数字图像处理

一、绪论

1. 图像来源：可见光、电磁波谱、超声波、电子显微镜、计算机生成
2. 输入输出均为图像：低级处理
3. 输入图像，输出图像属性：中级处理
4. 电磁波谱：
   a) 伽马射线：核医学、天文观测
   b) X 射线：医学诊断、工业、天文学
   c) 紫外波段：印刷、工业检测、显微镜、天文学
   d) 可见光及红外波段成像：显微镜、天文学、遥感、工业、法律实施
   e) 微波波段成像：雷达
   f) 无线电波：医学、天文学
5. 基本步骤：图像获取、图像增强（适用特定应用、问题相关、主观）、图像复原（图像退化数学模型作基础、客观）、图像压缩、形态学处理、分割、表示和描述、识别、知识库

二、数字图像基础

1. 人眼主观亮度是光强的对数函数
2. 感知亮度不是实际亮度的函数，会存在马赫带效应
3. 单色光：
   a) 唯一属性：强度
   b) 灰度：表示强度的数值
4. 彩色光：辐射、光强、亮度
5. 取样和量化
   a) 取样：对坐标进行数字化（一格一格）
   b) 量化：对幅值进行数字化（值离散化）
6. 动态范围和对比度
   a) 动态范围：最大可测量灰度和最小可检测灰度的**比值**
   b) 对比度：图像内最高和最低灰度之间的**差值**
7. 表示数字图像：
   a) 存储图像的比特数：M*N*k
   b) k 比特图像：图像有 2^k 个灰度级别，例如 256 个灰度级别意味着 8 比特灰度分辨率，8 比特图像
      i. 比特数低，出现山脊状伪轮廓
   c) 图像的清晰程度：图像的像素大小+空间单位
      i. 例如 1024*1024 像素，描述中国地图就模糊，但描述人脸就清晰
      ii. 像素大小可以用来反应设备的成像能力
   d) 图像细节越多，需要的比特数越少；增加空间分辨率（例如 dpi），可适当降低比特数
8. 最佳量化：Z_k=(q_{k-1}+q_k)/2, q_k=(Z_k+Z_{k+1})/2
9. 图像内插
   a) 最近邻内插：不平滑、失真
   b) 双线性内插
      i. 一维例子：f(0.4)=0.6*f(0)+0.4*f(1)
      ii. 二维：

1. $$f(x,y_1) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{11}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{21}),$$
$$f(x,y_2) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{12}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{22}).$$
2. $$\begin{aligned} f(x,y) &\approx \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} f(x,y_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} f(x,y_2) \\ &= \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{11}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{21})\right) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(Q_{12}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(Q_{22})\right) \end{aligned}$$

10. 相邻像素
    a) 4 邻域 $N_4(p)$：4 个垂直或水平的相邻像素
    b) 4 对角邻域 $N_D(p)$：4 个对角相邻的像素
    c) 8 邻域 $N_8(p)$：$N_4(p)+N_D(p)$
11. 邻接性：pq 的灰度均属于 V 是大前提
    a) 4 邻接、8 邻接
    b) m 邻接：q 属于 p 的 $N_4(p)$，或 q 属于 p 的 $N_D(p)$但 $N_4(p) \cap N_4(q)$没有元素灰度属于 V
        i. 例如：$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$
12. 连通：
    a) 连通分量：未必唯一，是一个连通的像素的集合
    b) 连通集：S 只有一个连通分量
    c) 区域：是一个连通集
    d) 邻接：并集形成连通集
    e) 与补集相邻的像素集合（内边界），或补集中相邻闭合通路（外边界）
13. 边缘与边界
    a) 边缘：灰度值的导数超过某个阈值，是局部概念
    b) 边界：通常形成闭合通路，是整体概念
    c) 二值图像中边缘=边界
14. 距离：欧氏距离，D_4距离（曼哈顿距离，菱形 BFS），D_8距离（8 连通的棋盘距离，方形 BFS），D_m距离（m 通路长度）

	q	**1**
p	1	
1		

当(p,q)分别取$(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)$，从左下方的**1**到右上方的**1**的D_m距离分别是多少？

    a) 2、3、3、4
15. 算术操作
    a) 加法操作：图像去噪，K 幅加性噪声（噪声之间相互独立）图像平均，图像的平方信噪比提高 K 倍
    b) 减法操作：增强图像间的差异
    c) 乘法、除法操作：阴影矫正
        i. 用纯色背景估计阴影 h=g/f，然后用 f=g/h 可以从原始图像得到矫正图像
16. 空间操作：单像素操作、邻域操作、几何空间变换
17. 仿射变换：旋转、伸缩、平移、倾斜
    a) 仿射变换的定义：
        i. 保持共线性：共线的点变换后依然共线

ii. 保持距离比例：线的中心变换后依然是线的中心

- 变换公式

$$x = t_{11}v + t_{21}w + t_{31}$$
$$y = t_{12}v + t_{22}w + t_{32}$$

- 矩阵形式

$$[x \ \ y \ \ 1] = [v \ \ w \ \ 1]\,\mathbf{T} = [v \ \ w \ \ 1]\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

b)
  i. t_{31} 和 t_{32} 刻画平移量
  ii. t_{11} 和 t_{22} 刻画伸缩比例
  iii. t_{12} 和 t_{21} 刻画倾斜程度

c) 反向映射更加有效：根据输出，寻找输入
  i. 灰度内插：利用输出(x,y)，寻找输入(v,w)=T^{-1}{(v,w)}，然后利用原图像的灰度值计算逆映射位置的灰度值
  ii. 前向映射不好量化灰度值

d)

18. 图像配准：寻找标记点，计算最优的仿射变换（最小二乘法）
  a) 应用：几何校正、图像卷绕
19. 正变换核可分、对称傅里叶变换可分、对称

三、灰度变换与空间滤波

1. 灰度变换：对比度拉伸、阈值处理函数
  a) 对数变换：s=clog(1+r)，低灰度值扩展，高灰度值压缩；显示暗色中隐藏的细节
  b) 幂律变换：$s=cr^{\gamma}$
    i. γ<1：低灰度值扩展，高灰度值压缩；
    ii. γ>1：低灰度值压缩，高灰度值扩展；
    iii. 伽马校正：因为显示设备就是依具幂律来响应的
    iv. γ太小或太大都会导致对比度降低，不利于观察

c) 分段线性函数：

i. 对比度拉伸：单调递增，保持灰度级顺序

1. 线性拉伸、阈值处理

ii. 灰度级分层：医学图像处理关注病变区域、卫星图关注水系等，只需突出需要关注部分的灰度范围

iii. 比特平面分层：突出特定比特的作用

1. 高阶比特平面包含视觉上重要的数据
2. 低阶比特平面贡献了更精细的灰度细节
3. 伪轮廓：灰度级不足时产生的山脊状边缘

2. 直方图处理：必考！

a) 简单应用：分割前景背景，计算物体面积

b) 输入图像 p_r 变换到输出图像 p_s 灰度值概率密度

$$p_s(s) = p_r(r)\left|\frac{dr}{ds}\right| = p_r(r)\left|\left(\frac{ds}{dr}\right)^{-1}\right|$$

$$= p_r(T^{-1}(s))\frac{1}{|T'(T^{-1}(s))|}$$

c) 直方图均衡化——连续、离散，要会计算！下左图连续，右图离散

- 输入图像灰度值的概率密度

$$p_r(r) = \begin{cases} \frac{2r}{(L-1)^2} & \text{for } 0 \le r \le L-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 变换函数

$$s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)\,dw = \frac{2}{L-1}\int_0^r w\,dw = \frac{r^2}{L-1}$$

