博弈论课堂笔记

联系方式：pi2008@nju.edu.cn

作业 5%（1-5 章；若两次交就是 1-3 交一次，4-5 交一次）

论文 15%（1-5 章知识，课堂上学到的某个博弈论分析框架解释现实生活或者历史上的某个现象；3000 字以上）

期末闭卷 80%（选择、判断、分析、简答、计算）

教材：《经济博弈论》（第三版），谢识予（还有习题指南）；推荐阅读：《博弈论基础》（罗伯特·吉本斯）；《策略博弈论导论》（沃森）

导论

区分四个概念：

- 完全信息：complete information；
- 完美信息：perfect information；
- 不完全信息：incomplete information；
- 不完美信息：imperfect information
- （博弈双方都了解所有信息：完全；博弈双方可以看到之前的所有博弈进程：完美）

共同特征：①规则②结果③策略选择④策略和利益相互依存

博弈论的四个经典元素：

- 博弈的参加者（Player）：博弈方
- 各个博弈方的策略（Strategies）或行为/动（Actions）
- 博弈的次序（Orders）
- 博弈方的得益/收益（Payoffs）

几个经典的博弈模型

- 囚徒困境：（对称博弈，策略离散）：可合作，只需要找到合作机制

		囚徒 2	
		坦白	不坦白
囚徒 1	坦白	-5，-5	0，-8
	不坦白	-8，0	-1，-1

两个罪犯的得益矩阵（Payoff Matrix）

  - 约定：左边数字是第一个博弈方的得益，右边数字是第二个博弈方得益
  - 上策（占优策略）：dominant strategy；下策（被占优策略）：dominated strategy
  - 策略：坦白/不坦白的组合；上策：都坦白；
  - 得益：例如-5，-5；0，-8 等等
  - 结果：策略组合或者得益组合均可
  - 均衡：必须是策略组合
  - 拓展：双寡头削价竞争——价格联盟（卡特尔）

		寡头 2	
		高价	低价
寡头 1	高价	100，100	20，150
	低价	150，20	70，70

双寡头的得益矩阵

  - 上策：都选择低价，因为 150>100，70>20 且对称，所以都选择低价
    - 解决方案：政府组织协调的必要性和重要性

- 严格上策：不能取等号；弱上策：可以在个别取等号。本题中为严格上策。

- 赌胜博弈：一方所得等于另一方所失，不可能双赢，属于“零和博弈”
  - 田忌赛马、猜硬币、石头剪刀布……
  - 特点：不能让另一方猜出自己的策略；尽可能猜中对方的策略；若一次博弈则结果取决于机会；若多次重复博弈则可以求出双方平均得益
- 产量决策的古诺模型（Cournet）：策略是连续的（可以从 0 到∞），寡头产量竞争
  - 三厂商离散产量
    - 不合作：$\frac{\partial\pi}{\partial q_i}=0$即$\begin{cases}20-2q_1-q_2-q_3=0\\20-q_1-2q_2-q_3=0\\20-q_1-q_2-2q_3=0\end{cases}$，解得$q_1=q_2=q_3=5$
    - 合作：$\pi=(20-Q)Q$，有$\frac{d\pi}{dQ}=0$，解得 Q=10，所以$q_1=q_2=q_3=\frac{10}{3}\approx 3$

