A thick black L-shaped frame is positioned on the left and bottom edges of the slide, framing the content.

Conceptos Fundamentales e Interés

Docente: Hernán Montes

Definiciones

- Interés: inversionista, acreedor – prestatario.
 - $i = VF - VP$.
- Capital = Valor presente o actual.
- Inflación.
- Valor futuro o valor del dinero en el tiempo
- Tasa de interés “deben estar en función del periodo en el cual se trabaja, el tiempo de transacciones financieras” (Álvarez, 1999, p. 34)
- Tasa de interés: “Rentabilidad de la inversión de un activo financiero”. (Álvarez Benitez, 2014, p. 20)
- Tasa pasiva o de captación
- Tasa activa o de colocación.
- Margen de intermediación financiero.

Variables a utilizar

- **Vp = Valor presente:** Es el dinero o capital que se invierte al comienzo de una operación financiera.
- **n = Plazo, tiempo o período:** Son las unidades de tiempo que transcurren durante la operación financiera, se conoce como plazo y puede expresarse en cualquier unidad; días, semanas, meses, etc
- **I = Interés:** Es la retribución que reciben los inversionistas y prestamistas por ceder el uso del dinero, o el costo que pagan los prestatarios por utilizar el dinero o capital ajeno y se expresa en valor absoluto (\$).

Variables a utilizar

- **Vf = Valor Futuro:** Es el monto que se recibe o se paga al finalizar la operación financiera, y es igual al valor inicial más los intereses.
- **i = Tasa de interés:** Es el costo del dinero en términos porcentuales. Resulta de la relación matemática que existe entre el monto del interés que se retribuye al capital y el monto del capital invertido inicialmente.

Definición interés simple: interés

- **Interés simple:** los intereses liquidados no se suman periódicamente al capital.

Ejemplo.

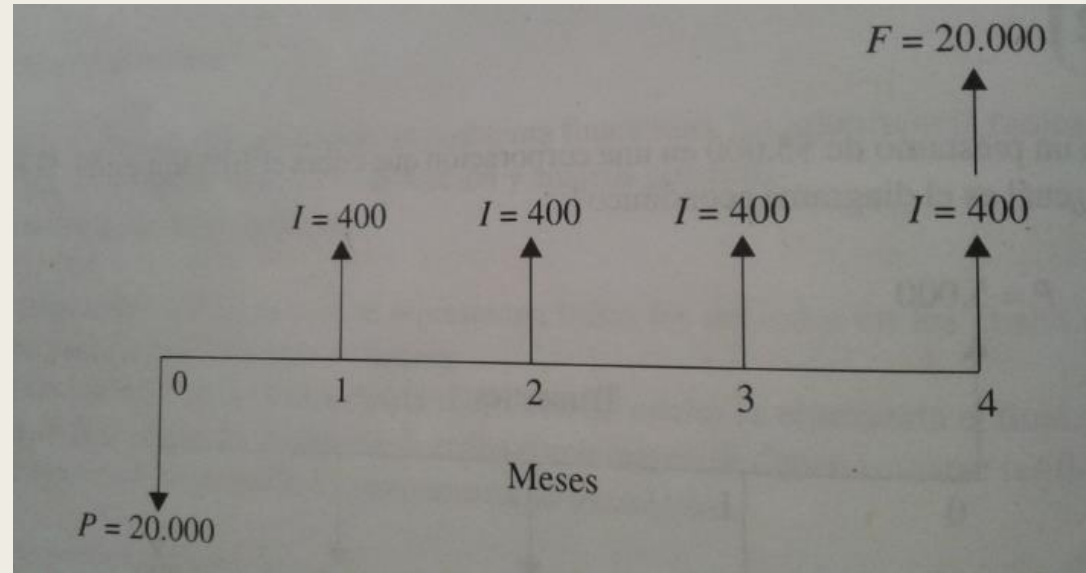
El Banco Popular otorga un crédito de \$20,000 a 4 meses y a una tasa del 24% anual.

