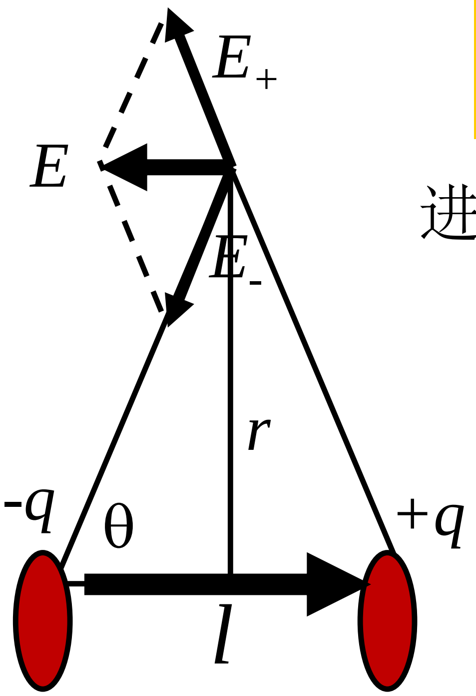
例1：如图电偶极子，求两电荷连线的中垂面上任意一点 P 的电场强度。

定义电偶极子(或称电偶极矩):

$$\vec{p} = q\vec{l}$$

注意：1）l 很小(相对于r)
2）方向从负电荷指向正电荷



进行对称性分析→

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+(l/2)^2}$$

$$E_Q = 2E_+\cos\theta = \frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\cdot(l/2)}{(r^2+(l/2)^2)^{3/2}}$$

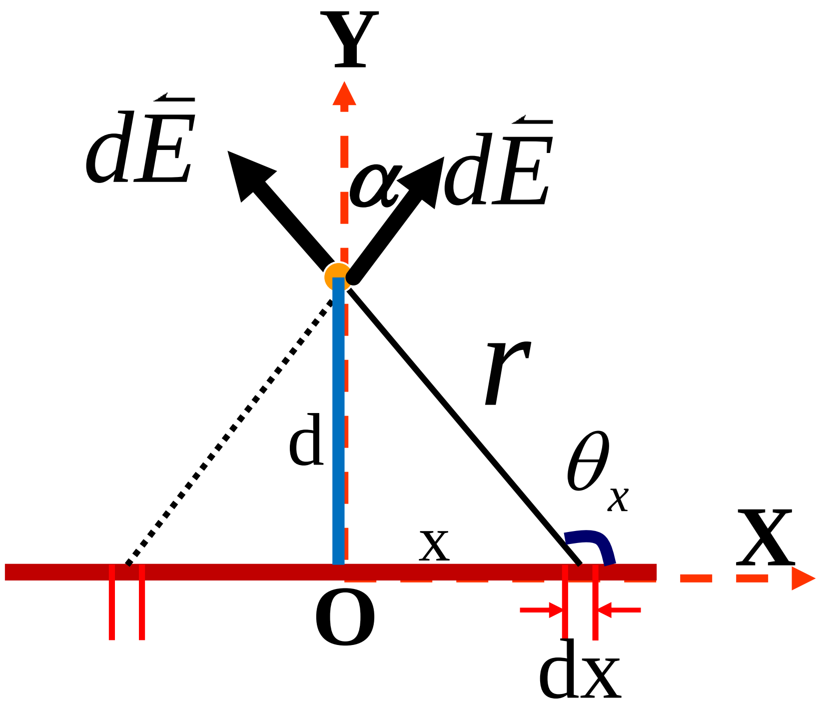
当 Q 点离开很远时，有 $r>>l$，

$$\vec{E}_Q = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{l}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-\vec{p}}{r^3}$$ 方向与电偶极子相反。

电偶极子的电场强度是立方衰减的。

例2:求均匀带电细棒中垂面上的场强分布。长度L，电荷总量q

$\boxed{\text{线密度}\lambda=\left(q/L\right)}$



$$x=-d\bullet ctg\theta,\quad r=d\csc\theta$$

$$dx=d\csc^2\theta d\theta,\quad dq=\lambda dx$$

$$d\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^3}\vec{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r^3}(x\vec{i}+d\vec{j})$$

$$dE_y=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda d^2\csc^2\theta d\theta}{d^3\csc^3\theta}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\sin\theta}{d}d\theta$$

$$E_y=\int dE_y=2\int_{\pi/2}^{\theta_{L/2}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\sin\theta}{d}d\theta$$

$$=\frac{2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{d}\frac{L/2}{\sqrt{d^2+(L/2)^2}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}\frac{L}{\sqrt{4d^2+L^2}}$$

$$L>>d,\quad\frac{L}{\sqrt{4d^2+L^2}}=\frac{L}{L\sqrt{\frac{4d^2}{L^2}+1}}\to 1$$

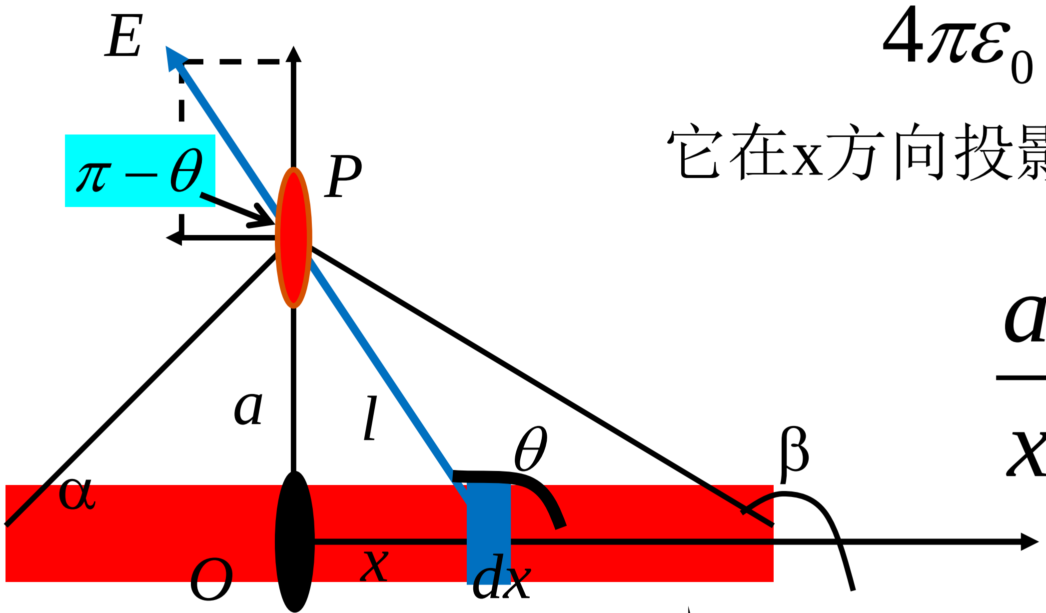
1. 取细棒中心为坐标原点
2. 无数线元**dx**累加
3. 对称性分析：只考虑**y**方向分量

$$L\to\infty: E_y\approx\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}$$

例3：如图，求 *P* 处的电场强度，其中 *a*, α, β为已知。

解：把坐标原点取在 *P* 点正下方，一小段微元 *dx* 在 *P* 处产生的电场为

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{l^2}$$



它在x方向投影

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{l^2}\cos\theta$$

$$\frac{a}{x} = -tg\theta \Rightarrow x = -actg\theta$$

$$dx = -a\cdot d(ctg\theta) = \frac{ad\theta}{\sin^2\theta}$$

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ad\theta}{l^2\sin^2\theta}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda ad\theta}{a^2}\cos\theta$$

所以 $$E_x = \int dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{\alpha}^{\beta}\cos\theta d\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\beta - \sin\alpha)$$

类似的， $$E_y = \int dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\int_{\alpha}^{\beta}\sin\theta d\theta$$

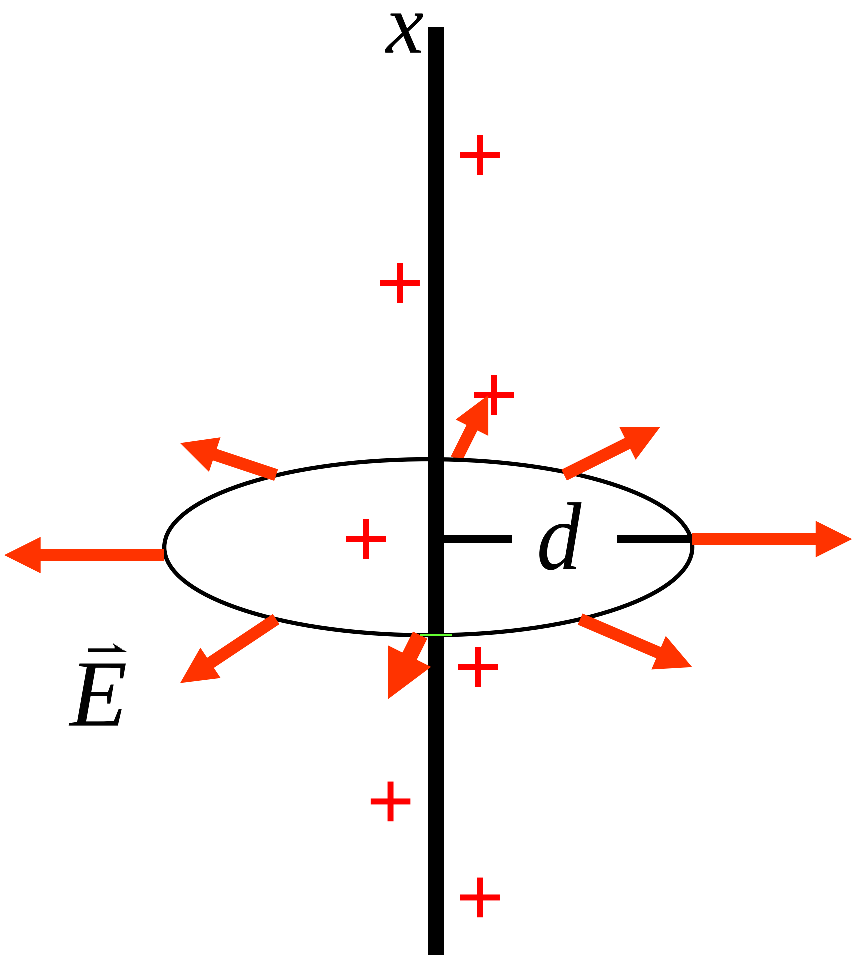
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\alpha - \cos\beta)$$

当细棒为无限长时， $\alpha = 0, \beta = \pi$

$$\begin{cases} E_x = 0 \\ E_y = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2\lambda}{a} \end{cases}$$

和前面结果相同！

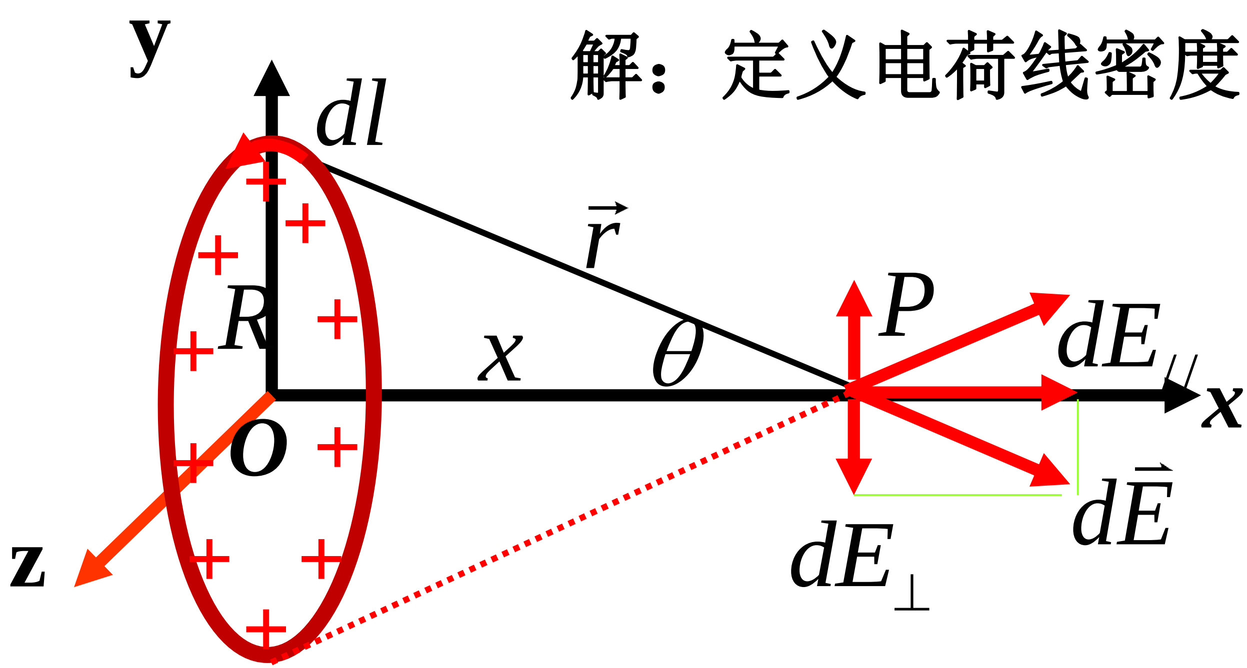
均匀带电细棒中垂面上的场强分布。长度L，电荷总量q



$$L \to \infty$$

$$E_y \approx \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}$$

例4：电荷q均匀地分布在半径为R的圆环上，求圆环中心轴线上任一点p的场强。P点离环心的距离为x。



解：定义电荷线密度 $\lambda = \dfrac{q}{2\pi R}$

对称性分析

垂直分量抵消

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\lambda dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\begin{cases} dE_{//} = dE\cos\theta \\ dE_{\perp} = dE\sin\theta \end{cases}$$

垂直分量抵消 $E = \int_L dE_{//} = \int_L \dfrac{\lambda\cos\theta dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$r = \sqrt{x^2 + R^2}$$

$$dq = \lambda dl$$

$$\lambda = q/(2\pi R)$$

$$E_{//} = \int_L dE_{//} = \int_L \frac{\lambda \cos\theta dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

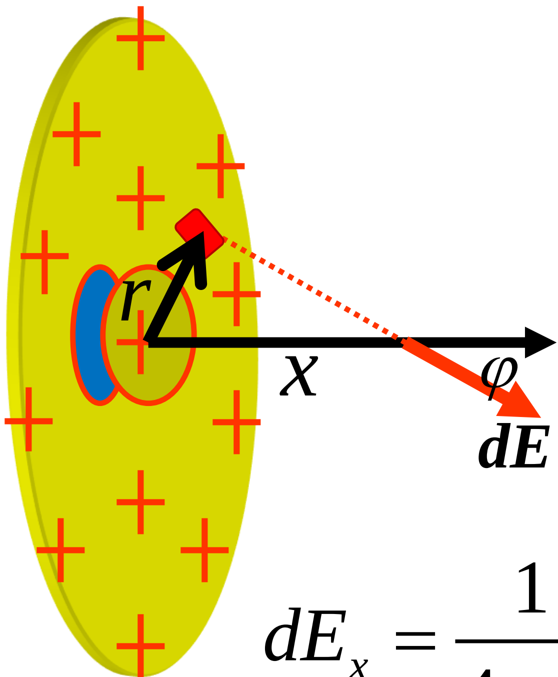
$$= \frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\int_0^{2\pi} R d\varphi = \frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0 r^3} 2\pi R$$

$$\vec{E} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}\hat{i}$$

讨论：(1) $x = 0, \vec{E} = 0$

(2) $x >> R, \vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\hat{i}$ ← 等同于点电荷

例5：求一均匀带点圆盘在其轴线上产生的电场强度，设圆盘半径为R，面密度为σ。



解：首先对称性分析，只有x分量非零。

选取极坐标系，一无限小面元为 $rdrd\theta$

它所带电量为 $dq=\sigma rdrd\theta$

它在轴线上x处产生的场强为

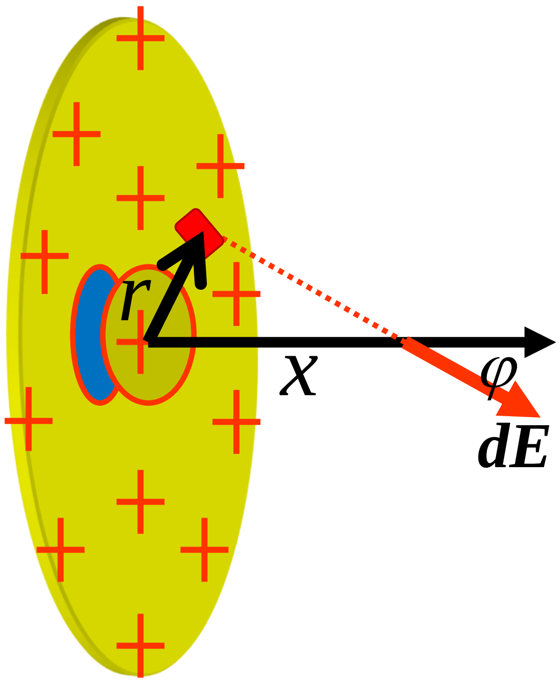
$$dE=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma rdrd\theta}{x^2+r^2}$$ 其x分量为

$$dE_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma rdrd\theta}{x^2+r^2}\cos\varphi=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma rdrd\theta}{x^2+r^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

$$E_x=\int dE_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\sigma rdrd\theta}{x^2+r^2}\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{\sigma x}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{rdrd\theta}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{\sigma x}{4\pi\varepsilon_0}2\pi\left.\frac{-1}{\sqrt{x^2+r^2}}\right|_0^R=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\frac{1}{\sqrt{1+R^2/x^2}})$$

例5：求一均匀带点圆盘在其轴线上产生的电场强度，设圆盘半径为R，面密度为σ。



$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/x^2}}\right)$$

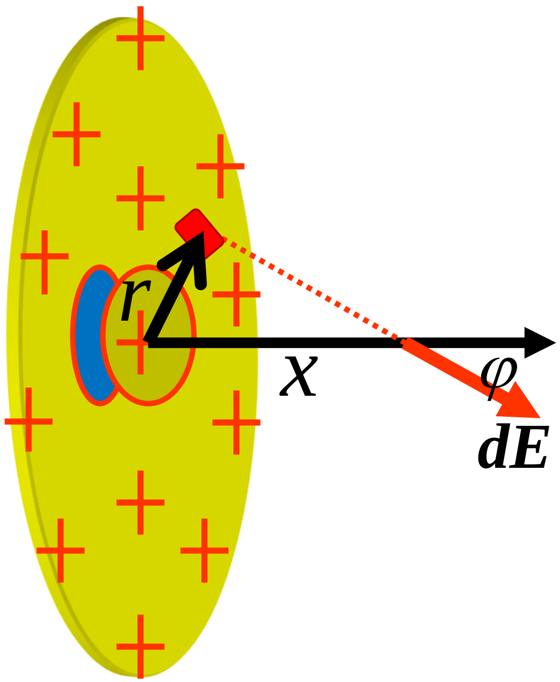
1) 当R<<x时，

$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/x^2}}\right)$$

$$\approx \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}\frac{R^2}{x^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

相当于一个点电荷。

例5：求一均匀带点圆盘在其轴线上产生的电场强度，设圆盘半径为R，面密度为σ。

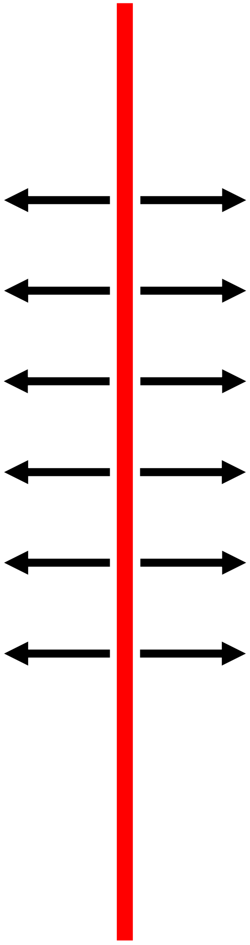


$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 / x^2}}\right)$$

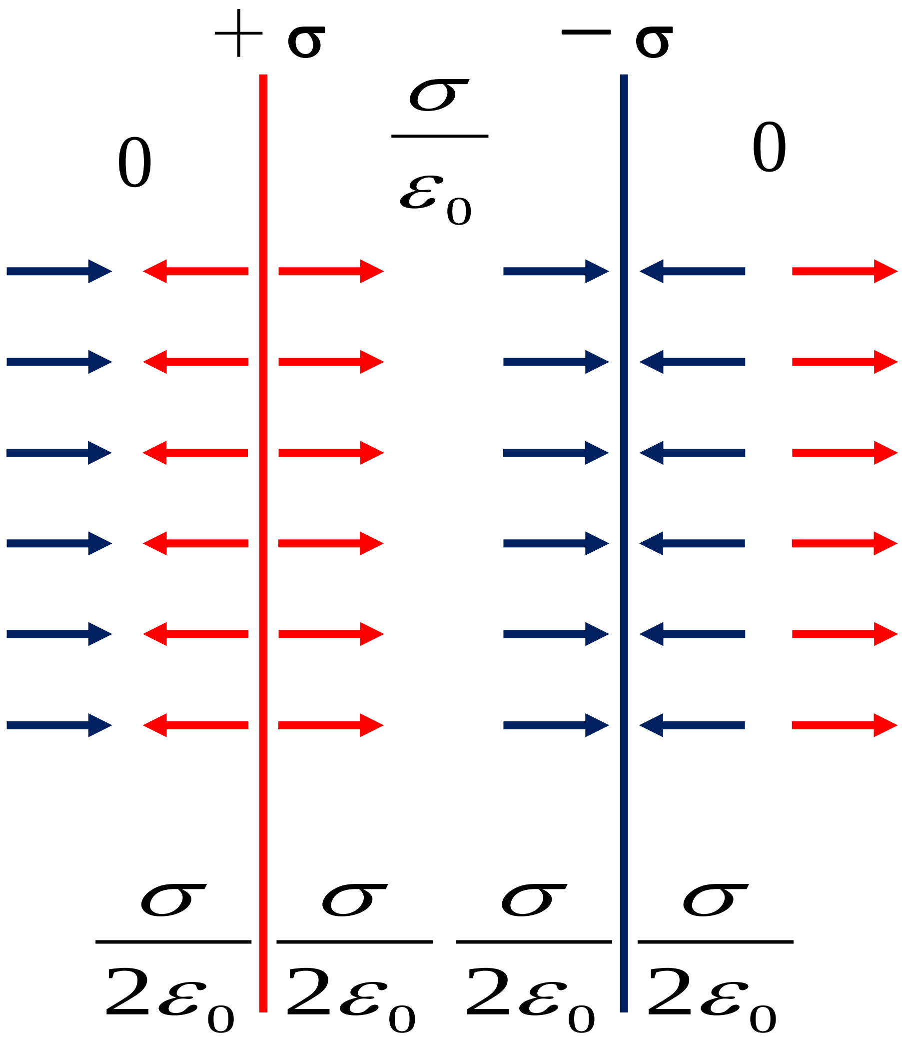
2) 当R>>x时，
相当于无限大板

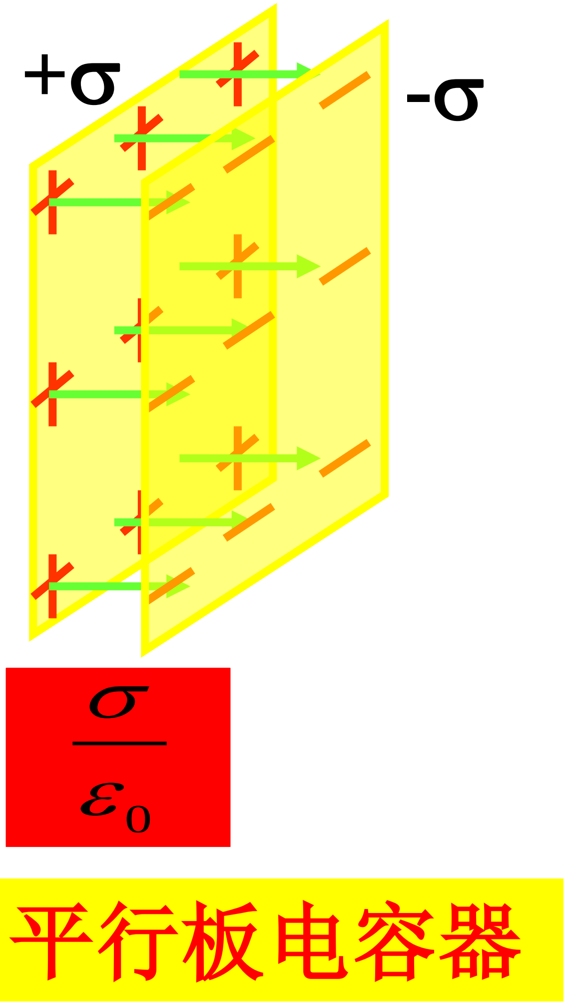
$$E_x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

匀强电场，和距离无关。

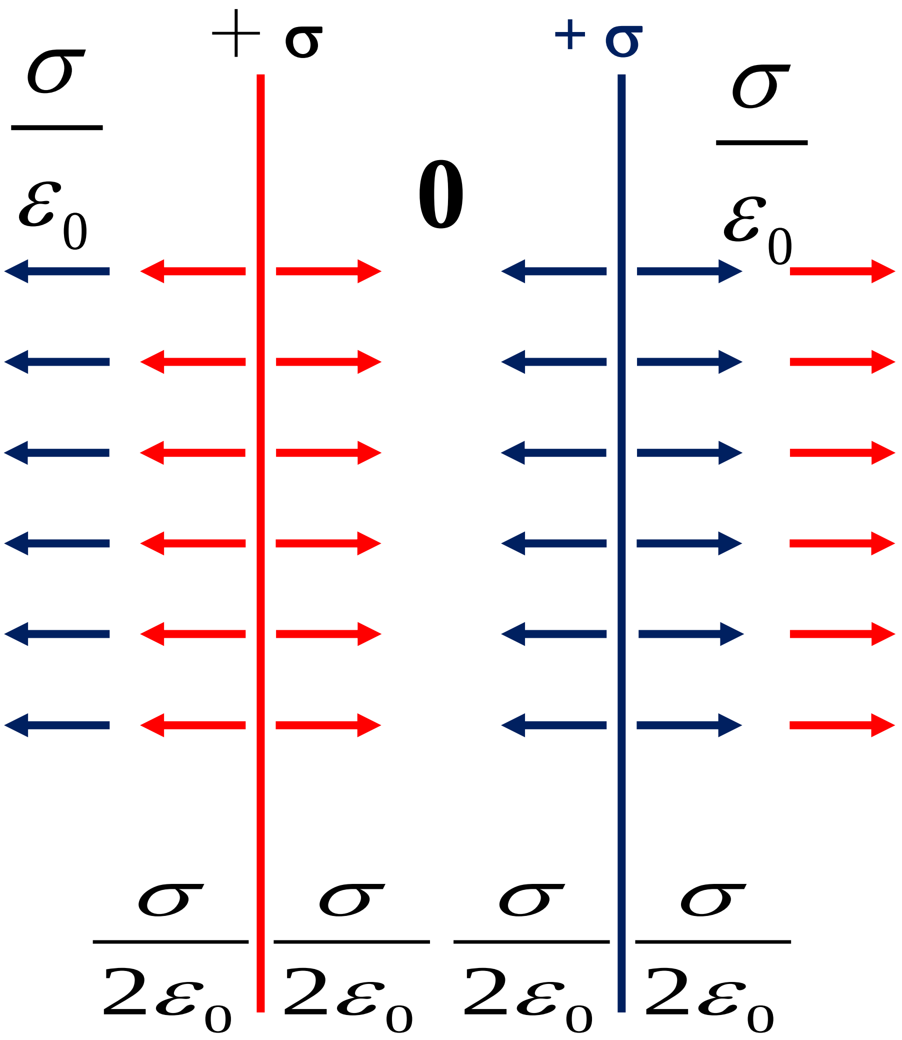


推广(1)：求两个带等量异号电荷，面电荷密度为σ的的“∞”大平行板周围空间的电场强度。

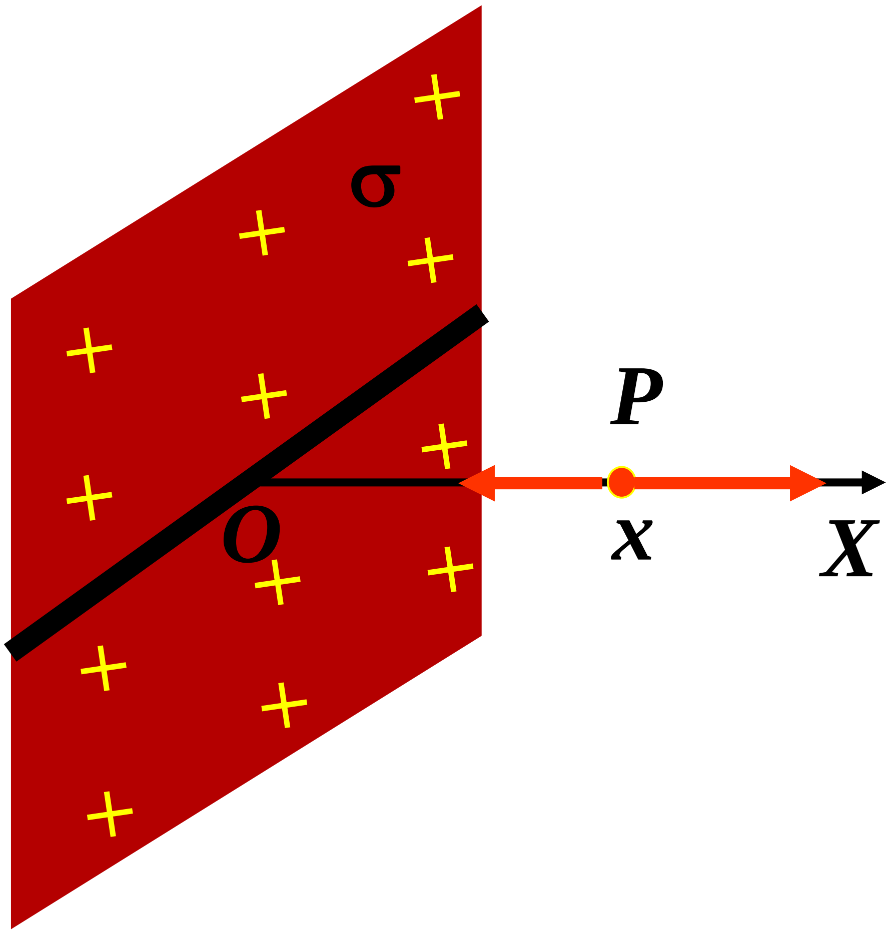




推广(2)：求两带等量同性电荷，面电荷密度为σ的的“∞”大平行板周围空间的电场强度。



例6：如图所示，一无限大的带电平板，电荷面密度为 σ，但中间有一宽为*a* 的细长线。求X轴上一点P处的电场强度。（细长线不带电）



板均匀带电　　线上带负电

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma a}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