博弈结构和博弈的分类

- 博弈中的博弈方：独立决策、独立承担博弈结果的个人或组织
  - 得益矩阵：标准式/策略式（normal form）；树：扩展型/扩展式(extensive form)
  - 注 1：如果自然作为博弈方，那么一般用博弈方 0 或博弈方 N 来表示
  - 注 2：注意区分
    - “风险中性”：1 单位期望收益=1 单位确定收益
    - “风险偏好”：1 单位期望收益>1 单位确定收益
    - “风险规避/厌恶”：1 单位期望收益<1 单位确定收益
  - 单人博弈、双人博弈（最多最常见）、多人博弈（可能存在“破坏者”：策略对自身利益无影响，但可能对别人决策产生决定性影响）
- 博弈中的策略：博弈中各博弈方的决策内容
  - 有限博弈（Finite Games）：一个博弈中每个博弈方策略数都是有限的；
    - ！ 区分有限次博弈：博弈次数有限
  - 无限博弈（Infinite Games）：一个博弈中至少一个博弈方的策略有无限多个；
    - ！ 区分无限次博弈：博弈次数无限
- 博弈中的得益(Payoffs)：参加博弈各各个博弈方从博弈中所获得的利益
  - 得益**组合**（得益矩阵里面的数字）对应策略组合（例如“坦白”、“不坦白”）
  - 零和博弈（石头剪子布、猜硬币）：利益始终对立，偏好通常不同
  - 常和博弈（分配固定数额的奖金、利润、遗产）：利益和为常数，利益对立且竞争
  - 变和博弈（囚徒困境）：合作利益存在，博弈效率问题的重要性
- 博弈的过程：博弈方选择、行为的次序，包括是否多次重复选择、行为
  - 静态博弈：各个博弈方决策时看不见别人的决策，同时行动
  - 动态博弈（弈棋、市场进入、领导-追随型市场结构）：各个博弈方选择和行动有先后次序

Cournet	产量	同时行动
Bertrand	价格	同时行动
Stackelberg	产量	序贯行动
序贯 Bertrand 或价格 Stackelberg	价格	序贯行动

  - 重复博弈（长期客户、长期合同、信用）：同一个博弈（可静态或动态）反复进行
    - 有限次重复博弈、无限次重复博弈（随机结束也算无限次重复博弈）

- 博弈的信息结构
  - 完全信息博弈：各博弈方都完全了解所有博弈方各种情况下的**得益**
  - 不完全信息博弈：至少部分博弈方不完全了解其它博弈方得益情况的博弈
  - 完美信息博弈：每个轮到行为的博弈方对博弈的**进程**完全了解的博弈
  - 不完美信息博弈：轮到行为的博弈方不完全了解此前全部博弈进程的博弈
- 博弈方的能力和理性
  - 完全理性和有限理性
    - 完全理性：完美的分析判断能力和不会犯选择行为的错误
    - 有限理性：博弈方的判断选择能力有缺陷
  - 个体理性和集体理性
    - 个体理性：以个体利益最大为目标
    - 集体理性：追求集体利益最大化
    - 合作博弈：允许存在有约束力协议的博弈
    - 非合作博弈：不允许存在有约束力协议的博弈
      - ！注：不是指不合作，也可以合作，只是不存在协议
- 博弈的分类和博弈理论的结构
  - 首先最根本的分类：合作/非合作
  - 根据理性程度：非合作博弈可分为：完全理性博弈和有限理性博弈（进化博弈）
  - 根据博弈过程：静态博弈、动态博弈、重复博弈
  - 根据信息结构（是否完全和完美）：完全静、不完全静、完全且完美动、完全但不完美动、不完全动
  - 零和博弈、非零和博弈；单人博弈、多人博弈等（若考试考察："超过三个人的博弈也可以画得益矩阵"应判错）

