

# **Отчёт по лабораторной работе №5**

**Модель хищник-жертва. Вариант №38**

Павлова Полина Алексеевна

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цель работы</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Теоретическое введение</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Задачи</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Задание</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Выполнение лабораторной работы</b>	<b>10</b>
5.1	Построение математической модели. Решение с помощью программ	10
5.1.1	Julia . . . . .	10
5.1.2	Результаты работы кода на Julia . . . . .	13
5.2	OpenModelica . . . . .	14
5.2.1	Результаты работы кода на OpenModelica . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Анализ полученных результатов. Сравнение языков.</b>	<b>17</b>
<b>7</b>	<b>Вывод</b>	<b>18</b>
<b>8</b>	<b>Список литературы. Библиография</b>	<b>19</b>

## Список иллюстраций

5.1	График численности хищников от численности жертв . . . . .	13
5.2	График численности жертв и хищников от времени . . . . .	13
5.3	Стационарное состояние . . . . .	14
5.4	График численности хищников от численности жертв . . . . .	15
5.5	График численности жертв и хищников от времени . . . . .	15
5.6	Стационарное состояние . . . . .	16

## **Список таблиц**

# 1 Цель работы

Изучить жесткую модель хищник-жертва и построить эту модель.

## 2 Теоретическое введение

- Модель Лотки—Вольтерры — модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва», названная в честь её авторов, которые предложили модельные уравнения независимо друг от друга. Такие уравнения можно использовать для моделирования систем «хищник — жертва», «паразит — хозяин», конкуренции и других видов взаимодействия между двумя видами. [4]

Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях [4]:

1. Численность популяции жертв  $x$  и хищников  $y$  зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (-ax(t) + by(t)x(t)) \\ \frac{dy}{dt} = (cy(t) - dy(t)x(t)) \end{cases}$$

В этой модели  $x$  – число жертв,  $y$  – число хищников. Коэффициент  $a$  описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников,  $-b$  – естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников ( $xy$ ). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены  $-bxy$  и  $dxy$  в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жёсткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени такая система вернётся в изначальное состояние.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решения) будет находиться в точке  $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$ . Если начальные значения задать в стационарном состоянии  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ , то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей  $x(0), y(0)$ . Колебания совершаются в противофазе.

## 3 Задачи

1. Построить график зависимости численности хищников от численности жертв
2. Построить график зависимости численности хищников и численности жертв от времени
3. Найти стационарное состояние системы



## 4 Задание

Вариант 38:

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.7x(t) + 0.06y(t)x(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.6y(t) - 0.07y(t)x(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях:  $x_0 = 8$ ,  $y_0 = 15$  Найдите стационарное состояние системы.

## 5 Выполнение лабораторной работы

### 5.1 Построение математической модели. Решение с помощью программ

#### 5.1.1 Julia

Код программы для нестационарного состояния:

```
using Plots
using DifferentialEquations

x0 = 8
y0 = 15

a = 0.7
b = 0.06
c = 0.6
d = 0.07

function hunt(du, u ,p ,t)
    x,y = u
    du[1] = -a*u[1] + b*u[1] * u[2]
    du[2] = c*u[2] - d*u[1] * u[2]
end
```

```

v0 = [x0,y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(hunt, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(dpi=300, legend=false)
plot!(plt,X,Y,color=:blue)
savefig(plt,"lab5_1.png")

plt2 = plot(dpi=300, legend=true)
plot!(plt2,T,X,label="Численность жертв",color=:red)
plot!(plt2,T,Y,label="Численность хищников",color=:green)
savefig(plt2,"lab5_2.png")

```

Код программы для стационарного состояния:

```

using Plots
using DifferentialEquations

a = 0.7
b = 0.06
c = 0.6
d = 0.07

x0 = c / d
y0 = a / b

```

```

function hunt(du, u ,p ,t)
    x,y = u
    du[1] = -a*u[1] + b*u[1] * u[2]
    du[2] = c*u[2] - d*u[1] * u[2]
end

v0 = [x0,y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(hunt, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt2 = plot(dpi=300, legend=true)
plot!(plt2,T,X,label="Численность жертв",color=:red)
plot!(plt2,T,Y,label="Численность хищников",color=:green)
savefig(plt2,"lab5_3.png")

```

В стационарном состоянии решение вида  $y(x) = \textit{some function}$  будет представлять собой точку.

