

Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и
вычислительной физики,
Физико-механический институт

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе №3
по дисциплине «Интервальный анализ»

Выполнил студент гр. 5030102/80201
Игнатъев Д. Д.
Проверил
Баженов А. Н.

Санкт-Петербург
2021

1 Постановка задачи

Дана ИСЛАУ

$$\begin{cases} [0, 2] \cdot x_1 + [1, 3] \cdot x_2 = [3, 7] \\ x_1 - [2, 4] \cdot x_2 = 0 \\ [1, 3] \cdot x_1 = [5, 7] \end{cases} \quad (1)$$

Для нее необходимо провести вычисления и привести иллюстрации:

- Максимума распознающего функционала
- Достижения разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части
- Достижения разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы в целом
- Достижения разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы построчно
- Оценок варибельности решения

2 Теория

2.1 Распознающий функционал

Распознающим называется функционал

$$\text{Tol}(x) = \text{Tol}(x, A, b) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ b_i - \left| b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \right\}$$

$$x \in \Xi_{\text{tol}} \Leftrightarrow \text{Tol}(x) \geq 0$$

$\text{Tol}(x)$ - ограничен, вогнут. Он всегда достигает конечного максимума на R^n . Таким образом, найдя максимум данного функционала, можно судить о пустоте допускового множества решений ИСЛАУ. Если $\max_{x \in R^n} \text{Tol}(x) \geq 0$, то допусковое множество не пусто. В противном случае $\Xi_{\text{tol}} = \emptyset$. Обратные утверждения также верны.

2.2 Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части

Общая схема метода заключается в добавлении к каждой компоненте правой части ИСЛАУ величины $K \cdot \nu_i \cdot [-1; 1]$, где i - номер компоненты, ν_i - вес, задающий относительное расширение i -й компоненты, K - общий коэффициент расширения вектора b . В данной работе используются значения $\nu_i = 1 \ \forall i = 1, 3$. Подбрав K таким образом, чтобы выполнялось $K + \max_{x \in R^n} \text{Tol}(x) \geq 0$, получим разрешимую систему с непустым допусковым множеством.

2.3 Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы

Общая схема метода заключается в модификации исходной матрицы ИСЛАУ. Производим замену A на $A \ominus K \cdot N \cdot E$ где $N = \{\nu_i\}$ - матрица весов, K - общий коэффициент сужения A , E состоит из $[-1, 1]$ на месте интервальных величин и 0 на месте скаляров. При выполнении процедуры необходимо следить за тем, чтобы мы оставались в рамках IR . В первом варианте коррекции матрицы N - единичная матрица, во втором - $N = \text{diag}\{\nu_i\}$.

2.4 Оценки вариабельности решения

Для оценки вариабельности решений предлагается использовать абсолютную и относительную оценки:

$$\text{ive}(A, b) = \min_{A \in A} \text{cond } A \cdot \|\arg\max_{x \in R^n} \text{Tol}(x)\| \frac{\max_{x \in R^n} \text{Tol}(x)}{\|b\|}$$

$$\text{rve}(A, b) = \min_{A \in A} \text{cond } A \cdot \max_{x \in R^n} \text{Tol}(x)$$

3 Реализация

Работа была выполнена с помощью MATLAB2021b.

