

Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и
вычислительной физики,
Физико-механический институт

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Отчет по лабораторной курсовой работе
по дисциплине «Интервальный анализ»

Выполнил студент гр. 5030102/80201
Игнатъев Д. Д.
Проверил
Баженов А. Н.

Санкт-Петербург
2022

Содержание

	Страница
1 Постановка задачи	3
2 Теория	3
3 Результаты	3
3.1 Способ формирования подматрицы	4
3.2 Решение	4
4 Обсуждение	25

1 Постановка задачи

На лекции была предложена следующая задача "Малоракурсной томографии плазмы":

Дана матрица длин хорд размера 256×36 , вектор длины 36 - модельное распределение светимостей(решение) и вектор длины 256 - показания детектора(правая часть).

Выделим из этой системы блок матрицы 12×18 , и требуется решить с помощью субдифференциального метода Ньютона эту переопределённую систему путем нахождения решений с различными матрицами из исходной СЛАУ и взятием минимума по включению.

Рассмотрим случаи равномерной светимости и градиентной светимости, максимум которой находится на половине высоты и радиуса цилиндра.

2 Теория

Пусть имеется ИСЛАУ $Cy = d$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Процедура субградиентного метода Ньютона состоит в следующем:

1. Задаём начальное приближение $x^0 \in \mathbb{R}^{2n}$, релаксационный параметр $\tau \in (0; 1]$ и точность $\varepsilon > 0$
2. Строим отображение \mathcal{G} :

$$\mathcal{G}(x) = sti(Csti^{-1}(x)) - sti(d)$$

3. Вычисляем субградиент D^{k-1} отображения \mathcal{G} в точке $x^{(k-1)}$
4. $x^{(k)} = x^{(k-1)} - \tau(D^{k-1})^{-1}\mathcal{G}(x^{(k-1)})$
5. Итерационная процедура повторяется, пока $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \geq \varepsilon$. В качестве ответа возвращается $sti^{-1}(x^{(k)})$

Начальное приближение можно найти, решив 'среднюю систему':

$$midC \dot{x}^{(0)} = sti \mathbf{d}$$

3 Результаты

Пусть нам дана система с матрицей размерности 126×18 , правой частью - интервальным вектром и элементами вектора-решения - случайными значениями из интервала $[1, 9]$

Решение такой задачи будет состоять в выборе 18 строк из такой матрицы и решением подсистемы субдифференциальным методом Ньютона в том случае, если определить матрицы не равен 0. А после этого найдём пересечение полученных решений и проведём сравнения с истинным.

Приведем градиентную светимость матрицы:

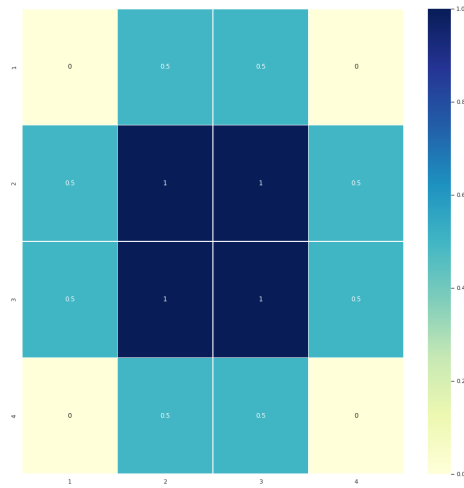


Рис. 1: Воксели при град. светимости

3.1 Способ формирования подматрицы

Из всего множества индексов строк случайным образом выбираются 18 таким образом, чтобы определитель полученной матрицы не был равен нулю (не меньше, чем заданный $\varepsilon = 10^{-8}$)

3.2 Решение

Будем искать решение-пересечения для случайного выбора 1, 5, 15, 30, 50 и 100 подсистем. Тем самым у нас получаются разные подсистемы, которые мы будем решать соответствующим методом и которые будем сравнивать для того, чтобы получить зависимость получаемого решения от количества выборов подматриц. Также сравним правые части таких систем с истинной.

Исходная прямоугольная матрица имеет вид:

Далее представлены сравнения полученных и истинных решений при выборе 1, 5, 15, 30, 30 и 100 подсистем. Также представлены и сравнение полученных правых частей с исходными.

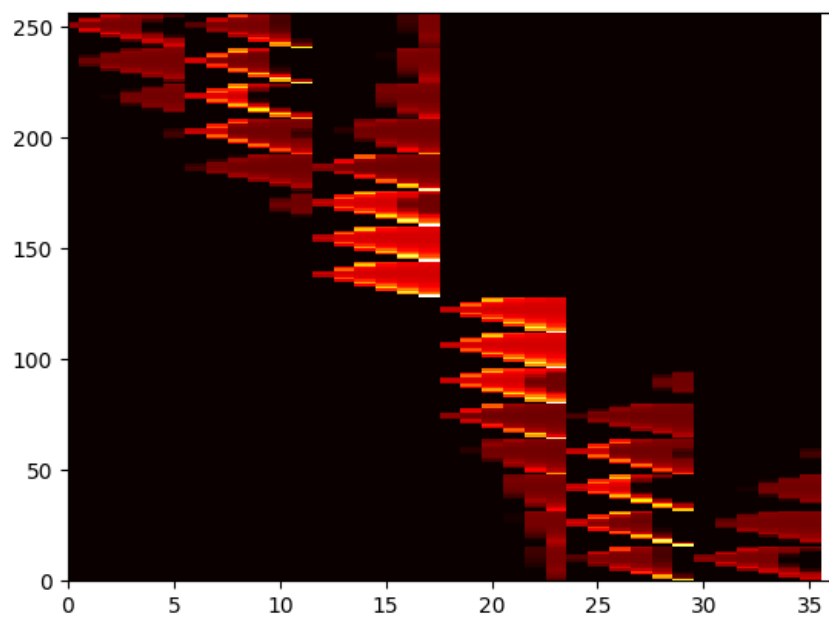


Рис. 2: Исходная матрица

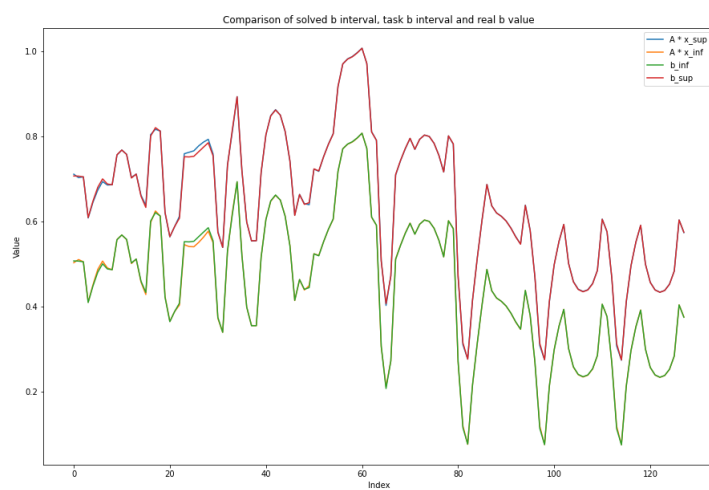


Рис. 3: Правые части для 1 подматрицы при равномерной светимости

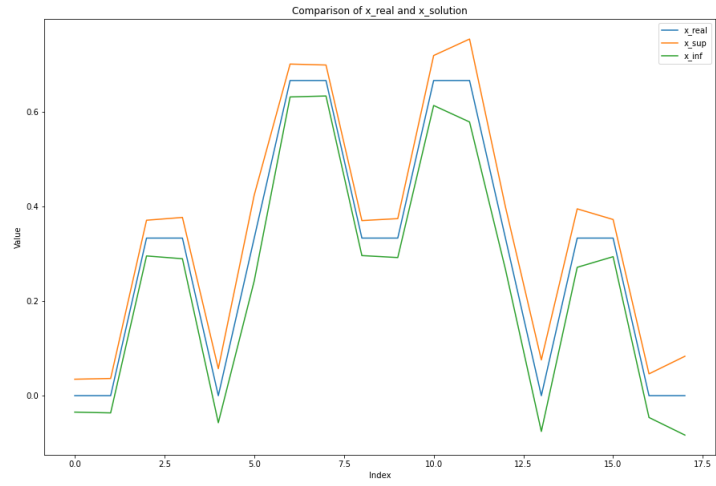


Рис. 4: Исходное решение с полученным для 1 подматрицы при равномерной светимости