- 输出图像灰度值的概率密度

-1是取倒

$$p_s(s) = p_r(r)\left|\frac{dr}{ds}\right| = \frac{2r}{(L-1)^2}\left|\left[\frac{ds}{dr}\right]^{-1}\right| = \frac{2r}{(L-1)^2}\left|\left[\frac{d}{dr}\frac{r^2}{L-1}\right]^{-1}\right|$$

$$= \frac{2r}{(L-1)^2}\left|\frac{(L-1)}{2r}\right| = \frac{1}{L-1}$$

$$s_k = T(r_k) = (L-1)\sum_{j=0}^{k} p_r(r_j)$$

d) 直方图匹配（规定化）——下左图连续，右图离散！要会算

- 输入图像灰度值概率密度$p_r(r)$

$$s = T(r) = (L-1)\int_0^r p_r(w)\,\mathrm{d}w$$ 变成灰度均衡图像

- 指定灰度值概率密度$p_z(z)$

$$G(z) = (L-1)\int_0^z p_z(t)\,\mathrm{d}t = s$$ 把输出的通过G(z)变成均衡图像

- 反函数唯一 从r到s再到z

$$z = G^{-1}(s) = G^{-1}(T(r))$$

r_k	n_k	$p_r(r_k) = n_k/MN$
$r_0 = 0$	790	0.19
$r_1 = 1$	1023	0.25
$r_2 = 2$	850	0.21
$r_3 = 3$	656	0.16
$r_4 = 4$	329	0.08
$r_5 = 5$	245	0.06
$r_6 = 6$	122	0.03
$r_7 = 7$	81	0.02

z_q	Specified $p_z(z_q)$
$z_0 = 0$	0.00
$z_1 = 1$	0.00
$z_2 = 2$	0.00
$z_3 = 3$	0.15
$z_4 = 4$	0.20
$z_5 = 5$	0.30
$z_6 = 6$	0.20
$z_7 = 7$	0.15

e) 直方图均衡的缺陷：图像变得更亮，但是对比度并没有明显改善

i. 原因：输入图像中绝大部分像素较暗，刚开始的 $p_r(r_j)$求和就已经非常大了。再加上离散的图像直方图均衡存在误差，乘以(L-1)以后就导致灰度较低的像素映射的结果就很亮。又因为映射函数单调递增，所以画面整体偏亮，对比度低——简答题

ii. 解决：多次尝试，选择最好的直方图匹配

f) 局部直方图统计增强：

i. 局部均值比全局均值的 k_0 倍小->暗

ii. 邻域标准差比全局标准差小->低对比度

iii. 局部标准差大于等于一个数字->防止增强常数区域。

$$g(x,y)=\begin{cases} E\cdot f(x,y) & \text{if } m_{S_{xy}} \le k_0 m_G \text{ AND } k_1\sigma_G \le \sigma_{S_{xy}} \le k_2\sigma_G \\ f(x,y) & \text{otherwise} \end{cases}$$

g) 判断题：直方图均衡一大好处：不需要更多的参数，完全“自动化”（√）

h) 判断题：离散形式下，直方图均衡的概率分布是完全均匀的（×，连续形式下均匀，离散情况下因为引入离散的概率密度、舍入等问题而不会完全均匀）

i) 判断题：直方图均衡有时候会失效（√，所以需要直方图匹配、局部直方图均衡等处理）

3. 空间滤波基础

a) 相关：平移滤波器模板，计算每个位置乘积之和

i. 和离散单位冲激做相关操作，得到的结果相当于把滤波器模板旋转 180 度

b) 卷积：与相关相似，但滤波器要旋转 180 度

i. 和离散单位冲激做卷积操作，得到的结果相当于滤波器模板（旋转 360 度）

c) 计算过程：补零、计算、滑动、裁剪

4. 平滑空间滤波器

a) 均值滤波器/低通滤波器（例如 9 个 1，结果除以 9）

i. 优点：降低噪声，去除伪轮廓

ii. 缺点：边缘模糊

b) 平滑线性滤波器（角落 1，边缘 2，中间 4，结果除以 16）

i. 优点：降低噪声，降低边缘模糊

c) 均值滤波：可能去除小物体，边缘随模板变大而更模糊，模板越大边界黑框越大

d) 中值滤波：可以去除椒盐噪声（均值滤波适合去除小噪声如高斯噪声）

5. 锐化

a) 一阶导数：产生较粗边缘

i. 在恒定灰度区域为零

ii. 在突变（斜坡、台阶）的起点非零，终点为零

iii. 沿着斜坡非零

b) 二阶导数的性质：产生两个有间距的双边缘，更适合图像锐化，增强细节，但是对噪声的抵抗能力比一阶导数更差

i. 在恒定灰度区域为零

ii. 在突变（斜坡、台阶）的起点和终点非零（起点从 0 变非 0，终点从非 0 变 0）

iii. 沿着恒定斜率斜坡为零

一维函数$f(x)$

- 一阶导数

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f(x+1)-f(x)$$

- 二阶导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)$$

c) 拉普拉斯算子：g(x,y)=f(x,y)+c[f(x,y)的二阶微分]

i. 叠加到原图可以锐化，注意中心系数负数时 c=-1，否则 c=1

- 标准形式

$$\nabla^2 f(x,y) = f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y+1) + f(x,y-1) - 4f(x,y)$$

0	1	0
1	−4	1
0	1	0

90度增量
各向同性

- 对角线形式

用得更多

1	1	1
1	−8	1
1	1	1

45度增量
各向同性

d) 非锐化掩蔽 k=1，高提升滤波 k>1：先模糊图像，然后原图-模糊图=模板，然后原图+k*模板得到增强的图像

$$g_{\text{mask}}(x,y) = f(x,y) - \bar{f}(x,y)$$

$$g(x,y) = f(x,y) + k * g_{\text{mask}}(x,y)$$

i.

e) Sobel 算子：梯度的离散近似（梯度突出边缘，对细节响应弱）

对称模板 线性的，线性滤波器可算

$$g_x = \frac{\partial f}{\partial x} = (z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)$$

$$g_y = \frac{\partial f}{\partial y} = (z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)$$

−1	−2	−1
0	0	0
1	2	1

−1	0	1
−2	0	2
−1	0	1

- 计算大小 非线性，算大小

$$M(x,y) \approx |(z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)| + |(z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)|$$

6. 混合空间增强法

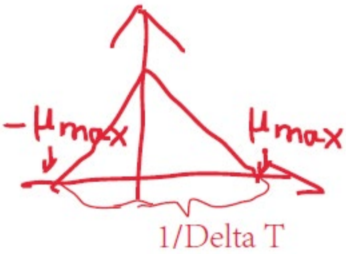
四、频率域滤波

1. 连续单位冲激长度为 0，高度为∞，面积为 1；离散单位冲激高度为 1
2. 盒状函数的傅里叶变换
   a) 零点的位置与 W 成反比，逐渐降低，无限延伸
   b) 即盒状函数宽度为 W，傅里叶变换后右侧第一个零点位置变成 1/W
3. 冲激串：周期为ΔT
   a) 冲激串的傅里叶变换：还是冲激串，并且周期变成 1/ΔT
4. 傅里叶谱/频谱
   a) （0 处的）连续单位冲激的傅里叶变换 F(μ)=1
   b) f(t)的傅里叶变换为 F(μ)，F(t)的傅里叶变换为？f(-μ)
5. 卷积定理（离散连续都成立）
   a) 空间域卷积的傅里叶变换 等价于 傅里叶变换在频率域的乘积

$$f(t) \star h(t) \Leftrightarrow H(\mu)F(\mu)$$

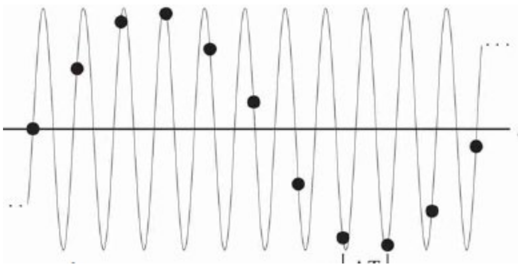
b) 空间域乘积的傅里叶变换 等价于 傅里叶变换在频率域的卷积 $f(t)h(t) \Leftrightarrow H(\mu) \star F(\mu)$

6. 采样
   c) 能否通过离散的采样点，恢复连续函数？要大于等于奈奎斯特频率才可以（采样定理），换一种说法，要从 F(\mu)中分离出一个完整的周期，才可以还原 f(t)
   d) **采样定理（非常重要）：**如果以**超过函数最高频率的两倍采样率**来获得样本，**连续**的**带限**函数可以完美地从它的样本集来恢复。



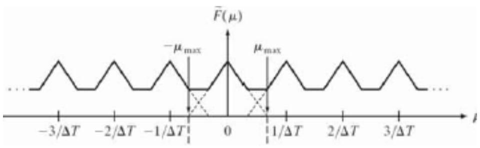
即 1/\Delta T>2\mu_{\max}

      i. **注意等号不行！**反例：

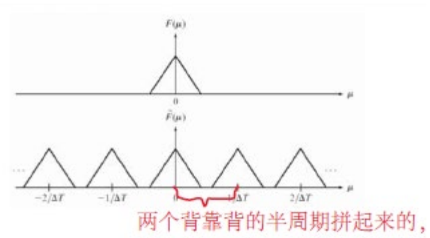


，如果按照两倍奈奎斯特频率采样，就会出现常数的结果！所以应该大于!!!

