博弈论课堂笔记

联系方式：pi2008@nju.edu.cn

作业 5%（1-5 章；若两次交就是 1-3 交一次，4-5 交一次）

论文 15%（1-5 章知识，课堂上学到的某个博弈论分析框架解释现实生活或者历史上的某个现象；3000 字以上）

期末闭卷 80%（选择、判断、分析、简答、计算）

教材：《经济博弈论》（第三版），谢识予（还有习题指南）；推荐阅读：《博弈论基础》（罗伯特·吉本斯）；《策略博弈论导论》（沃森）

导论

区分四个概念：

- 完全信息：complete information；
- 完美信息：perfect information；
- 不完全信息：incomplete information；
- 不完美信息：imperfect information
- （博弈双方都了解所有信息：完全；博弈双方可以看到之前的所有博弈进程：完美）

共同特征：①规则②结果③策略选择④策略和利益相互依存

博弈论的四个经典元素：

- 博弈的参加者（Player）：博弈方
- 各个博弈方的策略（Strategies）或行为/动（Actions）
- 博弈的次序（Orders）
- 博弈方的得益/收益（Payoffs）

几个经典的博弈模型

- 囚徒困境：（对称博弈，策略离散）：可合作，只需要找到合作机制

		囚徒 2 坦白	囚徒 2 不坦白
囚徒 1	坦白	-5，-5	0，-8
囚徒 1	不坦白	-8，0	-1，-1

两个罪犯的得益矩阵（Payoff Matrix）

  - 约定：左边数字是第一个博弈方的得益，右边数字是第二个博弈方得益
  - 上策（占优策略）：dominant strategy；下策（被占优策略）：dominated strategy
  - 策略：坦白/不坦白的组合；上策：都坦白；
  - 得益：例如-5，-5；0，-8 等等
  - 结果：策略组合或者得益组合均可
  - 均衡：必须是策略组合
  - 拓展：双寡头削价竞争——价格联盟（卡特尔）

		寡头 2 高价	寡头 2 低价
寡头 1	高价	100，100	20，150
寡头 1	低价	150，20	70，70

双寡头的得益矩阵

  - 上策：都选择低价，因为 150>100，70>20 且对称，所以都选择低价
    - 解决方案：政府组织协调的必要性和重要性

- 严格上策：不能取等号；弱上策：可以在个别取等号。本题中为严格上策。
- 赌胜博弈：一方所得等于另一方所失，不可能双赢，属于"零和博弈"
  - 田忌赛马、猜硬币、石头剪刀布……
  - 特点：不能让另一方猜出自己的策略；尽可能猜中对方的策略；若一次博弈则结果取决于机会；若多次重复博弈则可以求出双方平均得益
- 产量决策的古诺模型（Cournet）：策略是连续的（可以从 0 到∞），寡头产量竞争
  - 三厂商离散产量
    - 不合作：$\frac{\partial\pi}{\partial q_i}=0$即$\begin{cases}20-2q_1-q_2-q_3=0\\20-q_1-2q_2-q_3=0\\20-q_1-q_2-2q_3=0\end{cases}$，解得$q_1=q_2=q_3=5$
    - 合作：$\pi=(20-Q)Q$，有$\frac{d\pi}{dQ}=0$，解得 Q=10，所以$q_1=q_2=q_3=\frac{10}{3}\approx 3$

博弈结构和博弈的分类

- 博弈中的博弈方：独立决策、独立承担博弈结果的个人或组织
  - 得益矩阵：标准式/策略式（normal form）；树：扩展型/扩展式(extensive form)
  - 注 1：如果自然作为博弈方，那么一般用博弈方 0 或博弈方 N 来表示
  - 注 2：注意区分
    - "风险中性"：1 单位期望收益=1 单位确定收益
    - "风险偏好"：1 单位期望收益>1 单位确定收益
    - "风险规避/厌恶"：1 单位期望收益<1 单位确定收益
  - 单人博弈、双人博弈（最多最常见）、多人博弈（可能存在"破坏者"：策略对自身利益无影响，但可能对别人决策产生决定性影响）
- 博弈中的策略：博弈中各博弈方的决策内容
  - 有限博弈（Finite Games）：一个博弈中每个博弈方策略数都是有限的；
    - ！区分有限次博弈：博弈次数有限
  - 无限博弈（Infinite Games）：一个博弈中至少一个博弈方的策略有无限多个；
    - ！区分无限次博弈：博弈次数无限
- 博弈中的得益(Payoffs)：参加博弈各各个博弈方从博弈中所获得的利益
  - 得益**组合**（得益矩阵里面的数字）对应策略组合（例如"坦白"、"不坦白"）
  - 零和博弈（石头剪子布、猜硬币）：利益始终对立，偏好通常不同
  - 常和博弈（分配固定数额的奖金、利润、遗产）：利益和为常数，利益对立且竞争
  - 变和博弈（囚徒困境）：合作利益存在，博弈效率问题的重要性
- 博弈的过程：博弈方选择、行为的次序，包括是否多次重复选择、行为
  - 静态博弈：各个博弈方决策时看不见别人的决策，同时行动
  - 动态博弈（弈棋、市场进入、领导-追随型市场结构）：各个博弈方选择和行动有先后次序

Cournet	产量	同时行动
Bertrand	价格	同时行动
Stackelberg	产量	序贯行动
序贯 Bertrand 或价格 Stackelberg	价格	序贯行动

