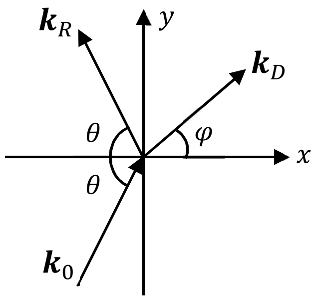
第三周作业

1. 能量为E的平行粒子束以入射角θ射向平面$x=0$，如图所示，在区域$x<0, V=0$；在区域$x>0, V=-V_0$。试分析粒子束的反射和折射规律，将结果用入射角θ和折射率$n=(1+V_0/E)^{1/2}$表示。
   提示：显然，入射、反射、折射粒子束均可用平面波表示，
   取入射面为x-y平面，可以表示成
   入射波　　$\psi_0 = e^{i\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{r}} = e^{i(k_1x+k_2y)}$,
   反射波　　$\psi_R = Re^{i\boldsymbol{k}_R\cdot\boldsymbol{r}}$,
   折射波　　$\psi_D = De^{i\boldsymbol{k}_D\cdot\boldsymbol{r}}$,
   求解$\boldsymbol{k}_R, \boldsymbol{k}_D, R, D$。
   根据公式$j_x = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)$,



   计算反射流量/入射流量，折射流量/入射流量，并分析正入射时的情况。

2. 质量为m的粒子在势场$V(x)$中作一维运动。试证明，对于能量本征态（限于束缚态）ψ_n（能级E_n），以下平均值公式成立：
$$\langle T\rangle_n = \left\langle\frac{p^2}{2m}\right\rangle_n = \frac{1}{2}\left\langle x\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right\rangle_n, \qquad \left\langle\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right\rangle_n = 0.$$
   第一式即一维“位力定理”。
   注：$\langle T\rangle_n = \left\langle\frac{p^2}{2m}\right\rangle_n = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_n\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\right)\psi_n\mathrm{d}x$, $\left\langle\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right\rangle_n = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$

3. 对于一维自由粒子，设$\psi(x,0) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{1/2}}\exp(ip_0x/\hbar)$，求$\psi(x,t)$。

4. 对于一维自由粒子，设$\psi(x,0)=\delta(x)$，求$|\psi(x,t)|^2$。
   提示：利用 Fresnel 积分公式
$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\sin(\xi^2)\,\mathrm{d}\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$
   或
$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(i\xi^2)\,\mathrm{d}\xi = \sqrt{\pi}\exp(i\pi/4).$$