《线性代数》辅导书

杭州电子科技大学数学教研室

2003 年 8 月

编写本书的目的是为了我校学生在《线性代数》的学习中提供一些帮助和辅导。

本书在内容安排上是以高等工科院校《线性代数》的教学大纲为基准的，因此在次序上与所用教材不一定相同。

本书对每一部分内容，首先给出大纲要求，使学生能明确所应达到的目标和学习的重点，然后对每一部分主要内容、难点、重点作了简单分析和讲解。最后以较大篇幅给出了一些典型例子，对每个例子尽可能给以多种解法，有的还给出了学生容易出现的错误之分析。

我们建议读者在使用本书时，对例子能自己先想一想，并动手算一算，然后再看所给解答，这样会有更大帮助。

在编写本书的过程中，我们得到了学校、理学院领导及教研室同事们的许多支持和帮助，在此我们表示衷心感谢。同时，由于我们水平所限，错误或不当之处在所难免，恳请大家批评指正，以便今后修正。

编者

2003.8

目　　录

第一章　行列式

一、基本要求：

1.理解 n 阶行列式的概念

2.掌握行列式的性质,会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理熟练计算 3、4 阶行列式,会计算较简单的 n 阶行列式。

二、基本概念与要点揭示

1、行列式概念

(i)　n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于 n!项的代数和,每项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积;$a_{1p_1}, a_{2p_2}, \cdots, a_{np_n}$,这里 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是 1,2,⋯,n 的一个 n 元排列,当 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为偶排列时,该项带正号;当 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为奇排列时,该项带负号,记为

$$D=\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

其中 $\sum\limits_{p_1 p_2 \cdots p_n}$ 表示对 1,2, ⋯,n 的 n!个全排列求和,上式右端称为 n 阶行列式的展开式。

(ii)　转置行列式:若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则称行列式 D^T 为行列式 D 的转置行列式。

(iii) 代数余子式: 在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,留下来的 n-1 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij}。余子式 M_{ij} 连同符号 $(-1)^{i+j}$ 的乘积

$$A_{ij}=(-1)^{i+j} M_{ij}$$

称为元素 a_{ij} 的代数余子式。元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 与 a_{ij} 的位置有关,而与 a_{ij} 本身数值无

关。

2. 行列式的性质

(i) 行列式与它的转置行列式相等。

(ii) 互换行列式的任意两行(列),行列式变号。

(iii)行列式中某一行(列)元素的公因子可以提到行列式外,或者说,用一个数乘行列式等于用该数乘行列式的某一行(列)。

(iV) 若行列式中的某两行(列)对应元素成比例,或有一行(列)元素全为零,行列式的值为零。

(V) 若行列式的某一行(列)元素都是两个数之和,则此行列式等于两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(vi) 将行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变。

3. 行列式按行(列)展开

(i) n 阶行列式 D 中的任意一行(列)的各元素 a_{ij} 与其对应的代数余子式 A_{ij} 的乘积之和等于 D 的值;而任意一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}=\begin{cases} D,\ i=j\ ; \\ 0,\ i\neq j \end{cases} \tag{1}$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}=\begin{cases} D,i=j; \\ 0,i\neq j \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\delta_{ij}=\begin{cases} 1,i=j; \\ 0,i\neq j \end{cases}$ 称(1)式为按行展开,(2)式为按列展开。

$(ii)^*$ 行列式的拉普拉斯(Laplace)展开

k 阶子式定义: n 阶行列式 D 中,任取 k 行 k 列 $(1\leq k\leq n)$,位于这些行和列的交点上 k^2 个元素按原来次序所构成的 k 阶行列式 N,称为 n 阶行列式 D 的一个 k 阶子式。

k 阶子式的代数余子式定义:在 n 阶行列式 D 中划去某 k 阶子式 N 所在的 k 行 k 列后剩下的元素按原来次序所构成的 n-k 阶行列式 M,称为 k 阶子式 N 的余子式。假如 k 阶子式 N 所在行的序号是 $i_1,i_2,\cdots,i_k$,所在列的序号是 $j_1,j_2,\cdots,j_k$,那么

$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k} M = A$，称为 k 阶子式 N 的代数余子式。

拉普拉斯(Laplace)定理：设在 n 阶行列式 D 中任意取定了 k 个行$(1\le k\le n-1)$，由这 k 个行元素所构成的一切 k 阶子式与它们所对应的代数余子式乘积的和等于行列式 D 的值。

即　若在 D 中取定 k 行后得到的一切 k 阶子式为 $N_1, N_2, \cdots, N_t$，它们所对应的代数余子式依次为 $A_1, A_2, \cdots A_t$，则

$$D = N_1A_1 + N_2A_2 + \cdots + N_tA_t = \sum_{i=1}^{t} N_iA_i$$

其中　$t = C_n^k = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

拉普拉斯展开的两个特殊情况：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix} = (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}。$$

4. 一些特殊行列式

(i) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

注　主对角线以上元素全为零的行列式结论同上。

(ii) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$

注　次对角线以上元素全为零的行列式结论同上。

(iii) 范德蒙 (Vandermonde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j)$$

三、行列式计算的典型例题分析

1、利用降阶法计算行列式

所谓降阶法就是应用行列式按行(列)展开定理,把高阶行列式的计算转化为低阶行列式的计算。在计算时,总是先结合行列式的性质,把行列式的某行(列)的元素变换成尽可能多的零,然后再展开。这是计算行列式最常用最有效的方法之一。

例 1　计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解　将第三列乘以-3 和-5 分别加到第一列、第二列,然后按第一行展开,得

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & -19 & 4 & 5 \\ -11 & -13 & 4 & 2 \\ -6 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -10 & -19 & 5 \\ -11 & -13 & 2 \\ -6 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

再将第三列乘以 6 加到第一列;按第三行展开,得

$$D = \begin{vmatrix} 20 & -19 & 5 \\ 1 & -13 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 20 & -19 \\ 1 & -13 \end{vmatrix} = -241。$$

由以上演算过程可知,对于任意 n 阶行列式 D,皆可用行列式性质变为等值的 n-1 阶行列式。

例 2.　求 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

解法一：可想办法在某一行或某一列中化出尽可能多的零，然后降价，同时运算过程中尽量避免出现分式。

$$D\xlongequal{\text{等一行减去第二行}}\begin{vmatrix}1&-1&0&0\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第一列加到第二列}}\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&5&2&2\\2&4&3&2\\2&4&2&3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}5&2&2\\4&3&2\\4&2&3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第一行减去第二行}}\begin{vmatrix}1&-1&0\\4&3&2\\4&2&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第一列加到第二列}}\begin{vmatrix}1&0&0\\4&7&2\\4&6&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&2\\6&3\end{vmatrix}=9$$

解法二：该行列式结构比较特殊，可以有更好的方法。

$$D\xlongequal{\text{第}2,3,4\text{行加到第}1\text{行}}\begin{vmatrix}9&9&9&9\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{提取公因子}}9\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&2&2\\2&2&3&2\\2&2&2&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{第}2,3,4\text{行每一行减去第}1\text{行的}2\text{倍}}9\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=9$$

2. 利用化三角形法计算行列式

利用行列式性质将所给行列式化为上(下)三角行列式，然后可利用有关三角形行列式的结论，迅速求出该行列式的值。

例 3　计算 $D=\begin{vmatrix}a-b-c&2a&2a\\2b&b-c-a&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}$

解：将第二行与第三行都加到第一行上，再提出公因子(a+b+c)，得

$$D=\begin{vmatrix}a+b+c&a+b+c&a+b+c\\2b&b-c-a&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

再将第一行乘以(-2b)和(-2c)分别加到第二行与第三行,得

$$D=\left(a+b+c\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -(a+b+c) & 0 \\ 0 & 0 & -(a+b+c) \end{vmatrix}=(a+b+c)^3 \text{。}$$

例 4　计算

$$D=\begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2-\lambda & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-\lambda & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1}-\lambda & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-\lambda} \end{vmatrix}$$

解法一:将第一行乘以-1 后加到后面的各行上,得

$$D=\begin{vmatrix} a_1-\lambda & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \lambda & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

再将上式的第二列起,每列都加到第一列上,得

$$D=\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i-\lambda & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(-\lambda)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i-\lambda\right)=(-\lambda)^n+(-\lambda)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_i=(-\lambda)^{n-1}(\sum_{i=1}^{n} a_i-\lambda) \text{。}$$

解法二 考虑到各行元素之和相等, 因此我们可以把每一列加到第一列上去, 然后提取公因子, 再来化简行列式。

$$D=\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n}a_i-\lambda & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \sum_{i=1}^{n}a_i-\lambda & a_2-\lambda & a_e & \cdots & a_n \\ \sum_{i=1}^{n}a_i-\lambda & a_2 & a_3-\lambda & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{i=1}^{n}a_i-\lambda & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-\lambda\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2-\lambda & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 & a_3-\lambda & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-\lambda \end{vmatrix}$$

再将上式中第 2 列起, 每一列减去第 1 列的 a_i 倍, 得:

$$D=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-\lambda\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda \end{vmatrix}=(-\lambda)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i-\lambda\right)$$

例 5 计算

$$D=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

解法一: 考察行列式, 最后一行虽然每个元素均不为零, 但它们对应的余子式均可化为上(下)三角形行列式, 这样, 可按最后一行展开, 得

$$D=a_n(-1)^{n-1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}+a_{n-1}(-1)^{n+2}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$a_3(-1)^{n+n-2}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}+a_2(-1)^{n+n-1}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+a_1(-1)^{n+n}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

上式中每个行列式中均有一行仅有一个非零元，按该行展开得

$$D=a_n(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}+a_{n-1}(-1)^{n+2}+a_{n-2}(-1)^{n+3}x^2(-1)^{n-3}+\cdots+a_3(-1)^{2n-2}$$

$$+\quad x^{n-3}(-1)^2+a_2(-1)^{2n-1}x^{n-2}(-1)+a_1(-1)^{2n}x^{n-1}$$

$$=a_n+a_{n-1}x+a_{n-2}x^2+\cdots+a_3x^{n-3}+a_2x^{n-2}+a_1x^{n-1}\text{。}$$

解法二：按下列方法消元，再按第一列展开降阶可化 n−1 阶行列式为下三角形行列式。

$$D=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

$\times(x)$

$\times(x^2)$

……

$\times(x^{n-1})$

$$=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_I X^{n-i}=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

显然，该例也可按下列方法消元，先把第 n 列乘以 x 加到第 n−1 列上去，把 n−1 列上的 x 化为零。再把变换后的第 n−1 列乘 x 加到 n−2 列上去，……直到第 2 列的元素乘 x 加到第 1 列上去，然后，依第 1 列展开，即

$$D=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

x（x）

x（x）

…………

x（x）

$$=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i} & \sum_{i=1}^{n-1} a_i x^{n-i-1} & \sum_{i=1}^{n-2} a_i x^{n-i-2} & \cdots & a_1 x + a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n+1}(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1}=\sum_{i=1}^{n} a_i x^{n-i}$$

$$=a_1 x^{n-1}+a_2 x^{n-2}+a_3 x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

3.利用升阶法计算行列式

有时为了便于计算行列式,特意在原 n 阶行列式的旁边再添加上一行一列,使阶数增加一阶 （可添在第一行、第一列,也可添在第 n+1 行、n+1 列)成为 n+1 阶行列式。在合理地选择添加的行、列的元素后,使得升阶后的行列式更便于“消零”。这种计算行列式的方法称为升阶法。

例 6 计算 $D=\begin{vmatrix} \lambda & a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & \lambda & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & \lambda & a_3 \\ a_4 & a_4 & a_4 & \lambda \end{vmatrix}$

解 将 D 加边升阶得

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & \lambda & a_1 & a_1 & a_1 \\ -a_2 & a_2 & \lambda & a_2 & a_2 \\ -a_3 & a_3 & a_3 & a & a_3 \\ -a_4 & a_4 & a_4 & a_4 & \lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -a_1 & \lambda-a_1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & \lambda-a_2 & 0 & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & \lambda-a_3 & 0 \\ -a_4 & 0 & 0 & 0 & \lambda-a_4 \end{vmatrix}$$

第 2 列 $\dfrac{a_1}{\lambda-a_1}$ 倍、第 3 列 $\dfrac{a_2}{\lambda-a_2}$ 倍、第 4 列 $\dfrac{a_3}{\lambda-a_3}$ 倍、第 5 列 $\dfrac{a_4}{\lambda-a_4}$ 倍加到第一列上,

得 $$D=\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{4}\frac{a_i}{\lambda-a_i} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-a_4 \end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{4}(\lambda-a_i)(1+\sum_{i=1}^{4}\frac{a_i}{\lambda-a_i})$$ 。这里设 $a_i\neq\lambda(i=1,2,3,4)$

这个结论可以推广到 n 阶行列式的情况, 即

$$\begin{vmatrix} \lambda & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & \lambda & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_3 & a_3 & \lambda & \cdots & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & \lambda \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-a_i)(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda-a_i})$$

例 7　设

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 $$B=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n+x} \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+x & x_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}=A+x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$$, 这里 A_{ij} 是 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式

证法一: 将行列式 B 加边升阶, 得

$$B=\begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ 0 & a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}_{n+1}$$

将第一行乘以−1 加到各行上, 得

$$B=\begin{vmatrix}1 & x & x & \cdots & x\\ -1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ -1 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\underline{\underline{\text{按第一行展开}}}\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}+x(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ -1 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$+x(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ -1 & a_{21} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}_n+\cdots+x(-1)^{1+n}\begin{vmatrix}-1 & a_{11} & \cdots & a_{1n-1}\\ -1 & a_{21} & \cdots & a_{2n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & a_{n1} & \cdots & a_{nn-1}\end{vmatrix}_n$$

从第二项开始, 每项均按第 1 列展开, 得

$$B=A+x(A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1})+x(A_{12}+A_{22}+\cdots+A_{n2})+\cdots$$

$$+x(A_{1n}+A_{2n}+\cdots+A_{nn})=A+x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$$

证法二: $$B=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x\\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x\\ x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x\end{vmatrix} \qquad (*)$$

上式中右边第二式中, 以第一列的-1 倍加到后面每一列上去, 然后按第一列展开, 即有

$$\begin{vmatrix}x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x\\ x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ x & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=x\sum_{i=1}^{n}A_{i1}$$

再对(*)式右边第 1 个行列式的第 2 列利用性质, 得

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x\\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}+x & \cdots & a_{1n}+x\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+x & \cdots & a_{2n}+x\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}+x & \cdots & a_{nn}+x\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{n} & x & a_{13}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & x & a_{23}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & x & a_{n3}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

对上式右边第 2 个行列式, 从第 3 列开始, 每列减去第 2 列, 得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & x & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & x & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & x & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{按第2列展开}}} \quad x \cdot \sum_{i=1}^{n} A_{i2}$$

$$\therefore B=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}+x\sum_{i=1}^{n}(A_{i1}+A_{i2})$$

依次类推即可得

$$B=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+x\sum_{i=1}^{n}(A_{i1}+A_{i2}+\cdots+A_{in})$$

$$=A+x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}$$

以上第 2 个证法, 即是利用分裂法来计算行列式。

4.利用分裂法计算行列式

所谓分裂法,就是根据行列式的性质,把原行列式分解成若干个同阶行列式之和,然后计算出每个行列式的值,即可得到原行列式之值。

例 8　计算

$$D=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

解　由于行列式的每一个元素均为两数之和,故可用分裂法来计算此行列式。从第一列开始逐列进行分裂,并利用行列式性质,有

当　n=1 时, $D=a_1+b_1$;

当　n=2 时, $D=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 \\ a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 \\ b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}+b_1\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=b_2\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{vmatrix}+b_1\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1-a_2)(b_2-b_1)$$

当 $n>2$ 时,

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1+b_3 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2 & a_2+b_3 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_n & a_n+b_3 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & a_1+b_3 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2 & b_2 & a_2+b_3 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & b_2 & a_n+b_3 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & a_1+b_3 & \cdots & a_1+b_n \\ b_1 & a_2 & a_2+b_3 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & a_n & a_n+b_3 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & a_1+b_3 & \cdots & a_1+b_n \\ b_1 & b_2 & a_2+b_3 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & a_n+b_3 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$=\cdots=b_2\quad b_3\cdots b_n\begin{vmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}+b_1\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n \end{vmatrix}=0$$

综合上述,所求行列式 $D=\begin{cases} 0 & ,n>2; \\ (a_1-a_2)(b_2-b_1), & n=2; \\ a_1+b_1 & ,n=1 \end{cases}$

注: 此题也可不用分裂法,而利用行列式性质(vi)化简。计算将会更简单。

例 9　计算

$$D=\begin{vmatrix} a_1+1 & a_2+1 & a_3+1 & 1 \\ b_1+1 & b_2+1 & b_3+1 & 1 \\ c_1+1 & c_2+1 & c_3+1 & 1 \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

解　将最后一列改写为两项之和,即

$$D=\begin{vmatrix}a_1+1 & a_2+1 & a_3+1 & 0+1\\ b_1+1 & b_2+1 & b_3+1 & 0+1\\ c_1+1 & c_2+1 & c_3+1 & 0+1\\ b & b & b & (a-b)+b\end{vmatrix}$$

再将最后一列分裂为两个行列式之和,得

$$D=\begin{vmatrix}a_1+1 & a_2+1 & a_3+1 & 0\\ b_1+1 & b_2+1 & b_3+1 & 0\\ c_1+1 & c_2+1 & c_3+1 & 0\\ b & b & b & a-b\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1+1 & a_2+1 & a_3+1 & 1\\ b_1+1 & b_2+1 & b_3+1 & 1\\ c_1+1 & c_2+1 & c_3+1 & 1\\ b & b & b & b\end{vmatrix}$$

$$=(a-b)\begin{vmatrix}a_1+1 & a_2+1 & a_3+1\\ b_1+1 & b_2+1 & b_3+1\\ c_1+1 & c_2+1 & c_3+1\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}a_1+1 & a_2+1 & a_3+1 & 1\\ b_1+1 & b_2+1 & b_3+1 & 1\\ c_1+1 & c_2+1 & c_3+1 & 1\\ 1 & 1 & & 1\end{vmatrix}$$