博弈论的历史和发展简介

- 最早博弈思想：齐威王田忌赛马、巴比伦犹太教法典的婚姻合同问题
  - 甲（5 个饼）、乙（3 个饼）、丁（没带饼）三人，三个人平分。丁拿出 8 个金币让甲乙分，甲主张 53 分，乙主张 44 分，问应该如何分 8 个金币？
  - 甲得 7 个，乙得 1 个
  - 理由：只分配有争议的，看谁**贡献**的多。因为甲 5 个饼，吃了 8/3（他本来会吃这么多），乙 3 个饼，吃了 8/3（他本来也会吃这么多），丙 0 个饼，吃了 8/3。即甲贡献了 5-8/3=7/3 没吃，乙贡献了 3/8/3=1/3 没吃，所以甲：乙的**贡献比**是 7：1，因此甲得 7 个金币，乙得 1 个金币。
- 博弈论早期研究的起点：古诺 1838 年关于寡头之间通过产量决策进行竞争的模型
- 比较系统密集的研究：上世纪初齐默罗和波雷尔对象棋博弈等的研究
- 博弈论历史的真正起点：1944 年冯诺依曼和摩根斯坦出版的《博弈论和经济行为》
  - 扩展形（extensive form）、正规形（normal form）/策略形（strategic form）、矩阵形（matrix form）
  - 稳定集（stable sets）、极小化极大解（minmax form）
- 1950 年纳什均衡：完全信息静态博弈，发展了非合作博弈的基础理论
- 1965 年塞尔腾：子博弈完美纳什均衡
- 1972 年史密斯：进化稳定策略（ESS）
- 1973 年海萨尼：关于"混合策略"的不完全信息解释，以及严格纳什均衡

完全信息静态博弈

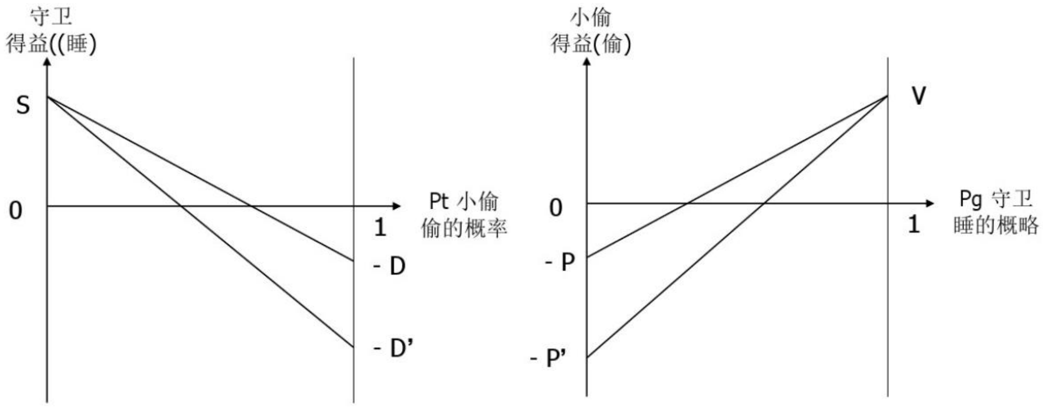
- 上策、上策均衡
  - 严格上策：均为>，弱上策：存在≥
  - 上策均衡并不是普遍存在的
- 方法：
  - 严格下策反复消去法
  - 划线法（要求掌握）
  - 箭头法（比较复杂，不需要使用，应该使用划线法较为简单明了）
- 纳什均衡
  - 均衡：策略组合
  - 纳什均衡：任意博弈方的策略都是对其余博弈方策略的组合的最佳对策
  - 纳什均衡的一致预测性：各博弈方的**实际行为选择与他们的预测一致**（他们不会利用这个预测或预测的能力来选择与预测不一致的策略）
    - 注意：不是~~不同博弈方的预测相同、无差异~~
    - 只有纳什均衡才有一直预测的性质
  - 上策均衡一定是纳什均衡，但是纳什均衡不一定是上策均衡
  - 严格下策消去法一定不会消去纳什均衡，所以在纳什均衡分析之前使用严格下策反复消去法可以简化博弈（注意一定是“严格下策反复消去法”）
- 无限策略博弈分析和反应函数
  - 古诺的寡头模型（同质产品）
    - 总产量 Q，市场出清价格 P，边际成本 c，总得益：U=收益-成本=QP(Q)-cQ
  - 反应函数
    - 本题当中$\begin{cases} q_1 = R_1(q_2) = \frac{1}{2}(6 - q_2) \\ q_2 = R_2(q_1) = \frac{1}{2}(6 - q_1) \end{cases}$，求交点，但一般来说古诺寡头模型用求解方程即可
  - 伯特兰德寡头模型（异质产品，但存在一个可替代性）
    - 古诺寡头模型：选择价格；伯特兰德寡头模型：选择产量
    - 伯特兰德寡头模型：厂商的产品之间有很强的可替代性，但又不是完全可以替代，价格搞得不会完全卖不出去
  - 公共资源模型
    - 没有谁拥有所有权、大家都可以自由利用，是公共资源
    - P66 养羊问题
    - 公共资源保护：政府、市场、自治委员会可以保护公共资源；自治/市场先试，最后再尝试政府，因为政府信息不足、可能产生腐败等，只能作为最后的策略，不能作为最开始尝试的对象。
  - 反应函数的问题和局限性
    - 函数不一定连续可导
    - 得益函数可能不一定有交点、也可能不一定有唯一交点（混合策略的反应函数很可能出现多重交点反应函数的图形）
- 混合策略和混合策略纳什均衡，纳什均衡不存在
  - 和惟一纳什均衡的博弈之间重要的本质区别：自己的策略选择不能预先被另一方知道或猜测到；惟一策略纳什均衡：具有一致预测性
  - 混合策略：按照概率分布 $p_i=(p_{i1},p_{i2},\cdots,p_{ik})$从 k 个可选策略种选择策略选择

