Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и
вычислительной физики,
Физико-механический институт

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной работе №1
по дисциплине «Интервальный анализ»

Выполнил студент гр. 5030102/80201
Игнатьев Д. Д.
Проверил
Баженов А. Н.

Санкт-Петербург
2021

Содержание

1 Постановка задачи

1.1 Линейная и полиномиальная регрессия

Дано

$$\mathrm{mid}\,\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Дана задача вида $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta$, в общей регрессионной постановке необходимо найти вектор β и восстановить зависимости между рассматриваемыми величинами. В данной работе рассматривается вопрос установления особенности матрицы $\mathbf{X}$, так как в этом случае рассматриваемая ИСЛАУ становится неразрешимой.

Необходимо рассмотреть матрицу вида

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] & 1 \\ [1.1-\varepsilon, 1.1+\varepsilon] & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

и определить, при каком значении ε она содержит особенные точечные матрицы.

1.2 Решение задач томографии

При решении задач томографии появляются системы типа $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$. В данной работе необходимо рассмотреть матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] & [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \\ [1.1-\varepsilon, 1.1+\varepsilon] & [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \end{pmatrix} \tag{3}$$

и определить, при каком радиусе она содержит особенную матрицу.

1.3 Глобальная оптимизация

Для функции Буса

$$f(x,y) = (x+2y-7)^2 + (2x+y-5)^2 \tag{4}$$

имеющей один глобальный экстреммум, и функции Химмельблау

$$f(x,y) = (x^2+y-11)^2 + (x+y^2-7)^2, \tag{5}$$

имеющей 4 равнозначных глобальных экстремума, необходимо провести вычисления по поиску глобального минимума с помощью простейшего интервального адаптивного алгоритма глобальной оптимизации.

2 Теория

2.1 Выяснение радиуса элементов матрицы, при котором она становится особенной

Интервальная матрица $\mathbf{A}$ - особенная, если $\exists A \in \mathbf{A}:\ \det(A) = 0$, иначе - неособенная.

$\mathrm{rad}\,\mathbf{A} = \{A \mid\ a_{ij} = \mathrm{rad}\,\mathbf{a}_{ij}\}$ - радиус интервальной матрицы $\mathbf{A}$, $\mathrm{mid}\,\mathbf{A} = \{A \mid\ a_{ij} = \mathrm{mid}\,\mathbf{a}_{ij}\}$ - середина интервальной матрицы $\mathbf{A}$.

$\mathrm{vert}\,\mathbf{A} = \{A \in \mathbf{A} \mid A = \{a_{ij}\},\ a_{ij} \in \{\underline{\mathbf{a}_{ij}}, \overline{\mathbf{a}_{ij}}\}\}$ - множество вершин интервальной матрицы $\mathbf{A}$.

$\sigma(A)$ - множество сингулярных чисел матрицы, вычисляемых как арифметический квадратный корень из собственных значений матрицы AA^T.

2.1.1 Критерий Баумана

Матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ неособенна $\Leftrightarrow\ \forall A', A'' \in \mathrm{vert}\,\mathbf{A}\ \det(A')\cdot\det(A'') > 0$

2.1.2 Признак Румпа

$\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $\sigma_{\max}(\mathrm{rad}\,\mathbf{A}) < \sigma_{\min}(\mathrm{mid}\,\mathbf{A}) \Rightarrow \mathbf{A}$ неособенна.

2.2 Глобальная оптимизация

Суть простейшего интервального адаптивного алгоритма глобальной оптимизации похожа на алгоритм дихотомии, только для многомерного случая. Имеется рабочий список рассматриваемых брусьев, для каждого из которых вычислено целевое значение функции (в интервальном смысле). На каждой итерации метод выбирает из этого списка брус, на котором нижняя оценка значения функции наименьшая. Этот брус удаляется из списка, после чего туда добавляются два новых, которые получились из исходного путем дробления его самой длинной компоненты пополам (от нижней границы до середины и от середины до верхней границы). На этих брусьях вычисляется интервальная оценка целевой функции, выполняется переход на новую итерацию.

3 Реализация

Для осуществления вычислений и визуализации результатов использовался язык программирования Python. Среда разработки Intellij IDEA.

4 Результаты

Значение ε вычислялось с значения $\varepsilon_0 = 0$ и шагом $\delta = 0.00001$.