¿qué interés simple se paga mensualmente? ¿cuál es el valor total que se paga en intereses?

$$V_p = \$20,000$$

$$i = 0,24 \text{ anual}$$

$$n = 4 \text{ meses.}$$



Interés mensual = tasa anual / número de meses de un año = $0,24 / 12 = 0,02$ mensual

$$I = V_p * i = \$20,000 * 0,02 = 400 \text{ mensual}$$

$$I = V_p * i * n = 400 * 4 = 1,600$$

De la expresión anterior se puede encontrar V_p , i , n

(Álvarez, 1999, p. 35)

Valor futuro de un interés simple

- Valor futuro, monto (M) o valor del dinero en el tiempo.

$$V_f = V_p + I$$

$$I = V_p * i * n$$

$$V_f = V_p + V_p * i * n$$

$V_f = V_p(1 + i * n)$ Esto sale por factor común

- Calcule el Valor futuro del problema anterior, Rta.
21,600

- De la expresión de valor futuro se puede calcular

$$V_p$$

- $V_p = V_f / (1 + i * n)$

- $n = \frac{1}{i} \left[\frac{F}{P} - 1 \right]$

- $i = \frac{1}{n} \left[\frac{F}{P} - 1 \right]$

Resuelva

- Cuál es el interés a pagar si se realiza un préstamo de \$1,000,000 al 3% mensual y el plazo otorgado es de 4 meses.
- $I = \$1.000.000 * 0,03 * 4 = \120.000

Cuál es el interés a pagar por un préstamo de \$1,000,000 al 3% semestral en tres años.

- $C = \$1,000,000$ $i = 3\%$ semestral $n = 3$ años

La tasa y el tiempo están expresados en medidas distintas, por lo tanto debo cambiar el periodo n a la misma unidad de medida de la tasa i ., es decir, debo cambiar los años a semestres.

Si 1 año = 2 semestres

3 años = n

$$n = \frac{3 \text{ años} * 2 \text{ semestres}}{1 \text{ año}} = 6 \text{ semestres}$$

$I = 1.000.000 * 0.03 * 6 = \$180,000$ equivale al interés que debe pagar en 6 semestres, es decir, 3 años.

Usted invirtió \$1.000.000 en un negocio que le plantearon por lo que recibió de intereses la suma de \$300,000 en un tiempo de 3 años, 3 meses y 19 días. ¿A qué tasa de interés mensual simple le pagaron su inversión?

Todo el tiempo debe expresarse de manera mensual que es la tasa de interés que estoy buscando, por lo cual primero pasaré todo a la unidad de días y luego a meses así:

<p>Si 1 año = 360 días 3 años = n $n = \frac{3 \text{ años} * 360 \text{ días}}{1 \text{ año}}$ = 1080 días</p>	<p>Si 1 mes = 30 días 3 meses = n $n = \frac{3 \text{ meses} * 30 \text{ días}}{1 \text{ mes}}$ = 90 días</p>	19 días
n= 1080 + 90 + 19 = 1189 días	<p>Si 30 días = 1 mes 1189 días = n $n = \frac{1189 \text{ días} * 1 \text{ mes}}{30 \text{ días}} = 39,63 \text{ meses.}$</p>	

$$I = C * i * n$$

$$\$300.000 = \$1.000.000 * i * 39,63 \text{ meses}$$

$$i = 0,757\% \text{ mensual}$$

¿Qué suma se tendrá que pagar al término de 3 años, si se tomaron prestados \$1,000,000 al 3% semestral simple pagadero al vencimiento

- $n = 3$ años
- $C = VP = 1.000.000$
- $i = 3\%$ semestral
- El interés está expresado para el semestre y se pide calcular para tres años, por lo tanto debo identificar cuántos semestres hay en los tres años, es decir 6 semestres.
- $M = Vp (1+i*n) = 1.000.000 (1+0.03*6)$
- $M = 1.000.000(1+0,18)$
- $M = 1,000,000 (1,18)$
- $M = 1.180.000$

