Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и
вычислительной физики,
Физико-механический институт

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной курсовой работе по дисциплине «Интервальный анализ»

Выполнил студент гр. 5030102/80201
Игнатьев Д. Д.
Проверил
Баженов А. Н.

Санкт-Петербург
2022

Содержание

1 Постановка задачи

На лекции была предложена следующая задача "Малоракурсной томографии плазмы":

Дана матрица длин хорд размера 256×36, вектор длины 36 - модельное распределение светимостей(решение) и вектор длины 256 - показания детектора(правая часть).

Выделим из этой системы блок матрицы 12×18, и требуется решить с помощью субдифференциального метода Ньютона эту переопределённую систему путем нахождения решений с различными матрицами из исходной СЛАУ и взятием минимума по включению.

2 Теория

Пусть имеется ИСЛАУ $\mathbf{C}y = d$, $y \in \mathbb{KR}^n$.

Процедура субградиентного метода Ньютона состоит в следующем:

1. Задаём начальное приближение $x^0 \in \mathbb{R}^{2n}$, релаксационный параметр $\tau \in (0;1]$ и точность $\varepsilon > 0$
2. Строим отображение $\mathscr{G}$:
$$\mathscr{G}(x) = sti(\mathbf{C}\mathrm{sti}^{-1}(x)) - \mathrm{sti}(d)$$
3. Вычисляем субградиент D^{k-1} отображения $\mathscr{G}$ в точке $x^{(k-1)}$
4. $x^{(k)} = x^{(k-1)} - \tau(D^{k-1})^{-1}\mathscr{G}(x^{(k-1)})$
5. Итерационная процедура повторяется, пока $||x^{(k)} - x^{(k-1)}|| \geq \varepsilon$. В качестве ответа возвращается $\mathrm{sti}^{-1}(x^{(k)})$

Начальное приближение можно найти, решив 'среднюю систему':

$$mid\mathbf{C}\,\dot{x}^{(0)} = sti\,\mathbf{d}$$

3 Результаты

Пусть нам дана система с матрицей размерности 126×18, правой частью - интервальным вектром и элементами вектора-решения - случайными значениями из интервала [1,9]

Решение такой задачи будет состоять в выборе 18 строк из такой матрицы и решением подсистемы субдифференциальным методом Ньютона в том случае, если определить матрицы не равен 0. А после этого найдём пересечение полученных решений и проведём сравнения с истинным.

3.1 Способ формирования подматрицы

Из всего множества индексов строк случайным образом выбираются 18 таким образом, чтобы определитель полученной матрицы не был равен нулю (не меньше, чем заданный $\varepsilon = 10^{-8}$)

3.2 Решение

Будем искать решение-пересечения для случайного выбора 1, 5, 15, 30, 50 и 100 подсистем. Тем самым у нас получаются разные подсистемы, которые мы будем решать соответсвующим методом и которые будем сравнивать для того, чтобы получить зависимость получаемого решения от количества выборов подматриц. Также сравним правые части таких систем с истинной.

Исходная прямоугольная матрица имеет вид:

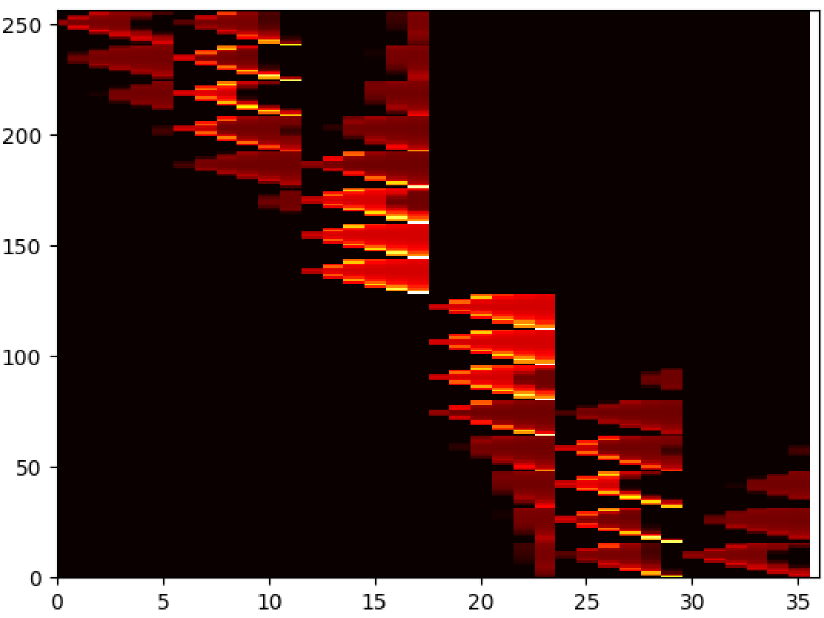

Рис. 1: Исходная матрица

Далее представлены сравнения полученных и истинных решений при выборе 1, 5, 15, 30, 30 и 100 подсистем. Также представлены и сравение полученных правых частей с исходными.

