第九周作业答案

1. 若算符$\hat{B}$与$[\hat{A},\hat{B}]$对易，证明

$$[\hat{A},\hat{B}^n]=n\hat{B}^{n-1}[\hat{A},\hat{B}].$$

证明　因为$\hat{B}$与$[\hat{A},\hat{B}]$对易，有

$$[\hat{A},\hat{B}]\hat{B}=\hat{B}[\hat{A},\hat{B}],$$

$$[\hat{A},\hat{B}]\hat{B}^2=\hat{B}[\hat{A},\hat{B}]\hat{B}=\hat{B}^2[\hat{A},\hat{B}],$$

以此类推，

$$[\hat{A},\hat{B}]\hat{B}^m=\hat{B}^m[\hat{A},\hat{B}].$$

根据恒等式$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}+\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]$，

$$\begin{aligned}
[\hat{A},\hat{B}^n]&=[\hat{A},\hat{B}^{n-1}\hat{B}]=[\hat{A},\hat{B}^{n-1}]\hat{B}+\hat{B}^{n-1}[\hat{A},\hat{B}]\\
&=([\hat{A},\hat{B}^{n-2}]\hat{B}+\hat{B}^{n-2}[\hat{A},\hat{B}])\hat{B}+\hat{B}^{n-1}[\hat{A},\hat{B}]\\
&=[\hat{A},\hat{B}^{n-2}]\hat{B}^2+\hat{B}^{n-2}\hat{B}[\hat{A},\hat{B}]+\hat{B}^{n-1}[\hat{A},\hat{B}]\\
&=[\hat{A},\hat{B}^{n-2}]\hat{B}^2+2\hat{B}^{n-1}[\hat{A},\hat{B}]\\
&=[\hat{A},\hat{B}^{n-3}]\hat{B}^3+\hat{B}^{n-3}[\hat{A},\hat{B}]\hat{B}^2+2\hat{B}^{n-1}[\hat{A},\hat{B}]\\
&=[\hat{A},\hat{B}^{n-3}]\hat{B}^3+3\hat{B}^{n-1}[\hat{A},\hat{B}],
\end{aligned}$$

以此类推，

$$\begin{aligned}
[\hat{A},\hat{B}^n]&=[\hat{A},\hat{B}]\hat{B}^{n-1}+(n-1)\hat{B}^{n-1}[\hat{A},\hat{B}]\\
&=n\hat{B}^{n-1}[\hat{A},\hat{B}].
\end{aligned}$$

2. 证明

$$\hat{A}^n\hat{B}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}[\hat{A}^{(i)},\hat{B}]\hat{A}^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!\,i!}[\hat{A}^{(i)},\hat{B}]\hat{A}^{n-i},$$

其中$[\hat{A}^{(0)},\hat{B}]=\hat{B}$, $[\hat{A}^{(1)},\hat{B}]=[\hat{A},\hat{B}]$, $[\hat{A}^{(n+1)},\hat{B}]=\left[\hat{A},[\hat{A}^{(n)},\hat{B}]\right]$。上式右端可把取和上限推至无穷，由于$m!$当$m<0$时定义为$\infty$，$i$的上限实际上仍是$n$。
提示：用数学归纳法，从$n=1$开始，证明上式若对n成立，对$n+1$亦成立。

证明　用数学归纳法证明，当$n=1$时上式为

$$\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A} + [\hat{A}, \hat{B}],$$

原式成立。假设对于n原式成立，推导用$n+1$代替n的同样形式的式子。

$$\hat{A}^{n+1}\hat{B} = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!\,i!} \hat{A}[\hat{A}^{(i)}, \hat{B}]\hat{A}^{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!\,i!} \left(\left[\hat{A}, [\hat{A}^{(i)}, \hat{B}]\right] + [\hat{A}^{(i)}, \hat{B}]\hat{A} \right) \hat{A}^{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!\,i!} [\hat{A}^{(i+1)}, \hat{B}]\hat{A}^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!\,i!} [\hat{A}^{(i)}, \hat{B}]\hat{A}^{n+1-i}$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{n!}{(n+1-j)!\,(j-1)!} [\hat{A}^{(j)}, \hat{B}]\hat{A}^{n+1-j} + \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!\,i!} [\hat{A}^{(i)}, \hat{B}]\hat{A}^{n+1-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \frac{n!\,[i + (n+1-i)]}{(n+1-i)!\,i!} [\hat{A}^{(i)}, \hat{B}]\hat{A}^{n+1-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{(n+1-i)!\,i!} [\hat{A}^{(i)}, \hat{B}]\hat{A}^{n+1-i}.$$

这是与原式完全相同的形式，这说明原式若对n成立，对$n+1$亦必成立。由于我们已经证明原式对$n=1$成立，因此原式对任何整数n都成立。

3. 证明无穷级数

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} [\hat{A}^{(i)}, \hat{B}]$$

$$= \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}\left[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]\right] + \frac{1}{3!}\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]\right]\right] + \cdots.$$

提示：可利用公式

$$\hat{A}^n\hat{B} = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!\,i!} [\hat{A}^{(i)}, \hat{B}]\hat{A}^{n-i}.$$

证明　　利用上题公式有

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{A}^n\hat{B} \right) e^{-\hat{A}}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!\,i!} [\hat{A}^{(i)}, \hat{B}]\hat{A}^{n-i} \right] e^{-\hat{A}}$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} [\hat{A}^{(i)}, \hat{B}] \sum_{n=i}^{\infty} \frac{1}{(n-i)!} \hat{A}^{n-i} \right] e^{-\hat{A}}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left[\hat{A}^{(i)}, \hat{B}\right] \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \hat{A}^{n} \right) e^{-\hat{A}}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left[\hat{A}^{(i)}, \hat{B}\right].$$