第七周作业

1. 耦合谐振子的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2m}(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2) + \lambda\hat{x}_1\hat{x}_2,$$

其中

$$\hat{p}_1 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad \hat{p}_2 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_2}.$$

x_1, p_1和x_2, p_2分属于不同的自由度。设$\lambda < m\omega^2$，试求这耦合谐振子的能级。提示：对于耦合谐振子，可以用坐标变换的办法将问题化成两个独立的一维谐振子问题。

2. 在上题中，没有耦合项$\lambda\hat{x}_1\hat{x}_2$时，自由振子本征态记为$\psi_{n_1n_2}(x_1, x_2) = \psi_{n_1}(x_1)\psi_{n_2}(x_2)$，其中$n_1, n_2 = 0,1,2,\cdots$，$\psi_n(x)$为一维谐振子的能量本征函数。耦合振子本征态记为$\psi_{N_1N_2}(y_1, y_2)$，其中$N_1, N_2 = 0,1,2,\cdots$，$y_1, y_2$为变换后的坐标。试对于$\psi_{N_1N_2}$态计算$\hat{n}_1, \hat{n}_2$的平均值。