

第八周作业

1. 假设势场是一系列狄拉克函数峰（狄拉克梳），

$$V(x) = Q \sum_{j=0}^{N-1} \delta(x - ja).$$

$0 < x < a$ 内势能为零，薛定谔方程的一般解为

$$\psi(x) = A \sin(\alpha x) + B \cos(\alpha x), \quad \alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

根据布洛赫定理，紧邻原点左侧晶胞的波函数为

$$\psi(x) = e^{-ika} [A \sin \alpha(x + a) + B \cos \alpha(x + a)], \quad -a < x < 0.$$

由 $x = 0$ 处波函数的连续条件可得

$$A \sin(\alpha a) = [e^{ika} - \cos(\alpha a)] B.$$

利用上式，证明处于周期性狄拉克函数势中的一个粒子的波函数可以写为

$$\psi(x) = C [\sin(\alpha x) + e^{-ik} \sin \alpha(a - x)], \quad 0 \leq x \leq a.$$

（不要求出归一化常数 C 的具体值。）

2. 确定上述周期性狄拉克函数势中粒子能量的方程为

$$\cos(ka) = \cos(\alpha a) + P \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a},$$

其中 $P = mQa/\hbar^2$ 。常数 P 是表征狄拉克函数强度的一个无量纲的量。找出 $P = 10$ 时，第一允带底端的能量大小，精确到千分位。为了便于讨论，令 $Q/a = 1\text{eV}$ 。