4 Результаты

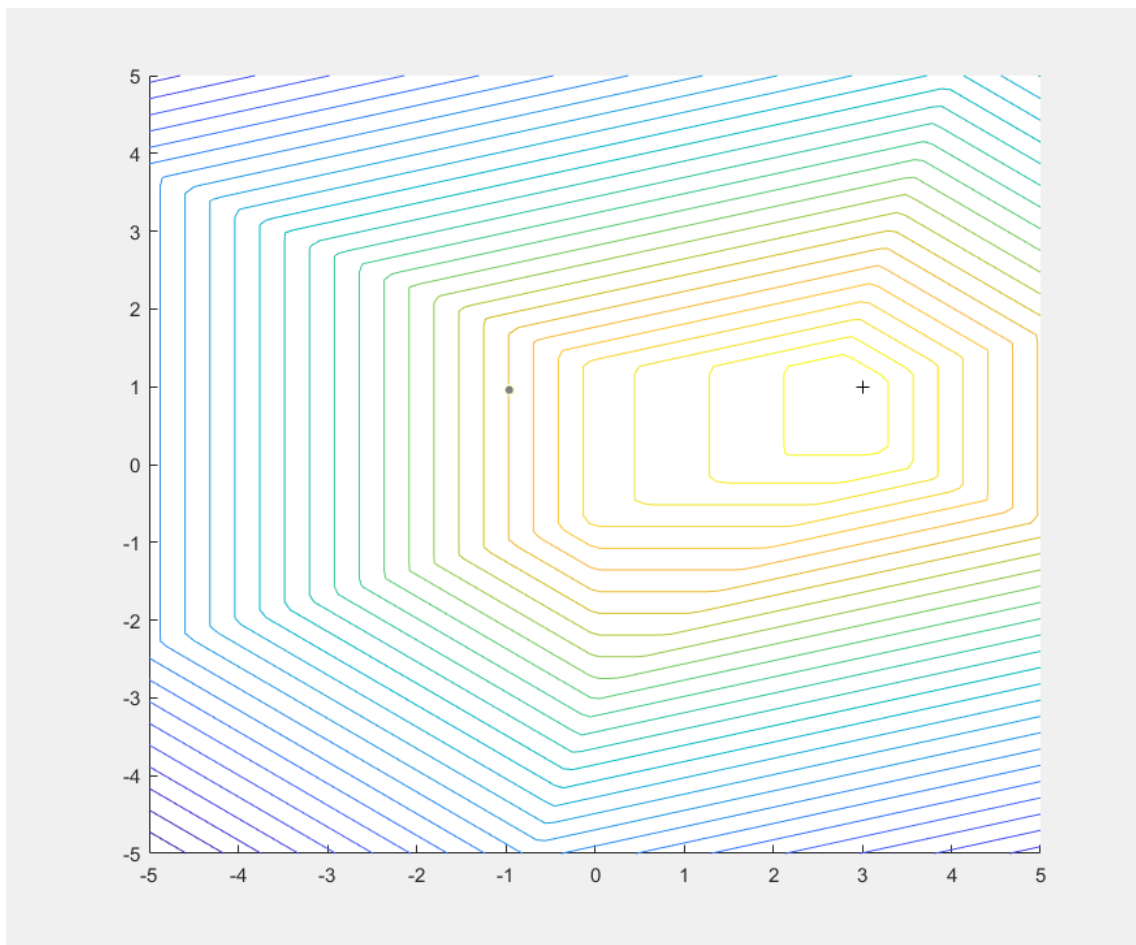


Рис. 1: Точка максимума значения распознающего функционала

Изначальная ИСЛАУ имеет пустое допустимое множество, так как максимум распознающего функционала в точке (3, 1) равен -2.