- ◆ 考试的时候已知纯策略纳什均衡，求混合策略纳什均衡，就是求真正意义上的混合策略纳什均衡
- ◆ 如果只要我们求混合策略纳什均衡，那就是真正意义上的混合的和纯策略的都要求
- ◆ 猜硬币概率分布要答到这一步：((博弈方 1 的概率分布),(博弈方 2 的概率分布),…)
- ◆ 纯策略纳什均衡也是混合策略纳什均衡的一种

■ 混合策略纳什均衡的原则：（计算题！P74）
- ◆ 1、不能让对方知道或者猜到自己的选择
- ◆ 2、选择每种策略的概率一定要恰好使对方选择不同策略的期望得益相等（无机可乘）

■ P74 页计算题的混合策略纳什均衡概率分布：((0.8,0.2),(0.8,0.2))（答题一定要有这一步）

■ 激励的悖论：长期的话会达到新的均衡从而双方重新选择混合策略，导致政策目标和政策结果之间达成意外的关系



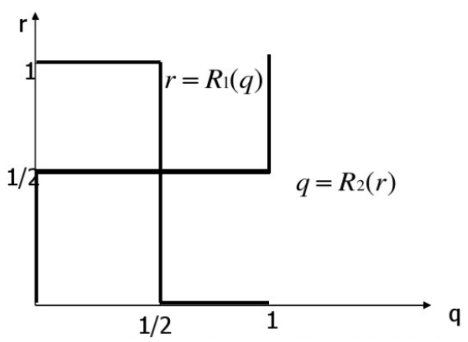
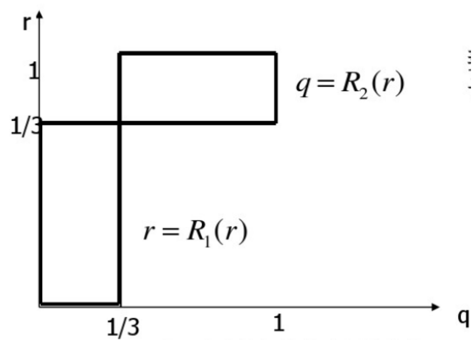
- ◆ 加重对守卫的处罚，短期效果是守卫尽职，但是长期却是降低偷窃发生的概率
- ◆ 加重对小偷的处罚，短期效果是使偷窃的概率受到抑制，但是长期却是使守卫可以更加偷懒，同时若考虑增加社会福利，单位可以少派守卫等，这种做法也仍然有意义。

