Санкт-Петербургский политехнический университет
Высшая школа прикладной математики и
вычислительной физики,
Физико-механический институт

Направление подготовки
01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Отчет по курсовой работе
по дисциплине «Интервальный анализ»

Выполнил студент гр. 5030102/80201
Игнатьев Д. Д.
Проверил
к. ф.-м. н., доцент
Баженов А. Н.

Санкт-Петербург
2021

Содержание

Список таблиц

1 Постановка задачи

Необходимо исследовать поведение субдифференциального метода Ньютона, проанализировать результаты и сходимость метода.
Для исследований возьмем 2 ИСЛАУ:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2,4] & [-5,-1] & [-2,3] \\ [-3,1] & [5,7] & [4,6] \\ [-1,1] & [-2,1] & [-7,-2] \end{pmatrix} \tag{1}$$

с правой частью:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-28,43] \\ [-60,29] \\ [-11,39] \end{pmatrix} \tag{2}$$

и

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [3,4] & [-5,-2] & [-2,2] \\ [-3,-1] & [6,7] & [5,6] \\ [-1,0] & [-1,1] & [-4,1] \end{pmatrix} \tag{3}$$

с правой частью:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-28,43] \\ [-60,69] \\ [-11,39] \end{pmatrix} \tag{4}$$

2 Теория

2.1 Особенные матрицы

Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ называется неособенной (невырожденной), если неособенными являются все точечные $n \times n$ - матрицы $A \in \mathbf{A}$.

Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ называется особенной (вырожденной), если она содержит особенную точечную матрицу.

Теорема. Пусть интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ такова, что $mid\ \mathbf{A}$ неособенная и

$$\max_{1\le j\le n}(rad\ \mathbf{A} \cdot |(mid\ \mathbf{A})^{-1}|)_{jj} \ge 1$$

Тогда $\mathbf{A}$ особенная.

2.2 Субдифференциальный метод Ньютона

Итерационный метод строится по следующей формуле

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \tau(D^{(k-1)})^{-1}\mathcal{F}(x^{(k-1)}) \tag{5}$$

где $(D^{(k-1)})^{-1}\mathcal{F}(x^{(k-1)})$ - субградиент в $x^{(k-1)}$, $\tau \in [0;1]$ - релаксационный параметр, с помощью которого можно расширить область сходимости. На практике рекомендуется брать $\tau = 1$, тогда метод даст наиболее точное решение. В этой работе в качестве τ будет взята единица

При этом

$$\mathcal{F}(y) = sti(A sti^{-1}(y) b) \tag{6}$$

$$sti(x) \ : \ (x_1, ..., x_n) \rightarrow (-\underline{x_1}, ..., -\underline{x_n}, \overline{x_1}, ..., \overline{x_n}) \tag{7}$$

2.2.1 Условие остановки

$$\|\mathcal{F}(x^{(k)})\| < \varepsilon \tag{8}$$

2.2.2 Сходимость метода

Теорема. Пусть интервальная $n \times n$ - матрица $\mathbf{C}$ удовлетворяет условию построчной согласованности, и интервальная $2n \times 2n$ - матрица

$$\begin{pmatrix} (pro\ \mathbf{C})^+ & (pro\ \mathbf{C})^- \\ (pro\ \mathbf{C})^- & (pro\ \mathbf{C})^+ \end{pmatrix}$$

является неособенной. Если при этом $\mathbf{C}$ достаточно узка, то алгоритм SubDiff2 со значением релаксационного параметра $\tau = 1$ сходится за конечное число итераций к $sti(\mathbf{x}^*)$, где $\mathbf{x}^*$ — формальное решение интервальной системы $\mathbf{C}x + \mathbf{d} = 0$.

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python в среде разработки PyCharm. Использованы библиотеки numpy, scipy, seaborn, kaucherpy для реализации вычислений.

4 Результаты

Будем использовать параметр релаксации $\tau = 1$ в методе Ньютона.