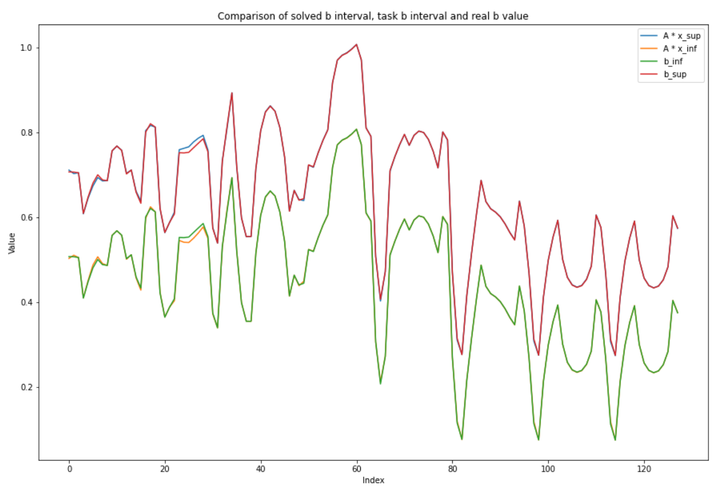

Рис. 2: Правые части для 1 подматрицы

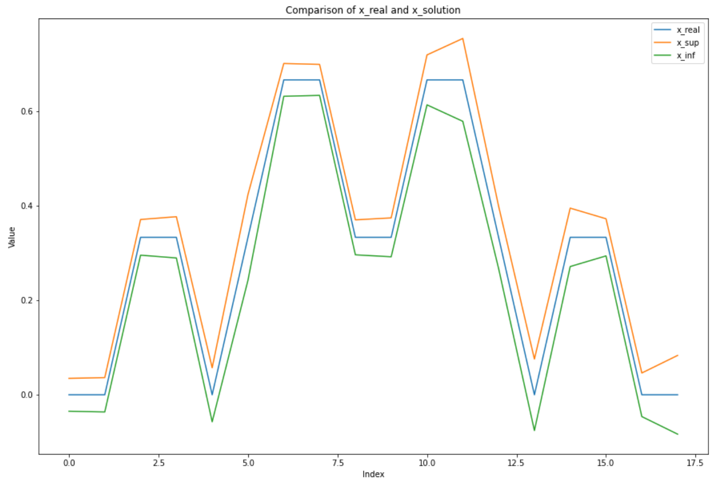

Рис. 3: Исходное решение с полученным для 1 подматрицы

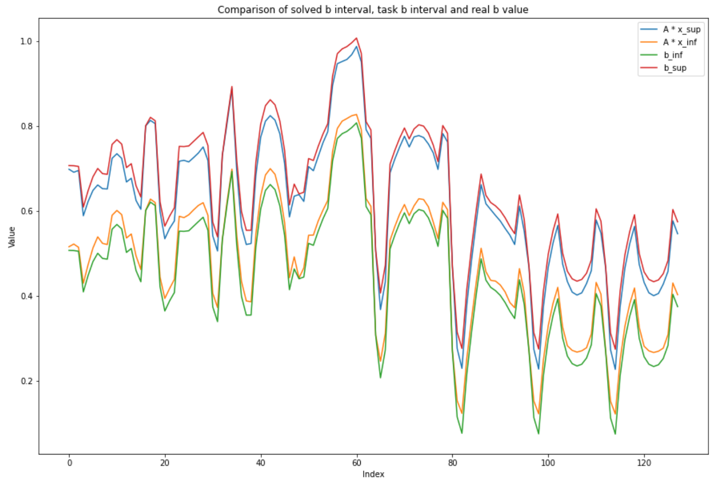

Рис. 4: Правые части для 5 подматриц

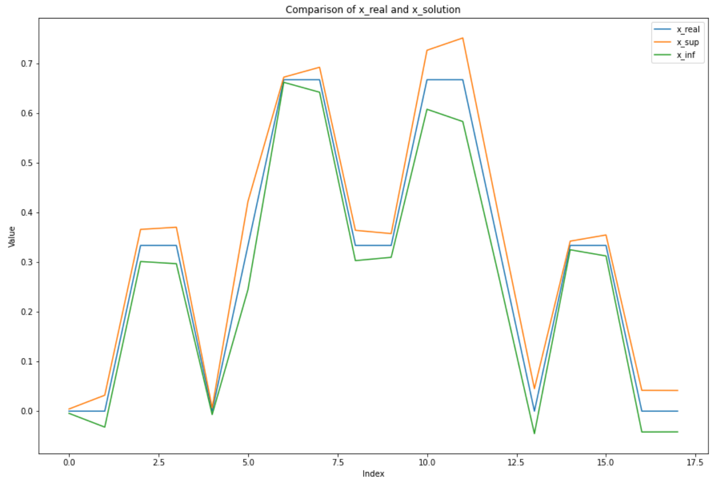

Рис. 5: Исходное решение с полученным для 5 подматриц5

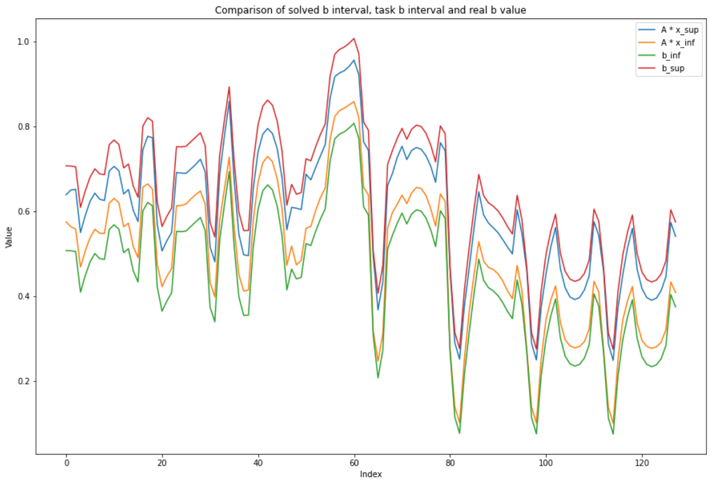

Рис. 6: Правые части для 15 подматриц

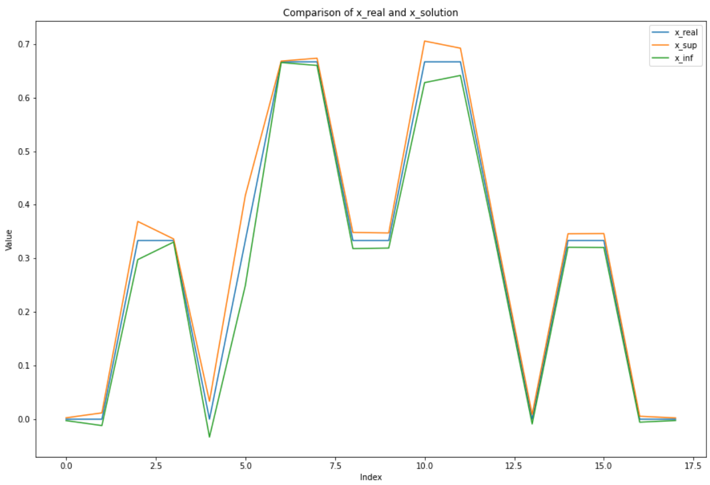

Рис. 7: Исходное решение с полученным для 15 подматриц

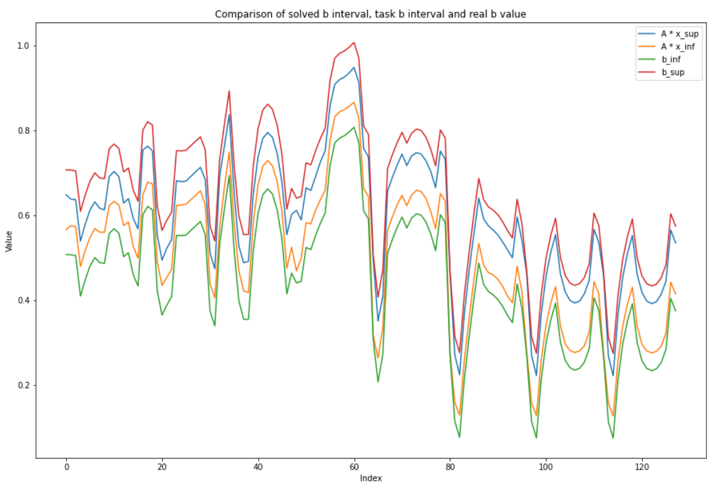

Рис. 8: Правые части для 30 подматриц

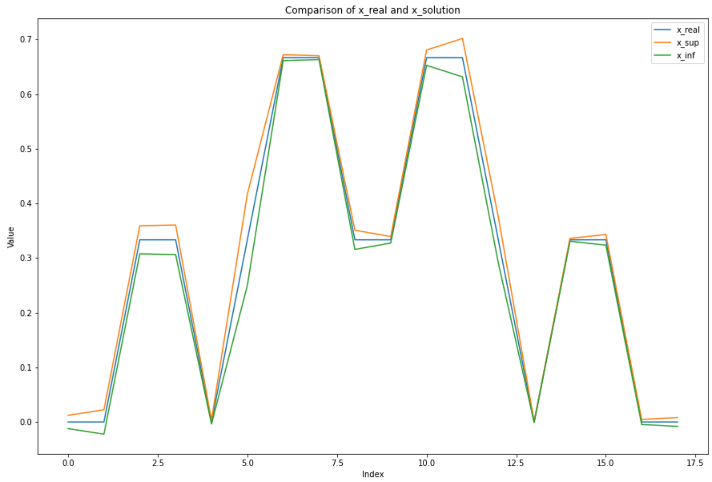

