

第十二周作业

1. 在一个一维的问题中，一个粒子的哈密顿量算符为

$$H = \frac{1}{2m}P^2 + V(x),$$

算符 X 和 P 满足关系式 $[X, P] = i\hbar$ 。 H 的本征矢用 $|\varphi_n\rangle$ 表示，即有 $H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$ ，其中 n 是离散指标。

- a. 试证

$$\langle \varphi_n | P | \varphi_{n'} \rangle = \alpha \langle \varphi_n | X | \varphi_{n'} \rangle,$$

式中的 α 是一个只依赖于 E_n 与 $E_{n'}$ 之差的系数。试求 α （提示：考虑对易子 $[X, H]$ ）。

- b. 利用封闭性关系式，从上面的结果导出：

$$\sum_{n'} (E_n - E_{n'})^2 |\langle \varphi_n | X | \varphi_{n'} \rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{m^2} \langle \varphi_n | P^2 | \varphi_n \rangle.$$