第四周作业

1. 证明对易关系恒等式

$$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}+\hat{B}[\hat{A},\hat{C}],$$

$$[\hat{A}\hat{B},\hat{C}]=[\hat{A},\hat{C}]\hat{B}+\hat{A}[\hat{B},\hat{C}].$$

证明

$$\begin{aligned}[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]&=\hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{B}\hat{C}\hat{A}\\&=\hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{B}\hat{A}\hat{C}+\hat{B}\hat{A}\hat{C}-\hat{B}\hat{C}\hat{A}\\&=[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}+\hat{B}[\hat{A},\hat{C}].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\hat{A}\hat{B},\hat{C}]&=\hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{C}\hat{A}\hat{B}\\&=\hat{A}\hat{B}\hat{C}-\hat{A}\hat{C}\hat{B}+\hat{A}\hat{C}\hat{B}-\hat{C}\hat{A}\hat{B}\\&=[\hat{A},\hat{C}]\hat{B}+\hat{A}[\hat{B},\hat{C}].\end{aligned}$$

2. 证明对易关系$[\boldsymbol{p},F(\boldsymbol{r})]=-i\hbar\nabla F$。

证明

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{p},F(\boldsymbol{r})]\Psi&=-i\hbar\nabla(F\Psi)+Fi\hbar\nabla\Psi\\&=-i\hbar\nabla F\Psi-Fi\hbar\nabla\Psi+Fi\hbar\nabla\Psi\\&=-\,i\hbar\nabla F\Psi,\\ [\boldsymbol{p},F(\boldsymbol{r})]&=-i\hbar\nabla F.\end{aligned}$$

3. 证明

定理 1　厄米算符的本征值必为实数。

定理 2　厄米算符的对应于不同本征值的本征函数，彼此正交。

证明　　当体系处于厄米算符$\hat{O}$的本征态ψ_n时，测量O的平均值即为本征值O_n，

$$\hat{O}\psi_n=O_n\psi_n,$$

$$\bar{O}=(\psi_n,\hat{O}\psi_n)=O_n(\psi_n,\psi_n)=O_n.$$

根据

$$\bar{O}=(\psi,\hat{O}\psi)=(\hat{O}\psi,\psi)=(\psi,\hat{O}\psi)^*=\bar{O}^*,$$

即厄米算符在任何状态下的平均值都为实数。所以在ψ_n态下平均值也必为实数，即厄米算符的本征值必为实数，定理 1 得证。

设ψ_n和ψ_m分别时厄米算符$\hat{O}$的本征值为O_n和O_m的本征函数

$$\hat{O}\psi_n=O_n\psi_n,$$
$$\hat{O}\psi_m=O_m\psi_m,$$

并设(ψ_n,ψ_m)存在。利用$O_m^*=O_m$，取复共轭，右乘ψ_n积分得

$$\hat{O}^*\psi_m^*=O_m^*\psi_m^*=O_m\psi_m^*,$$

$$\left(\hat{O}\psi_m,\psi_n\right)=O_m(\psi_m,\psi_n).$$

利用厄米算符特性

$$\left(\hat{O}\psi_m,\psi_n\right)=\left(\psi_m,\hat{O}^\dagger\psi_n\right)=\left(\psi_m,\hat{O}\psi_n\right)=O_n(\psi_m,\psi_n),$$

两式相减可得

$$(O_m-O_n)(\psi_m,\psi_n)=0.$$

因此，如两个本征值不同，$O_m\neq O_n$，则必须$(\psi_m,\psi_n)=0$，定理 2 得证。

4. 求角动量的z分量$\hat{l}_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$的本征函数。

提示：当绕z轴旋转一圈后，$\varphi\to\varphi+2\pi$，粒子回到原来位置。作为一个力学量所相应的算符，$\hat{l}_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$必须为厄米算符。为了保证其厄米性，要求波函数满足周期性条件（或称为单值条件），

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi).$$

解　本征方程为

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi=l_z'\Phi,$$

$$\frac{\partial\ln\Phi}{\partial\varphi}=\frac{il_z'}{\hbar},$$

易于解出

$$\Phi(\varphi)=C\exp(il_z'\varphi/\hbar).$$

C为积分常数，可由归一化条件定之。当绕z轴旋转一圈后，波函数满足周期性条件

$$\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi),$$

$$l_z'=m\hbar,\qquad m=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

即角动量z分量的本征值是量子化的。相应本征函数记为

$$\Phi_m(\varphi)=Ce^{im\varphi}.$$

利用归一化条件

$$\int_0^{2\pi}|\Phi_m(\varphi)|^2\mathrm{d}\varphi=2\pi|C|^2=1,$$

通常取C为正实数，可得归一化波函数为

$$\Phi_m(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}.$$

容易证明本征函数的正交归一性

$$(\Phi_m,\Phi_n)=\int_0^{2\pi}\Phi_m^*(\varphi)\Phi_n(\varphi)\mathrm{d}\varphi=\delta_{mn}.$$