4.1 Линейная и полиномиальная регрессия

Для того, чтобы точечная матрица была особенной, достаточно линейной зависимости ее строк. В случае рассматриваемой матрицы (2) это означает, что нам достаточно добиться непустого пересечения интервалов $\mathbf{x}_{11}$ и $\mathbf{x}_{21}$. Очевидно, что это достижимо при $\varepsilon \geq 0.05$. Проверим, что при $\varepsilon = 0.05$ найдется особенная точечная матрица:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} [0.95, 1.05] & 1 \\ [1.05, 1.15] & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} 1.05 & 1 \\ 1.05 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{X},\ \det(X) = 0$$

Воспользуемся признаком Румпа.

$$\mathrm{rad}\,\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\mathrm{rad}\,\mathbf{X}) = \{0, \varepsilon\sqrt{2}\},\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \sigma_{\max}(\mathrm{rad}\,\mathbf{A}) = \varepsilon\sqrt{2}$$

$$\sigma(\mathrm{mid}\mathbf{X}) = \left\{ \sqrt{\frac{421 + 21\sqrt{401}}{200}}, \sqrt{\frac{421 - 21\sqrt{401}}{200}} \right\} \approx \{2.0512, 0.0488\} \Rightarrow \sigma_{\min}(\mathrm{mid}\mathbf{X}) = 0.0488$$

Можно сделать вывод, что при $\varepsilon\sqrt{2} < 0.0488 \Rightarrow \varepsilon < 0.0345$ матрица $\mathbf{X}$ не будет особенной.

Также воспользуемся критерием Баумана. Множество vert $\mathbf{X}$ содержит 4 точечные матрицы. Обозначим их определители за $\Delta_i,\ i = \overline{1,4}$ и сосчитаем.

$$\Delta_1 = -0.1 \quad \Delta_2 = 2\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_3 = -2\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_4 = -0.1$$

Из этих значений уникальными являются $\Delta_i,\ i = \{1, 2, 3\}$. С помощью критерия Баумана можно найти значения ε, для которых рассматриваемая матрица будет неособенной, а так как критерий является необходимым и достаточным условием, то дополнение найденного множества будет описывать все особенные матрицы $\mathbf{A}$.

$\Delta_1 < 0\,\forall\varepsilon$. Следовательно, для выполнения критерия необходимо потребовать, чтобы все остальные определители тоже были меньше 0. Учитывая $\varepsilon > 0$, получаем множество $\varepsilon < 0.05$. Таким образом, матрица $\mathbf{X}$ особенна $\forall\varepsilon \geq 0.05$, что согласуется с предыдущими расчетами.

4.2 Задача томографии

Воспользуемся признаком Румпа.

$$\mathrm{rad}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \mathrm{mid}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\mathrm{rad}\,\mathbf{A}) = \{0, 2\varepsilon\},\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \sigma_{\max}(\mathrm{rad}\,\mathbf{A}) = 2\varepsilon$$

$$\sigma(\mathrm{mid}\mathbf{A}) = \left\{\sqrt{\frac{421 + 21\sqrt{401}}{200}}, \sqrt{\frac{421 - 21\sqrt{401}}{200}}\right\} \approx \{2.0512, 0.0488\} \Rightarrow \sigma_{\min}(\mathrm{mid}\mathbf{A}) = 0.0488$$

Можно сделать вывод, что при $2\varepsilon < 0.0488 \Rightarrow \varepsilon < 0.0244$ матрица $\mathbf{A}$ не будет особенной.

Для решения задачи воспользуемся критерием Баумана. Множество $\mathrm{vert}\,\mathbf{A}$ содержит 16 точечных матриц. Обозначим их определители за $\Delta_i,\ i = \overline{1, 16}$ и сосчитаем.

$$\Delta_1 = 0.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_2 = -2\varepsilon^2 + 2.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_3 = 2\varepsilon^2 - 2.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_4 = 2\varepsilon^2 - 1.9\varepsilon - 0.1$$

$$\Delta_5 = -2\varepsilon^2 + 2.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_6 = -0.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_7 = 0.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_8 = 4.1\varepsilon - 0.1$$

$$\Delta_9 = -4.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_{10} = 0.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_{11} = -0.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_{12} = -2\varepsilon^2 - 2.1\varepsilon - 0.1$$

$$\Delta_{13} = 2\varepsilon^2 + 2.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_{14} = 2\varepsilon^2 + 1.9\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_{15} = -2\varepsilon^2 - 2.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_{16} = -0.1\varepsilon - 0.1$$

Из этих значений уникальными являются $\Delta_i,\ i = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 14\}$. С помощью критерия Баумана можно найти значения ε, для которых рассматриваемая матрица будет неособенной, а так как критерий является необходимым и достаточным условием, то дополнение найденного множества будет описывать все особенные матрицы $\mathbf{A}$.