Рис. 5: Вычисленное $||x_{sol} - x_{mid}||$ в каждом вокселе для 1 подматрицы при равномерной светимости

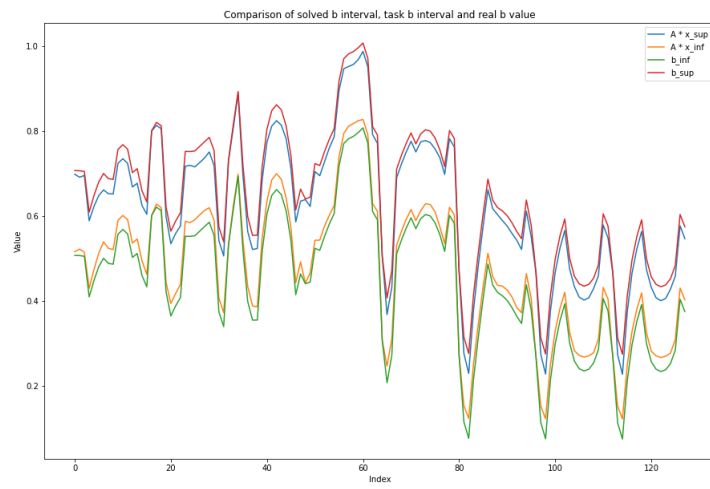


Рис. 6: Правые части для 5 подматриц при равномерной светимости

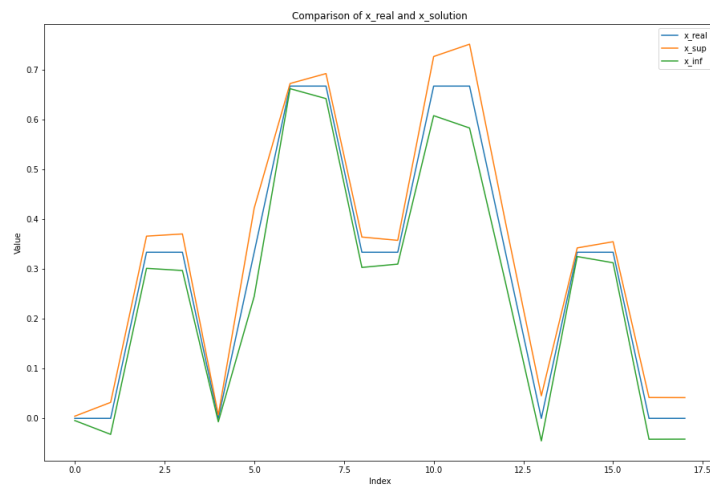


Рис. 7: Исходное решение с полученным для 5 подматриц при равномерной светимости

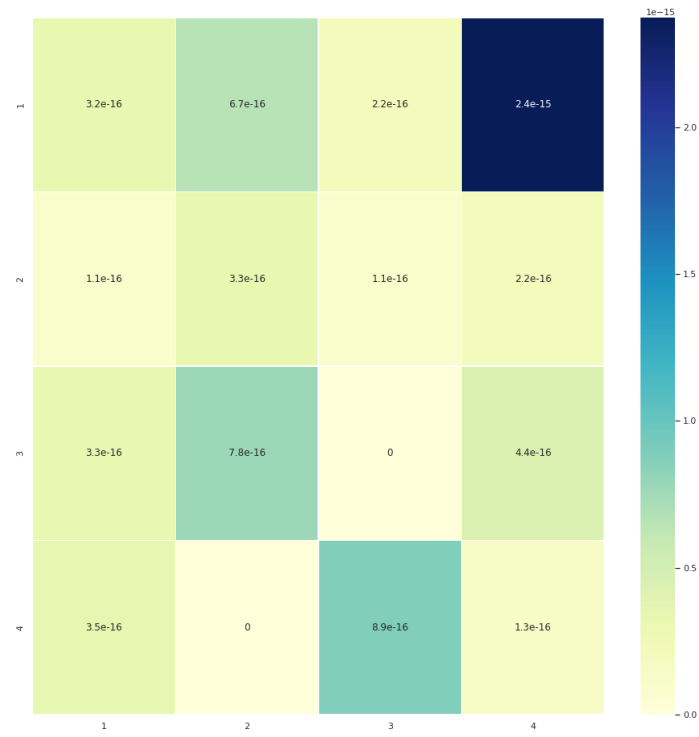


Рис. 8: Вычисленное $\|x_{sol} - x_{mid}\|$ в каждом вокселе для 5 подматриц при равномерной светимости

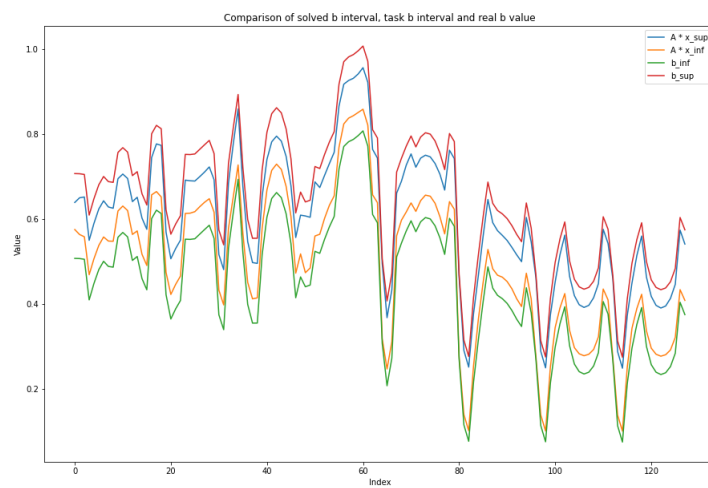


Рис. 9: Правые части для 15 подматриц при равномерной светимости

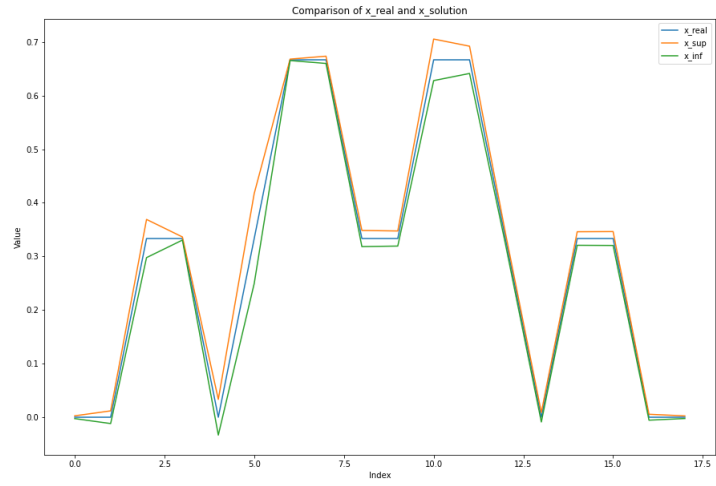


Рис. 10: Исходное решение с полученным для 15 подматриц при равномерной светимости

