

实验 6 解线性方程组的迭代法

题目：考虑常微分方程的两点边值问题

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = a \\ y(0) = 0, y(1) = 1 \end{cases}, 0 < a < 1$$

容易知道它的精确解为

$$y = \frac{1-a}{1-e^{-1/\varepsilon}} (1-e^{-x/\varepsilon}) + ax$$

对微分方程进行离散化，把 $[0,1]$ 区间 n 等分，令 $h = \frac{1}{n}$

$$x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \text{ 得到有限差分方程}$$
$$\varepsilon \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = a$$

简化为

$$(\varepsilon + h) y_{i+1} - (2\varepsilon + h) y_i + \varepsilon y_{i-1} = ah^2$$

从而离散后得到的线性方程组的系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} -(2\varepsilon + h) & \varepsilon + h & & & \\ \varepsilon & -(2\varepsilon + h) & \varepsilon + h & & \\ & \varepsilon & -(2\varepsilon + h) & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \varepsilon + h \\ & & & \varepsilon & -(2\varepsilon + h) \end{bmatrix}$$

要求：

对于 $\varepsilon = 1$, $a = \frac{1}{2}$, $n = 100$ ，分别用 Jacobi 法、Gauss-Seidel 法和 SOR 法求解上述线性方程组的解，要求有 4 位有效数字，然后比较其与精确解的误差，比较上述三种算法的优缺点，给出自己的思考。

参考课本 P188, P189, P194 的算法，分别实现三个函数来完成计算。三个函数的主要区别在于确定 $x_u^{(k+1)}$ 的语句：

Jacobi:

```
x[turn][i] = (b[i] - a[i][i - 1] * x[nturn][i - 1] - a[i][i + 1] *  
x[nturn][i + 1]) / a[i][i];
```

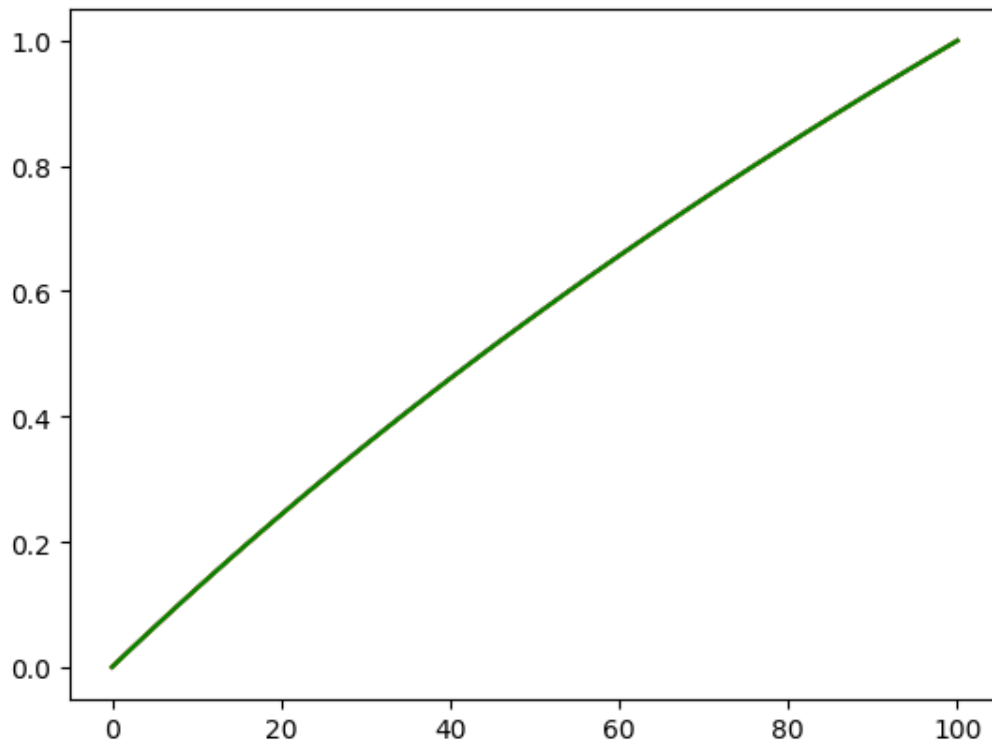
GC:

```
x[turn][i] = (b[i] - a[i][i - 1] * x[turn][i - 1] - a[i][i + 1] *  
x[nturn][i + 1]) / a[i][i];
```