4.1 Проверка на работоспособность

Прежде чем решать поставленную задачу, проверим работоспособность реализованных методов на примере, на который заранее знаем ответ[1].

$$\begin{pmatrix} [2,\ 4] & [-2,\ 1] \\ [-1,\ 2] & [2,\ 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2,\ 2] \\ [-2,\ 2] \end{pmatrix}$$

С помощью теоремы из пункта 2.1 получаем, что матрица не является особенной.

4.1.1 Субдифференциальный метод

С помощью теоремы из пункта 2.2.1 получили, что субдифференциальный метод на данной системе сходится за конечное число итераций.

Действительно, всего за 2 итерации алгоритм сошелся к следующим значениям

$$\begin{pmatrix} [-0.3333333,\ 0.3333333] \\ [-0.3333333,\ 0.3333333] \end{pmatrix}$$

Теперь, когда мы уверенны в рабоспособности запрограммированного метда, перейдем к исследованию ИСЛАУ 1 и 3

4.2 Решение поставленной задачи

Для ИСЛАУ 1 получаем уверенную сходимость метода за 4 итерации к точному решению

$$\begin{pmatrix} [2,\ 5] \\ [-3,\ 4] \\ [-4,\ -1] \end{pmatrix}$$

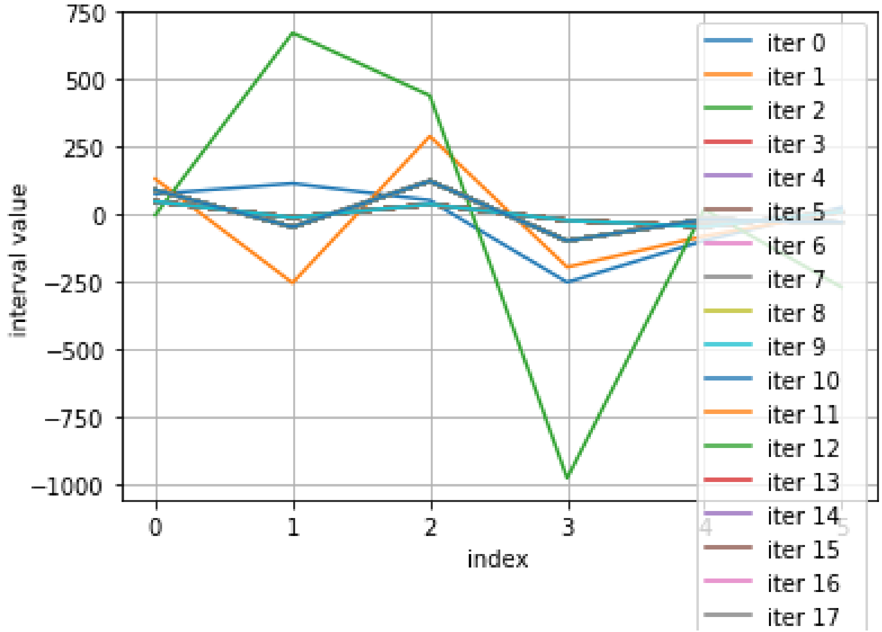
С помощью теоремы из пункта 2.1 получаем, что матрица не является особенной.

4.2.1 Субдифференциальный метод

С помощью теоремы из пункта 2.2.1 получили, что субдифференциальный метод на данной системе сходится за конечное число итераций. Для ИСЛАУ 3 метод останавливается посе 100 итераций, но так и не сходится к точному значению. Получаем следующий выход метода

$$\begin{pmatrix} [-1.66666667\ -56.66666667] \\ [-46.11111111\ 19.44444444] \\ [41.22222222\ -8.77777778] \end{pmatrix}$$

Посмотрим на график изменения значений выходного вектора в зависимости от числа итераций, по оси x отмечечны индексы вектора интервалов, так например в интервале $[a_{11}, a_{12}] a_{11} = 1 a_{12} = 2$.



С помощью теоремы из пункта 2.1 получаем, что матрица является особенной.

Субдифференциальный метод на данной системе не сходится за конечное число итераций.

Для этой интервальной линейной системы алгоритм генерирует осциллирующую последовательность, которая, очевидно, не сходится ни к какому пределу. Интересно отметить, что правая часть этой системы шире, чем в предыдущем примере, а все элементы матрицы, кроме a_{33}, тоньше, что говрит о том, что данная ИСЛАУ еще лучше подчинаетсятеореме о сходимости. Тем не менее метод не работает.

