第二周习题

1. 设$V(-x)=V(x)$，则对应于任何一个能量本征值E，总可以找到方程$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V(\boldsymbol{r})\psi=E\psi$的一组完备的解，它们中每一个都具有确定的宇称（奇偶性）。（注意，每一个解的宇称并不一定相同。）

2. 设粒子限制在一维无限深势阱中运动，
$$V(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le a\\ \infty, & x<0,x>a\end{cases}$$
解的形式为
$$\psi(x)=A\sin kx+B\cos kx\,,k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}},$$
由$x=0$和$x=a$处的边界条件可得$B=0,k_n=\frac{n\pi}{a},n=1,2,3,\cdots$，确定定态波函数中系数$A$的值。

3. 设粒子限制在二维无限深势阱中运动，
$$V(x,y)=\begin{cases}0, & 0<x<a,0<y<b\\ \infty, & \text{其他地方}\end{cases}$$
求粒子能量允许值和相应的波函数。
提示：二维无限深势阱可改写为
$$V(x,y)=V_a(x)+V_b(y),$$
$$V_a(x)=\begin{cases}0, & 0\le x\le a\\ \infty, & x<0,x>a\end{cases}, \quad V_b(y)=\begin{cases}0, & 0\le y\le b\\ \infty, & y<0,y>b\end{cases}$$
然后用分离变量法求解。

4. 利用 Hermite 多项式$H_n(\xi)=(-1)^n e^{\xi^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n}e^{-\xi^2}$的递推关系
$$H_{n+1}(\xi)-2\xi H_n(\xi)+2nH_{n-1}(\xi)=0,$$
求证
$$x\psi_n(x)=\frac{1}{\alpha}\left[\sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(x)+\sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(x)\right],$$
$$x^2\psi_n(x)=\frac{1}{2\alpha^2}\left[\sqrt{n(n-1)}\psi_{n-2}+(2n+1)\psi_n+\sqrt{(n+1)(n+2)}\psi_{n+2}\right].$$
（由此可证明（选做，+2 分）：在ψ_n态下，谐振子的$\bar{x}=0$，$\bar{V}=E_n/2$。）