Principio de equivalencia financiera

- Tasa de interés o de oportunidad (oportunidades de inversión – TIO)
- Se invierte \$1,000,000 en una alternativa que pagará un interés anual del 35%; al final del primer año cuál será el monto del que dispondrá el inversionista? Rta. $1,000,000(1+0,35*1) = \$1,350,000$

Entonces, para el inversionista, \$1,000,000 hoy es igual o equivalente a \$1,350,000 en un año. (Serrano, 2001, p. 11)

Preguntas de análisis para determinar la equivalencia: ¿Qué debe hacer el inversionista en cada uno de los siguientes casos y por qué?

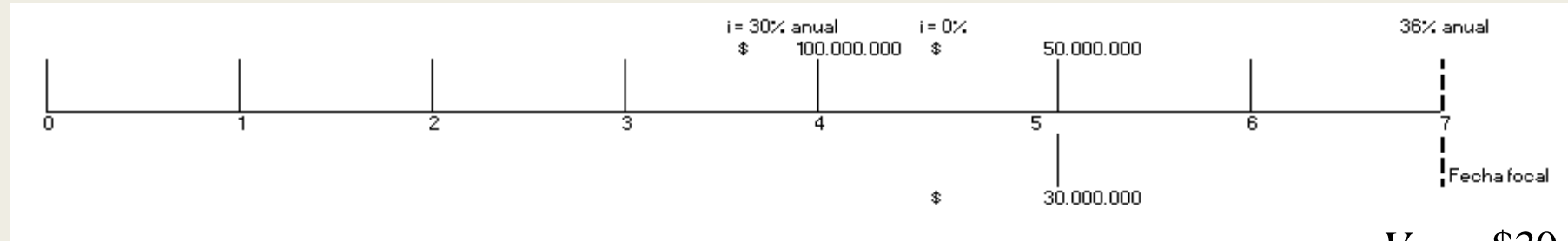
- Se le solicitarán en préstamo el \$1,000,000 y le devuelven en un año \$1,300,000 con el mismo riesgo.
- Se le solicitarán en préstamo el \$1,000,000 y le devuelven en un año \$1,400,000 con el mismo riesgo.
- Se le solicitarán en préstamo el \$1,000,000 y le devuelven en un año \$1,400,000 eliminando el mismo riesgo.

Usted tiene un cliente que le debe pagar \$100,000 hoy y \$50,000 dentro de un año, sin embargo, el cliente le solicita pagar todo junto en un año y ofrece una tasa del 14% anual. Cuál es el valor a pagar en un año?

Capital	Vencimiento	i anual	I	Vf
\$ 100.000	0 - Hoy	14%	\$ 14.000	\$ 114.000
\$ 50.000	1 Año	0%	\$ -	\$ 50.000
Total Vf				\$ 164.000

Vemos en lo anterior una **fecha focal**, es decir, cuál es la fecha de referencia comparar los ingresos con los egresos, dicha fecha focal es dentro de un año cuando vencen los \$50,000

Álvarez, 2005: una empresa le ha firmado a un banco un pagaré por \$100,000,000 a 4 meses y una tasa de interés del 30% anual. Dos meses después firma otro por \$50,000,000 a 3 meses y sin intereses. El gerente de la empresa quiere recoger estos pagarés y reemplazarlos por uno solo a 3 meses, contados a partir de la fecha de vencimiento del primer pagaré y con una tasa de interés del 36% anual. Además, entregará al banco la suma de \$30,000,000 en la fecha de vencimiento del segundo pagaré.Cuál será el valor del nuevo documento? Asuma una fecha focal en el mes séptimo e interés simple