   e) 奈奎斯特频率：2\mu_{\max}
   f) 欠采样：带限函数以低于奈奎斯特频率采样，无法分离且无法补救

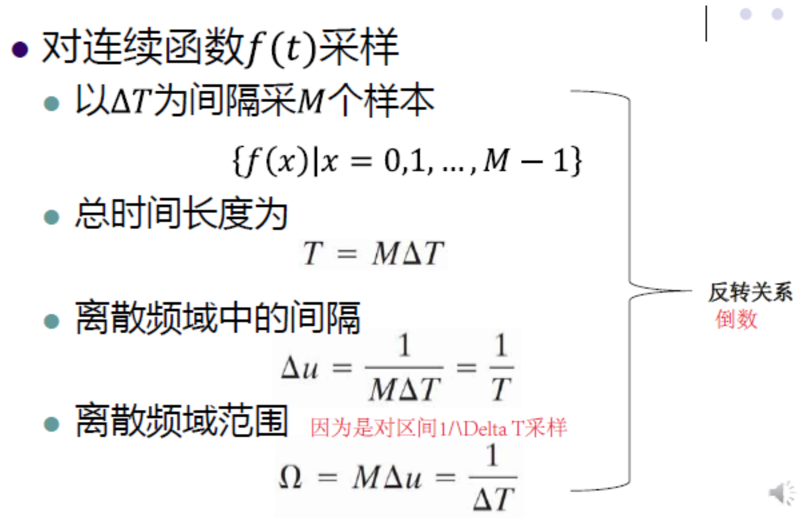


7. 混淆：取样过的函数里，混淆总是存在有限长度的采样和记录工作，**混淆不可避免**。
   g) 因为采样定理仅对**连续的带限函数**有用，但样本要是无穷多个，现实中的<u>采样就是有限的</u>，而<u>有限长度的采样一定会引入无限频率分量</u>
   h) $f(t)h(t) \Leftrightarrow H(\mu) \star F(\mu)$ 因为采样是一个盒状函数，而盒装函数 h 的傅里叶变换后 H 是无限频率的
   i) 抗混淆：平滑输入函数减少高频分量（如<u>图像散焦</u>）在采样之前完成以减轻混淆
   j) **采样定理永远是对的！**混淆（引入无限分量）不会让他错，压缩感知、矩阵补全（用了先验知识）都不会让他错
8. 离散傅里叶变换：对 F(μ)的周期[0, 1/ΔT]采样！周期不是[-1/2ΔT, 1/2ΔT]!
   a) 此时得到的不是一个连续的周期，而是两个周期的半周期拼起来的



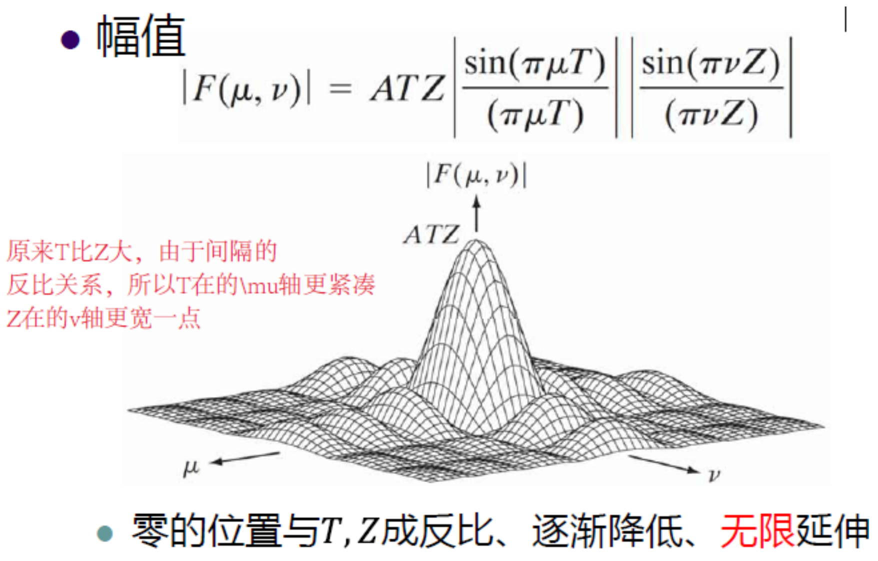
b) 表达式不依赖采样间隔、频率间隔，适用于**任何均匀取样**的**有限离散**样本集

9. 采样频率和采样间隔



a)

10. 二维盒状函数的傅里叶变换，长宽分别为 T，Z



11. 二维采样定理：如果一个**二维带限连续**函数在两个方向上**均**以**大于最高频率的两倍**采样率来获得样本，则该函数可以完美地从它的样本集来恢复。

12. 图像的混淆：一定会有混淆，因为现实生活图像不是无限，而是有限的
    a) 抗混淆必须在采样前完成
    a) 空间混淆：欠采样、锯齿、伪高光、虚假模式
    b) 时间混淆：车轮倒转现象

13. 图像采样
    a) 图像放大：过采样——目的图像缩小，灰度内插，目的图像恢复

b) 图像缩小：欠采样——目的图像放大，灰度内插，目的图像恢复
    a) 一定要先抗混淆：如先用均值滤波器平滑目的图像，再进行操作

14. 摩尔模式：<u>两个近似等间隔的光栅产生的差拍模式</u>
    a) 解决方案：用高精度扫描解决

15. 二维离散傅里叶变换
    a) DFT

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

    b) IDFT

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

    c) 采样频率和采样间隔

对连续函数$f(t,z)$采样

- t方向上以ΔT为间隔采M个样本
- z方向上以ΔZ为间隔采N个样本
- 两个方向上的总时间

$$T=M\Delta T \qquad Z=N\Delta Z$$

- 离散频域中的间隔

$$\Delta u=\frac{1}{M\Delta T} \qquad \Delta v=\frac{1}{N\Delta Z}$$

- 离散频域范围 $\frac{1}{\Delta T}$ $\frac{1}{\Delta Z}$

    d) 基本性质
        i. 平移性

f(x,y)乘这个e，相当于F平移

$$f(x,y)e^{j2\pi(u_0x/M+v_0y/N)}\Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$$

F乘这个e，相当于f平移

$$f(x-x_0,y-y_0)\Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi(x_0u/M+y_0v/N)}$$

            1. 平移性不影响幅值
            2. 因为采样 0~M-1 和 0~N-1，所以要利用平移性移动 M/2 和 N/2
                a)

f乘以这个项再傅里叶变换就相当于把F平移过去了

$$f(x,y)(-1)^{x+y}\Leftrightarrow F(u-M/2,v-N/2)$$

        ii. 旋转性

极坐标：$x=r\cos\theta \quad y=r\sin\theta \quad u=\omega\cos\varphi \quad v=\omega\sin\varphi$

$$f(r,\theta+\theta_0)\Leftrightarrow F(\omega,\varphi+\theta_0)$$

$f(x,y)$旋转θ_0，则$F(u,v)$旋转相同的角度

        iii. 周期性：两个方向上无限周期
        iv. 对称性（见下单列）

16. 对称性：
    a) 偶函数：$w_e=(x,y)=w_e(M-x,N-y)$
        i. 考虑 M=4，f={2,1,1,1}，那么 f(0)=f(4), f(1)=f(3)，因此是偶序列
        ii. 任意四个点偶序列形如{a,b,c,b}
    b) 奇函数：$w_o(x,y)=-w_o(M-x,N-y)$
        i. 考虑 M=4，f={0,-1,0,1}，那么 f(0)=-f(4)，f(1)=-f(3)，f(2)=-f(2)=0，因此奇序列
        ii. 任意四个点奇序列形如{0,b,**<u>0</u>**,-b}

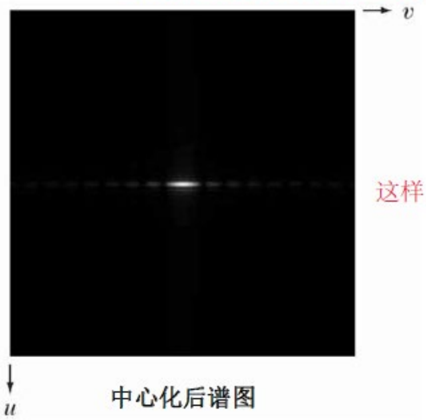
a) 注意第三个数字为 0！易错

c) $$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$ 这个是奇序列，实际上就是一个 Sobel 模板

17. 傅里叶谱
    a) 傅里叶谱关于原点偶对称，相角关于原点奇对称
    b) |F(0,0)|=MNf_ba(x,y)，通常是谱的最大分量，被称为直流分量，频率为 0，代表原图的平均灰度

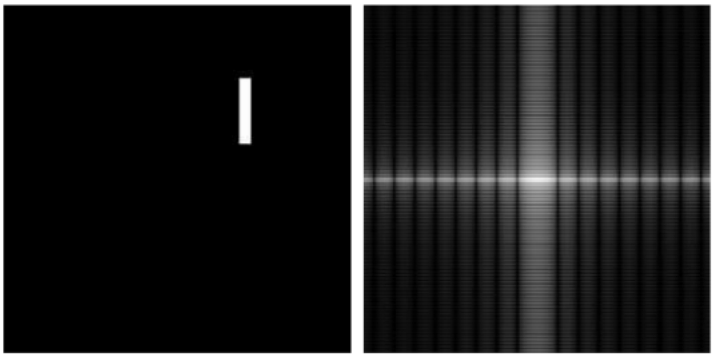
$$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - M/2, v - N/2)$$