Учитывая, что $\varepsilon > 0$, получаем $\Delta_6 < 0\,\forall\varepsilon$. Следовательно, для выполнения критерия необходимо потребовать, чтобы все остальные определители тоже были меньше 0. Получаем следующее множество решений:

$$(0,1)\cap(0,0.0456)\cap(0,1.095)\cap(0,1)\cap(0,\infty)\cap(0,0.0244)\cap(0,\infty)\cap(0,\infty)\cap(0,0.0456)\cap(0,0.05)$$

То есть матрица $\mathbf{A}$ неособенна тогда и только тогда, когда $\varepsilon < \frac{1}{41}$. То есть $\forall\varepsilon \geq \frac{1}{41}$ матрица $\mathbf{A}$ будет содержать особенные точечные матрицы. Рассмотрим $\varepsilon = \frac{1}{41}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \left[\frac{40}{41}, \frac{42}{41}\right] & \left[\frac{40}{41}, \frac{42}{41}\right] \\ \left[1\frac{31}{410}, 1\frac{51}{410}\right] & \left[\frac{40}{41}, \frac{42}{41}\right] \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1\frac{1}{41} & \frac{40}{41} \\ 1\frac{31}{410} & 1\frac{1}{41} \end{pmatrix} \in \mathbf{A}, \quad \det(A) = 0$$

4.3 Глобальная оптимизация

4.3.1 Функция с одним экстремумом

Для функции Буса в качестве начального приближения был выбран брус $\begin{pmatrix} [-5,\ 5] \\ [-5,\ 5] \end{pmatrix}$.

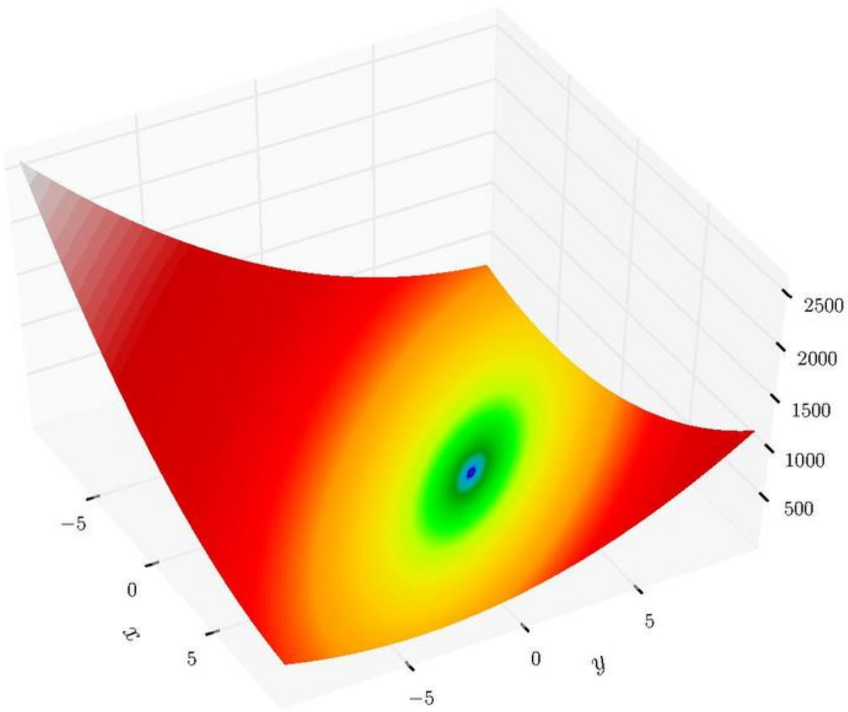

Рис. 1: График функции Буса

Были получены следующие результаты:

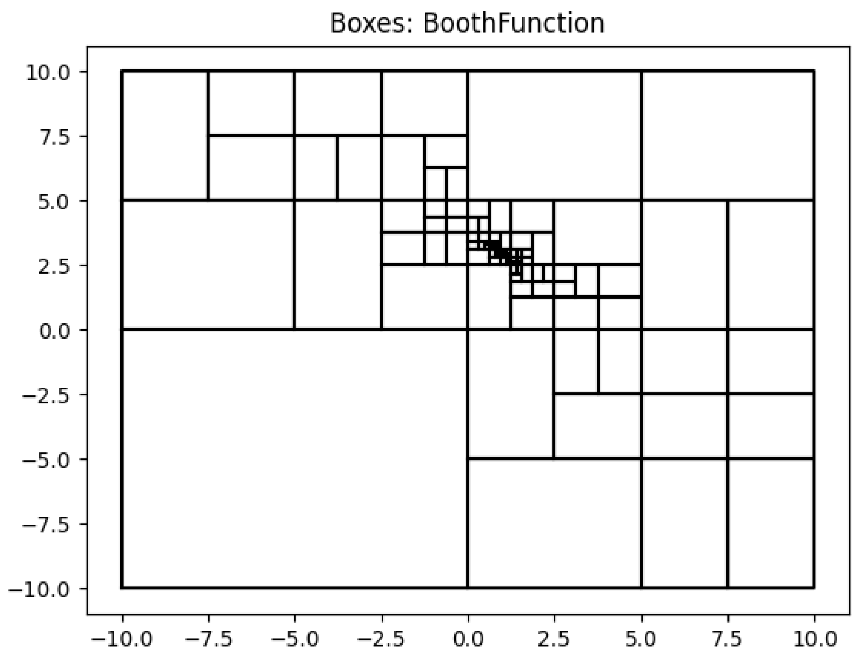

Рис. 2: Иллюстрация работы алгоритма для функции Буса

Как видим, число брусьев сгущается по мере приближения к экстремуму. Также это явление наблюдается и около локального экстремума в окрестности точки $(1, 3)$.

Результатом работы программы стал брус $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [0.999755859375,\ 1.0009765625] \\ [2.999267578125,\ 3.00048828125] \end{pmatrix}$. Что совпадает с ожидаемым значением.

Проиллюстрируем работу алгоритма еще двумя графиками: положениями центров брусов и радиусами рабочих брусов.

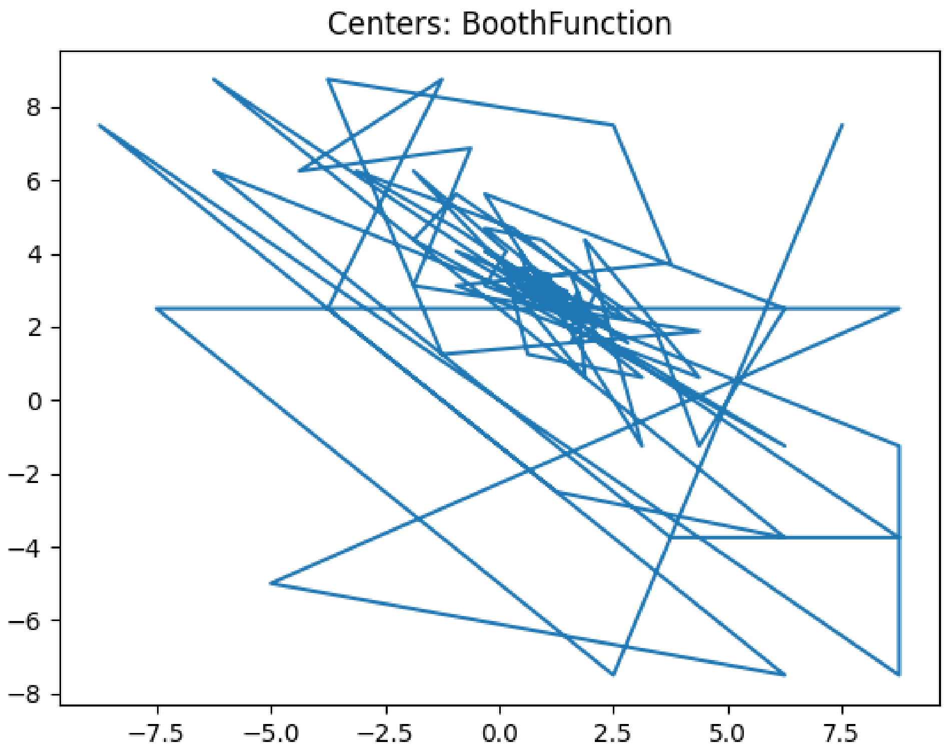

Рис. 3: Положения центров брусов (4)