  - 重复博弈（长期客户、长期合同、信用）：同一个博弈（可静态或动态）反复进行
    - 有限次重复博弈、无限次重复博弈（随机结束也算无限次重复博弈）

- 博弈的信息结构
  - 完全信息博弈：各博弈方都完全了解所有博弈方各种情况下的**得益**
  - 不完全信息博弈：至少部分博弈方不完全了解其它博弈方得益情况的博弈
  - 完美信息博弈：每个轮到行为的博弈方对博弈的**进程**完全了解的博弈
  - 不完美信息博弈：轮到行为的博弈方不完全了解此前全部博弈进程的博弈
- 博弈方的能力和理性
  - 完全理性和有限理性
    - 完全理性：完美的分析判断能力和不会犯选择行为的错误
    - 有限理性：博弈方的判断选择能力有缺陷
  - 个体理性和集体理性
    - 个体理性：以个体利益最大为目标
    - 集体理性：追求集体利益最大化
    - 合作博弈：允许存在有约束力协议的博弈
    - 非合作博弈：不允许存在有约束力协议的博弈
      - ！注：不是指不合作，也可以合作，只是不存在协议
- 博弈的分类和博弈理论的结构
  - 首先最根本的分类：合作/非合作
  - 根据理性程度：非合作博弈可分为：完全理性博弈和有限理性博弈（进化博弈）
  - 根据博弈过程：静态博弈、动态博弈、重复博弈
  - 根据信息结构（是否完全和完美）：完全静、不完全静、完全且完美动、完全但不完美动、不完全动
  - 零和博弈、非零和博弈；单人博弈、多人博弈等（若考试考察："超过三个人的博弈也可以画得益矩阵"应判错）

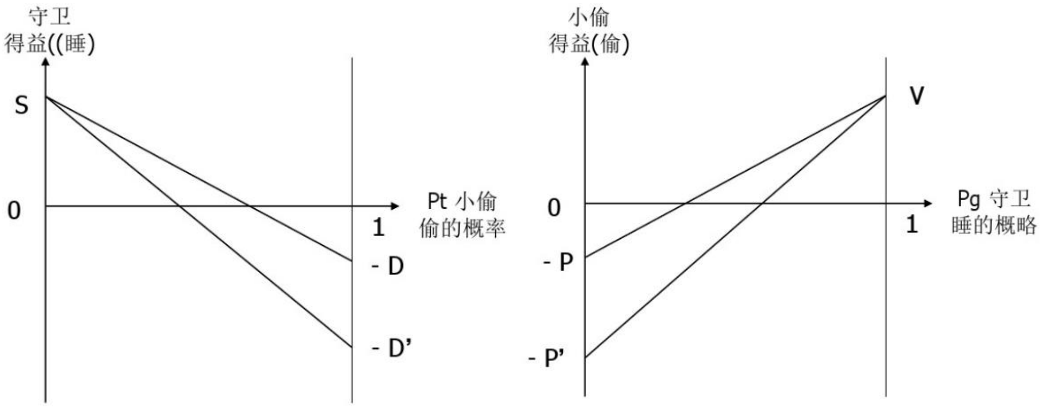
博弈论的历史和发展简介

- 最早博弈思想：齐威王田忌赛马、巴比伦犹太教法典的婚姻合同问题
  - 甲（5 个饼）、乙（3 个饼）、丁（没带饼）三人，三个人平分。丁拿出 8 个金币让甲乙分，甲主张 53 分，乙主张 44 分，问应该如何分 8 个金币？
  - 甲得 7 个，乙得 1 个
  - 理由：只分配有争议的，看谁**贡献**的多。因为甲 5 个饼，吃了 8/3（他本来会吃这么多），乙 3 个饼，吃了 8/3（他本来也会吃这么多），丙 0 个饼，吃了 8/3。即甲贡献了 5-8/3=7/3 没吃，乙贡献了 3/8/3=1/3 没吃，所以甲：乙的**贡献比**是 7：1，因此甲得 7 个金币，乙得 1 个金币。
- 博弈论早期研究的起点：古诺 1838 年关于寡头之间通过产量决策进行竞争的模型
- 比较系统密集的研究：上世纪初齐默罗和波雷尔对象棋博弈等的研究
- 博弈论历史的真正起点：1944 年冯诺依曼和摩根斯坦出版的《博弈论和经济行为》
  - 扩展形（extensive form）、正规形（normal form）/策略形（strategic form）、矩阵形（matrix form）
  - 稳定集（stable sets）、极小化极大解（minmax form）
- 1950 年纳什均衡：完全信息静态博弈，发展了非合作博弈的基础理论
- 1965 年塞尔腾：子博弈完美纳什均衡
- 1972 年史密斯：进化稳定策略（ESS）
- 1973 年海萨尼：关于"混合策略"的不完全信息解释，以及严格纳什均衡

完全信息静态博弈

- 上策、上策均衡
  - 严格上策：均为>，弱上策：存在≥
  - 上策均衡并不是普遍存在的
- 方法：
  - 严格下策反复消去法
  - 划线法（要求掌握）
  - 箭头法（比较复杂，不需要使用，应该使用划线法较为简单明了）
- 纳什均衡
  - 均衡：策略组合
  - 纳什均衡：任意博弈方的策略都是对其余博弈方策略的组合的最佳对策
  - 纳什均衡的一致预测性：各博弈方的**实际行为选择与他们的预测一致**（他们不会利用这个预测或预测的能力来选择与预测不一致的策略）
    - 注意：不是~~不同博弈方的预测相同、无差异~~
    - 只有纳什均衡才有一直预测的性质
  - 上策均衡一定是纳什均衡，但是纳什均衡不一定是上策均衡
  - 严格下策消去法一定不会消去纳什均衡，所以在纳什均衡分析之前使用严格下策反复消去法可以简化博弈（注意一定是“严格下策反复消去法”）
- 无限策略博弈分析和反应函数
  - 古诺的寡头模型（同质产品）
    - 总产量 Q，市场出清价格 P，边际成本 c，总得益：U=收益-成本=QP(Q)-cQ
  - 反应函数
    - 本题当中$\begin{cases} q_1 = R_1(q_2) = \frac{1}{2}(6 - q_2) \\ q_2 = R_2(q_1) = \frac{1}{2}(6 - q_1) \end{cases}$，求交点，但一般来说古诺寡头模型用求解方程即可
  - 伯特兰德寡头模型（异质产品，但存在一个可替代性）
    - 古诺寡头模型：选择价格；伯特兰德寡头模型：选择产量
    - 伯特兰德寡头模型：厂商的产品之间有很强的可替代性，但又不是完全可以替代，价格搞得不会完全卖不出去
  - 公共资源模型
    - 没有谁拥有所有权、大家都可以自由利用，是公共资源
    - P66 养羊问题
    - 公共资源保护：政府、市场、自治委员会可以保护公共资源；自治/市场先试，最后再尝试政府，因为政府信息不足、可能产生腐败等，只能作为最后的策略，不能作为最开始尝试的对象。
  - 反应函数的问题和局限性
    - 函数不一定连续可导
    - 得益函数可能不一定有交点、也可能不一定有唯一交点（混合策略的反应函数很可能出现多重交点反应函数的图形）
- 混合策略和混合策略纳什均衡，纳什均衡不存在
  - 和惟一纳什均衡的博弈之间重要的本质区别：自己的策略选择不能预先被另一方知道或猜测到；惟一策略纳什均衡：具有一致预测性
  - 混合策略：按照概率分布 $p_i=(p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{ik})$从 k 个可选策略种选择策略选择