对原图中心化再傅里叶变换，就相当于把傅里叶谱平移



这样，就是一个完整的傅里叶变换周期

中心化后谱图

    c) 图像平移改变傅里叶谱吗？不改变
        a) 
        b) 注意原图里面是一个标准盒状函数，水平方向比较紧凑，垂直方向比较宽，那么反映到傅里叶谱图里面就是水平方向比较宽，垂直方向比较紧凑
    d) 图像旋转改变傅里叶谱吗？改变，图像旋转θ，谱图旋转θ
    e) **傅里叶谱**决定了正弦波的幅度，表示**灰度/能量**
    f) **相角**表示正弦波的位移，携带了**定位信息/形状信息**

18. 二维卷积定理

先卷积再傅里叶变换，等价于先变换再相乘

$$f(x, y) \star h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)H(u, v)$$

空间域相乘再傅里叶变换等价于变换再卷积

$$f(x, y)h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \star H(u, v)$$

：频率域滤波的理论依据

   a) 可以依据卷积定理计算卷积吗？不可以，要循环扩展周期到无限才行（循环卷积）
   b) 缠绕错误：卷积被相邻周期干扰，需要通过两端 0 填充解决
19. 二维傅里叶变换
   a) 图像的空间域卷积 和 先变换到频率域，相乘，再反变换，二者等价吗？不等价：因为卷积定理里面 FH 都是周期函数，卷积是循环卷积，即 fh 都应该是循环函数才等价，但是实际上 fh 卷积并不是循环卷积，所以二者并不等价——由此引发缠绕错误
      i. 解决方案：0 填充可以让卷积定理和直接卷积一致，从而避免缠绕错误

$$f_p(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \le x \le A-1 \quad \text{and} \quad 0 \le y \le B-1 \\ 0 & A \le x \le P \quad \text{or} \quad B \le y \le Q \end{cases}$$

$$h_p(x, y) = \begin{cases} h(x, y) & 0 \le x \le C-1 \quad \text{and} \quad 0 \le y \le D-1 \\ 0 & C \le x \le P \quad \text{or} \quad D \le y \le Q \end{cases}$$

      ii.
      iii. 其中 f(x,y)是 A*B 大小的，h(x,y)是 C*D 大小的，P>=A+C-1，Q>=B+D-1，直接选择满足要求的最小偶数即可
20. 频率域滤波
   a) 步骤 $g(x, y) = \mathfrak{F}^{-1}[H(u, v)F(u, v)]$，注意 g 最后取实部即可
   b) 要中心化：在变换域中心进行变换
   c) 要零填充：防止缠绕错误。下图从左到右：原图、错误、正确

      i. 原因：离散傅里叶变换的固有周期性
      ii. 图像的零填充简单，滤波器模板的零填充呢？
         a) 不那么好的解决方案：空间域滤波器转换到频率域然后填充：引入无穷分量
         b) 好的解决方案：直接设计与填充后图像一样大的频率域滤波器，虽然并不能完全避免缠绕错误，但是效果好
   d) 如果拒绝直流分量？直流分量代表平均灰度，设置成 0 就相当于平均灰度为 0 了
   e) 低通滤波器：衰减高频而通过低频，模糊图像，低频对应于图像中缓慢变化的灰度
   f) 高通滤波器：衰减低频而通过高频，强化细节，高频对应于图像中剧烈变化的灰度。但是 H 中间设成 0，就导致平均灰度变成 0 了，图像比较暗，而且负数也变成 0，对比度就降低了
      iii. 解决方案：略微平移滤波器，让滤波的最小值>0
   g) 均值滤波器/低通滤波器：降低噪声，去除伪轮廓，但边缘模糊
   h) 加权线性滤波器：降低模糊

i) 高通滤波器 $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

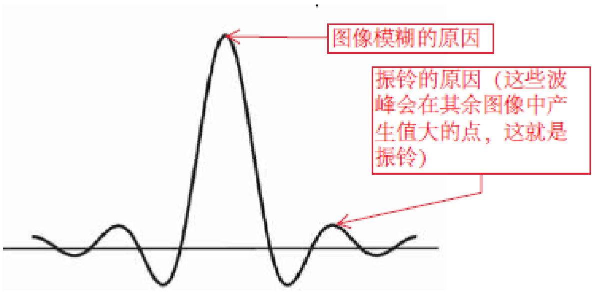
j) 拉普拉斯算子、Sobel 算子

21. 平滑图像

a) 理想低通滤波器 $H(u,v) = \begin{cases} 1 & \text{if } D(u,v) \le D_0 \\ 0 & \text{if } D(u,v) > D_0 \end{cases}$，D0 硬截止

i. 低频完全保留，高频完全抑制，但引入振铃现象

1. 振铃产生的原因？



2. 在截止频率 D0 处截止，类似盒状函数，频率域的结果会产生类似 sinc 函数的周期震荡的分布特性。正是如此，中间的凸起使得它能模糊图像，而周围的突起则导致输出图像灰度剧烈变化的周围产生灰度值的震荡，即振铃效应

b) 巴特沃斯低通滤波器 $H(u,v) = \dfrac{1}{1 + [D(u,v)/D_0]^{2n}}$，D0 不是硬截止，而是指 H 下降到某个百分比。

i. n=1 没有振铃，n=2 时只有轻微的可忽略的振铃现象，是比较好的折中

c) 高斯低通滤波器 $H(u,v) = e^{-D^2(u,v)/2D_0^2}$，D0 不是硬截止

a) 没有振铃现象，平滑效果不如巴特沃斯 n=2，根据应用选用即可

d) 巴特沃斯低通滤波器低频通过更多，高频抑制更多，因此更平滑/模糊，主要控制高频、低频

e) 高斯低通滤波器不出现振铃，但平滑效果不如巴特沃斯，更主要为了抑制振铃现象

f) 字符识别：可用低通滤波器平滑连接，也可以用形态学的膨胀操作

22. 锐化图像

a) 1-低通=高通

b) 理想高通滤波器：多峰会导致振铃现象；中间比较亮，图像会出现亮的区域；波峰宽度决定滤波的粒度，只能识别比它大的物体

i. 振铃现象

ii. 小物体丢失

iii. 边缘会不明显

iv. 边界扭曲、加粗

c) 巴特沃斯高通滤波器：

i. 轻微的振铃现象；
ii. 和理想高通滤波器相比对小物体的识别能力相当

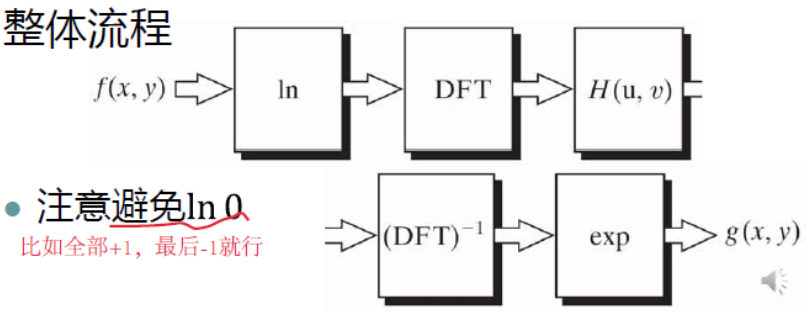
d) 高斯高通滤波器：
   i. 没有振铃现象
   ii. 结果更清晰

e) 应用：指纹增强、去除斑点、增强纹路
f) 频率域的拉普拉斯算子（二阶导数锐化）：存在量纲问题，需要归一化
g) 频率域非锐化掩蔽（k>1 时高频强调滤波，也是二阶导数）：

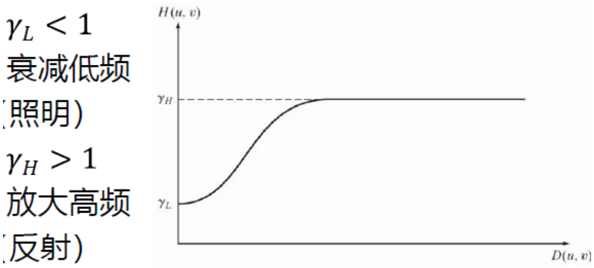
$$g(x, y) = \Im^{-1}\{[k_1 + k_2 * H_{HP}(u, v)]F(u, v)\}$$

   i. 相比于高通滤波器的优势？高频强调滤波可以设置 k1 为非零，通过直流分量，让灰度不那么暗，保持对比度，还能强化图像细节。而高通滤波器则降低灰度，对比度也降低了

h) 同态滤波：照射和反射分量的分离，实现分别滤波



   i. 照射分量对应低频（较稳定），反射分量对应高频（变化较快）
   ii. 特点：压缩灰度范围，增强对比度（虽然压缩灰度范围会导致对比度变差，但是放大高频，增强了反射分量的贡献，反而增强了对比度）
   iii.