$$=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{a}{\pi x}\right)$$

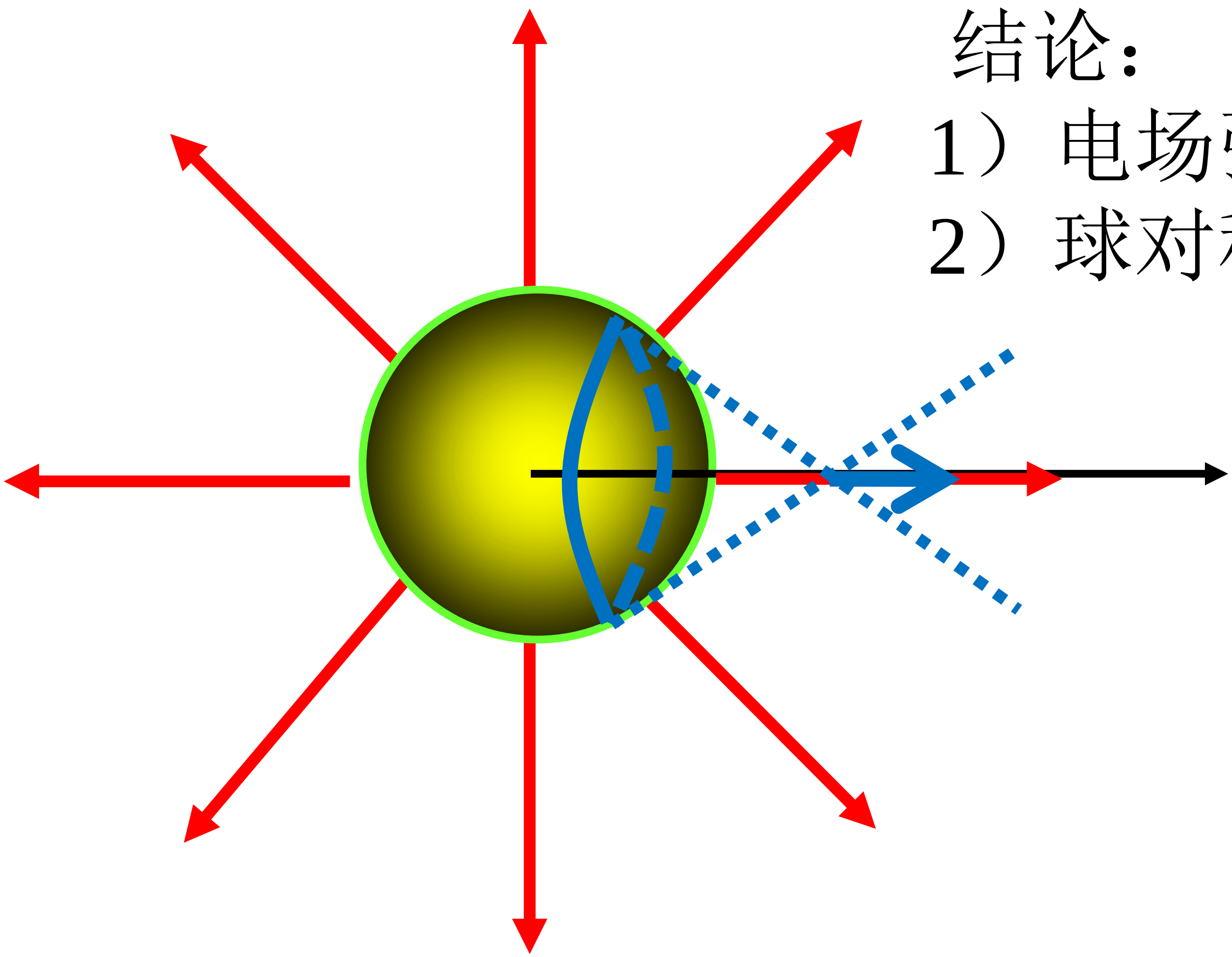
三、 高斯定理的应用

适用情况：通常是具有某种对称性的电场--轴对称、球对称、均匀场等。

应用方法：先作对称性分析

例1）求半径为R均匀带电q的球壳所产生电场的分布(包括球壳内部与外部)。

解：1）分析对称性

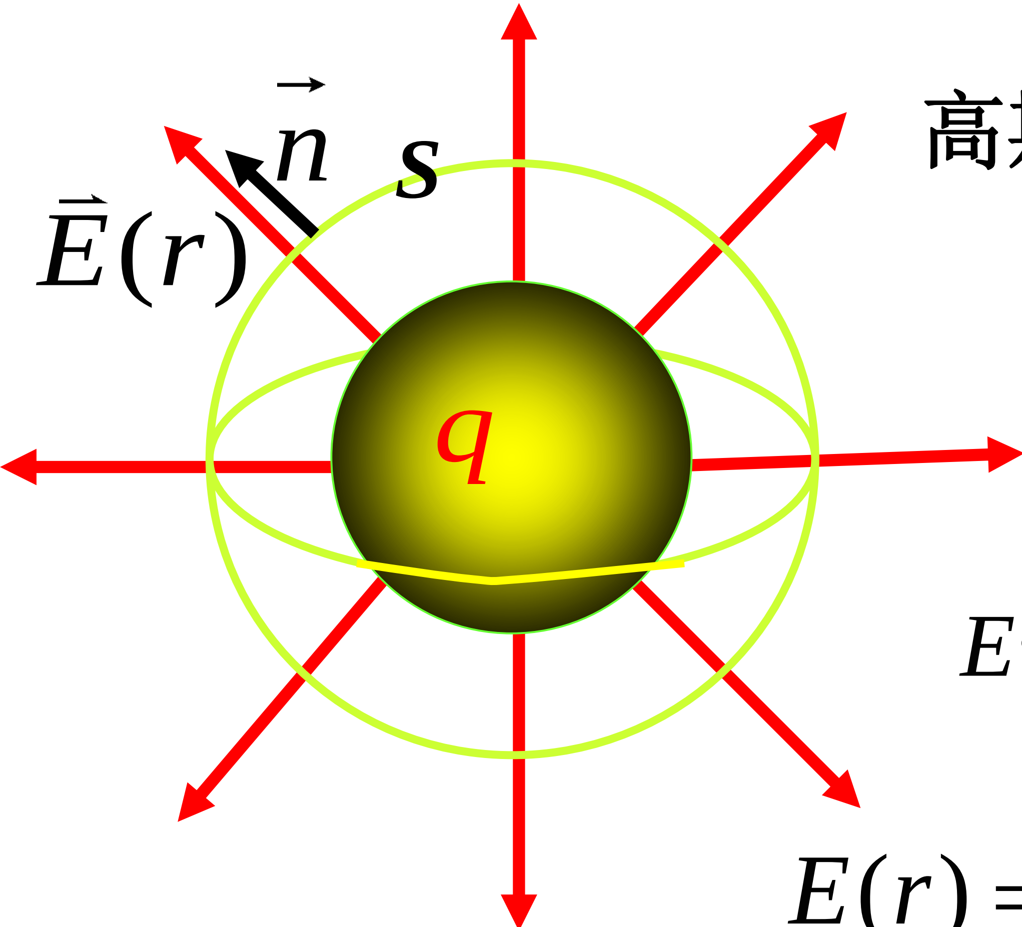


结论：

1）电场强度沿矢径方向。

2）球对称。

2）球外，作半径为 r 的高斯球面 $(R \le r < \infty)$



高斯定理：$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$

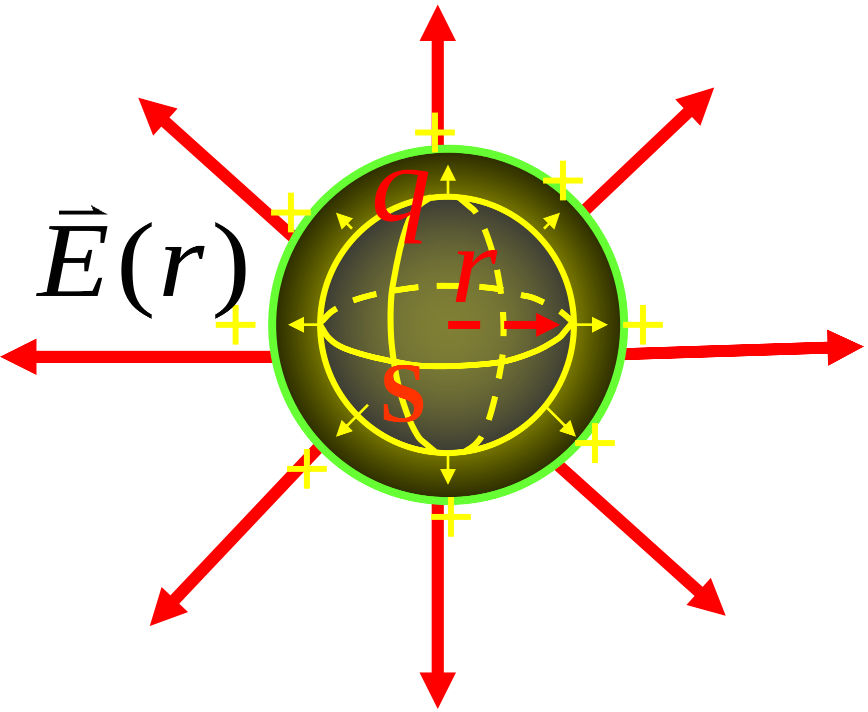
$$\oint_S E \cos 0^\circ dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

$$E \oint_S dS = E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$ 方向沿矢径方向

等同球心处点电荷

3）球内，对称性分析，作半径为 r 的高斯球面

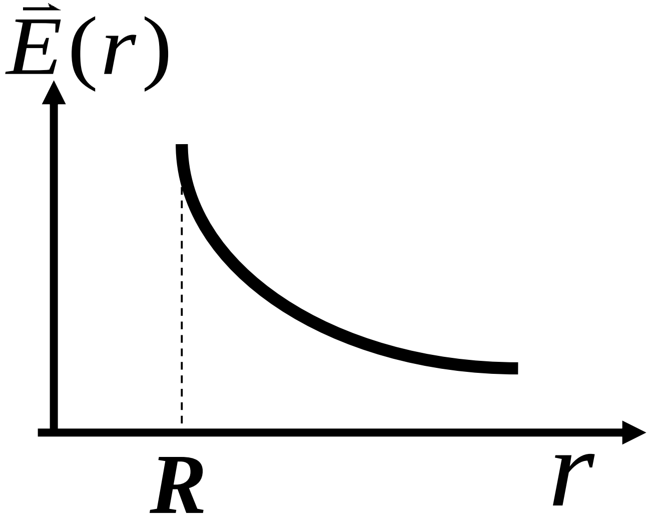


$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

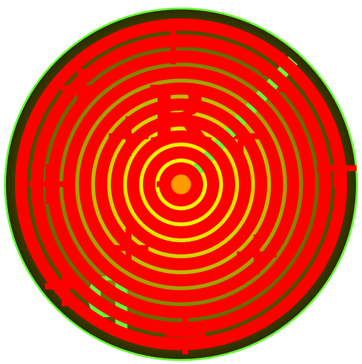
$$E\oint_S dS = E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

因 $q=0$ $\therefore E=0$

$$\vec{E} = \begin{cases} 0\cdots(0\le r<R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdots(R\le r<\infty) \end{cases}$$



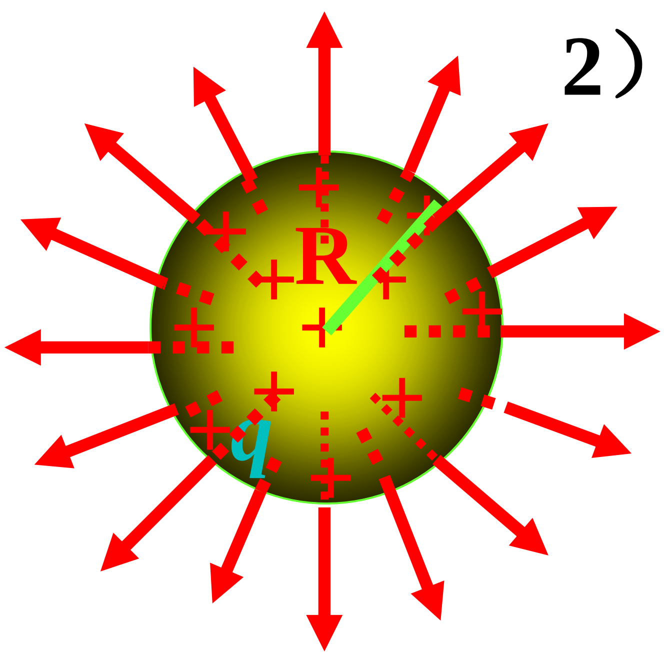
例2）一半径为R、均匀带电q的球体，求其电场的分布。



解：1）对称性分析：

将球体看成许多薄球壳组成。

结论：球内外都是球对称分布。

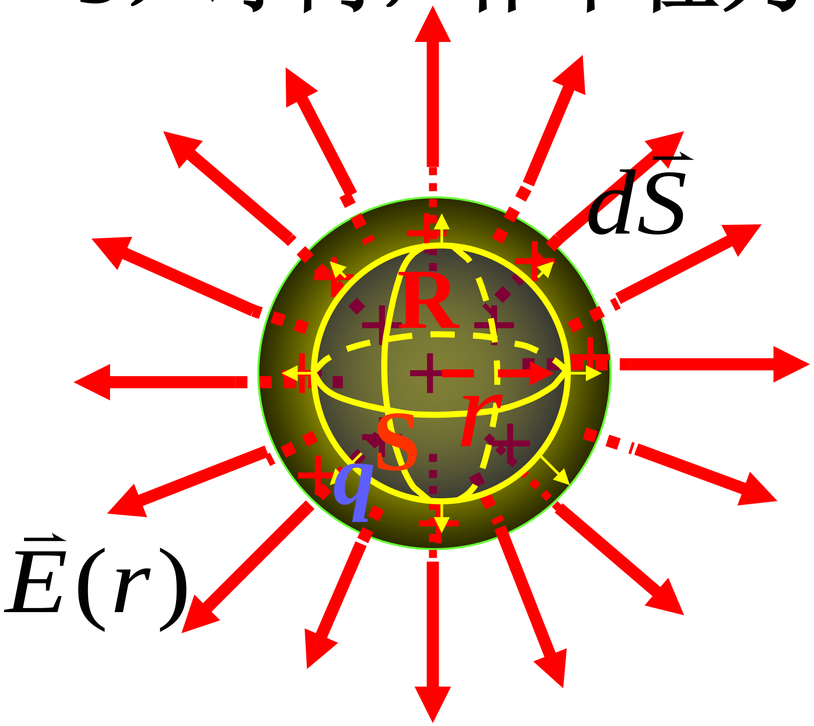


2）球外，作半径为 r 的高斯球面

与例1球壳外一样，等同于球心有点电荷

$$\vec{E}(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

3）球内，作半径为 r 的高斯球面



高斯定理：$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$

只考虑高斯面内的电荷

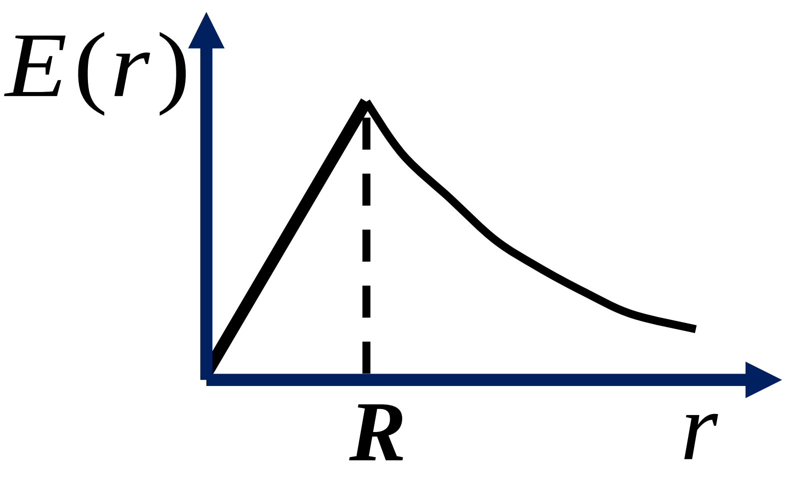
$$E\oint_S dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\vec{E} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{r} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$

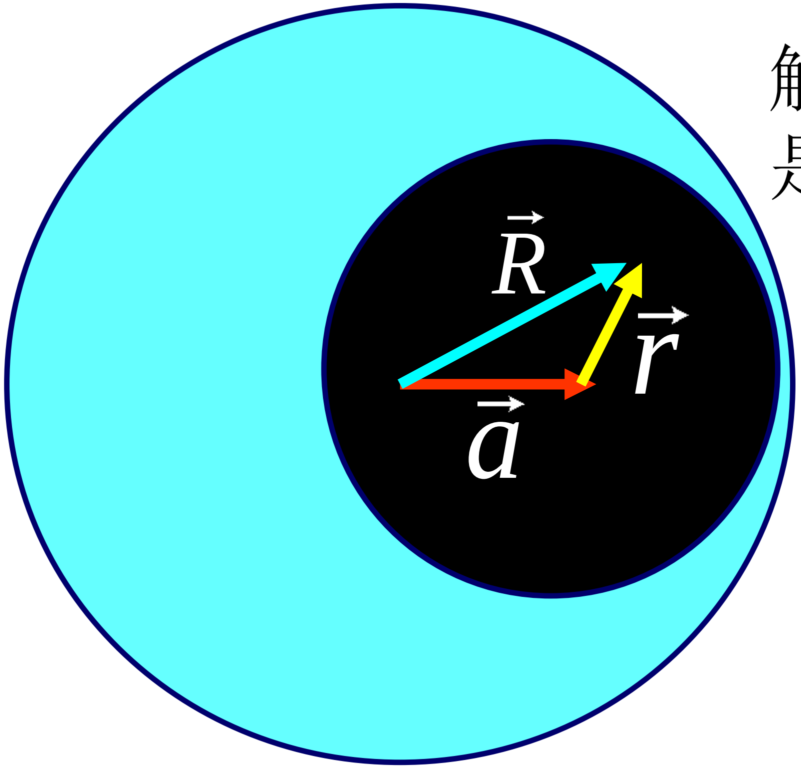
结论：

$$\vec{E}(r)=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}\cdots(R<r<\infty)\\[2ex]\dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\hat{r}\cdots(0\le r<R)\end{cases}$$



例3：体电荷密度为ρ的均匀带电球体中，存在一个空腔，若将带电球的球心O指向空腔的球心O’的矢量用 a 表示，证明空腔中任意一点的电场强度为

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$



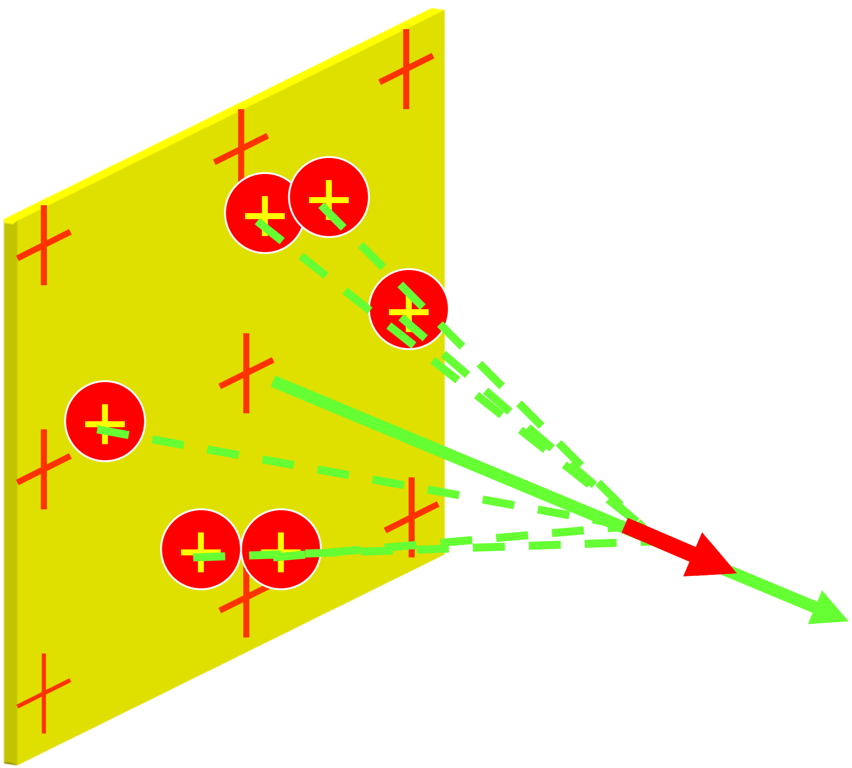
解：利用叠加原理，认为空腔是正负电荷抵消的结果，

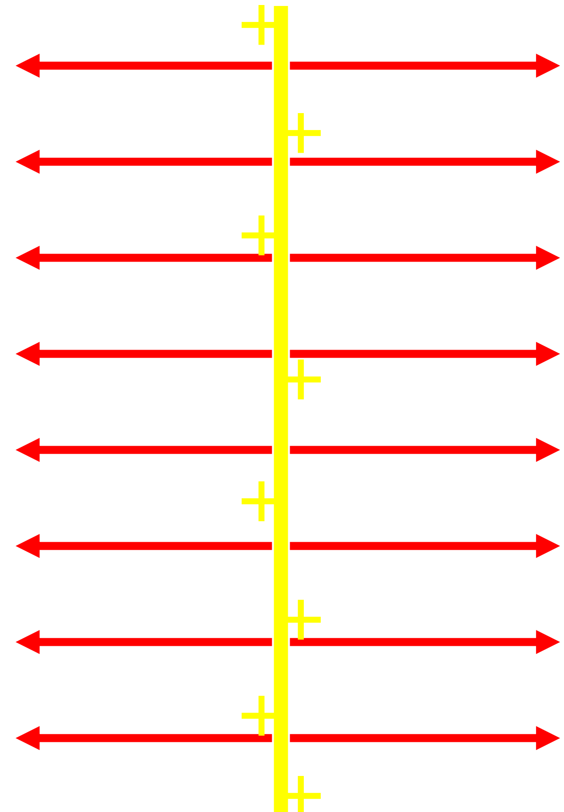
$$\vec{E} = \frac{\rho\vec{R}}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0} = \frac{\rho\vec{a}}{3\varepsilon_0}$$

匀强电场！

例4）求无限大带电平面的电场。设电荷面密度为σ。

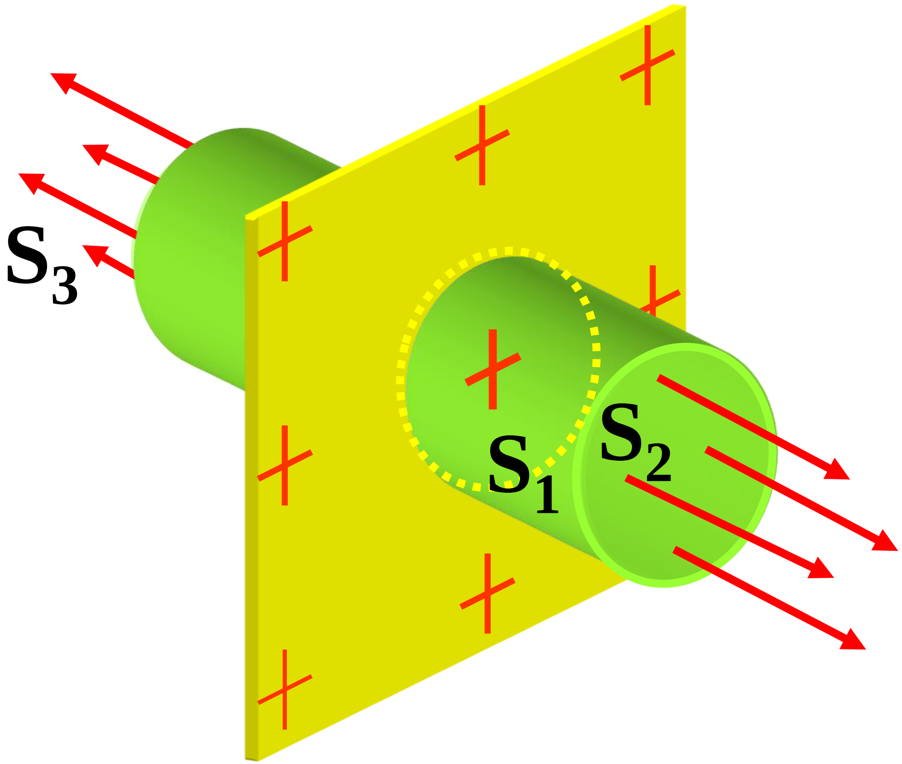
解：对称性分析；





结论：是以面为对称的场。与带电面等距离的两平行平面处处场强值相等。

2）作垂直于带电面的高斯圆柱面



高斯定理：

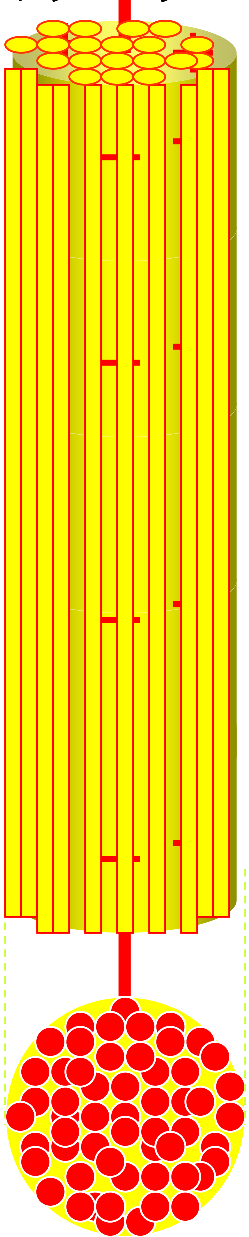
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_n}$$

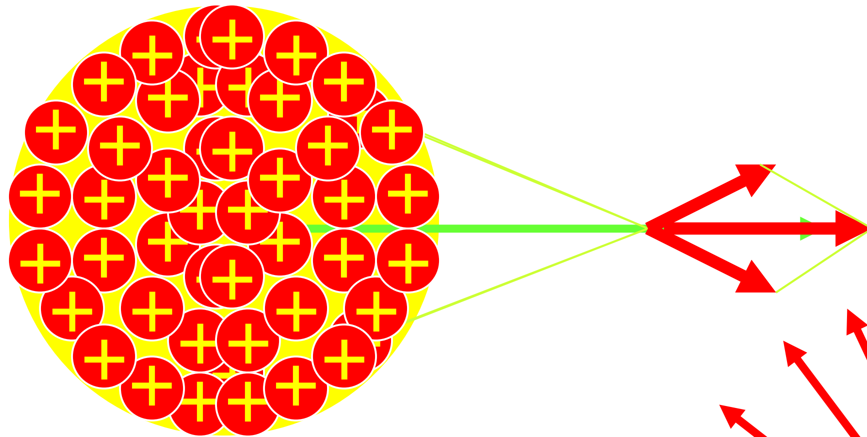
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{S_1}\vec{E}_1\cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2}\vec{E}_2\cdot d\vec{S}_2 + \int_{S_3}\vec{E}_3\cdot d\vec{S}_3$$

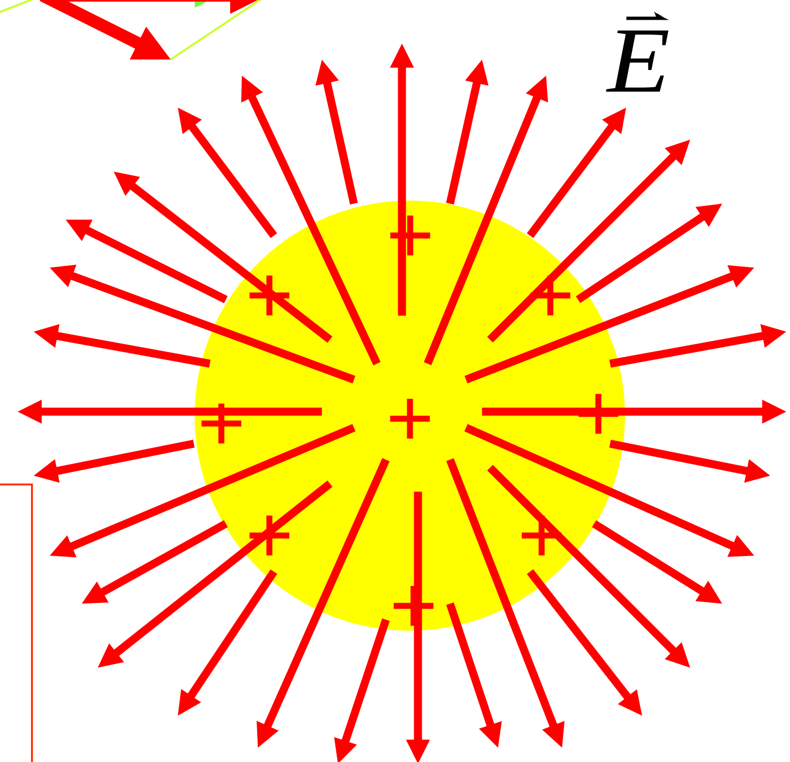
$$= 0 + E_2S_2 + E_3S_3 = 2ES = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S$$

例5）求一无限长，半径为R，单位长度带电λ的直圆柱带电体的电场。



解：对称性分析：

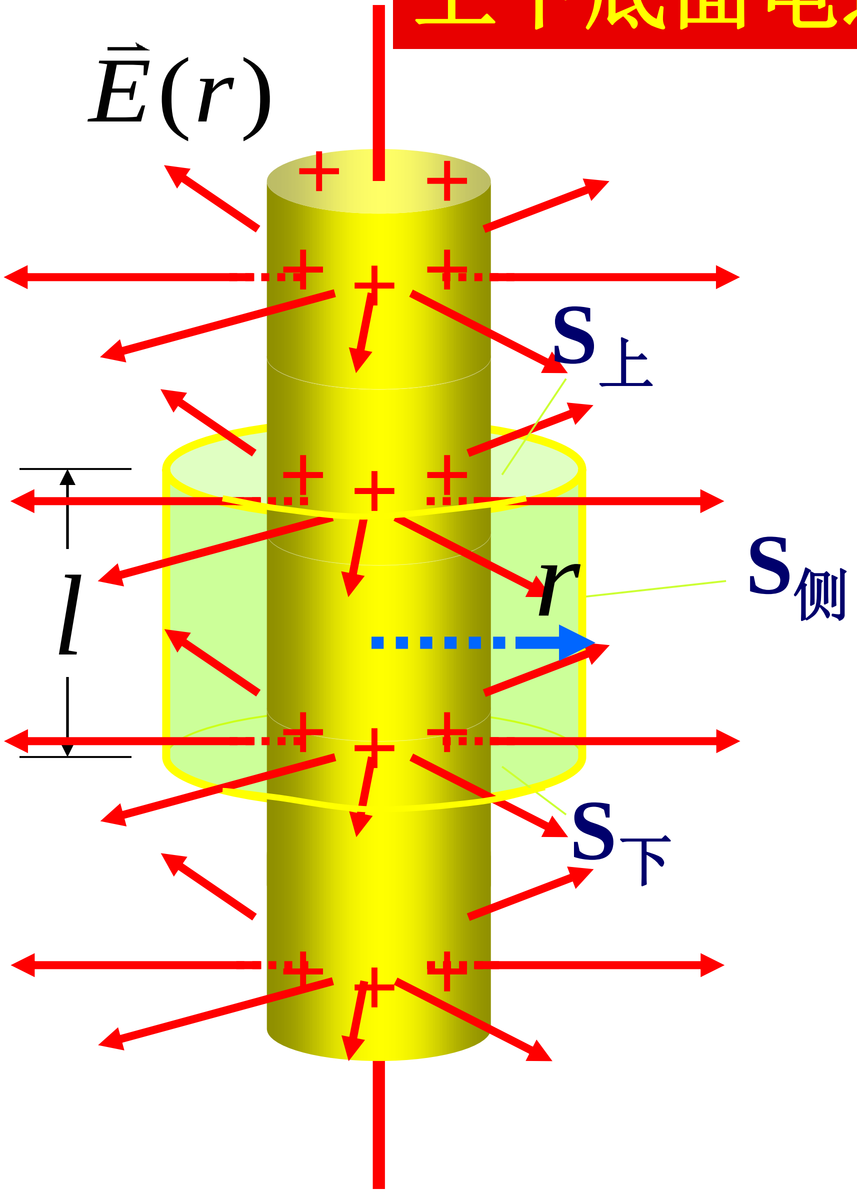


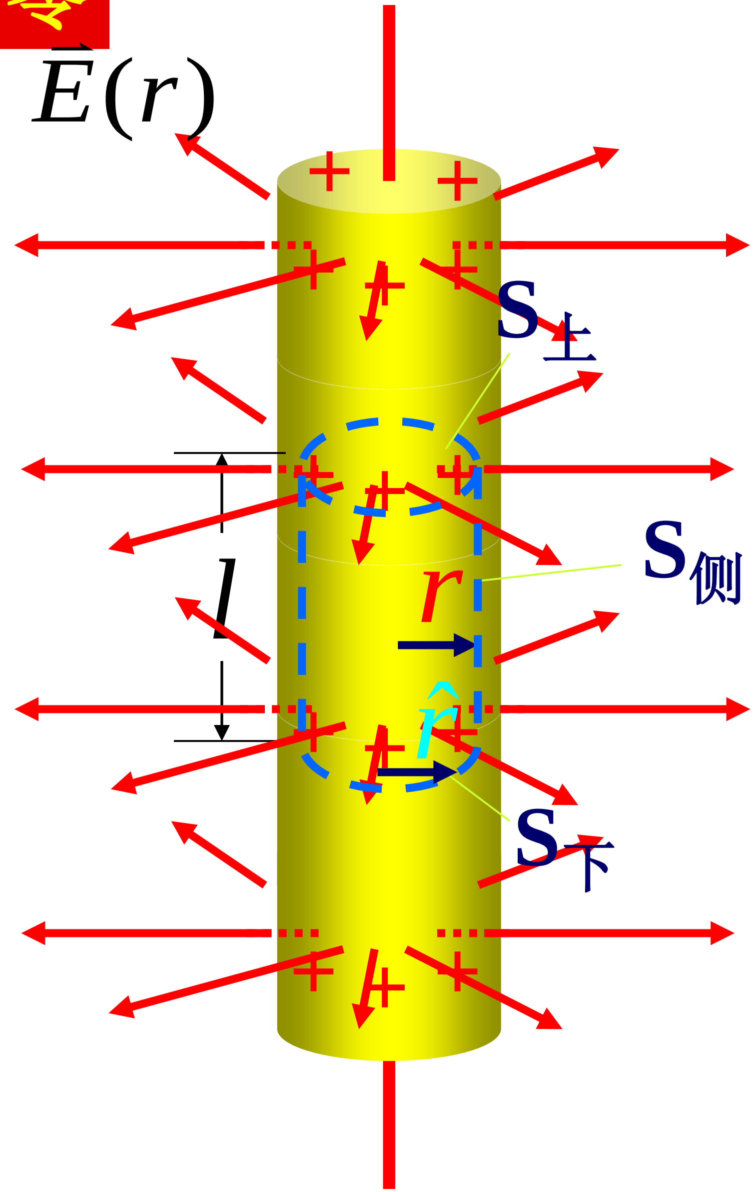


结论：电场以中心轴线为对称，向外辐射。

2) 以轴线为中心，作半径为r的圆柱形高斯面S

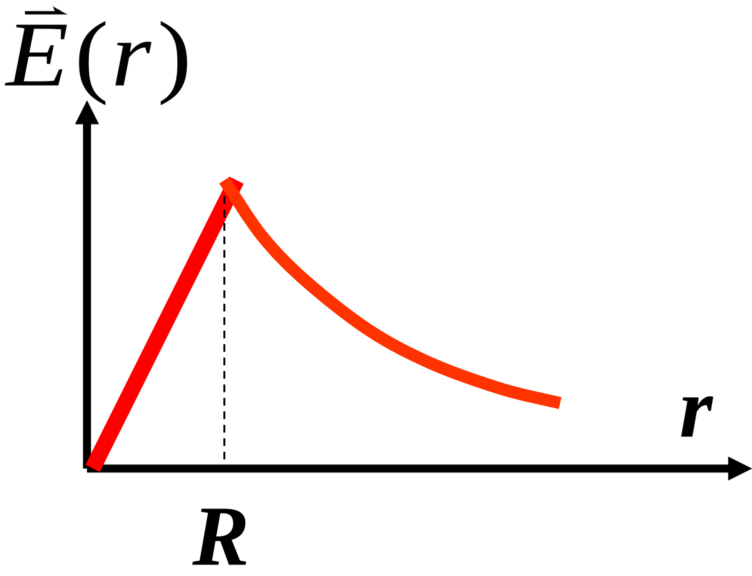
上下底面电通量为零





结论：

$$\vec{E}(r)=\begin{cases}\dfrac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{r}\cdots(0\le r<R)\\[2ex]\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}\cdots(R\le r<\infty)\end{cases}$$