    - 考试的时候已知纯策略纳什均衡，求混合策略纳什均衡，就是求真正意义上的混合策略纳什均衡
    - 如果只要我们求混合策略纳什均衡，那就是真正意义上的混合的和纯策略的都要求
    - 猜硬币概率分布要答到这一步：((博弈方 1 的概率分布),(博弈方 2 的概率分布),…)
    - 纯策略纳什均衡也是混合策略纳什均衡的一种
  - 混合策略纳什均衡的原则：（计算题！P74）
    - 1、不能让对方知道或者猜到自己的选择
    - 2、选择每种策略的概率一定要恰好使对方选择不同策略的期望得益相等（无机可乘）
  - P74 页计算题的混合策略纳什均衡概率分布：((0.8,0.2),(0.8,0.2))（答题一定要有这一步）
  - 激励的悖论：长期的话会达到新的均衡从而双方重新选择混合策略，导致政策目标和政策结果之间达成意外的关系

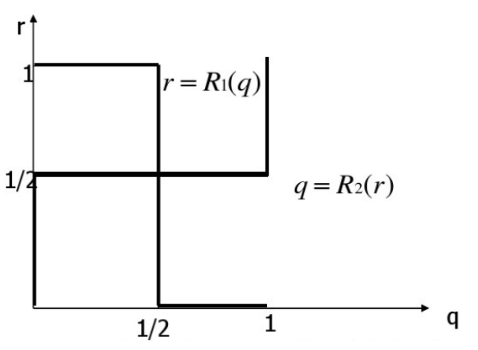
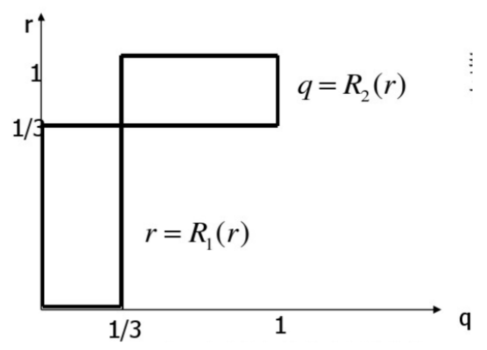


    - 加重对守卫的处罚，短期效果是守卫尽职，但是长期却是降低偷窃发生的概率
    - 加重对小偷的处罚，短期效果是使偷窃的概率受到抑制，但是长期却是使守卫可以更加偷懒，同时若考虑增加社会福利，单位可以少派守卫等，这种做法也仍然有意义。
- 多重均衡博弈和混合策略：多个纯策略纳什均衡，纳什均衡不唯一
  - 同混合策略纳什均衡的分析方法，一方选择使得另一方无机可乘的概率分布选择策略
  - 注意此时既有纯策略纳什均衡（多个均衡），也存在严格意义上的混合策略纳什均衡，答（广义上的）“混合策略纳什均衡”的时候需要二者都答。
  - 多重均衡怎么选策略？
    - 混合策略一定是低效的，首先要被干掉
  - 纯粹的竞争不一定是高效率的，协商、补偿是能够提高双方得益的有效手段，即混合策略是最垃圾的结果了
- 混合策略和严格下策反复消去法
  - 对严格下策反复消去法引入混合策略

		博弈方2 L	博弈方2 R
博弈方1	U	3，1	0，2
	M	0，2	3，3
	D	1，3	1，1

- ◆ 因为若博弈方 2 采用混合策略$(q, 1-q), q \in [0,1]$，那么
- ◆ $u_1^e = 1/2 * q * 3 + 1/2 * (1-q) * 0 + 1/2 * q * 0 + 1/2 * (1-q) * 3 = 3/2$ 是一个常数，且 3/2 恒大于博弈方 1 选 D 时的得益 1
- ◆ 所以此时 D 相对于混合策略(1/2,1/2,0)是严格下策，可以从博弈方 1 的策略空间种消去
- ◆ 最终得到纳什均衡(3,3)

- ● 混合策略反应函数

■ 猜硬币	■ 夫妻之争
	
混合策略纳什均衡(1/2,1/2)	纯策略纳什均衡:（时装，时装）-> (0,0) （足球，足球）->(1,1) 混合策略纳什均衡：(3/4,1/3)

- ■ 期望得益相等法：先用划线法（一定要先划线）找出纯策略纳什均衡（混合策略纳什均衡需要先求纳什均衡），再用期望得益相等法找到混合的
- ■ 反应函数法：工作量大，不需要划线法
- ■ 离散的用期望得益相等法、连续的用反应函数法

- ● “均衡“一定要是策略组合，不能是得益组合！考试写错就没分了！!!!
- ● 纳什均衡的存在性
  - ■ 每一个有限博弈都至少有一个混合策略纳什均衡
- ● 纳什均衡的选择和分析方法拓展
  - ■ 帕累托上策均衡
    - ◆ 虽然有些博弈当中存在多个纳什均衡，但是这些纳什均衡可能有明显的优劣关系，所有博弈方都会偏好其中同一个纳什均衡，让所有博弈方选择一致并预测其它博弈方也会选择这个选项。
    - ◆ 帕累托效率意义上的优劣关系——帕累托上策均衡
    - ◆ 例子：鹰鸽博弈
    - ◆ 注意：帕累托上策均衡一定要是多重均衡（>1 个）里面选出来的最好的！
  - ■ 风险上策均衡
    - ◆ 顾忌博弈方可能发生错误的时候，帕累托上策均衡不一定是最优选择，需要考虑风险——风险上策均衡