$$Vp_1 = \$100.000.000$$

$$n_1 = 4meses \quad i_1 = 30\% anual$$

$$Vf_1 = Vp(1 + in)(1 + i_{nuevo}n_{nuevo})$$

$$Vf_1 = 100.000.000 \left(1 + \frac{0,30}{12} * 4 \right) \left(1 + \frac{0,36}{12} * 3 \right)$$

$$Vf_1 = 100.000.000 * 1,1 * 1,09$$

$$Vf_1 = 119.900.000$$

$$Vp_2 = \$50.000.000$$

$$n_2 = 3meses \quad i_1 = 0\% anual$$

$$Vf_2 = Vp(1 + in)(1 + i_{nuevo}n_{nuevo})$$

$$Vf_2 = 50.000.000(1 + 0 * 3) \left(1 + \frac{0,36}{12} * 2 \right)$$

$$Vf_2 = 50.000.000 * 1 * 1,06$$

$$Vf_2 = 53.000.000$$

$$Vp_3 = \$30.000.000$$

$$n = 2meses \quad i_1 = 36\% anual$$

$$Vf_3 = Vp(1 + in)$$

$$Vf_3 = 30.000.000 \left(1 + \frac{0,36}{12} * 2 \right)$$

$$Vf_3 = 30.000.000 * 1,06$$

$$Vf_3 = 31.800.000$$

$$Vf_1 + Vf_2 = Vf_3 + x$$

$$\text{Dónde: } x = \text{Nuevo Pagaré}$$

$$\text{Nuevo Pagaré} = 119.900.000 + 53.000.000 - 31.800.000$$

$$\text{Nuevo Pagaré} = 141.000.000$$

Definiciones de Interés Compuesto

- Es el que se aplica actualmente en el mercado, tiene como característica principal que el interés que se va generando y no es cancelado se convierte en deuda, mediante el proceso de la “**CAPITALIZACION**”.
- El capital cambia al final de “**CADA PERIODO**” debido a que los intereses generados se adicionan al capital para formar un nuevo capital sobre el cual se va a calcular los nuevos intereses.

Capitalización

Es el proceso mediante el cual los intereses que se causan, se suman al capital. La capitalización es denotada por la letra “K” y puede ser Diaria-Semanal-Quincenal-Mensual-Bimestral-Trimestral-Semestral-Anual.

Periodo de Capitalización

Es el pactado para que el interés se convierta en deuda nueva. Normalmente son mensuales o quincenales. D-SEMA-Q-M-B-T-C-S-A.

Características

- El capital inicial cambia en cada período porque los intereses que se generan se capitalizan, es decir, se convierten en deuda.
- La tasa de interés siempre se aplica sobre un capital diferente.
- Los intereses periódicos siempre serán mayores.

Variables a utilizar

VARIABLE	SIGNIFICADO	EXCEL
P	Valor presente	VA
F	Valor futuro	VF
n	Número de períodos	NPER
i	Tasa de Interés	TASA

Fórmulas básicas

$$VF = VA(1 + TASA)^{NPER} \qquad VA = \frac{VF}{(1 + TASA)^{NPER}}$$

$$I = P[(1 + i)^n - 1]$$

$$NPER = \frac{\log\left(\frac{VF}{VA}\right)}{\log(1 + TASA)} \qquad TASA = \sqrt[NPER]{\left(\frac{VF}{VA}\right)} - 1$$

Cálculo del Valor Futuro

- Usted invierte \$1,000,000 en un Banco a un interés del 36% anual con capitalización trimestral. ¿Cuál es el valor ahorrado al final del primer año?