SOR:

```
x[turn][i] = w * ((b[i] - a[i][i - 1] * x[turn][i - 1] - a[i][i + 1]  
* x[nturn][i + 1]) / a[i][i]) + (1 - w) * x[nturn][i];
```

当两次迭代之间的误差向量的最大范数小于 θ 使即停止计算。结果储存在data.txt中。可以发现四者几乎完全重合。



得到的误差如下，其中首位数字为离标准值最近的向量值，次位为最远的。可以发现SOR得到的结果最接近标准值，GC得到的结果偏离最大：

3,3: 0 0 0

3,2: -1.614e-05 -1.614e-05 -1.614e-05

3,2: -3.173e-05 -3.173e-05 -3.173e-05

3,2: -4.678e-05 -4.678e-05 -4.678e-05

3,2: -6.131e-05 -6.131e-05 -6.131e-05

3,2: -7.531e-05 -7.531e-05 -7.531e-05

3,2: -8.881e-05 -8.881e-05 -8.881e-05

3,2: -0.0001018 -0.0001018 -0.0001018

3,2: -0.0001143 -0.0001143 -0.0001143

3,2: -0.0001263 -0.0001263 -0.0001263

3,2: -0.0001379 -0.0001379 -0.0001379

3,2: -0.0001489 -0.0001489 -0.0001489
3,2: -0.0001595 -0.0001595 -0.0001595
3,2: -0.0001697 -0.0001697 -0.0001697
3,2: -0.0001794 -0.0001794 -0.0001794
3,2: -0.0001887 -0.0001887 -0.0001887
3,2: -0.0001975 -0.0001975 -0.0001975
3,2: -0.000206 -0.000206 -0.000206
3,2: -0.000214 -0.000214 -0.000214
3,2: -0.0002216 -0.0002216 -0.0002216
3,2: -0.0002288 -0.0002288 -0.0002288
3,2: -0.0002356 -0.0002356 -0.0002356
3,2: -0.0002421 -0.0002421 -0.0002421
3,2: -0.0002481 -0.0002481 -0.0002481
3,2: -0.0002538 -0.0002538 -0.0002538
3,2: -0.0002591 -0.0002591 -0.0002591
3,2: -0.0002641 -0.0002641 -0.0002641
3,2: -0.0002687 -0.0002687 -0.0002687
3,2: -0.000273 -0.000273 -0.000273
3,2: -0.0002769 -0.0002769 -0.0002769
3,2: -0.0002805 -0.0002805 -0.0002805
3,2: -0.0002838 -0.0002838 -0.0002838
3,2: -0.0002868 -0.0002868 -0.0002868
3,2: -0.0002894 -0.0002894 -0.0002894
3,2: -0.0002918 -0.0002918 -0.0002918
3,2: -0.0002938 -0.0002938 -0.0002938
3,2: -0.0002955 -0.0002955 -0.0002955
3,2: -0.000297 -0.000297 -0.000297
3,2: -0.0002982 -0.0002982 -0.0002982
3,2: -0.000299 -0.000299 -0.000299