<table>
<tr><td>均衡</td><td>帕累托上策均衡</td><td>风险上策均衡</td></tr>
<tr><td>得益
矩阵</td><td>
<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">国家2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>战争</td><td>和平</td></tr>
<tr><td rowspan="2">国家1</td><td>战争</td><td>-5，-5</td><td>8，-10</td></tr>
<tr><td>和平</td><td>-10，8</td><td>10，10</td></tr>
</table>
战争与和平</td><td>
<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">博弈方2</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>L</td><td>R</td></tr>
<tr><td rowspan="2">博弈方1</td><td>U</td><td>9，9</td><td>0，8</td></tr>
<tr><td>D</td><td>8，0</td><td>7，7</td></tr>
</table>
风险上策均衡（D，R）</td></tr>
<tr><td>均衡</td><td>纳什均衡：（战，战）（和，和）
帕累托上策均衡：（和，和）</td><td>纳什均衡：（U, L）（D, R）
只要另一方偏离（U, L）的概率大于 1/8，那么应该选择风险上策均衡：（D, R）</td></tr>
<tr><td>注意</td><td>“均衡“是策略组合而非得益组合 g</td><td>不是对称博弈，因为策略不对称</td></tr>
</table>

- ◆ 博弈方对于风险上策均衡的选择倾向，具有自我强化的机制，人们可能基于自己的担心，逐渐演变为大家都实现相对低效率的风险上策均衡

■ 聚点均衡

- ◆ 利用博弈设定以外的信息依据选择均衡，例如文化、习惯等
- ◆ 具体问题具体分析

■ 相关均衡

		博弈方2	
		L	R
博弈方1	U	5，1	0，0
	D	4，4	1，5

- ◆ 纯策略纳什均衡：（U, L），（D, R）
  - ● 期望得益均为 3，但利益相差很大
- ◆ 混合策略纳什均衡（真正意义上的混合策略，列方程求）：[(1/2, 1/2), (1/2, 1/2)]
  - ● 期望得益 2.5，但可能存在（U, R）的策略组合，让双方都不得益
- ◆ 不如（D, L）策略组合—>采用相关装置来避免出现（U, R）的情况
- ◆ 相关均衡要点：①构成纳什均衡；②有人忽略不造成问题

■ 共谋和防共谋均衡

- ◆ 共谋均衡

		博弈方2	
		L	R
博弈方1	U	0,0,10	-5,-5,0
	D	-5,-5,0	1,1,-5

博弈方3——A

		博弈方2	
		L	R
博弈方1	U	-2,-2,0	-5,-5,0
	D	-5,-5,0	-1,-1,5

博弈方3——B

  - ● 三个博弈方的纯策略纳什均衡：给定两个，看剩下一个怎么选
    - ■ 给定 LA，博弈方一 0>-5，选 U
    - ■ 给定 RA，博弈方一-5<1，选 D
    - ■ 给定 LB，博弈方一-2>-5，选 U
    - ■ 给定 RB，博弈方一-5<-1，选 D
    - ■ 给定 UA，博弈方二 0>-5，选 L
    - ■ 给定 DA，博弈方二-5<1，选 R
    - ■ 给定 UB，博弈方二-2>-5，选 L

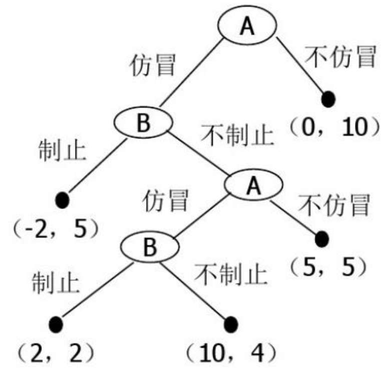
■ 给定 DB，博弈方二-5<-1，选 R
■ 给定 UL，博弈方三 10>0，选 A
■ 给定 UR，博弈方三 0=0，都可以
■ 给定 DL，博弈方三 0=0，都可以
■ 给定 DR，博弈方三-5<5，选 B

- 找到两个均衡：（U, L, A）->（0, 0, 10），（D, R, B）->（-1, -1, 5）
- 假设博弈方三选 A，那么博弈方一二就不舒服了，如果共谋选 DR，那么就能获得 1 个得益，均大于 0，且把博弈方三坑了
- 但是博弈方三选 B 的话，博弈方一二就没什么好选的，都会坑，所以（D, R, B）对博弈方三是防共谋均衡，即使（D, R, B）在帕累托效率意义上不是最优。

◆ 防共谋均衡
- 定义
  ■ 单独改变策略无利可图
  ■ 没有任何两个博弈方的串通会改变博弈结果
  ■ 以此类推，所有博弈方都参加的串通都不会改变博弈结果

完全且完美信息动态/序列/序贯/多阶段博弈
——>所有博弈方都对过程和得益完全了解的完全且完美信息动态博弈

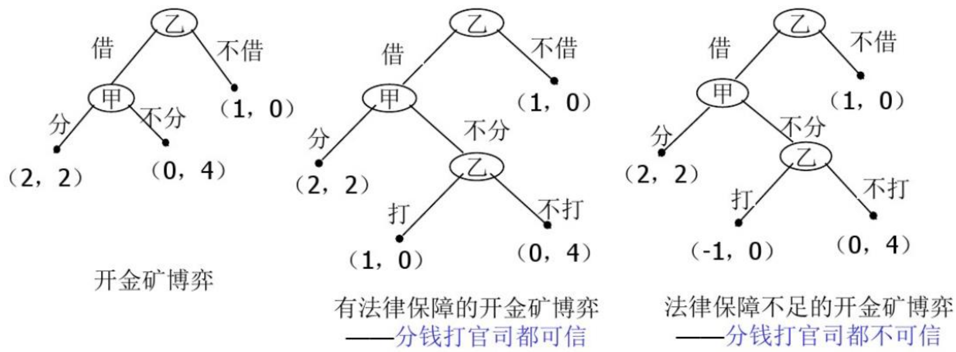
- 动态博弈的表示法和特点
  ■ 阶段和拓展形表示
    ◆ 动态博弈当中一个博弈方的一次选择, 或者有些情况下各个博弈方的同时选择构成一个“阶段”
    ◆ 动态博弈常用“拓展形”表示，但也不是所有动态博弈都可以用拓展形表示，如博弈阶段多、选择多、选择连续等都不能用拓展形表示
    ◆ 注：下例当中一个博弈方的一次选择行为是一个阶段，故共有四个阶段；同时注意策略一定是完整的行动计划