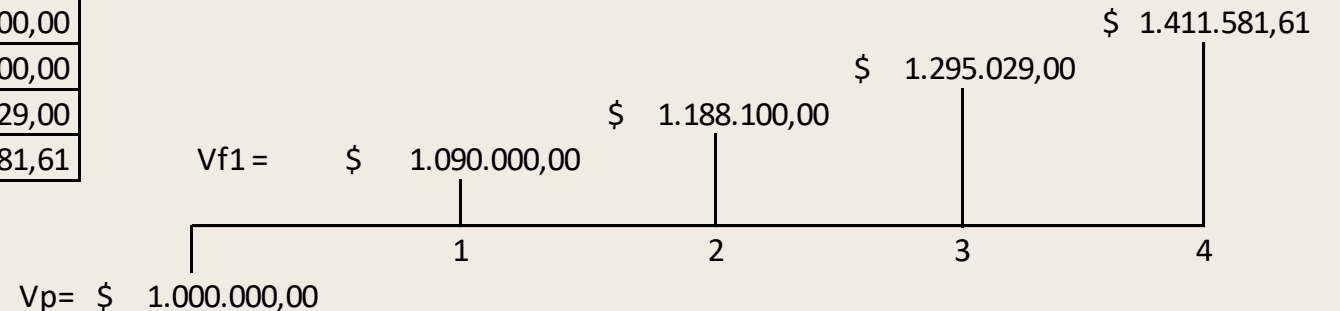
$V_p = \$1,000,000$

$i = 36\%$ anual con capitalización trimestral $n = 1$ año

Como el interés es anual pero la capitalización es trimestral, se debe identificar el i en términos trimestrales:

$i = 36\%/4$ porque en un año hay 4 trimestres. $i = 9\%$ o $0,09$

$i = 0,09$			
Periodo (n)	V_p	Intereses trimestrales (I)	VF
1	\$ 1.000.000,00	\$ 90.000,00	\$ 1.090.000,00
2	\$ 1.090.000,00	\$ 98.100,00	\$ 1.188.100,00
3	\$ 1.188.100,00	\$ 106.929,00	\$ 1.295.029,00
4	\$ 1.295.029,00	\$ 116.552,61	\$ 1.411.581,61



Entonces: n = número de periodos de capitalización.

i_t = tasa de interés trimestral

De acuerdo con la información anterior tenemos

i \$ 0,09

Periodo (n)	Vp	Interés trimestrales (I)	VF
1	\$ 1.000.000,00	\$ 90.000,00	\$ 1.090.000,00
2	\$ 1.090.000,00	\$ 98.100,00	\$ 1.188.100,00
3	\$ 1.188.100,00	\$ 106.929,00	\$ 1.295.029,00
4	\$ 1.295.029,00	\$ 116.552,61	\$ 1.411.581,61

Periodo (n)	Vp	Interés trimestrales (I)	VF	
1	Vp	$Vp \cdot i$	$Vp + Vp \cdot i$	$Vp (1+i)$
2	$Vp (1+i)$	$(Vp (1+i))i$	$Vp (1+i) + (Vp (1+i))i$	$Vp (1+i)^2$
3	$Vp (1+i)^2$	$(Vp (1+i)^2)i$	$Vp (1+i)^2 + (Vp (1+i)^2)i$	$Vp (1+i)^3$
4	$Vp (1+i)^3$	$(Vp (1+i)^3)i$	$Vp (1+i)^3 + (Vp (1+i)^3)i$	$Vp (1+i)^4$

De acuerdo con la información anterior tenemos

Según lo anterior, el valor futuro en un periodo n es igual a

$$Vf = Vp(1 + i)^n$$

$$Vf = 1,000,000 (1 + 0,09)^4$$

$$Vf = 1,000,000 (1,09)^4$$

$$Vf = 1,000,000 (1,41)$$

$$Vf = 1,411,581,61$$

Cálculo del valor presente

- El valor presente se calcula a partir del valor futuro

$$Vf = Vp(1 + i)^n$$

$$Vp = \frac{Vf}{(1 + i)^n}$$

$$Vp = \frac{1.411.581,61}{(1 + 0,09)^4}$$

$$Vp = \frac{1.411.581,61}{1,41}$$

$$Vp = 1.000.000$$

- Usted necesita \$3,000,000 dentro de 6 meses. Una corporación le ofrece el 36% anual con capitalización bimestral, ¿Cuánto debe depositar hoy para contar con dicha suma?

