第九周作业

1. 若算符$\hat{B}$与$[\hat{A},\hat{B}]$对易，证明

$$[\hat{A},\hat{B}^n]=n\hat{B}^{n-1}[\hat{A},\hat{B}].$$

2. 证明

$$\hat{A}^n\hat{B}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}[\hat{A}^{(i)},\hat{B}]\hat{A}^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!\,i!}[\hat{A}^{(i)},\hat{B}]\hat{A}^{n-i},$$

其中$[\hat{A}^{(0)},\hat{B}]=\hat{B}$, $[\hat{A}^{(1)},\hat{B}]=[\hat{A},\hat{B}]$, $[\hat{A}^{(n+1)},\hat{B}]=\left[\hat{A},[\hat{A}^{(n)},\hat{B}]\right]$。上式右端可把取和上限推至无穷，由于$m!$当$m<0$时定义为$\infty$，$i$的上限实际上仍是$n$。
提示：用数学归纳法，从$n=1$开始，证明上式若对n成立，对$n+1$亦成立。

3. 证明无穷级数

$$\begin{aligned}e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}}&=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}[\hat{A}^{(i)},\hat{B}]\\&=\hat{B}+[\hat{A},\hat{B}]+\frac{1}{2!}\left[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]\right]+\frac{1}{3!}\left[\hat{A},\left[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]\right]\right]+\cdots.\end{aligned}$$

提示：可利用公式

$$\hat{A}^n\hat{B}=\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!\,i!}[\hat{A}^{(i)},\hat{B}]\hat{A}^{n-i}.$$