第一个三阶行列式再继续折成行列式之和; 而第二个四阶行列式第四行乘以-1 分别加到第一、二、三行上,得

$$D=(a-b)\left(\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & a_2 & a_3\\ 1 & b_2 & b_3\\ 1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & 1 & a_3\\ b_1 & 1 & b_3\\ c_1 & 1 & c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & 1\\ b_1 & b_2 & 1\\ c_1 & c_2 & 1\end{vmatrix}\right)+b\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

$$=a\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}+(a-b)\left(\begin{vmatrix}1 & a_2 & a_3\\ 0 & b_2-a_2 & b_3-a_3\\ 0 & c_2-a_2 & c_3-a_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & 1 & a_3\\ b_1-a_1 & 0 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & 0 & c_3-a_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & 1\\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & 0\\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & 0\end{vmatrix}\right)$$

$$=a\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}+(a-b)\left(\begin{vmatrix}b_2-a_2 & b_3-a_3\\ c_2-a_2 & c_3-a_3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}b_1-a_1 & b_3-a_3\\ c_1-a_1 & c_3-a_3\end{vmatrix}+\begin{matrix}b_1-a_1 & b_2-a_2\\ c_1-a_1 & c_2-a_2\end{matrix}\right)$$

$$\begin{aligned}&=a(a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1-a_2b_1c_3-a_1b_3c_2)+(a-b)[(b_2-a_2)(c_3-a_3)\\&\quad-(b_3-a_3)(c_2-a_2)-(b_1-a_1)(c_3-a_3)+(b_3-a_3)(c_1-a_1)+(b_1-a_1)(c_2-a_2)\\&\quad-(b_2-a_2)(c_1-a_1)]\text{。}\end{aligned}$$

5. 利用范德蒙行列式计算

例 10　解方程 $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix} = 0$

解　将行列式转置便知它是一个 4 阶范德蒙行列式。即

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & -3 & 5 \\ x^2 & 4 & 9 & 25 \\ x^3 & 8 & -27 & 125 \end{vmatrix}$$

$$= (2-x)(-3-x)(5-x)(-3-2)(5-2)(5+3) = 0$$

(方程的解为 $x = 2, x = -3, x = 5$)。

例 11　计算 $D = \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & \cdots & a_1 b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & \cdots & a_2 b_2^{n-1} & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & \cdots & a_{n+1} b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$

解　将行列式的第 1、2、…、n+1 行分别提取 $a_1^n, a_2^n, \cdots a_{n+1}^n$ 得

$$D = (a_1 a_2 \cdots a_{n+1})^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \cdots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \cdots & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n \end{vmatrix}$$

再将行列式转置,可得

$$D = (a_1, a_2 \cdots a_{n+1})^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_2}{a_2} & \cdots & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{n-1} & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+2}}\right)^{n-1} \\ \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^n & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 a_2 \cdots a_{n+1})^n \prod_{1\le j<i\le n+1}\left(\frac{b_i}{a_i}-\frac{b_j}{a_j}\right)$$

例 12　计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

解 此行列式与范德蒙行列式很相似,如果在第 n-1 行与第 n 行中间添加一行 x_i^{n-1} (i=1,2,⋯,n),再添加第 n+1 列,即得如下形式的范德蒙行列式

$$\varphi_{n+1}(y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & y^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & y^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\begin{aligned} &= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)(y-x_1) \\ &\qquad \cdot(x_3-x_2)\cdots(x_n-x_2)(y-x_2) \\ &\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\qquad\qquad \cdot(x_n-x_{n-1})(y-x_{n-1}) \\ &\qquad\qquad\qquad \cdot(y-x_n) \end{aligned}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(y-x_i)\cdot\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

再考察原行列式 D_n 与 $\varphi_{n+1}(y)$ 的关系,而 D_n 恰好是 $\varphi_{n+1}(y)$ 中元素 y^{n-1} 的余子式 $M_{n/n+1} = D_n$。若将 $\varphi_{n+1}(y)$ 按最后一列展开,则 y^{n-1} 的系数为 $(-1)^{n+(n+1)} M_{n\,n+1} = -D_n$ 。再由 $\varphi_{n+1}(y)$ 的表达式(1)可求得 y^{n-1} 的系数为

$$-\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \prod_{i\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

于是,原行列式 D_n 的值为 $D_n=\sum_{i=1}^{n}x_i\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$。

6. 利用数学归纳法

一个与自然数 n 有关的命题,如果能证明当 n=s 时命题成立(s 为自然数,它根据具体问题所确定的初始值),再假设在 $n=k(k\ge s)$ 时命题也成立,若能证明当 $n=k+1$ 时命题成立,则命题对所有大于或等于 s 的自然数都成立。那么以上所阐述的方法, 称为第一数学归纳法。若将假设 $n=k(k\ge s)$ 改为 $n\le k(k\ge s)$ 时,则称上述的方法为第二归纳法。

例 13 证明

$$D_n=\begin{vmatrix}2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

证明: 用第二归纳法。

当 n=1 时: $D_1=2\cos\theta=\dfrac{2\cos\theta\sin\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin2\theta}{\sin\theta}$ 等式成立。

假设 $n\le k-1$ 时,等式成立。 证明当 $n=k$ 时,等式也成立。

D_k 按第一行展开,得

$$D_k=2\cos\theta\begin{vmatrix}2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}_{k-1}$$

$$+(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}_{k-1}$$

$$=2\cos\theta D_{k-1}-\begin{vmatrix}2\cos\theta & 1 & \cdots & 0\\ 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta\end{vmatrix}_{k-2}$$

$$= 2\cos\theta \cdot D_{k-1} - D_{k-2}$$

由归纳法假设得

$$D_k = 2\cos\theta \frac{\sin k\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin[(k-2)+1]\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$$

由归纳法知等式对于任何 n 均成立。

7. 利用递推法计算行列式

利用行列式的性质,把行列式表示为具有相同结构的较低价的关系式(称为递推关系式),根据递推关系式及某初始行列式的值便可递推求得所需要的结果,这种计算行列式的方法称为递推法。应当指出,数学归纳法与递推法本质上是相一致的。

例 14 用递推法计算行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

解 将行列式按最后一行展开,得

$$D_5 = xD_4 + (-1)^{5+4} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

于是得递推关系式： $D_5 = xD_4 - D_3$，

以此类推可得

$$D_5 = x[xD_3 - D_2] - (xD_2 - D_1)$$

$$= x^2 D_3 - xD_2 - xD_2 + D_1 = x^2(xD_2 - D_1) - 2xD_2 + D_1$$

$$= x^3 D_2 - x^2 D_1 - 2xD_2 + D_1 = x^3(x^2 - 1) - x^3 - 2x(x^2 - 1) + x$$

$$= x^5 - 4x^3 + 3x$$

一般地，对 n 阶行列式 D_n 如果有递推关系 $D_n = pD_{n-1} - qD_{n-2}$，设 α, β 为方程 $x^2 - px + q = 0$ 的根，则 $\alpha + \beta = p, \alpha\beta = q,$ 因此

$$D_n = (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$$

$$\therefore D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) = \cdots = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1) \qquad （1）$$

同理 $D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{n-2}(D_2 - \alpha D_1)$ （2）

当$\alpha \neq \beta$时，由（1），（2）即可求得D_n。

当$\alpha = \beta$时，由（1）式可得

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) = \alpha^{n-2}(D_2 - \alpha D_1)$$

设$A = D_2 - \alpha D_1, \therefore D_n = \alpha D_{n-1} + \alpha^{n-2}A$。依此类推，我们有

$$D_n = \alpha^2 D_{n-2} + 2\alpha^{n-2}A = \alpha^{n-1}D_1 + (n-1)\alpha^{n-2}A。$$

*8. 利用拉普拉斯展开式计算行列式

拉普拉斯展开式常常说成是行列式按 k 行(或列)展开,也就是说在 n 阶行列式中任取定$i_1, i_2, \cdots, i_k$的 k 个行$(1 \le k \le n-1)$,而这 k 个行中所组成的所有 k 阶子式与它对应的代数余子式乘积之和,等于行列式的值。

例 15 计算

$$D = \begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 将行列式按最后两列展开,即得

$$D = (-1)^{1+2+5+6}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{vmatrix}$$

再按最后两行展开,得

$$D = (-1)^{3+4+3+4}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 = 4。$$

例 16 计算

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & w & 0 & 0 & w^2 & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 & w^2 & c_2 & w \\ a_3 & b_3 & 1 & w & c_3 & w^2 \\ 1 & w^2 & 0 & 0 & w & 0 \end{vmatrix}$$

解　用拉普拉斯定理按第 1,2,6 行展开得

$$D=(-1)^{1+2+6+1+2+5}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&w&w^2\\1&w^2&2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1&1\\1&w^2&w\\1&w&w^2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\0&w-1&w^2-1\\0&w^2-1&w-1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&w^2-1&w-1\\0&w-1&w^2-1\end{vmatrix}$$

$$=(w-1)^4\begin{vmatrix}1&w+1\\w+1&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}w+1&1\\1&w+1\end{vmatrix}$$

$$=(w-1)^4(w^2+2w)^2=w(w+2)^2(w-1)^4\text{。}$$

例 17　计算

$$D_{2n}=\begin{vmatrix}a&&&&&&&b\\&a&&&&&b&\\&&\ddots&&&\iddots&&\\&&&a&b&&&\\&&&b&a&&&\\&&\iddots&&&\ddots&&\\&b&&&&&a&\\b&&&&&&&a\end{vmatrix}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right\}n\text{行}\\ \left.\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\right\}n\text{行}\end{array}$$

解　将 D_{2n} 按第 n、n+1 行展开,得

$$D_{2n}=(-1)^{n+n+1+n+n+1}\begin{vmatrix}a&b\\b&a\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a&&&&&b\\&\ddots&&&\iddots&\\&&a&b&&\\&&b&a&&\\&\iddots&&&\ddots&\\a&&&&&a\end{vmatrix}\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\\ \\ \end{array}\right\}n-1\\ \left.\begin{array}{c}\\ \\ \end{array}\right\}n-1\end{array}$$

$$=(a^2-b^2)D_{2n-2}$$

D_{2n-2} 再按第 n-1、n 行展开,得

$$D_{2n-2}=(a^2-b^2)D_{2n-4}$$

依此类推,得

$$D_{2n}=(a^2-b^2)^{n-1}\cdot\begin{vmatrix}a&b\\b&a\end{vmatrix}=(a^2-b^2)^n\text{。}$$

拉普拉斯展开式也可以说它属于降阶计算行列式的一种方法,对于有些行列式的计算是更加有效,更加简捷。

第二章 矩 阵

一、基本要求:

1. 熟练掌握矩阵的各种运算及其运算规律。

2. 理解矩阵可逆的定义,及判定矩阵可逆的方法,掌握求逆阵的几种方法。

3. 理解初等矩阵及其与初等变换的关系,初等矩阵与可逆矩阵的关系,掌握用初等变换求逆阵的方法,熟练地运用初等变换将矩阵化为阶梯形矩阵。

4. 初步会使用分块矩阵讨论问题,着重四块矩阵。

5. 几种重要的特殊矩阵及运算特点。

二、重点及难点及主要内容:

(一)重点:

1. 矩阵的运算,尤其是乘法运算。

2. 可逆矩阵的判定,及求逆方法。

(二)主要内容:

1. 矩阵运算的基本规律与性质,其中 A、B、C 为矩阵,k,l,λ 为常数

(1)加法: A+B=B+A 交换律

(A+B)+C=A+(B+C) 结合律

A+0=A, A+(-A)=0.

(2)数乘

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}=A\cdot k$$

$$k(lA)=l(kA)=(lk)A$$

$$(k+l)A=kA+lA$$

$$k(A+B)=kA+kB$$

kA=0,则 k=0 或 A=0

(3)乘法 A(BC)=(AB)C, $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$,

A(B+C)=AB+AC, (B+C)A=BA+CA

注意:一般情况下,$AB\neq BA, AB=0$推不出$A=0$或$B=0$,

$AB=AC$推不出$B=C$.

(4)转置 $(A^T)^T=A$, $(A+B)^T=A^T+B^T$,

$(kA)^T=kA^T$, $(AB)^T=B^TA^T$.

(5)求逆 $(A^{-1})^{-1}=A$, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$,

$$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1} \quad (当k\neq 0时)$$

$$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$$

(6)方阵的行列式 $\left|A^T\right| = |A|$, $\left|A^{-1}\right| = |A|^{-1}$,

$|kA| = k^n |A|$, $|AB| = |A||B|$.

2.判定 n 阶方阵 A 可逆的方法

(1)若存在与 A 同阶的方阵 B,使 AB=I,或 BA=I,则 A 可逆且 $A^{-1} = B$。

(2)若$|A| \neq 0$,则A可逆。

(3)若 A 可表示为若干初等矩阵的积,则 A 可逆。

3.求 A^{-1} 的方法

(1)对于数字方阵 A,且阶数较低,常用公式法,或称伴随阵法。

即 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$ 其中 $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$

且 A_{ij} 是 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式。

(2)用初等变换方法:

$$(A \vdots I) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (I \vdots A^{-1})$$

或 $$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} I \\ \hline A^{-1} \end{pmatrix}$$

(3)对于矩阵多项式 f(A)形式给出的矩阵,求逆常寻找 f(B),使 f(A)·f(B)=I,则 f(B)=$\left[f(A)\right]^{-1}$。

(4)特殊矩阵特殊方法,例如对角阵或准对角阵

$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix}$ 且每个子块 $A_i (i = 1,2,\cdots,r)$ 均可逆则 $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r^{-1} \end{pmatrix}$

4.分块矩阵:目的将高阶矩阵运算化为低阶矩阵运算。

(1)常用分块法:按行分块 $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}$ 其中 $A_i = [a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}]$ i=1,2,…,m

按列分块:$A_{m\times n} = [B_1, B_2, \cdots, B_n]$ 其中 $B_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix}$ $j = 1,2,\cdots,n$

对角块(仅对方阵)：$A_{n\times n}=\begin{bmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r\end{bmatrix}$其中 A_i 是s_i阶方阵，且$\sum_{i=1}^{r}S_i=n$。

四分块：$A=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}$

(2)分块阵的运算

在加，减运算时两矩阵分块法应完全相同。在做乘法时，左边矩阵列的分法与右边矩阵行的分法相同，然后将每一个子块做为数，按矩阵乘法法则运算。

5. 几类特殊矩阵，列表如下：

名　　称	定　　义	性　　质
零矩阵	$0=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}_{m\times n}$	0+A=A+0=A 0A=A0=0 A+(−A)=0
单位矩阵	$I_{n\times n}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{n\times n}$	IA=AI=A $I^{-1}=I,\ I^{k}=I$ $\|I\|=1$
数量矩阵	$K_n=\begin{bmatrix}k & 0 & \cdots & 0\\ 0 & k & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & k\end{bmatrix}=kI_n$	$KA=(ka_{ij})_{n\times n}=Ak$ 数量矩阵是与任意方阵可交换的矩阵 $k\neq 0,(kI_n)^{-1}=k^{-1}I_{n\times n}$
对角矩阵与准对角矩阵	$A_{n\times n}=\begin{bmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{bmatrix}=diag(a_1\cdots a_n)$ $A_{n\times n}=\begin{bmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r\end{bmatrix}$ 其中 A_i 是 S_i 阶方阵，且$\sum_{i=1}^{r}S_i=n$，将 A_i 看成数，有与对角阵相同的运算规则。	①若 A,B 均为 n 阶对角阵，则 kB, A+B, A•B 均为对角线上元素的运算，结果均为对角阵。 ②$\|A\|=a_1a_2\cdots a_n$。A 可逆$\Leftrightarrow$ $a_i\neq 0$ ，(i=1, 2, ⋯ n)，且 $A^{-1}=diag(a_1^{-1},a_2^{-1},\cdots a_n^{-1})$ ③若 $A=diag(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$B_1=(b_{ij})_n$，则$AB=(\ a_ib_{ij})$，($i=1,2,\cdots,n$)，$BA=(b_{ij}a_j)$，($j=1,2,\cdots n$)

上(下)三角矩阵	$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ & a_{22}\cdots a_{2n} \\ & \ddots . a_{nn}\end{pmatrix}$ $\left[A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ a_{21}\, a_{22} & & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1}\, a_{n2}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}\right]$	①若 A,B 为上(下)三角矩阵,则A+B,A • B.K • A 及 A^{-1} 均为上(下)三角矩阵。 ② A 可逆的充要条件, $a_{ii}\neq 0$, $(i=1,2,\cdots n)$, 且 $\vert A\vert=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$ 。
对称矩阵 反对称矩阵	$A=A^T$ 或 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 。 $A=-A^T, a_{ij}=-a_{ji}, (i\neq j)$ $a_{ii}=a_{jj}=0$, (i=j)	①对称(反对称)阵 A 与 B 的和,数积,仍是对称(反对称)矩阵。 ②A 若可逆且 A 对称,则 A^{-1} 也对称。 ③奇数阶反对称阵 A 有 $\vert A\vert=0$ 。

三、典型例题分析

在处理矩阵概念及其运算问题时要注意它与其他代数运算特别是行列式运算的区别。

例 1. 说明下列各命题是否成立,假设以下矩阵均为 n 阶方阵。

(1) $|-A|=-|A|$ (2) $|A+B|=|A|+|B|$

(3) $|A|=0,$ 则 $A=0,$ 而 $A=0$ 则 $|A|=0$

(4) $A^2=I,$ 则 $A=I$ 或 $A=-I$

(5) AB=AC, 且 $A\neq 0,$ 则 $B=C$

(6) $(A+B)^k=A^k+C_k^1A^{k-1}B+\cdots+C_k^{k-1}AB^{k-1}+B^k$

(7) $(A+\lambda I)^k=A^k+C_k^1\lambda A^{k-1}+C_k^2\lambda^2A^{k-2}+\cdots+C_k^{k-1}\lambda^{k-1}A+\lambda^kI$

解:(1) 此式一般不成立。一般地有 $|kA|=k^n|A|\neq k|A|$, 因此, 当 n 为奇数时, $|-A|=(-1)^n|A|=-|A|$, 而 n 为偶数时 $|-A|=|A|$ 。

(2) 此式一般不成立, 例如 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, 则 A+B= $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,

$\therefore |A+B|=0,$ 而 $|A|=|B|=1,$ 故 $|A+B|\neq|A|+|B|$ 。

事实上, $|A+B|$ 可按行列式性质拆成 2^n 个行列式之和, 而非简单的 $|A|+|B|$ 。

(3) $|A|=0$ 时 未必有 A=0, 如 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ 。但是当 A=0 时, 必有 $|A|$ =0。

(4) $A^2=I$ 未必有 A=I 或−I, 例如 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $A\neq I$ 且 $A\neq -I,$ 但 $A^2=I$ 。这里要特别注意与数字运算的差别。

(5)此命题一般也不成立。AB=AC,则 A(B-C)=0,在矩阵中可以有两个非零阵之积为零矩阵,因此不能从积为零推出必有一个因子为零的结论。

例如: $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 则 $AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $AC=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$,但 $A\neq 0$, 且$B\neq C$ 。