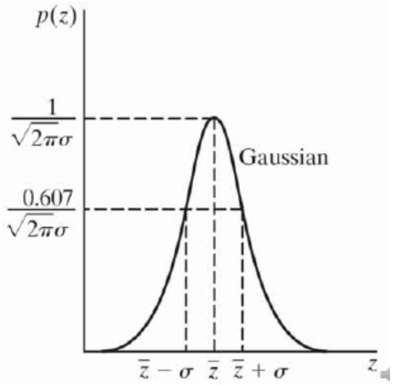


23. 选择性滤波
   a) 带阻滤波器：处理特定频段阻断
   b) 带通滤波器：处理特定频段通过
   c) 陷波滤波器：特点 1.处理特定区域；2.保持对称性，要同时满足这两个特点
      i. 交互式构造带阻陷波滤波器或带通陷波滤波器来达到效果
      ii. 摩尔模式、周期性噪声都可以通过陷波带阻滤波器滤除，周期性噪声可以由陷波带通滤波器提取
24. 频率域滤波的基本流程？
25. 复杂度：原来：O(M^2N^2)，现在：O(MN*log2M*log2N)，让理论走向现实

五、图像复原

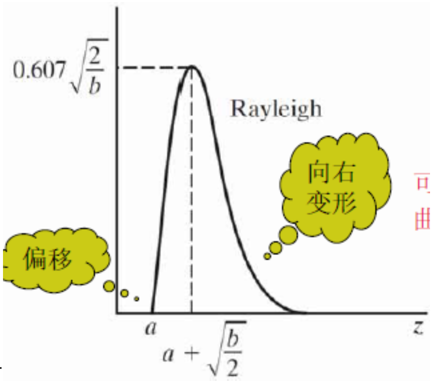
1. 图像退化/复原建模：客观的过程，有固定目标
2. 噪声模型

a) 高斯噪声



i. 电路、传感器噪声

b) 瑞利噪声

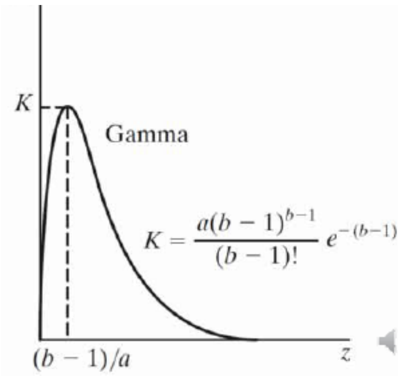


：可不从 0 开始

i. 可用来近似扭曲的直方图

ii. 范围成像

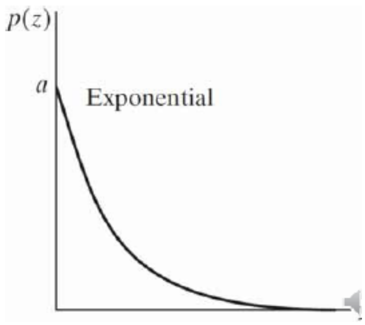
c) 爱尔兰（伽马）噪声



：从 0 开始非对称

i. 激光成像

d) 指数噪声（爱尔兰噪声的特殊情况）

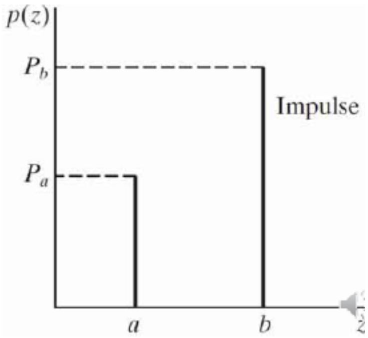


i. 激光成像

e) 均匀噪声

    i. 仿真生成随机数

f) 脉冲（椒盐噪声）



    i. 图像中有错误的开关操作，快速过渡

g) 周期噪声：频率域有很多共轭对称的亮点，在频率域滤波去除亮点即可

3. 噪声参数估计：
    a) 周期噪声：通过检查傅里叶谱、图像本身
    b) 一般噪声：
        i. 先估计 PDF:查看传感器说明书；主动成像去估计参数，如拍摄纯色的物体；从图像的局部稳定区域来估计噪声
        ii. 估计噪声 PDF 类型后根据 1.均值和方差；2.直接估计法估计具体参数
4. 仅有噪声的图像复原
    a) 周期噪声，直接频率域滤波
    b) 一般加性噪声：空间滤波
        i. 算术均值滤波器：平滑图像中的局部变化
        ii. 几何均值滤波器：相比算术均值而言丢失细节少
        iii. 谐波均值滤波器：适用于盐粒噪声，不适用于胡椒噪声。为什么？

$$\hat{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(s,t)\in S_{xy}} \frac{1}{g(s,t)}}$$

            1. 因为盐粒噪声值比较大，胡椒噪声值比较小，1/胡椒噪声会放大胡椒噪声的影响，所以盐粒噪声会被抑制，胡椒噪声会被放大
        iv. 逆谐波均值滤波器
            1. $$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t)\in S_{xy}} g(s,t)^{Q}}$$
            2. **Q>0 消除胡椒，黑暗区域变窄**；不适合盐粒，因为 Q>0 会让盐粒噪声更大
            3. Q=0 算数均值；
            4. **Q<0 消除盐粒，黑暗区域变宽**；不适合胡椒，因为 Q<0 会让胡椒噪声更大
            5. Q=-1 谐波均值滤波器
    c) 统计排序滤波器
        i. 中值滤波器：排序后中位数，适用于单极或双极的脉冲信号
        ii. 最大值滤波器：取最大值，降低胡椒噪声
        iii. 最小值滤波器：取最小值，降低盐粒噪声

iv. 中点滤波器：最大值和最小值的中点，适用随机噪声（高斯、均匀）

v. α截断的均值滤波：去掉最高，最低的几个，剩余求平均：适用多种噪声（如高斯噪声和椒盐噪声混合，截断去掉椒盐噪声，平均去掉高斯噪声）

1. 算数均值和几何均值滤波没法处理这种情况
2. 中值滤波也会好处理这种情况

d) 自适应局部降噪滤波器（看 PPT）

i. 均值体现平均灰度，方差体现对比度

公式

含噪声的灰度值 全局噪声方差

$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - \frac{\sigma_\eta^2}{\sigma_L^2}\left[g(x, y) - m_L\right]$$