  ■ 动态博弈的基本特点
    ◆ 策略：整个博弈中所有**完整**的选择、行动计划：达到需要规定，达不到也需要规定，即要组合所有策略。
    ◆ 结果：上述“计划型”策略的策略组合，构成一条路径
    ◆ 得益：对应每条路径，而不是每步选择、行为
    ◆ 动态博弈的非对称性：先后次序决定动态博弈必然是非对称的
    ◆ 先选择、行为的博弈方常常更有利，有“先行优势”

- 注意，赌胜博弈当中先行动的肯定具有劣势，例如猜拳先出就血亏

- 可信性和纳什均衡问题
  - 相机选择和策略中的可信性问题
    - 博弈方可以在实施策略的过程当中改变计划，“相机选择”
    - 可信性：各个博弈方是否真正、始终按照自己的策略所设定的方案行为，还是可能临时改变自己的行动方案？
    - 注意：动态博弈当中，如果没有规定，第一个数字是首先行动方的得益，第二个数字是其次行动方的得益，以此类推；若有另外规定按照规定执行
    - 如下开金矿博弈是相机选择和策略的可信性问题的例子：

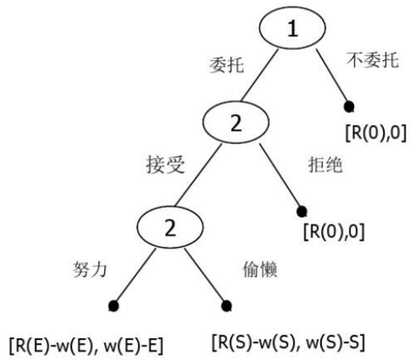


      - 无法律保障的开金矿博弈当中，甲一定不分，让自己血赚，那么乙肯定不可以借，不然血亏；
      - 有法律保障的开金矿博弈当中，乙一定会选择打，收回本钱，那么甲一定不可能不分，所以甲一定分，从而乙可以借，来获得得益；
      - 但是法律保障不足的开金矿博弈当中，乙只能哑巴吃黄连，甲一定不分，从而乙不可以借，防止继续亏损。
      - 博弈方乙的策略是（借，打）、（借，不打）、（不借，打）、（不借，不打）；甲的策略是（分）、（不分），一定要排列组合完全！
  - 纳什均衡的问题
    - 在第三种法律保障不足的开金矿博弈中，标准型分析得到的纳什均衡有（不借-不打，不分），（不借-打，不分），（借-打，分），但是乙打是不可能的，因为乙会血亏，所以后两个不可信，不可能实现或者稳定
    - 纳什均衡本身不能排除博弈方策略中包含的不可信的行为设定，不能解决动态博弈的相机选择引起的可信性问题。
    - 但是现实当中可信和不可信可以相互转化
  - 逆推归纳法：backward induction——>最重要、基本的方法
    - 逆推归纳法：从最后一个阶段博弈方的行为（action）开始分析，逐步倒推回前一个阶段相应博弈方的行为选择，一直到第一个阶段的分析方法
- 子博弈和子博弈完美纳什均衡
  - 子博弈（Subgame）
    - 定义关键词：第一阶段以外的某阶段开始的后续博弈阶段、初始信息集、进行博弈所需要的全部信息
    - 如果考试考，注意本书当中子博弈不能包括原博弈的第一个阶段
    - 子博弈必须有一个明确的初始信息集以及必须包含初始阶段之后的所有博弈阶段
  - 子博弈完美纳什均衡（SPNE：Subgame Perfect Nash Equilibrium）

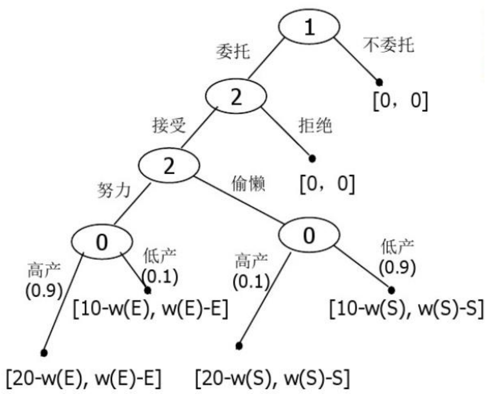
- 定义关键词：完美信息动态博弈、策略组合满足在整个动态博弈及它的所有子博弈中都构成纳什均衡
- 和纳什均衡的区别：能够排除策略中不可信的威胁和承诺，因此是真正稳定的
- SPNE 一定是 NE，但是 NE 不一定是 SPNE（NE：Nash Equilibrium，纳什均衡），SPNE 比 NE 强