(6)当 $k\geq 2$ 时,此式一般不成立。这是因为一般情况下 AB 与 BA 是两个不同的矩阵,因此不能简单地套用数字运算规律。例如 K=2 时,

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$$

当 AB=BA 时,才能有 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 。

(7)此式能成立,因为 A 与 λI 是可交换的,则根据前述讨论即可得到结论。

例 2: 已知 $B=\begin{bmatrix}0&1&2\\-3&4&0\\-1&3&-2\end{bmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4&-1&2\\-1&-4&0\\1&5&-2\end{pmatrix}$,

求: $Z,Y,$使$\begin{cases}Z+Y=B\\3Z-Y=C\end{cases}$ 。

解:由条件方程组,解得 $4z=B+C\quad Z=\dfrac{1}{4}(B+C)\quad Y=B-Z$

$$Z=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&0&4\\-4&0&0\\0&8&-4\end{pmatrix}\overset{*}{=}\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&0\\0&2&-1\end{pmatrix},Y=\begin{pmatrix}0&1&2\\-3&4&0\\-1&3&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

$$Y=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&4&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}。$$

这例综合了矩阵的线性运算,易错处*一步,与行列式乘法应区别。

例 3. 计算矩阵的高次幂 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{pmatrix}$,求 A^n 。

解法 1: 用数学归纳法。

这先要对 n=2,3,等低次幂直接计算寻找元素关于次数 n 的规律。

$$n=2,A^2=\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^2&2\lambda&1\\0&\lambda^2&2\lambda\\0&0&\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$n=3, A^3=A^2\cdot A=\begin{bmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda\\ 0 & 0 & \lambda^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda\\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2\\ 0 & 0 & \lambda^3\end{bmatrix}$$

观察:随 n 增大,方幂仍是上三角,且沿主对角线方向幂从 n 递减,且系数随 n 变化,n=2,3,4 系数为 1,2,1　　1,3,3　　1,4,6,联想杨辉三解形的系数规律,猜想:

$$A^n=\begin{bmatrix}\lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1} & C_n^2\lambda^{n-2}\\ & \lambda^n & C_n^1\lambda^{n-1}\\ & & \lambda^n\end{bmatrix}$$,结论正确与否用归纳法证明。

(1)对 n=2 上面已验算,成立。

(2)假设 n=k 时成立,即 $A^k=\begin{bmatrix}\lambda^k & k\lambda^k & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ & & \lambda^k\end{bmatrix}$

(3)再证 n=k+1 时成立。

即 $$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{bmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-1} & \dfrac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1}\\ & & \lambda^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k & \dfrac{k(k+1)}{2}\lambda^{k-1}\\ 0 & \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^k\\ 0 & 0 & \lambda^{k+1}\end{bmatrix}$$

故结论对一切 n 成立。

解法 2　根据矩阵特点加以变形,简化再进行计算。

即 $$A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{\text{记}}{=\!=}\lambda I+C$$

其中 $$C^2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$C^3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$ 即对$n\geq 3, C^n=0$,

而 $A^n=(\lambda I+C)^n=\lambda^n I+n\lambda^{n-1}C+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}C^2+\cdots$

$$\because C^n=0, n\geq 3, \text{故}\quad A^n=\begin{pmatrix}\lambda^n & & \\ & \lambda^n & \\ & & \lambda^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & n\lambda^{n-1} & 0\\ 0 & 0 & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ & & \lambda^n\end{pmatrix}$$

分析:方法 2 将 A 分解为对角阵与简单阵的和使高次幂运算简化是常用的方法,这里用到特殊矩阵 kI 与任何同阶方阵可交换的性质。

例 4 (1)已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ 求与 A 可交换的一切矩阵。

(2)是否存在一个 n 阶矩阵 B,它与一切 n 阶矩阵可交换,若存在,求出 B。

解法 1. 由与 A 可交换的定义知,其应是一个二阶方阵。

设 $B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$且$AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{11}+b_{21} & b_{12}+b_{22}\end{pmatrix}$

$$BA=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}+b_{12} & b_{12}\\ b_{21}+b_{22} & b_{22}\end{bmatrix}$$

令 AB=BA,得方程 $\begin{cases}b_{11}=b_{11}+b_{12} & b_{12}=b_{12}\\ b_{11}+b_{21}=b_{21}+b_{22} & b_{12}+b_{22}=b_{22}\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}b_{12}=0 & b_{11}=b_{22}\\ b_{21}\ \text{任意}\end{cases}$ 故 $B=\begin{bmatrix}b_{11} & 0\\ b_{21} & b_{11}\end{bmatrix}$

解法 2. $A=\begin{bmatrix}1 & \\ & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=I+C$

若 $AB=BA$ 即(I+C)B=B(I+C),因 IB=BI,故只需找 CB=BC,于是,

设 $B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}, CB=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ b_{11} & b_{12}\end{bmatrix}$, $BC=\begin{bmatrix}b_{12} & 0\\ b_{22} & 0\end{bmatrix}$ 。 令

BC=CB$\Rightarrow\begin{cases}b_{12}=0\\ b_{11}=b_{22}\end{cases}$, b_{21} 任意。

故 $B=\begin{bmatrix}b_{11}&0\\b_{21}&b_{11}\end{bmatrix}$为所求。

分析:解法 1 是基本方法,解法 2 中利用单位阵可与任何阵交换的性质,减少了计算量。

(2)与任何一个方阵可交换的矩阵肯定是有的。∵IA=AI=A,至少有一个单位阵。由此想到与 I 很接近的数量矩阵 KI。∵(kI)A=kA=Ak=A(kI)。所以数量矩阵与任意一个方阵可交换。还有吗?下面证明说明只有数量矩阵。证明与任何一个 n 阶方阵可交换的矩阵,可从最简单的矩阵入手。

设 $B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{bmatrix}$与一切 n 阶方阵可交换,所以必须能与 E_{ij} 交换。

其中 $E_{ij}=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}0&\cdots&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&0&\cdots&0\end{bmatrix}&\begin{matrix}\\\\i\text{行}\\\\\\\end{matrix}\\ j\text{列}&\end{array}$,是只有第 i 行,第 j 列位置上元素是 $a_{ij}=1,$ 其余元素是零的 n 阶方阵。

$$BE_{ij}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{n1}&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&\vdots&0\\\cdots&\cdots&\vdots&\cdots\\0&0&1&0\\0&0&\vdots&0\end{bmatrix}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0&0&\cdots&b_{1i}&\cdots 0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots 0\\0&0&\cdots&b_{ii}&\cdots 0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots 0\\0&0&\cdots&b_{ni}&\cdots 0\end{bmatrix}\\ j\text{列}\end{array}$$

$$E_{ij}\,B=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0&\cdots&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{bmatrix}=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}0&0&\cdots&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_{j1}&b_{j2}&\cdots&\cdots&b_{jn}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\cdots&0\end{bmatrix}&\begin{matrix}\\\\i\text{行}\\\\\\\end{matrix}\end{array}$$

比较 $BE_{ij}=E_{ij}B$,左右两个矩阵的对应元素,得到,

$$b_{ii}=b_{jj}\quad 且\quad \begin{matrix}b_{jk}=0 & 当k\neq j时,\ k=1,2,\cdots,n\\ b_{ki}=0 & 当k\neq i时\ \ k=1,2,\cdots,n\end{matrix}$$

这里 E_{ij} 中的 $i, j = 1,2,\cdots,n$，故 $B=\begin{bmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{bmatrix}$ 即主对角元相等, 其它元素全为零, 即 B=KI 为数量矩阵。

例 5　已知 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 求 A^{-1}。

解法 1　$\because |A| = 1 \neq 0$ 用伴随矩阵法

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1,\ A_{12}=A_{13}=A_{14}=0$$

$$A_{21}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1 \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1 \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad A_{24}=0$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1 \quad A_{33}=1 \quad A_{34}=0$$

$$A_{41}=0 \qquad A_{42}=0 \qquad A_{43}=-1 \qquad A_{44}=1$$

取 $$A^{-1}=\frac{A*}{|A|}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解法(2)　初等行变换法

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-r_4]{\substack{r_1-r_2 \\ r_2-r_3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

解法(3)　用定义

$$设\quad B=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix} \quad 且BA=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$解\quad \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$得\quad \begin{cases} x_{11}=1 \\ x_{21}=0 \\ x_{31}=0 \\ x_{41}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11}+x_{12}=0 \\ x_{21}+x_{22}=1 \\ x_{31}+x_{32}=0 \\ x_{41}+x_{42}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=0 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=0 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=1 \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=0 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=0 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=0 \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{11}=1 \\ x_{2`}=0 \\ x_{31}=0 \\ x_{21}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{12}=-1 \\ x_{22}=1 \\ x_{32}=0 \\ x_{42}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{13}=0 \\ x_{23}=-1 \\ x_{33}=1 \\ x_{43}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{14}=0 \\ x_{24}=0 \\ x_{34}=-1 \\ x_{44}=1 \end{cases}$$

$$故\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

解法(4)　分块法

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$ 且 $|A_1|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$, A 可逆, 由三角块求逆法。

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1}-A_1^{-1}A_2A_1^{-1} \\ 0 \qquad\qquad A_1^{-1} \end{bmatrix}$$

其中 $A_1^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，　$A_1^{-1}A_2A_1^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

故 $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

这里展现 4 种不同方法求逆,其中法 1 采用了基本公式。而法 3 采用解方程组的方法,计算量较大,所以适用计算机求解,手算时一般不用此方法。法 2 是计算数字行列式手算求逆的常用的方法,应熟练掌握。方法 4 对高阶矩阵求逆不失是一种有效的降价求逆法。

例 6　已知 k 阶矩阵 A 满足 $A^2+2A-3I=0$

(1)证明: A 可逆并求 A^{-1}

(2)求证(A+4I)可逆,并求其逆

(3)问 A+nI(n 是整数)是否可逆,若可逆求其逆。

解:对于矩阵多项式 f(A)求逆常用寻找 f(B),使 f(A)f(B)=I,则二者均可逆,且 f(A)与 f(B)互为逆矩阵。

(1) 由 $A^2+2A-3I=0$ 得 $A(A+2I)=3I$, 故 $A^{-1}=\frac{1}{3}(A+2I)$.

(2) $\because A^2+2A-3I=0\Rightarrow(A+4I)(A-2I)+8I-3I=0$, 即 $(A+4I)(A-2I)=-5I$. $\therefore(A+4I)^{-1}=\frac{1}{-5}(A-2I)$.

(3)按上方法, $A^2+2A-3I=(A+nI)(A-(n-2)I)+n(n-2)I-3I=0$.

$\therefore(A+nI)(A-(n-2)I)=(n+1)(3-n)I$.

故当 $n\neq-1,n\neq3$时 $A+nI$ 可逆且 $(A+nI)^{-1}=\frac{\left[A-(n-2)I\right]}{(3-n)(n+1)}$,

当 $n=3$时, $(A+3I)(A-I)=A^2+2A-3I=0$,

若 $A-I=0$ 即$A=I$, 则 $A+3I=4I,(A+3I)^{-1}=\frac{1}{4}I$.

若 $A-I\neq0$时,上式$(A+3I)(A-I)=0$, 相当于(A+3I)X=0 有非零解。由齐次线性方程组有非零件的充要条件知有$|A+3I|=0$ ∴A+3I 不可逆。

同理当 n=-1 时, n-2=-3 , ∴(A-I)(A+3I)=0. 若 A+3I=0 , A=-3I , A-I=-4I, $(A-I)^{-1}=-\frac{1}{4}I$.

若 $A+3I\neq0$, 而 $(A-I)(A+3I)=0$相当于$(A-I)=0$ 有非零件, 则 $|A-I|=0,\therefore$ A-I 不可逆。解毕。

分析: 若有 $A_{n\times n}$及$B_{n\times m}\neq0$ 及关系式 AB=0, 可看成齐次线性方程组 $AX_i=0$ 有非零解,其中 $B_{n\times m}=\left[X_1X_2\cdots X_m\right]$, 而由齐次线性方程组有非零件的充要条件, 知 $|A|=0$, 这是用来证明 $|A|=0$的方法之一。

例 7 ： 求 X 使 XA=B, 这里 $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=-\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 0\\ 2 & 6 & 0\end{pmatrix}$

分析： 根据矩阵乘法规则, X 应为 3 阶方阵。若 A 可逆, 则 XA=B 两侧同乘 A^{-1}, 即可得 $X=BA^{-1}$。

解法一：先求 A^{-1},

$$(A,I)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}5 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0\\ -5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & -13 & -9 & 0 & 5 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{\text{行变换}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 7 & 5 & 8\\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 5 & 7 & 5 & 8\\ 0 & 0 & -8 & -13 & -10 & -15\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{9}{8} & -\frac{5}{4} & -\frac{11}{8}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{8} & \frac{5}{4} & \frac{15}{8}\end{array}\right)$$

$$\therefore\ A^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 9 & 10 & 11\\ -13 & -10 & -15\end{pmatrix}$$

$$\text{则 } X=BA^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 0\\ 2 & 6 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 9 & 10 & 11\\ -13 & -10 & -15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$$

注意：这里因为 A 乘 X 右侧, 因此 $X=BA^{-1}$, 而不是 $A^{-1}B$。实际上相当于 XA=B 等式两边同时右乘 A^{-1}。

解法二：XA=B, 则 $X=BA^{-1}$。 A^{-1} 可以看成一些初等矩阵之积, 它们右乘 B, 相当于对 B 进行列变换。而这些初等矩阵右乘 A, 即得 I, 即对 A 和 B 施行同样的列初等变换, 把 A 变为 I 时, 即把 B 变为 $X=BA^{-1}$。

$$\text{因此}\quad\begin{pmatrix}A\\ \cdots\\ B\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{列初等变换}}\begin{pmatrix}I\\ \cdots\cdots\\ BA^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I\\ \cdots\\ X\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \\ -8 & 0 & 0 \\ -5 & -3 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & -3 & -11 \\ -9 & 2 & 10 \\ -8 & 0 & 8 \\ -5 & -3 & 5 \\ -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \\ -8 & 0 & 8 \\ -14 & -3 & 17 \\ -20 & -6 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 8 \\ -8 & 8 & 24 \\ -14 & 17 & 48 \\ -20 & 26 & 72 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \therefore X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

例 8： 设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$,求 X 使 AX=2X+B。

解法一： AX=2X+B,则(A-2I)X=B

若 A-2I 可逆,则 $X = (A-2I)^{-1}B$

先求 $(A-2I)^{-1}$,因为 $A-2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 为准对角矩阵,则只需求 $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆。

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{行变}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (说明:对二阶方阵用伴随陈求逆也很方便)

$$\therefore (A-2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

解法二： $X = (A-2I)^{-1}B$,因为 $(A-2I)^{-1}$ 相当于一些初等阵之积,它们右乘 B,相当于对 B 进行行初等变换。因此

$(A-2I,B)\xrightarrow{\text{行初等变换}}(I,X)$。

$$\begin{pmatrix}1&0&0&3&6\\0&-1&-1&1&1\\0&1&2&2&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&6\\0&1&1&-1&-1\\0&0&1&3&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&3&6\\0&1&0&-4&1\\0&0&1&3&2\end{pmatrix}$$

$\therefore\ x=\begin{pmatrix}3&6\\-4&1\\3&2\end{pmatrix}$。

例 9 设 $A=\begin{bmatrix}a_n a_{12}\cdots a_{1n}\\ \quad a_{22}\cdots a_{2n}\\ \qquad\ddots a_{nn}\end{bmatrix}$为上(下)三角矩阵,(1)讨论 A 可逆的充要条件,(2)证明 A 可逆时 A^{-1}也是上(下)三角形。

解(1) 由方阵 A 可逆的充要条件是$|A|\neq 0$, 而$|A|=\prod\limits_{i=1}^{n}a_{ii}\qquad(i=1,2,\cdots,n)$

所以要 A 可逆充分必要件是$a_{ii}\neq 0\quad(i=1,2,\cdots,n)$

(2)解法一

要证明一个上(下)三角矩阵的逆是上(下)三角形,只要证明它的伴随矩阵也是上(下)三角形就可以了。

从 $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\cdots&a_{1n}\\ &a_{22}\cdots&a_{2n}\\ &\ddots&a_{ij}\\ &&\ddots a_{nn}\end{bmatrix}$知当$i<j$时,$a_{ij}$代数余子式,$A_{ij}$是上三角行列式,且在去掉$a_{ij}$所在行与列时去掉了$a_{ii}$代替第 i 列主对角线上的元素是$a_{i+1}$ i,此时$a_{i+1\ i}=0$,$\therefore A_{ij}=0$,又 $A^*=\left[A_{ij}\right]^T=\left[A_{ji}\right]$,且$j>i$时,$A_{ji}=0$, $\therefore A^*$也是上(下)三角矩阵。

$\therefore\ A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A*$是上(下)三角矩阵。注意讨论目标是上(下)三角形时只要讨论当$i>j(j>i)$时,元素$a_{ij}=0$,无需讨论$i\leq j$时情况。

解法 2 证明 A^{-1}为上(下)三角,直接用定义设 $A^{-1}=\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}&\cdots&x_{1n}\\x_{21}&x_{22}&\cdots&x_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\x_{n1}&x_{n2}&\cdots&x_{nn}\end{bmatrix}$

满足 $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ & a_{22}\cdots a_{2n} \\ & \ddots a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

得方程组, $\begin{cases} a_{11}x_{11} = 1 \\ a_{11}x_{21} = 0 \\ \vdots \\ a_n x_{n1} = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} a_{12}x_{11} + a_{22}x_{12} = 0 \\ a_{12}x_{21} + a_{22}x_{22} = 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{12}x_{n1} + a_{22}x_{n2} = 0 \end{cases} \cdots \begin{cases} a_{1n}x_{11} + a_{2n}x_{12} + \cdots + a_{nn}x_{1n} = 0 \\ a_{1n}x_{21} + a_{2n}x_{22} + \cdots + a_{nn}x_{2n} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{1n}x_{n1} + a_{2n}x_{n2} + \cdots + a_{nn}x_{nn} = 1 \end{cases}$

注意 $a_{ii} \neq 0, i = 1,2,\cdots,n$, 故有:

$$\begin{cases} x_{11} = a_{11}^{-1} \\ x_{21} = 0 \\ \vdots \\ x_{n1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{12} = \dfrac{-a_{12}a_{11}^{-1}}{a_{22}} \\ x_{22} = a_{22}^{-1} \\ x_{32} = 0 \\ x_{n2} = 0 \end{cases} \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{matrix} \quad \begin{cases} a_{1n}x_n + \cdots a_{nn}x_{1n} = 0 \\ a_{2n}x_{22} + a_{nn}x_{2n} = 0 \\ \ddots \\ a_{nn}x_{nn} = 1 \end{cases}$$

