以发现，拉格朗日差值在此处有明显误差，而且 n 越大误差越大；而三次样条差值则较为准确，而且随着 n 增大与 f 的误差减小。因此我们可以得出对于某些函数，取多项式的方式并不能提高拟合的精确度。我查阅了一些文献资料[2]，发现这主要是由于误差项里的高阶导数产生的误差一级一级传播。

[2] https://www.zhihu.com/question/39329749
https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%27s_phenomenon

展望与体会：

这次实验是我第一次尝试将数值分析中的课本知识运用到代码上来，让我对知识有了更深的了解。同时我也学会了一些科学计算的方式，尝试了解了一下强大的库。这对我以后的学习科研也有所帮助。