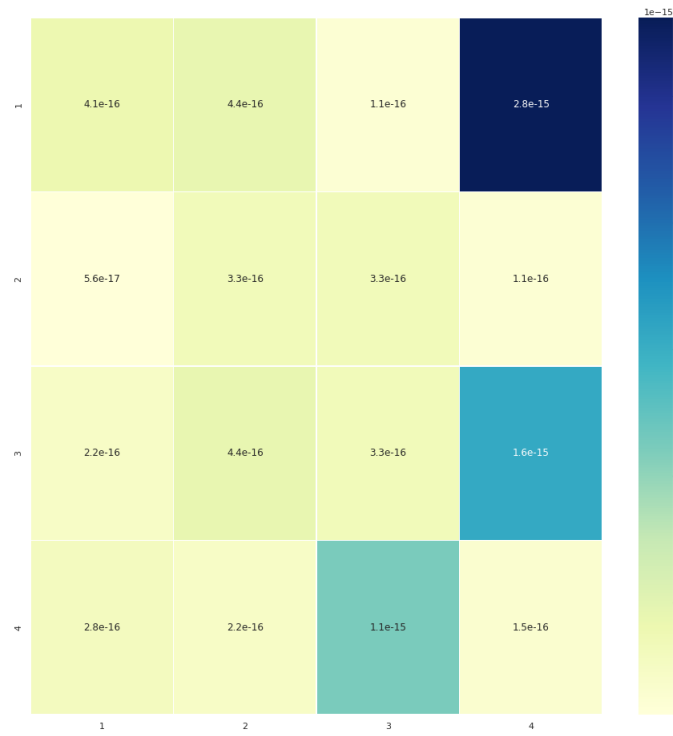


Рис. 11: Вычисленное $\|x_{sol} - x_{mid}\|$ в каждом вокселе для 15 подматриц при равномерной светимости

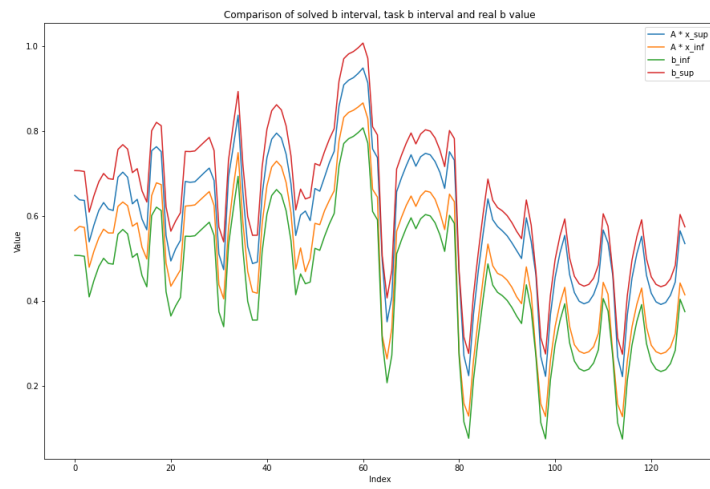


Рис. 12: Правые части для 30 подматриц при равномерной светимости

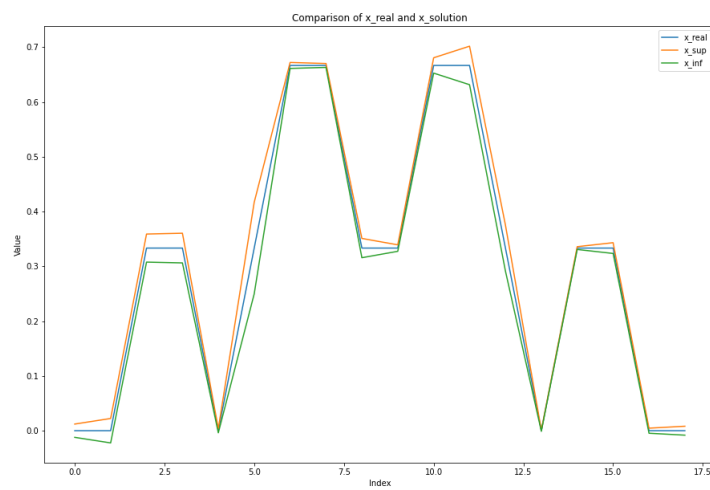


Рис. 13: Исходное решение с полученным для 30 подматриц при равномерной светимости



Рис. 14: Вычисленное $\|x_{sol} - x_{mid}\|$ в каждом вокселе для 30 подматриц при равномерной светимости

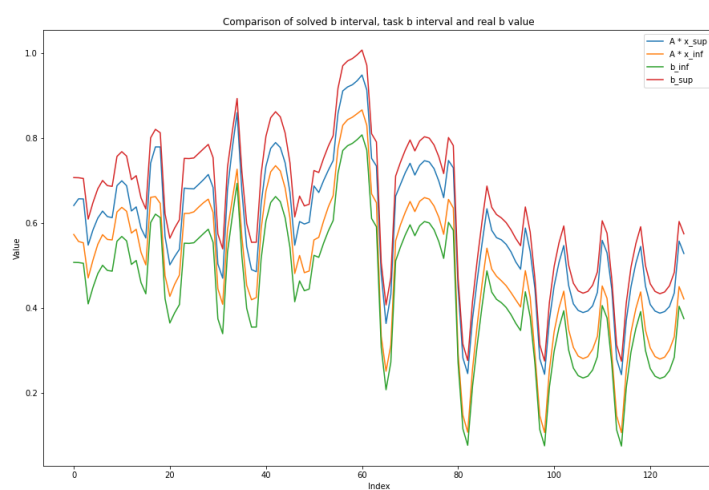


Рис. 15: Правые части для 50 подматриц при равномерной светимости

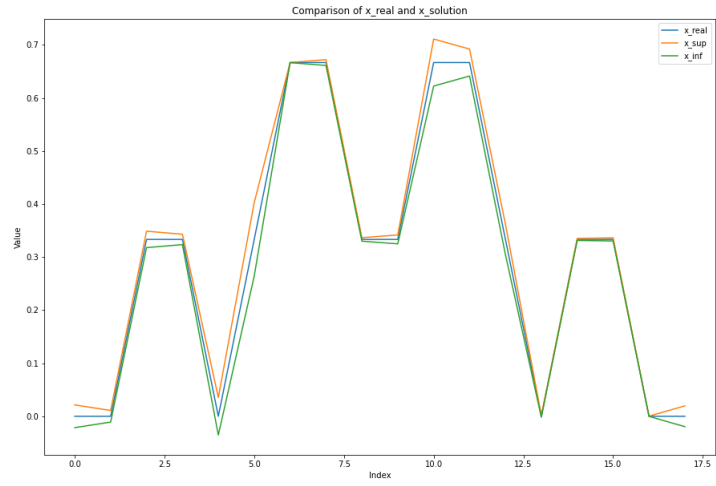


Рис. 16: Исходное решение с полученным для 50 подматриц при равномерной светимости