从方程组的情况看出当 $i > j$ 时, x_{ij}=0。因此, A^{-1} 为上三角矩阵。

分析: (1)在证明有关逆矩阵的结论时,常用到 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$

(2)若证明有关逆矩阵的结论时,已知矩阵为特殊矩阵

如对角矩阵,上(下)三角矩阵也常用定义设 $B = \left[x_{ij}\right]$,从 BA=I,解出 x_{ij}。

例 10 设 A 为 n 阶可逆方阵,试证: ①$(-A)^* = (-1)^{n-1}A^*$ ②$(-A)^{-1} = -A^{-1}$

③$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$

证: ① 设 $A = (a_{ij})$ 其中 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij}

则 $|-A| = |-a_{ij}| = (-1)^n |a_{ij}|$ 且 $-a_{ij}$ 的代数余子式为 $(-1)^{n-1}A_{ij}$, 于是

$(-A)^* = ((-1)^{n-1}A_{ij})^T = (-1)^{n-1}(A_{ji}) = (-1)^{n-1}A^*$

②证法 1:由定义。$(-A)\cdot(-A^{-1}) = (-1)A\cdot(-1)A^{-1} = (-1)^2 AA^{-1} = I$

故 $(-A)^{-1} = -A^{-1}$。

证法 2:由公式。

$$(-A)^{-1} = \frac{(-A)^*}{|-A|} = \frac{(-1)^{n-1}A^*}{(-1)^n|A|} = -\frac{A^*}{|A|} = -A^{-1}$$

③当 A 可逆时, $A^* = |A|A^{-1}$

故 $(A^*)^* = (|A|A^{-1})^* = \left||A|\cdot A^{-1}\right|\cdot(|A|A^{-1})^{-1} = |A|^n\cdot|A^{-1}|\cdot\dfrac{1}{|A|}(A^{-1})^{-1}$

$$=|A|^n \frac{1}{|A|^2} \cdot A = |A|^{n-2} \cdot A$$

说明：这里几个等试证明中用到了以下结论：

（1） $|k \cdot B| = k^n \cdot |B|$

（2） $(k \cdot B)^{-1} = k^{-1}B^{-1}$

（3） $|B^{-1}| = |B|^{-1}$。

③也可有如下解法：

$AA^* = |A| \cdot I$ 　设$A^* = B$，则$B^*B = |B|I$

由 $AA^* = |A|I$，有$|A| \cdot |A^*| = ||A| \cdot I| = |A|^n$

$\because$ A 可逆，$\therefore |A| \neq 0$，$\therefore |A^*| = |A|^{n-1}$，即$|B| = |A|^{n-1} \neq 0$

即 $B^*B = |A|^{n-1}I$，$\therefore B^* = |A|^{n-1} \cdot B^{-1}$

而 $B^{-1} = (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}(\because AA^* = |A| \cdot I, \therefore \frac{1}{|A|}A \cdot A^* = I)$

$\therefore B^* = |A|^{n-1} \cdot \frac{1}{|A|}A = |A|^{n-2}A$

即 $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$。

例 11：　已知 A 为三角块矩阵，$A = (a_{ij})_{(m+n)\times(m+n)} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix}$

其中 B 为 $m \times m$ 可逆矩阵，C 为 $n \times n$ 可逆矩阵。

求证：　A 可逆　并求 A^{-1}。

解：　$\because |A| = (-1)^{mn}\ |B||C|$，而$|B| \neq 0, |C| \neq 0$，故$|A| \neq 0$即 A 可逆。

下面用两种方法求 A^{-1}。

方法 1　设　$A^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$满足

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} Z_{12}C = I_n & \quad Z_{11}B + Z_{12}D = 0 \\ Z_{22}C = 0 & \quad Z_{21}B + Z_{22}D = I_n \end{matrix}$$

故 $Z_{12} = C^{-1}, Z_{22} = 0 \cdot C^{-1} = 0, Z_{21} = B^{-1}$，$Z_{11} = -C^{-1}DB^{-1}$　　即　$A^{-1} = \begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$

方法 2　利用初等行变换法

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 0 & B & I_m & 0 \\ C & D & 0 & I_n \end{array}\right] \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \left[\begin{array}{cc:cc} C & D & 0 & I_n \\ 0 & B & I_m & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{C^{-1}\text{左乘}①} \left[\begin{array}{cc:cc} I_n & C^{-1}D & 0 & C^{-1} \\ 0 & I_m & B^{-1} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[*]{①+②\cdot(-)C^{-1}D}\begin{bmatrix} I_n & 0 & -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ 0 & I_m & B^{-1} & 0 \end{bmatrix}，故A^{-1}=\begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}。$$

注意：(*)处 $C^{-1}D$ 是左乘第 2 行的每一块。因为 $C^{-1}D$ 是 $n\times m$ 阶矩阵，而 I_m 和 B^{-1} 为 m 阶，则右乘无法进行。

第三章　n维向量和线性方程组

一、基本要求:

(一)n维向量:

1. 理解n维向量概念,掌握向量的加法和数乘运算法则。

2. 理解向量组线性相关,线性无关的概念,掌握向量组线性相关,线性无关的有关性质和判定方法。

3. 了解向量的线性组合的概念,能够正确地判断一个向量能否用给定向量组线性表示。

4. 理解向量组的极大线性无关和向量组的秩的概念,会求向量的极大线性无关组及秩。

5. 了解向量组等阶的概念,了解向量组的秩及矩阵的秩的关系,掌握用初等变换求矩阵秩的方法。

(二)线性方程组

1. 理解克莱姆法则

2. 理解齐次线性方程组有非零解的充分必要条件及非齐次线性方程组有解的充分必要条件。

3. 理解齐次线性方程组的基础解系,通解的概念,会求齐次线性方程组的基础解系,明确它的全部解是如何构成的。

4. 理解非齐次线性方程组解的结构及通解的概念。

5. 掌握用初等行变换求线性方程组通解的方法。

二、主要内容

(一) n维向量

1. 向量的概念和运算

(1)向量的概念

由n个数$a_1,a_2,\cdots,a_n$构成的一个有序数组$(a_1,a_2,\cdots,a_n)$称为一个n维向量。

(2)向量的相等

两个n维向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots b_n)$当且仅当$a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$时,称两向量相等。

(3) 向量的数乘运算　　$k(a_1,a_2,\cdots a_n)=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$

(4)向量的加法和减法

$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\pm(b_1,b_2,\cdots,b_n)=(a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,\cdots,a_n\pm b_n)$

注意: 只有维数相同的向量,才能进行比较,才能施行运算。

2. 向量的线性相关性

(1)线性相关、线性无关的概念

线性相关：m 个 n 维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$，若存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

成立,则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关。

线性无关：向量组 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 不是线性相关，就称为线性无关。即只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$ 时才有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

成立。

(2)线性相关、线性无关的性质

1° n 维单位向量组必线性无关;

2° 含有零向量的向量组必线性相关,线性无关的向量组必不含零向量;

3° 两个向量线性相关的充要条件是对应分量成比例;

4° 多于 n 个的 n 维向量组必线性相关;

5° 如果向量组中一部分向量所组成向量组线性相关,那么整个向量组线性相关;如果整个向量组线性无关,那么由它的部分向量构成的向量组也线性无关;

6° 设有两个向量组

$$\begin{array}{lcl}
\alpha_1=(a_{11},a_{12},\cdots a_{1r}) & & \beta_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1r},a_{1r+1}) \\
\alpha_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2r}) & \text{与} & \beta_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2r},a_{2r+1}) \\
\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots & & \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\
\alpha_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mr}) & & \beta_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mr},a_{mr+1})
\end{array}$$

若 r 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关,则 r+1 维向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$也线性无关;若 r+1 维向组量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性相关,则 r 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$也线性相关。

(3)线性相关,线性无关的判定

1° 设 $\alpha_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$，$\alpha_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})$，$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$，$\alpha_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})$，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关的充要条件是齐次线性方程组

$$\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0 \\
a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots a_{m2}x_m=0 \\
\cdots\cdots \quad \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\
a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0
\end{cases}$$

有非零解。

2° 当 m=n 时,向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关的充要条件是行列式

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\
a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}=0$$

3. 向量的线性表出

(1)线性组合,线性表出的概念

线性组合:若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是 m 个 n 维向量,$k_1,k_2,\cdots,k_m$是数域 P 中 m 个数,则向量

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

称为这 m 个向量的线性组合;

线性表出:若向量β能表成向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的线性组合,就说向量$\beta$能被向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出,记作

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m。$$

(2)线性表出的性质

1° 若向量组$\beta_1,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关,而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关,则向量$\beta$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出,且表达式唯一。

2° 任何一个 n 维向量,可由 n 维单位向量组线性表示;

3° n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ $(m\geq 2)$线性相关的充要条件是在$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中,至少有一个向量可由其余 m-1 个向量线性表出。

(3)线性表出的判定

设 $\alpha_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$

$\alpha_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})$

… … … … …

$\alpha_m=(a_{m1},a_{m2},\cdots,a_{mn})$

$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

n 维向量β可以被 n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表出的充要条件是 m 元线性方程组。

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=b_1\\a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{m2}x_m=b_2\\\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=b_n\end{cases}$$

有解。

4. 两个向量组之间的关系

(1)概念

向量组表出:若 n 维向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$中任何一个向量都由 n 维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出,则称向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出。

向量组等价:若 n 维向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由 n 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出,且向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$也可由向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表出,则称这两个向量组可以相互线性表出,或称这两个向量组等价。

(2)性质

1° 若向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出,且$s<t$,则向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性相关。

2° 若 n 维向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 可由 n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出，且 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 线性无关,则 $s \geq t$。

3° 等价的线性无关的向量组,所含向量个数相同。

5.向量组的极大无关组

(1)概念

向量组的极大无关组：设向量组的一个部分向量组,若此部分向量组线性无关,且取向量组中除部分向量组以外(如果还有的话)的任意向量,添加到此部分向量组中,所得的新的部分向量组都是线性相关的,则称此部分向量组为向量组的一个极大线性无关组。

(2)性质

1° 向量组的极大线性无关组与原向量组等价;

2° 向量组的极大线性无关组不一定是唯一的,但所包含的向量个数是确定的;

3° 向量组的任一线性无关组的部分组都可以扩充成一个极大无关组。

6. 向量组的秩

(1)概念

向量组的秩：向量组的极大无关组所包含的向量个数,称为向量组的秩。

(2)性质

等价的向量组有相同的秩。

7. 矩阵的秩

(1)矩阵的行秩、列秩、矩阵的秩

矩阵的行秩：矩阵 A 的行向量组的秩,称为矩阵 A 的行秩;

矩阵的列秩：矩阵 A 的列向量组的秩,称为矩阵 A 的列秩;

矩阵的秩：矩阵 A 中不为零的子式最高阶数,称为矩阵 A 的秩,记 r(A)。

(2)性质

1° 矩阵的三秩相等,即矩阵的行秩、列秩、矩阵的秩均相等

2° 初等变换不改变矩阵的秩

3° $r(A)=r(A^T)$

$$r(kA)=\begin{cases} r(A) & k\neq 0 \\ 0 & k=0 \end{cases};$$

$r(A+B)\leq r(A)+r(B)$;

$r(AB)\leq \min[r(A),r(B)]$;

$r(AB)\geq r(A)+r(B)-k$,

其中 k 是 A 的列数或 B 的行数。

(3)求矩阵秩的方法

1° 直接找出矩阵 A 中不为零的最高阶子式;

2° 求矩阵 A 的行秩或列秩;

3° 用初等变换将矩阵 A 化为阶梯形矩阵。

（二） 线性方程组

1. 线性方程组的一般形式

（1） 线性方程组的一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \tag{1}$$

齐次线性方程组的一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases} \tag{2}$$

方程组(2)称为方程组(1)的导出组

(2) 线性方程组的矩阵形式

AX=B

其中 $A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}$ $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

式(1)的增广矩阵

$$\overline{A}=(A\vdots B)=\begin{bmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} & \vdots b_1 \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} & \vdots b_2 \\ \cdots\cdots\ \cdots & \vdots\cdots \\ a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mn} & \vdots b_m \end{bmatrix}$$

(3) 线性方程组的向量形式

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=\beta$$

其中 $\beta=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ $\alpha_j=\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$ $(j=1,2,\cdots n)$

2. 线性方程组有解的判别定理

(1) 克莱姆法则

当式(1),n=m 时,即含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组,其系数行列式 $D=|A|=|a_{ij}|\neq 0$ 时,有且仅有唯一解 $x_j=\dfrac{D_j}{D}$ $(j=1,2,\cdots n)$ 其中 D_j 是将系数行列式中第

j 列元素$a_{1j},a_{2j,\ldots},a_{nj}$对应地换为方程组的常数项$b_1,b_2,\cdots b_n$后得到的行列式.
(2) 齐次线性方程组
当 r(A)=r=n 时,式(2)有唯一解，即零解。
当 r(A)=r<n 时,式(2)有无穷多解，因此有非零解。
(3) 线性非齐次方程组
当$r(A)<r(\overline{A})$时,式(1)无解。 当$r(A)=r(\overline{A})=n$时,式(1)有唯一解。
当$r(A)=r(\overline{A})$=r<n 时,式(1)有无穷多解。
3. 线性方程组解的结构
(1) 基础解系
基础解系: 若$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r}$是 AX=0 的解,满足: (1)$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r}$线性无关,(2)任何 AX=0 的解向量均可由$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n$线性表出， 则向量组$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r}$称为 AX=0 的基础解系.
(2) 方程组 AX=B 及导出组 AX=0 的解性质
1° 设ξ_1,ξ_2是 AX=0 的两个解,则$k\xi_1,\xi_1+\xi_2,k_1\xi_1+k_2\xi_2$仍是 AX=0 的解;
2° 设η^*是 AX=B 的一个特解,ξ是导出组 AX=0 的解,则$k\xi+\eta^*$仍是 AX=B 的解.
3° 设η_1,η_2是 AX=B 的解,则$\eta_1-\eta_2$是其导出组 AX=0 的解.
(3) 齐次线性方程组 AX=0 的基础解系存在定理.
如果齐次线性方程组 AX=0 的系数矩阵 A 的秩 r(A)=r<n,那么方程组 AX=0 的基础解系存在,且每个基础解系中,恰含 n-r 个解.
(4) 基础解系的求法
第一步: 对系数矩阵 A 施行初等行变换,求出 A 的秩 r。
第二步: 由上述初等变换的结果,写出与原方程组同解方程组,并且确定自由未知量.
第三步:对 n-r 个自由未知量取值,得 n-r 个 n-r 维单位向量依次将 n-r 个单位向量代入同解方程组,得由 n-r 个解组成的基础解系.
(5) 齐次线性方程组解的结构
若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是齐次线性方程组 AX=0 的一个基础解系,则 AX=0 的全部解(通解)是

$$X=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots k_{n-r}\xi_{n-r}$$

其中$k_1,k_2,\cdots k_{n-r}$是 n-r 个任意常数.
(6) 非齐次线性方程组解的结构
若η^*是非齐次线性方程组AX=B的一个特解,而$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r}$是其导出组AX=0一个基础解系,则 AX=B 的全部解(通解)是

$$X=\eta^*+k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$$

其中$k_1,k_2,\cdots k_{n-r}$是 n-r 个任意常数.

三 内容理解及疑难解释

1. n 维向量
为什么要引入 n 维向量呢?因为 n 维向量是实际问题的一种数学抽象表示,它去掉了各种不同对象的具体区别,保留它们在数量上的共同点,具有广泛的代表性,它是线性代数里一个基本概念,不仅可以代表线性方程而且也可以表示方程组的解,所以引入 n 维向量对处

理问题有极大方便,是讨论线性方程组的准备知识和有力工具.

2. 线性相关和线性无关

向量组的线性相关和线性无关是向量间的一种线性关系,通常称为向量的线性相关性,要注意的是：构成向量组的所有向量都是同维的.比如,若给出一个线性方程组,当用向量表示每个方程后,即相应的给出一组向量,于是讨论方程之间的关系就可转化为讨论向量间的线性关系.如果向量组线性相关则表明方程组内有多余的方程;如果线性无关则表明方程组内没有多余的方程;向量间的这种线性关系只有上述两种,即要么线性相关,要么线性无关.因此,研究向量组的线性相关和线性无关,将是讨论线性方程组的基础.

3. 向量组的秩

向量组的秩与向量的线性相关性有密切联系,它表明向量组中极大无关组所含向量的个数.即在向量组中找出其中极大的线性无关组,这个极大无关组含的向量个数称为向量组的秩.比如,在讨论线性方程组时,向量组的秩就表明方程组内有多少个独立的方程,或者说确定出有多少个方程不是多余的方程,我们就仅需考虑求解线性方程组内独立的方程构成的新方程组,从而可以把多余的方程删去,这就大大简化了方程组的讨论.

4. 有解判别定理

线性方程组有解判别定理是一个基本定理,它直接通过系数矩阵与增广矩阵的秩相等或不相等,去判断方程组的解情况,尽管克莱姆法则在一定程度上给出了线性方程组有解的一个判断方法,但有一定的局限性.有解判别定理不仅克服了这个局限性,而且对任何线性方程组都适用.不管方程个数是否与未知量个数相等,也不管系数行列式是否不为零都可以用它作判断,因此,线性方程组的有解判别定理在理论上很重要.

5. 方程组解的结构

线性方程组的解有三种情况：唯一解、无解、无穷多组解.问题在于,线性方程组有无穷多组解的情况之下,这些解之间有什么关系,这就是所谓解的结构问题.在解的结构中,基础解系起了很大作用.齐次线性方程组 AX=0 的全部解可以用它的一个基础解系的线性组合表示出来.,设 $\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_{n-r}$ 是它的一个基础解系,那末它的全部解为 $\xi=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}$.非齐次线性方程组 AX=B 的全部解 X 可以用它的一个特解 η^* 与它的导出组 AX=0 的全部解 ξ 之和表示,即 $X=\eta^*+\xi$.可见,基础解系是线性方程组的解的基础,也就是说凡要求出方程组的全部解,必须找出它的一个基础解系.

四 例题分析

（一）、n 维向量空间

1. 填充与选择题

例 1 填空

(1) 设 $\alpha_1=(1,1,1),\ \alpha_2=(1,2,3),\ \alpha_3=(1,3,t)$,则当 t=__________时,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关；t=__________时,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；

(2) 向量 α 线性无关的充分必要条件是____________________.

(3) 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,若 $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_2+\alpha_3$, $\lambda\alpha_1+\alpha_3$ 线性无关,则 λ=__________________________.