<u>Vf</u>	i anual	n
\$ 3.000.000,00	36%	6

- i bimestral = $0,36/6=0,06$
- n = $6/2 = 3$ en 6 meses hay 3 bimestres
- $Vp = \frac{3.000.000}{(1+0,06)^3}$
- $Vp = \frac{3.000.000}{1,19} = 2.518.857,85$

Cálculo de Tasa de Interés

- $Vf = Vp(1 + i)^n$

- $\frac{Vf}{Vp} = (1 + i)^n$

- $\sqrt[n]{\frac{Vf}{Vp}} = \sqrt[n]{(1 + i)^n}$

- $\sqrt[n]{\frac{Vf}{Vp}} = (1 + i)$

- $i = \sqrt[n]{\frac{Vf}{Vp}} - 1$

- Usted necesita \$3,000,000 dentro de 6 meses. Si usted deposita hoy 2.518.857,85 ¿cuál es la tasa bimestral que deberá pagar?
- N = 3 porque en 6 meses hay 3 bimestres

- $i = \sqrt[n]{\frac{Vf}{Vp}} - 1$

- $i = \sqrt[3]{\frac{3,000,000}{2,518,857.85}} - 1$

- $i = \sqrt[3]{\frac{3,000,000}{2,518,857.85}} - 1$

$$i = \sqrt[3]{1,19} - 1$$

$$i = 1,06 - 1$$

i = 0,06 o 6% bimestral

Cálculo de Número de Periodos

- $Vf = Vp(1 + i)^n$
- $\frac{Vf}{Vp} = (1 + i)^n$
- $\log \frac{Vf}{Vp} = n * \log(1 + i)$
- En cuanto tiempo un capital de \$2.518.857,85 se convierte en \$3,000,000 si la tasa de interés es del 6% bimestral

$$3.000.000 = 2.518.857,85(1 + 0,06)^n$$

$$\frac{3.000.000}{2.518.857,85} = (1 + 0,06)^n$$

$$1,19 = (1,06)^n$$

$$\text{Log}1,19 = n\text{Log}(1,06)$$

$$0,07592 = n * 0,02531$$

$$n = 0,07592/0,02531$$

$$n = 3 \text{ bimestres}$$

Equivalencia financiera

- Valor nominal (V_n): Valor que está escrito en un documento. En algunos casos es el **Valor futuro**.
- Valor efectivo (V_e): valor que se recibe después de haberse efectuado el respectivo descuento del valor nominal.

$$V_e = V_n - D$$

Donde:

- **D o descuento** es una modalidad de interés simple. La diferencia radica en que el interés simple por lo general se paga vencido, en tanto que el descuento se produce por anticipado. Por lo tanto, Si

$$I = V_p * i * n, \text{ entonces}$$

$$D = V_p * i * n$$

- Descuento comercial (D_c) o descuento bancario: se paga antes de su vencimiento y se calcula sobre el valor nominal

$$D_c = V_n * i * n$$

(Alvarez Arango, 2005, p. 23)

Tasa de interés de descuento compuesto (D'_c) opera con base en el interés compuesto. Si el proceso de capitalización es la suma periódica de los intereses, el descuento compuesto es lo contrario (resta)

$$\begin{aligned} V_f &= V_p(1+i)^n \\ V_n &= V_e(1+i)^n \\ V_e &= \frac{V_n}{(1+i)^n} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} D'_c &= V_n - V_e \\ D'_c &= V_n - \frac{V_n}{(1+i)^n} \end{aligned}$$

Factorizando

$$D'_c = V_n \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right)$$

Ejemplo en paralelo: usted tiene una letra de \$4,000,000 la cual estipula una tasa de descuento del 4% mensual y un vencimiento dentro de 6 meses. ¿Cuál es el descuento comercial y cuál es el valor efectivo de la letra Para interés simple ? y ¿Descuento compuesto y valor efectivo para interés compuesto?