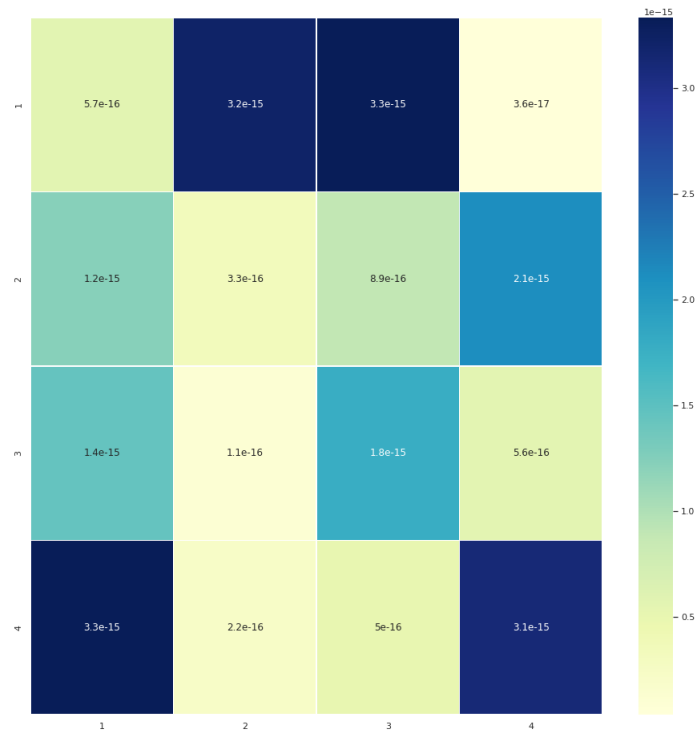


Рис. 17: Вычисленное $\|x_{sol} - x_{mid}\|$ в каждом вокселе для 50 подматриц при равномерной светимости

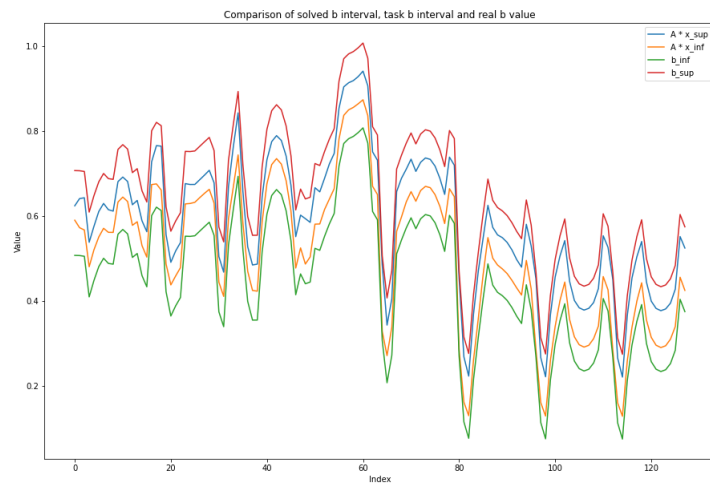


Рис. 18: Правые части для 100 подматриц при равномерной светимости

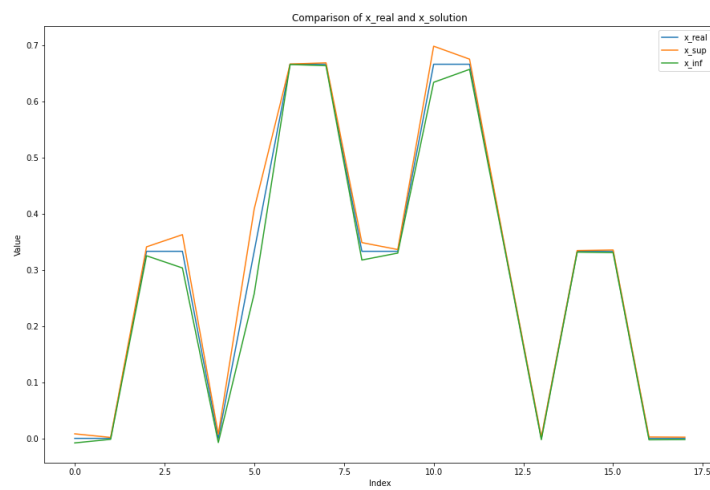


Рис. 19: Исходное решение с полученным для 100 подматриц при равномерной светимости



Рис. 20: Вычисленное $\|x_{sol} - x_{mid}\|$ в каждом вокселе для 100 подматриц при равномерной светимости

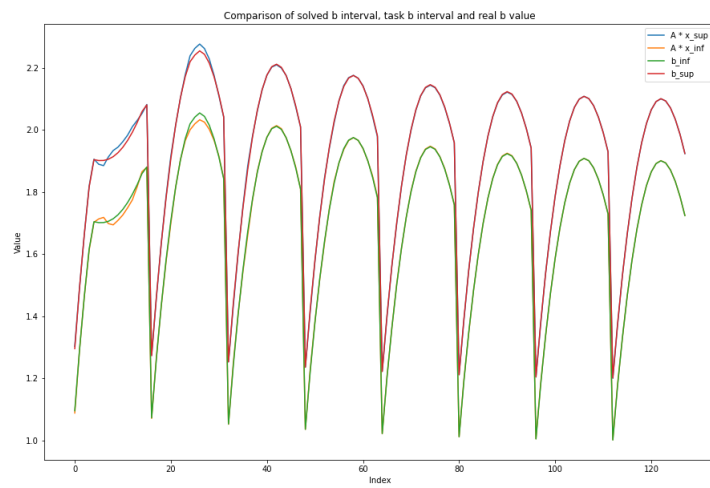


Рис. 21: Правые части для 1 подматрицы при градиентной светимости

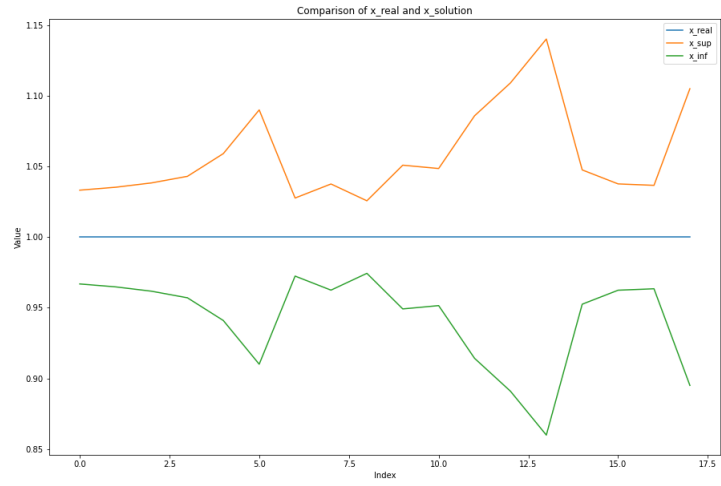


Рис. 22: Исходное решение с полученным для 1 подматрицы при градиентной светимости