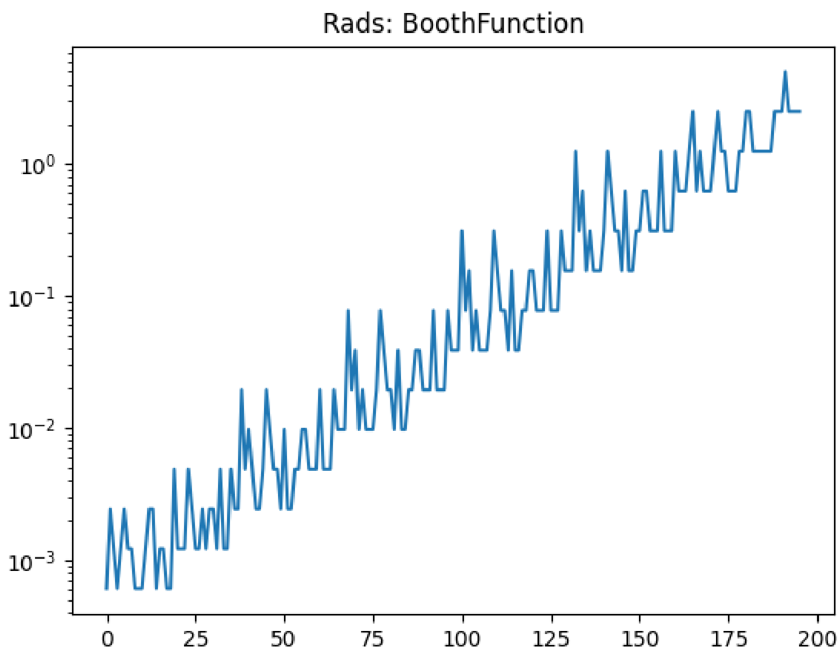

Рис. 4: Радиусы рабочих брусов (4)

4.3.2 Функция с несколькими экстремумами

Для функции Химмельблау в качестве начального приближения был выбран брус $\begin{pmatrix}[-5,\ 5]\\ [-5,\ 5]\end{pmatrix}$.

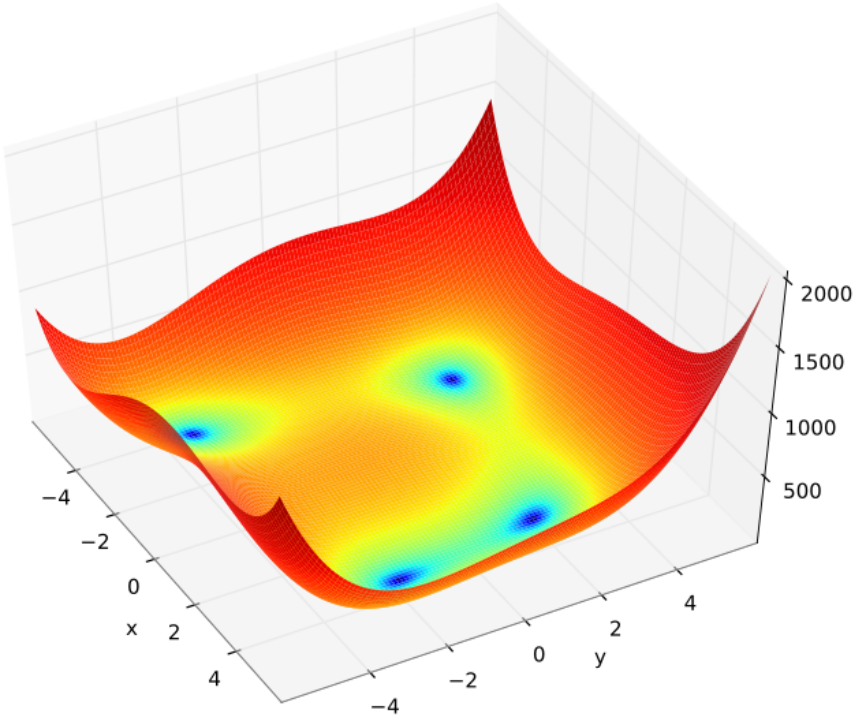

Рис. 5: График функции Химмельблау

Функция содержит 4 глобальных экстремума в точках $(3, 2)$, $(-2.8051, 3.1313)$, $(-3.7793, -3.2831)$, $(3.5844, -1.8481)$, отмечены на графике синими точками. Получены следующие результаты:

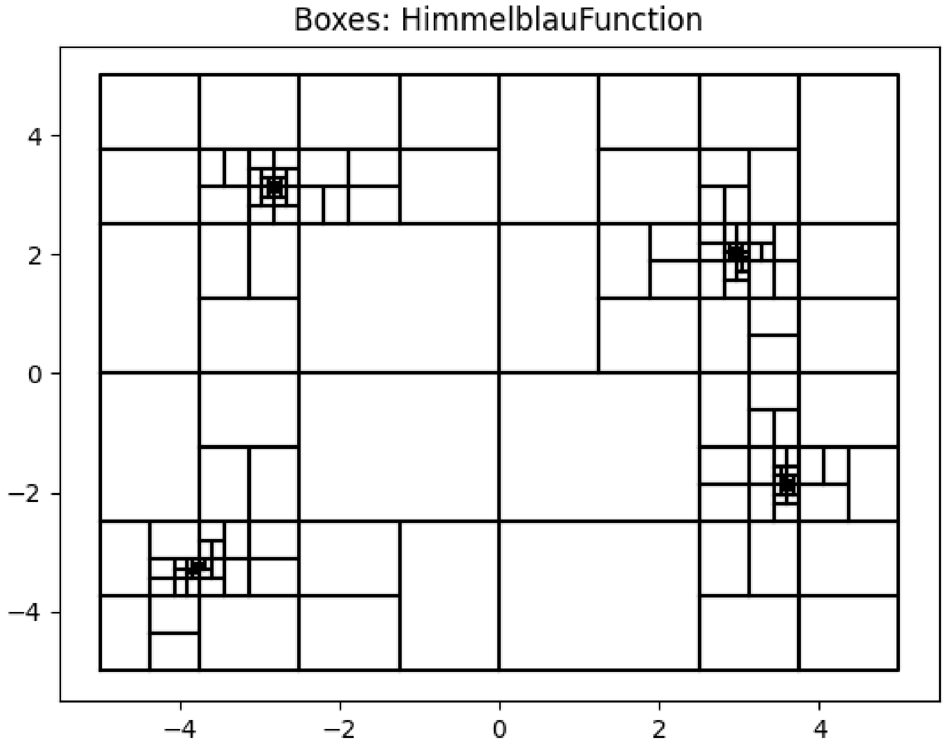

Рис. 6: Иллюстрация работы алгоритма для функции Химмельблау

Возле всех 4 минимумов наблюдается сгущение брусьев. В качестве решения получен вырожденный брус $\mathbf{x} \approx \begin{pmatrix}[2.99988,\ 3.00049]\\ [1.99951,\ 2.00012]\end{pmatrix}$, являющийся точным (считая до 10^{-5}) расположением одного из экстремумов, $f(\mathbf{x}) \approx 0$.