和

局部方差 局部均值

ii. 且如果全局方差>局部方差，强行令比值为 1

e) 自适应中值滤波器：失真更小，同时还能中值滤波去除椒盐噪声

i. 阶段 A：med=min 或 med=max 就增大窗口，直到窗口达到最大或筛除脉冲噪声

ii. 阶段 B：判断当前是否是脉冲噪声，否就直接输出（减少失真），是就输出 med 中值滤波

5. 频率域滤波消除周期噪声

a) 带阻滤波器：理想、巴特沃斯、高斯：去除噪声

b) 带通滤波器：理想、巴特沃斯、高斯：提取噪声

c) 陷波滤波器：处理特定区域，保持对称性

d) 最佳陷波滤波器：多种噪声且噪声并非单一频率

6. 线性、位置不变的退化

a) 退化函数 H 是线性的，满足加性和同质性

$$H[f_1(x, y) + f_2(x, y)] = H[f_1(x, y)] + H[f_2(x, y)]$$

$$H[af_1(x, y)] = aH[f_1(x, y)]$$

空间域

$$g(x, y) = h(x, y) \star f(x, y) + \eta(x, y)$$

频率域

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

b) 图像退化建模

7. 估计退化函数

a) 图像观察估计：选择一个区域，手动去除噪声还原图像，一般用于有价值的老照片

b) 图像配准：估计变换函数，主要公式 $G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$

c) 试验估计：对冲激成像，需要拿到成像设备

d) 建模估计：航拍照片（利用大气湍流模型恢复），运动照片（利用运动模型模拟）

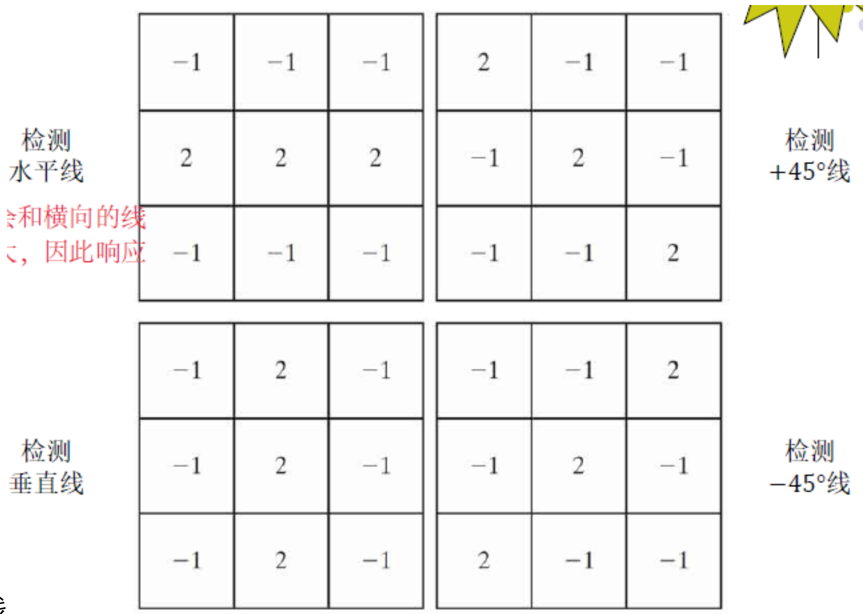
8. 逆滤波，退化函数 H 已知：

$$\hat{F}(u, v) = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$$

a) 知道 N 才可以准确还原，同时为了防止除 0，需要截断频率高的分量（如利用巴特沃斯低通滤波器截断）

六、图像分割

1. 分割的基本原理：灰度的不连续性和灰度的相似性
2. 背景知识：一阶导数和二阶导数的性质和区别
   a) 一阶导数通常产生较粗的边缘
   b) 二阶导数对细节有较强的响应
      i. 细线、孤立点、噪声（会增强噪声）
   c) 二阶导数在斜坡和台阶产生双边缘响应
   d) 二阶导数的符号变化有指示意义
      i. 灰度从亮到暗
      ii. 灰度从暗到亮
3. 孤立点的检测
   a) 二阶导数检测孤立点：拉普拉斯算子检测响应幅度是否大于阈值 T
      i. 响应更强
4. 线检测
   a) 二阶导数检测线
      i. 响应更强、线更细
      ii. 需要留意双线效应
         1. 取绝对值会造成线过粗，但是可以选择只保留正数的线
      iii. 宽线中间产生 0 值的山谷，所以宽线最好被当作区域



检测水平线

−1	−1	−1
2	2	2
−1	−1	−1

检测 +45°线

2	−1	−1
−1	2	−1
−1	−1	2

检测垂直线

−1	2	−1
−1	2	−1
−1	2	−1

检测 −45°线

−1	−1	2
−1	2	−1
2	−1	−1

   b) 检测特定方向的线
      i. 对检测水平线而言，中间大，就会和横向的线乘，导致越乘越大（特定方向权重更大）
   c) 边缘模型
      i. 台阶边缘：理想过渡
      ii. 斜坡边缘：模糊、噪声等
      iii. 屋顶边缘：线条图、卫星图的道路等
   d) 边缘的一阶和二阶导数
      i. 一阶导数的大小用来检测某像素处是否存在边缘；
      ii. 二阶导数的符号用来确定一个边缘像素位于亮或暗区域（正暗负亮，可直接验证）

iii. 零交叉用于确定边缘的中心位置

e) 存在噪声的边缘——结论：存在噪声时，图像平滑很重要

i. 视觉上噪声并不明显

ii. 噪声对一阶和二阶导数影响很大，可能无法辨认

iii. 二阶导数更敏感，相比一阶导数而言更容易无法辨认

f) 边缘检测基本步骤

i. 对图像进行平滑处理——降噪

ii. 边缘点检测（抽取潜在边缘点）

iii. 边缘定位（选择真正的边缘点）

5. 基本边缘检测：基于梯度的：边缘的方向与梯度正交

罗伯特交叉梯度算子

- 考虑对角方向

$$g_x = \frac{\partial f}{\partial x} = (z_9 - z_5)$$

$$g_y = \frac{\partial f}{\partial y} = (z_8 - z_6)$$

z_1	z_2	z_3
z_4	z_5	z_6
z_7	z_8	z_9

- 2维模板

−1	0
0	1

0	−1
1	0

Roberts

i. 罗伯特交叉梯度算子 z9-z5 和 z8-z6

实现的时候更喜欢关于中心对称的算子

普鲁伊特（Prewitt）算子

- 关于中心点对称

$$= \frac{\partial f}{\partial x} = (z_7 + z_8 + z_9) - (z_1 + z_2 + z_3)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y} = (z_3 + z_6 + z_9) - (z_1 + z_4 + z_7)$$

z_1	z_2	z_3
z_4	z_5	z_6
z_7	z_8	z_9

- 2维模板

−1	−1	−1
0	0	0
1	1	1

−1	0	1
−1	0	1
−1	0	1

Prewitt

ii. 普鲁伊特算子

iii. Sobel 算子：强调了中间像素的作用，更加平滑

- **Sobel算子**
  - 关于中心点对称

$$g_x = \frac{\partial f}{\partial x} = (z_7 + 2z_8 + z_9) - (z_1 + 2z_2 + z_3)$$

$$g_y = \frac{\partial f}{\partial y} = (z_3 + 2z_6 + z_9) - (z_1 + 2z_4 + z_7)$$

z_1	z_2	z_3
z_4	z_5	z_6
z_7	z_8	z_9

  - 2维模板

−1	−2	−1
0	0	0
1	2	1

−1	0	1
−2	0	2
−1	0	1

Sobel

中间比较大，强化了中间像素的作用，更加平滑

0	1	1	−1	−1	0
−1	0	1	−1	0	1
−1	−1	0	0	1	1

Prewitt

0	1	2	−2	−1	0
−1	0	1	−1	0	1
−2	−1	0	0	1	2

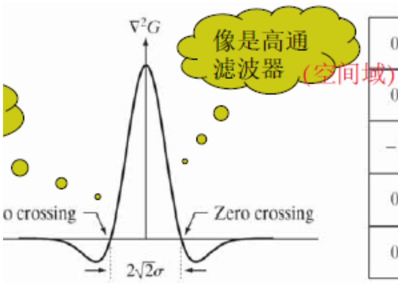
Sobel

iv. 强调对角方向的算子

v. 图像平滑：可以减轻细节纹理和噪声对边缘检测的影响

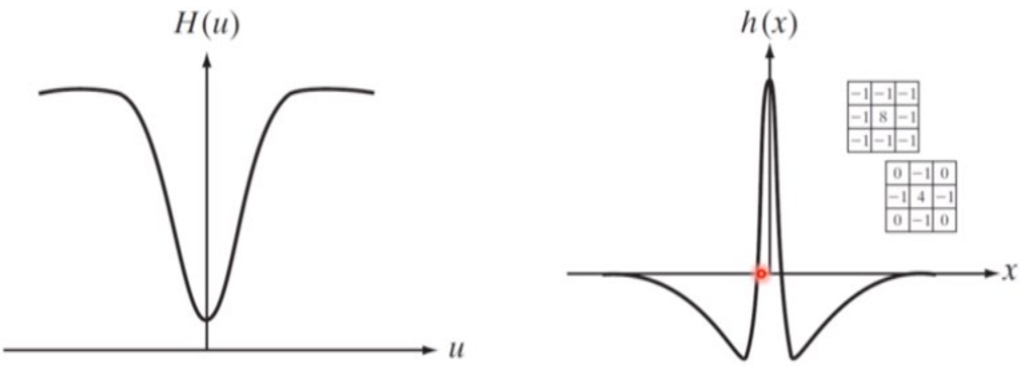
6. 高级边缘检测：Marr-Hildreth 边缘检测器
   a) 理想的检测器应具备如下功能：
      i. 能够近似 1 阶或 2 阶导数
      ii. 能够调整以在不同尺寸上起作用：大的算子检测模糊边缘、小的算子检测细节
   b) 高斯的拉普拉斯（LoG）：二维高斯函数的拉普拉斯算子计算结果

$$\nabla^2 G(x, y) = \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial y^2} = \left[\frac{x^2 + y^2 - 2\sigma^2}{\sigma^4}\right] e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

   c) 

0	0	−1	0	0
0	−1	−2	−1	0
−1	−2	16	−2	−1
0	−1	−2	−1	0
0	0	−1	0	0

注意这是空间域，不是频率域

   d) 

      i. 左边频率域是高通滤波器，右边是空间域，低通滤波器
   e) 得到高斯的拉普拉斯？对高斯进行采样，得到 n*n 模板，然后与拉普拉斯模板进行卷积，系数之和自动为 0，（√，这种方法更好）
   f) LoG（高斯的拉普拉斯）的优势：
      i. <u>高斯部分会模糊图像</u>
         1. <u>可以去掉尺寸小于的细节，比如噪声</u>

        2. 高斯函数曲线平滑，不会引入振铃等干扰
    ii. 二阶导数
        1. 各向同性，对任何方向的变化有相同的相应（不像梯度只能检测特定方向）
        2. 符合人的视觉系统
        3. 边缘的宽度为 1
  g) **方法：**
    i. **用 n*n 的高斯低通滤波器平滑图像（n 是>=6\sigma 的最小奇数）**
        1. **目的：6\sigma 是为了保留高斯函数的主要形状，让模板覆盖主要的高斯函数；奇数是为了中心对称**
    ii. **计算上述图像的拉普拉斯**