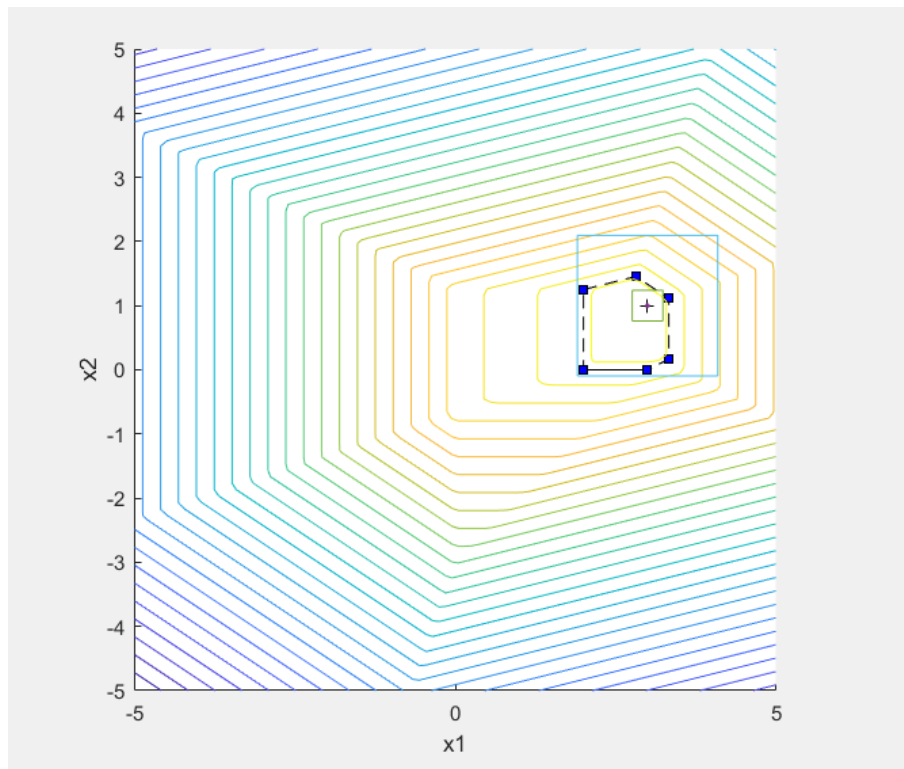


Рис. 2: Точка максимума значения распознающего функционала после корректировки b

Разрешимость ИСЛАУ достигнута корректировкой правой части, соответствующее допустовое множество изображено на графике. Так же на графике отмечены брусы, составленные из значений оценок вариабельности решений.

Для процедуры коррекции матрицы в целом был выбран коэффициент сжатия $K = 1$. После коррекции матрица системы стала точечной, максимум распознающего функционала стал равен 0 в точке (3, 1).

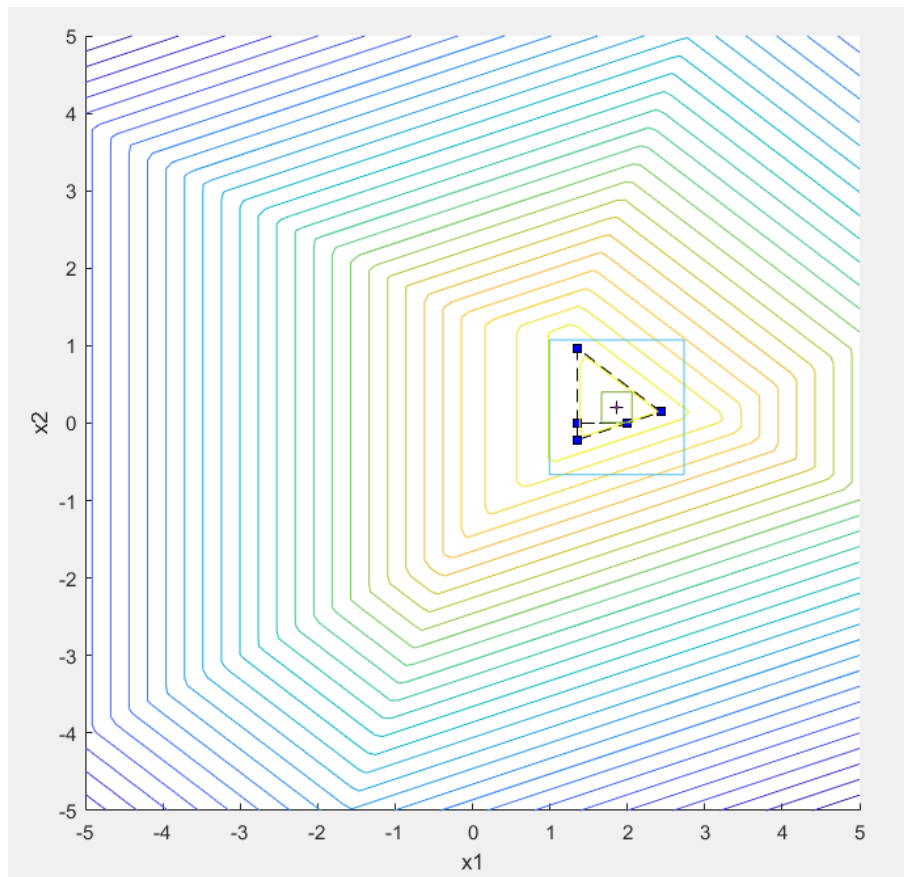


Рис. 3: Точка максимума значения распознающего функционала после корректировки A

Будем сжимать интервалы правой части ИСЛАУ в два раза на каждой итерации в каждой строке матрицы, тогда получим следующую последовательность аргументов, сообщающих максимум распознающему функционалу.