(4) 设 A 为 4 阶方阵,且 $r(A)=2$, 则 $r(A^*)=$____________________.

(5) 设 A 为 5 阶方阵,r(A)=r, 且 r(AB)=0,则 r(B)取值范围是__________________.

答:(1) t=5, $t\neq 5$； (2) $\alpha\neq 0$； (3) $\lambda\neq -1$； (4) 0;

(5) [0, 5-r]中整数

解:(1) 三维向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关的充分必要条件是$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{vmatrix} = t-5 \neq 0$, 即 t=5 时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关; $t \neq 5$时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关.

(2) 由线性无关的定义知, 使方程$k\alpha = 0$仅有零解 k=0 的充要条件是$\alpha \neq 0$.

(3) 若向量$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关, 则$\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_2+\alpha_3$, $\lambda\alpha_1+\alpha_3$线性无关的充分条件是它们之间的转换矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = \lambda + 1 \neq 0,\ 即有\lambda \neq -1$$

(4) 由已知条件得 A 的全部代数余子式均为零, 故 r(A^*)=0;

(5) B 的列向量组均可看作为方程组 AX=0 的解向量, 而解向量组的秩最大为 5-r(A), 故有$0 \le r(B) \le 5-r$;

例 2. 选择题(每小题给出的四个选项中, 只有一个正确)

(1) 设任意两个 n 维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$和$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m$, 若存在两组不全为零的数$\lambda_i, k_j$, 使$\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i + k_i)\alpha_i + \sum_{i=1}^{m}(\lambda_i - k_j)\beta_i = 0$, 则有(　　)

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$和$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m$都线性相关.

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$和$\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_m$都线性无关.

(C) $\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \cdots, \alpha_m+\beta_m, \alpha_1-\beta_1, \alpha_2-\beta_2, \cdots, \alpha_m-\beta_m$线性无关.

(D) $\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \cdots, \alpha_m+\beta_m, \alpha_1-\beta_1, \alpha_2-\beta_2, \cdots, \alpha_m-\beta_m$线性相关.

(2) n 维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ $(3 \le s \le n)$线性无关的充要条件是(　　)

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中任意两个向量都线性无关.

(B) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中存在一向量不能用其余向量线性表出.

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$任一个向量都不能用其余向量线性表出.

(D) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$中不含零向量.

(3) 设$\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$, 且$a_i^2 + b_i^2 \neq 0 \quad (i = 1,2,3)$

则三条直线: $a_1x + b_1y + c_1 = 0;\ a_2x_2 + b_2y + c_2 = 0;\ a_3x + b_3y + c_3 = 0$交于一点的充要条件是(　)

(A) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关;　　(B) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关;

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关, α_1, α_2线性无关.　　(D) $r_{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} = r_{(\alpha_1, \alpha_3)}$

(4) 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩为 m,m<n,则(　　)不成立.

(A) 存在 $B_{(n-m)\times n}$,使 $r\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=n$

(B) 存在方阵 $X_m\neq 0$,使 XA=0;

(C) 存在 $Y_{n\times 1}\neq 0$,使 AY=0.

(D) 存在 $C_{n\times(n-m)}$,$r_{(C)}=n-m$,且$AC=0$;

(5) 已知 $Q=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{bmatrix}$,$P$ 为三阶非零阵,且满足 QP=0,则(　　)

$(A)t\neq 6$时,$r(p)=1$　　　　$(B)t\neq 6$时,$r(p)=2$

$(C)t=6$时,$r(p)=1$　　　　$(D)t=6$时,$r(p)=2$

答:(1) D;　　(2) C;　　(3) C　　(4) B　　(5) A

解:(1) 给出的表达式是两向量组相互交叉的线性组合形式,只考虑(C)、(D)两个选择项,将关系式整理得:

$$\lambda_1(\alpha_1+\beta_1)+\lambda_2(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+\lambda_m(\alpha_m+\beta_m)+k_1(\alpha_1-\beta_1)+k_2(\alpha_2-\beta_2)+\cdots+k_m(\alpha_m-\beta_m)=0$$

且组合系数不全为零,故取(D)

(2) 由部分向量组的线性无关性不能得出整个向量组的线性无关性,线性无关向量组中任何一个向量均不能被其余向量线性表示,故(C)正确.

(3) 三直线相交于一点,即联立线性方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=-c_1\\a_2x+b_2y=-c_2\\a_3x+b_3y=-c_3\end{cases}$$ 有唯一解

即 $r\left(\begin{bmatrix}a_1&b_1&-c_1\\a_2&b_2&-c_2\\a_3&b_3&-c_3\end{bmatrix}\right)=r\left(\begin{bmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\\c_3&b_3\end{bmatrix}\right)=2$,从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关, α_1,α_2 线性无关,取(C);

(4) 由已知 A 的 m 个向量组线性无关,且 m<n,则可以扩充 n-m 个无关向量 n 维空间一个极大无关组,即存在 $B_{(n-m)\times n}$,使$r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=n$,若考虑方程组 $A^TX^T=0$,由$r(A^T)=m$,则方程组仅有零解,即应有 $X_m=0$ 故(B)不正确.又 AY=0 为 n 元线性方程组,r(A)<n,存在非零解 $Y_{n\times 1}$,(C)正确,同理,AX=0,有 n-m 个无关解 $\eta_1,\cdots\eta_2,\cdots,\eta_{n-m}$,取 $C=(\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_{n-m})$ 即为所求,(D)正确.

(5) 当 t=6 时,r(Q)=1,则 r(p) 可能为 1,也可能为 2,当 $t\neq 6$时,$r_{(Q)}=2$,则$r_{(p)}=3-2=1$ 故取(C).

2. 计算题

例 3. 已知$\alpha_1=(1,\ 2,\ -1),\ \alpha_2=(2,\ 5,\ 3),\ \alpha_3=(1,\ 3,\ 4)$求$\beta=4\alpha_3+(3\alpha_1-2\alpha_2)$

解: $3\alpha_1=3(1,\ 2,-1)=(3,\ 6,\ -3)$

$2\alpha_2=2(2,\ 5,\ 3)=(4,\ 10,6)$

$3\alpha_1-2\alpha_2=(-1,\ -4,\ -9)$

$4\alpha_3=4(1,\ 3,\ 4)=(4,\ 12,\ 16)$

$\beta=4\alpha_3+(3\alpha_1-2\alpha_2)=(4,\ 12,\ 16)+(-1,\ -4\ -9)=(3,\ 8,\ 7)$

例 4. 已知$\alpha_1=(5,\ -1,\ 3,\ 2),\ 3\alpha_1-4\alpha_2=(3,\ -7,\ 17,\ -2)$ 试求$2\alpha_1+3\alpha_2$

分析:求向量运算题,只要借助于向量运算法则就行。

解:先求出α_2, 设$\beta=3\alpha_1-4\alpha_2$, 则 $\alpha_2=\dfrac{1}{4}(3\alpha_1-\beta)$

$$=\frac{3}{4}\alpha_1-\frac{1}{4}\beta=\frac{3}{4}(5,-1,3,2)-\frac{1}{4}(3,-1,17,-2)=(3,1,-2,2)$$

$$2\alpha_1+3\alpha_2=2(5,-1,3,20+3(3,1,-2,2)=(19,1,0,8)$$

例 5. 判断$\alpha_1=(1,\ 2\ 3),\ \alpha_2=(3,\ 2,\ 1),\ \alpha_3=(1,\ 3,\ 1)$是否线性相关.

分析:研究向量组$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$的线性相关的问题,由定义可知,就是考察是否存在 m 个不全为零的数$k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_m$,使线性组合.

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

即;
$$\begin{cases}a_{11}k_1+\alpha_{21}k_2+\cdots+\alpha_{m1}k_m=0\\ a_{12}k_1+\alpha_{22}k_2+\cdots+\alpha_{m2}k_m=0\\ \cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\ \alpha_{1n}k_1+\alpha_{2n}k_2+\cdots\alpha_{mn}k_m=0\end{cases}\tag{3}$$

因此,向量组$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$是否线性相关,等价于齐次线性方程组(3)是否有非零解.若方程组(3)有非零解,则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关,若方程组(3)只有零解,则$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$线性无关.因此研究向量间是否线性相关问题,实质上就是研究齐次线性方程组(3)有没有零解问题.

解法一 设存在一组数k_1,k_2,k_3,使$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$,

即 $k_1(1,2,3)+k_2(3,2,1)+k_3(1,3,1)=(0,0,0)$,

亦即$(k_1+3k_2+k_3,2k_1+2k_2+3k_3,3k_1+k_2+k_3)=(0,0,0)$,

$$\begin{cases}k_1+3k_2+k_3=0\\ 2k_1+2k_2+3k_2=0\\ 3k_1+k_2+k_3=0\end{cases}$$

系数矩阵$\begin{bmatrix}1&3&1\\2&2&3\\3&1&1\end{bmatrix}=A$,可以通过初等行变换求得 r(A)=3,则此齐次线性方程组只有零解,故$\alpha_{1,}\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

解法二　由向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的分量组成的行列式$\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=16\neq 0$

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

注 1：解法一具有一般性，解法二仅当向量个数等于向量的维数时，才能应用.

例 6 已知$\alpha_1=(1,1,1,1),\alpha_2=(1,1,-1,-1),\alpha_3=(1,-1,1,-1),\alpha_4=(1,-1,-1,1),\beta=(1,2,1,1)$试将$\beta$表示为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$和$\alpha_4$的线性组合.

分析：研究某一向量β能否用向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的线性表示，考察是否有 m 个数$k_1,k_2,\cdots k_m$使得$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$成立.

即$\begin{cases}a_{11}k_1+\alpha_{21}k_2+\cdots+a_{m1}k_m=b_1\\ a_{12}k_1+\alpha_{22}k_2+\cdots+\alpha_{m2}k_m=b_2\\ \cdots\qquad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \alpha_{1n}k_1+\alpha_{2n}k_2+\cdots\alpha_{mn}k_m=b_n\end{cases}$　　(4)

因此：向量β能否用向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$线性表示，等价于非齐次线性方程组(4)是否有解. 若方程组(4)有唯一解，则β能用$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$唯一的线性表示. 若方程组(4)有无穷多解，则$\beta$能用$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$线性表示，但表示法不唯一. 若方程组(4)无解，则β能用$\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_m$线性表示.

解 设$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4$，即

$$(1,2,1,1)=k_1(1,1,1,1)+k_2(1,1,-1,-1)+k_3(1,-1,1,-1)+k_4(1,-1,-1,1)$$

即$\begin{cases}k_1+k_2+k_3+k_4=1\\ k_1+k_2-k_3-k_4=2\\ k_1-k_2+k_3-k_4=1\\ k_1-k_2-k_3+k_4=1\end{cases}$

解得$k_1=\dfrac{5}{4},k_2=\dfrac{1}{4},k_3=k_4=-\dfrac{1}{4}$，

即　$\beta=\dfrac{5}{4}\alpha_1+\dfrac{1}{4}\alpha_2-\dfrac{1}{4}\alpha_3-\dfrac{1}{4}\alpha_4$。

例 7 已知$\alpha_1=(1,2,3),\alpha_2=(3,-1,2),\alpha_3=(2,3,a)$，试问

(1)当a为何值时$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关?

(2)当a取何值时$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关，并将$\alpha_3$表为$\alpha_1,\alpha_2$，的线性组合.

解：此题借助于例 5，例 6 分析

设 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$

当k_1,k_2,k_3只有零解时，$\alpha_1,\alpha_2\alpha_3$线性无关；当$k_1,k_2,k_3$有非零解时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关. 于是

$$\begin{cases} k_1+3k_2+2k_3=0 \\ 2k_1-k_2+3k_3=0 \\ 3k_1+2k_2+ak_3=0 \end{cases}$$

系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & a-5 \end{vmatrix}=-7(a-5)$$

(1) 当 D=-7(a-5)≠0 时,方程组只有零解,因此当a≠5 时, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

(2) 当 D=-7(a-5)=0 时,方程组有非零解,因此当a=5 时, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关.

设 $\alpha_3=k'_1\alpha_1+k'_2\alpha_2$

则 (3, 2, 5)=($k'_1+3k'_2, 2k'_1-k'_2, 3k'_1+2k'_2$)

即: $\begin{cases} k'_1+3k'_2=3 \\ 2k'_1-k'_2=2 \\ 3k'_1+2k'_2=5 \end{cases}$

可解出 $k'_1=\dfrac{11}{7}$, $k'_2=\dfrac{1}{7}$, 于是$\alpha_3=\dfrac{11}{7}\alpha_1+\dfrac{1}{7}\alpha_2$

例 8 $\alpha_1=(1,0,2,3)^T,\alpha_2=(1,1,3,5)^T,\alpha_3=(1,-1,a+2,1)^T,\alpha_4=(1,2,4,a+8)^T$,
$\beta=(1,1,b+3,5)^T$.问

(1) a, b 为何值时, β不能表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的线性组合;

(2) a, b 为何值时, β可以由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表示,且表示法唯一.

解: 如例 6 分析,上述问题等价于$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4\alpha_4$是否有解,即

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ b+3 \\ 5 \end{bmatrix}$$ 是否有解,因为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 4 & b+3 \\ 3 & 5 & 1 & a+8 & 5 \end{bmatrix}\xrightarrow[-2r_1+r_3]{-3r_1+r_3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a & 2 & b+1 \\ 0 & 2 & -2 & a+5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-r_2+r_3]{2r_2+r_4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $kr_i + r_j$ 表示矩阵第 i 行乘以 k 加到第 j 行.

因此，当 a=−1，b=0 时，方程组有无穷多解，β可以表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合.

当 a =−1，b=0 时，方程组有无穷多解，此时 β可以表示成$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合，但表示法不唯一.

当$a\neq -1$时，β 可以唯一地表示成

$$\beta = -\frac{2b}{a+1}\alpha_1 + \frac{a+b+1}{a+1}\alpha_2 + \frac{b}{a+b}\alpha_3 + 0\cdot\alpha_4$$

例 9 设 $\alpha_1 = (1,-1,2,4),\alpha_2 = (3,0,7,4),\alpha_3 = (0,3,1,2)\alpha_4 = (1,-1,2,0),\alpha_5 = (2,1,5,6)$，求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的秩及一个极大无关组，并将其余向量用极大无关组线性表出.

分析，一般求向量组的极大无关组及秩，(1)必须以所给向量为列构造矩阵，(2)必须对矩阵施以初等行变换(禁用列变换)化为阶梯形矩阵.

解：所给向量为列构造矩阵，并进行初等到变换.

$$[\alpha_1{}^T,\alpha_2{}^T,\alpha_3{}^T,\alpha_4{}^T,\alpha_5{}^T] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{(-2)\times r_1 + r_3 \\ (-4)\times r_1 + r_4}]{r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}\times r_4]{\frac{1}{3}\times r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[4\times r_2 + r_4]{(-1)\times r_2 + r_3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ 的一个极大无关组，向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$的秩为 3.

若$\alpha_4 = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3$，则由上述的初等行变换得：

$$\begin{cases} k_1 + 3k_2 = 1 \\ k_2 + k_3 = 0 \\ 5k_3 = -2 \end{cases} \quad \text{从而} \begin{cases} k_1 = -\dfrac{1}{5} \\ k_2 = \dfrac{2}{5} \\ k_3 = -\dfrac{2}{5} \end{cases} \quad \text{即} \alpha_4 = -\frac{1}{5}\alpha_1 + \frac{2}{5}\alpha_2 - \frac{2}{5}\alpha_3$$

若$\alpha_5 = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$，则由上述的初等行变换得：

$$\begin{cases} k_1+3k_2=2 \\ k_2+k_3=1 \\ 5k_3=3 \end{cases} \quad \text{从而} \begin{cases} k_1=\dfrac{4}{5} \\ k_2=\dfrac{2}{5} \\ k_3=\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

即 $\alpha_5=\frac{4}{5}\alpha_1+\frac{2}{5}\alpha_2+\frac{3}{5}\alpha_3$

例 10 设

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 10 \\ 1 & 3 & 4 & 9 & 13 \\ 1 & 4 & 5 & 11 & 16 \end{bmatrix},$$

求 A 的秩

分析, 一般求矩阵的秩可以通过两个方法来求.

方法 1. 直接用行列式求矩阵的秩, 即找出矩阵中最高不为零子式的阶数.

方法 2. 利用初等变换来求矩阵的秩.

采用方法 1 与方法 2 一般根据矩阵阶数来定, 对于较高矩阵利用初等变换较为方便.

解 方法一: A 有一个二阶子式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\neq 0,$ 而所有包含 D 的三阶子式为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}=0, \quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix}=0, \quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 10 \\ 1 & 3 & 13 \end{vmatrix}=0,$$

$$D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0. \quad D_5=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 11 \end{vmatrix}=0, \quad D_6=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 10 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}=0.$$

因此秩 A=2

方法 2

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 10 \\ 1 & 3 & 4 & 9 & 13 \\ 1 & 4 & 5 & 11 & 16 \end{bmatrix} \frac{(-1)\times r_1+r_i}{i=2,3,4} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-3)\times r_2+r_4]{(-2)\times r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&1&2&5&7\\0&1&1&2&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=B$$

从而 r(B)=2, 因此 r(A)=2

3. 证明题

例 11. 已知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关, $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关, 问$\alpha_4$能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出?

分析: 此题为判断题, 需仔细考察题目的条件, 由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关, 因此$\alpha_4$未必能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

解: 由于$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性无关, 故$\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 又由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关, 则$\alpha_1$一定可由$\alpha_1,\alpha_2$线性表出, 即存在$k_1,k_2$, 使$\alpha_1=k_1\alpha_2+k_2\alpha_3$。

如果, α_4可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出, 那么存在$k_3$, k_4, k_5, 使$\alpha_4=k_3\alpha_1+k_4\alpha_2+k_5\alpha_3$

即 $\alpha_4=(k_1k_3+k_4)\alpha_2+(k_2k_3+k_5)\alpha_3$。从而 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关, 与题设矛盾.

故α_4不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.

例 12 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是 n 个线性无关的 n 维向量, $\alpha_{n+1}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$, $k_1,k_2,\cdots;k_n$全不为零.

证明; $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$中任意 n 个向量都线性无关.

分析: 线性无关的主要证法一般有

方法 1: 根据线性相关, 线性无关定义证

方法 2: 利用等价向量组等秩概念证, 此适用二个有关向量组

方法 3: 反证法, 一般常用方法

方法 4: 欲证 n 维 m 个向量$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots m),(m\le n)$线性无关, 只须证 n 个分量方程只有零解; 当 m=n 时, 只须证系数行列式不为零即可.