- ● 多重均衡博弈和混合策略：多个纯策略纳什均衡，纳什均衡不唯一
  - ■ 同混合策略纳什均衡的分析方法，一方选择使得另一方无机可乘的概率分布选择策略
  - ■ 注意此时既有纯策略纳什均衡（多个均衡），也存在严格意义上的混合策略纳什均衡，答（广义上的）"混合策略纳什均衡"的时候需要二者都答。
  - ■ 多重均衡怎么选策略？
    - ◆ 混合策略一定是低效的，首先要被干掉
  - ■ 纯粹的竞争不一定是高效率的，协商、补偿是能够提高双方得益的有效手段，即混合策略是最垃圾的结果了
- ● 混合策略和严格下策反复消去法
  - ■ 对严格下策反复消去法引入混合策略

		博弈方2 L	R
博弈方1	U	3，1	~~0，2~~
	M	0，2	3，3
	D	~~1，3~~	~~1，1~~

- 因为若博弈方 2 采用混合策略$(q, 1-q), q \in [0,1]$，那么
- $u_1^e = 1/2 * q * 3 + 1/2 * (1-q) * 0 + 1/2 * q * 0 + 1/2 * (1-q) * 3 = 3/2$ 是一个常数，且 3/2 恒大于博弈方 1 选 D 时的得益 1
- 所以此时 D 相对于混合策略(1/2,1/2,0)是严格下策，可以从博弈方 1 的策略空间种消去
- 最终得到纳什均衡(3,3)

● 混合策略反应函数

<table>
<tr><td>■ 猜硬币</td><td>■ 夫妻之争</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>混合策略纳什均衡(1/2,1/2)</td><td>纯策略纳什均衡：（时装，时装）-> (0,0)
（足球，足球）->(1,1)
混合策略纳什均衡：(3/4,1/3)</td></tr>
</table>

- ■ 期望得益相等法：先用划线法（一定要先划线）找出纯策略纳什均衡（混合策略纳什均衡需要先求纳什均衡），再用期望得益相等法找到混合的
- ■ 反应函数法：工作量大，不需要划线法
- ■ 离散的用期望得益相等法、连续的用反应函数法

● "均衡"一定要是策略组合，不能是得益组合！考试写错就没分了！！！！

● 纳什均衡的存在性
- ■ 每一个有限博弈都至少有一个混合策略纳什均衡

● 纳什均衡的选择和分析方法拓展
- ■ 帕累托上策均衡
  - ◆ 虽然有些博弈当中存在多个纳什均衡，但是这些纳什均衡可能有明显的优劣关系，所有博弈方都会偏好其中同一个纳什均衡，让所有博弈方选择一致并预测其它博弈方也会选择这个选项。
  - ◆ 帕累托效率意义上的优劣关系——帕累托上策均衡
  - ◆ 例子：鹰鸽博弈
  - ◆ 注意：帕累托上策均衡一定要是多重均衡（>1 个）里面选出来的最好的！
- ■ 风险上策均衡
  - ◆ 顾忌博弈方可能发生错误的时候，帕累托上策均衡不一定是最优选择，需要考虑风险——风险上策均衡

<table>
<tr><td>均衡</td><td>帕累托上策均衡</td><td>风险上策均衡</td></tr>
<tr><td>得益矩阵</td><td>
<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">国家2</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>战争</td><td>和平</td></tr>
<tr><td rowspan="2">国家1</td><td>战争</td><td>-5，-5</td><td>8，-10</td></tr>
<tr><td>和平</td><td>-10，8</td><td>10，10</td></tr>
</table>
战争与和平</td><td>
<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">博弈方2</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>L</td><td>R</td></tr>
<tr><td rowspan="2">博弈方1</td><td>U</td><td>9，9</td><td>0，8</td></tr>
<tr><td>D</td><td>8，0</td><td>7，7</td></tr>
</table>
风险上策均衡（D，R）</td></tr>
<tr><td>均衡</td><td>纳什均衡：（战，战）（和，和）
帕累托上策均衡：（和，和）</td><td>纳什均衡：（U, L）（D, R）
只要另一方偏离（U, L）的概率大于 1/8，那么应该选择风险上策均衡：（D, R）</td></tr>
<tr><td>注意</td><td>“均衡“是策略组合而非得益组合 g</td><td>不是对称博弈，因为策略不对称</td></tr>
</table>