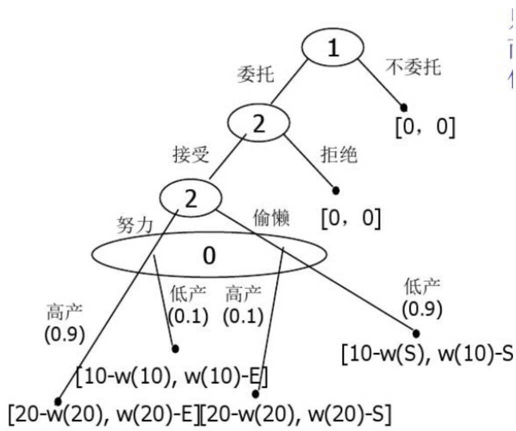
- 几个经典的动态博弈模型
  - 寡占的斯塔克伯格模型：寡占=寡头，即动态的寡头市场产量博弈模型
    - 即古诺模型当中的“同时行动”变成“先后行动”
    - 推理过程见书 P122-123，主要注意厂商 1 先行动，厂商 2 后行动，由逆推归纳法，应该先分析厂商 2
    - “先行优势”：厂商 1 可以根据厂商 2 必然根据自己行动理性选择这一点通过选择自己的产量获得更多的利益；同时掌握更多的信息不一定能够得益更多。
  - 劳资博弈：见书 P124-P126
    - R(L)：厂商收益，且 R'>0, R''<0、WL：厂商成本、L(W)：厂商对工会选择的工资率 W 的反应函数；工会先选择，厂商后选择
    - 先分析厂商收益最大：所求即 max[R(L)-WK]，R'(L)-W=0 解得的 L 即为所求
    - 再分析工会 max u[W, L^*(W)]：$\frac{dL^*}{dW}=-\frac{u_1'}{u_2'}$，即 L^*(W)和所有可选 u 函数的切线，切点对应的（W^*，L^*(W)）即为所求均衡解
  - 讨价还价博弈：见书 P126-130
    - 三回合讨价还价：δ：折现因子，0<δ<1
      - 第三回合甲出 10000，乙必须接受，设甲出 S
      - 第二回合乙出价要让甲得益不小于第三回合甲得益，**且**自己利益最大
        - $\delta S_2=\delta^2 S$，即 $S_2=\delta S$
        - 并且乙得益 $\delta(10000-\delta S)>\delta^2(10000-S)$，即第二回合得益比第三回合得益高
      - 第一回合甲出价要让乙得益不小于第二回合得益，**且**自己利益最大
        - 只要 $10000-S_1=\delta(10000-\delta S)$，即 $S_1=10000-10000\delta+\delta^2 S>\delta^2 S$
        - 此时甲得益 $10000-10000\delta+\delta^2 S$，乙得益 $10000\delta-\delta^2 S$，是该博弈的子博弈完美纳什均衡解
      - 在本博弈当中，第三回合乙必须接受甲的方案，那么甲提出 S=10000，因此甲得益 $10000(1-\delta+\delta^2)$，乙得益 $10000(\delta-\delta^2)$
        - δ=0.5 时，$\delta-\delta^2$ 有最大值 0.25
        - 0<δ<0.5 时，δ越大，$\delta-\delta^2$ 越大，甲得益越小，乙得益越大
        - 0.5<δ<1 时，δ越大，$\delta-\delta^2$ 越小，甲得益越大，乙得益越小
      - 乙的筹码：跟甲拖时间争取自己的利益，但无论能不能拖(δ=0 或 1)，甲最终都能获得全部利益，即使利益最终变得很小。
    - 无限回合讨价还价
      - 假设：无限回合、解存在
      - 第一回合甲出 S，乙出 10000-S，双方得益$(10000-10000\delta+\delta^2 S, 10000\delta-\delta^2 S)$，$S=S_1=10000-10000\delta+\delta^2 S$，解得$S=\frac{10000}{1+\delta}$，即甲出价$S^*=\frac{10000}{1+\delta}$，乙得益$10000-S^*=\frac{10000\delta}{1+\delta}$

- 委托人-代理人理论
  - 有明显的也有不明显的关系，如工厂和工人、店主和店员、客户和律师、市民和政府、基金购买者和基金管理人等
  - 委托的：委托人；被委托的：代理人。
  - 信息多的：代理人；信息少的：委托人（信息多少有不同维度的定义，可以转化）
  - 关系的关键特征：不能直接控制、监督不完全、信息不完全、利益的相关性
  - 涉及问题：激励机制涉及、机制涉及理论、委托合同涉及问题等
  - 无不确定性的委托人-代理人模型



    - 委托人利益：R(E)-w(E)，代理人利益 w(E)-E
    - 本博弈中：激励相容约束：w(E)-E>w(S)-S，即努力工作得益要比偷懒工作得益高才会努力工作
      - 拓展：I(ndivisual)R(ational)约束（个体理性约束）
    - 本博弈中：参与约束：w(E)-E>0 和 w(S)-S>0，当然若代理人有其它备用选项，则这两个约束需要大于选择其它可能性的机会成本
    - 可以逆推归纳法往前分析
  - 有不确定性但可监督的委托人-代理人博弈：根据努力不努力
    - 风险主要由委托人承担：求委托人得益的期望
    - 每次考试都考！



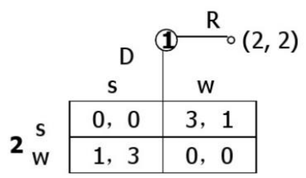


  - 有不确定性且不可监督的委托人-代理人博弈：只能根据**成果**！
    - 核心：根据成果判断，支付报酬，双方的得益函数中的报酬项现在是成果 20 或者 10 的函数，而不再是努力程度 E 或者 S 的函数
    - 不确定性和风险由代理人承担：求代理人得益的期望
    - 委托人选择合适的 w(10)和 w(20)让代理人努力工作

- **一定要看 PPT 理解所有过程!!!**
- 对比题，分析题，等都可以出
- 选择报酬和连续努力水平的委托人-代理人模型
  - 假设努力的负效用为 C=C(e)，代理人机会成本 average(U)，e 是代理人选择的努力水平，产出 R(e)是 e 的随机函数，C'>0，C''>0；R'>0，R''<0
  - 委托人得益函数：R-w=R(e)-w[R(e)]
  - 代理人得益函数：w-C=w[R(e)]-C(e)
  - 参与约束：w[R(e)]-C(e)≥average(U)，那委托人当然希望最小化报酬，实际参与的约束是 w[R(e)]=C(e)+average(U)
  - 激励相容函数：w[R(e^*)]-C(e^*)≥w[R(e)]-C(e)，这个时候代理人才会自觉付出 e^*的努力，因为此时得益比其它任何情况都多
  - 例子：店主和店员的问题 P141-P142
    - A 可以>0 也可以<0，小于 0 的情况：特许店或者租赁
    - 店主采用的报酬的计算公式：S=A+BR=A+B(4e+η)
      - 0<B<1 分成
      - A>0 固定工资；A<0 租金或特许承包
    - 店员的得益 A+B(4e+η)-e^2，期望得益 A+4Be-e^2，因此店员是"风险中性"时。e^*=2B 符合店员的最大利益，故 B=1 符合店员的最大利益
    - 店主得益 4e+η-A-B(4e+η)=4(1-B)e+(1-B)η-A
    - 最后可得 A=-3，B=1 可以知道店主的最优激励工资计算公式是 w=A+B(R)=-3+R

