Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и
вычислительной физики,
Физико-механический институт

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

# Отчет по лабораторной работе №4
# по дисциплине «Интервальный анализ»

Выполнил студент гр. 5030102/80201
Игнатьев Д. Д.
Проверил
Баженов А. Н.

Санкт-Петербург
2021

# Содержание

# 1 Постановка задачи

## 1.1 Использование теоремы Зюзина

Дана ИСЛАУ

$$\begin{cases} [2,\ 5] \cdot x_1 + [6,\ 7] \cdot x_2 = [-1,\ 1] \\ [0.5,\ 2] \cdot x_1 + [4,\ 6] \cdot x_2 = [-2,\ 2] \end{cases} \tag{1}$$

Для нее необходимо построить итерационную схему с разложением матрицы на диагональную и недиагональную части по теореме Зюзина, а также провести вычисления и привести иллюстрации:

- Брусов итерационного процесса
- Радиусов решения в зависимости от номера итерации

## 1.2 Использование субдифференциального метода Ньютона

Даны две ИСЛАУ:

$$\begin{cases} [3,\ 4] \cdot x_1 + [5,\ 6] \cdot x_2 = [-3,\ 3] \\ [-1,\ 1] \cdot x_1 + [-3,\ 1] \cdot x_2 = [-1,\ 2] \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} [3,\ 4] \cdot x_1 + [5,\ 6] \cdot x_2 = [-3,\ 4] \\ [-1,\ 1] \cdot x_1 + [-3,\ 1] \cdot x_2 = [-1,\ 2] \end{cases} \tag{3}$$

Необходимо построить итерационную схему субдифференциального метода Ньютона, провести вычисления и привести иллюстрации брусов итерационного процесса, а также сравнить полученные результаты для систем (2) и (3).

# 2 Теория

## 2.1 Теорема Зюзина

Пусть в интервальной линейной системе уравнений

$$Cx = d, \quad C \in KR^{n\times n},\ d \in KR^n$$

правильная проекция матрицы $C$ имеет диагональное преобладание. Тогда формальное решение системы существует и единственно.

Итерационный процесс строится следующим образом

$$D = \operatorname{diag}\{c_{ii}\}_{i=1}^n \quad E = C \ominus D$$

$$Cx = d \Leftrightarrow Dx = d \ominus Ex$$

$$x^{k+1} = \operatorname{inv} D \cdot (d \ominus Ex^k),\ k = 0, 1, \ldots$$

## 2.2 Субдифференциальный метод Ньютона

Итерационная процедура субдифференциального метода Ньютона описывается следующей формулой:

$$x^k = x^{k-1} - \tau (D^{k-1})^{-1} \mathscr{F}(x^{k-1}),$$

где $\mathscr{F}(x) = \operatorname{sti}\,(C \cdot \operatorname{sti}^{-1}(x)) - x + \operatorname{sti}\,(d)$ (sti - операция стандартного погружения, отображения из $KR^n$ в $R^{2n}$), $D^{k-1}$ - какой-нибудь субградиент отображения $\mathscr{F}$ в точке $x^{k-1}$, $\tau$ - константа, в данной работе выбрана единицей.

## 3 Реализация

Для осуществления вычислений и визуализации результатов использовалась среда Octave с библиотекой полной интервальной арифметики kinterval.

## 4 Результаты

### 4.1 Итерационный процесс с разложением матрицы на диагональную и недиагональную части

Здесь и далее пунктиром обозначено допусковое множество $\Xi_{\text{tol}}$ рассматриваемой ИСЛАУ. Также здесь и далее начальный брус обозначен синим цветом. Число итераций - 10.