Interés simple

- Descuento comercial

$$D_c = V_n * in$$

$$D_c = 4.000.000 * 0,04 * 6$$

$$D_c = 960.000$$

- Valor efectivo de la letra

$$V_e = V_n - D$$

$$V_e = 4.000.000 - 960.000$$

$$V_e = 3.040.000$$

Interés compuesto

- Descuento compuesto

$$D'_c = 4.000.000 \left(1 - \frac{1}{(1 + 0,04)^6} \right)$$

$$D'_c = 838.741,90$$

- Valor efectivo de la letra

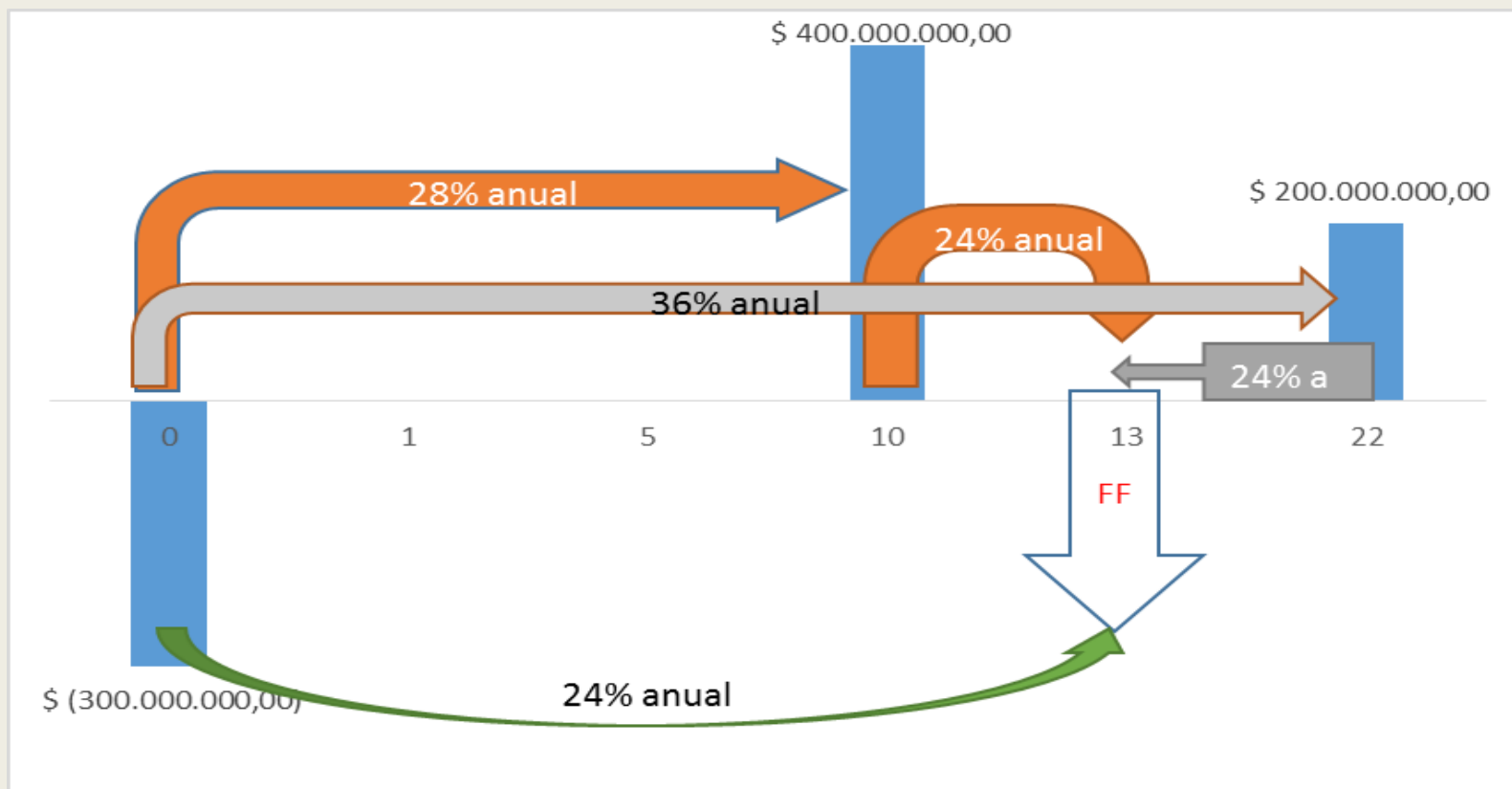
$$V_e = \frac{V_n}{(1 + i)^n} = \frac{4.000.000}{(1 + 0,04)^6}$$