- 有同时选择的动态博弈模型
  - 标准模型
    - 动态博弈、完全和完美信息特征→逆推归纳法
  - 间接融资和挤兑风险
    - 首先分析第二阶段
      - 第二阶段有两个纯策略纳什均衡：（提前，提前），（到期，到期）；对应得益（0.8，0.8），（1.2，1.2）
      - 帕累托最优：（到期，到期）
    - 然后分析第一阶段
      - 如果第二阶段（到期，到期）
        - 那么第一阶段有两个纯策略纳什均衡（不存，不存），（存款，存款）
        - 帕累托最优（存款，存款）
      - 如果第二阶段（提前，提前）
        - 那么第一阶段有两个纯策略纳什均衡（不存，不存），（存款，不存），（不存，存款）
        - （不存，不存）是风险上策均衡，因为无论如何，只要不存的话得益永远是 1，否则就有可能只得到 0.8
    - 所以（存款，存款）是相对于（不存，不存）的帕累托上策均衡
    - 子博弈完美纳什均衡（SPNE）：
      - （1.2，1.2）→（存款，存款），（到期，到期）
      - （0.8，0.8）→（不存，不存），（提前，提前）
    - 意义
      - 存款，存款->存钱到银行->间接融资制度很好起作用

            - 存款，存款但因为第二阶段某些风险、谣传->提前，提前->客户挤提存款->银行挤兑->银行可能倒闭➔需要政府出面保证客户资金的安全或澄清谣言可以避免银行挤兑风潮发生（挤兑：拥挤在一起提取钱款）
            - 因此，这是各国政府建立信贷保证、保险制度、对存款进行保护、保险的原因
        - 非法集资问题
            - 合法金融活动是经营利润偿还到期资金，而非法金融活动往往是新债偿旧债
            - 债主如果挤兑，借贷人就不行了
    - 国际竞争和最优关税（详见 P147~150）
        - 先分析第二阶段：
            - 思路：企业的得益函数=内销赚钱+出口赚钱-内销产品生产成本-出口产品生产成本-出口关税
        - 再分析第一阶段
        - 这里分析的是两个国家，两个企业，我们的期末小论文可以写三个国家、三个企业等等的情况
    - 工资奖金问题（详见 P150~154）
- 动态博弈分析的问题和拓展讨论
    - 如果出现多重均衡！
        - 帕累托上策均衡、风险上策均衡、聚点均衡、相关均衡、共谋和防共谋均衡，这里多了一个颤抖手均衡，要看一下！
    - 逆推归纳法的问题
        - 只能分析明确设定的博弈问题，要求博弈结构清楚，双方都了解博弈结构且清楚对方
        - 不能分析比较复杂的动态博弈
        - 两条路径利益相同的时候逆推归纳法也会遇到问题
        - 对双方理性要求太高，并且要相互了解和信任对方的理性，要有对理性的共同理解，或进一步有“理性的共同知识”
    - 颤抖手均衡和顺推归纳法
        - 大概理解：经得起干扰的是颤抖手均衡，否则就不是
        - 分析的时候要从每一个纳什均衡的两个博弈方分别分析
        - 书上例题：得益矩阵、扩展形都要会分析，注意一定要有多个均衡，分析颤抖手均衡才有意义
        - 顺推归纳法：



Van Damme 博弈

            - 注：上图当中 D 和 R 反了！
            - 纯策略纳什均衡：(W, S) -> (1, 3), (S, W) -> (3, 1)
            - 混合策略纳什均衡：((1/4, 3/4), (3/4, 1/4)) -> (3/4, 3/4)
            - 用以上不选 D 的策略以后，期望得益 E=1/3*(1+3+0.75)<2

        - 博弈方一第一阶段不选 D, 故意犯错就是告诉博弈方二自己第二阶段要选 S，博弈方二只能选 W（如果足够理性）
        - 整个博弈的 SPNE：
            - (W, S) -> (1, 3); 1-D->(2, 2)，则 1 选 D，SPNE: (DW, S)
            - (S, W) -> (3, 1); 1-D->(2, 2)，则 1 选 R，SPNE: (RS, W)
    - 蜈蚣博弈问题
        - 逆推归纳法会推出只能让博弈方一选择 D 结束博弈，双方获益(1, 1)
        - 但是：该博弈既不会到 1 也不会到 100，因为存在
            - 1 块只是小钱，后面潜在收益很大，不会选 1 块
            - 情感、信任、合作

重复博弈：重要!
基本博弈/原博弈/阶段博弈重复进行构成的博弈过程。
重复博弈可能会让博弈方对博弈重复进行时的利益判断发生变化, 因此重复博弈不是基本博弈的简单叠加

- 重复博弈引论
    - 为什么研究重复博弈
        - 长期反复合作和竞争的关系，未来利益受到选择的制约
        - 长期关系可能具有相互独立性，而非动态博弈中分析的紧密联系
        - 长期合同、回头客、常客、一次性买卖
        - 有无确定的结束时间
    - 基本概念
        - 有限次重复博弈：G、G(T)、原博弈、阶段
        - 无限次重复博弈：G(∞)
        - 策略：博弈方在每个阶段针对每种情况如何行为的计划
        - 子博弈：从某个阶段（不含第一阶段）开始，包括此后所有的重复部分
        - 均衡路径：由每个阶段博弈方的行为组合串联而成
        - 平均得益：

          平均得益： 如果一常数$\bar{\pi}$作为重复博弈（有限次重复博弈或无限次重复博弈）各个阶段的得益，能产生与得益序列$\pi_1, \pi_2, \cdots$相同的现在值，则称$\bar{\pi}$为$\pi_1, \pi_2, \cdots$的平均得益
        - 贴现因素δ：
            - 有限次：0<δ≤1，现在值$\pi = \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} \pi_t$
            - 无限次：0<δ<1（注意一定不能取 1!）
                - 现在值：$\pi = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \pi_t$
                - 平均得益：$\bar{x} = (1-\delta) \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} \pi_t$
                - 概率 p 结束：$\pi = \pi_1 + \pi_2(1-p)\delta + \pi_3(1-p)^2\delta^2 + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} \pi_t \delta^{t-1}$
- 有限次重复博弈
    - 两人零和博弈的有限次重复博弈
        - 重复博弈保持零和博弈的严格竞争性, 博弈方的正确策略时重复一次性博弈中的纳什均衡策略
    - 唯一纯策略纳什均衡博弈的有限次重复博弈
        - 都会选择 G 的纳什均衡策略，各个博弈方在 G(T)中的得益是 G 的 T 倍，平均得益是 G 中的得益，详见书 P177