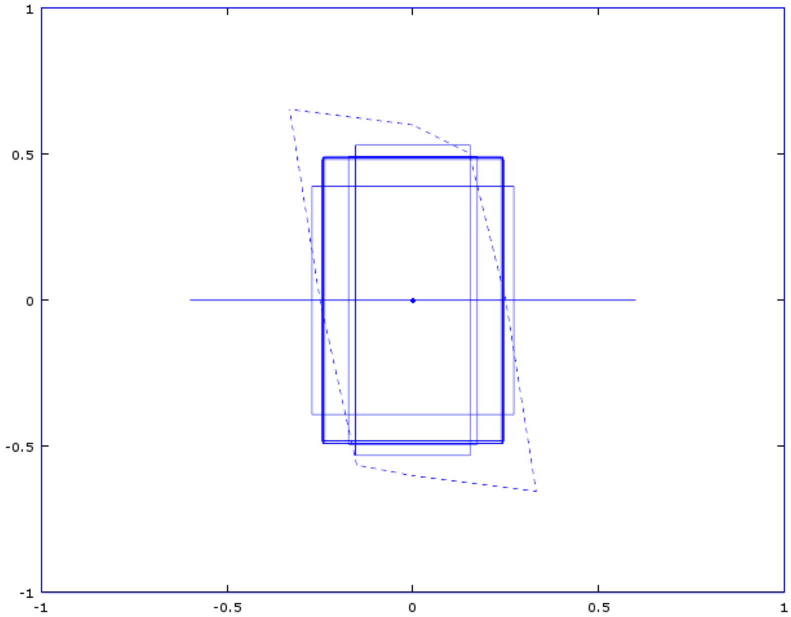


Рис. 1: Изображение брусов при решении задачи (1)

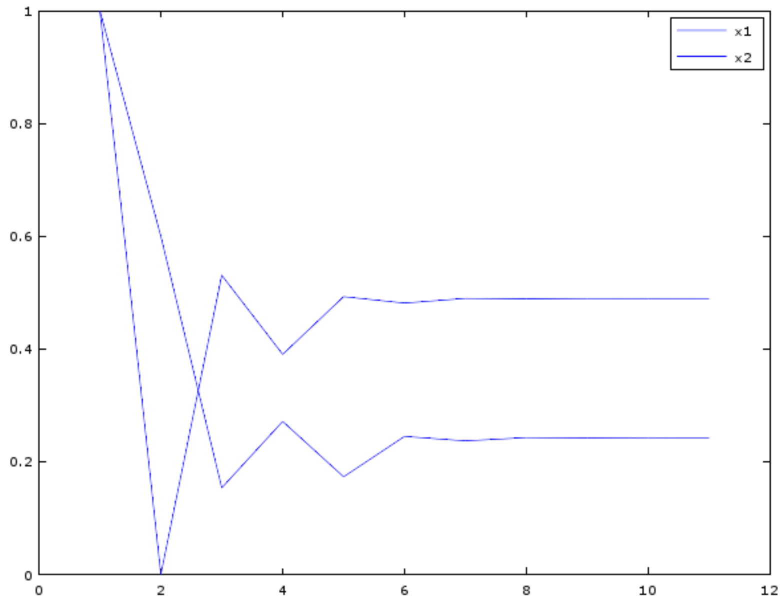


Рис. 2: Зависимость радиусов брусов от числа итераций при решении задачи (1)

### 4.2 Итерационный процесс по субградиентному методу Ньютона

Результирующий брус отрисован сплошной линией красного цвета. При решении задачи (2) использовался параметр $\tau = 1$, финальный брус получен на четвертой итерации метода.