Рис. 9: Исходное решение с полученным для 30 подматриц

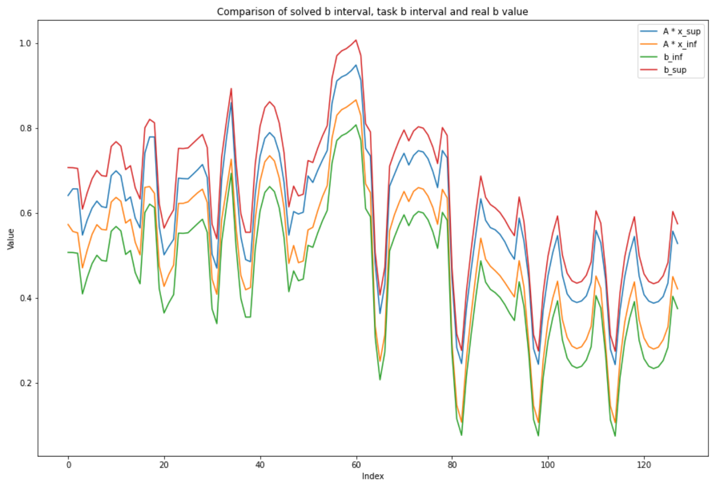

Рис. 10: Правые части для 50 подматриц

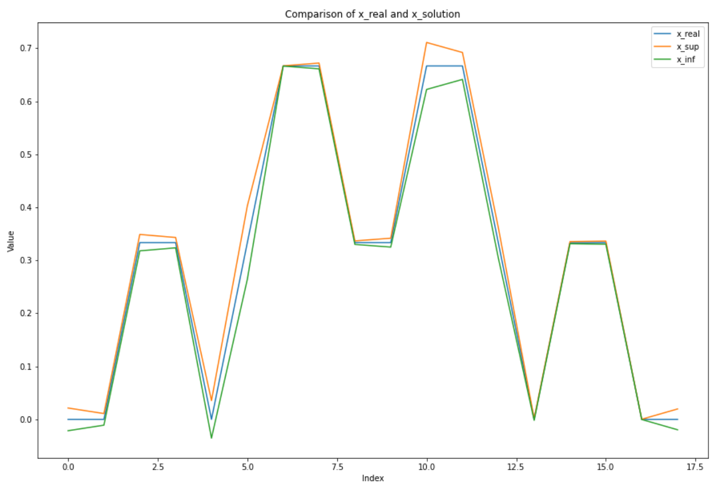

Рис. 11: Исходное решение с полученным для 50 подматриц

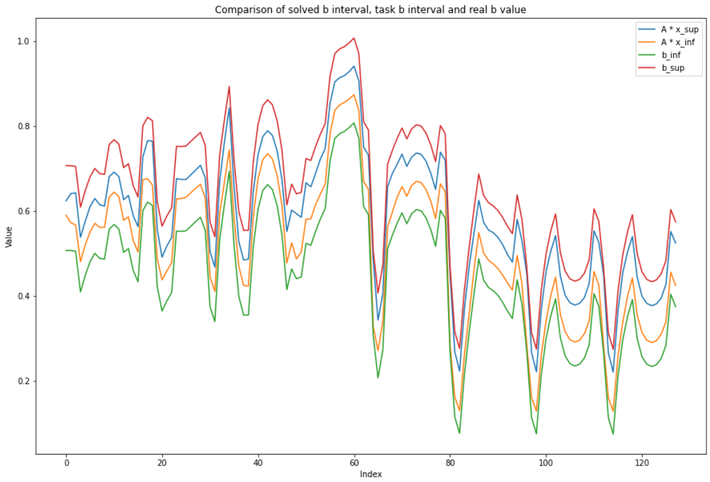

Рис. 12: Правые части для 100 подматриц

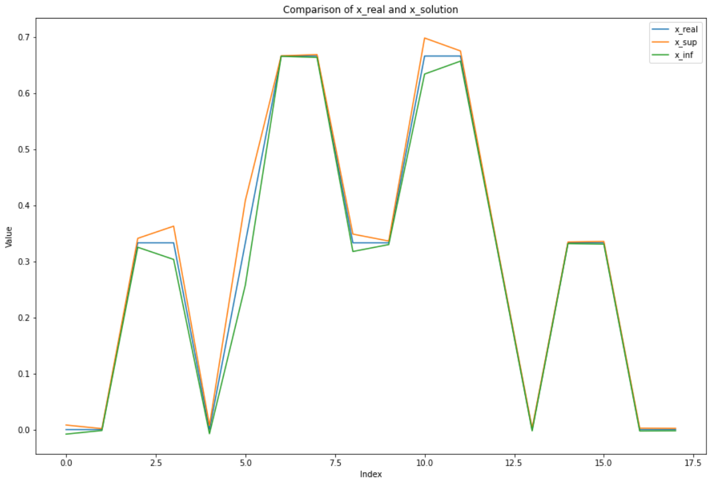

Рис. 13: Исходное решение с полученным для 100 подматриц

Заключительным этапом исследования проверим зависимость нормы разности исходного решения и полученного от количества используемых подматриц. Для этого будем искать нормы разности вектора-решения и вектора правых границ модельных решений, вектора-решения и вектора левых границ модельных решений, вектора-решения и вектора середины интервалов модельных решений. Такие метрики были выбраны для того, чтобы оценить, насколько близко полученнное решение к исходному решению, и тем самым сделать вывод насколько количество подматриц влияет на точность решения. Полученный результат представлен на следующих графиках:

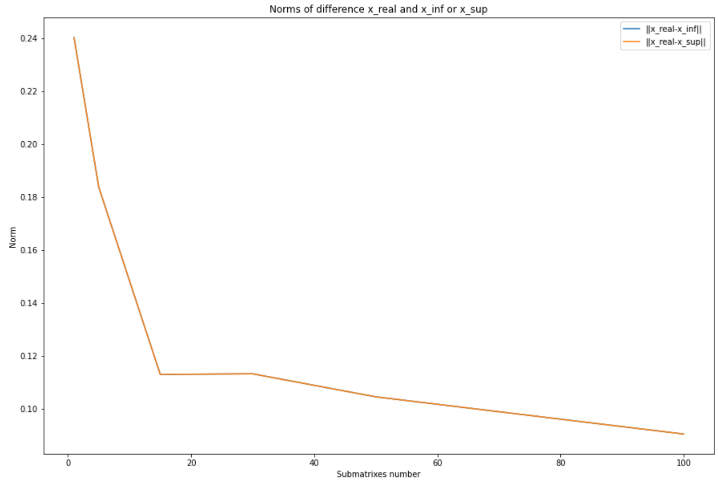

Рис. 14: Сравнение норм разности исходного вектора-решения и границ интервалов полученных решений($||x_{sol} - x_{inf}||$ и $||x_{sol} - x_{sup}||$)

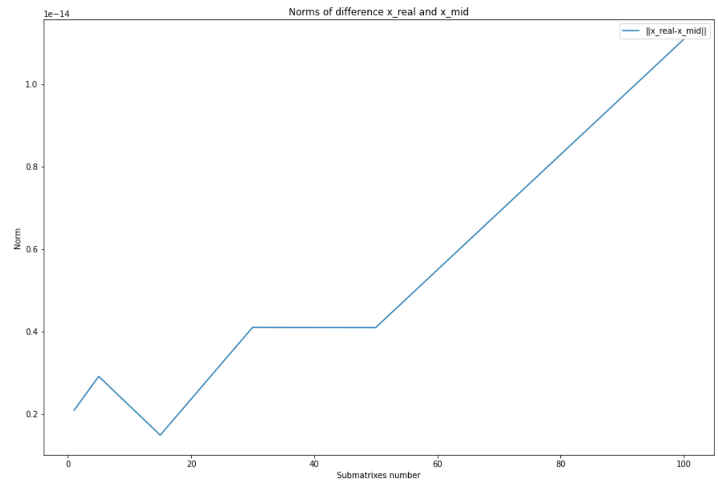

Рис. 15: Сравнение норм разности исходного вектора-решения и вектора-середины интервалов полученных решений($||x_{sol} - x_{mid}||$)

4 Обсуждение

Выводы, которые можно сделать по проделанной работе: Исходное решение всегда находилось в интервале полученного решения для всех случаев. Более того, при увеличении количества выбираемых подматриц полученный вектор сужается к исходному.

Сравнив графики, можно заметить, что для всех вариантов правая часть находилась в границах исходной правой части. При увелечении количества выбираемых подматриц интервалы правой части суждались.
Более того, середина полученного интервального вектора-решения почти сразу совпала с исходным решением.

Таким образом, при увеличении количества выбираемых матриц решение-пересечение стремится к истинному.