            - ◆ 囚徒困境、寡头市场、古诺模型的重复博弈，只要有唯一纯策略纳什均衡，那么它的**有限次**重复博弈必然是采用一次性博弈的均衡不断下去直到结束
        - ■ 多个纯策略纳什博弈的有限次重复博弈
            - ◆ 三价博弈的重复博弈

厂商1 \ 厂商2	H	M	L
H	5，5	0，6	0，2
M	6，0	3，3	0，2
L	2，0	2，0	1，1

三价博弈

厂商1 \ 厂商2	H	M	L
H	8，8	1，7	1，3
M	7，1	4，4	1，3
L	3，1	3，1	2，2

两次重复三价博弈的等价模型

- ● 触发策略/报复机制：两方先试探合作，一旦发现对方不合作就也用不合作报复
- ● 双方第一次选 H，如果第一次结果为(H, H)，那么第二次选 M；否则选 L 报复
- ● 因此第二阶段只有(H, H)加了(3, 3)，其它只加(1, 1)，对新的等价模型得益矩阵分析，有三个纳什均衡，包括(H, H)，是一个 SPNE，可以选择
- ● 注意：这里 SPNE 就是把每个阶段分析完都加到一起去就是 SPNE，所以上面那个触发策略和下面的不采用触发策略分析的结果都是 SPNE
- ● 如果不考虑触发策略，那么一共有 4 个 SPNE，但无论如何都没有采用触发策略的平均得益高
    - ■ (M, M) + (M, M)
    - ■ (M, M) + (L, L)
    - ■ (L, L) + (M, M)
    - ■ (L, L) + (L, L)
- ● 如果重复 n 次，那么除了最后一次采用触发策略，其它都选择(H, H)是最好的。当重复次数较多的时候，平均得益就可以接近(5, 5)了

- ◆ 两市场博弈的重复博弈
    - ● 三个 SPNE，包括两种纯策略+一种混合策略 8
- ■ 有限次重复博弈的民间定理
    - ◆ 个体理性得益：一博弈方在某个博弈中只要自己采取某种特定的策略，最低限度保证能获得的得益称为“个体理性得益”
    - ◆ 可实现得益：博弈中所有纯策略组合得益的加权平均（权数非负且总和为 1）数组称为“可实现得益”
- ■ 触发策略：有限次重复博弈且多重均衡的报复机制才会有效，以达到威胁的目的

● 无限次重复博弈：复杂，但是一定要懂!

- ■ 事实上的无限次或有限次重复博弈以概率 p 结束也算无限次重复博弈
- ■ 两人零和博弈的无限次重复博弈
    - ◆ 博弈方一直根据当时最大的利益行为，坚持原博弈的混合策略纳什均衡
- ■ 唯一纯策略纳什均衡博弈的无限次重复博弈
    - ◆ 类型
        - ● 原博弈唯一的纳什均衡本身是帕累托效率意义上的最佳策略组合，符合各博弈方最大利益的情况
            - ■ 与一次性博弈没有区别，仍然一直选择原博弈的纳什均衡
        - ● 唯一的纳什均衡并不是效率最高的策略组合，因此存在潜在合作利益的囚

徒困境式博弈

	H	L
H	4，4	0，5
L	5，0	1，1

    - 纳什均衡是(1, 1)，但显然(4, 4)在长期来看更好
    - 策略：从第 1 阶段到第 t-1 阶段都采用 H，就在第 t 阶段采用 H，否则若在 t-1 阶段对方采用 L，在第 t 阶段及往后就一直选 L 报复
  - 无限次重复古诺模型
    - 分析和上述唯一纯策略纳什均衡博弈的无限次重复博弈很类似
  - 有效工资率（效率工资）
    - 思路其实也是一样的，一边是努力工作的总得益，一边是工人偷懒却仍然高产赚钱，比较二者即可
- 拓展：关系合约、贸易协定

有限理性和进化（演化 evolution）博弈

- 有限理性博弈及其分析框架
  - 有限理性及其对博弈框架的影响
    - 有限理性博弈方：不满足完全理性假设的博弈方
    - 完全理性：追求最大利益的理性意识、分析推理能力、识别判断能力、记忆能力和准确行为能力的完美性要求，其中任何一个方面不满足就是有限理性
    - 有限理性：一般意味着至少有部分博弈方不会采用完全理性博弈的均衡策略
    - 有限理性：意味着均衡是不断调整和改进而不是一次性选择的结果，而且即使达到了均衡也可能再次偏离
    - 有限理性博弈方会在博弈过程中学习博弈通过试错寻找较好的策略
  - 有限理性博弈分析框架
    - 最优反应动态：有快速学习能力的小群体成员的反复博弈
    - 复制动态：学习速度很慢的成员组成的大群体随机配对的反复博弈
    - 进化稳定策略 ESS
- 最优反应动态
  - 协调博弈的有限博弈方快速学习模型
    - 思路：先找规则，再找
    - P214 例题
      - 纳什均衡：(A, A)，(B. B)，注意是策略组合！不是得益组合
      - 帕累托上策均衡：(B, B)
      - 风险上策均衡：(A, A)
      - 将下述两个式子的得益进行比较

        采用A的得益：$x_i(t)\times 50+[2-x_i(t)]\times 49$

        采用B的得益：$x_i(t)\times 0+[2-x_i(t)]\times 60$

        当$x_i(t) > 22/61$时，采用A；当$x_i(t) < 22/61$时，采用B
      - 即 1 或 2 个邻居选择 A 时，自己采用 A；否则若没有邻居选择 A，自己采用 B；可以证明，除了第一次全部选 B 的情况外，其余所有情况都能在上

述结果的保证下最终收敛到所有博弈方都选 A 策略的结果，并且这种结果出现的概率大大高于采用 B 和实现均衡(B, B)的概率

    - 古诺调整过程

- 复制动态和进化稳定性：两人对称博弈——分析其中一个就可以了
- 复制动态和进化稳定性：两人非对称博弈——两个都要分析