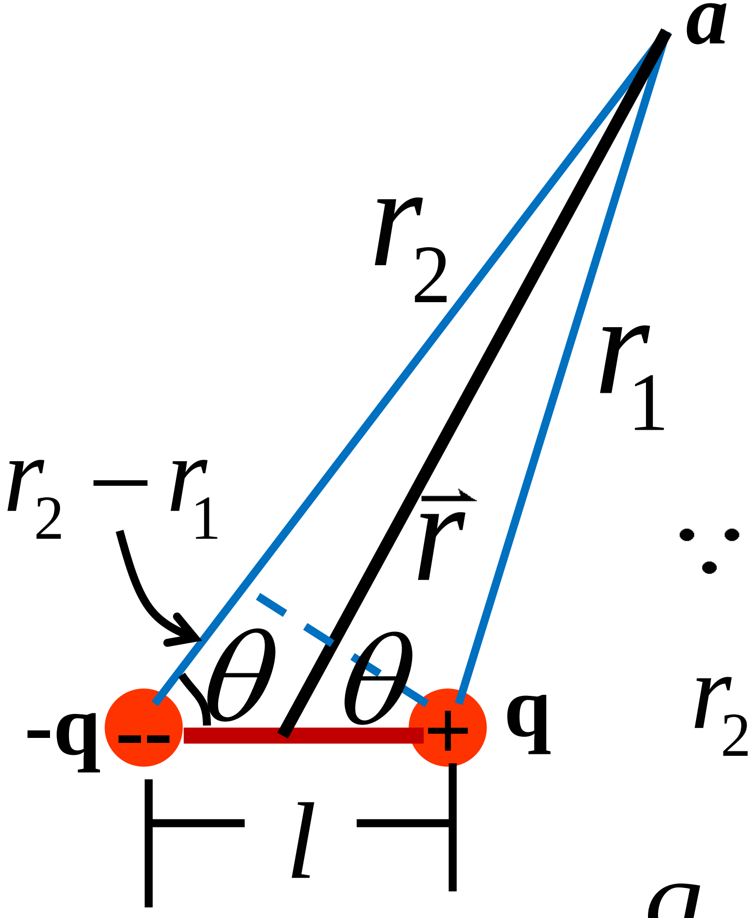
高斯定理应用关键：

1。分析对称性

2。确定合适的高斯面

例1：计算电偶极子电场中任一点的电势。 $\rightarrow$ $\vec{p} = q\vec{l}$

解：由叠加原理： $(r >> l)$



$$V_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

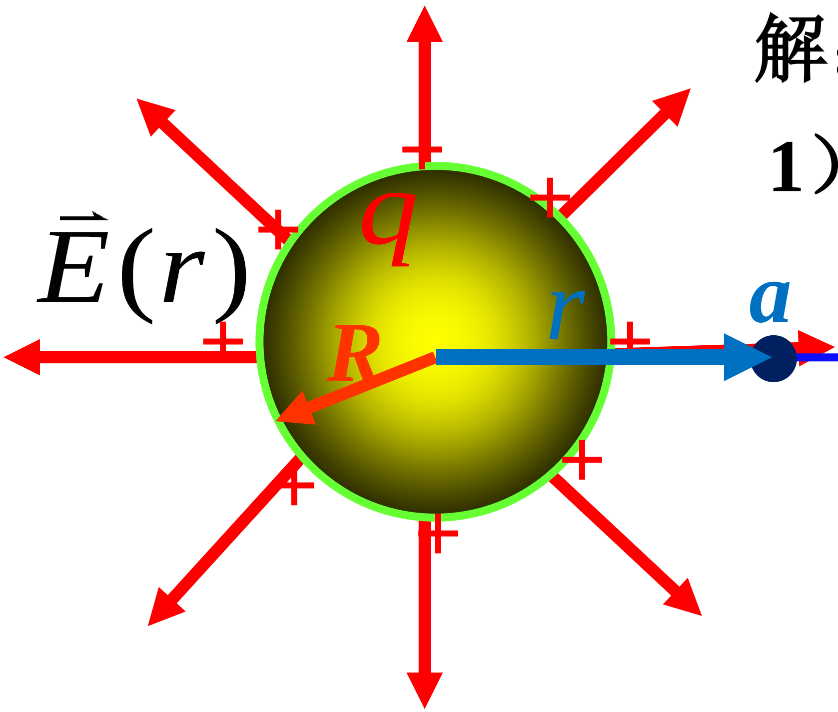
$$\because (r >> l)$$

$$r_2 - r_1 = l\cos\theta \qquad r_1 r_2 \approx r^2$$

$$V_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{l\cos\theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$$

例2：求均匀带电球壳产生的电场中的电势分布。
设球壳带电q，球半径为R。

解：以无限远为参考点。



1）球外：

$$V_a = \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_r^{\infty} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos 0^\circ dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \cdots (0 \le r < R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \cdots (R \le r < \infty) \end{cases}$$

2）球内：

$$V_a = \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

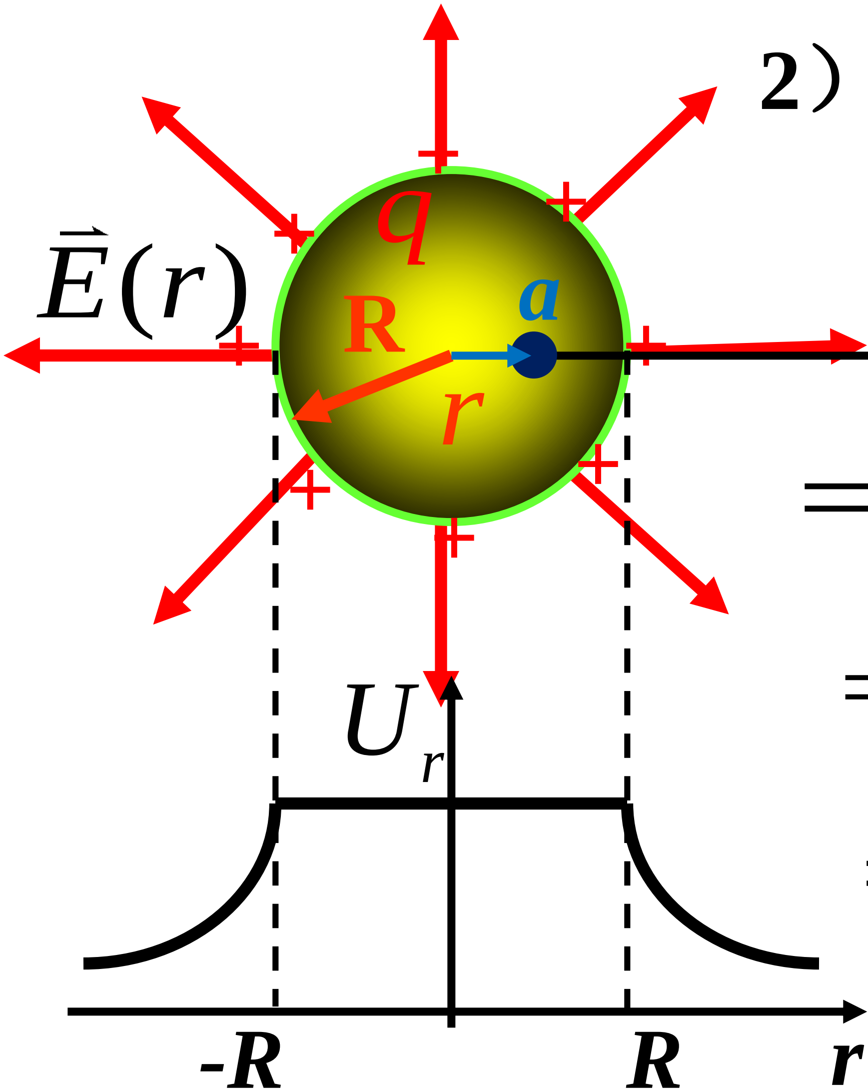
分段积分

$$= \int_r^{R} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_R^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{E}(\text{球内}) = 0$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

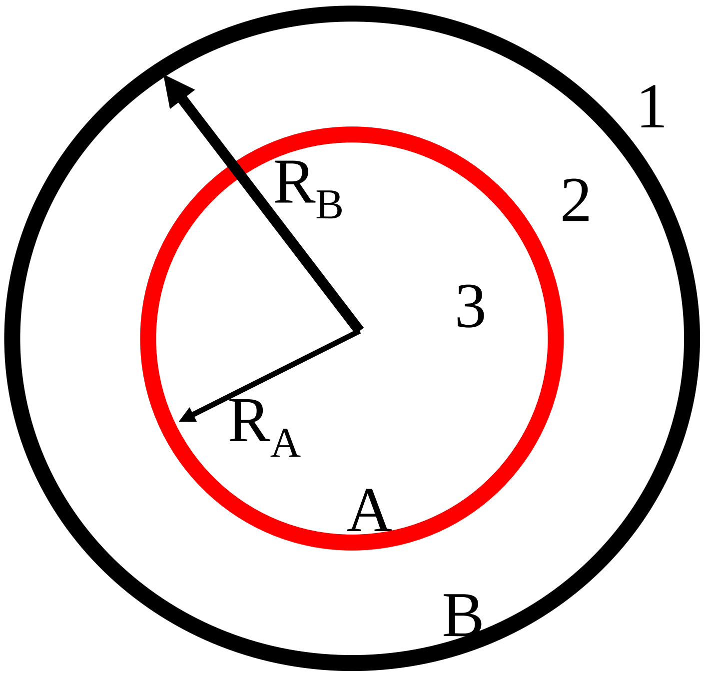
$$= const$$



$$V(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \cdots (R \le r < \infty) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \cdots (o \le r < R) \end{cases}$$

即球壳内处处等势。

例3：两个同心的均匀带电球壳，所带电量分别是q_A和q_B，$R_A<R_B$，求空间各处电势。



解：利用叠加原理：

区域1：

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_A}{r}+\frac{q_B}{r}\right)$$

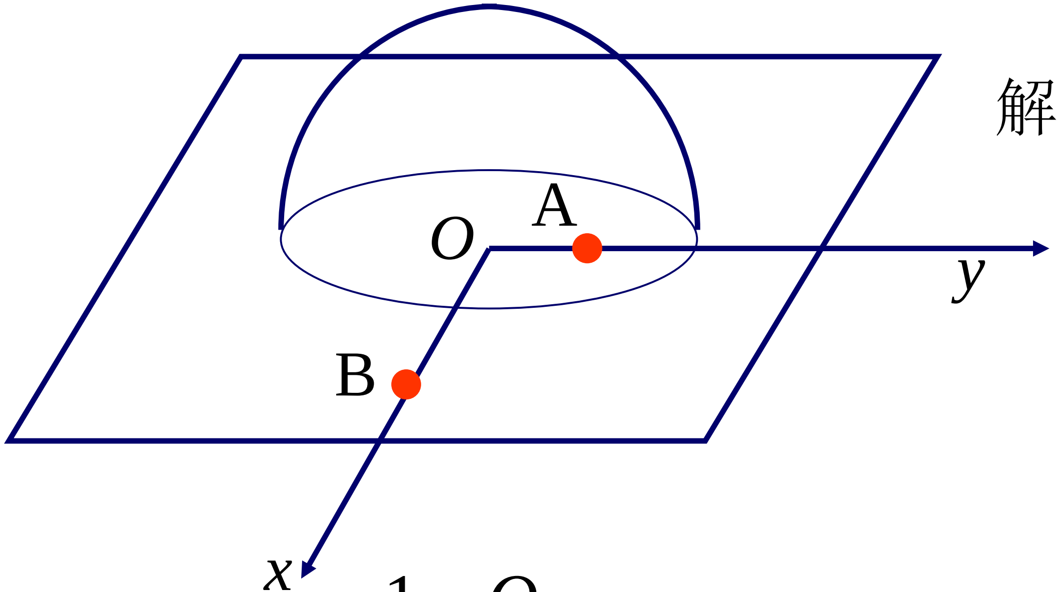
区域2：

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_A}{r}+\frac{q_B}{R_B}\right)$$

区域3：

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_A}{R_A}+\frac{q_B}{R_B}\right)$$

例4：半径为R的半球面，电荷均匀分布，面电荷密度σ，A点坐标（0，R/2），B点坐标（3R/2，0），求两点间电势差。



解：利用叠加原理，因为每点电势为各电荷元产生电势的代数和，并且由于对称性，半球在A，B点产生的电势为整个球的一半。

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{3R/2}$$

$$Q = 4\pi R^2\sigma$$

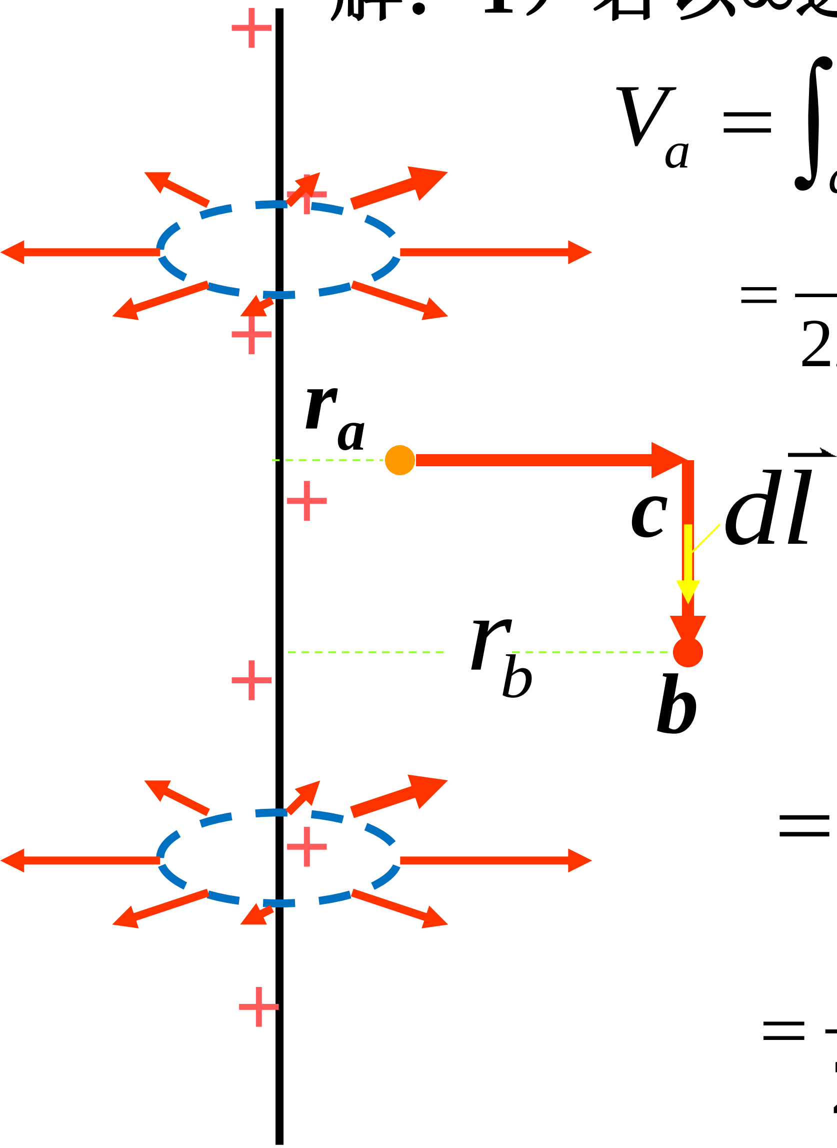
$$\Rightarrow V = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R} - \frac{Q}{3R/2}\right)$$

$$\Rightarrow V = \frac{\sigma R}{6\varepsilon_0}$$

例5：　有一根无限长带电细线，线密度为λ。求距导线 r_a处一点a的电势。

$$E(r)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

解：1）若以∞远为参考点



$$V_a=\int_a^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_{r_a}^\infty \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r\Big|_{r_a}^\infty \to \infty$$　　无意义

2）以场中b点为参考点

$$V_a=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$=\int_{r_a}^{r_c}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr+\int_{r_c}^{r_b}E\cos 90^\circ dl$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a}$$

计算场强分布的三种办法：

1。库仑定律+场强叠加原理

2。电荷对称性分布：高斯定理

3。电势梯度

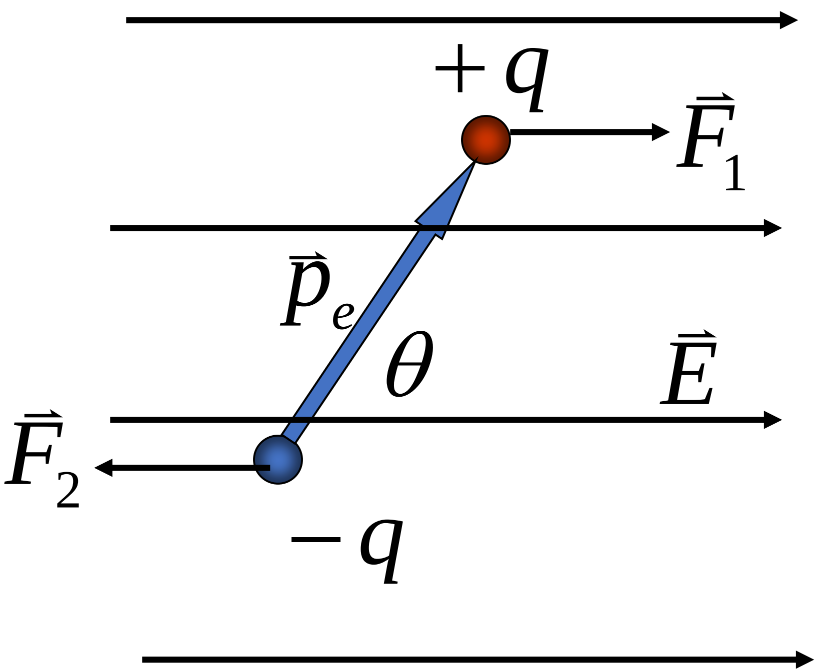
计算电势的方法：

1。先计算场强，然后积分计算

2。叠加原理。

例1 电偶极子在均匀外场中所受的作用。

解：如图所示，设在均匀外电场中，电偶极子的电矩的方向与场强方向间的夹角为θ，作用在电偶极子正负电荷上的力的大小均为

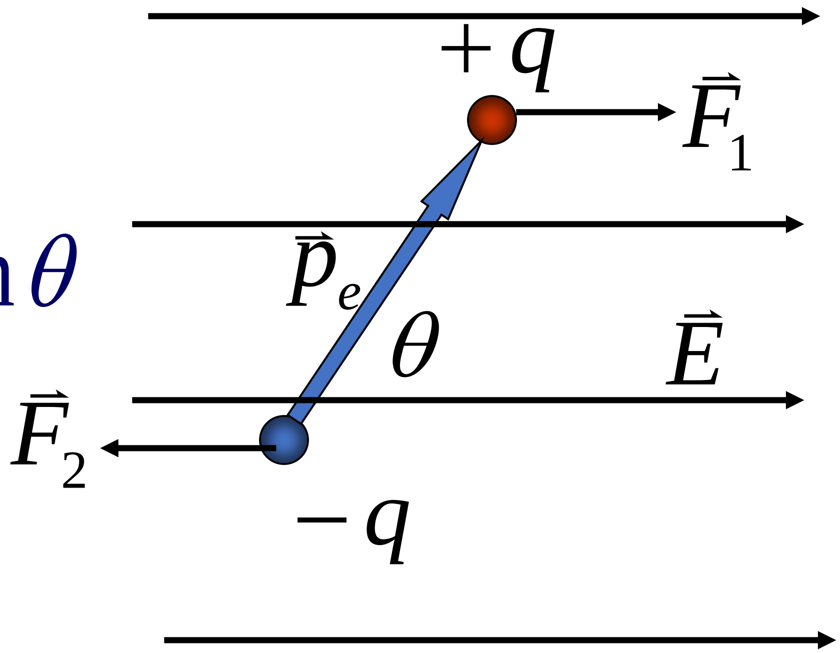


$$F = F_1 = F_2 = qE$$

$\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$ 的大小相等，方向相反，所以电偶极子所受的合力为零，电偶极子不会产生平动，但由于 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$ 不在同一直线上，所以电偶极子要受到力偶矩的大小为

$$M = Fr_e \sin\theta$$

$$= qEr_e \sin\theta = p_e E \sin\theta$$

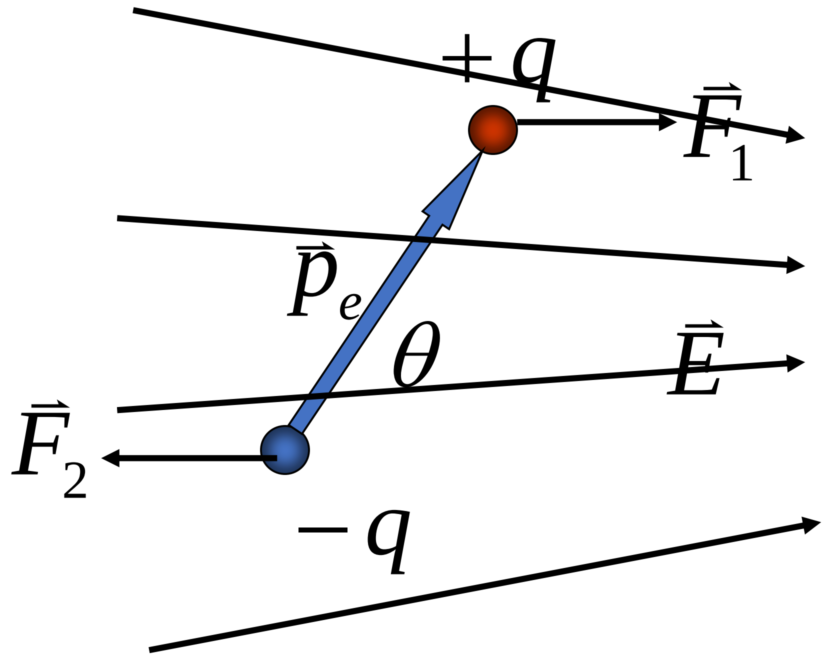


写成矢量式为

$$\vec{M} = \vec{p}_e \times \vec{E}$$

例2 电偶极子在不均匀外场中所受的作用。

解：如果把电偶极子在不均匀外电场中，如图所示,可设电荷+q和-q所在处电为 $\vec{E}_1$和 $\vec{E}_2$它们所受的电场分布分别是 $\vec{E}_1$和 $\vec{E}_2$，所以电偶极子所受的合力为



$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=q\vec{E}_1-q\vec{E}_2$$

$$=q(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=qr_e(\frac{\vec{E}_1-\vec{E}_2}{r_e})=p_e(\frac{\vec{E}_1-\vec{E}_2}{r_e})$$

$$\vec{F} = p_e\left(\frac{\vec{E}_1 - \vec{E}_2}{r_e}\right)$$

由此可见，在不均匀的电场中，作用于电偶极子上的合力既与电矩p_e成正比，会和r 方向上电场强度的变化率成正比，电场的不均匀性愈大时，电偶极子所受的力也愈大。

电偶极子所受的力矩为

$$M = F_1 \frac{r_e}{2}\sin\theta + F_2 \frac{r_e}{2}\sin\theta$$

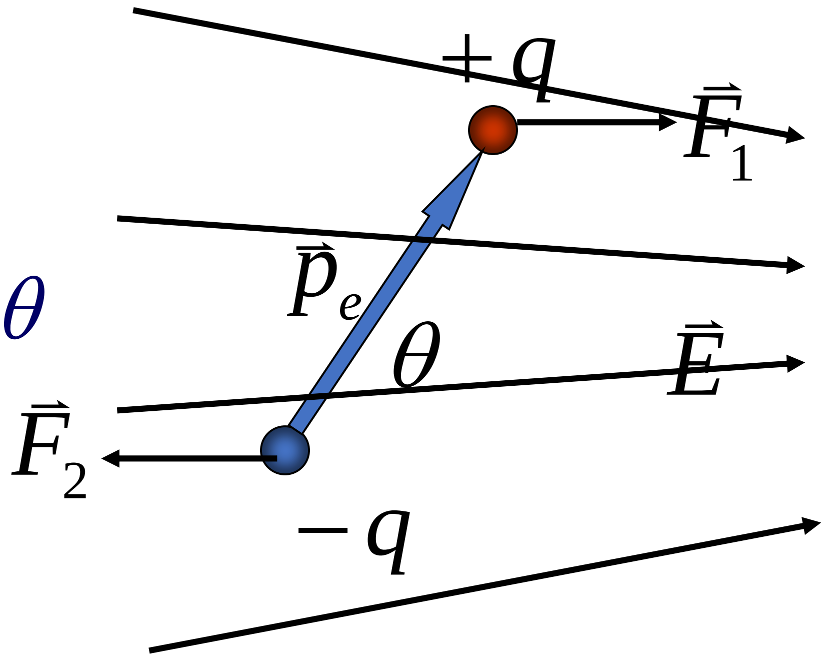
$$= qE_1 \frac{r_e}{2}\sin\theta + qE_2 \frac{r_e}{2}\sin\theta$$

因为电偶极子所在处的小范围内ΔE 是很小的，所以在上式中可以认为

$$E_1 \approx E_2 = E$$

$$M = qE_1 \frac{r_e}{2}\sin\theta + qE_2 \frac{r_e}{2}\sin\theta$$

$$\approx p_e E \sin\theta$$

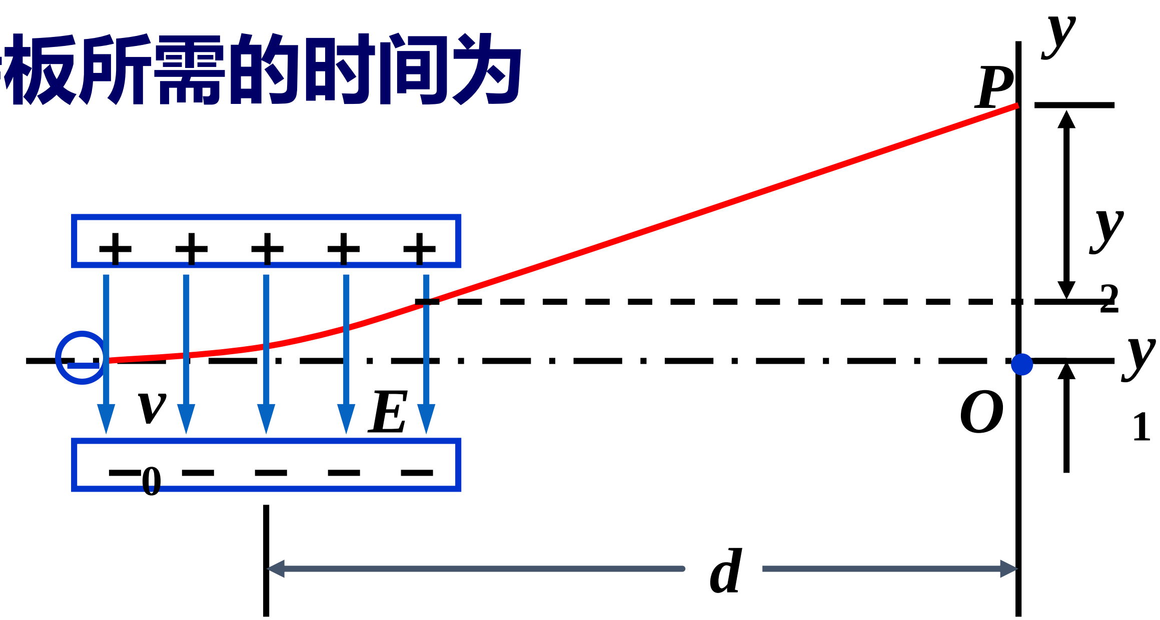


写成矢量式为

$$\vec{M} \approx \vec{p}_e \times \vec{E}$$

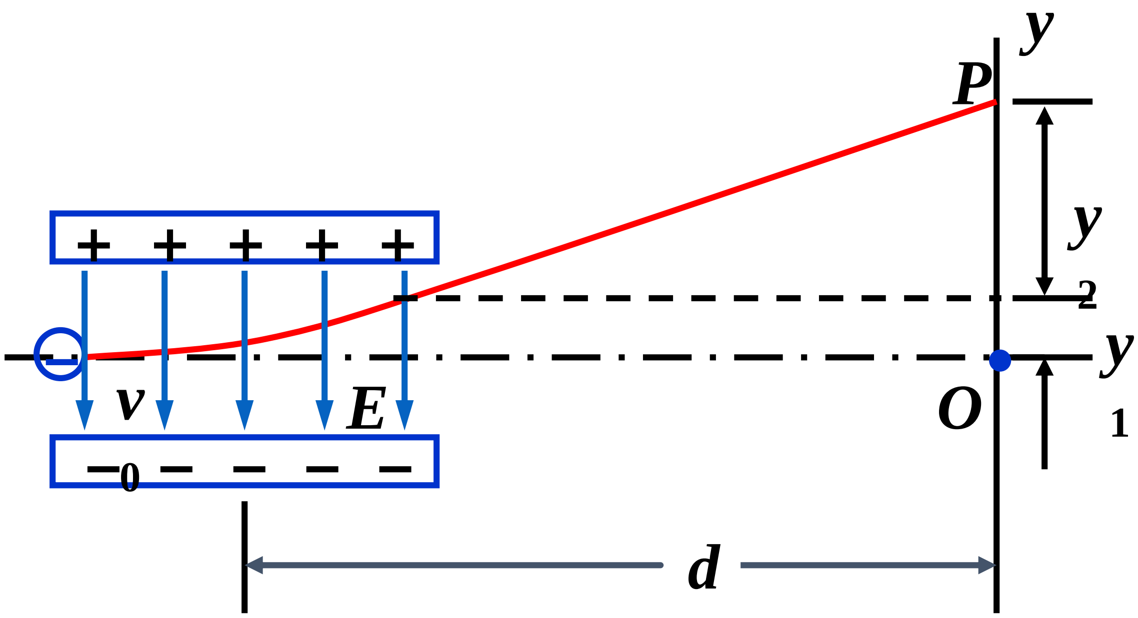
例 试从示波器内电子束受到横向电场的偏折计算荧光屏上光点的位移。

解：如图所示，一束电子射线以速度 v_0进入与v_0垂直的横向匀强电场中，由于电子受到一个与场强E方向相反的作用力，所以电子通过电场后将偏离原来v_0方向。利用上面讨论的结果，可得电子通过长为 l 的偏转板所需的时间为



$$t_1 = \frac{l}{v_0}$$

在 t_1 时间内，电子在y轴方向的位移分量为



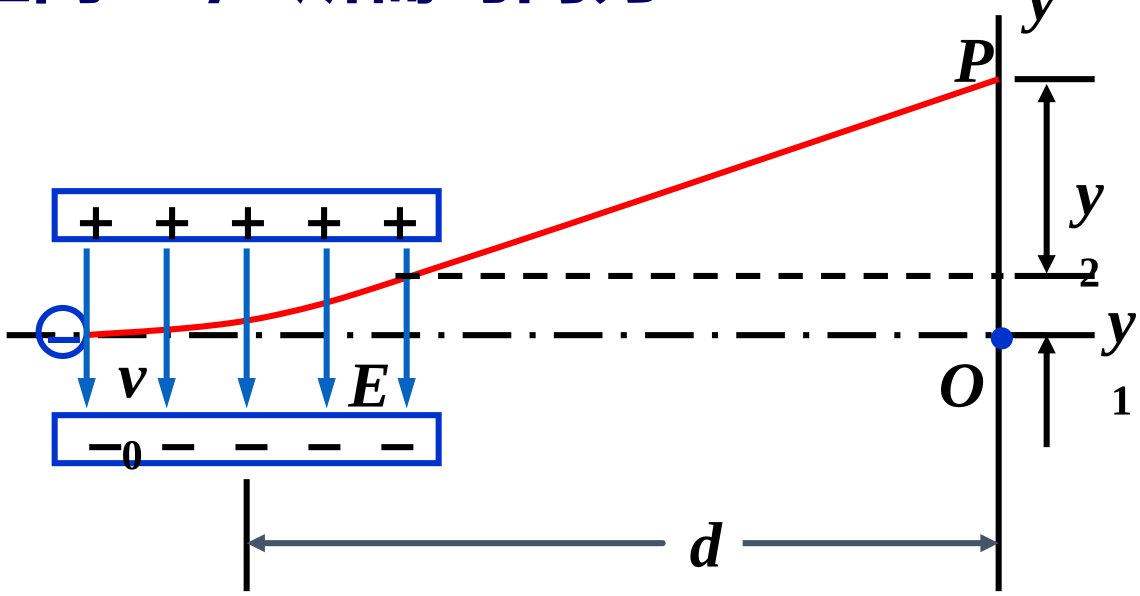
$$y_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{eEl^2}{2mv_0^2}$$