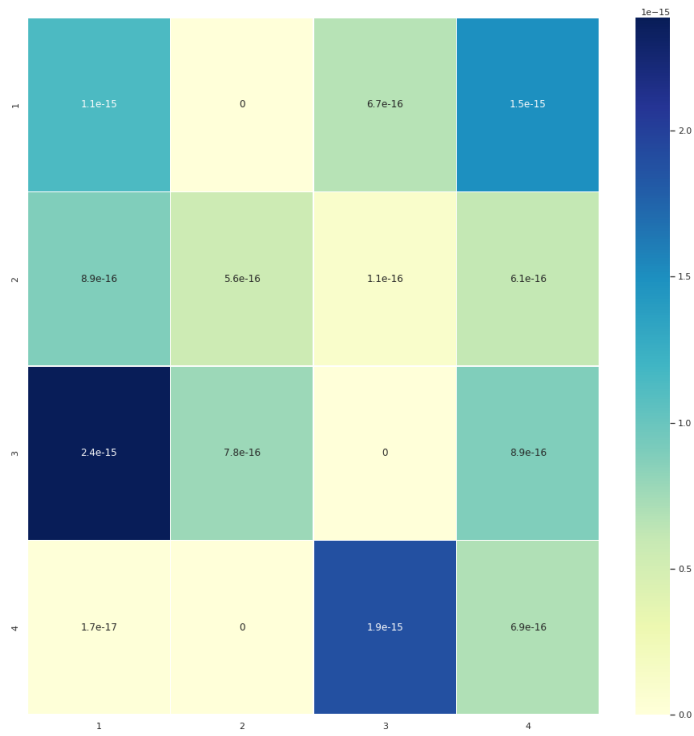


Рис. 23: Вычисленное $\|x_{sol} - x_{mid}\|$ в каждом вокселе для 1 подматрицы при градиентной светимости

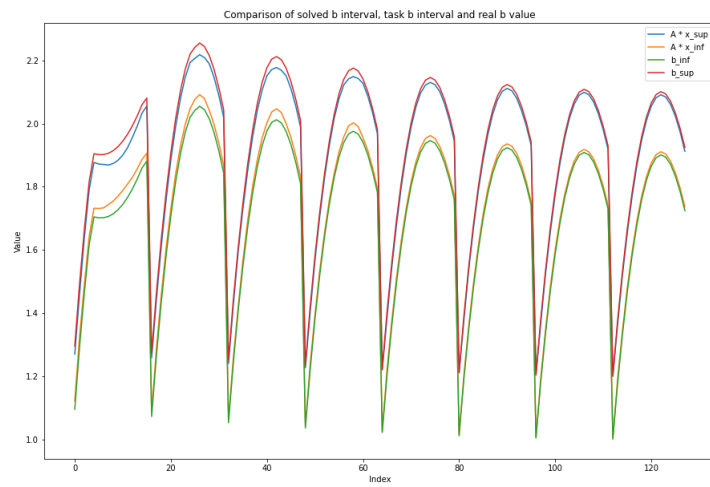


Рис. 24: Правые части для 5 подматриц при градиентной светимости

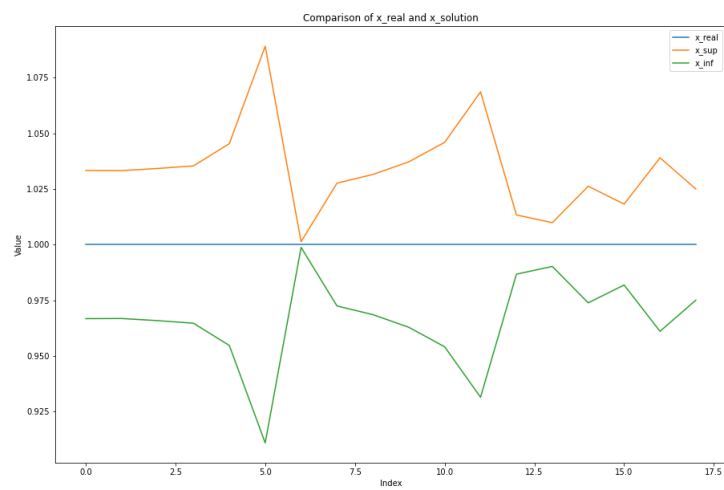


Рис. 25: Исходное решение с полученным для 5 подматриц при градиентной светимости

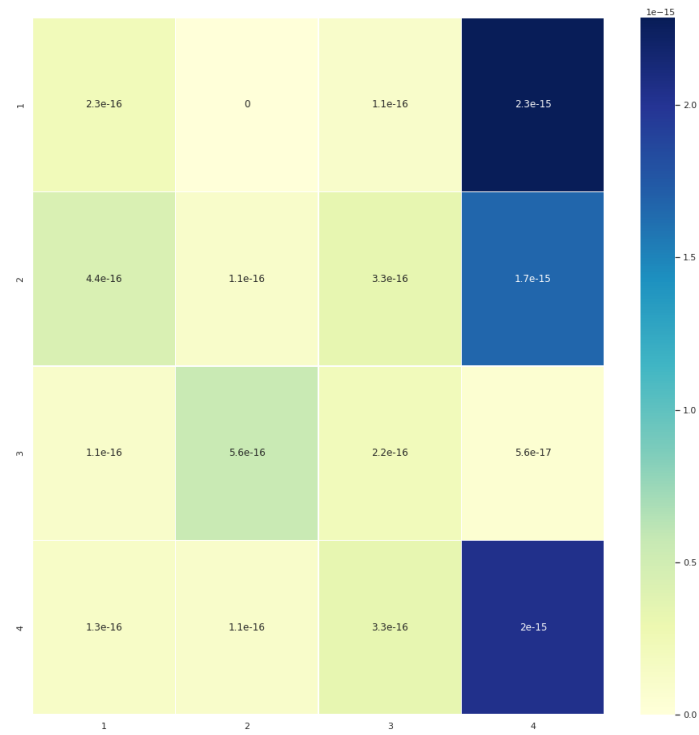


Рис. 26: Вычисленное $\|x_{sol} - x_{mid}\|$ в каждом вокселе для 5 подматриц при градиентной светимости

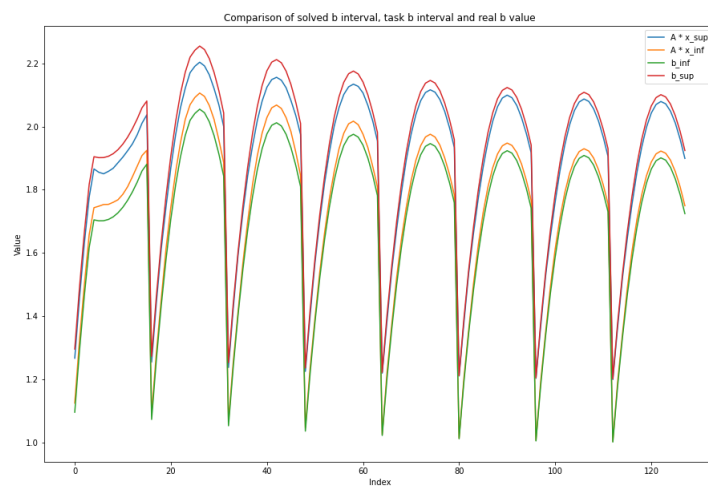


Рис. 27: Правые части для 15 подматриц при градиентной светимости

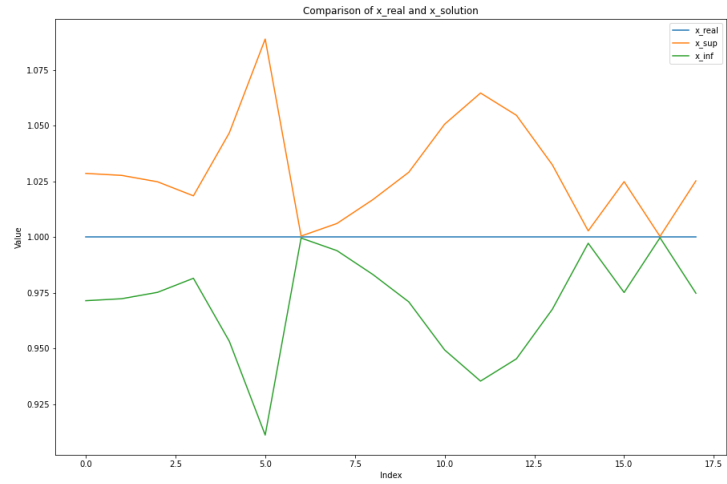


Рис. 28: Исходное решение с полученным для 15 подматриц при градиентной светимости