1	1	1
1	−8	1
1	1	1

    iii. **最后寻找上述结果的零交叉：相对的邻域像素（上下、左右、两对角）的符号相反且差异大于某阈值**
  h) 优点：边缘宽度都为 1
  i) 扩展：考虑不同的尺度、使用高斯差分 DoG，\sigma_1:\sigma_2=1.6:1 来近似 LoG
7. 高级边缘检测：Canny 边缘检测器（老师说不会考）
  a) 目的
    i. 低错误率：所有边缘都被找到，并且没有伪响应
    ii. 边缘点应被很好地定位：已定位的边缘必须尽可能接近真实边缘
    iii. 单一的边缘点响应：对每个真实边缘点，检测器仅返回 1 个点
  b) 步骤：
    i. n*n 高斯函数（n>=6\sigma 的最小奇数）平滑输入图像
    ii. 计算图像的梯度：梯度大小、梯度角度
    iii. 非最大抑制：得到细边缘
    iv. 滞后阈值：检测边缘
    v. 连通性分析：连接边缘
8. 边缘连接和边界检测：局部处理
  a) 基于梯度大小、梯度方向等判断相似性，然后连接不超过 K 的空隙
9. 边缘连接和边界检测：区域处理
  a) 知道感兴趣的区域位置，预先知道属于边界的像素点
  b) 区域处理算法？lecture_6 P123-P124
10. 边缘连接和边界检测：全局处理——霍夫变换
  a) 没有边缘先验知识，根据全局性质（如指定感兴趣的几何形状、判断像素集合是否满足该形状）等来判断是否为边缘像素
  b) 问题：给定 n 个点，寻找共线的像素
  c) 写成法线方程 xcosθ+ysinθ=ρ（因为直线是无界的，但是法线方程可以写成有界的-90~90 的θ和-D~D 的ρ，D 是对角长度），然后放到ρθ平面上看，每个点对应一个正弦曲线
  d) 步骤
    i. 生成二值的边缘图像：可用 Marr-Hildreth、Canny 算法
    ii. 划分ρθ平面的累加单元：需要决定粒度，粒度直接决定了精度和计算量

iii. 统计每个累加单元的曲线数量（一个单元的曲线视作交于一点），寻找数值高的单元
iv. 检验数值高的那些累加单元对应的像素，然后将距离小于某阈值的像素连接起来（防止把特别远的连接起来了）

e) 可以拓展到直线以外的其它曲线

七、图像压缩

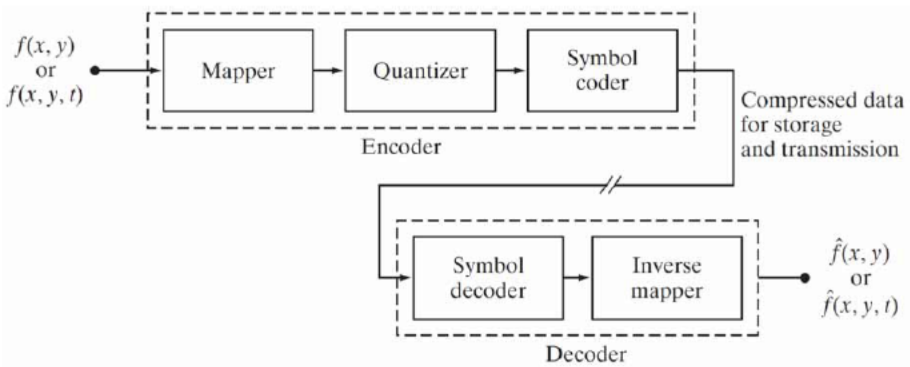
1. 压缩比 $C = \frac{b}{b'}$，相对数据冗余 $R = 1 - \frac{1}{C}$
   a) b 和 b'表示两种不同表示方式的比特数
   b) C=10 意味着 90%的冗余
   c) 压缩比越大，相对数据冗余越大
2. 二维灰度矩阵包含三种冗余
   a) 编码冗余：
      i. 8bit 可以表达 256 种灰度值，但是可能一张图里面只有 4 种灰度值，这就是编码冗余
   b) 空间和时间冗余：
      i. 图像中的紧邻点空间相关，视频中的连续帧时间相关
      ii. 比如某张图每一行的像素点都是相同的，这也是一种冗余：我们可以说：第一行全是黑色，而非一个一个像素说它是黑色的
   c) 不相关的信息
      i. 被视觉系统忽略的信息——人眼捕捉不到
      ii. 与图像用途无关的信息——比如找风景图像，但是图像上的水印、签名是不需要的
3. 编码冗余
   a) 平均比特数 $L_{avg} = \sum_{k=0}^{L-1} l(r_k) p_r(r_k)$，总比特数为 $M*N*L_{avg}$
   b) 固定比特数的情况下 $l(r_k)=m$，$L_{avg}=m$
   c) 例如 8 位固定编码，$L_{avg}=8$
   d) 例如变长编码——哈夫曼编码
   e) 然后可以算压缩比、相对数据冗余
   f) 还有最优的固定长度编码，但是普遍来说固定长度编码存在冗余（灰度直方图不是均匀分布）
4. 空间和时间冗余
   a) 以刚才的每一行的灰度都相同为例 $\frac{256 \times 256 \times 8}{(256+256) \times 8} = \frac{128}{1}$
      灰度值综述总数+次数总数，乘以8bit
   b) 又如：灰度差有规律性、存在映射
5. 不相关的信息
   a) 平均灰度值代替原来所有灰度值 压缩比 $\frac{256 \times 256 \times 8}{8} = \frac{65536}{1}$
   b) 但是需要确定是不是真的不需要这部分信息
   c) 量化：丢失信息且该映射不可逆
6. 图像信息的度量
   a) 随机事件 E 蕴含的信息 $I(E) = \log \frac{1}{P(E)} = -\log P(E)$
      i. 底数为 m，单位是 m-ary；底数为 2 则对应于比特
   b) 信源的熵：$H = -\sum_{j=1}^{J} P(a_j) \log P(a_j)$，指每个输出的平均信息量

        i. 事件独立：0 记忆信源

    c) 灰度信源的熵：$\tilde{H} = -\sum_{k=0}^{L-1} p_r(r_k)\log_2 p_r(r_k)$，指每个灰度输出的平均信息
        i. 不可能使用长度少于 H~的编码，这个是理论下界
    d) 图像的熵：就是用灰度信源的熵计算，其中 $p_r(r_k)$是 r_k 出现的概率
    e) 香农第一定理：无噪声定理，当图像的像素存在相关性，则定理不再成立

7. 保真度准则：量化信息的损失
    a) 客观：均方根误差、均方信噪比
    b) 主观：用户评价

8. 图像压缩模型，整个流程？



    a) 映射器（转换为便于去掉空间和时间冗余的格式，可逆，未必形成压缩）
    b) 量化器（根据预设的保真度准则降低精度，去除不相关信息不可逆）
    c) 符号编码器（生成定长或变长编码，可逆）
    d) 符号解码器：c 的逆操作
    e) 反映射器：a 的逆操作

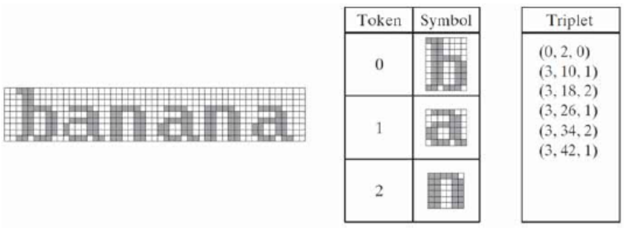
9. 基本的压缩方法：霍夫曼编码
    a) 性质：
        i. 瞬时性：每个编码独立编码
        ii. 唯一可解码：序列解码方式唯一
    b) 简化信源：对符号的概率进行排序，合并低概率符号；重复该过程，直到剩余两个符号

Original source		Source reduction			
Symbol	Probability	1	2	3	4
a_2	0.4	0.4	0.4	0.4	0.6
a_6	0.3	0.3	0.3	0.3	0.4
a_1	0.1	0.1	0.2	0.3	
a_4	0.1	0.1	0.1		
a_3	0.06	0.1			
a_5	0.04				

    c) 对简化后的信息源编码：从最小信源开始，返回到原信源；为每一个分支分配符号
        i. L_{avg}=2.2bits/pixel

Original source			Source reduction							
Symbol	Probability	Code	1		2		3		4	
a_2	0.4	1	0.4	1	0.4	1	0.4	1	0.6	0
a_6	0.3	00	0.3	00	0.3	00	0.3	00	0.4	1
a_1	0.1	011	0.1	011	0.2	010	0.3	01		
a_4	0.1	0100	0.1	0100	0.1	011				
a_3	0.06	01010	0.1	0101						
a_5	0.04	01011								