- ◆ 博弈方对于风险上策均衡的选择倾向，具有自我强化的机制，人们可能基于自己的担心，逐渐演变为大家都实现相对低效率的风险上策均衡

■ 聚点均衡
- ◆ 利用博弈设定以外的信息依据选择均衡，例如文化、习惯等
- ◆ 具体问题具体分析

■ 相关均衡

		博弈方2	
		L	R
博弈方1	U	5，1	0，0
	D	4，4	1，5

- ◆ 纯策略纳什均衡：（U, L），（D, R）
  - ● 期望得益均为 3，但利益相差很大
- ◆ 混合策略纳什均衡（真正意义上的混合策略，列方程求）：[(1/2, 1/2), (1/2, 1/2)]
  - ● 期望得益 2.5，但可能存在（U, R）的策略组合，让双方都不得益
- ◆ 不如（D, L）策略组合—>采用相关装置来避免出现（U, R）的情况
- ◆ 相关均衡要点：①构成纳什均衡；②有人忽略不造成问题

■ 共谋和防共谋均衡
- ◆ 共谋均衡

		博弈方2	
		L	R
博弈方1	U	0,0,10	-5,-5,0
	D	-5,-5,0	1,1,-5

博弈方3——A

		博弈方2	
		L	R
博弈方1	U	-2,-2,0	-5,-5,0
	D	-5,-5,0	-1,-1,5

博弈方3——B

  - ● 三个博弈方的纯策略纳什均衡：给定两个，看剩下一个怎么选
    - ■ 给定 LA，博弈方一 0>-5，选 U
    - ■ 给定 RA，博弈方一-5<1，选 D
    - ■ 给定 LB，博弈方一-2>-5，选 U
    - ■ 给定 RB，博弈方一-5<-1，选 D
    - ■ 给定 UA，博弈方二 0>-5，选 L
    - ■ 给定 DA，博弈方二-5<1，选 R
    - ■ 给定 UB，博弈方二-2>-5，选 L

        - 给定 DB，博弈方二-5<-1，选 R
        - 给定 UL，博弈方三 10>0，选 A
        - 给定 UR，博弈方三 0=0，都可以
        - 给定 DL，博弈方三 0=0，都可以
        - 给定 DR，博弈方三-5<5，选 B
    - 找到两个均衡：（U, L, A）->（0, 0, 10），（D, R, B）->（-1, -1, 5）
    - 假设博弈方三选 A，那么博弈方一二就不舒服了，如果共谋选 DR，那么就能获得 1 个得益，均大于 0，且把博弈方三坑了
    - 但是博弈方三选 B 的话，博弈方一二就没什么好选的，都会坑，所以（D, R, B）对博弈方三是防共谋均衡，即使（D, R, B）在帕累托效率意义上不是最优。
- 防共谋均衡
    - 定义
        - 单独改变策略无利可图
        - 没有任何两个博弈方的串通会改变博弈结果
        - 以此类推，所有博弈方都参加的串通都不会改变博弈结果

完全且完美信息动态/序列/序贯/多阶段博弈

——>所有博弈方都对过程和得益完全了解的完全且完美信息动态博弈

- 动态博弈的表示法和特点
- 可信性和纳什均衡问题
- 子博弈和子博弈完美纳什均衡
- 几个经典的动态博弈模型
- 有同时选择的动态博弈模型
- 动态博弈分析的问题和拓展讨论