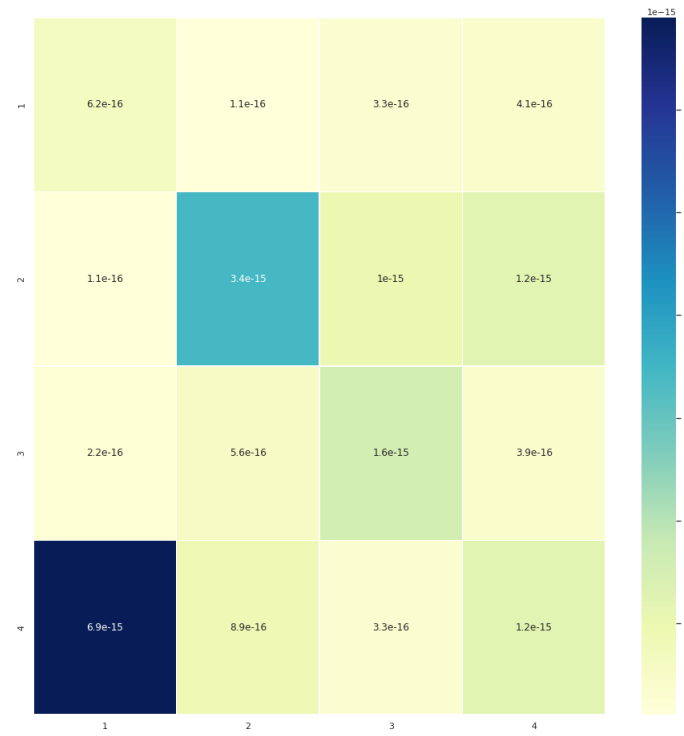


Рис. 29: Вычисленное $\|x_{sol} - x_{mid}\|$ в каждом вокселе для 15 подматриц при градиентной светимости

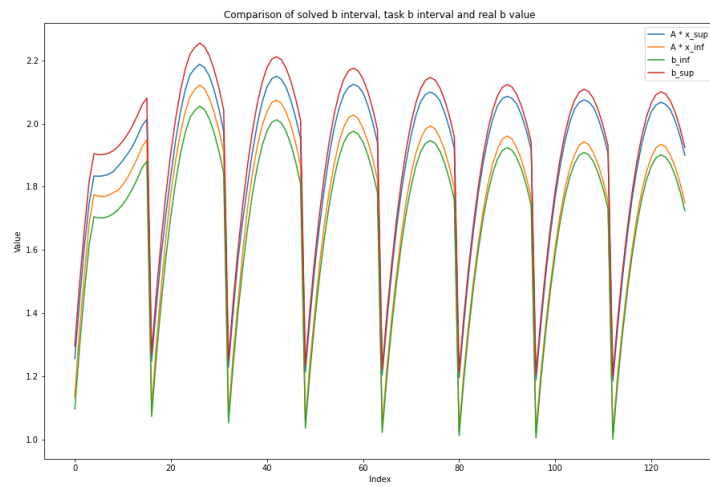


Рис. 30: Правые части для 30 подматриц при градиентной светимости

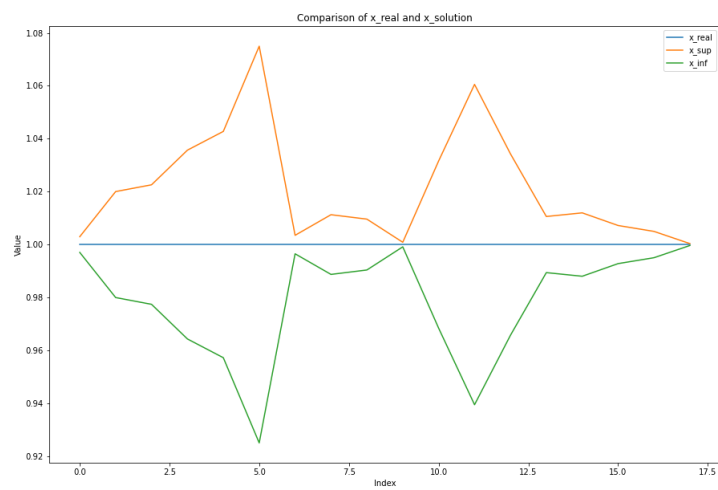


Рис. 31: Исходное решение с полученным для 30 подматриц при градиентной светимости

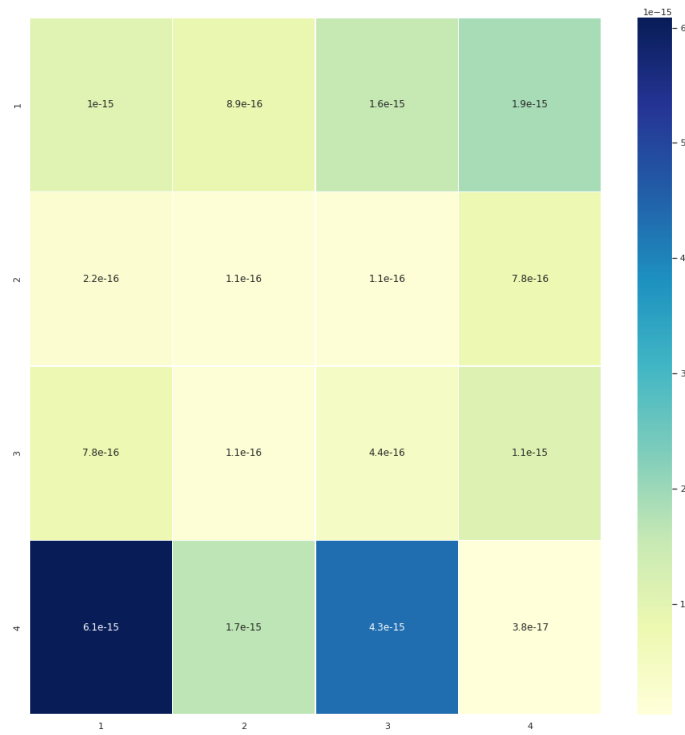


Рис. 32: Вычисленное $\|x_{sol} - x_{mid}\|$ в каждом вокселе для 30 подматриц при градиентной светимости