方法 5: 个数相等的两向量组, 一组线性无关, 另一组可用它们线性表出, 当线性表出的系数行列式不等于零时, 另一组也线性无关.

本题就用方法一, 方法二, 方法三加以证明.

方法一: 取$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$中任意$n$个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$(缺$\alpha_i$).

设有 n 个数$x_1,x_2,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n,x_{n+1}$, 研究

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_{i-1}\alpha_{i-1}+x_{i+1}\alpha_{i+1}+\cdots+x_n\alpha_n+x_{n+1}\alpha_{n+1}=0$$

将 $\alpha_{n+1}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$代入, 整理后得

$$(x_1+x_{n+1}k_1)\alpha_1+(x_2+x_{n+1}k_2)\alpha_2+\cdots(x_{i-1}+x_{n+1}k_{i-1})\alpha_{i-1}+x_{n+1}k_i\alpha_i$$
$$+(x_{i+1}+x_{n+1}k_{i+1})\alpha_{i+1}+\cdots+(x_n+x_{n+1}k_n)\alpha_n=0$$

已知$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关, 则有

$$\begin{cases} x_1 + x_{n+1}k_1 = 0 \\ x_2 + x_{n+1}k_2 = 0 \\ \cdots\ \cdots \\ x_{i-1} + x_{n+1}k_{i-1} = 0 \\ x_{n+1}k_i = 0 \\ x_{i+1} + x_{n+1}k_{i+1} = 0 \\ \cdots\cdots \\ x_n + x_{n+1}k_n = 0 \end{cases}$$

由 $x_{n+1}k_i = 0$, 而 $k_i \neq 0$, 必有 $x_{n+1} = 0$, 代入方程组可得 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{i-1} = x_{i+1} = \cdots = x_n = 0$, 即 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 必线性无关, 因 $(i = 1,2,\cdots n)$ 故 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 中任意 n 个向量都线性无关.

方法二: 研究向量组Ⅰ:$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 与向量组Ⅱ:$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \cdots \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 之间关系.

显然向量组Ⅰ能被向量组Ⅱ线性表出, 关键要看向量组Ⅱ能否被向量组Ⅰ线性表出, 这主要看 α_i 能否被向量组Ⅰ线性表出.

因为 $\alpha_{n+1} = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_i\alpha_i + \cdots + k_n\alpha_n$, 且 k_i 全不为零 $(i = 1,2,\cdots,n)$, 故 $\alpha_i = -\dfrac{1}{k_i}(k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{i-1}\alpha_{i-1} + k_{i+1}\alpha_{i+1} + \cdots + k_n\alpha_n - \alpha_{n+1})$, 因此向量组Ⅱ也能被向量组Ⅰ线性表出, 从而向组Ⅰ, Ⅱ等价, 等价组等秩, 显然向量Ⅱ的秩为 n, 则向量组Ⅰ的秩也为 n, 所以向量组Ⅰ中 n 个向量线性无关, 其中 $1 \le i \le n+1$, 故向量组Ⅱ中 n 个向量均线性无关.

方法三: 假设在向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n+1}$ 中任取 n 个向量的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots \alpha_{n+1}$ 是线性相关的, 则至少有一个向量 $\alpha_i\,(j \neq i)$ 可由其余 n-1 个向量线性表出, 而已知 $\alpha_{n+1} = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$, , 其中 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 全不为零, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关, 故上述 α_{n+1} 的表示法唯一. 若 α_j 为 α_{n+1}, 则相当于 $k_i = 0$. 若 α_j 不是 α_{n+1}, 代入 α_{n+1} 的表达式, 相当于 $k_j = 0$ 这和 $k_1, k_2, \cdots, k_i, \cdots, k_j, \cdots, k_n$ 全不为零矛盾, 故任取 n 个向量的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \cdots, \alpha_{n+1}$ 是线性无关.

例 13 设 A 为 n×m 矩阵, B 为 m×n 矩阵, I_n 为 n 阶单位矩阵, 如果 AB=I_n, n<m, 证明: B 的列向量组线性无关.

分析; 可以用 BX=0 无非零解或 r(B)=n 来证明 B 的列向量组线性无关.

证法一: 设 $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$, 考察方程组 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \cdots + x_n\beta_n = 0$ 即

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots \beta_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

易见如果存在$(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$使上述等式成立,则

$$A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=0，\text{即}\quad(AB)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=0,\ \text{从而}I\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=0,\ \text{得}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=0$$

因此,方程组只有零解,也就是 B 的列向量组线性无关.

证法二: 由于 B 为 m×n 矩阵,故$r_{(B)}\le n$,又$r_{(B)}\ge r_{(AB)}=r(I)=n$,故$r_{(B)}=n$,故 B 的列向量组线性无关.

注 2:方法 1.证明矩阵列向量组线性无关(满秩)经常采用手段之一.方法 2,相当于双边夹是矩阵秩的等式证法途径之一.

例 14. A 为 m×p 矩阵,B 为 p×n 矩阵,若 AB=0 试证$r_{(A)}+r_{(B)}\le p$.

分析:证明矩阵秩的不等式主要途径:(1) 利用矩阵乘积,加减秩的性质; (2) 利用齐次线性方程组或非齐次线性方程组系数矩阵的秩,解向量的线性无关的个数及基础解系所含向量个数之间的关系. (3) 将矩阵看成一行(列)向量组.

本题给出(1),(2) 两种证法.

证法一:利用$r_{(AB)}\ge r_{(A)}+r_{(B)}-p$

因为 AB=0,所以$r_{(AB)}=0$,因此$r_{(A)}+r_{(B)}\le p$

证法二:因为 AB=0,所以 B 为 n 个列向量都是 AX=0 的解向量,而方程 AX=0 的基础解系的个数为 p-r(A),从而$p-r(A)\ge r(B)$,即$r(A)+r(A)\le p$.

例 15. A, B 为两个 n 阶矩阵,且$ABA=B^{-1}$,试证:r(I-AB)+r(I+AB)=n(其中 I 为 n 阶单位阵)

证:因为(I-AB)(I+AB)=I-ABAB=0

所以 r(I-AB)+r(I+AB)≤n

又 r(I-AB)+r(I+AB)≥r[(I-AB)+(I+AB)]=r(2I)

得$r(I-AB)+r(I+AB)\ge n$

因此$r(I-AB)+r(I+AB)=n$

例 16. 设 A 是 n 阶矩阵($n\ge 2$)证明:

$$r(A^*)=\begin{cases}n & \text{若}r(A)=n\\1 & \text{若}r(A)=n-1\\0 & \text{若}r(A)<n-1\end{cases}$$

证:(1)若 r(A)=n,则$|A|\ne 0$, $|A^*|=|A|^{n-1}\ne 0$,所以 r(A^*)=n

(2) 若 r(A)=n-1,则|A|=0,即有AA^*=|A|I=0, A^*可看作由方程组 AX=0 的 n 个解向量构成,$r(A^*)\le 1$,因为 r(A)=n-1,所以 A 至少有一个 n-1 级子式不为零,即A^*为非零矩阵,故有 r(A^*)=1.

(3) 若$r(A)<n-1$,则 A 的所有 n-1 级子式为零,即所有代数余子式为零,从而A^*=0,r(A^*)=0

例 17 已知向量组(I) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$;(Ⅱ)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$,(Ⅲ)$\alpha_1, \alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$若各向量组的秩分别为 r(I)=r(Ⅱ)=3, r(Ⅲ)=4 证明向量组$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5-\alpha_4$的秩为 4.

证明:因为 r(I)=r(II)=3, 故$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关,而$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$线性相关,故存在$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,使$\alpha_4=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$,由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关知$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $\alpha_5-\alpha_4$,的秩≥ 3,如果$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为3,则$\alpha_5-\alpha_4$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出.即存在$k_1, k_2, k_3$使$\alpha_5-\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$从而$\alpha_5=(\lambda_1+k_1)\alpha_1+(\lambda_2+k_2)\alpha_2+(\lambda_3+k_3)\alpha_3$。

即α_5可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出,从而 r(III)=3 与已知 r(III)=4 矛盾,故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩>3, 又$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩$\leq 4$,故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩为 4.

(二)线性方程组

1、填空和选择题

例 18 填空

(1)若 n 元齐次线性方程组 AX=0 有 n 个线性无关的解向量,则 A=__________。

(2)设 n 元非齐次线性方程组 AX=B 有解,其中 A 为(n+1)×n 矩阵,则矩阵$(A\vdots B)$的行列式__________。

(3)若线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=-a_1 \\ x_2+x_3=a_2 \\ x_3+x_4=-a_3 \\ x_1+x_4=a_4 \end{cases}$$

有解,则常数a_1,a_2,a_3,a_4应满足条件__________。

(4)设方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2 \end{cases}$$

则当λ________时,方程组有唯一解;λ________时,有无穷多解;λ=________时,方程组无解。

(5) 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=1 \\ x_1-2x_2+x_3=2 \\ ax_1+bx_2+cx_3=d \end{cases}$$

的两个解为$\eta_1=(2,\frac{1}{3},\frac{2}{3})^T$和$\eta_2=(\frac{1}{3},-\frac{4}{3},-1)^T$,则该方程组的全部解为__________。

答:(1) 0; (2) 0; (3) $a_1+a_2+a_3+a_4=0$; (4)$\neq 1$和−2; =1; =−2;

(5) $c(\eta_1-\eta_2)+\eta_1$, C 为任意常数。

解:(1) 由题设知,方程组 AX= 0 有 n 个线性无关的解向量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$,故矩阵$B=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$可逆,且 AB=0,从而$A=ABB^{-1}=OB^{-1}=0$。

(2)因为方程组 AX=B 有解,故$r(A)=r(A\vdots B)$,又 r 为(n+1)×n 矩阵,$r(A)<n+1$,从而$r(A\vdots B)<n+1,$即$(A\vdots B)$矩阵的行列式为 0。

(3) $$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&\vdots&-a_1\\0&1&1&0&\vdots&a_2\\0&0&1&1&\vdots&-a_3\\1&0&0&1&\vdots&a_4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&\vdots&a_4\\0&1&1&0&\vdots&a_2\\0&0&1&1&\vdots&-a_3\\1&1&0&0&\vdots&-a_1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&\vdots&a_4\\0&1&1&0&\vdots&a_2\\0&0&1&1&\vdots&-a_3\\0&0&0&0&\vdots&-a_1-a_2-a_3-a_4\end{bmatrix}$$

方程组有解$\Rightarrow r(A)=r(\overline{A})$,可知$a_1+a_2+a_3+a_4=0$。

(4) 由于方程组的系数行列式为 $D=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$,故当$\lambda\neq1$,-2时,$D\neq0$,方程组有唯一解;当$\lambda=1$时,方程组的三个方程相同,$r(A)=r(\overline{A})=1<3$,方程组有无穷多解;当$\lambda$=-2 时,r(A)=2,而$r(\overline{A})=3$,方程组无解。

(5)由已知,方程组有解且不唯一,于是其系数矩阵 A 满足条件$2\leq r(A)<3$,即 r(A)=2,其导出组的基础解系由 3-r(A)=1 个无关解构成,故方程组全部解为$c(\eta_1-\eta_2)+\eta_1$,C 为任意常数。

例 19 选择题

(1) n 元线性方程组 AX=b 有唯一解的充分必要条件是( )

(A) 导出组 AX=0 仅有零解 (B) A 为方阵,且$|A|\neq0$ (C) r(A)=n

(D) 系数矩阵 A 的列向量组线性无关,且常数项向量 b 可由 A 的列向量组线性表示

(2) 设 A 为 m×n 矩阵,r(A)=r,则方程组 AX=0 有非零解的充要条件是( )

(A) $m<n$ (B) r=m (C) $r<m$ (D)A 的列向量组线性相关

(3) 已知η_1,η_2是非齐次线性方程组 AX=b 的两个不同解,ξ_1,ξ_2是导出组 AX=0 的基础解系,k_1,k_2为任意常数,则 AX=b 的通解为( )

(A) $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}$ (B) $k_1\xi_1+k_2(\xi_1-\xi_2)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$

(C) $k_1\xi_1+k_2(\eta_1+\eta_2)+\dfrac{\eta_1-\eta_2}{2}$ (D) $k_1\xi_1+k_2(\eta_1+\eta_2)+\dfrac{\eta_1+\eta_2}{2}$

(4) 设 A 的 n 阶方阵,R(A)= n-3,且ξ_1,ξ_2,ξ_3是 AX=0 的三个线性无关的解向量,则 AX=0 的基础解系( )

(A)$\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$ (B) $\xi_2-\xi_1,\xi_3-\xi_2,\xi_1-\xi_3$

(C) $2\xi_2-\xi_1,\frac{1}{2}\xi_3-\xi_2,\xi_1-\xi_3$ (D) $\xi_1+\xi_2+\xi_3,\xi_3-\xi_2,-\xi_1-2\xi_3$

(5)设 A 为 m×n 矩阵,则与线性方程组 AX=b 同解的方程组是( )

(A) 当 m=n 时, $A^TX=b$ (B) QAX=Qb,Q 为初等矩阵

(C) r(A)=r$(\overline{A})$=r 时,由 AX=b 的前 r 个方程所构成的方程组

(D) BX=b,其中 B 为 m×n 矩阵,且 r(A)=r(B)

答:(1) D (2) D (3) B (4) A (5) B

解:(1) (A),(C)仅说明 AX=b 的导出组仅有零解,而不能得出 r(A)=r$(\overline{A})$,即 AX=b 有解的结论,(B)是有唯一解的充分条件,而非必要条件(因为 A 可以不是方阵); 由(D)的条件知 r(A)=r$(\overline{A})$=n,故(D)正确。

(2)线性方程组 AX=0 有无非零解,关键看$r(A)<n$是否成立。(B),(C)未说明条件,由(A)可推出$r(A)<n$但非必要条件,仅(D)对$r(A)<n$是充分也是必要的。

(3)由非齐次方程解的结构定理,AX=b 的通解为其导出组 AX=0 的通解与其一个特解之和。先考察 AX=0 的通解,经分析(A),(B)符合,再考察 AX=b 的特解。因为η_1,η_2为 AX=b 的解,所以 $A\eta_1=b,A\eta_2=b$, $A\left(\frac{\eta_1+\eta_2}{2}\right)=\frac{1}{2}(A\eta_1+A\eta_2)=\frac{1}{2}(b+b)=b,$ 可知 $\frac{\eta_1+\eta_2}{2}$ 为 AX=b 的一个特解。综合所述(B)正确

(4) 因为 R(A)=n-3,可知 AX=0 的基础解系所含向的个数为 n-(n-3)=3,又因为ξ_1,ξ_2,ξ_3为 AX=0 的三个线性无关解向量。所以ξ_1,ξ_2,ξ_3为 AX=0 的基础解系。

因为$\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=2\neq 0,$所以$\xi_1+\xi_2,\xi_2+\xi_3,\xi_3+\xi_1$线性无关,于是它们与向量组$\xi_1,\xi_2,\xi_3$等价,因此(A)正确。

(5) (A)中方程组$A^TX=b$是与原方程组 AX=b 不同的新方程组,解可能改变.

(B)表示对原方程组的增广矩阵$\overline{A}$作初等行变换,故与原方程同解。

(C) $r(A)=r(\overline{A})=r$,表示原方程组有解,且含有 r 个独立的方程,这 r 个独立方程构成的方程组与原方程组同解,但这 r 个独立方程不一定是原方程组的前 r 个方程。

(D)中两个方程组解之间没有必然联系。综上分析,(B)符合题意。

2.计算

例 20 试判别下列线性齐次方程组是否有非零解

(1) $\begin{cases}2x_1-x_2+3x_2=0\\2x_1+x_2+x_3=0\\4x_1+x_2+2x_3=0\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=0\\2x_1-3x_2+x_3=0\\4x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-7x_3+5x_4=0 \\ \qquad 4x_2-5x_3+6x_4=0 \\ -x_1-2x_2+3x_3-x_4=0 \end{cases}$

分析：根据齐次线性方程组解的判别定理知，齐次方程组有非零解的充要条件是方程的系数矩阵 A 的秩 r 小于未知的个数。

解：

(1) $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-2)\times r_1+r_3]{(-1)\times r_1+r_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\times r_2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-3)\times r_2+r_3}$

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 因为 r(A)=n=3，所以方程组(1)只有零解。

(2) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(-4)\times r_1+r_3]{(-2)\times r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 7 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

因为 $r(A)=2<n=3$，所以方程组(2)有非零解。

(3) 方程组的未知个数 n=4，方程组个数 m=3，因为 $r(A)=r\le m<n$，所以方程组(3)有非零解。

例 21　求齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0 \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0 \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0 \end{cases}$$

的一个基础解系。

分析：求解齐次线性方程组的基础解系一般是：先对系数矩阵作初等行变换，得到一阶梯形矩阵；然后由阶梯形矩阵写出同解方程组，确定自由未知量，再分别令一个自由未知量不为零(一般取 1)，而其余自由未知量均为零，得到基础解系的各个解向量，从而求得了齐次线性方程组的基础解系(或者在同解方程组基础上求出一般解，然后找出基础解系)。

解：对系数矩阵进行初等行变换

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)\times r_1+r_2} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & -1 & -1 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 3 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[(-4)\times r_1+r_3]{(-2)\times r_1+r_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 21 & 15 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-3)\times r_2+r_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{7}\times r_2}$$

$$\begin{bmatrix}1&-2&-1&-1\\0&0&1&\frac{5}{7}\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{bmatrix}1&-2&0&-\frac{2}{7}\\0&0&1&\frac{5}{7}\\0&0&0&0\end{bmatrix}=B$$

所以 r(A)=r=2,n=4,n-r=2,即方程组有无穷多解,其基础解系中有二个线性无关解向量。

方法 1　由阶梯阵 B,可得原方程同解方程

$$\begin{cases}x_1=2x_2+\frac{2}{7}x_4\\ x_3=-\frac{5}{7}x_4\end{cases}，从而\quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\0\\-\frac{5}{7}\\1\end{pmatrix}$$为一般解。

则向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\0\\-\frac{5}{7}\\1\end{pmatrix}$为方程组的一个基础解系。

方法二　在同解方程 $\begin{cases}x_1=2x_2+\frac{2}{7}x_4\\ x_3=-\frac{5}{7}x_4\end{cases}$ 中,若分别取 $x_2=1,x_4=0$及$x_2=0,x_4=7$

得方程组一个基础解系$\eta_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}2\\0\\-5\\7\end{pmatrix}$

注 3　对于一个给定的方程组,未知量数目 n 和系数阵的秩 r 都是确定的,则方程组解中的自由未知量的数目和基础系中解向量的数目是唯一确定的,且均等于 n-r,而自由未知量是由阶梯形矩阵所得到的同解方程组来选定的,由于初等行变换的方法不同,所从同解方程组不同,因而所确定的自由未知量也可以不同。

例 22　当λ取何值时,齐次线性方程组

$$\begin{cases}(\lambda+1)x_1-x_2=0\\4x_1+(\lambda-3)x_2=0\\-x_1+(\lambda-2)x_3=0\end{cases}$$

有无穷多解,有无穷多解时,求方程组的基础解系,并将其一般解用基础解系表示出来。

分析:对于齐次线性方程组有非零解(有无穷多解),只要求λ取何值时,系数矩阵的秩

小于未知量的个数,或当方程的个数等于未知量的个数,只要求其系数行列式的值为零。

解：方法一：用初等行变换法

$$A=\begin{bmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & 0 & \lambda-2\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ \lambda+1 & -1 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & 0 & \lambda-2\\ 0 & \lambda-3 & 4(\lambda-2)\\ 0 & -1 & (\lambda+1)(\lambda-2)\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}-1 & 0 & \lambda-2\\ 0 & -1 & (\lambda+1)(\lambda-2)\\ 0 & \lambda-3 & 4(\lambda-2)\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & 0 & \lambda-2\\ 0 & -1 & (\lambda+1)(\lambda-2)\\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda-2)\end{bmatrix}$$

齐次线性方程组有无穷多解,则$(\lambda-1)^2(\lambda-2)=0$,即$\lambda=1$或$\lambda=2$时,齐次线性方程组有无穷多解。

当$\lambda=1$时,由上述阶梯矩阵得, 原方程组与$\begin{cases}-x_1-x_3=0\\ -x_2-2x_3=0\end{cases}$同解,即$\begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=-2x_3\end{cases}$

令自由未知量$x_3=1$,得方程组基础解系$\xi=\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$方程的一般解为$x=c\xi=c\begin{bmatrix}-1\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$

(c 为任意常数)

当$\lambda=2$时,由上述阶梯矩阵得：原方程组与$\begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\end{cases}$同解,从而得到方程组基础解系

$\eta=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$,方程组的一般解为$x=c\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$(c 为任意常数)

方法 2　由克莱姆法则的推论得

$D=\begin{vmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 4 & \lambda-3 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=0$即$\lambda=2$或$\lambda=1$时,齐次线性方程组有无穷多解,

当$\lambda=2$时,原方程为

$\begin{cases}3x_1-x_2=0\\ 4x_1-x_2=0\\ -x_1=0\end{cases}$　　即　$\begin{cases}x_1=0\\ x_2=0\end{cases}$,　x_3为自由未知量,从而　$\eta=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$为方程组的基础

解系,方程组的一般解为$x=c\eta=c\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$ (c 为任意常数)

当$\lambda=1$时, 原方程的$\begin{cases}2x_1-x_2=0\\4x_1-2x_2=0\\-x_1-x_3=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=-2x_3\end{cases}$

令自由未知量$x_3=1$, 得方程组基础解系$\xi=\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}$, 方程组的一般解为$x=c\xi=c\begin{bmatrix}-1\\-2\\1\end{bmatrix}$

(c 为任意未知量)

注 4: 本题中当λ=2 时, 原方程组与$\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases}$同解, 这个方程组中并没有$x_3$。我们可以认为方程$0\cdot x_3=0$是该方程组中略去的一个。显然$x_3$是自由取值的。

例 23 用基础解系表出方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1\\3x_1-x_2-3x_3+4x_4=4\\x_1+5x_2-9x_3-8x_4=0\end{cases}$$

的通解。

分析: 求非齐次线性方程组通解(要求用基础解系表出)一般分四步进行。第一步: 写出方程组的增广矩阵$\overline{A}$, 并作初等行变换化为阶梯形矩阵。第二步: 由阶梯形阵写出导出组的同解方程, 得对应齐次方程组的基础解系, 第三步: 由阶梯形阵写出原方程组的同解方程组, 求得一特解, 第四步: 由非齐次线性方程组解的结构写出方程组的通解。

解: 原方程组增广矩阵$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&-3&-1&1\\3&-1&-3&4&4\\1&5&-9&-8&0\end{bmatrix}$

$$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&1&-3&-1&1\\0&-4&6&7&1\\0&4&-6&-7&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-3&-1&1\\0&-4&6&7&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$r(\overline{A})=r(A)=2$, 原方程有解。

由上述得: 原方程组对应导出齐次线性方程组同解方程组为$\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=0\\-4x_2+6x_3+7x_4=0\end{cases}$

$n-r(A)=4-2=2$, 基础解系有 2 个向量, 取x_3,x_4为自由未知量。令$x_3=2,x_4=0$得$x_1=3,x_2=3$。令$x_3=0,x_4=4$得$x_1=-3,x_2=7$, 从而其对应的齐次线性方程组的基础

解系为 $\xi_1=\begin{bmatrix}3\\3\\2\\0\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}-3\\7\\0\\4\end{bmatrix}$。

由上述阶梯形得,原方程组的同解方程为 $\begin{cases}x_1+x_2-3x_3-x_4=1\\-4x_2+6x_3+7x_4=1\end{cases}$

令 $x_3=x_4=0$,得$x_1=1,x_2=-\dfrac{1}{4}$

从而得原方程组一特解 $\eta_0=\begin{bmatrix}1\\-\dfrac{1}{4}\\0\\0\end{bmatrix}$综合得原方程组通解为

$$x=\eta_0+c_1\xi_1+c_2\xi_2=\begin{bmatrix}1\\-\dfrac{1}{4}\\0\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}3\\3\\2\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-3\\7\\0\\4\end{bmatrix}\qquad(c_1,c_2\text{任意常数})$$

例 24　讨论 λ 取值时,下面的方程组有解,并求解

$$\begin{cases}\lambda x_1-x_2-x_3=1\\-x_1+\lambda x_2-x_3=-\lambda\\-x_1-x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$$

分析:解题过程如例 23,只不过要讨论阶梯矩阵中参数取怎样的数值时,使 $r(\overline{A})=r(A)=n$(方程组有唯一解);使 $r(A)=r(\overline{A})<n$(方程组有无穷多个解);使 $r(A)\neq r(\overline{A})$(方程组无解)

解:增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}\lambda&-1&-1&1\\-1&\lambda&-1&-\lambda\\-1&-1&\lambda&\lambda^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&-1&\lambda&\lambda^2\\-1&\lambda&-1&-\lambda\\\lambda&-1&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&-1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda+1&-1-\lambda&-\lambda-\lambda^2\\0&-1-\lambda&-1-\lambda^2&1+\lambda^3\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}-1&-1&\lambda&\lambda^2\\0&\lambda+1&-1-\lambda&-\lambda-\lambda^2\\0&0&(\lambda+1)(\lambda+2)&(\lambda+1)(\lambda-1)^2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-\lambda&-\lambda^2\\0&\lambda+1&-(\lambda+1)&-\lambda(\lambda+1)\\0&0&(\lambda+1)(\lambda+2)&(\lambda+1)(\lambda-1)^2\end{bmatrix}$$

所以有以下结论:

(1) $\lambda \neq -1,2$ 时,系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩等于 3,所给方程组有唯一解。

$$x_1=\frac{\lambda-1}{\lambda-2},\ x_2=\frac{1}{\lambda-2},x_3=\frac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2}$$

(2) $\lambda=-1$ 时

$$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩等于 1,方程组有无穷多解,其导出齐次线性方程组同解

方程组为 $x_1+x_2+x_3=0$,自由未知量为 x_2,x_3,得基础解系为 $\xi_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\xi_2=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$,

其原方程组为 $x_1+x_2+x_3=-1$,得一特解 $\eta_0=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$

因此方程组通解为, $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$ $(c_1,c_2$为任意常数$)$

(3) $\lambda=2$ 时, $\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&-4\\0&3&-3&6\\0&0&0&3\end{bmatrix}$

增广矩阵的秩为 3,系数矩阵的秩为 2,所给方程组无解。

例 25　已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1\\3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1\\x_1-x_2-6x_3-x_4=t\end{cases}$$

讨论参数 p,t 取值时,方程组有解、无解;当有解时,试用其导出组的基础解系表示通解。

解:方程组系数矩阵 A 的增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&p&7&-1\\1&-1&-6&-1&t\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&3&0\\0&-1&-2&-2&-1\\0&-1&p+6&-2&-1\\0&-2&-4&-4&t\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&1&-2&3&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&p+6&-2&-1\\0&-2&-4&-4&t\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&3&0\\0&1&2&2&1\\0&0&p+8&0&0\\0&0&0&0&t+2\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&-4&1&-1\\0&1&-2&2&1\\0&0&p+8&0&0\\0&0&0&0&t+2\end{bmatrix}$$

(1) 当$t\neq 2$时,$r(A)\neq r\left(\overline{A}\right)$,方程组无解。

(2) 当$t=-2$时,$r(A)=r\left(\overline{A}\right)$,方程组有解。

(a) 若 $p=-8$ 时,原方程组同解方程组为$\begin{cases}x_1-4x_3+x_4=-1\\x_2+2x_3+2x_4=1\end{cases}$,其导出齐次线性方程组为$\begin{cases}x_1-4x_3+x_4=0\\x_2+2x_3+2x_4=0\end{cases}$,自由未知量为 x_3,x_4,取$x_3=1,x_4=0$得 $x_1=4,x_4=-2$;取$x_3=0,x_4=1$得$x_1=-1,x_2=-2$;得一基础解系

$$\xi_1=\begin{bmatrix}4\\-2\\1\\0\end{bmatrix},\ \xi_2=\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$$,而原方程组同解方程中取 $x_3=x_4=0$得一特解 $\eta_0=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$。

即方程组通解为 $x=\eta_0+c_1\xi_1+c_2\xi_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}4\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}$($c_1,c_2$ 为任意常数)

(b) 若 $p\neq -8$ 时,原方程组同解方程为$\begin{cases}x_1-4x_3+x_4=-1\\x_2+2x_3+2x_4=1\\x_3=0\end{cases}$

其导出齐次线性方程组为 $\begin{cases} x_1 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ 自由未知量为 x_4，令 x_4 =1, 得

$x_1 = -1$，$x_2 = -2, x_3 = 0$。得基础解系为 $\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

在原方程组同解方程中令 $x_4 = 0$ 得一特解 $\eta^* = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$。

从而方程组通解为 $x = \eta^* + c\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$（c 为任意常数）

例 26　设线性方程组

Ⅰ、 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$　　Ⅱ、$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

(1)求方程组Ⅰ, Ⅱ的基础解系，

(2)求方程组Ⅰ, Ⅱ的公共解。

解：（1）方程Ⅰ的对应矩阵是 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 已是阶梯形矩阵, $r(A) = 2$, 从而可以直接得出基础解系为 $\xi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\xi_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。

方程组Ⅱ的对应矩阵是 $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 也已是阶梯形矩阵, $r(B) = 2$，从而也可以直接得出基础解系为 $\eta_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \eta_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。

(2)方法一：求方程组Ⅰ,Ⅱ的公共解,就是求方程组$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} X = 0$的解,因为

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

直接求解,得方程组Ⅰ,Ⅱ的公共解为$c\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,其中 c 是任意常数。

方法二:在Ⅰ的通解中找出满足方程组Ⅱ的解,则该解即是方程组Ⅰ,Ⅱ的公共解。

由(1)知,方程组Ⅰ的基础解系为ξ_1, ξ_2,则其通解是

$$c_1\xi_1 + c_2\xi_2 = c_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_1 \end{bmatrix},$$

将Ⅰ的通解代入方程组Ⅱ,便得$\begin{cases} -c_1 - c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 + c_1 = 0 \end{cases}$,即$c_2 = 2c_1$

故当$c_2 = 2c_1$时,解$c_1\xi_1 + c_2\xi_2$也满足方程组Ⅱ,(显然是方程组Ⅰ的解),因此

$$c_1\xi_1 + 2c_1\xi_1 = c_1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$ (c_1为任意常数)是方程组Ⅰ,Ⅱ公共解。

同样,将方程组Ⅱ的通解代入方程组Ⅰ,从Ⅱ的通解中选择满足方程Ⅰ的解,也可以得到方程Ⅰ,Ⅱ的公共解。

方法三：在方程组Ⅰ,Ⅱ的通解中,找出它们的公共解,即找出既可由Ⅰ的基础解系线性表出,又可由Ⅱ的基础解系线性表出的解。

由(1)知, Ⅰ的基础解系是ξ_1, ξ_2,而Ⅱ的基础解系是η_1, η_2。

令 $c_1\xi_1 + c_2\xi_2 = c_3\eta_1 + c_4\eta_2$

即求方程$c_1\xi_1 + c_2\xi_2 - c_3\eta_1 - c_4\eta_2 = 0$ 得

$$\begin{cases}-c_1+c_4=0\\ c_1-c_3+c_4=0\\ c_2-c_3=0\\ c_1-c_4=0\end{cases}$$，解得 $c_3=c_2=2c_1=2c_4$ 令其为 λ

从而，$c_1\xi_1+c_2\xi_2=c_1(\xi_1+2\xi_2)=c_3\eta_1+c_4\eta_2=c_4(2\eta_1+\eta_2)=\lambda\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\1\end{bmatrix}$

即 $\lambda\begin{bmatrix}-1\\1\\2\\1\end{bmatrix}$ 便是方程组Ⅰ,Ⅱ的公共解。

3. 证明题

例 27 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_r$ 为 r 个线性无关的 n 维向量,证明存在含 n 个未知量的齐次线线方程组,使 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 是它的一个基础解系。

分析: 只要构造一矩阵 B,其秩为 n-r,而 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 是方程组 BX=0 的解。

证: 设 r 个 n 维向量 $\xi_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ $(i=1,2,\cdots,r)$

考虑齐次线性方程组 AX=0 (1)

其中 $A=(a_{ij})_{r\times n},x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$。

因为 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 线性无关,所以 r(A)=r,从而(1)的基础解系所含解向量个数为 n-r=s,设其中一个基础解系为 $\eta_j=(b_{j1},b_{j2},\cdots,b_{jn})$ $(j=1,2,\cdots,s)$

作方程组 BX=0 (2)

其中 $B=(b_{ij})_{s\times n},x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,则方程组(2)即为所求。因为 r(B)=s,故(2)的一个基础解系所含解向量个数为 n-s=r,又因 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ 为(1)的解,所以 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$ 为(2)的解,又线性无关,即为(2)的一个基础解系。

例 28 设线性方程组 AX=b 有 r+1 线性无关解 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r+1}$,且 r(A)=r,证明该方程组的任意解均可表为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r+1}$ 的线性组合。

分析: 由非齐次线性方程组解结构,去找一导出组的基础解系即可。

证: 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{r+1}$ 是 AX=b 的 r 个解,所以 $\alpha_1-\alpha_{r+1},\alpha_2-\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_r-\alpha_{r+1}$ 是导出组 AX=0 的 r 个解,下面说明此 r 个解向量线性无关,考察

$$k_1(\alpha_1-\alpha_{r+1})+k_2(\alpha_2-\alpha_{1+1})+\cdots k_r(\alpha_r-\alpha_{r+1})=0$$

得: $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r-(k_1+k_2+\cdots+k_r)\alpha_{r+1}=0$，由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots\alpha_{r+1}$ 线性无关,得 $k_1=k_2=\cdots=k_r=0$。从而 $\alpha_1-\alpha_{r+1},\alpha_2-\alpha_{r+1},\cdots\alpha_r-\alpha_{r+1}$ 线性无关，又因为 $r(A)=r$,则 $\alpha_1-\alpha_{r+1},\alpha_r-\alpha_{r+1},\alpha_2-\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_r-\alpha_{r+1}$ 是其导出组 AX=0 的一个基础

解系。因此方程组 AX=b 的任一解可表为

$$\alpha_{r+1}+c_1(\alpha_1-\alpha_{r+1})+c_2(\alpha_2-\alpha_{r+1})+\cdots+c_r(\alpha_r-\alpha_{r+1})$$
$$=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_r\alpha_r+(1-c_1-c_2\cdots-c_r)\alpha_{r+1}$$

即为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots\alpha_{r+1}$ 的线性组合。

例 29　设 A 为 m×n 矩阵, $n<m$, 且 AX=b 有唯一解, 证明: 矩阵 A^TA 为可逆矩阵, 且 AX=b 的解为 $x=(A^TA)^{-1}A^Tb$

分析: 要证 A^TA 为可逆矩阵, 只要说明 $r(A^TA)=n$, 而由已知条件得 r(A)=n, 则只要证 $r(A)=r(A^TA)$。

证明: 因 AX=b 有唯一解, 故 AX=0 只有零解, 因为 r(A)=n, 下面证 $r(A^TA)=r(A)$。

考察　$$A^TAX=0 \tag{1}$$

及　$$AX=0 \tag{2}$$

显然(2)的解均为(1)的解, 因此(2)的基础解系属于(1)的基础解系中, 因而

$$r(A^TA)\le r(A) \tag{3}$$

另一方面, 如果 $A^TAX=0$, 则 $X^T(A^TAX)=0$, 即 $(AX)^T(AX)=0$　(4)

设 $AX=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$, 由(4)式知 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=0$, 因为 A 是实矩阵, X 为实向量, 故 a_i 均为实数, 所以 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$, 即 AX=0。

由于(2)的解也是(1)的解, 故有

$$n-r(A^TA)\le n-r(A),\text{即} r(A)\le r(A^TA) \tag{5}$$

综合(3), (5)式知　$r(A^TA)=r(A)$

因此 $r(A^TA)=n$, 即 A^TA 为可逆方阵, 最后由 AX=b, 知 $A^TAX=A^Tb$, 故

$$X=(A^TA)^{-1}A^Tb\text{。}$$

例 30　设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3\\x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3\\x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3\\x_1+a_4x_2+a_4^2x_4=a_4^3\end{cases}$$

(1)证明：若 a_1,a_2,a_3,a_4 两两不相等, 则此线性方程组无解。

(3)设 $a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k(k\ne0)$, 且已知 β_1,β_2 是该方程组的两个解, 其中

$\beta_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix},\beta_2=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$, 写出此方程组的通解。

分析: 要说明线性方程组无解, 只要 $r\left(\overline{A}\right)\ne r(A)$

(1) 证明　方程组的增广矩阵为

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3\\1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3\\1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3\\1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3\end{bmatrix}$$

$$\left|\overline{A}\right|=\begin{bmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3\\1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3\\1 & a_3 & a_3^2 & a_3^3\\1 & a_4 & a_4^2 & a_4^3\end{bmatrix}=(a_4-a_3)(a_4-a_2)(a_4-a_1)(a_3-a_2)\cdot(a_3-a_1)(a_2-a_1)$$