10. 基本的压缩方法：行程编码（灰度值，该灰度连续出现的次数）
    a) 适用于存在连续灰度值的图像，可去除简单的空间冗余
    b) 适用于二值图像，只需指明长度（假设指定每行的初始灰度值总是 1）
        i. 例如 5,10 意思就是这一行开始是 5 个 0，然后 10 个 1；
        ii. 例如 0,10 意思就是开始是 10 个 0（1 不在开头）
    c) 对长度进一步压缩：霍夫曼编码
11. 基本的压缩方法：基于符号的编码
    a) 图像中频繁出现的子图像，将图像表示为符号的集合
    b) 适用于压缩扫描的文档，三元组 x,y,t 中(x,y)指明位置，t 指明符号索引



9行*51列*每格1bit

$$9 \times 51 \times 1 = 459\text{比特}$$

b+a+n+6个三元组*3元组*每个数字占8bit

$$9 \times 7 + 6 \times 7 + 6 \times 6 + 6 \times 3 \times 8 = 285\text{比特}$$

压缩比：$C = 1.61$

12. 数字图像水印
    a) 作用：版权识别、用户识别、证明真实性、自动监控、复制保护
    b) 可见、不可见水印
        i. 不可见水印：

利用2个最低阶比特 因为肉眼很难见到低两个比特

消除最低两位

$$f_w = 4\left(\frac{f}{4}\right) + \frac{w}{64}$$

水印最高两位藏在图像最低两个bit

高 bit 位储存形状

1. 图像最低比特加水印：最后把高的 6bit 去掉，但是保留最低两个 bit，再把这两个 bit 放到 256 的量级上，就能恢复水印
2. 变换域加水印：标准高斯分布中生成 K 伪随机数嵌入到 K 个最大的系数里面
    a) 安全性强：随机数没有明显的结构、难以定位水印的位置、攻击水印会影响图像质量

    c) 检测变换域的水印？主要是给定水印 w1~wk, DCT 系数 c1~ck, 计算图像的 w1'~wk'(w=(c'-c)/ac)，然后计算 w1~wk 和 w1'~wk'的相关性系数，与阈值 T 进行比较就可以判定了
        i. 对 JPEG 有损压缩、空间滤波平滑、添加高斯噪声很棒
        ii. 对直方图均衡、旋转的效果较差

八、形态学处理

1. 基于结构元的操作：需要添加边框以容纳结构元，类似零填充

2. 腐蚀 $A \ominus B = \{z|(B)_z \subseteq A\}$ 或 $A \ominus B = \{z|(B)_z \cap A^c = \varnothing\}$

    a) $(B)_z$ 表示把集合 B 移到坐标 z
    b) 应用：去掉连接线，但是会导致区域变瘦
    c) 可以被理解为形态学滤波

3. 膨胀 $A \oplus B = \{z|(\hat{B})_z \cap A \neq \varnothing\}$ 或 $A \oplus B = \bigcup_{b \in B}(A)_b$

    a) 优点：比低通滤波器更简单直接，二值图像的输出仍然是二值图像（低通滤波器的输出是灰度图像，需要额外阈值化操作）

B对A的腐蚀求补=B的反射对A补的膨胀

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus \hat{B}$$

B对A的膨胀求补=B的反射对A补的腐蚀

4. 腐蚀与膨胀的对偶性 $(A \oplus B)^c = A^c \ominus \hat{B}$

5. 开操作和闭操作

    a) 开操作 $A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$
        1. 特点：平滑物体的轮廓、断开窄的连接、消除细的突出
        2. 理解：在 A 的边界内侧滚动 B，B 的最远点决定了轮廓
        3. 方向向外的角变圆
        4. 性质
            1. $A \circ B$是A的子集 开操作相当于把A变小
            2. 如果C是D的子集，那么$C \circ B$是$D \circ B$的子集 保持子集的性质
            3. $(A \circ B) \circ B = A \circ B$ 进行一次以后再开操作就没有意义

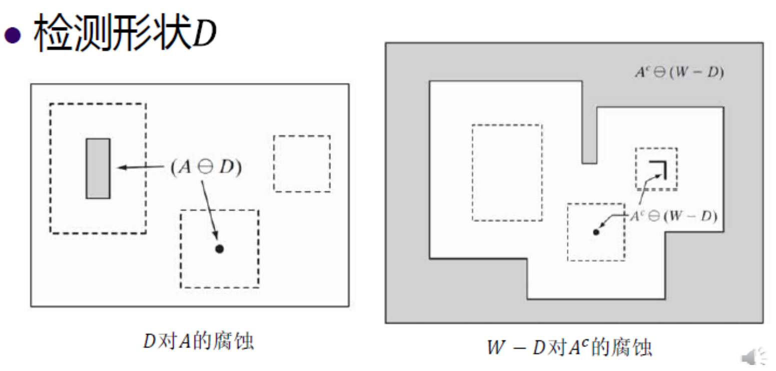
    b) 闭操作
        1. 特点：平滑部分轮廓、熔合窄的间断和长沟壑、消除小孔洞、填补轮廓中的缝隙
        2. 理解：在A的边界外侧滚动B，B的最近点决定了轮廓
        3. 方向向内的角变圆
        4. 性质

1. A是$A \cdot B$的子集 闭操作相当于把A变大
2. 如果C是D的子集，那么$C \cdot B$是$D \cdot B$的子集 保持子集的性质
3. $(A \cdot B) \cdot B = A \cdot B$ 多次闭操作是没有意义的

    c) 对偶性：$(A \bullet B)^c = (A^c \circ \hat{B})$ $(A \circ B)^c = (A^c \bullet \hat{B})$
    d) 应用：去噪（见 PPT）

6. 击中或击不中变换

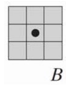
    a) 应用：用于检测图像中的形状
    b) $A \circledast B = (A \ominus D) \cap [A^c \ominus (W - D)]$ D对A的腐蚀与W-D对A的补集腐蚀求交集
        i. W 是包含 D 的小窗口，W-D 是相对 W 而言，D 的局部背景，这里 B=W
    c) 等价形式 $A \circledast B = (A \ominus B_1) - (A \oplus \hat{B}_2)$
    d) 例子：底下两个结果取交集就是结果了



D对A的腐蚀

$W - D$对A^c的腐蚀

7. 边界提取

a) 腐蚀 A 的边界，再用 A 减就是边界了 $\beta(A) = A - (A \ominus B)$ 

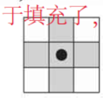
8. 孔洞填充

a) 孔洞：由前景像素连成的边界包围的背景区域，注意 B 的设置，同时还要和 A 的补求交

1. 构造初始X_0 和原始图像一样大
   - 给定的孔洞内初始点设为1，其他为0
2. 按照下面的公式更新

$$X_k = (X_{k-1} \oplus B) \cap A^c \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

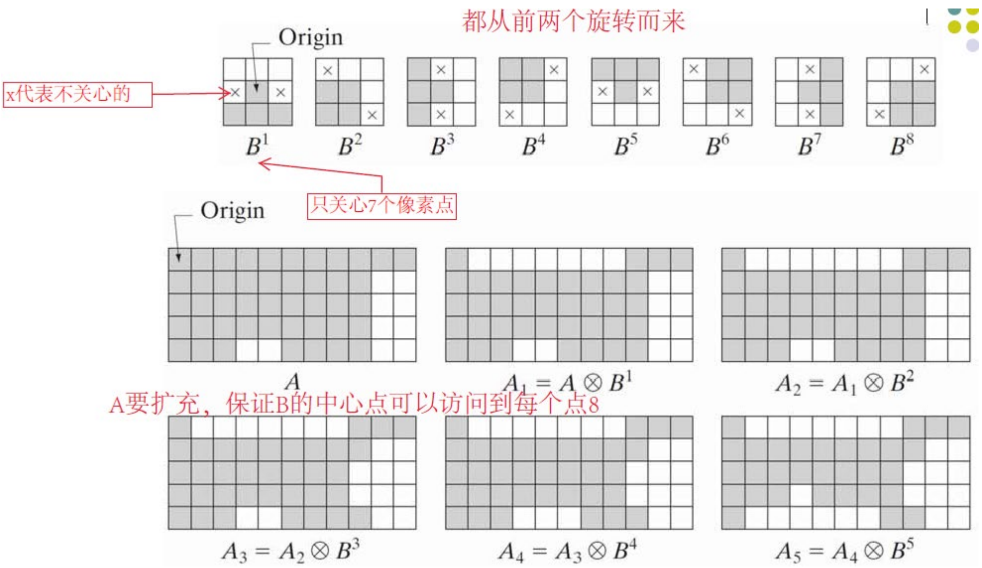
膨胀相当于填充了，然后交A的补，防止膨胀得越来越大

   - 其中B为结构元 

条件膨胀，否则膨胀会填充整个空间

3. 重复上述公式，直到$X_k = X_{k-1}$
   - X_k包含填充后的孔洞
   - $A \cup X_k$为填充后的图像

9. 细化 $A \otimes B = A - (A \circledast B) = A \cap (A \circledast B)^c$



10. 粗化：对补集细化，然后计算结果的补集并去掉孤立点，就是粗化的结果