相应的速度分量由零增加到

$$v_1 = at_1 = \frac{eEl}{mv_0}$$

电子通过偏转板后，不再受电场力的作用，它将以离开偏转板时的速度匀速前进，并打到荧光屏上。设偏转板中心到荧光屏的距离为*d*，电子通过纵向距离*d*-*l*/2所需时间为

$$t_2 = \frac{d - \frac{l}{2}}{v_0}$$



在此时间内，电子在y轴方向的位移为

$$y_2 = v_1 t_2 = \frac{eE}{m}\left(\frac{l}{v_0}\right)\left(\frac{d-\frac{l}{2}}{v_0}\right)$$

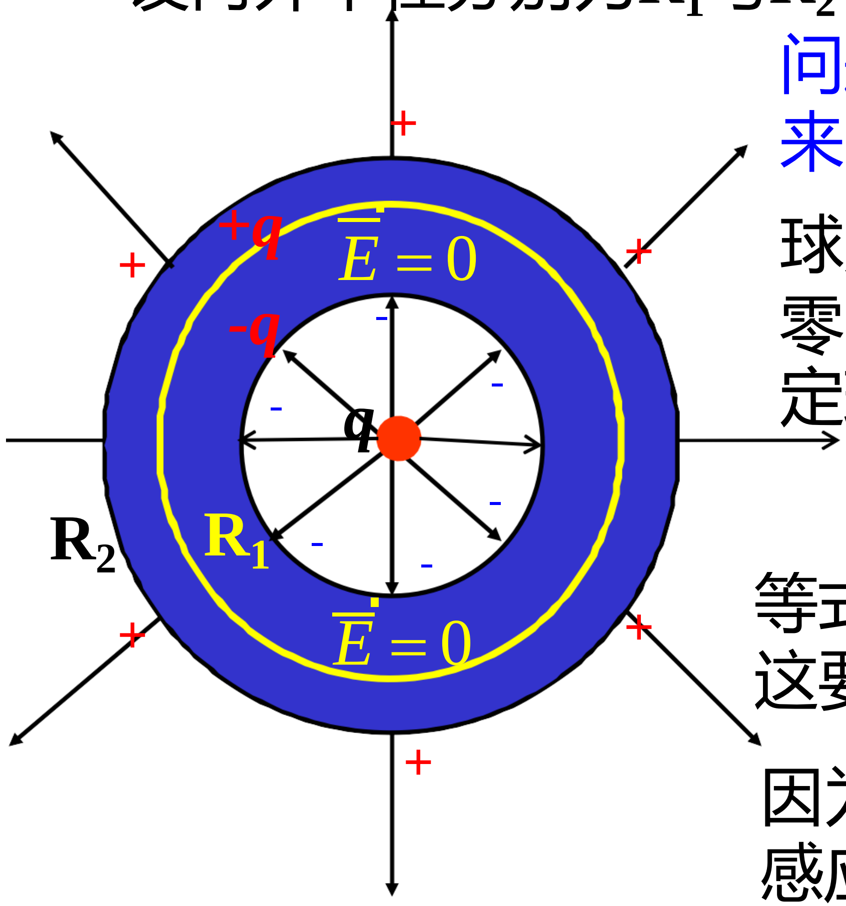
于是电子在荧光屏上产生的光点P离入射方向的横向位移为

$$y = y_1 + y_2 = \frac{eld}{mv_0^2}E$$

上述结果指出：荧光屏上光点的位移y与偏转板中场强E的大小成正比，并随E的方向和大小的变化而上下移动。

对导体空腔情况：(2) 空腔内放置一电荷q

设内外半径分别为R_1与R_2



问题1：球壳内、外壁感应出来的电量是多少?

球壳内($R_1<r<R_2$)处，电场为零，对左图黄色球面应用高斯定理。

$$\oiint_S \dot{E}\cdot dS=\iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}dV$$

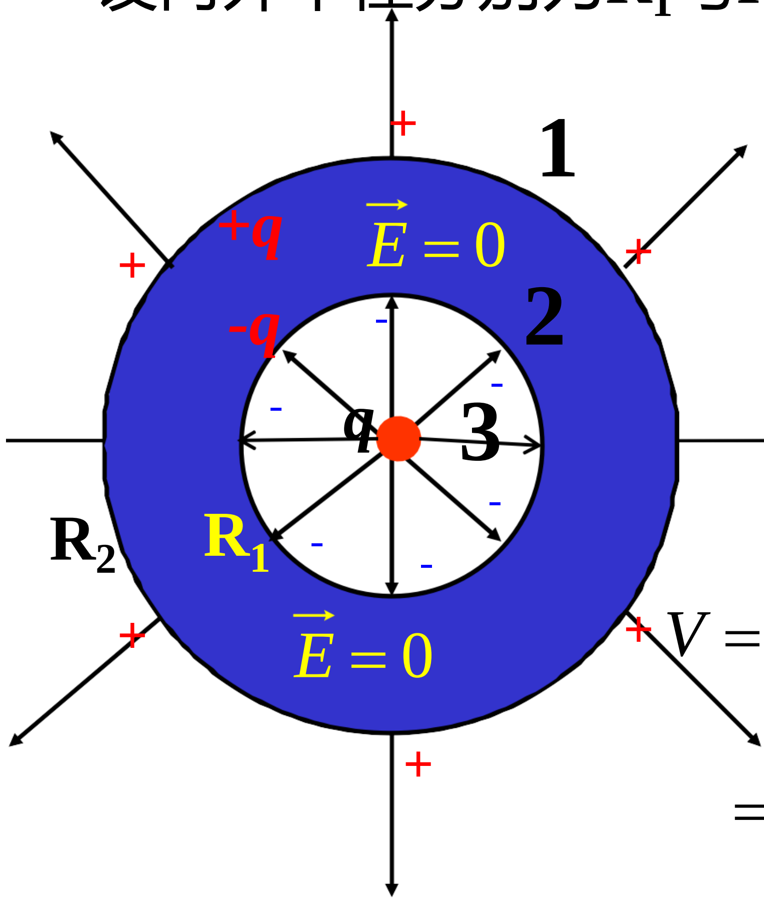
等式左边为零，右边也应为零。这要求内壁R_1处感应出电量$-q$。

因为总电量守恒，外壳R_2处感应出的电量应为$+q$。

问题2：球壳内、外电场强度和电势?

设内外半径分别为R_1与R_2

以下均省略因子 $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}$



区域1： $E=\dfrac{1}{r^2}$ $V=\dfrac{1}{r}$

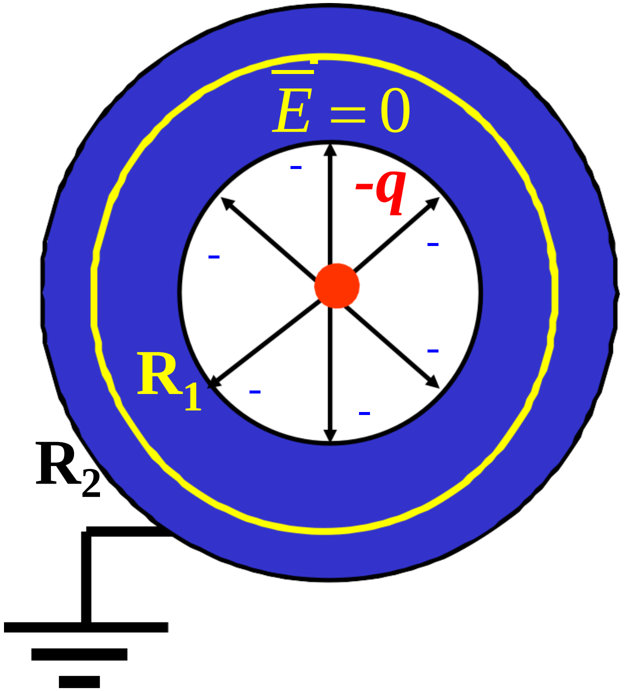
区域2($R_1<r<R_2$)： $E=0$ $V=\dfrac{1}{R_2}$

区域3($r<R_1$)： $E=\dfrac{1}{r^2}$

$$V=\int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{R_1}\vec{E}\cdot d\vec{l}+0+\int_{R_2}^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$=(-\frac{1}{r})\Big|_r^{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

对导体空腔情况：**(2)** 空腔内放置一电荷***q***
外表面接地。



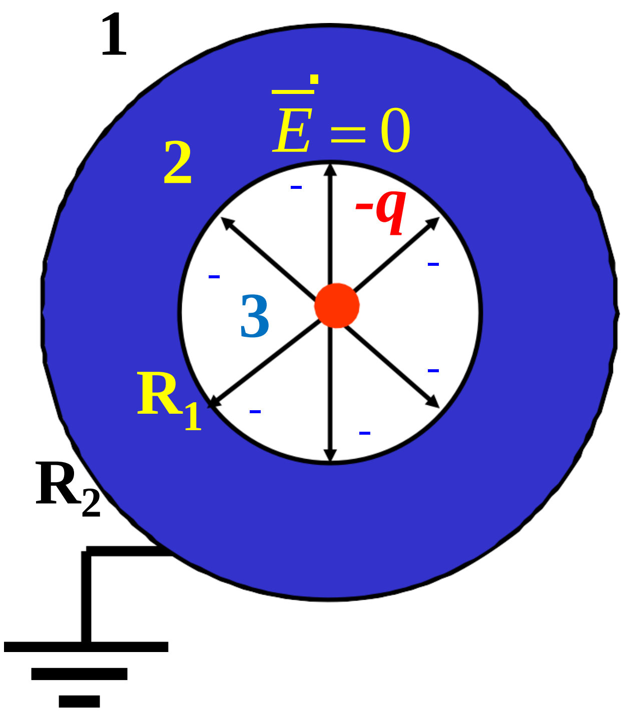
接地的含义是使其电势为零。
但电荷不一定为零！

对黄色曲面应用高斯定理，可证其内部总电荷为**0**，于是内壁感应出的电荷量仍为-***q***。

由接地导体的电势为零，可知外壁(**R_2**)处无电荷(不是普适结论**!**)。

对导体空腔情况：**2)** 空腔内放置一电荷q

外表面接地。



区域1：$E=0$ $V=0$

区域2($R_1<r<R_2$)：

$E=0$ $V=0$

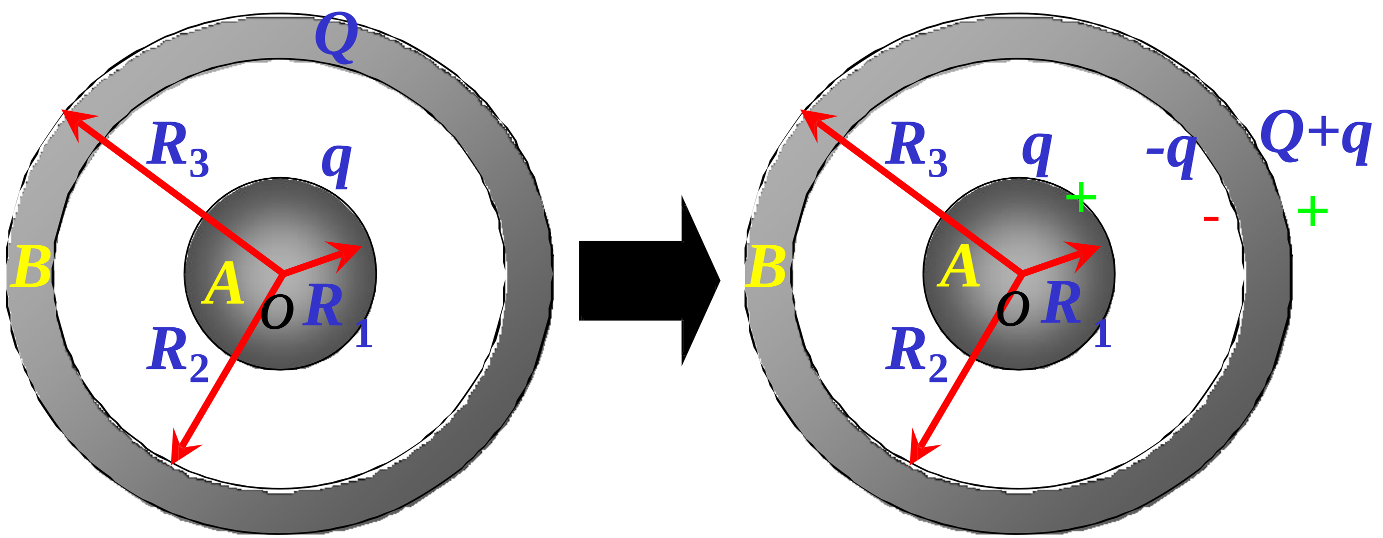
区域3($r<R_1$)：$E=\frac{1}{r^2}$

$$V=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot dl=\int_r^{R_1}\vec{E}\cdot dl+0+0$$

$$=(-\frac{1}{r})\Big|_r^{R_1}=\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}$$

应用：静电屏蔽

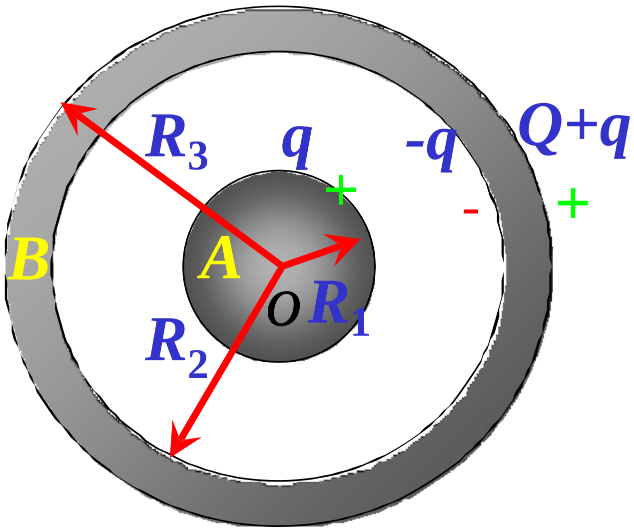
例：金属球A 与金属球壳B 同心放置，已知A 带电量为q，B 带电量为Q，求电荷分布、空间场强、电势。



解：

1) 对于金属球A，电荷应分布在A 表面。
2) 对于球壳B，取一刚好包围B 内表面的球面，应用高斯定理可知，B 的内表面电荷应为q。
3) 于是B 的外表面电荷为$Q+q$。

4）根据导体的性质和应用高斯定理可知



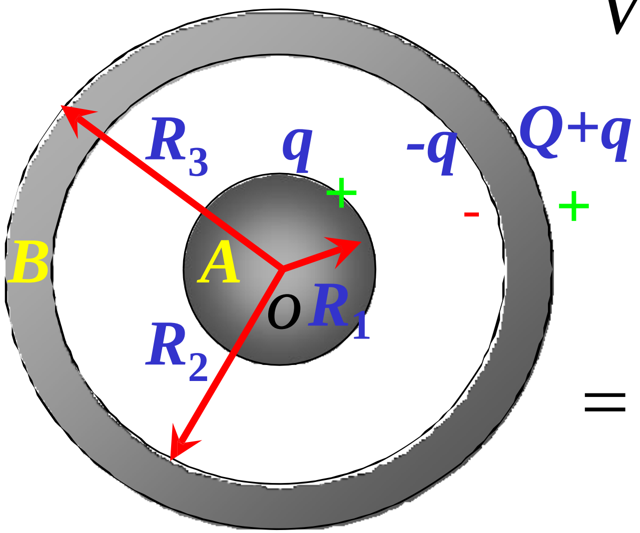
$$
\begin{cases}
\vec{E}(R_3 < r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q+q}{r^2}\hat{r} \\
\vec{E}(R_2 < r < R_3) = 0 \\
\vec{E}(R_1 < r < R_2) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\hat{r} \\
\vec{E}(r < R_1) = 0
\end{cases}
$$

5) 球壳B 外部的电势为

$$V(R_3 < r) = \int_r^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q+q}{r}$$

根据导体的性质

$$V(R_2 < r < R_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q+q}{R_3}$$



$$V(R_1 < r < R_2) = \int_r^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_r^{R_2} \frac{1}{r^2} dr + \int_{R_2}^{\infty}$$

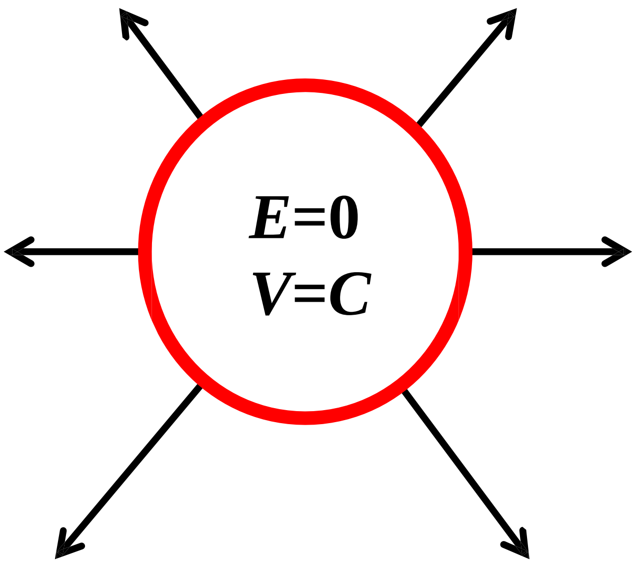
$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q+q}{R_3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q+q}{R_3} - \frac{q}{R_2} + \frac{q}{r}\right)$$

$$V(r < R_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q+q}{R_3} - \frac{q}{R_2} + \frac{q}{R_1}\right)$$

解2：应用叠加原理

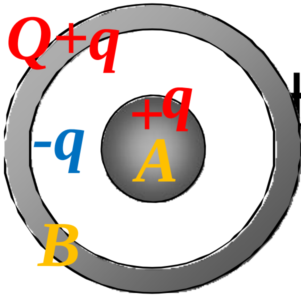
回顾：均匀分布的带电球面产生的电场、电势为



	外	内
E	$\dfrac{Q}{r^2}$	0
V	$\dfrac{Q}{r}$	$\dfrac{Q}{R}=$ 常数

球对称，和带电球面半径无关

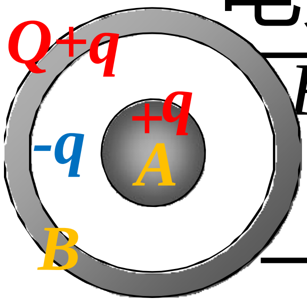
解2：应用叠加原理



场强*E*	**B**外	**B**内	**A**外	**SUM**
$r > R_3$	$\dfrac{Q+q}{r^2}$	$\dfrac{-q}{r^2}$	$\dfrac{q}{r^2}$	$\dfrac{Q+q}{r^2}$
$R_2 < r < R_3$	**0**	$\dfrac{-q}{r^2}$	$\dfrac{q}{r^2}$	**0**
$R_1 < r < R_2$	**0**	**0**	$\dfrac{q}{r^2}$	$\dfrac{q}{r^2}$
$r < R_1$	**0**	**0**	**0**	**0**

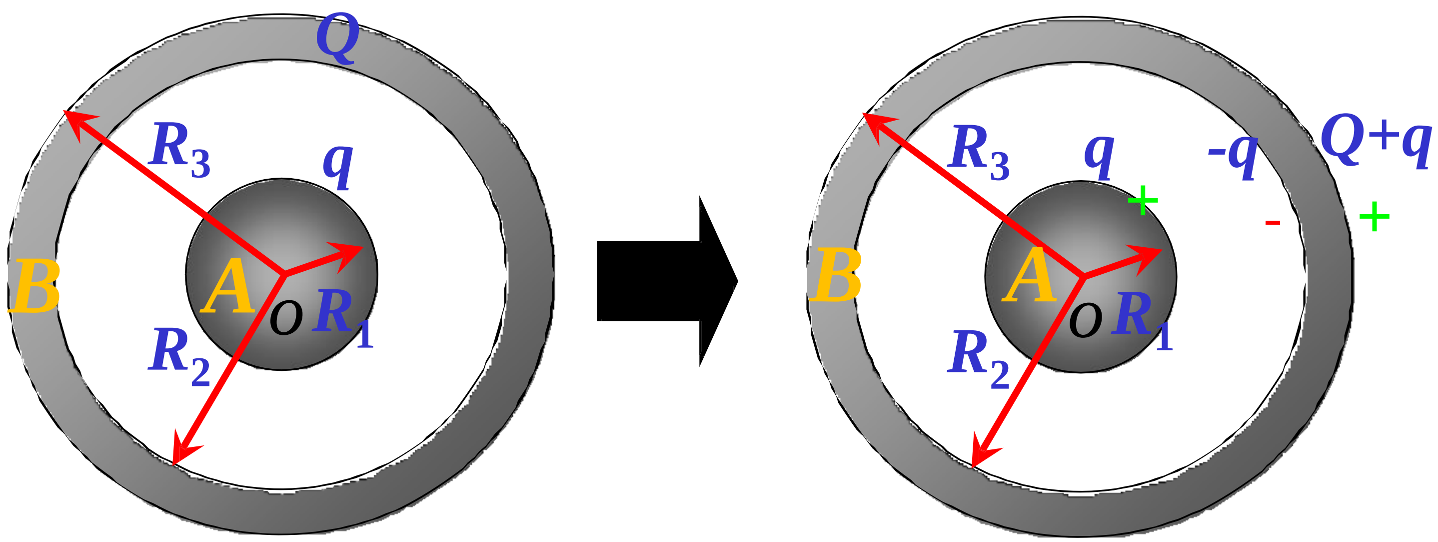
静电屏蔽是空间电荷叠加的结果。

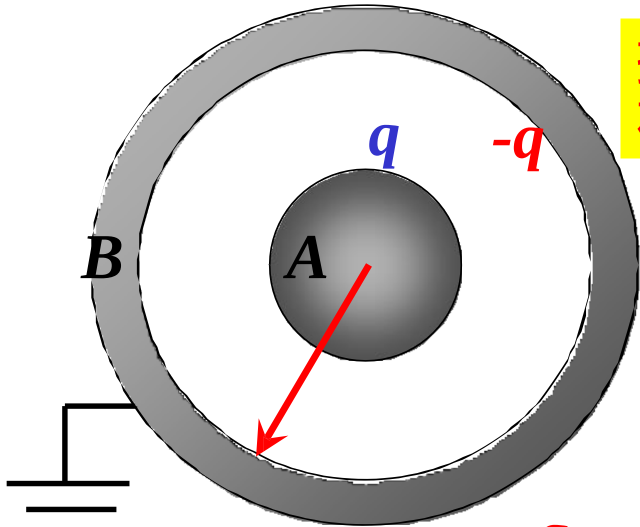
解2：应用叠加原理



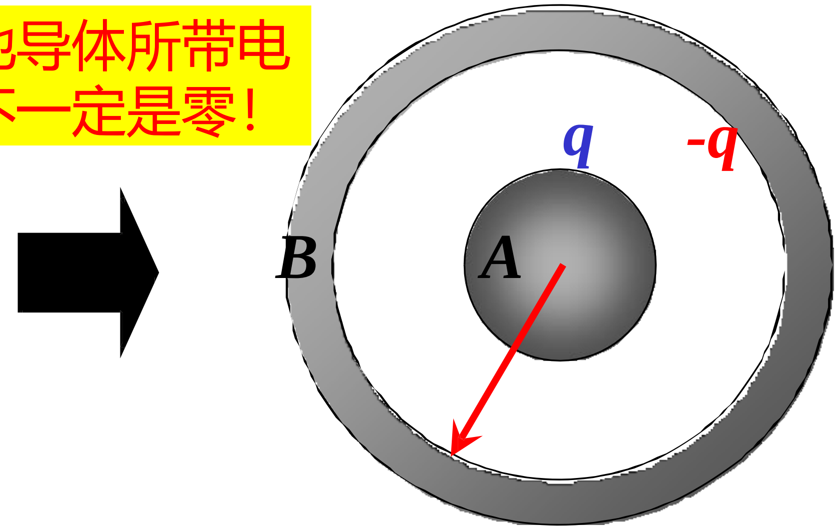
电势V	B外	B内	A外	SUM
$R_3<r$	$\frac{Q+q}{r}$	$\frac{-q}{r}$	$\frac{q}{r}$	$\frac{Q+q}{r}$
$R_2<r<R_3$	$\frac{Q+q}{R_3}$	$\frac{-q}{r}$	$\frac{q}{r}$	$\frac{Q+q}{R_3}$
$R_1<r<R_2$	$\frac{Q+q}{R_3}$	$\frac{-q}{R_2}$	$\frac{q}{r}$	$\frac{Q+q}{R_3}-\frac{q}{R_2}+\frac{q}{r}$
$r<R_1$	$\frac{Q+q}{R_3}$	$\frac{-q}{R_2}$	$\frac{q}{R_1}$	$\frac{Q+q}{R_3}-\frac{q}{R_2}+\frac{q}{R_1}$

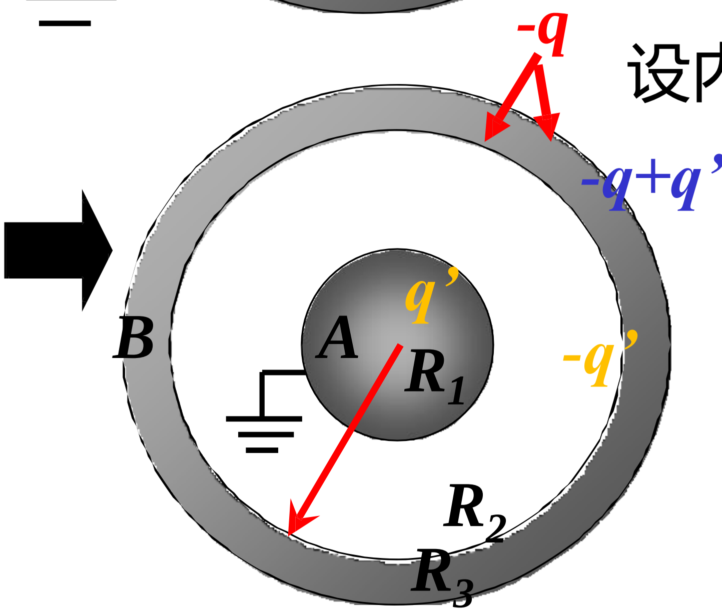
例：金属球 A 与金属球壳 B 同心放置，已知 A 带电量为 q，B 带电量为 Q，现在将B球接地，然后断开，再将A球接地。求电荷分布。





接地导体所带电荷不一定是零!