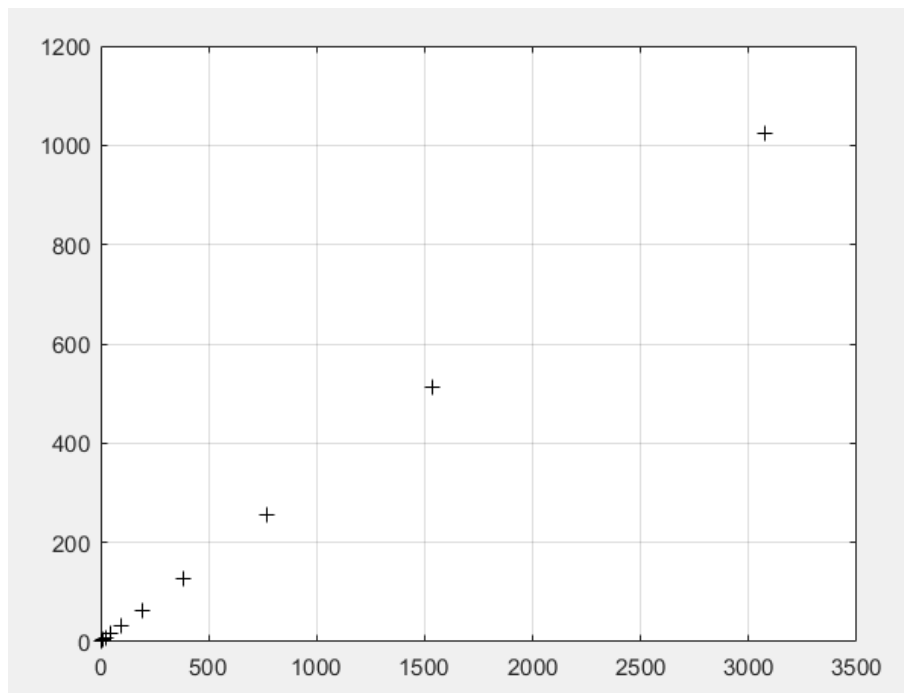


Рис. 4: Положение максимумов Tol при корректировке матрицы в целом

При построчном сжатии матрицы A получаем следующую последовательность аргументов:

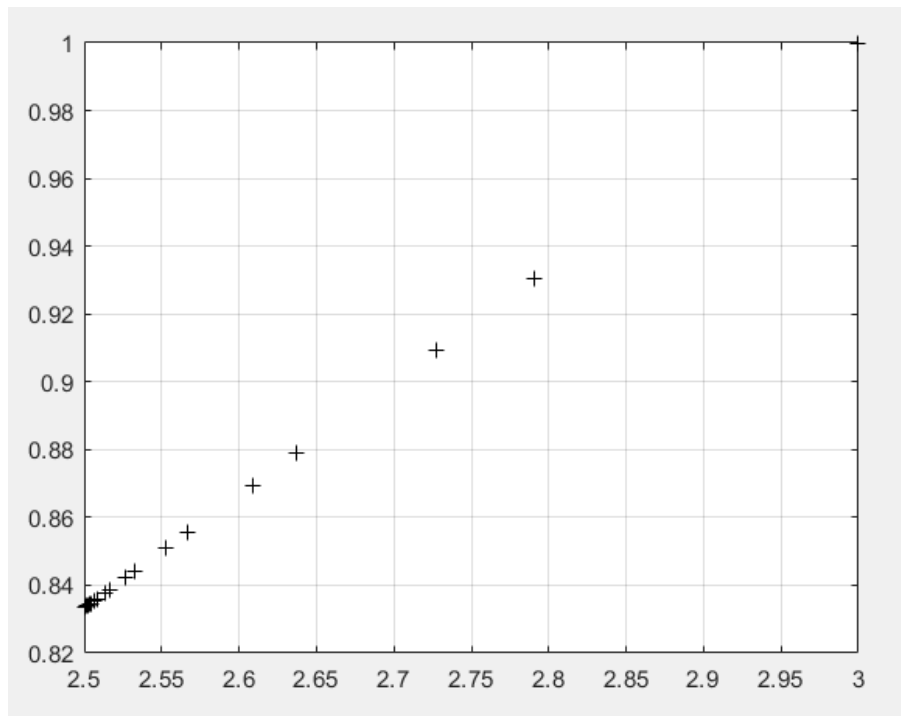


Рис. 5: Положение максимумов Tol при корректировке матрицы построчно

5 Обсуждение

Коррекция правой части с коэффициентом расширения K влечет увеличение значения максимума распознающего функционала на K , при этом положение максимума не меняется, так же как и линии уровня распознающего функционала. В случае с коррекцией матрицы A форма распознающего функционала и положение максимума наоборот меняются. При этом при коррекции матрицы оценки варибельности имеют меньшие значения. При этом в данном случае брусы, соответствующие оценкам варибельности, хорошо оценили допустовое множество получившейся ИСЛАУ.