4.3 Исследование

В качестве эксперемента было принято решение внести изменения в компоненту a_{33} и проверить сходимость метода. Был получен следующий результат

```
Change a33 inf to 0.0    => diverged
Change a33 inf to 0.5    => diverged
Change a33 inf to 1.0    => diverged
Change a33 inf to 1.5    => converged
Change a33 inf to 2.0    => diverged
Change a33 inf to 2.5    => diverged
Change a33 inf to 3.0    => diverged
Change a33 inf to 3.5    => converged
Change a33 inf to 4.0    => diverged
Change a33 inf to 4.5    => diverged
Change a33 inf to 5.0    => converged
Change a33 inf to 5.5    => converged
Change a33 inf to 6.0    => diverged
Change a33 inf to 6.5    => diverged
Change a33 inf to 7.0    => converged
Change a33 inf to 7.5    => diverged
Change a33 inf to 8.0    => converged
Change a33 inf to 8.5    => converged
Change a33 inf to 9.0    => converged
Change a33 inf to 9.5    => converged
```

Результаты коррекции значения a_{33} при $\tau = 1$

где с каждым шагом изменлся inf значение интервала a_{33}. Стоит заметить, что во всех слуаях, когда мы замечаем сходимость интервал a_{33} будет неправильный.

Проведем еще один эксперимент и попробуем изменить параметр релаксации на $\tau = 0.6$

```
Change a33 inf to 0.0    => diverged
Change a33 inf to 0.5    => diverged
Change a33 inf to 1.0    => diverged
Change a33 inf to 1.5    => converged
Change a33 inf to 2.0    => converged
Change a33 inf to 2.5    => converged
Change a33 inf to 3.0    => converged
Change a33 inf to 3.5    => converged
Change a33 inf to 4.0    => converged
Change a33 inf to 4.5    => converged
Change a33 inf to 5.0    => converged
Change a33 inf to 5.5    => converged
Change a33 inf to 6.0    => converged
Change a33 inf to 6.5    => converged
Change a33 inf to 7.0    => converged
Change a33 inf to 7.5    => converged
Change a33 inf to 8.0    => converged
Change a33 inf to 8.5    => converged
Change a33 inf to 9.0    => converged
Change a33 inf to 9.5    => converged
```

Результаты коррекции значения a_{33} при $\tau = 0.6 \Longrightarrow$ область сходимости расширилась

5 Обсуждение

- Субдифференциальный метод Ньютона является модификацией метода градиентного спуска, который, однако, не накладывает на отображение требования дифференцируемости, а требует лишь порядковой выпуклости

- Алгоритм дает точное решение задачи за небольшое конечное число итераций, обычно не превышающее размерность системы. В нектрых случаях параметр релаксации $\tau < 1$ улучшает сходимость субдифференциального метода Ньютона. Но чем меньше τ , тем медленнее работает Алгоритм.

- Метод показывает преимущества при решении ИСЛАУ, в которой содержатся неправильные интервалы в свободной части и нет знакопеременности интервалов: быструю сходимость и точность.

- Существуют методы, которые позволяют находить приближенные решения неточно заданных ИСЛАУ. Например альтернативный метод модификации СЛАУ[4]

=> проблемная для метода ситуация[1] разрешима за счет модификаций ИСЛАУ.

Список литературы

[1] Шарый С. П. - Алгебраический подход к интервальным линейным статическим задачам идентификации, о допусках и об управлении, или еще одно применение арифметики Каухера. http://www.nsc.ru/interval/shary/Papers/OneMoreKaucher.pdf

[2] Баженов А. Н. - Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры: учебное пособие. https://elib.spbstu.ru/dl/2/s20-76.pdf/info

[3] Шарый С. П. - Конечномерный интервальный анализ.

[4] Тодорова А. Д. Субдифференциальный метод Ньютона в интервальной арифметике Каухера-исследование сходимости: выпускная квалификационная работа бакалавра: направление 01.03. 02 «Прикладная математика и информатика»; образовательная программа 01.03. 02.03 «Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности». – 2021.