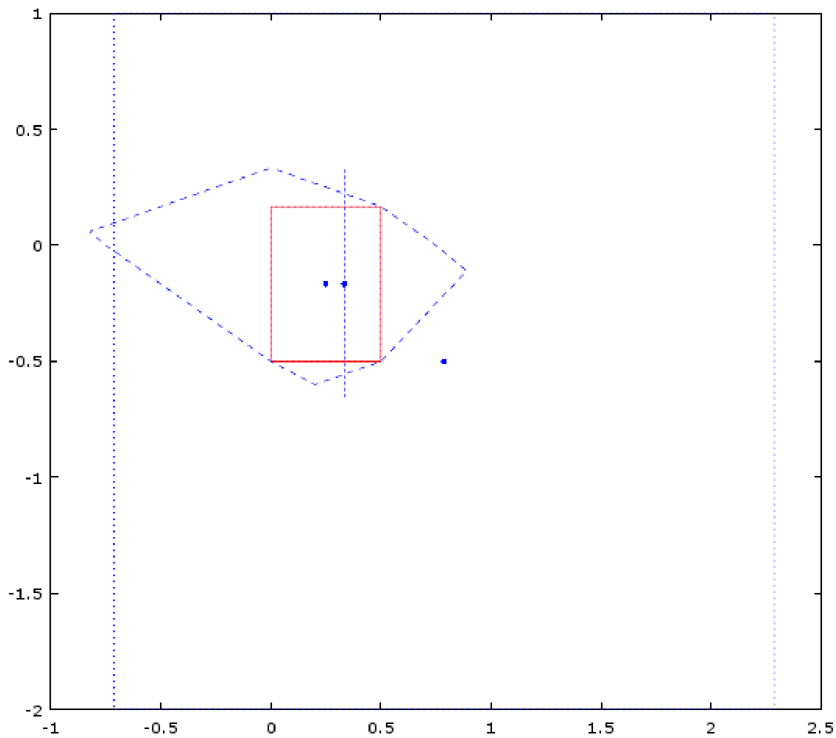


Рис. 3: Решение задачи (2) субградиентным методом Ньютона, $\tau = 1$

Решение задачи (3) с параметром $\tau = 1$. Число итераций - 300.

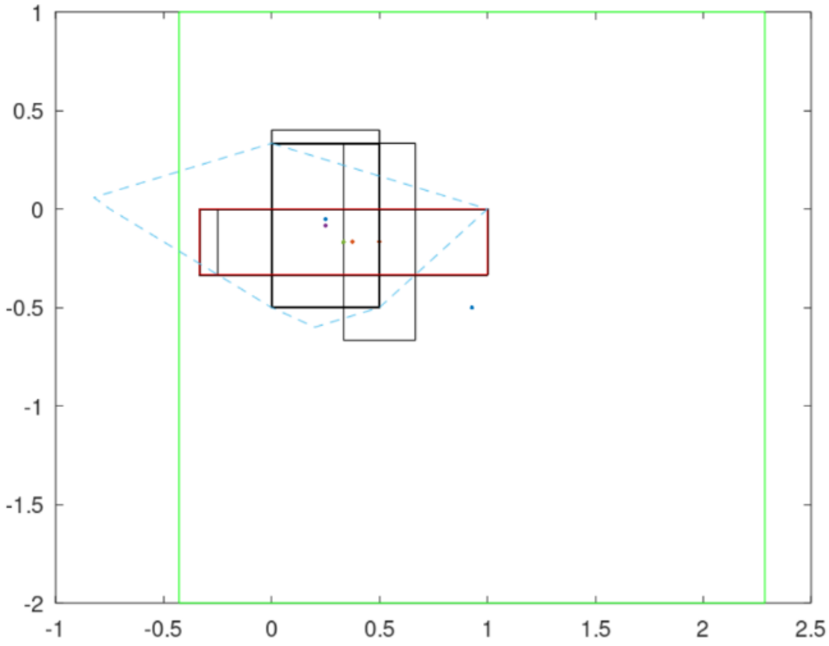


Рис. 4: Решение задачи (3) субградиентным методом Ньютона, $\tau = 1$

Решение задачи (3) с параметром $\tau = 0.05$. Число итераций - 300.

