

实验 1 误差与插值法

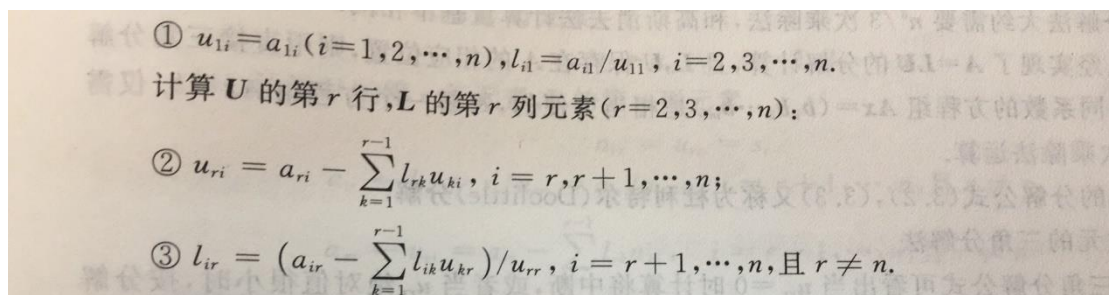
1 题目内容

考虑 n 阶的希尔伯特 (Hilbert) 矩阵 H_n , 其元素为 $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$, 也即是

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

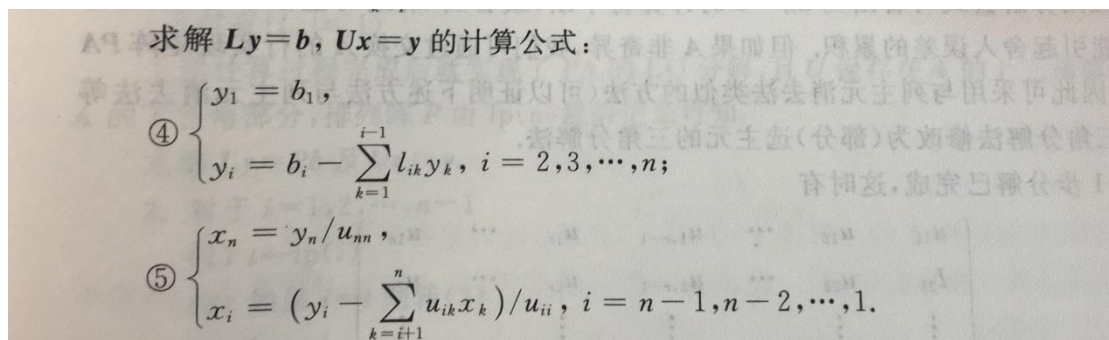
- (1) 按 ∞ -范数计算 H_3 和 H_4 的条件数;
- (2) 令 $n = 10$, 生成 Hilbert 矩阵, 并构造向量 $b = H_n x$, 其中 x 是所有分量都是 1 的列向量, 用矩阵三角分解 (LU 分解) 的方法求解以 H_n 作为系数矩阵的线性方程组 $H_n x = b$, 得到近似解 \hat{x} , 计算残差 $r = b - H_n \hat{x}$ 的 ∞ -范数 $\|r\|_\infty$, 以及误差 $\Delta x = \hat{x} - x$ 的 ∞ -范数 $\|\Delta x\|_\infty$;
- (3) (选做) 由于上述矩阵为对称矩阵, 采用平方根法 (Cholesky 分解) 重新求解上述方程, 并比较其与 LU 分解方法的运行效率;
- (4) 让上述线性方程组的右端项 b 产生 10^{-7} 的扰动, 然后重新求解上述方程组, 观察得到的解产生的误差的变化情况;
- (5) 减小或增大 n 的值, 观察 $\|\Delta x\|_\infty$ 的变化情况, n 取大约多少值时, 误差达到 100%?

- (1) 首先使用 gen_h 函数生成 n 阶希尔伯特矩阵, 接着使用 LU 分解法求逆矩阵:
 - a. 先用课本的公式对 H 矩阵进行 LU 分解



① $u_{1i} = a_{1i} (i=1, 2, \dots, n), l_{i1} = a_{i1}/u_{11}, i=2, 3, \dots, n.$
计算 U 的第 r 行, L 的第 r 列元素 ($r=2, 3, \dots, n$):
② $u_{ri} = a_{ri} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk} u_{ki}, i = r, r+1, \dots, n;$
③ $l_{ir} = (a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik} u_{kr})/u_{rr}, i = r+1, \dots, n, \text{ 且 } r \neq n.$

- b. 再构建一个 n 阶单位矩阵, 将每一列提取出作为 b ($[0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0]$), 解 n 个 $Hx=b$ 的方程, 将 x 合在一起即为 H 的逆矩阵。公式如下:



求解 $Ly=b, Ux=y$ 的计算公式:
④ $\begin{cases} y_1 = b_1, \\ y_i = b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} y_k, i = 2, 3, \dots, n; \end{cases}$
⑤ $\begin{cases} x_n = y_n/u_{nn}, \\ x_i = (y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{ik} x_k)/u_{ii}, i = n-1, n-2, \dots, 1. \end{cases}$

再求矩阵的范数, 使用 abs 函数取绝对值, 将每行相加取最大者为范数。
最后将 H 矩阵和 H 逆矩阵的范数相乘可得结果。

cond(H3): 748

cond(H4): 28375

- (2) 先构造一个全 1 的向量 x ，采用 (1) 中 LU 分解和求 x 的方式，得到 \hat{x} 。再用 H 和 \hat{x} 相乘，与 b 做差得到 r ， \hat{x} 与 x 做差得到 dx ，即可用 (1) 中求范数的方式得到结果。

norm_1(r): 2.22045e-16
norm_1(dx): 0.000575546

(3)

- (4) 将 $b[0]$ 用 1.0000001 代替，得到新的 b ，用 (2) 中方法得出结果。

norm_1(r): 2.22045e-16
norm_1(dx): 0.959726

- (5) 对 (2) 中的 H ，用不同的 n 构造，若得到的 dx 的范数大于 1 则输出 n ，否则使 n 加一。结果如下：

5

norm_1(r): 4.44089e-16
norm_1(dx): 2.28872e-11

6

norm_1(r): 2.22045e-16
norm_1(dx): 4.80139e-10

7

norm_1(r): 0
norm_1(dx): 1.41245e-08

8

norm_1(r): 0
norm_1(dx): 5.77178e-07

9

norm_1(r): 4.44089e-16
norm_1(dx): 2.24481e-05

10

norm_1(r): 2.22045e-16
norm_1(dx): 0.000575546

11

norm_1(r): 4.44089e-16
norm_1(dx): 0.0186329

12

norm_1(r): 1.11022e-16
norm_1(dx): 0.00909226

13

norm_1(r): 4.44089e-16
norm_1(dx): 17.0618

发现 dx 的范数在 $n=11,12,13$ 的时候，会出现奇怪的变化。与同学的方法进行比较发现并无 bug，似乎是由于编译器或者机器的精度不同出现的问题。