第十一周作业

1. 我们用$|\varphi_n\rangle$表示厄米算符H的本征态（譬如，H可以是任何物理体系的哈密顿算符），假设全体$|\varphi_n\rangle$构成一个离散的正交归一基。算符$U(m,n)$定义是
$$U(m,n) = |\varphi_m\rangle\langle\varphi_n|,$$
   a. 计算$U(m,n)$的伴随算符$U^\dagger(m,n)$，
   b. 计算对易子$[H, U(m,n)]$，
   c. 证明：
$$U(m,n)U^\dagger(p,q) = \delta_{n,q}U(m,p),$$
   d. 计算算符$U(m,n)$的迹$\mathrm{Tr}\{U(m,n)\}$,
   e. 设A是一个算符，它的矩阵元是$A_{mn} = \langle\varphi_m|A|\varphi_n\rangle$；试证：
$$A = \sum_{m,n} A_{mn}U(m,n),$$
   f. 试证：$A_{pq} = \mathrm{Tr}\{AU^\dagger(p,q)\}$。

2. 在一个二维矢量空间中，考虑这样一个算符，它在正交归一基$\{|1\rangle, |2\rangle\}$中的矩阵为：
$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$
   a. σ_y是厄米算符吗？试计算它的本征值和本征矢（要给出它们在基$\{|1\rangle, |2\rangle\}$中的已归一化的展开式）。
   b. 计算在这些本征矢上的投影算符的矩阵，然后证明它们满足正交归一关系式和封闭性关系式。
   c. 同样是上面这些问题，但矩阵为三维空间的矩阵
$$L_y = \frac{\hbar}{2i}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

3. 矩阵σ_x的定义为：
$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
   试证：
$$e^{i\alpha\ _x} = I\cos\alpha + i\sigma_x\sin\alpha,$$
   其中I是2×2单位矩阵。