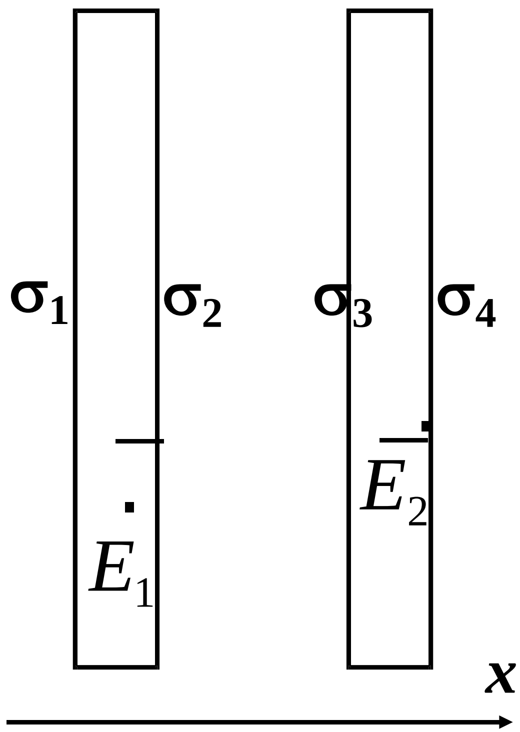


设内壁感应电荷为$-q'$,则内壁电势为

$$\frac{q'}{R_1}+\frac{-q'}{R_2}+\frac{-q+q'}{R_3}=0$$

$$q'=\frac{\square_1 \quad qR_2R}{R_1R_2+R_2R_3-R_1R_3}$$

例：两导体板平行相对放置，带电量分别为Q和Q’，如两导体板的四个平行表面的面积都是S，且可视为无限大板，求四个面上的面电荷密度。



$$E_1=\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3-\sigma_4)=0$$

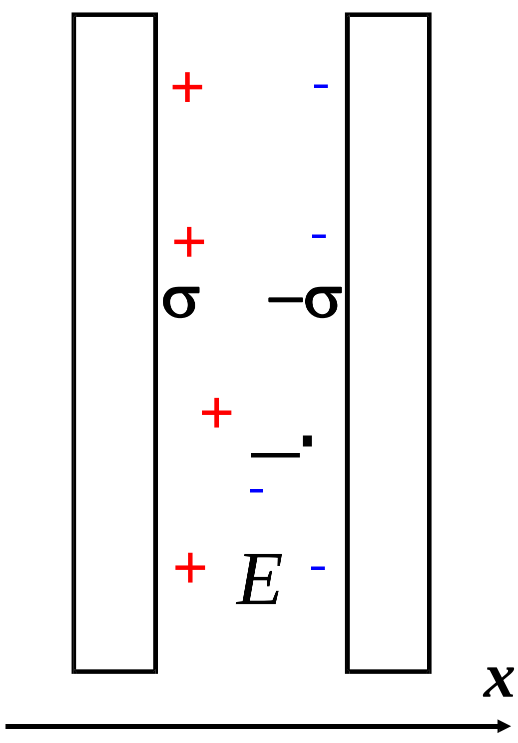
$$E_2=\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3-\sigma_4)=0$$

$$\sigma_1+\sigma_2=Q/S$$

$$\sigma_3+\sigma_4=Q'/S$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sigma_1=\sigma_4=\dfrac{(Q+Q')}{2S}\\[2ex]\sigma_2=-\sigma_3=\dfrac{(Q-Q')}{2S}\end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_4 = \dfrac{(Q+Q')}{2S} \\ \sigma_2 = -\sigma_3 = \dfrac{(Q-Q')}{2S} \end{cases}$$



当Q = - Q’= σS 时，

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_4 = 0 \\ \sigma_2 = -\sigma_3 = \sigma \end{cases}$$

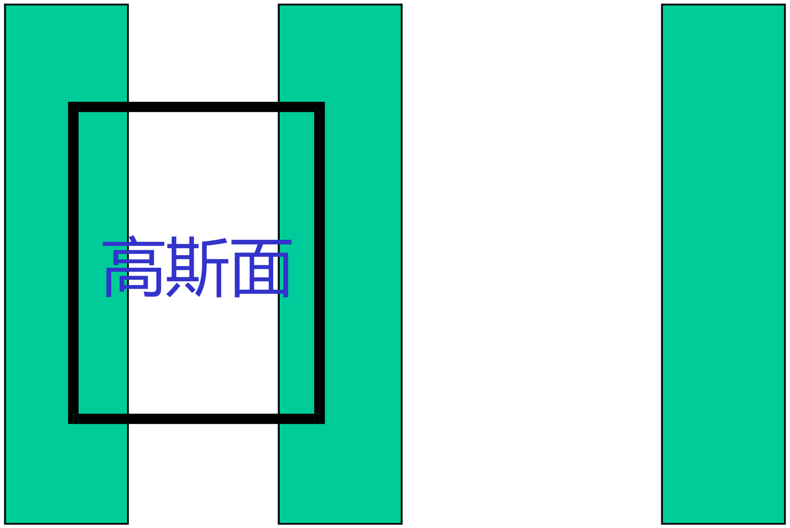
电荷全分布在内表面

空间电场只有两板之间非零，

$$E = 2\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

用高斯定理可以得到同样的结果。

例：对于三个平行排列的导体板，计算上面问题。



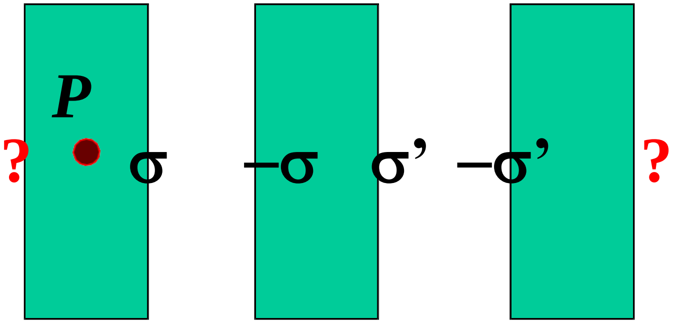
由高斯定理和导体的性质可以得到一般性结论：

1）相对的平面带有等量异号电荷。

2）最外侧两个面带等量同号电荷。

根据这个性质列方程等同于根据导体内部电场为零列方程。

定理2) 的证明

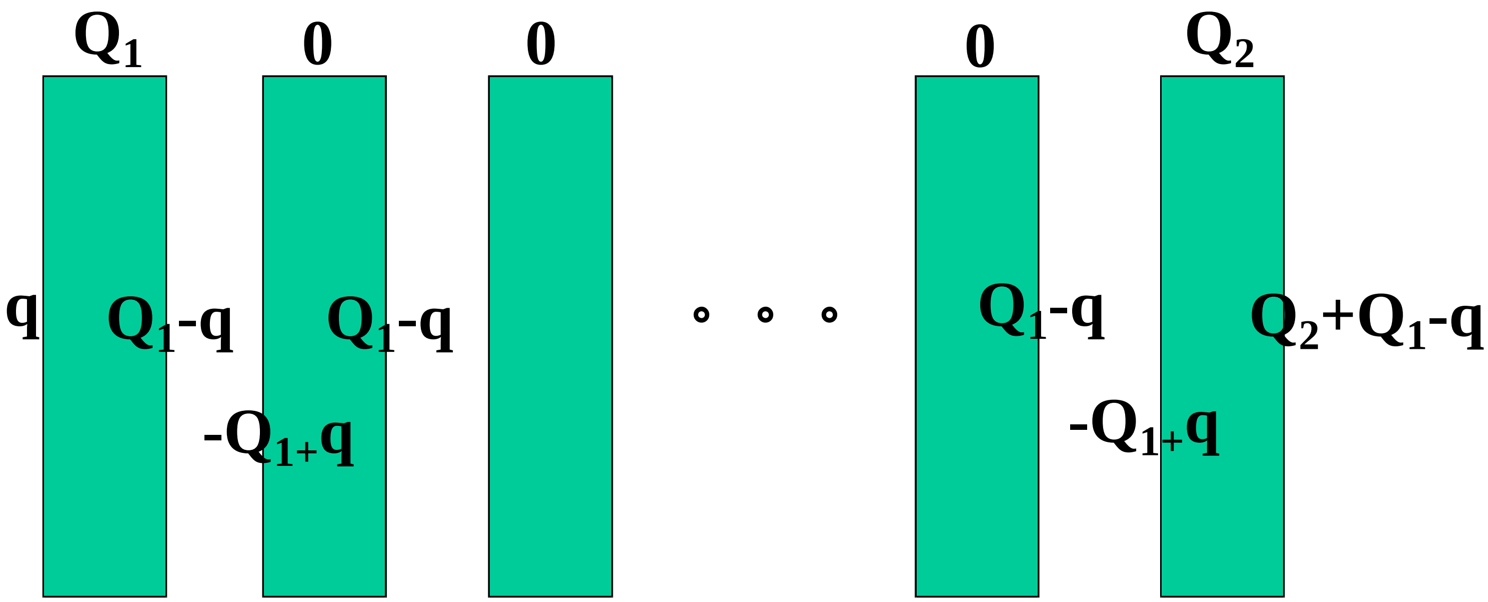


•由最左边导体内部电场为零和叠加原理，这个零电场是由所有极板的电荷分布决定的。

•除去最外侧两个极板外，所有极板成对出现并带有等量异号电荷，它们产生的场强相互抵消。

•要使最左边导体内部电场为零，只有最外侧两个极板带等量同种电荷。

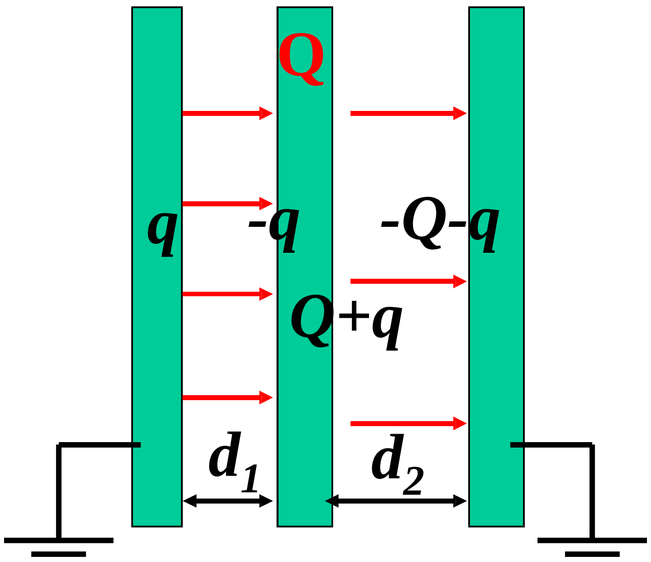
一系列(N)个极板，已知两侧极板总电量分别为Q_1, Q_2，中间所有极板总电荷为零，求电荷分布。



由前页定理(2) ➡ $q=Q_2+Q_1-q$

$q=(Q_2+Q_1)/2$

例：图中三个平行导体平板，其中两侧的接地，已知中间板带的电量为Q和三个平板间的相互距离，求电荷分布和各板电势。



$$\frac{q}{S\varepsilon_0}d_1+\frac{Q+q}{S\varepsilon_0}d_2=0$$

$$\Rightarrow q=-\frac{d_2}{d_1+d_2}Q$$

$$\Rightarrow V_a=\frac{d_1d_2}{d_1+d_2}\frac{Q}{S\varepsilon_0}$$

1。孤立导体的电容

电容定义为，$C = \dfrac{Q}{V}$

它反映了储存电荷和电能的能力。

对于一个半径为***R*** 的孤立导体球，它的电势为

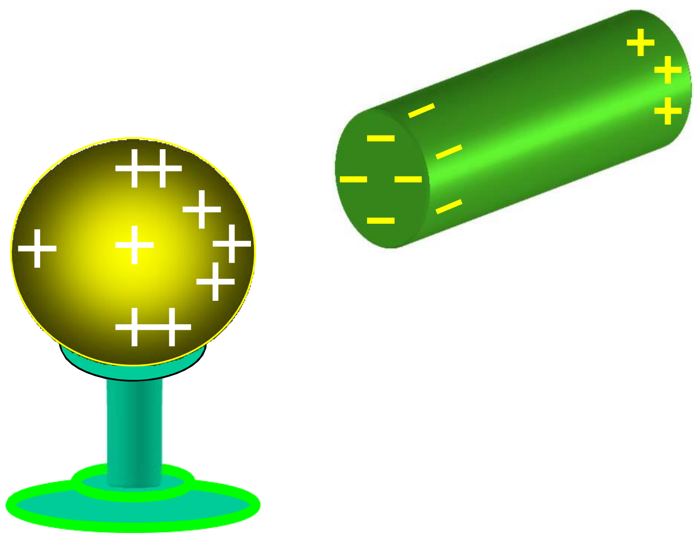
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

则导体球的电容为 $C = \dfrac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$

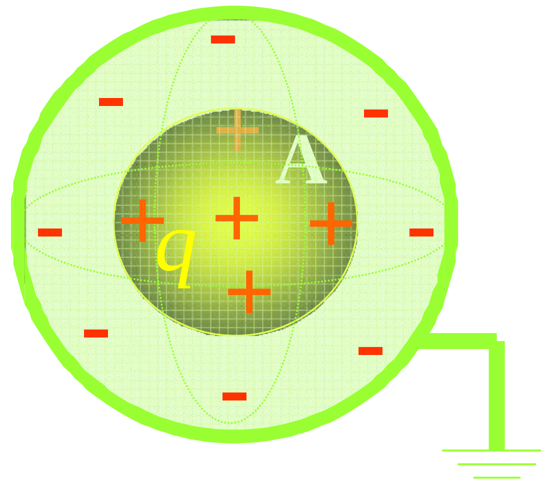
孤立导体作储能元件的问题：

1）能量贮存在整个空间，不集中。

2）电容值受周围导体或带电体影响。

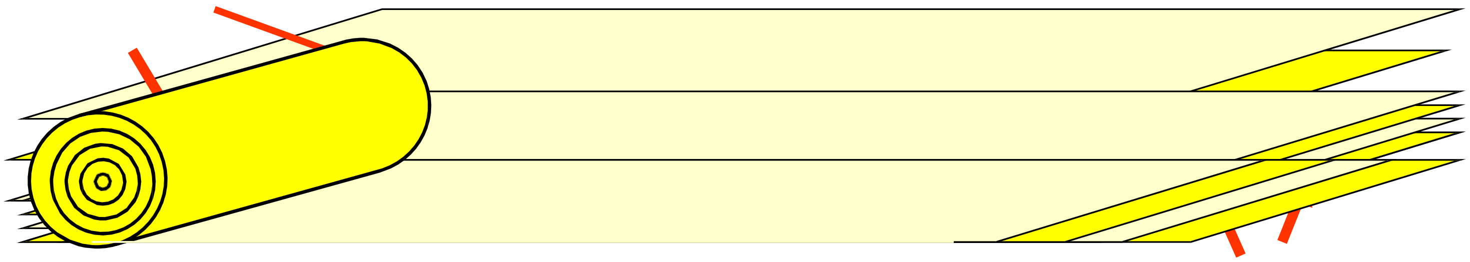


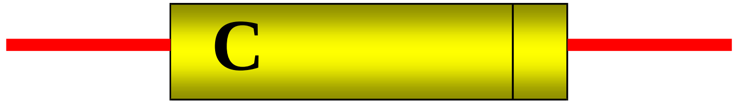
解决办法--静电屏蔽



无论壳外有无电荷、接地与否都不影响**AB**间的电压。

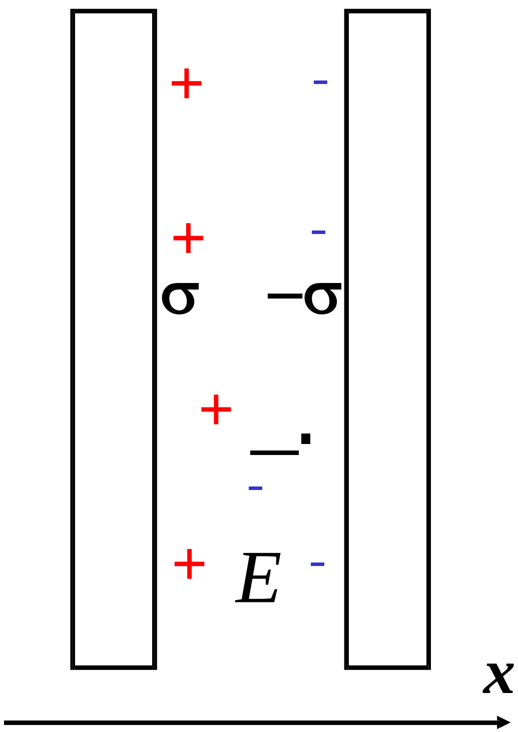
实际中屏蔽不一定要求很高故在工艺上用两无限大平板（极板）代替**AB**导体。





提高电容的重要手段，加入电介质。

2。平板电容器



两个导体构成的体系称为电容器，它的电容定义为

$$C=\frac{Q_A}{U_{AB}}=\frac{Q_A}{V_A-V_B}$$

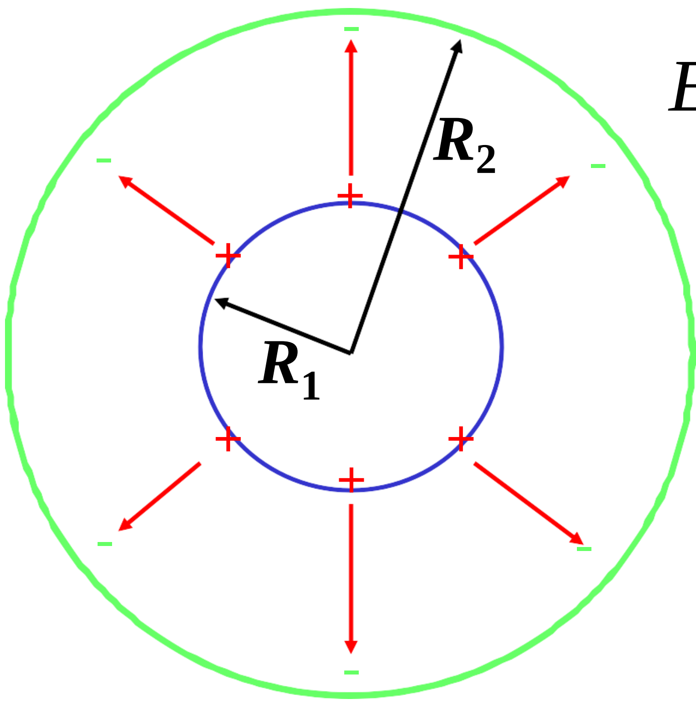
左图两平板之间电场为

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

则两平板电势差为$U_{AB}=E\cdot d$

$$C=\frac{Q_A}{U_{AB}}=\frac{\sigma S}{Ed}=\frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

3。同心球壳的电容



根据对称性，并应用高斯定理

$$E4\pi r^2=\frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

两球壳间电势差

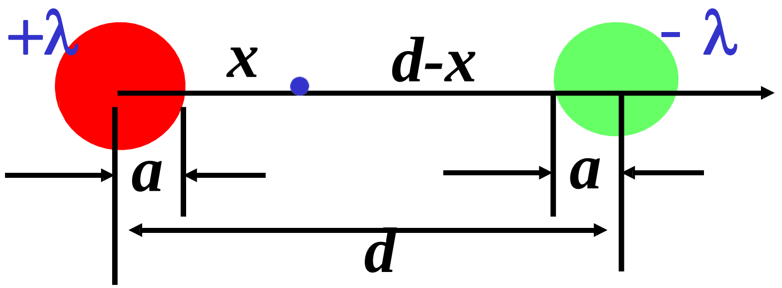
$$U_{AB}=\int_{R_1}^{R_2} E\cdot dr=\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dr$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

电容为

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2-R_1}$$

4。两根无限长平行直导线单位长度的电容



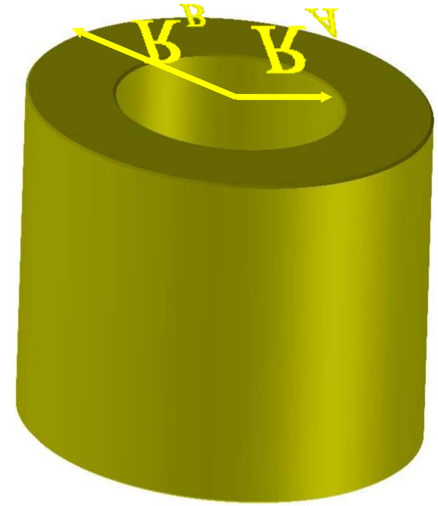
设线电荷密度为λ，则图中x处的电场强度为

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2\lambda}{x} + \frac{2\lambda}{d-x}\right)$$

电势差为$U = \int_a^{d-a} E dx = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} 2\ln\frac{d-a}{a} \approx \frac{\lambda}{\pi\varepsilon_0}\ln\frac{d}{a}$

单位长度的电容为$C = \frac{Q}{U} = \pi\varepsilon_0 / \ln\frac{d}{a}$

5。同轴圆柱形电容器的电容



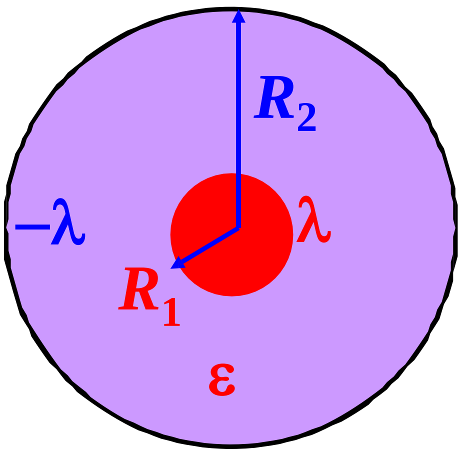
$$\because\ E=\frac{\square\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\therefore\quad U_{+}-U_{-}=\int_{+}^{-}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$=\int_{R_A}^{R_B}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

$$\therefore\quad C_0=\frac{q}{U_{+}-U_{-}}=\frac{\lambda l}{\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_B}{R_A}}=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{R_B}{R_A}}$$

例：求填充了介电常数为ε的同轴圆柱形电容器内部电场的静电能。



解：由高斯定理

$$D\cdot 2\pi r L=\lambda L \Rightarrow D=\frac{\lambda}{2\pi r}$$

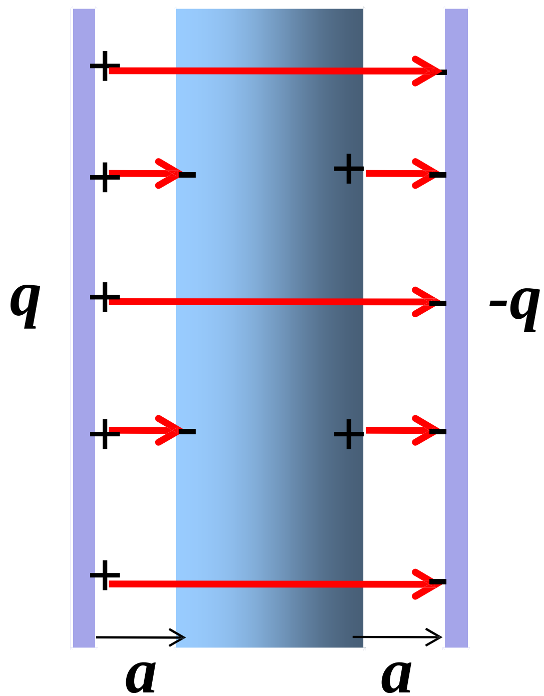
$$E=D/\varepsilon=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}$$

$$w=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}=\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon r^2}$$

对单位长度的电容器：

$$W=\int_{R1}^{R2}\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{4\pi^2\varepsilon r^2}\cdot 2\pi r dr=\left(\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon}\right)\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

思考题：如图，间距为**d**的平行极板中充有电介质**ε**，设电介质紧贴极板，即**a ◎ 0** 。问其中储存的电场能。



$$w=\frac{1}{2}D\cdot E\cdot Sd=\frac{1}{2}\sigma\frac{\sigma}{\varepsilon}\cdot Sd$$

也可以：

$$w=\frac{1}{2}\int\sigma\phi dS=\frac{1}{2}\sigma US=\frac{1}{2}\sigma EdS$$

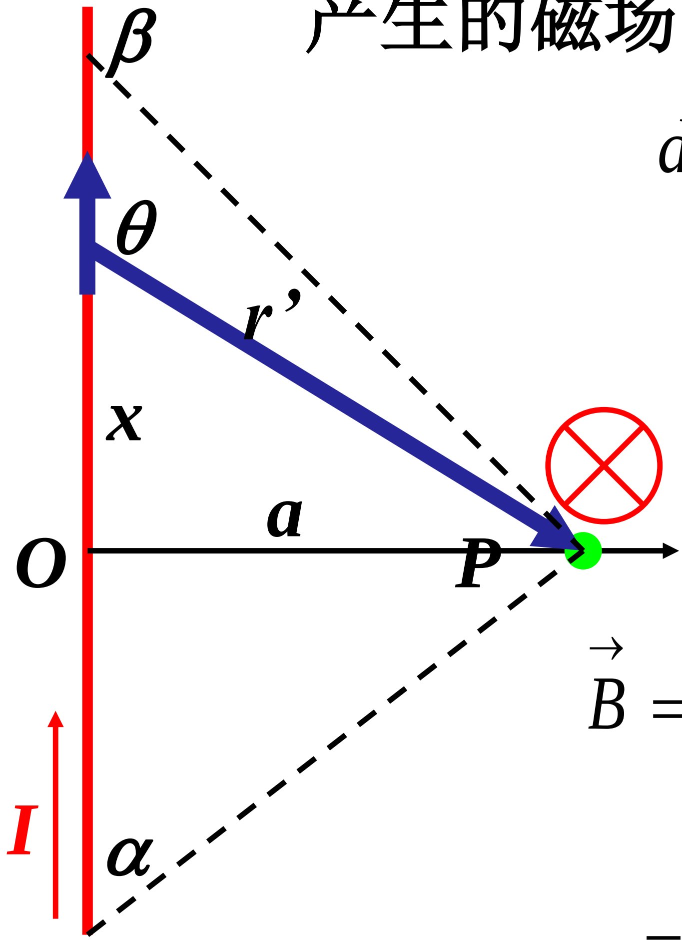
$$=\frac{1}{2}\sigma E\cdot Sd=\frac{1}{2}\sigma\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot Sd$$

但问题是：极板附近电荷为自由电荷和感应电荷之和，它应该小于上式中的电荷。

答案：用第二个公式计算时，不应该考虑感应电荷。

a
◎
0

例：如图，求一段通以电流 I 的直导线在 P点产生的磁场。



$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}'}{r'^3}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dx\sin\theta}{x^2+a^2}$$

由于 $-ctg\theta=\dfrac{x}{a}$ 得到，

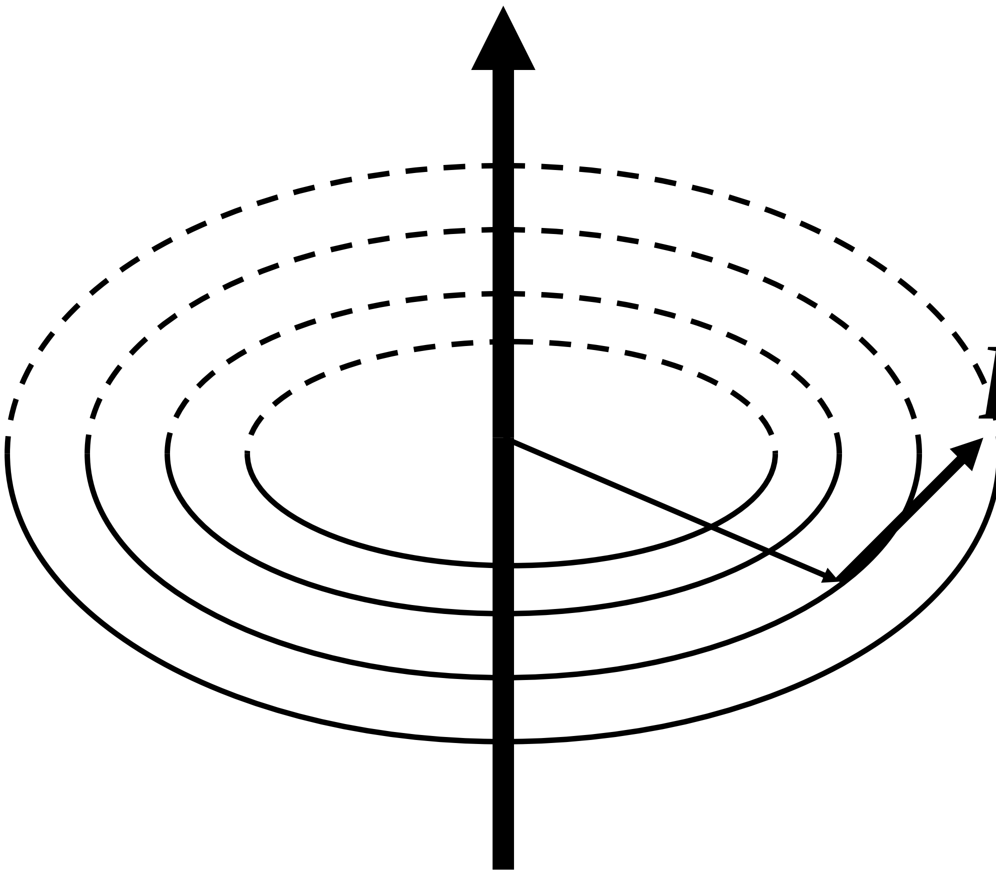
$$dx=-ad(ctg\theta)=\frac{ad\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{dx\sin\theta}{x^2+a^2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\frac{ad\theta\sin\theta}{\sin^2\theta\cdot a^2/\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_\alpha^\beta\frac{\sin\theta d\theta}{a}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\alpha-\cos\beta)$$

对无限长电流 $\boxed{B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}}$ 方向与电流成右手螺旋

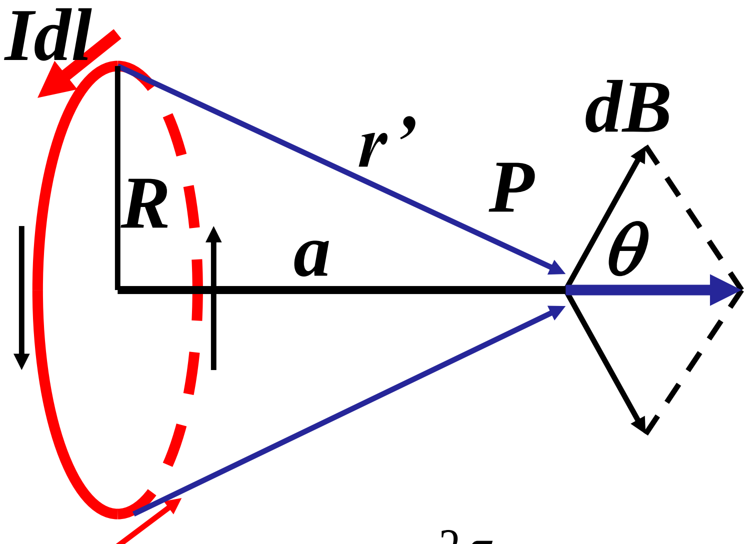
无限长电流的磁力线



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$$

B 线总是首尾相接

例：求半径为 ***R*** 的圆电流在垂直于圆面，并通过圆心的轴线上产生的磁场。



一小段电流 ***Idl*** 在 ***P*** 点产生的磁场在水平方向的分量为

$$dB\cos\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{R^2+a^2}\cos\theta$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{IRd\phi}{R^2+a^2}\cos\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I2\pi R\cos\theta}{R^2+a^2}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi RI}{R^2+a^2}\frac{R}{(R^2+a^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+a^2)^{3/2}}$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+a^2)^{3/2}}$$

定义磁偶极矩

$$m = IS$$

讨论：

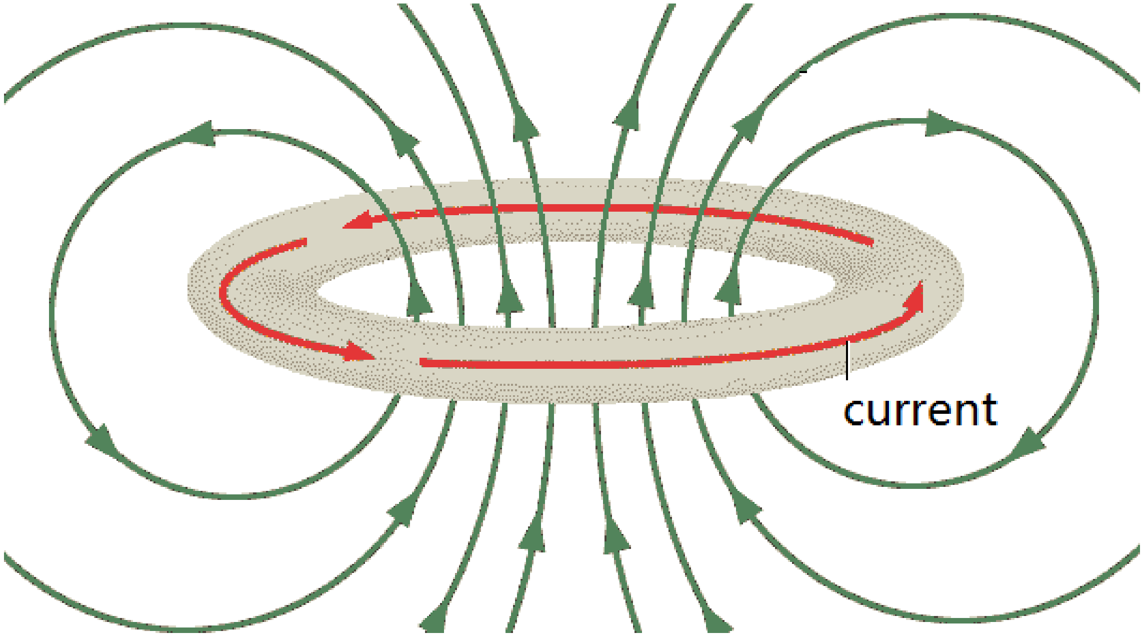
1) 当 *a*=0 时， $B=\frac{\mu_0 I}{2R}=\frac{\mu_0 I\pi R^2}{2R\pi R^2}=\frac{\mu_0 m}{2\pi R^3}$

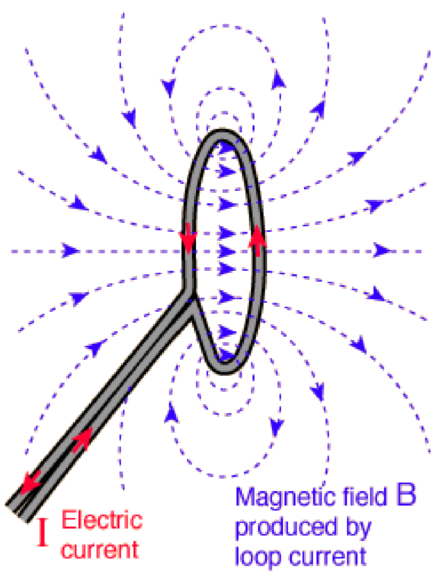
2) 当 *a*>>*R* 时，

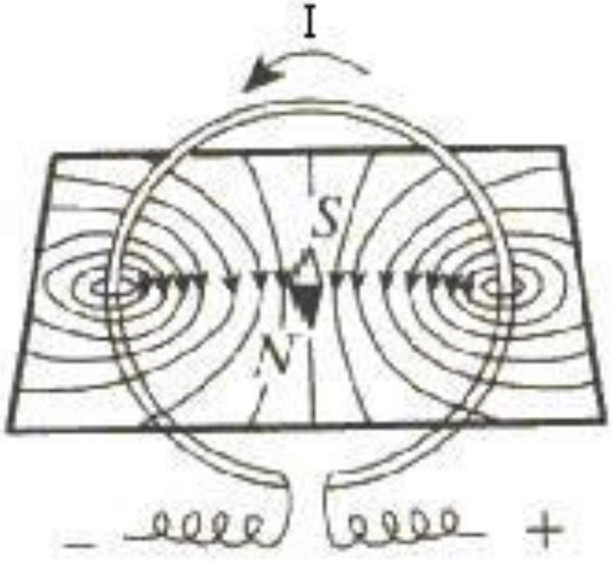
$$B=\frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{a^3}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{\pi R^2}{a^3}=\frac{\mu_0 IS}{2\pi a^3}$$

$$\Rightarrow B=\frac{\mu_0 m}{2\pi a^3}$$

圆电流的磁场


current


I
Electric current
Magnetic field B produced by loop current

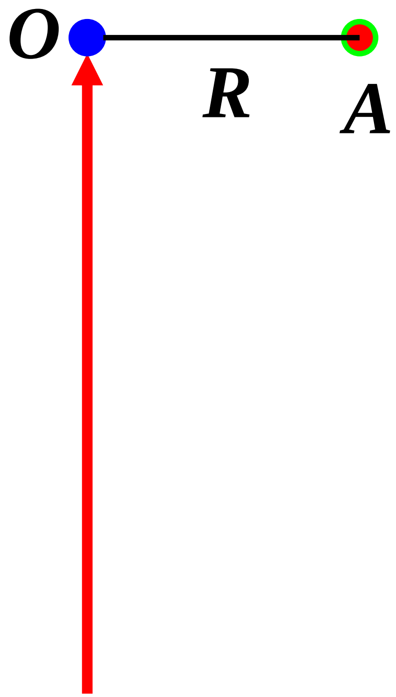

I
S
N
–
+

比较：

无限长电流： $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$ $\boldsymbol{R}$ 为到导线的距离