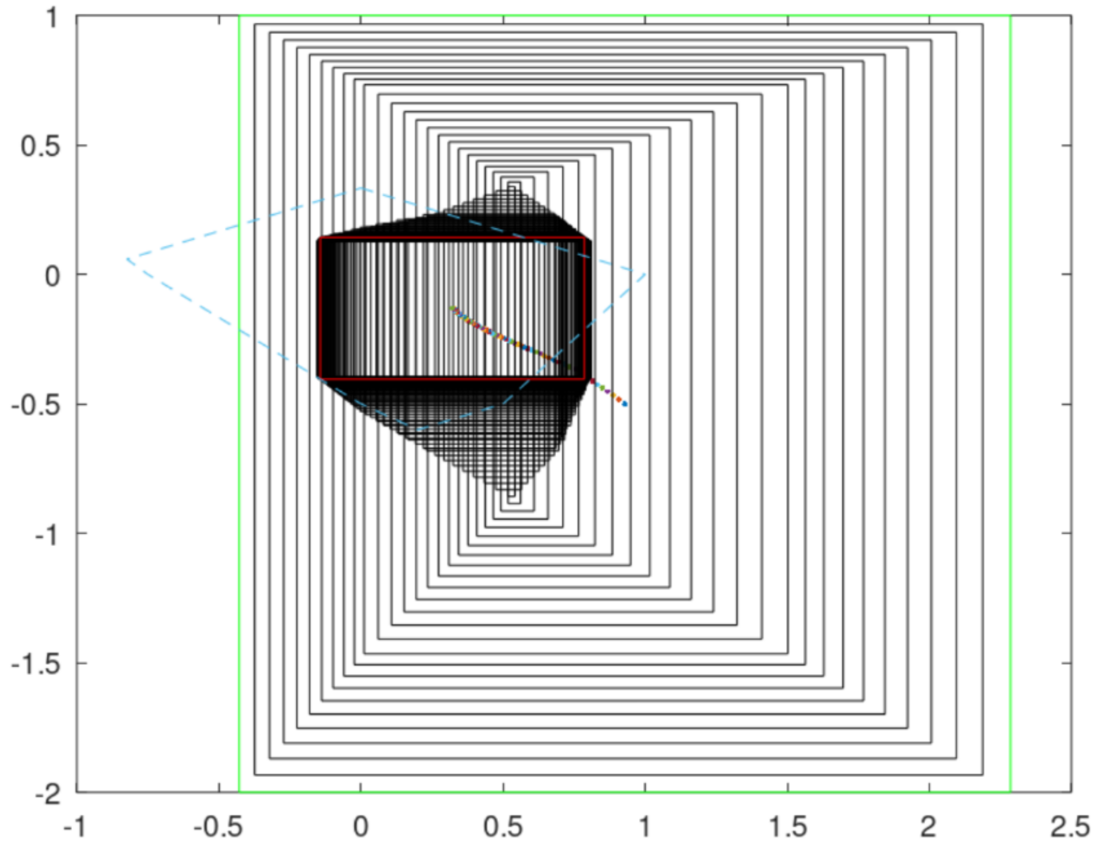


Рис. 5: Решение задачи (3) субградиентным методом Ньютона, $\tau = 0.05$

## 5 Обсуждение

1. Из второго графика можем увидеть, что на второй итерации метод выдал более адекватную внутреннюю оценку, чем на последней. В свою очередь, финальный результат выходит за пределы допускового множества. Середина брусов практически не меняется по мере итераций. После пятой итерации размеры брусов меняются на очень малую величину, если сравнивать с предыдущими итерациями.

2. При решении задачи (2) получена точная внутренняя оценка. Субградиентный метод Ньютона сошелся очень быстро - после четвертой итерации итерационный процесс остановился.

3. При решении задачи (3) не была получена внутренняя оценка. Тем не менее, результат адекватный - большая часть площади полученного бруса находится внутри допускового множества. Метод проделал все 300 итераций вплоть до заданных извне ограничений. При уменьшении параметра $\tau$ получен другой брус. Он все еще не является строгой внутренней оценкой $\Xi_{\mathrm{tol}}$, но эта оценка более удачна, так как полученный брус больше по площади, чем предыдущий, и значимая его часть лежит внутри допускового множества. Улучшить этот результат можно с помощью релаксационного параметра метода Ньютона.