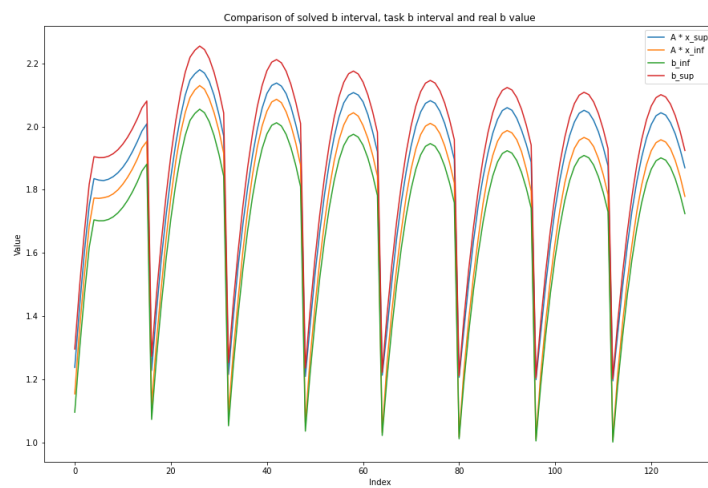


Рис. 33: Правые части для 50 подматриц при градиентной светимости

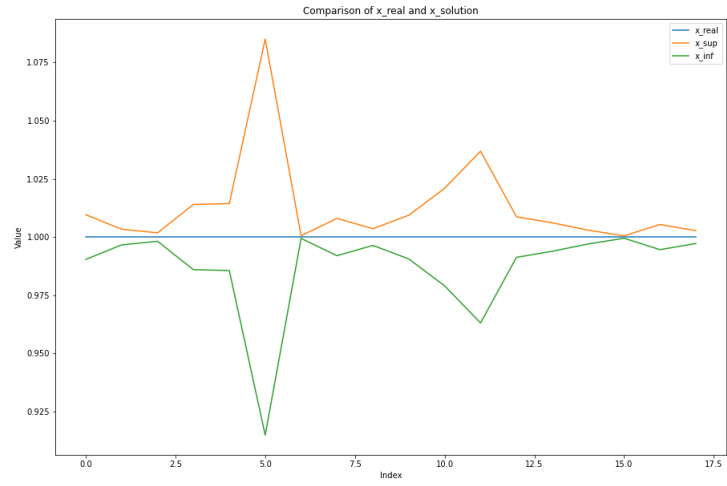


Рис. 34: Исходное решение с полученным для 50 подматриц при градиентной светимости

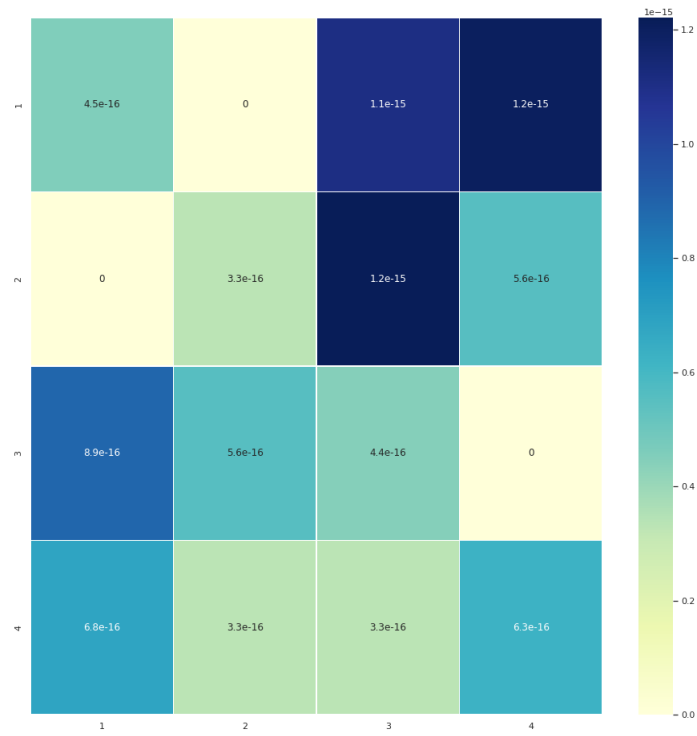


Рис. 35: Вычисленное $\|x_{sol} - x_{mid}\|$ в каждом вокселе для 50 подматриц при градиентной светимости

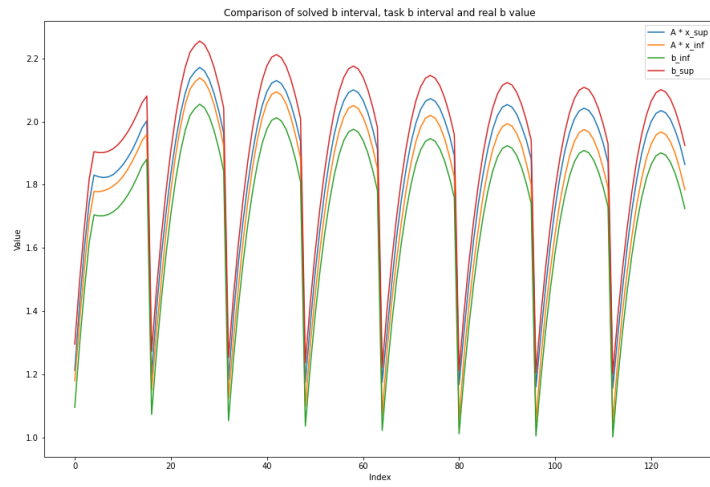


Рис. 36: Правые части для 100 подматриц при градиентной светимости

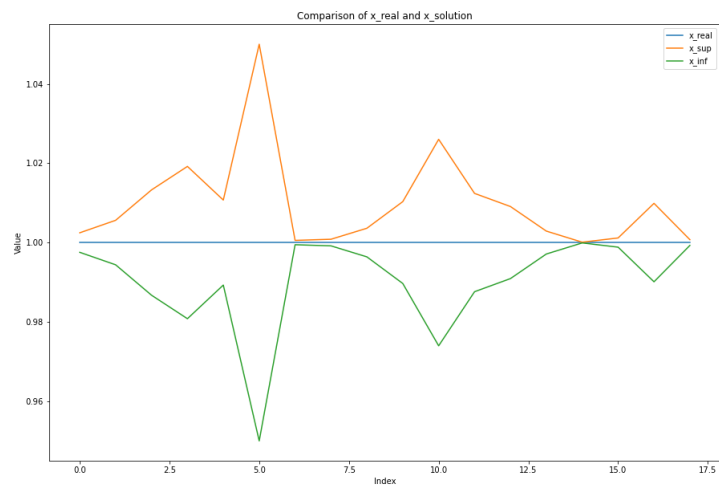


Рис. 37: Исходное решение с полученным для 100 подматриц при градиентной светимости

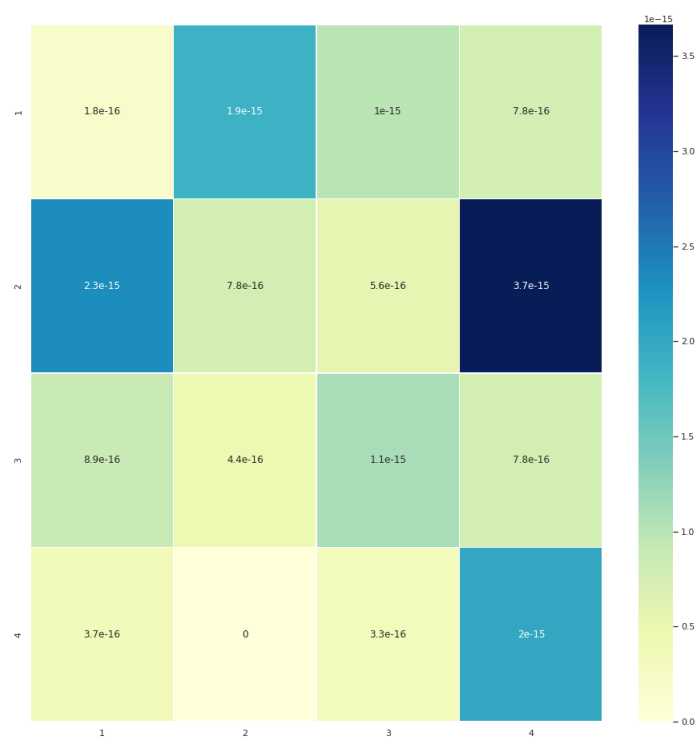


Рис. 38: Вычисленное $\|x_{sol} - x_{mid}\|$ в каждом вокселе для 100 подматриц при градиентной светимости