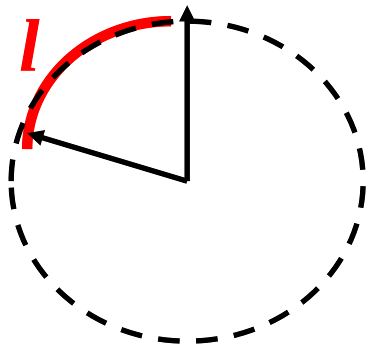
圆电流圆心处： $B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$ $\boldsymbol{R}$ 为圆电流半径

应用1：半无限长直电流在图中*A*点处产生的磁场为无限长直电流的一半。（注意OA垂直于直电流）



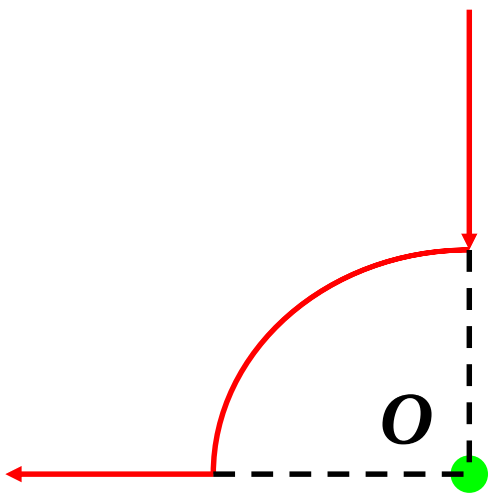
$$B=\frac{1}{2}\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

应用2：长度为 *l* 的圆弧电流在圆心产生的磁场为



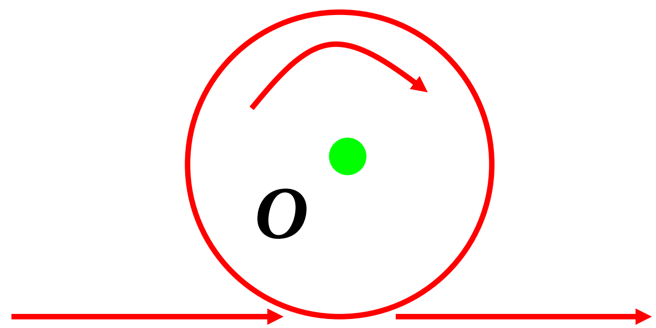
$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}\frac{l}{2\pi R}$$

例：如图所示几种载流导线在平面内的分布，电流均为 I，求它们在 O 点处的磁感应强度，图中各圆或者圆弧半径均为R。



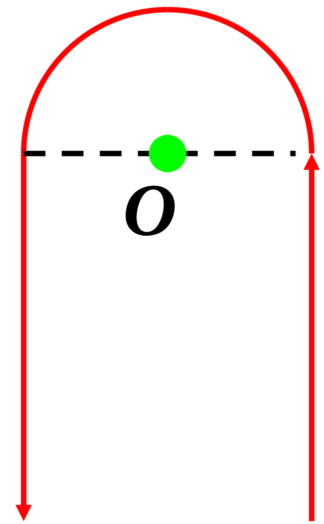
$$B=\frac{\mu_0 I}{8R}$$

方向向外



$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}-\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

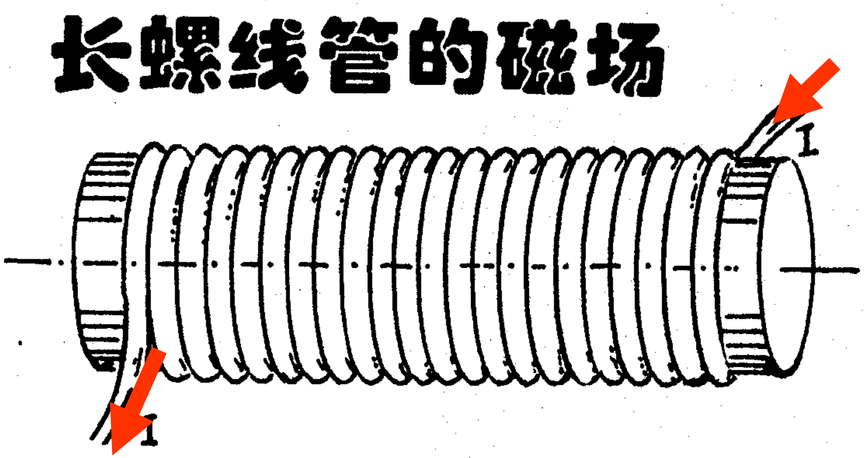
方向向里



$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}+\frac{\mu_0 I}{4\pi R}+\frac{\mu_0 I}{4R}$$

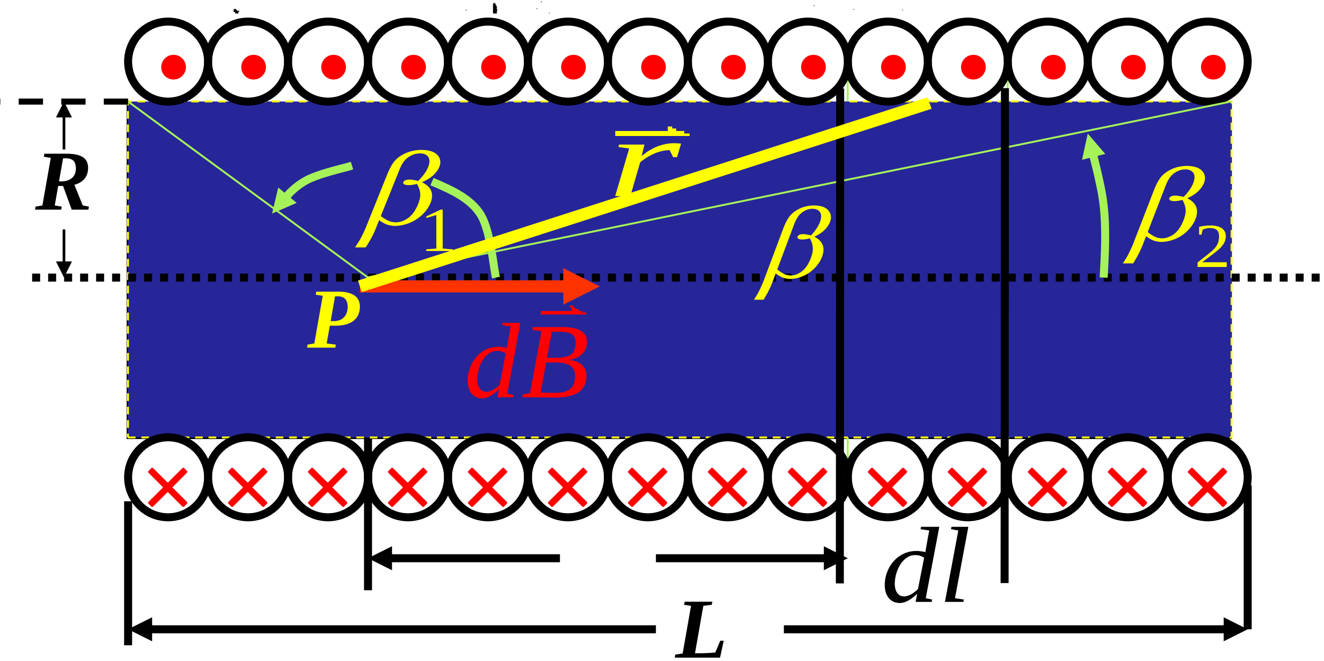
方向向外

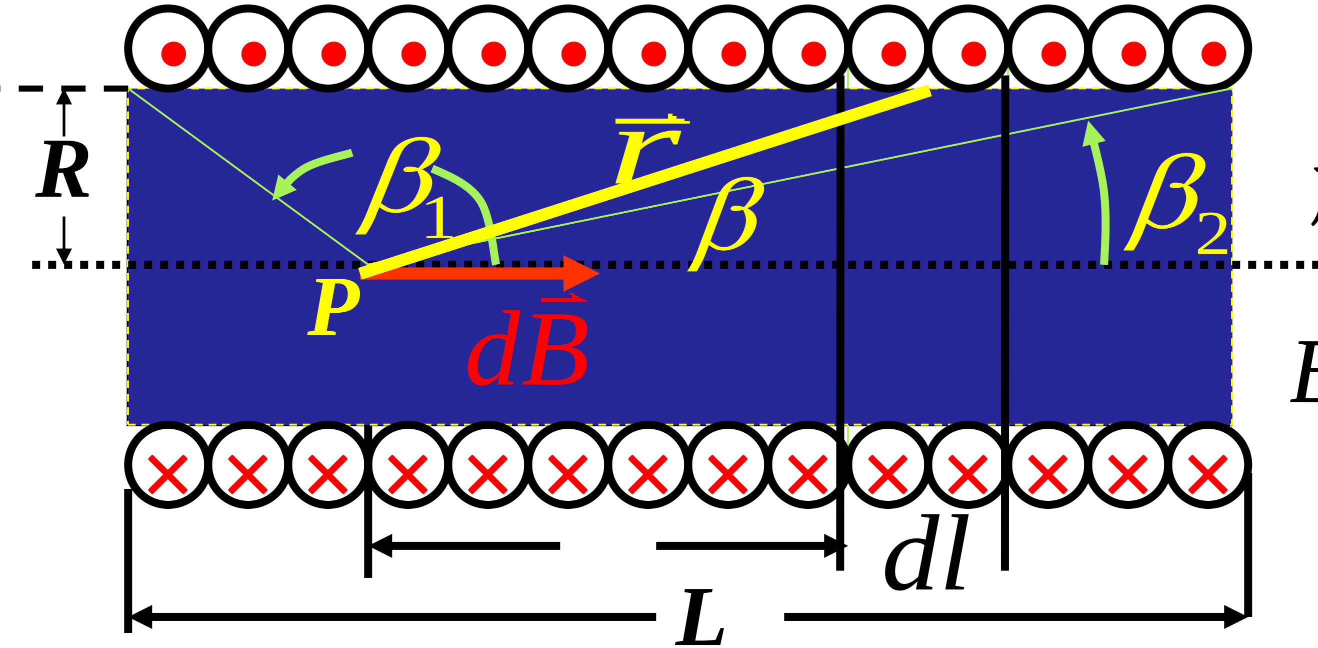
例：求载流直螺线管中心轴线上一点的磁感应强度。已知：半径R，电流I，单位长度匝数n。



P点位置由β_1,β_2决定

解：将螺线管分割成许多圆线圈。长度为dl的一段载有电流$nIdl$。





电流$nIdl$在P点产生的磁场

$$B=\frac{\mu_0(nIdl)R^2}{2r^{3/2}}$$

方向沿轴线

$$dB=\frac{\mu_0}{2}\cdot\frac{R^2nIdl}{(R^2+l^2)^{3/2}}$$

$$\therefore B=\int_L\frac{\mu_0}{2}\frac{R^2nIdl}{(R^2+l^2)^{3/2}}$$

统一变量：$l=R\,ctg\,\beta$

$$dl=-R\csc^2\beta\,d\beta$$

$$(R^2+l^2)=r^2$$

$$=(R\csc\beta)^2$$

$$=R^2\csc^2\beta$$

$$\therefore B=\int_L \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 nIdl}{(R^2+l^2)^{3/2}}$$

$$=\int_L \frac{\mu_0}{2}\frac{R^2 nI(-R\csc^2\beta d\beta)}{(R^2\csc^2\beta)^{3/2}}$$

$$=-\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\frac{d\beta}{\csc\beta}=-\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\beta d\beta$$

$$=\frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\beta_2-\cos\beta_1)$$

方向沿轴线

$$B=\frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\beta_2-\cos\beta_1)$$

讨论：1）对无限长螺线管

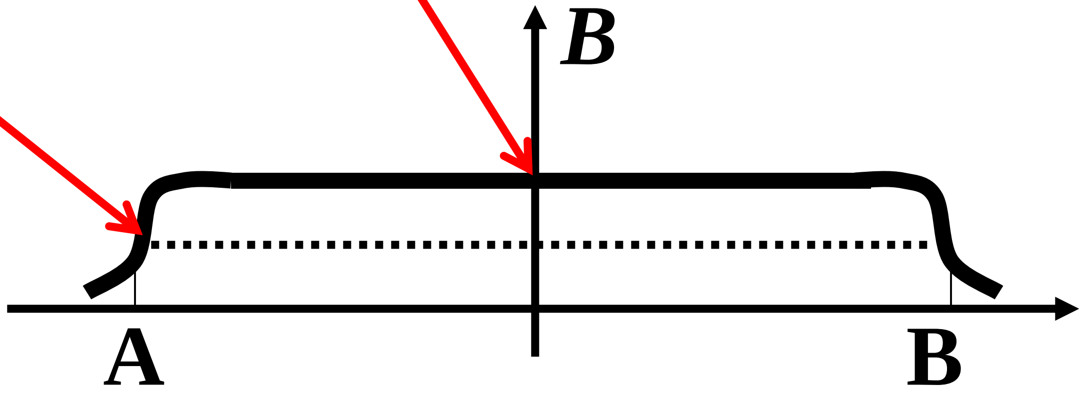
$$\beta_1\to\pi \quad \beta_2\to 0$$

$$\Rightarrow B=\mu_0 nI$$

2）对半无限长螺线管，即*P*点位于一端

$$\beta_1\to\frac{\pi}{2} \quad \beta_2\to 0$$

$$\Rightarrow B=\frac{\mu_0 nI}{2}$$



磁场

$$\oiint_S \vec{B}\bullet d\vec{S}=0$$

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\bullet d\vec{l}=\mu_0\sum_{内} I}$$

B的环流未必为零，

磁场为非保守力场

定义矢量势$\vec{A}$　$\nabla\times\vec{A}=\vec{B}$

磁感应线都是闭合。

高斯定理＋安培环路定理 $\xleftrightarrow{基本等价}$ 毕奥－萨伐尔定律＋叠加原理

静电场

$$\oiint_S \vec{E}\bullet d\vec{S}=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\oint_L \vec{E}\bullet d\vec{l}=0$$

E的环流恒为零，

电场为保守力场

定义标量势V　$\nabla V=\vec{E}$

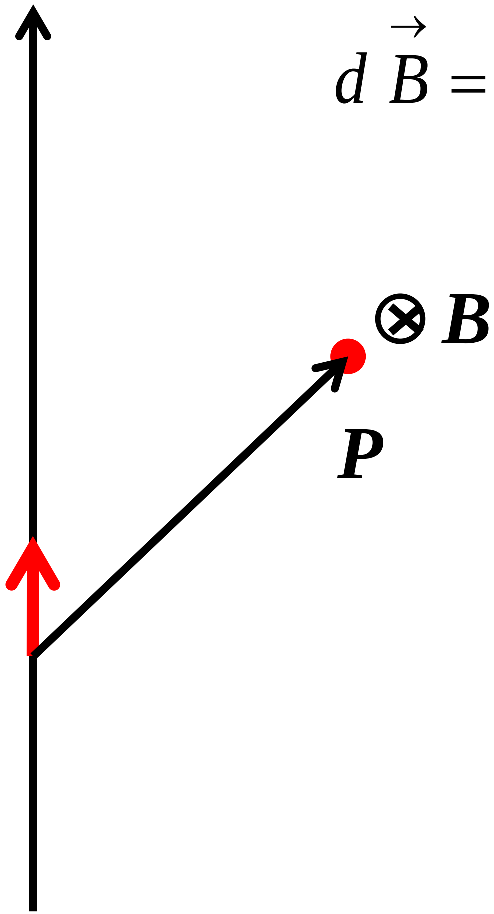
没有闭合的电力线

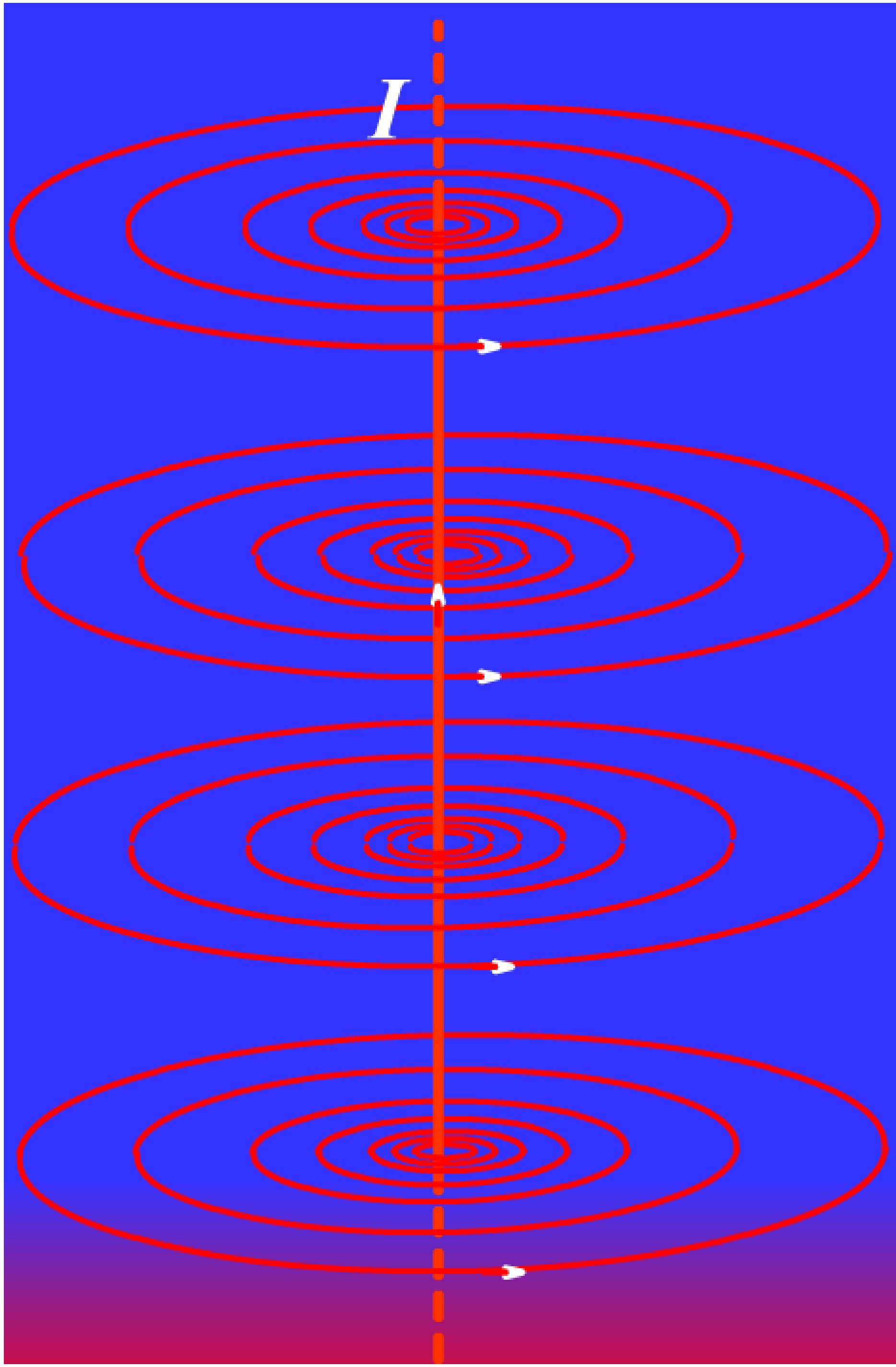
高斯定理＋静电环路定理 $\xleftrightarrow{基本等价}$ 库仑定律＋叠加原理

例：求无限长载流直导线周围B。已知电流强度I，向上。

根据毕萨定律分析B的分布

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{r}'}{r'^3}$$





对如图半径为R 的圆路径

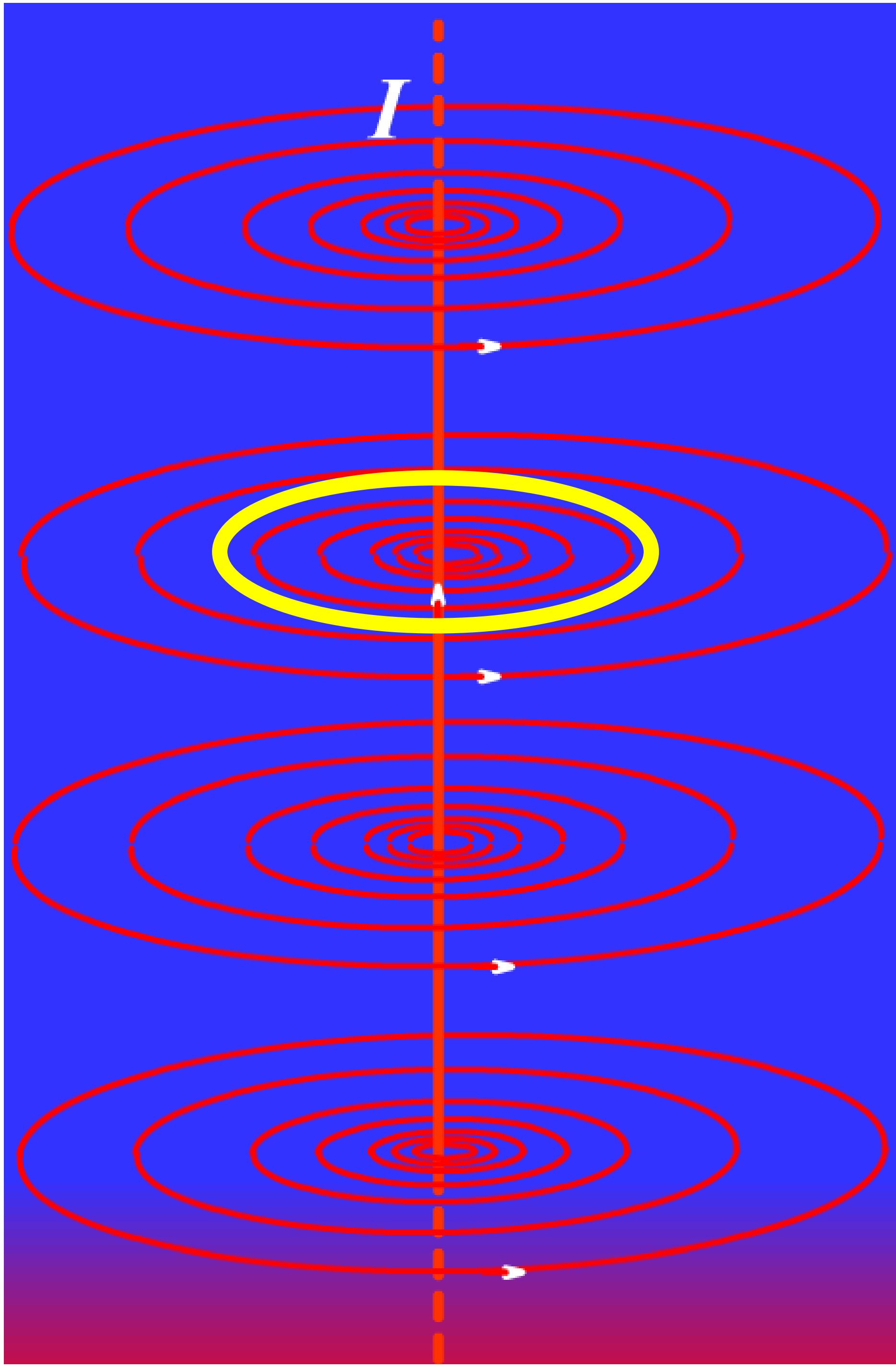
利用安培环路定理

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_i$$

$$B\cdot 2\pi R = \mu_0 I$$

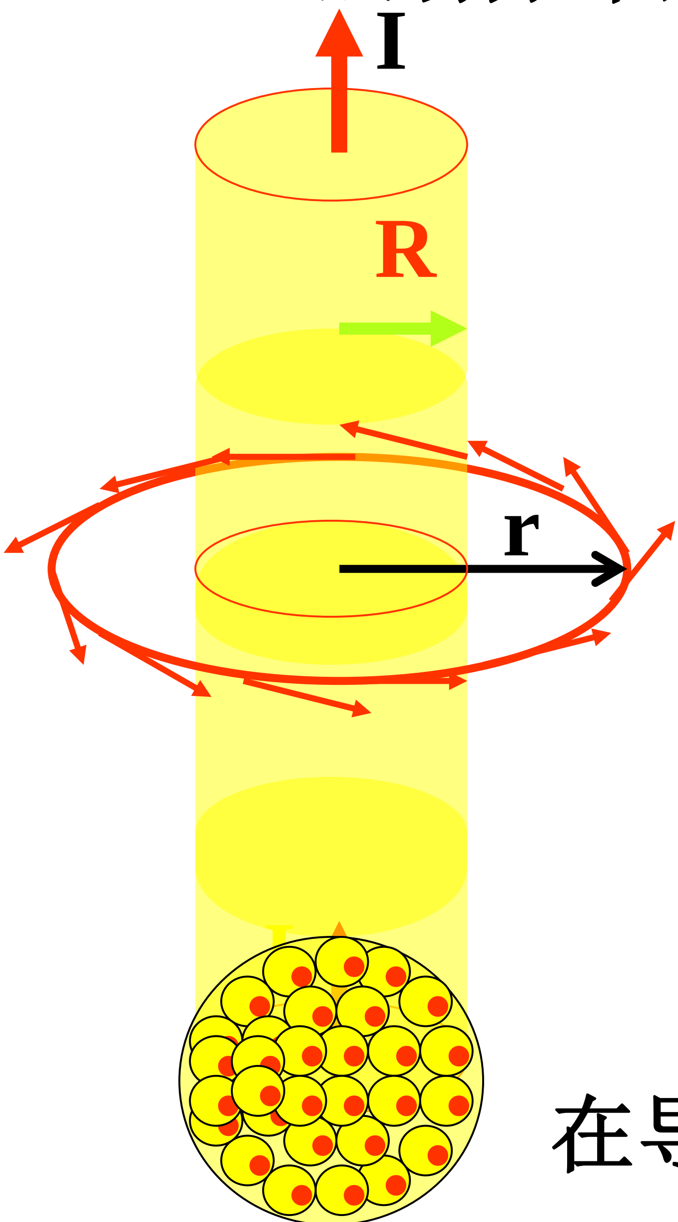
$$\Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

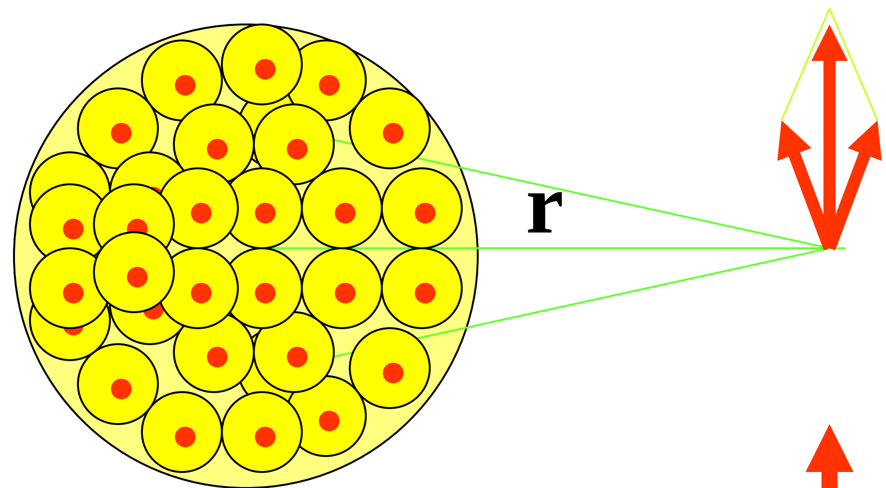
与毕-萨定律计算结果相同

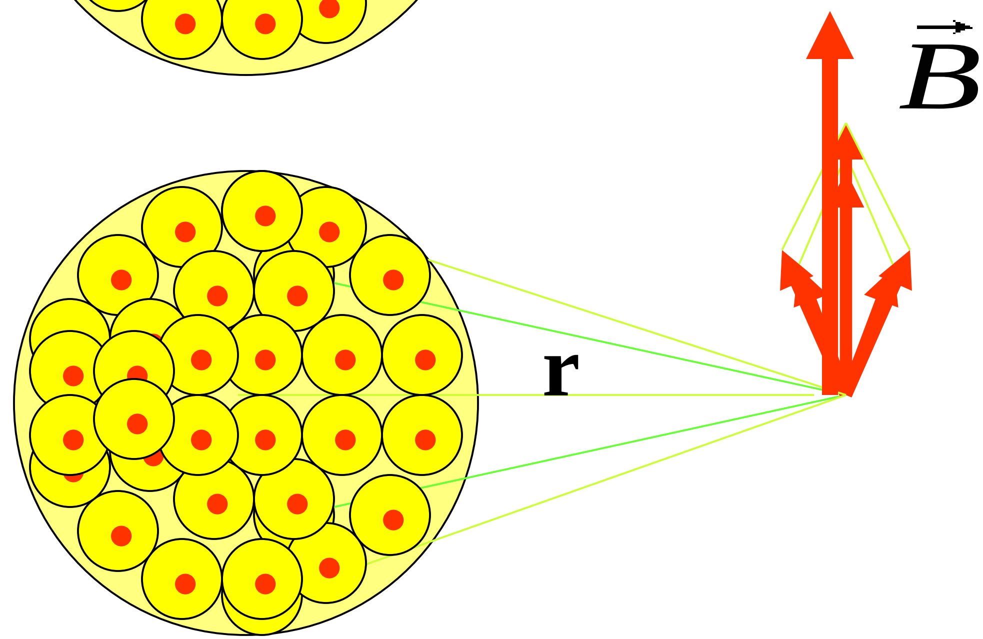


1）无限长直圆柱载流导线磁场的分布

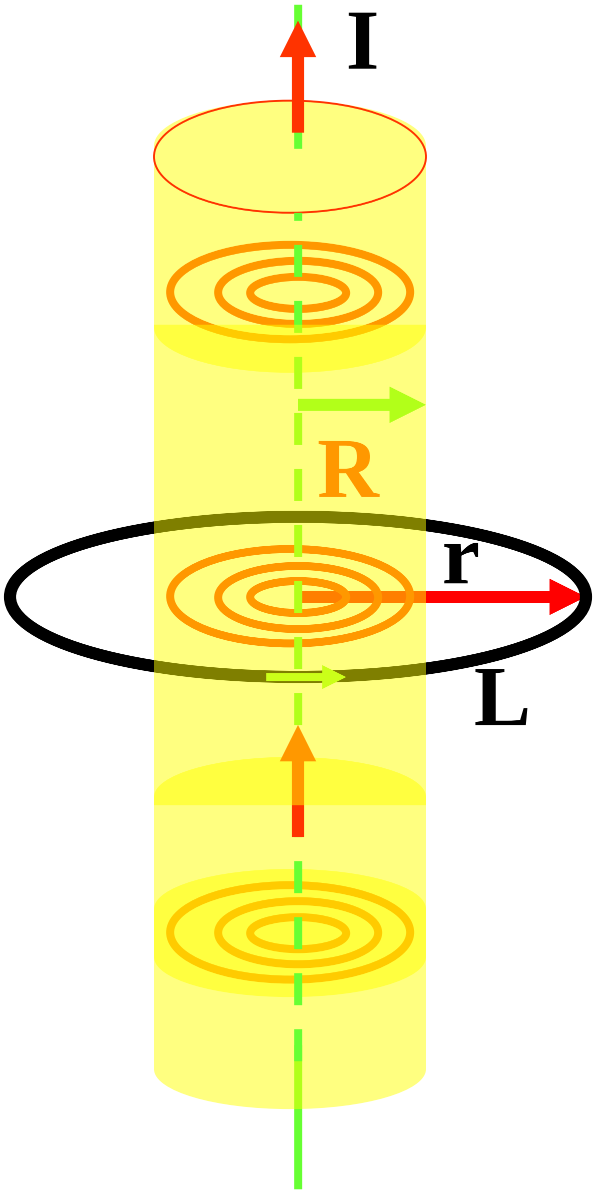
A）磁场分布的分析：







在导线外是圆形对称的磁场



1）导线外：作半径为 r 的安培环路L $(R \le r < \infty)$

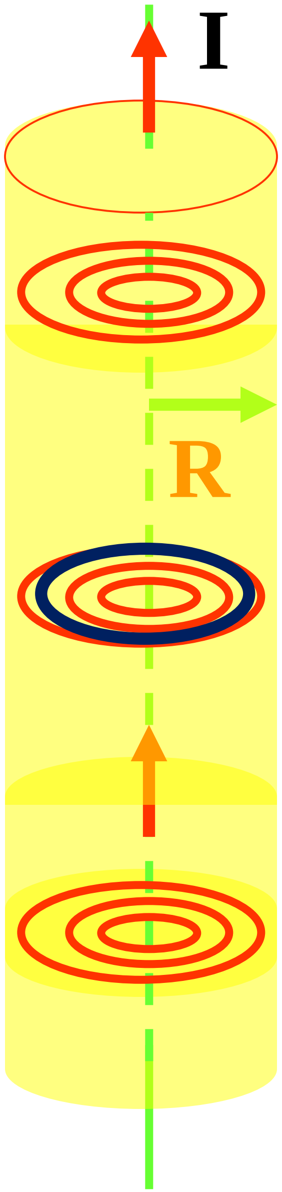
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_i = \mu_0 I$$

