第十三周作业答案

1. 在一维的问题中，考虑一个质量为m的粒子，它的波函数在时刻t为$\psi(x,t)$。
   a. 设想在时刻t测量粒子到原点O的距离d。试以$\psi(x,t)$的函数来表示测得的结果大于给定长度d_0的概率$\mathbf{P}(d_0)$。求$\mathbf{P}(d_0)$在$d_0\to 0$及$d_0\to\infty$时的极限。
   b. 不作 a 中的测量，而测粒子在时刻t的速度v。试以$\psi(x,t)$的函数来表示测得的结果大于给定值v_0的概率。

解：

a.

$$\mathbf{P}(d_0)=\int_{d_0}^{\infty}\mathrm{d}\mathbf{P}(x)+\int_{-\infty}^{-d_0}\mathrm{d}\mathbf{P}(x)$$

$$=\int_{d_0}^{\infty}|\langle x|\psi\rangle|^2\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{-d_0}|\langle x|\psi\rangle|^2\mathrm{d}x$$

$$=\int_{d_0}^{\infty}|\psi(x,t)|^2\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{-d_0}|\psi(x,t)|^2\mathrm{d}x\,,$$

$$d_0\to 0,\qquad \mathbf{P}(d_0)\to\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x,t)|^2\mathrm{d}x=1,$$

$$d_0\to\infty,\qquad \mathbf{P}(d_0)\to 0.$$

b. 速度v对应的观察算符为P/m,

$$|\psi\rangle=\int\mathrm{d}p|p\rangle\langle p|\psi\rangle=\int\mathrm{d}v\sqrt{m}|p\rangle\sqrt{m}\langle p|\psi\rangle\,,$$

$$m\langle p|p'\rangle=\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}x\frac{m}{\hbar}e^{ix(p'-p)/\hbar}=\delta(v'-v),$$

$$\mathrm{d}\mathbf{P}(v)=\rho(v)\mathrm{d}v=m|\langle p|\psi\rangle|^2\mathrm{d}v,\qquad p=mv,$$

$$\mathbf{P}(v_0)=\int_{v_0}^{\infty}\mathrm{d}\mathbf{P}(v)+\int_{-\infty}^{-v_0}\mathrm{d}\mathbf{P}(v)$$

$$=\int_{v_0}^{\infty}m|\langle p|\psi\rangle|^2\mathrm{d}v\;+\int_{-\infty}^{-v_0}m|\langle p|\psi\rangle|^2\mathrm{d}v$$

$$=\int_{mv_0}^{\infty}\left|\bar{\psi}(p)\right|^2\mathrm{d}p\;+\int_{-\infty}^{-mv_0}\left|\bar{\psi}(p)\right|^2\mathrm{d}p.$$