$$V_e = \frac{4.000.000}{1,27} = 3.161.258,10$$

$$V_e = V_n - D'_c$$

Ecuaciones de valor: (equivalencia financiera con concepto de fecha focal)

La empresa XX le adeuda al banco YY la suma de \$600,000,000 representados en los siguientes pagarés: uno por \$400,000,000 con vencimiento en 10 meses más intereses del 28% anual, otro por \$200,000,000 con vencimiento en 22 meses más intereses del 36% anual. El gerente de la empresa quiere reestructurar sus obligaciones y acuerda con el gerente del banco pagarlas en la siguiente forma: \$300,000,000 en la fecha y el resto en 13 meses. ¿cuál será el valor de dicho pago si la tasa de interés acordada para la reestructuración fue del 24% anual? Asuma una fecha focal en el mes 13 e interés compuesto.



$$Vf_1 = Vp(1+i)^n(1+i)^n$$

$$Vf_1 = 400.000.000 \left(1 + \frac{0,28}{12}\right)^{10} \left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^3$$

$$Vf_1 = 400.000.000(1 + 0,023)^{10}(1 + 0,02)^3$$

$$Vf_1 = 400.000.000(1,023)^{10}(1,02)^3$$

$$Vf_1 = 400.000.000(1,259)(1,061)$$

$$Vf_1 = 534.603.397,18$$

Para los \$200MM: 1. se calcula el valor futuro a los 22 mese y luego se debe traer al valor presente en el mes 13

$$Vf_2 = 200.000.000 \left(1 + \frac{0,36}{12}\right)^{22} = 383.220.681,77$$

$$Vp = \frac{Vf}{(1+i)^n} = \frac{383.220.681,77}{\left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^9} = \frac{383.220.681,77}{1,195}$$

$$Vp=320,661,923,46 \text{ Este es el VF2}$$

Para los \$300 Mm solo debo llevarlos al periodo 13

$$Vf_3 = 300.000.000 \left(1 + \frac{0,24}{12}\right)^{13} = 388.081.989,14$$

$$\text{Nuevo pagaré} = 534.603.397,18$$

$$+ 320,661,923,46 - 388.081.989,14$$

$$= 467.183.331,51$$

Bibliografía

Álvarez Arango, A. (1999). *Matemáticas financieras* (Segunda ed.). Santafé de Bogotá, Colombia: MC Graw Hill. Recuperado el 07 de Julio de 2018

Álvarez Benitez, A. F. (2014). *Fundamentos generales de matemáticas financieras*. Medellín, Colombia: Centro Editorial Esumer. Recuperado el 07 de Julio de 2018

Garcia, J. A. (2008). *Matemáticas financieras con ecuaciones de diferencia finita* (Quinta ed.). Bogotá, Colombia: Pearson. Recuperado el 05 de Julio de 2018

Serrano Rodriguez, J. (2001). *Matemáticas financieras y evaluación de proyectos*. Bogotá, Colombia: Unidades Facultad de Administración Alfaomega Colombiana S.A. Recuperado el 05 de Julio de 2018