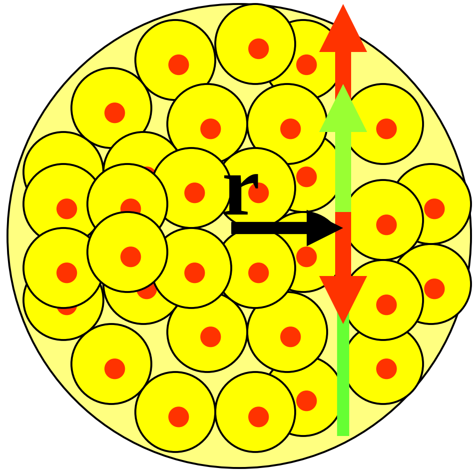
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_L B\cos 0^{\circ}\, dl = \mu_0 I$$

$$B\oint_L dl = B2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

在载流导体内：





也是以中心轴线为对称的分布。

2）导线内：作半径为r的安培环路 $(0 \le r < R)$

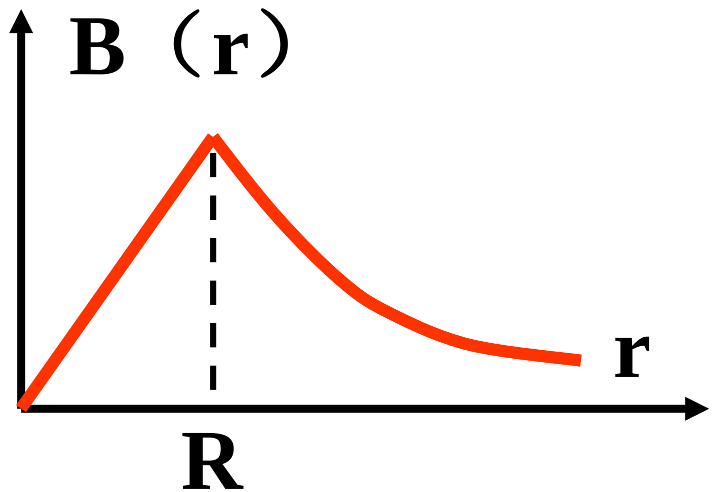
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_i$$

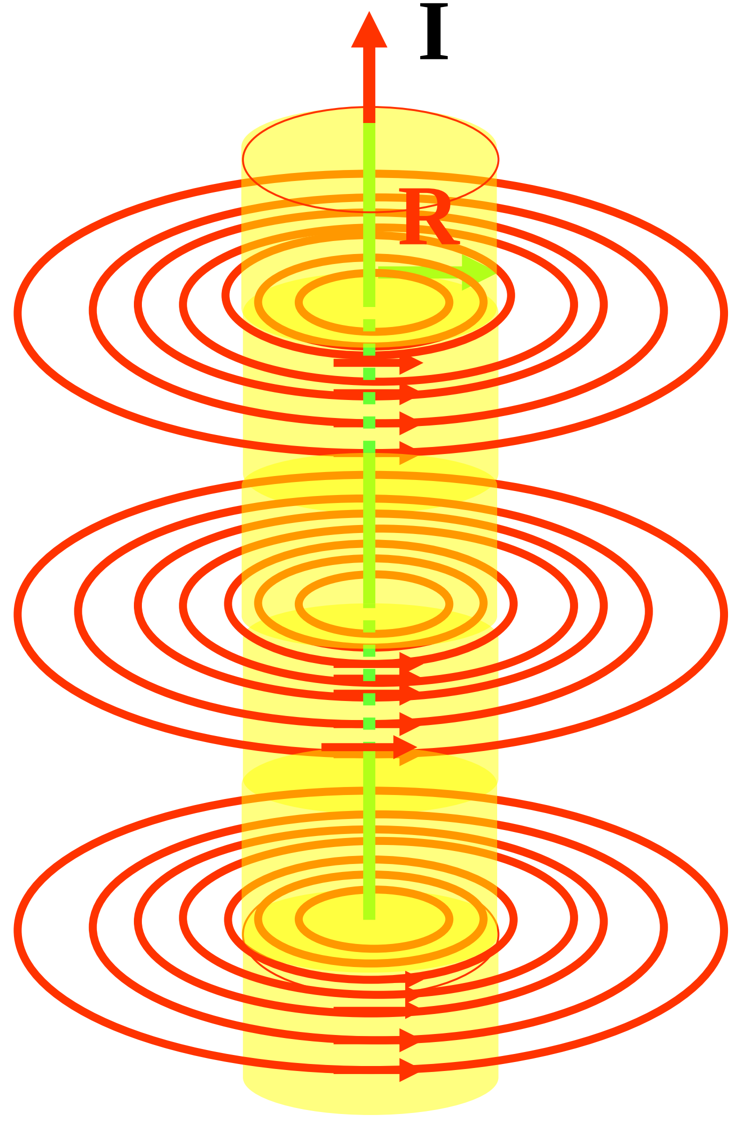
$$\oint_L B\cos 0^\circ dl = 2\pi r B = \mu_0 \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

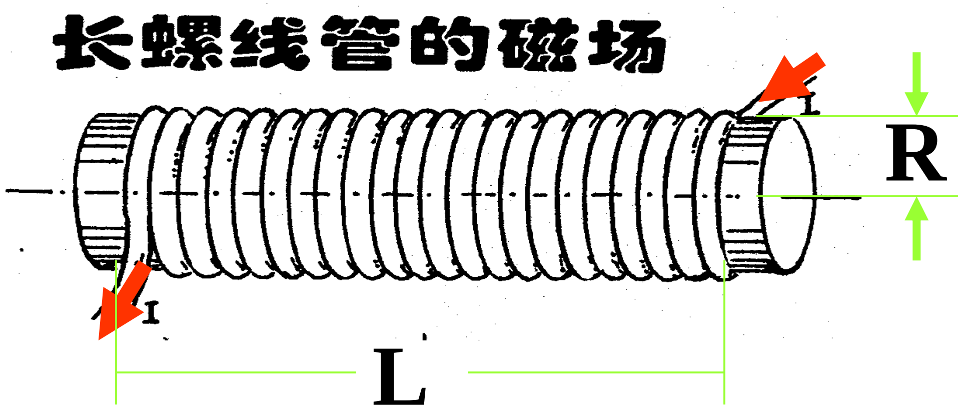
综合：

$$B=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}\cdots(0\le r<R)\\[2ex]\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdots(R\le r<\infty)\end{cases}$$





2）载流“无限长”长直螺线管内外的磁场分布

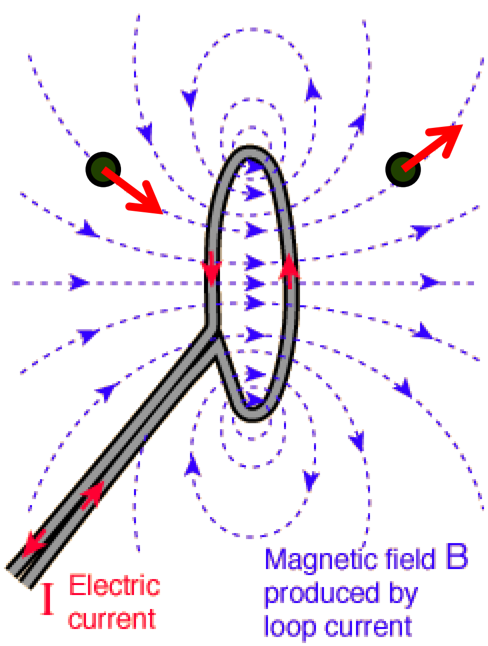


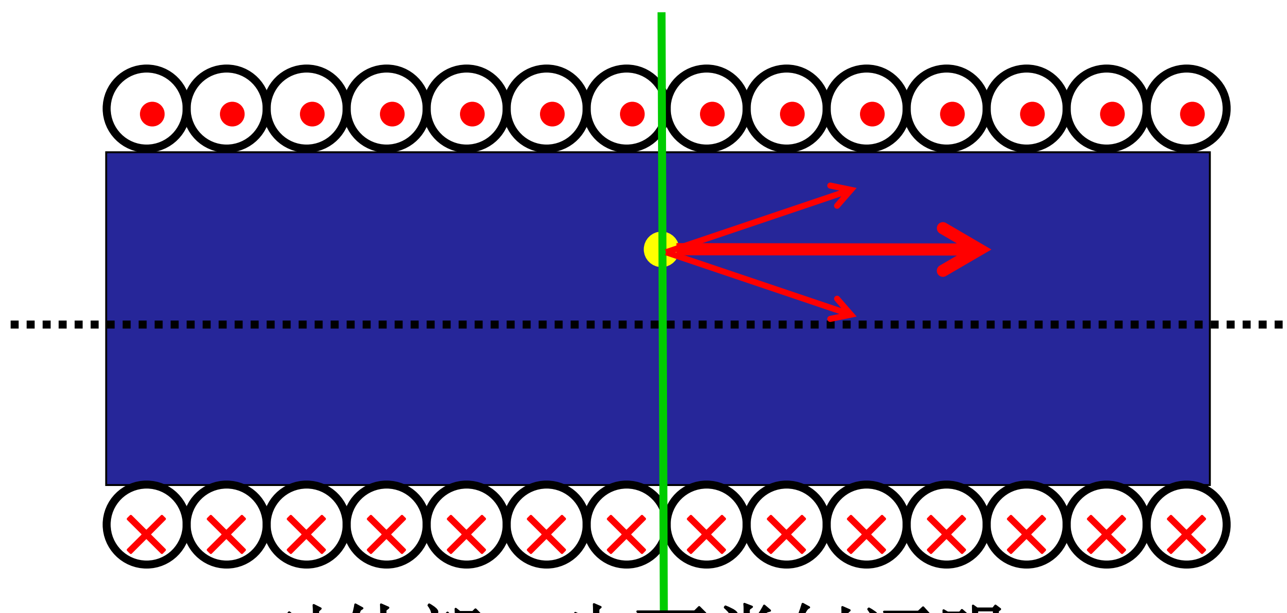
已知：单位长度匝数n

电流I。

解：分析磁场分布

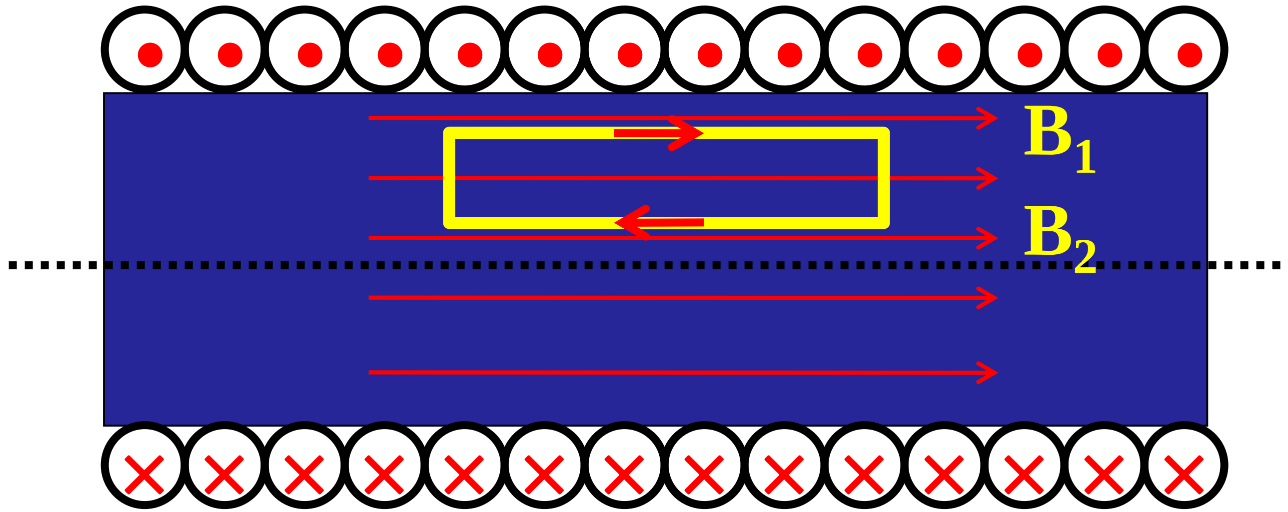
证明1：对无限长管，空间磁场总是平行于中心轴线





对外部，也可类似证明。

证明2: 对无限长管，空间磁场是匀强磁场。



对如图环路应用环路定理, $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_i$

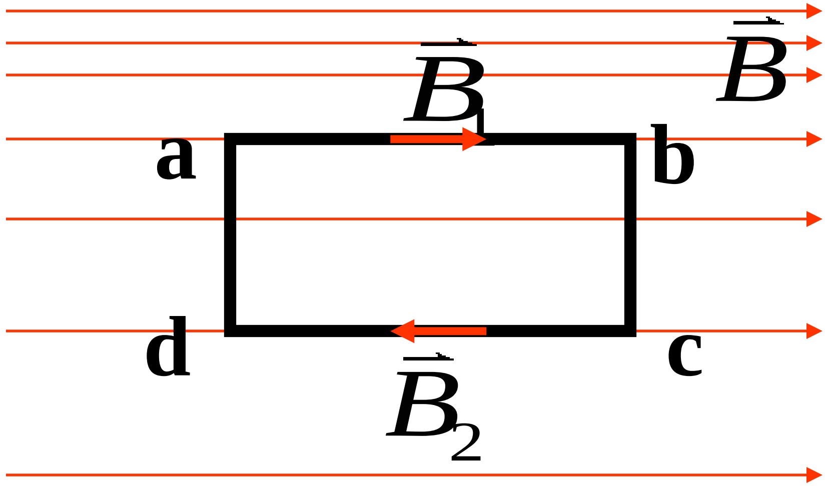
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = B_1 l + (-B_2 l) + 0 + 0 = 0$$

$\Rightarrow$ $B_1 = B_2$ 即匀强磁场

同理，螺线管外部也是匀强磁场。

又因为磁力线根数有限，可得外部磁场强度为零。

*）证明在无电流的空间区域不存在磁力线平行但疏密不同的磁场。



证明：

假设存在这种磁场，

作安培环路abcda

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{ab}\vec{B}_1\cdot d\vec{l}+\int_{bc}\vec{B}\cdot d\vec{l}+\int_{cd}\vec{B}_2\cdot d\vec{l}+\int_{da}\vec{B}\cdot d\vec{l}$$

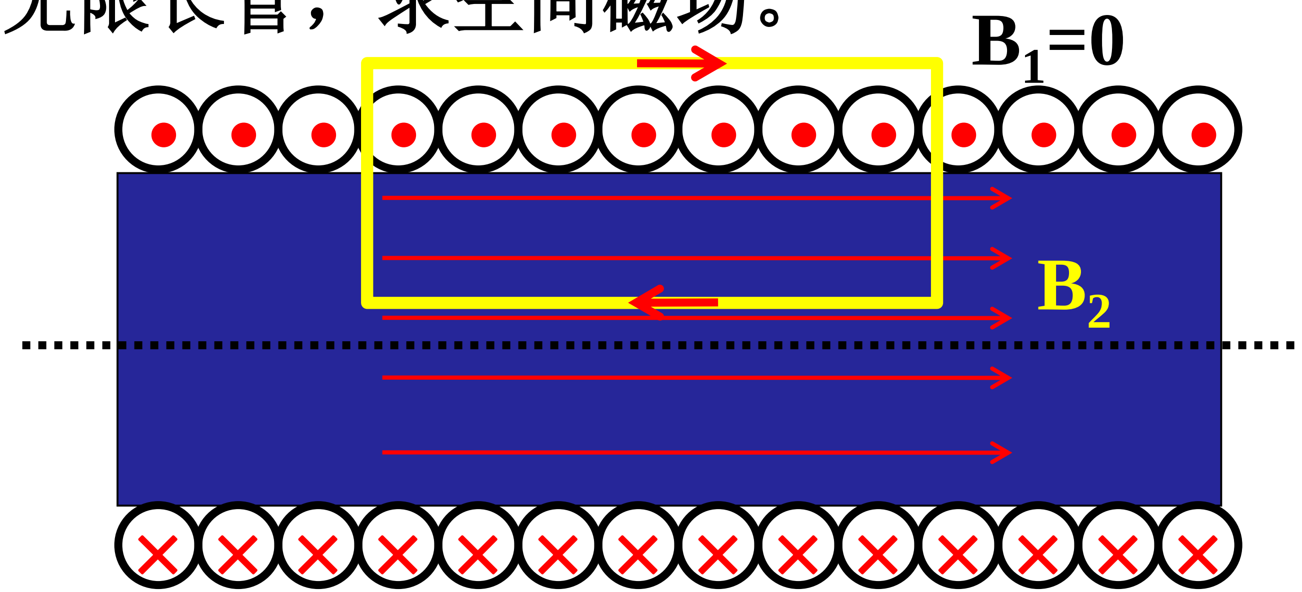
$$= B_1 l_{ab} + 0 - B_2 l_{cd} + 0$$

$$= B_1 l_{ab} - B_2 l_{cd} = 0$$

若：$B_1 \neq B_2$　　则：$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} \neq 0$

违反环路定理。故不存在这种磁场。

3: 对无限长管，求空间磁场。



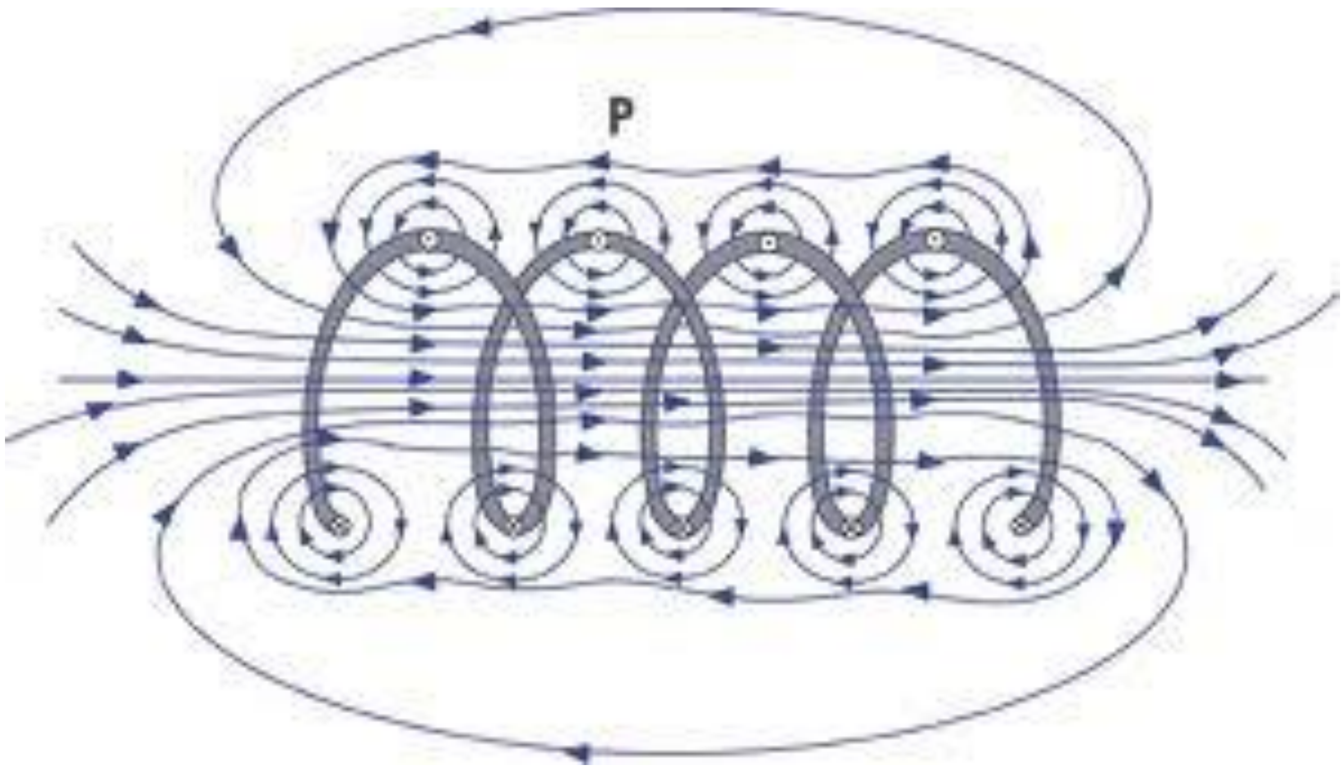
对如图环路应用环路定理，$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_i$

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = B_2 l + 0 + 0 + 0 = \mu_0 \sum_{L内} I_i = \mu_0 n l I$$

$$B_2 = \mu_0 n I$$

即为无限长螺线管B的大小，方向与电流成右手螺旋关系。

有限长螺线管

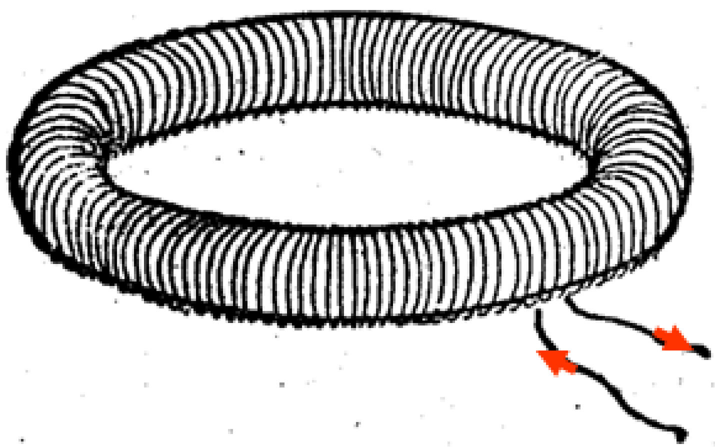


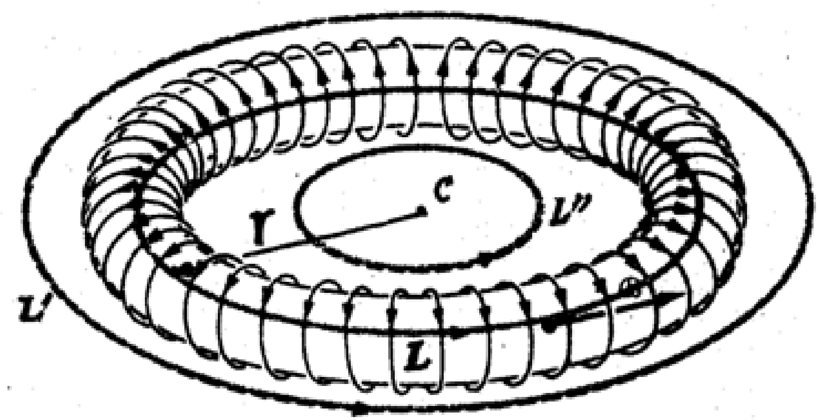
3）螺绕环（罗兰环）的磁场分布

已知：电流**I**，总匝数**N**，

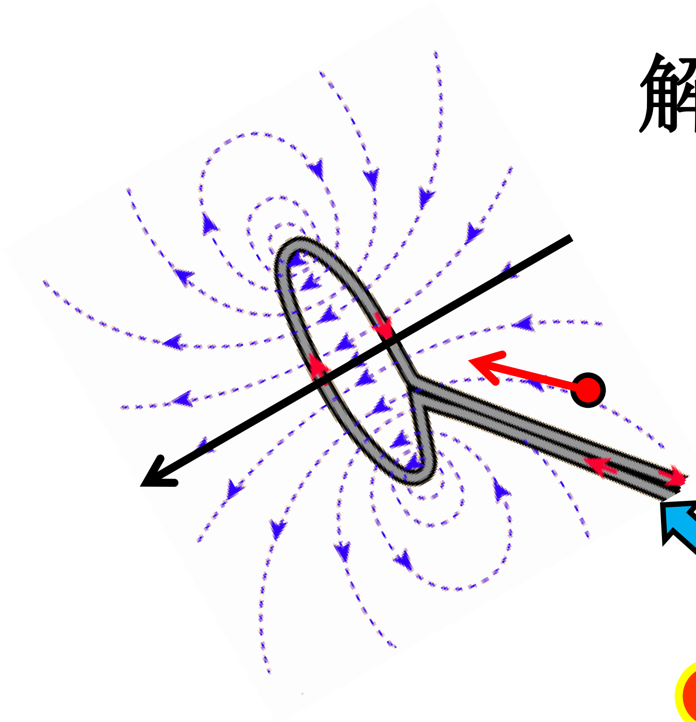
内外径之差R_2-R_1<<r。

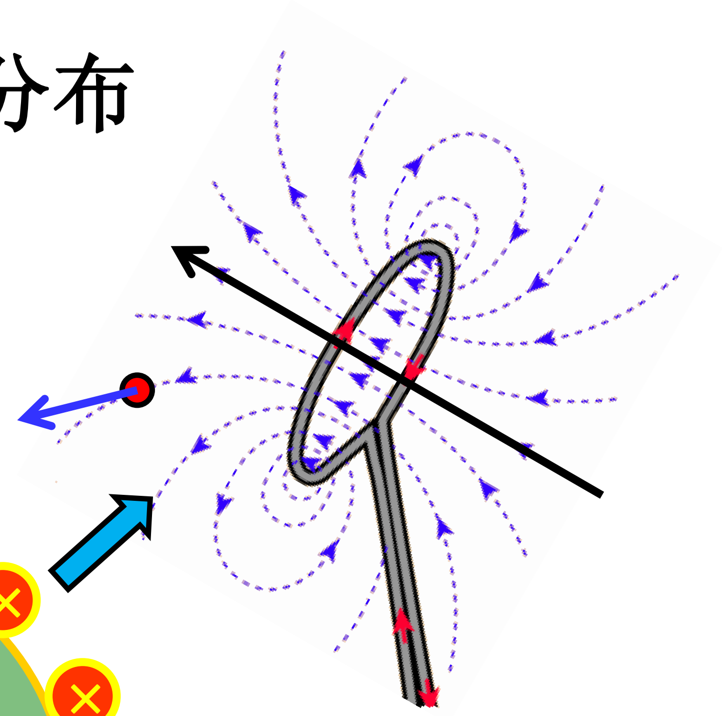
即可认为：$R_1 \approx R_2 \approx r$

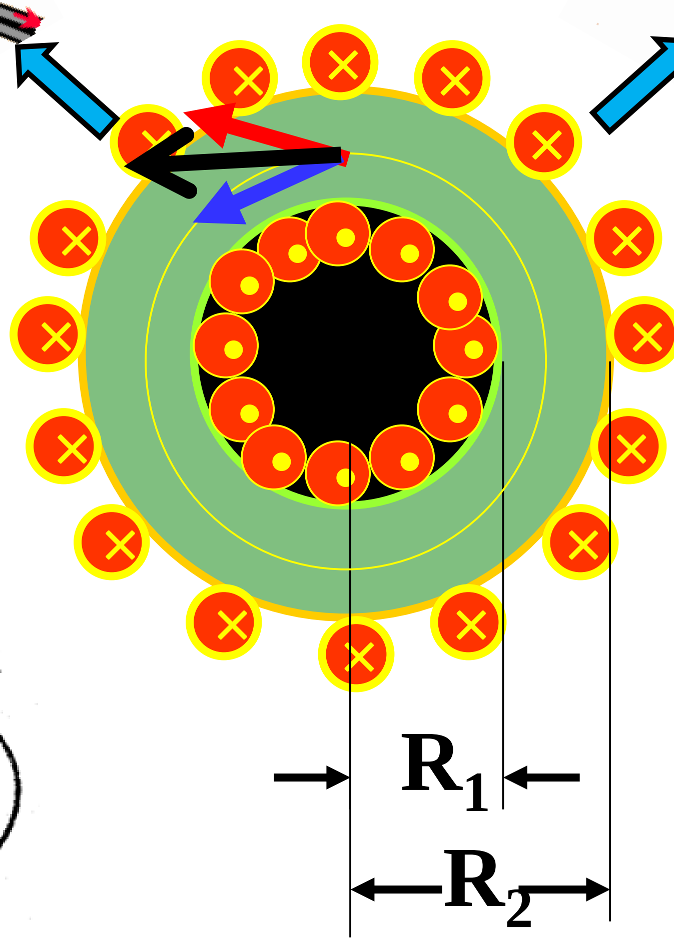


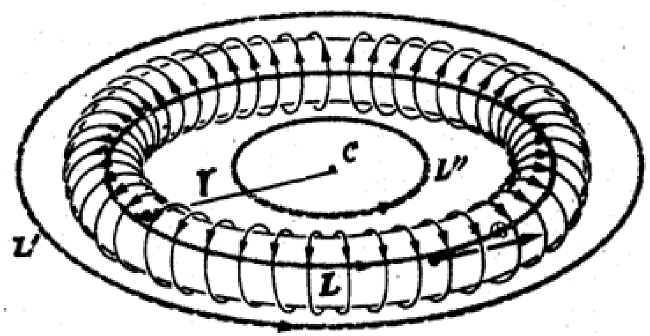


解：分析磁场分布









结论：B的方向垂直于半径方向

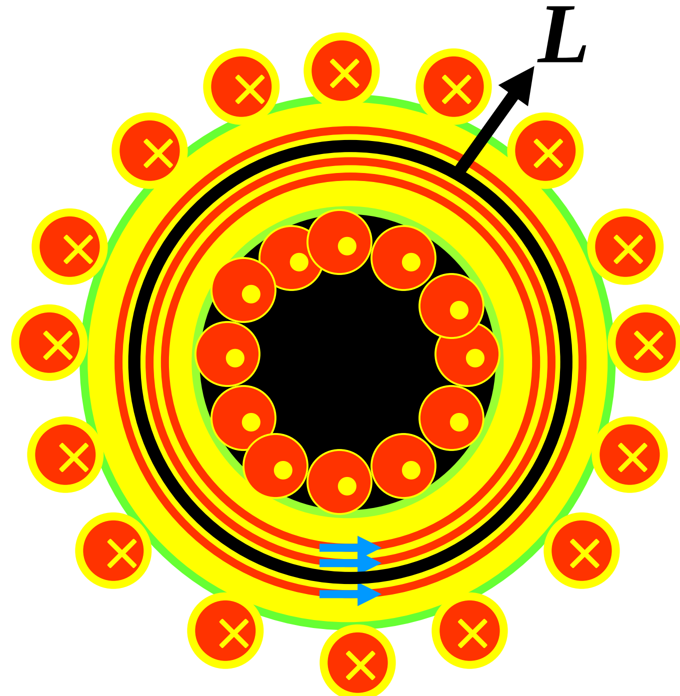
作半径为r的安培环路L

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\oint_L d\vec{l}$$

$$= B\,2\pi r = \mu_0 N I$$

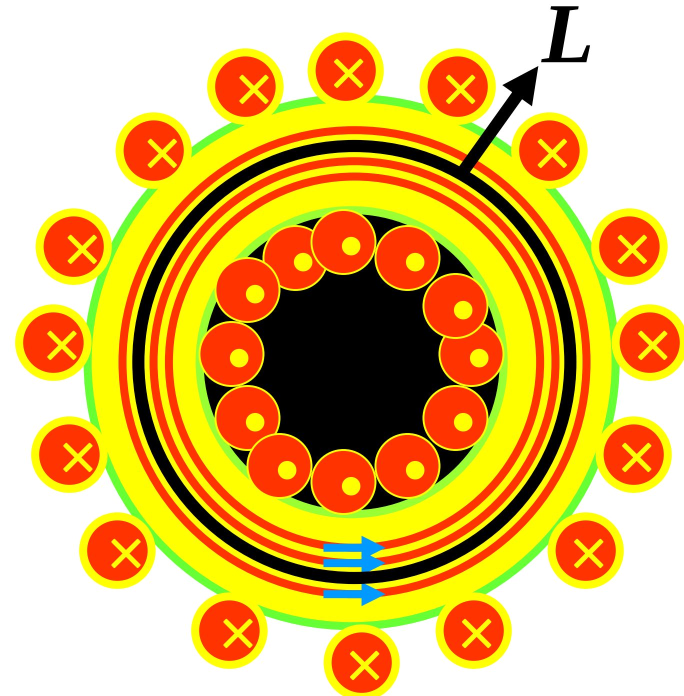
$$\boxed{B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}}$$

$$B = \mu_0 n I, (n = \frac{N}{2\pi r})$$



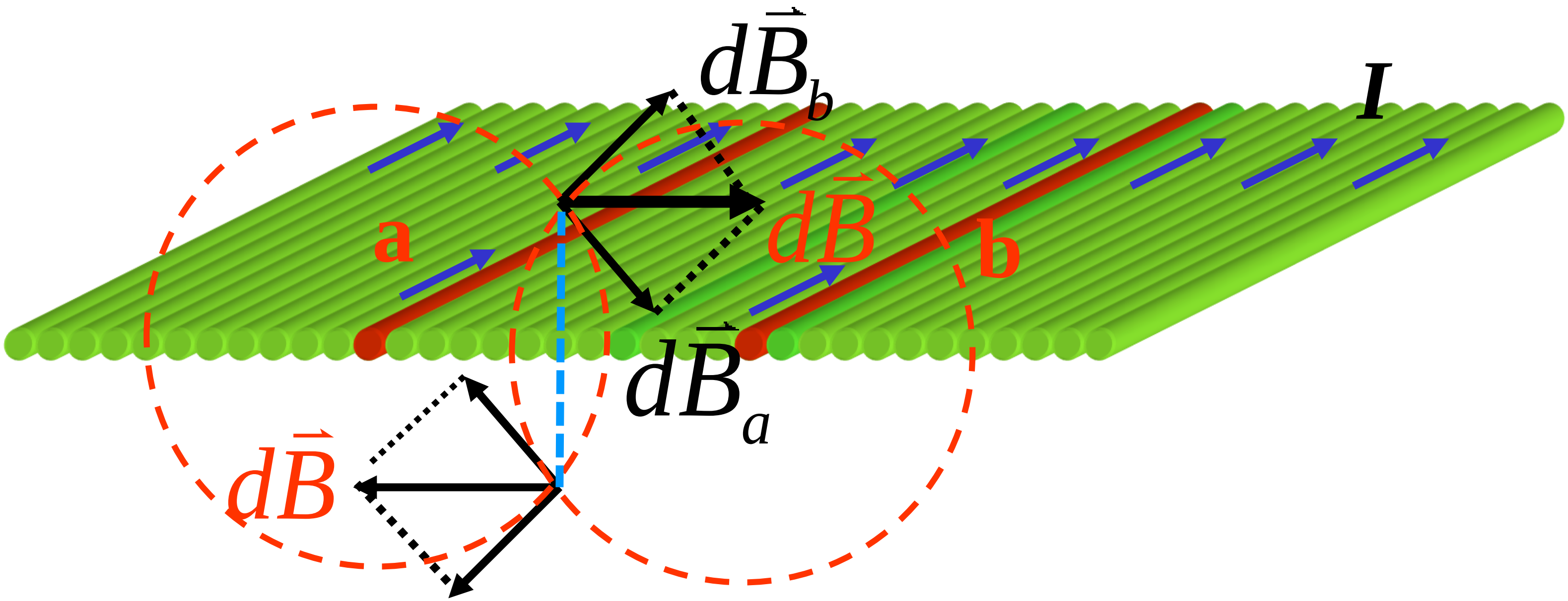
磁场的分布为:

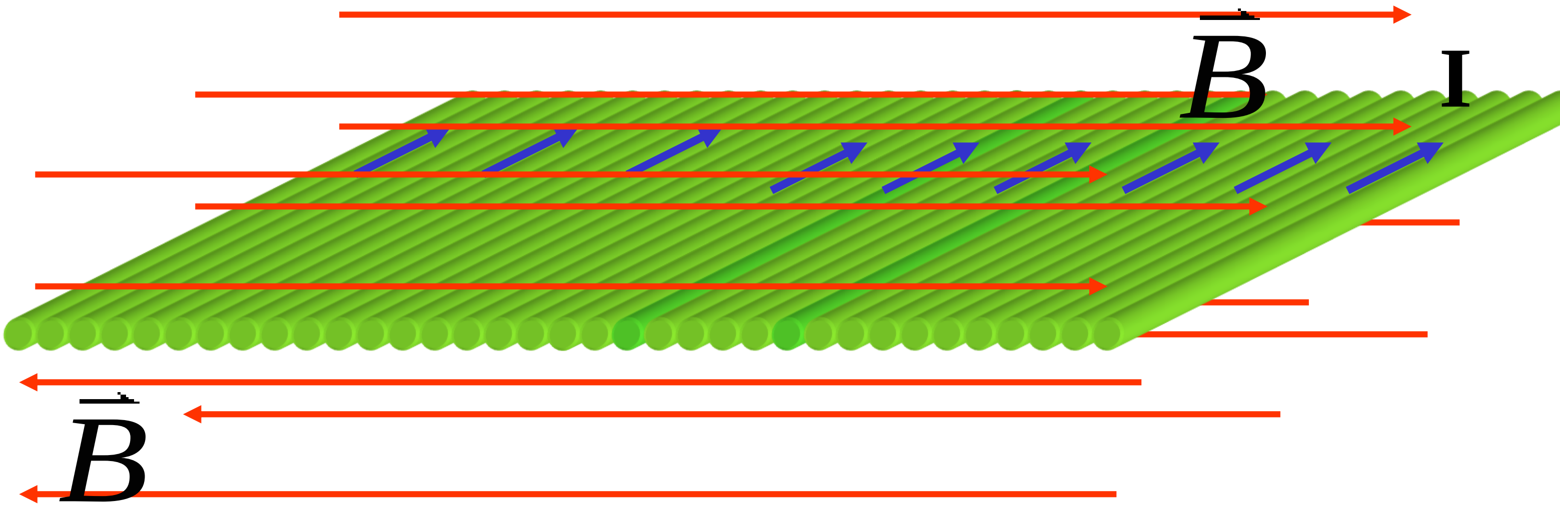
$$B=\begin{cases}\mu_0 nI; & 管内\\ 0\ ; & 管外\end{cases}$$



5） 有一导体，由“无限多”根平行排列的细导线组成，每根导线都“无限长”且均通以电流I。设单位长度上的导线数目为n，求这无限长的电流片各处的磁感应强度B。

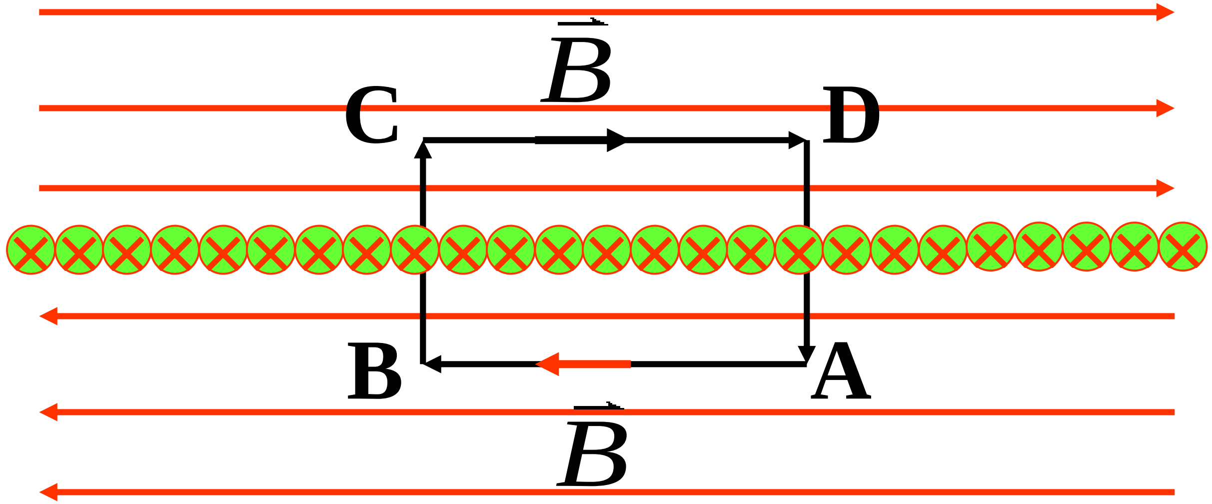
证明：分析磁场分布：




$\vec{B}$
I
$\vec{B}$

作安培环路ABCDA

$$\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I_i}$$



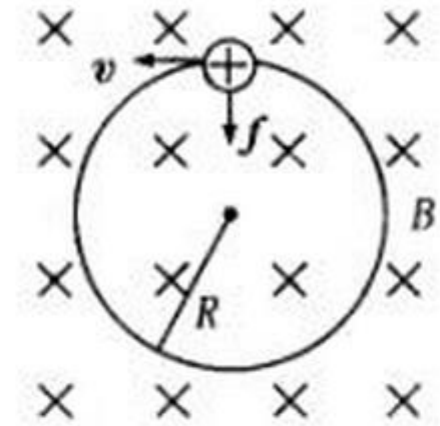
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{BC} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{DA} \vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$= \mu_0 \sum_{L内} I_i$$

$$B\,\cancel{l_{AB}} + 0 + B\,\cancel{l_{CD}} + 0 = \mu_0\, n\, \cancel{l_{AB}}\, I$$

$$\boxed{\therefore B = \frac{1}{2}\mu_0 n I}$$

§ 8—6　磁场对载流导线的作用



洛伦兹力 $\vec{F} = q_0 \vec{v} \times \vec{B}$

一段长为 ***dl=vdt*** 的电流元，电流强度***I***，

$$\vec{F} = dq\,\vec{v} \times \vec{B} = \frac{dq}{dt} dt\,\vec{v} \times \vec{B} = I\,\vec{dl} \times \vec{B}$$

对一段任意形状***L***的电流，

$$\vec{F} = \int_L I\,\vec{dl} \times \vec{B}$$ 称为安培定律

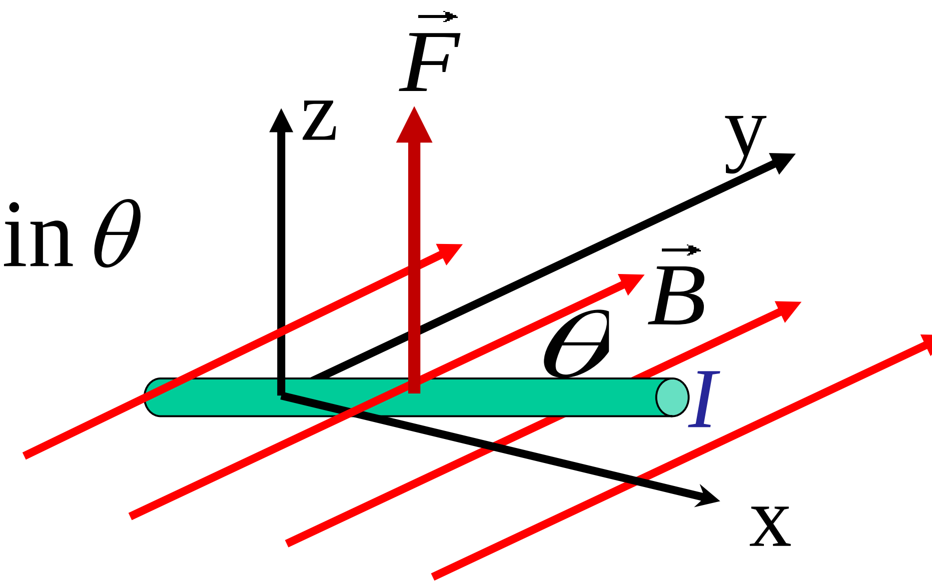
应用：

1）均匀磁场中的一小段直导线

$$\vec{F} = \int_L I\, \vec{dl} \times \vec{B}$$

$$F = \int_L IdlB\sin\theta$$

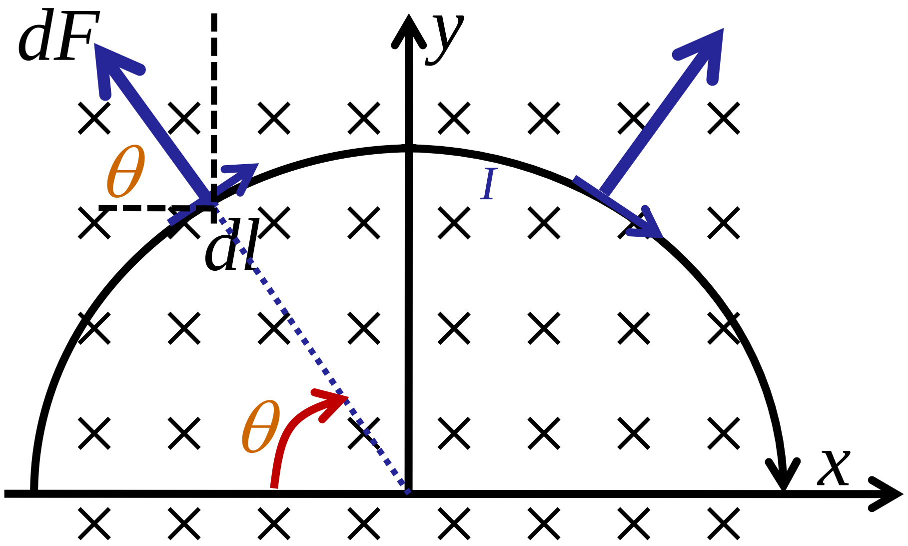
$$F = IB\sin\theta \int_L dl = IBL\sin\theta$$



如导线与磁场垂直，则

$$F = BIL$$

2）均匀磁场中的一段圆弧导线



$$\vec{F}=\int_L I\,\vec{dl}\times\vec{B}$$

$$d\vec{F}=I\,\vec{dl}\times\vec{B}=IBdl$$

$$dF_y=dF\sin\theta$$

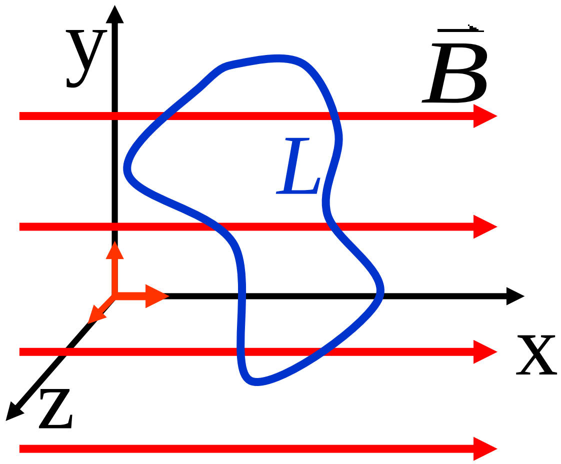
$$=IB\sin\theta dl=IB\sin\theta Rd\theta$$

$$F_y=\int dF_y=\int_0^{\pi}IB\sin\theta Rd\theta$$

$$=IBR\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=IBR\cdot 2$$

与连接圆弧始末两点的直导线相同。

3) 任意形状的闭合载流线圈在均匀磁场中受力



解:设磁场方向沿X轴正向 $\vec{B} = B\hat{i}$

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$$

$$= I(dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) \times B\hat{i}$$

$$= IB(-dy\hat{k} + dz\hat{j})$$

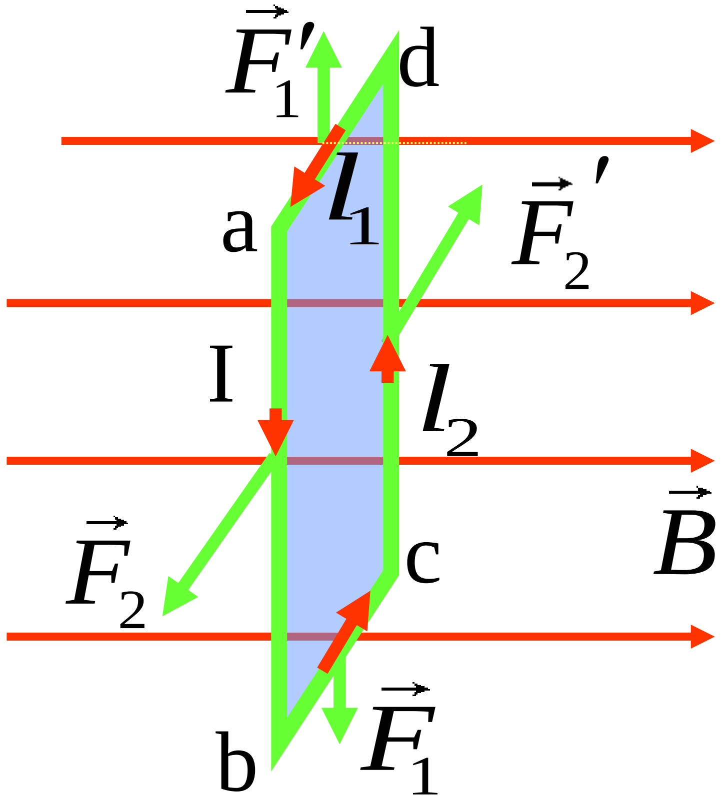
$$\vec{F} = \oint_L d\vec{F} = \oint_L IB(-dy\hat{k} + dz\hat{j})$$

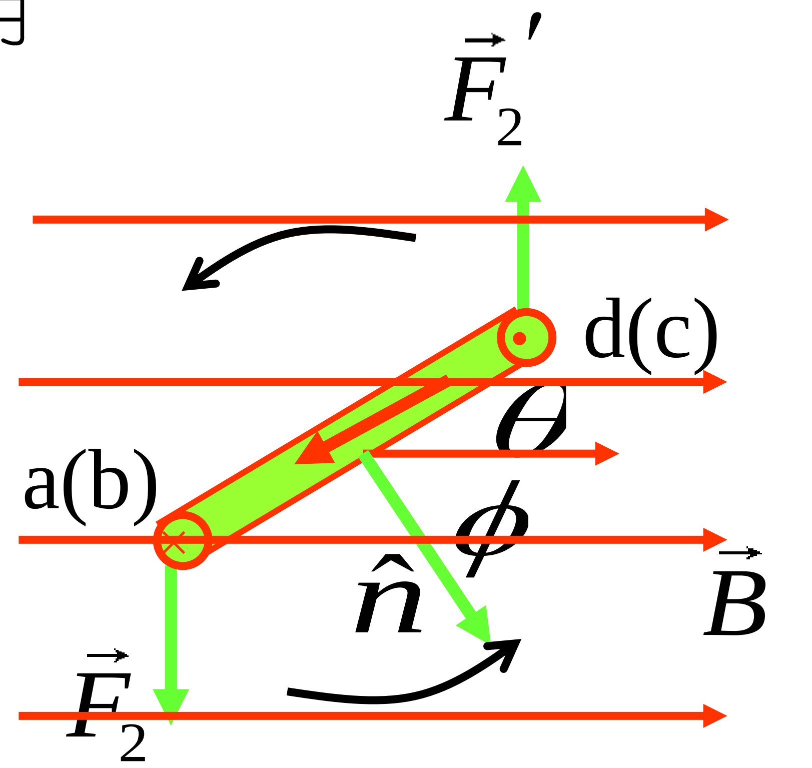
$$= IB\oint_L (-dy\hat{k} + dz\hat{j}) = 0$$

任意形状的闭合载流线圈在均匀磁场中受力为0！

力矩不一定为零。

4) 均匀磁场对载流线圈的作用





$$F_2 = F\,'_2 = BIl_2$$

$$F_2 = F'_2 = BIl_2$$

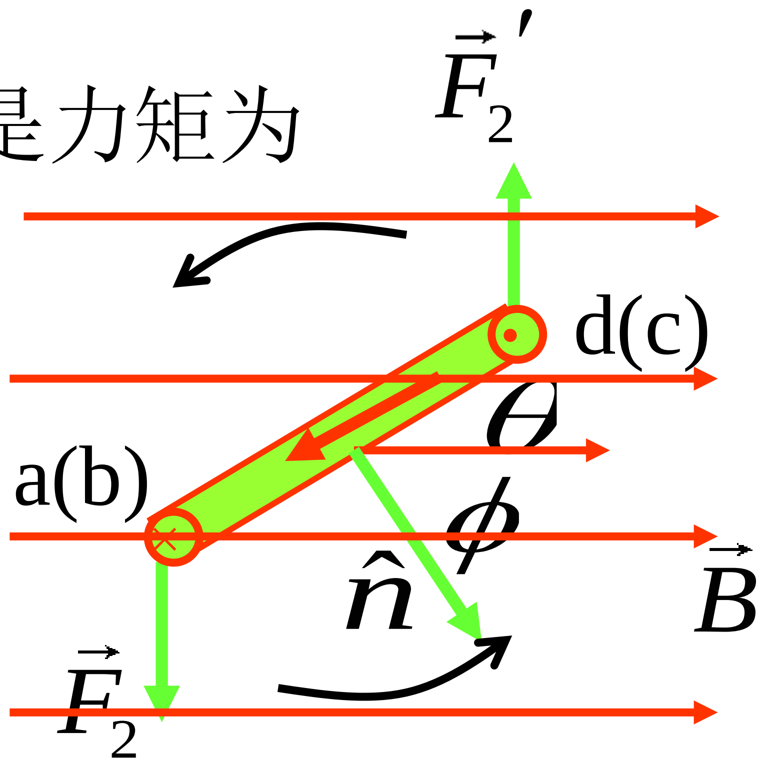
方向如图，构成力偶，于是力矩为

$$M = F_2 l_1 \cos\theta$$

$$= BI(l_1 l_2)\cos\theta$$

$$= BIS\cos\theta$$

$$= Bm\sin\varphi$$



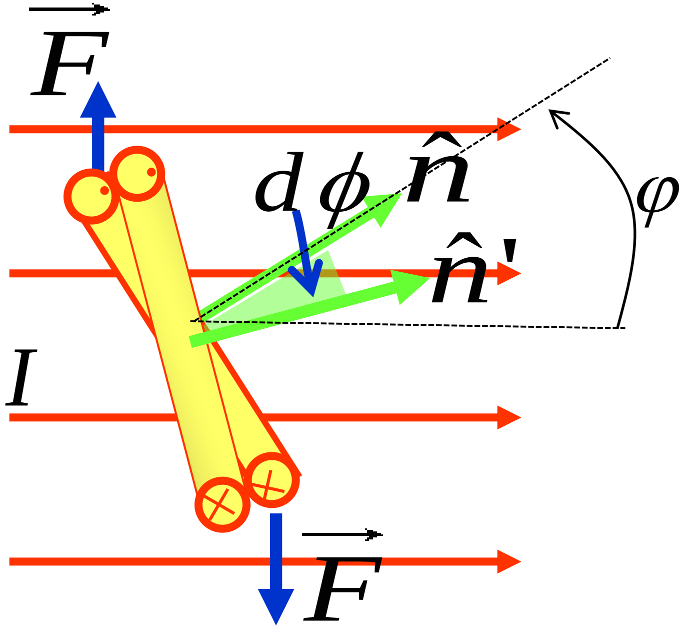
$$\Rightarrow \boxed{\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}}$$

其中$m=IS$ 为磁矩

对任意形状平面电流线圈都成立。

磁矩倾向于转向外磁场方向。

5) 磁场力的功(线圈位置改变)



磁场力倾向于减小φ

$$\boxed{d\varphi < 0}$$

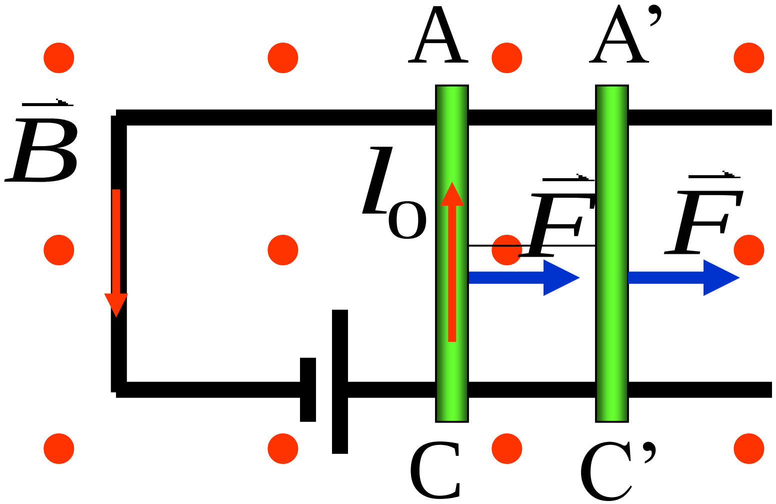
$$M = BIS\sin\phi$$

$$\begin{aligned} dA &= -M\,d\phi \\ &= -BIS\sin\phi\,d\phi \\ &= Id(BS\cos\phi) \\ &= Id\Phi \end{aligned}$$

其中$\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$

为B对曲面S的通量。

5) 磁场力的功(线圈形状改变)



$$F = BIl_0$$

做功 $A = Fl_{AA'}$

$$= BIl_0 l_{AA'}$$

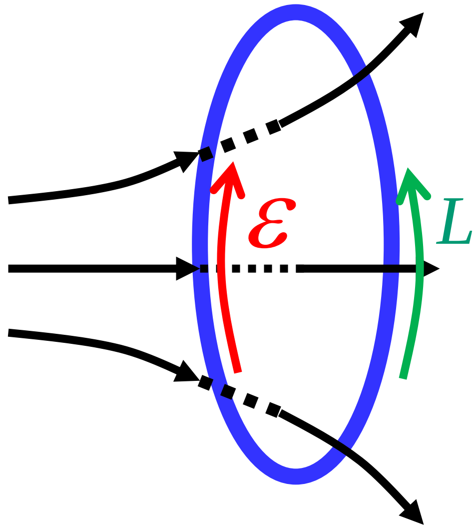
$$= BI\Delta S$$

$$= I\Delta\Phi$$

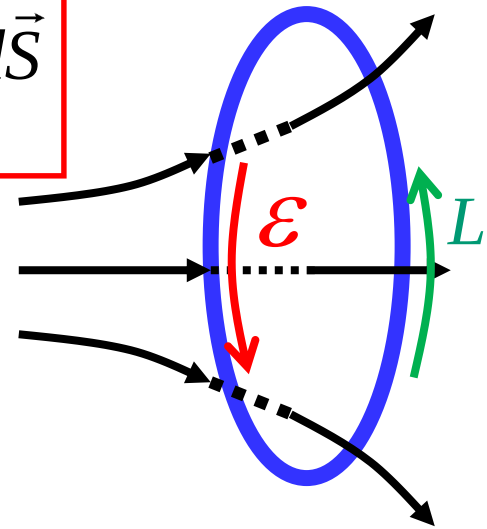
可以证明：在均匀磁场中，对任一形状的闭合电流回路，不论是位置改变还是形状改变，磁力或磁力矩作的功都等于电流与磁通增量的乘积。

$$A = I\Delta\Phi$$

例：



$$\boxed{\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}}$$



$$\frac{d\Phi}{dt} > 0 \qquad\qquad \frac{d\Phi}{dt} < 0$$

方向规定：

a）设定回路绕向及曲面法线方向（右手螺旋）；

b）确定通过回路的磁通量的正、负号；

c） 电动势方向与磁通量是增加还是减少有关。

有时候用楞次定律判断方向更方便。

2）若线圈由串联的N匝组成

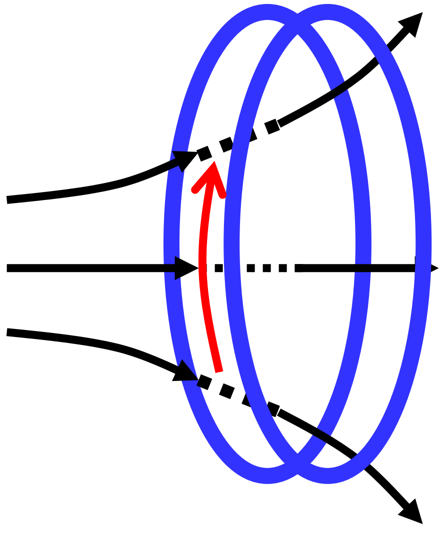
磁通量的变化将在每匝线圈中产生感应电动势。

整个线圈的总电动势为各匝所产生的代数和。

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_N = -(\frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{d\Phi_2}{dt} + \ldots + \frac{d\Phi_N}{dt})$$

$$= -\frac{d}{dt}(\Phi_1 + \ldots + \Phi_N) = -\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\Phi_j$$

若每匝磁通量相同，则



$$\sum_{j=1}^{N}\Phi_j = N\Phi$$

3）感应电流

$$I_i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$$

在一段时间内通过导体回路任一截面的感应电量

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I_i dt = -\frac{1}{R}\int_{t_1}^{t_2} d\Phi$$

$$|q| = \frac{1}{R}\left|\Phi_1 - \Phi_2\right|$$

应用：磁通计

几点注意：

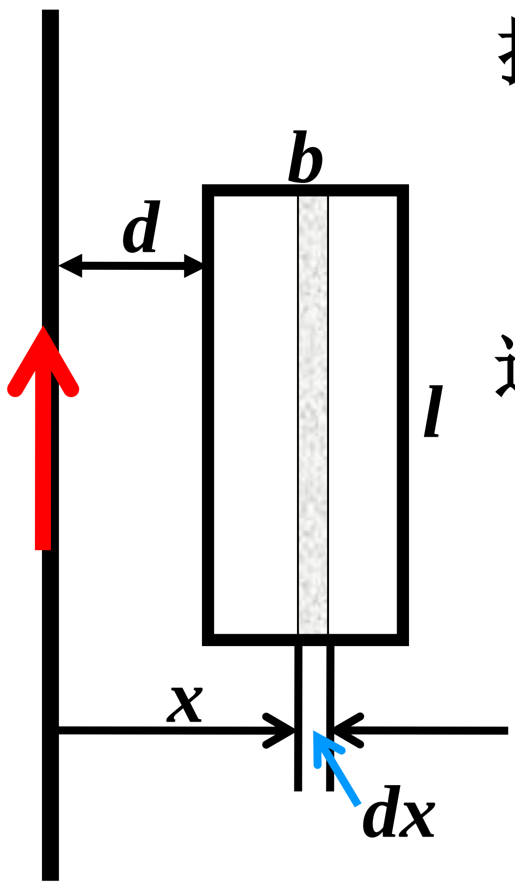
1）与楞次定律比较。楞次定律指出了在闭合回路中确定感应电流方向的法则，而法拉第电磁感应定律既指出了感应电动势的方向，也给出了感应电动势的大小。

2）感应电动势比感应电流更能反映电磁现象的本质：

① 感应电流的大小随着回路的电阻而定，而感应电动势的大小却不随回路的电阻而变；

② 当回路不闭合时，也会发生电磁感应现象，这时并不存在感应电流，而感应电动势依然存在 。

例：如图，一长直导线通有电流$I=I_0\sin\omega t$，右边矩形线圈与导线在同一平面内，求任一时刻线圈内感应电动势。



据磁场的环路定理，距导线x处磁场B为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

通过线圈的B的 通量为

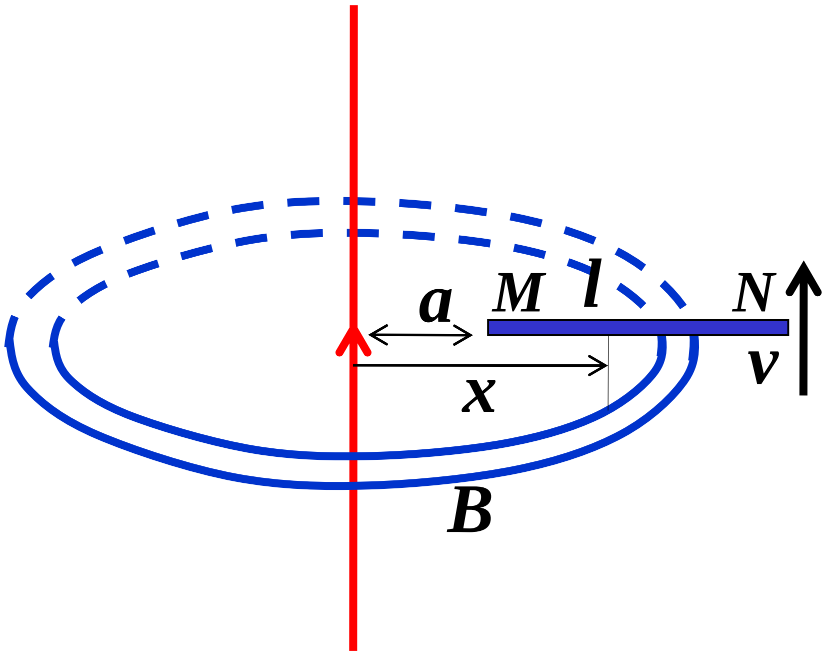
$$\Phi=\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_d^{d+b} Bl\,dx=\int_d^{d+b}\frac{\mu_0 I}{2\pi x}l\,dx$$

$$=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_d^{d+b}\frac{1}{x}dx=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{d+b}{d}$$

$$\mathcal{E}_i=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{\mu_0 l I_0\omega}{2\pi}\ln\frac{d+b}{d}\cos\omega t$$

例：　一金属棒MN在导线旁以速度v向上运动，求两端的动生电动势。

$$\varepsilon = \int_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



解：距离导线x处磁场B为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad \text{方向向里}$$

棒上*dx*一段的动生电动势为

$$d\mathcal{E} = Bv \cdot dx = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} v \cdot dx$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} = \int_a^{a+l} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} v \cdot dx = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+l}{a}$$

根据洛伦兹力公式，动生电动势从N端指向M端，即M点电势比N点高。

感生电场与静电场的比较

共同点：对外表现一样，对电荷有作用力，$\vec{F}=q\vec{E}$

不同之处：（在一个相对的意义上）

1）静电场是由电荷激发；

感生电场是由变化的磁场所激发；

2）静电场的电力线是不闭合的，为保守场；

感生电场的电力线是闭合线，因而感生电场不是保守场，而是有旋场；

$$\boxed{\oint_L \vec{E}_{静}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0}$$

$$\boxed{\oint \vec{E}_{感}\bullet d\vec{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{S}}$$