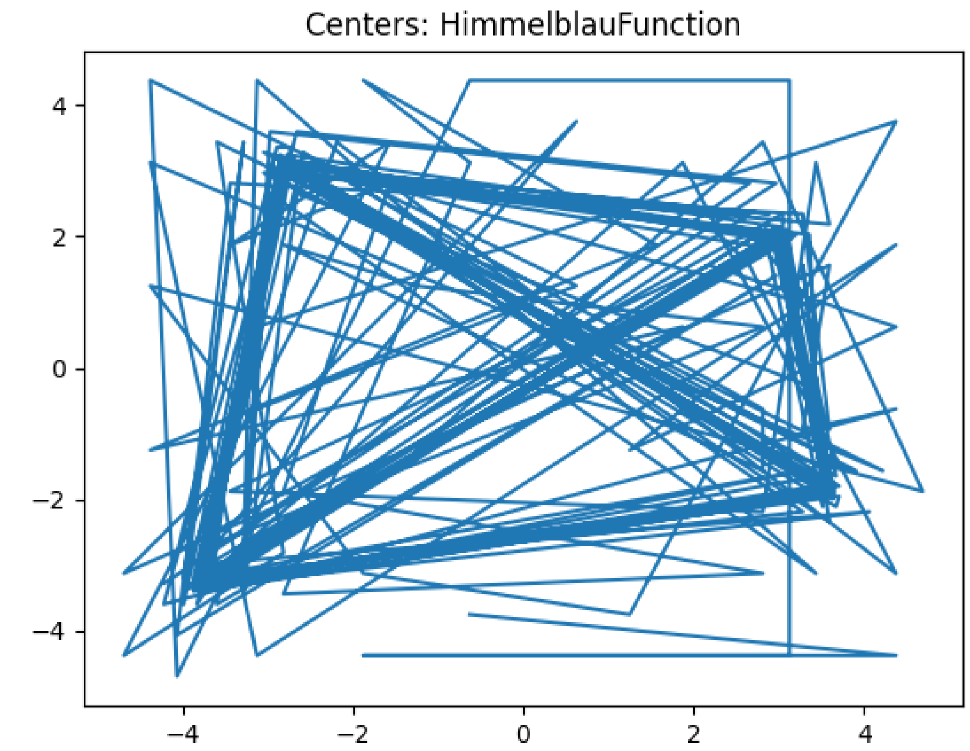

Рис. 7: Положения центров брусов

Из графика расположения центров видно, что алгоритм перемещается между экстремумами.

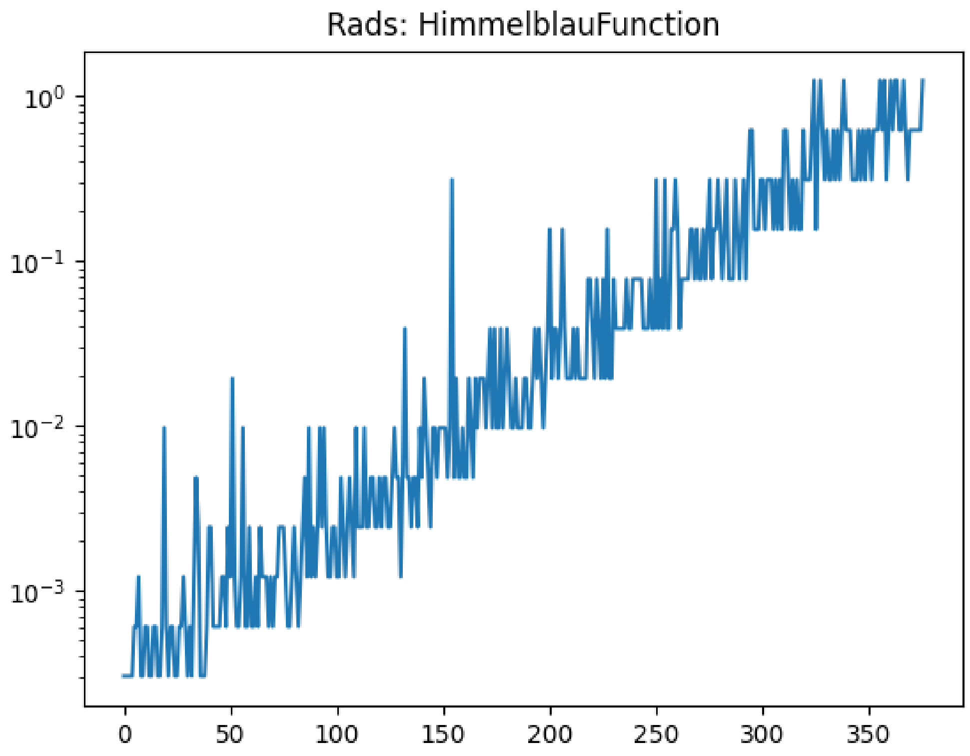

Рис. 8: Радиусы рабочих брусов для функции Химмельблау

5 Обсуждение

Из результатов, полученных из функции Буса,видно, как в увеличивается количество брусов, и как уменьшается их радиус в окрестности точки минимума. Также видно, что с увелечением номера итерации центры брусов из рабочего списка сгущаются в окрестности точки минимума. Стоит отметить, что в для обеих функций радиусы(имеется в виду максимальный радиус из обоих интервалов) брусов в рабочем списке увеличиваются не равномерно. Из результатов, полученных из функции Химмельблау: в окрестности всех точек минимума заметно сильное дробление брусов. Точка минимума перемещается между окрестностями реальных точек минимума. На рисунках положения центров брусов можно заметить, что несколько первых итерация алгоритм почти никак не приближается к точке минимума, и только с некоторой итерации начинает приближаться стабильно улучшать значение.