### 5.1.2 Результаты работы кода на Julia

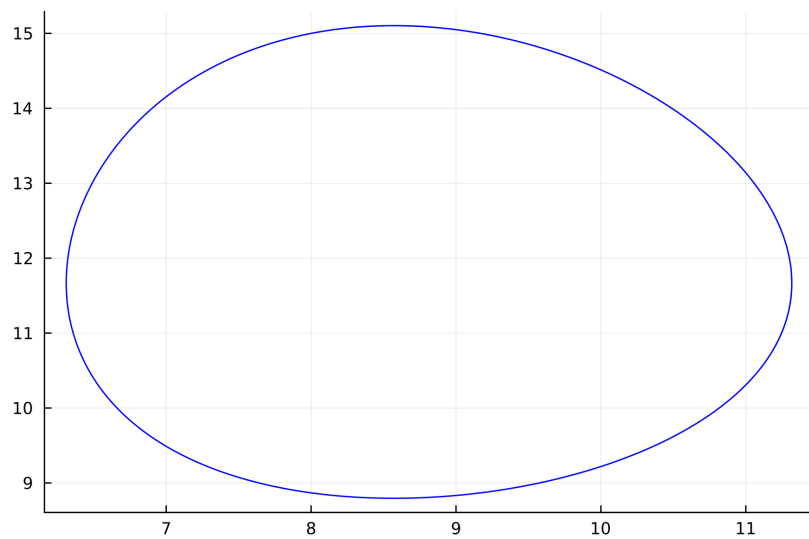


Рис. 5.1: График численности хищников от численности жертв

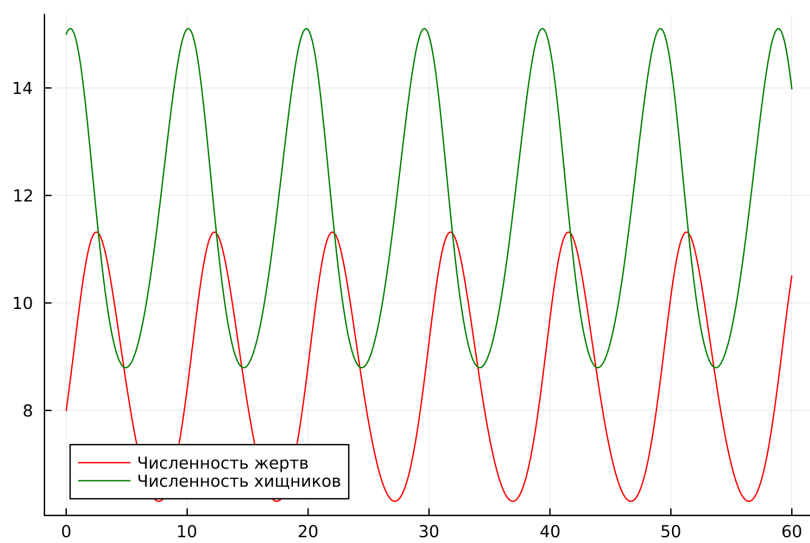


Рис. 5.2: График численности жертв и хищников от времени

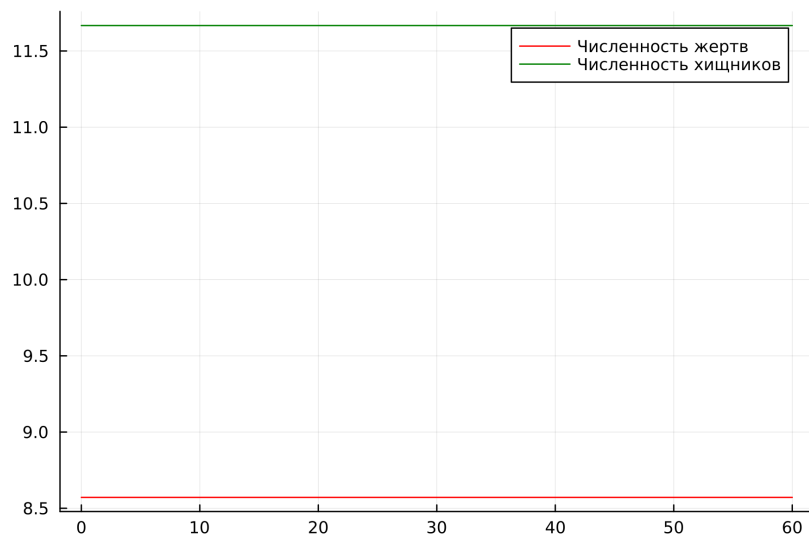


Рис. 5.3: Стационарное состояние

## 5.2 OpenModelica

Код программы для нестационарного состояния:

```
model lab5_1
  Real a = 0.7;
  Real b = 0.06;
  Real c = 0.6;
  Real d = 0.07;
  Real x;
  Real y;
  initial equation
  x = 8;
  y = 15;
  equation
  der(x) = -a*x + b*x*y;
  der(y) = c*y - d*x*y;
```

```
end lab5_1;
```

Код программы для стационарного состояния:

```
model lab5_2
Real a = 0.7;
Real b = 0.06;
Real c = 0.6;
Real d = 0.07;
Real x;
Real y;
initial equation
x = c / d;
y = a / b;
equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y - d*x*y;
end lab5_2;
```

В стационарном состоянии решение вида  $y(x) = \text{some function}$  будет представлять собой точку.

### 5.2.1 Результаты работы кода на OpenModelica

График численности хищников от численности жертв

Рис. 5.4: График численности хищников от численности жертв

График численности жертв и хищников от времени

Рис. 5.5: График численности жертв и хищников от времени

Стационарное состояние

Рис. 5.6: Стационарное состояние



## **6 Анализ полученных результатов.**

### **Сравнение языков.**

В итоге проделанной работы мы построили график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв на языках Julia и OpenModelica. Построение модели хищник-жертва на языке openModelica занимает меньше строк, чем аналогичное построение на Julia.

## 7 Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель хищник-жертва и построена модель на языках Julia и Open Modelica.

## 8 Список литературы. Библиография

- [1] Документация по Julia: <https://docs.julialang.org/en/v1/>
- [2] Документация по OpenModelica: <https://openmodelica.org/>
- [3] Решение дифференциальных уравнений: <https://www.wolframalpha.com/>
- [4] Модель Лотки—Вольтерры: <https://math-it.petrus.ru/users/semenova/MathECO/Lectures/L>