3,2: -0.0002997 -0.0002997 -0.0002997
3,2: -0.0003 -0.0003 -0.0003
3,2: -0.0003001 -0.0003001 -0.0003001
3,2: -0.0002999 -0.0002999 -0.0002999
3,2: -0.0002995 -0.0002995 -0.0002995
3,2: -0.0002988 -0.0002988 -0.0002988
3,2: -0.0002979 -0.0002979 -0.0002979
3,2: -0.0002967 -0.0002967 -0.0002967
3,2: -0.0002954 -0.0002954 -0.0002954
3,2: -0.0002937 -0.0002937 -0.0002937
3,2: -0.0002919 -0.0002919 -0.0002919
3,2: -0.0002898 -0.0002898 -0.0002898
3,2: -0.0002876 -0.0002876 -0.0002876
3,2: -0.0002851 -0.0002851 -0.0002851
3,2: -0.0002824 -0.0002824 -0.0002824
3,2: -0.0002795 -0.0002795 -0.0002795
3,2: -0.0002764 -0.0002764 -0.0002764
3,2: -0.0002731 -0.0002731 -0.0002731
3,2: -0.0002697 -0.0002697 -0.0002697
3,2: -0.000266 -0.000266 -0.000266
3,2: -0.0002622 -0.0002622 -0.0002622
3,2: -0.0002582 -0.0002582 -0.0002582
3,2: -0.000254 -0.000254 -0.000254
3,2: -0.0002497 -0.0002497 -0.0002497
3,2: -0.0002451 -0.0002451 -0.0002451
3,2: -0.0002405 -0.0002405 -0.0002405
3,2: -0.0002356 -0.0002356 -0.0002356
3,2: -0.0002306 -0.0002306 -0.0002306
3,2: -0.0002255 -0.0002255 -0.0002255

3,2: -0.0002202 -0.0002202 -0.0002202
3,2: -0.0002148 -0.0002148 -0.0002148
3,2: -0.0002092 -0.0002092 -0.0002092
3,2: -0.0002035 -0.0002035 -0.0002035
3,2: -0.0001977 -0.0001977 -0.0001977
3,2: -0.0001917 -0.0001917 -0.0001917
3,2: -0.0001856 -0.0001856 -0.0001856
3,2: -0.0001794 -0.0001794 -0.0001794
3,2: -0.000173 -0.000173 -0.000173
3,2: -0.0001666 -0.0001666 -0.0001666
3,2: -0.00016 -0.00016 -0.00016
3,2: -0.0001533 -0.0001533 -0.0001533
3,2: -0.0001465 -0.0001465 -0.0001465
3,2: -0.0001396 -0.0001396 -0.0001396
3,2: -0.0001326 -0.0001326 -0.0001326
3,2: -0.0001255 -0.0001255 -0.0001255
3,2: -0.0001182 -0.0001182 -0.0001182
3,2: -0.0001109 -0.0001109 -0.0001109
3,2: -0.0001035 -0.0001035 -0.0001035
3,2: -9.605e-05 -9.605e-05 -9.605e-05
3,2: -8.848e-05 -8.848e-05 -8.848e-05
3,2: -8.081e-05 -8.081e-05 -8.081e-05
3,2: -7.307e-05 -7.307e-05 -7.307e-05
3,2: -6.524e-05 -6.524e-05 -6.524e-05
3,2: -5.734e-05 -5.734e-05 -5.734e-05
3,2: -4.936e-05 -4.936e-05 -4.936e-05
3,2: -4.13e-05 -4.13e-05 -4.13e-05
3,2: -3.317e-05 -3.317e-05 -3.317e-05
3,2: -2.498e-05 -2.498e-05 -2.498e-05

3,2: -1.672e-05 -1.672e-05 -1.672e-05

3,2: -8.39e-06 -8.39e-06 -8.39e-06

3,3: -4.441e-16 -4.441e-16 -4.441e-16

其中最大误差出现在中断，但是总体误差仍然很低。

计算迭代轮次，发现：

Jacobi: 40478

GC:20228

SOR:

w=1.0: 20228

w=1.2: 13758

w=1.4: 9036

w=1.6 :5404

w=1.8: 2470

w=1.9: 1136

w=1.94: 494

w=1.95: 583

SOR 的收敛速度最快，GC 次之，Jacobi 最慢。当取 $w=1.94$ 时，得到最快的 SOR 收敛速度。

分析不同算法的优劣，可以发现虽然 GC 收敛较快，但是准确度不如 Jacobi 算法。SOR 算法准确度与收敛速度都很高，但是需要确定松弛因子来得到最快速度。