Заключительным этапом исследования проверим зависимость нормы разности исходного решения и полученного от количества используемых подматриц. Для этого будем искать нормы разности вектора-решения и вектора правых границ модельных решений, вектора-решения и вектора левых границ модельных решений, вектора-решения и вектора середины интервалов модельных решений. Такие метрики были выбраны для того, чтобы оценить, насколько близко полученное решение к исходному решению, и тем самым сделать вывод насколько количество подматриц влияет на точность решения. Полученный результат представлен на следующих графиках:

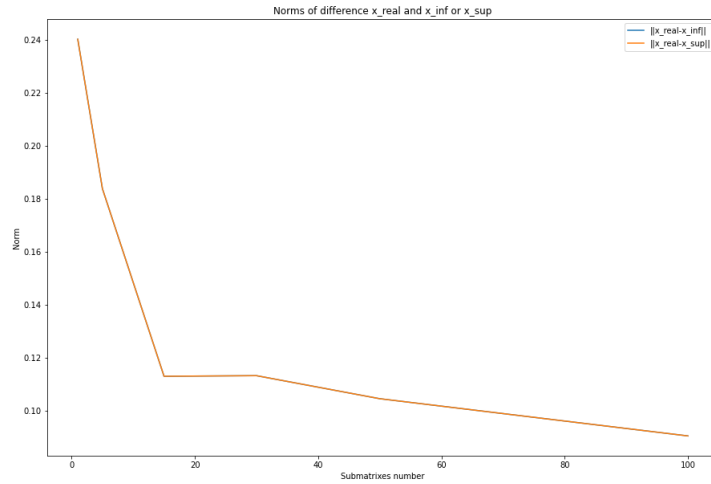


Рис. 39: Сравнение норм разности исходного вектора-решения и границ интервалов полученных решений ($\|x_{\text{sol}} - x_{\text{inf}}\|$ и $\|x_{\text{sol}} - x_{\text{sup}}\|$) при равномерной светимости

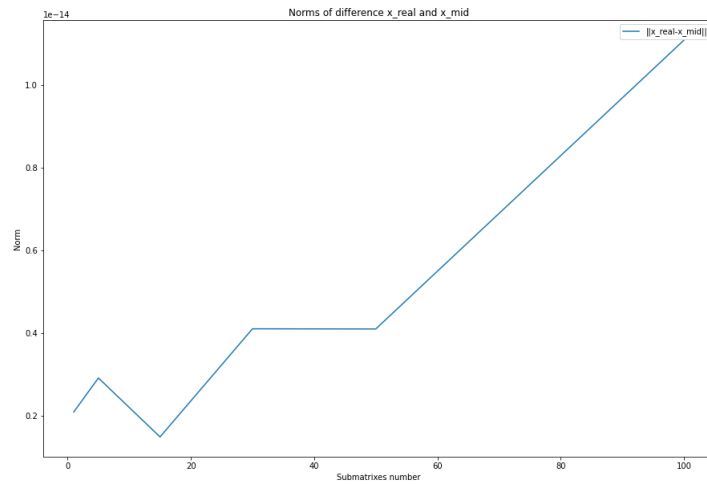


Рис. 40: Сравнение норм разности исходного вектора-решения и вектора-середины интервалов полученных решений ($\|x_{\text{sol}} - x_{\text{mid}}\|$) при равномерной светимости

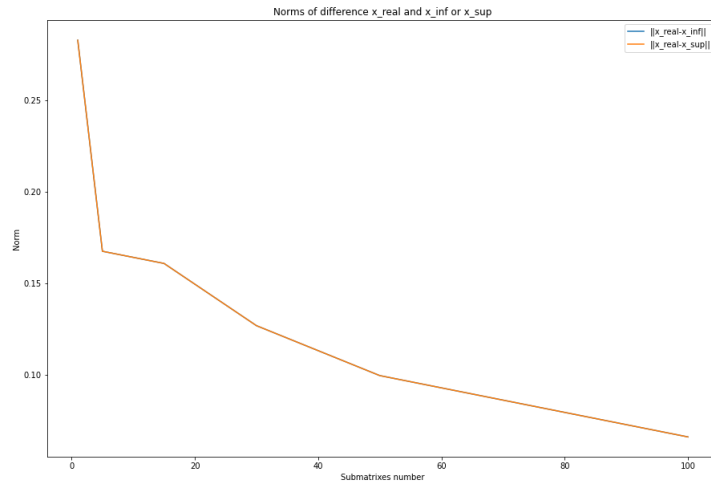


Рис. 41: Сравнение норм разности исходного вектора-решения и границ интервалов полученных решений ($\|x_{\text{sol}} - x_{\text{inf}}\|$ и $\|x_{\text{sol}} - x_{\text{sup}}\|$) при градиентной светимости

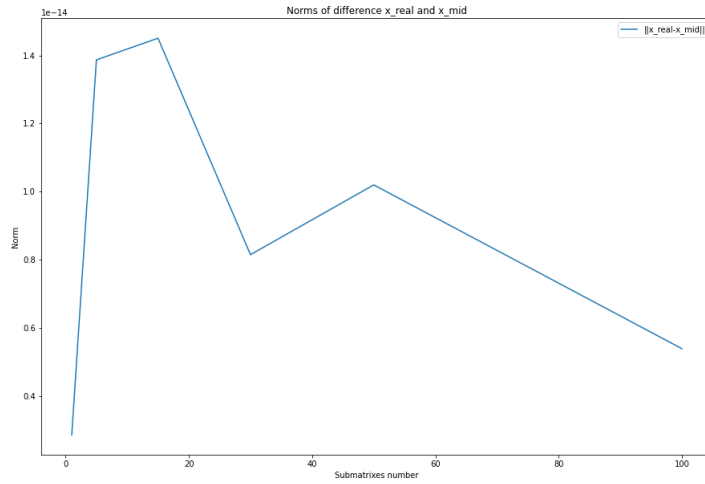


Рис. 42: Сравнение норм разности исходного вектора-решения и вектора-середины интервалов полученных решений ($\|x_{\text{sol}} - x_{\text{mid}}\|$) при градиентной светимости

4 Обсуждение

Выводы, которые можно сделать по проделанной работе: Исходное решение всегда находилось в интервале полученного решения для всех случаев. Более того, при увеличении количества выбираемых подматриц полученный вектор сужается к исходному.

Сравнив графики, можно заметить, что для всех вариантов правая часть находилась в границах исходной правой части. При увеличении количества выбираемых подматриц интервалы правой части суждались.

Более того, середина полученного интервального вектора-решения почти сразу совпала с исходным решением.

Таким образом, при увеличении количества выбираемых матриц решение-пересечение стремится к истинному.