由 a_1,a_2,a_3,a_4 两两不相等, 知 $\left|\overline{A}\right|\neq 0$, 从而矩阵 $\overline{A}$ 的秩 $r\left(\overline{A}\right)=4$, 但系数矩阵 A 的秩 $r(A)\leq 3$, 故 $r\left(\overline{A}\right)\neq r(A)$, 因此方程组无解。

(2) $a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k(k\neq 0)$ 时, 方程组为

$$\begin{cases}x_1+kx_2+k^2x_3=k^3\\x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3\\x_1+kx_2+k^2x_3=k^3\\x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3\end{cases}\quad 即\begin{cases}x_1+kx_2+k^2x_3=k^3\\x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3\end{cases}$$

因为 $\begin{vmatrix}1 & k\\1 & -k\end{vmatrix}=-2k\neq 0,$ 故 $r(A)=r\left(\overline{A}\right)=2$, 从而方程组有解, 且对应的导出组的基础解系应含有 3-2=1 个解向量。

因为 β_1,β_2 是原非齐次方程组两个解, 故 $\xi=\beta_1-\beta_2=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}$ 是对应齐次线性方程组的解; 且 $\xi\neq 0$, 故 ξ 是导出组的基础解系, 于是原非齐次线性方程组的通解为 $x=\beta+c\xi=\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}$　　　(c 为任意常数)

第四章　向量空间

§1　R^n 的基及向量关于基的坐标，R^n 中向量的内积，标准正交基和正交矩阵

一、基本要求：

1. 掌握基变换和坐标变换公式，会求过渡矩阵。
2. 了解内积概念，掌握线性无关向量组的施密特正交化方法。
3. 了解标准正交基，正交矩阵的概念，以及它们的性质。

二、本节重点

(一)基本概念

1. R^n 的一组基，向量 α 关于该组基下的坐标。
2. R^n 的两组基之间的过渡矩阵。
3. 向量的内积与正交。
4. 正交向量组，R^n 的标准正交基。
5. 正交矩阵。

(二)主要结论

1. 设 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是 R^n 的一组基，且 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ A，则 $(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 线性无关的充要条件是 $|A|\neq 0$。

2. 设向量 α 在基 $B_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 和 $B_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 下的坐标分别为 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 和 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$，基 B_1 到基 B_2 的过渡矩阵为 A，即 $B_2=B_1\cdot A$，则 $x=Ay$，或 $y=A^{-1}x$。

3. Cenchy-Schwarz 不等式：　$|(\alpha,\beta)|\le|\alpha|\cdot|\beta|$

4. 正交向量组必线性无关，反之不一定成立。

5. 施密特正交法

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，则有

$$\beta_1=\alpha_1$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$$

…………

$$\beta_n=\alpha_n-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(\alpha_n,\beta_k)}{(\beta_k,\beta_k)}\beta_k$$

是与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 等价的正交向量组，而且对任一 $i,1\le i\le n$，都有 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_i$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_i$ 等价。

6. 通过施密特正交化可将 R^n 的一个基改造成 R^n 的一个正交基，再通过单位化可将 R^n 的一个正交基化为 R^n 的标准正交基。

7. 若 A 是 n 阶正交矩阵，则

$i)$ $|A|=\pm1$

$ii)$ $A^{-1}=A^T$

$iii)$ A 的列(行)向量组是 R^n 的标准正交基。

8. 正交矩阵的乘积，仍是正交矩阵

三、例题分析

1. R^3 中取两个基

(Ⅰ) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

(Ⅱ) $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$ $\beta_2=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$ $\beta_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$

(1)求由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵。

(2)设 α 在基(Ⅰ)下的坐标为 $(1,1,3)^T$，求 α 在基(Ⅱ)下的坐标。

解：(1)(法一) 设过渡矩阵为 M，从而

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)M\Rightarrow M=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 又

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$ 则

$$M=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&2&1\\3&2&4\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&2&2\\-2&2&-4\\2&2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&1&-2\\1&1&3\end{pmatrix}$$

(法二)可将 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)M$ 看作矩阵方程，直接按求方程的方式求 M，即 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为系数矩阵 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 为常数项

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1&2&-1\\0&1&1&0&2&1\\1&0&1&3&2&4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&1&2&-1\\0&1&1&0&2&1\\0&-1&1&2&0&5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&1&2&-1\\0&1&1&0&2&1\\0&0&2&2&2&6\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1&2&-1\\0&1&1&0&2&1\\0&0&1&1&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&1&2&-1\\0&1&0&-1&1&-2\\0&0&1&1&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&1\\0&1&0&-1&1&-2\\0&0&1&1&1&3\end{pmatrix}$$

则有 $$M=\begin{pmatrix}2&1&1\\-1&1&-2\\1&1&3\end{pmatrix}$$

(2) 设 $\alpha=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\alpha_1,a_2,\alpha_3)M\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

则 $M\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$ 解线性方程组 MX=b

得 $x_1=-\dfrac{2}{3},x_2=\dfrac{5}{3},x_3=\dfrac{2}{3}$

例 2. 在 R^n 中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 的一组基

$$\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n$$
$$\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_n$$
$$\cdots$$
$$\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}$$

证明向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 也是 R^n 的一组基。

证明：只要证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关

法一：直接按定义证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关

法二：将 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，线性表示，则两向组等价，那么它们的秩相同，故 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关。

法三：由已知，有

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&0\end{pmatrix}$$

$$\because\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\1&1&0&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&-1&0&\cdots&0\\1&0&-1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}n-1&1&1&\cdots&1\\0&-1&0&\cdots&0\\0&0&-1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&-1\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}(n-1)\neq 0$$

则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性无关。

例 3. 将向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$ 化为标准正交基。

解: $\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\qquad\beta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\-2\end{pmatrix}-\frac{-3}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-2\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(0,-2,0)^T-\frac{2}{2}(1,-1,0)^T$$

$$-\frac{1}{4+\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-2\right)^T=\left(-\frac{8}{9},-\frac{8}{9},\frac{4}{9}\right)=\frac{4}{9}(-2,-2,1)$$

单位化 $\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T\qquad\eta_2=\frac{1}{\sqrt{18}}(1,1,4)\qquad\eta_3=\frac{1}{3}(2,2,-1)$

例 4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 R^n 的非零正交向量组, 证明

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关

(2) 若 $r<n$, 总可以补充 n-r 个向量 $\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_n$, 使得 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 构成 R^n 的一组正交基。

证明: (1)假设存在 $k_1,k_2,\cdots,k_r\in R$, 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$$

上式两边与 α_i 作内积得

$$(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r,\alpha_i)=(0,\alpha_i)=0\qquad i=1,0,\cdots,r$$

从而 $\qquad k_i(\alpha_i,\alpha_i)=0\Rightarrow k_i=0\qquad i=1,2,\cdots,r$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关。

(2) 因为$r<n$,将$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$看成行向量,即求向量$\alpha_{r+1}$,使

$$\begin{cases}(\alpha_1,\alpha_{r+1})=\alpha_1\cdot\alpha_{r+1}^T=0\\(\alpha_2,\alpha_{r+1})=\alpha_2\alpha_{r+1}^T=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\(\alpha_r,\alpha_{r+1})=\alpha_r\alpha_{r+1}^T=0\end{cases}\Rightarrow\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_r\end{pmatrix}\alpha_{r+1}^T=A\alpha_{r+1}^T=0$$

其中 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_r\end{pmatrix}_{r\times n}$ $r(A)\le r<n$,所以方程组 AX=0 有非零解。

α_{r+1}存在,这只要取 AX=0 的一个非零解x_1作α_{r+1}即可,即$\alpha_{r+1}=x_1$,这时,当$r+1<n$,按上法再继续,直到 n 个正交向量为止(正交向量组线性无关, R^n中正交向量组所含向量个数不能超过 n)

注意: 线性无关的向量组不一定正交。

例 5. 设$\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,1,0)^T$为$R^3$中的一组基,求一组标准正交基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$,使$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为

$$C=\begin{pmatrix}c_{11}&0&0\\c_{21}&c_{22}&0\\c_{31}&c_{32}&c_{33}\end{pmatrix}$$

其中 $c_{ii}>0\quad(i=1,2,3)$,并求过渡矩阵。

解: 设(β_1,β_2,β_3)=($\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$)C, $\because$ β_1,β_2,β_3为一组标准正交基,则(β_1,β_2,β_3)^T(β_1,β_2,β_3)=I,则$\left[(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)c\right]^T(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)c=I$。

$$c^T\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\alpha_3^T\end{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)c=I\Rightarrow c^T\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}c=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$,而 C 为过渡矩阵,可逆,

$$\therefore\quad\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=(c^T)^{-1}\cdot I\cdot c^{-1}=(c\cdot c^T)^{-1}$$

则 $\left[c\cdot c^T\right]\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=I$ 则 $c\cdot c^T=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}^{-1}$

而 $CC^T=\begin{pmatrix} c_{11}^2 & c_{11}c_{21} & c_{11}c_{31} \\ c_{11}c_{21} & c_{11}^2+c_{22}^2 & c_{21}c_{31}+c_{22}c_{32} \\ c_{11}c_{31} & c_{31}c_{21}+c_{32}c_{22} & c_{31}^2+c_{32}^2+c_{33}^2 \end{pmatrix}$

且 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$, $C_{ii}>0$, 则

解得 $c_{11}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\quad c_{21}=-\frac{1}{6}\sqrt{3}=c_{31}$

$c_{22}=\frac{1}{3}\sqrt{6}$ $\quad c_{32}=-\frac{1}{6}\sqrt{6}$ $\quad c_{33}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 则 $c=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{6} & 0 \\ -\frac{1}{6}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)c=\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

例 6. 设 x 是一个 n 维列向量, $x^Tx=1$, 令 $H=I-2xx^T$, 求证 H 是对称的正交矩阵。

证明: ① $H^T=\left(I-2xx^T\right)^T=I^T-(2xx^T)^T=I-2(x^T)^T\cdot x^T=I-2xx^T=H$

$\therefore H$ 对称。

② $H^TH=(I-2xx^T)(I-2xx^T)^T=I^2-I\cdot 2xx^T-2xx^T\cdot I+2xx^T\cdot 2xx^T$

$=I-4xx^T+4x(x^Tx)x^T=I-4xx^T+4x\cdot x^T=I$

则 H 是对称的正交矩阵。

§2 线性空间

一、基本要求:

1. 了解线性空间、子空间、基底、维数及坐标等概念
2. 会求过渡矩阵, 了解基变换及坐标变换公式。

二、本节重点:

(一) 基本概念

1. 线性空间、线性子空间

2. 子空间的交与和及直和

3. 线性空间的基、维数及向量α关于基的坐标

(二)主要结论

1. 设 W 是数域 F 上线性空间 V 的一个非空子集,若 W 关于 V 的两种运算封闭,则 W 是 V 的子空间。

2. $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_e)=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\xleftrightarrow{\text{充要条件是}}\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_e$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$等价。

3. 如果w_1,w_2是线性空间 V 的子空间,则交$w_1\cap w_2$及和w_1+w_2都是 V 的线性子空间。而且,有以下维数公式:

$$\dim w_1+\dim w_2=\dim(w_1+w_2)-\dim(w_1\cap w_2)$$

三、例题分析

例 1. 次数<3的实多项式所构成的线性空间p_3[x]中,证明$f_1=1, f_2=x-1, f_3=(x-2)(x-1)$是$p_3[x]$的一组基,求元素$f=1+x+x^2$在这组基下的坐标。

解:(法一)若f_1,f_2,f_3是$p_3[x]$的一组基,则首先考察f_1,f_2,f_3是否线性无关。

设有k_1,k_2,k_3,使 $k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3=0$,

即 $k_1+k_2(x-1)+k_3(x-2)(x-1)=0$,

$k_3x^2+(k_2-3k_3)x+k_1+2k_3-k_2=0$。

则 $k_3=0$, $k_2-3k_3=0, k_1-k_2+2k_3=0,$ 从而 $k_1=k_2=k_3=0$,

所以f_1,f_2,f_3线性无关。

再证 $p_3[x]$中任一向量,可由f_1,f_2,f_3线性表示。

设 $\forall\ f\in p_3[x]$, $f=ax^2+bx+c$,且

$$ax^2+bx+c=k_1f_1+k_2f_2+k_3f_3=k_3x^2+(k_2-3k_3)a+2+(k_1-k_2+2k_s)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k_3=a\\k_2-3k_3=b\\k_1-k_2+2k_3=c\end{cases}\Rightarrow k_3=a\quad k_2=b+3a\quad k_1=c-2a+b+3a=a+b+c,$$

$\therefore$ $f=(a+b+c)f_1+(b+3a)f_2+af_3$,

$$f=1+x+x^2=3f_1+4f_2+f_3=(f_1\quad f_2\quad f_3)\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}。$$

法二 利用自然基 $g_1=1,g_2=x,g_3=x^2$。

显然 $$(f_1,f_2,f_3)=(g_1,g_2,g_3)\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}=(g_1,g_2,g_3)c,$$

$\because |c|=1$ $\quad\therefore$ f_1,f_2,f_3是$p_3[\times]$的一组基。

例2.　设V为由一切实数域R上的三阶对称阵按照矩阵加法与数乘运算所构成的线性空间,试求 dim V,并给出V的一组基,求V中向量:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

在所给基下的坐标。

解:因为V中向量

$$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\qquad A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\qquad A_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\qquad A_5=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\qquad A_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

线性无关,且任意V中的向量B有。

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}=a_{11}A_1+a_{12}A_2+a_{13}A_3+a_{22}A_4+a_{23}A_5+a_{33}A_6$$

即 V 中任意向量 B 均可表示为 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 的线性组合,故 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 是 V 的一组基,dimV=6,V中向量A在 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 下的坐标是(a,b,c,d,e,f)^T。

例3.　已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_1+x_2-x_3 \qquad\qquad +x_5=0 \end{cases}$$

求解空间W(作为 R^5 的子空间)的一个标准正交基及 dimW

解:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix},\qquad \therefore r(A)=2.$$

所以基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\xi_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\xi_3=\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　则 dimW=3

将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 施密特正交化,再单位化,得W的一个标准正交基 $\eta_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0,0)^T$,

$\eta_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(-2,1,-1,2,0)^T$ ， $\eta_3=\frac{1}{\sqrt{315}}(7,-6,6,13,5)$.

例 4.　设 V 是 R^3 中所有形如 $(a_1,0,a_3)$ 的向量形成的子空间, U 是由(1, 2, 1), (3, 1, 2)生成的子空间, 求 $V\bigcap U$ 及 V+U。

解：　显然 V 的基是 $\alpha_1=(1,0,0)$, $\alpha_2=(0,0,1)$, 即 $V=L(\alpha_1,\alpha_2)$ ， 而 $U=L(\beta_1,\beta_2)$ ，

　　其中　$\beta_1=(1,2,1),\beta_2=(3,1,2)$ 。

　　假定向量　$\alpha=(a_1,a_2,a_3)\in V\cap U$, 那么

$$(a_1,a_2,a_3)=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2=c_1\beta_1+c_2\beta_2$$

于是
$$\begin{cases}a_1=b_1=c_1+3c_2\\ a_2=0=2c_1+c_2\\ a_3=b_2=c_1+2c_2\end{cases}$$

解之，　得　$a_1=b_1=-5c_1$ ，　$a_3=b_2=-3c_1$ 。

因此　　$\alpha=(a_1,a_2,a_3)=c_1(5,0,3)$

因此　　$V\cap U=L(5,0,3)$ ， 即　$\dim(V\cap U)=1$

(2)　因为　$\dim V=\dim U=2,\dim(U\cap V)=1$ ，

　　故　　$\dim(U+V)=\dim V+\dim U-\dim(V\cap U)=3$ ，

　　因此　$U+V=R^3$ 。

第五章 特征值、特征向量，实对称阵的对角化

一、基本要求:

1、理解矩阵特征值和特征向量的概念和性质,会求矩阵的特征值和特征向量。

2、了解相似矩阵的概念,性质及矩阵可对角化的条件。

3、掌握用正交变换化实对称阵为对角阵的方法。

二、重点和难点

1、基本概念

下面所涉及的向量均指列向量:

(1)设 A 为复数域 K 上的 n 阶矩阵,如果存在 $\lambda \in k$ 和非零的 n 维向量 X,使得 AX=λX 就称 λ 是矩阵 A 的特征值,X 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量。

(2)称行列式 $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$ 为矩阵 A 的特征多项式,记 $f(\lambda) = |\lambda I - A|, f(\lambda) = 0$ 称为特征方程, $\lambda I - A$ 称为 A 的特征矩阵。

(3)对于矩阵 A 和 B，如果存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = B$，就称 A 相似于 B，记作 A～B 。

2、主要结论

关于特征向量,有以下结论:

(1)若 x_1和x_2 都是A的属于特征值 λ_0 的特征向量,则 $k_1x_1 + k_2x_2$ 也是A的属于 λ_0 的特征向量(其中 k_1, k_2 是满足$k_1x_1 + k_2x_2 \neq 0$ 的任何值)；

(2)方阵 A 对应于不同特征值的特征向量是线性无关的；

(3)实对称矩阵 A 的对应于不同特征值的特征向量是正交的；

(4)设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 n 阶矩阵 A 的 m 个互异特征值,对应于 λ_i 的线性无关的特征向

量为 $x_{i1},x_{i2},\cdots x_{iri}(i=1,2,\cdots,m)$，则由所有这些特征向量构成的向量组是线性无关的。

关于特征值，则有

(1)相似矩阵有相同的特征值；

(2)实对称阵的特征值都是实数；

(3)设 n 阶矩阵 $A=[a_{ij}]$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则有

(1) $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ (2) $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=\det A$

(4) 若 λ_0 是 A 的特征，则 $k\lambda_0$ 是 kA 的特征，λ_0^2 是 A^2 的特征值，一般地 $f(\lambda_0)$ 是 $f(A)$ 的特征值，其中 $f(x)$ 是多项式。

关于矩阵相似，则有：

(1)n 阶矩阵 A 与对角阵相似的充要条件是，A 有 n 个线性无关的特征向量。

(2)对于任一个 n 阶实对称矩阵 A，存在 n 阶正交矩阵 T，使得

$$T^{-1}AT=diag\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}$$

3、解题的基本方法

求特征值和特征向量的方法：

(1)先求出特征多项式 $|\lambda I=A|$，A 是 n 阶，则多项式是 n 次多项式。

(2)求出多项式方程的根，应有 n 个(重根则按重数计算)

(3)对每个不同的特征值 λ_i，解方程 $(\lambda_i I-A)X=0$，求出该方程组的基础解系，则基础解系的线性组合(不应为零向量)就是对应于 λ_i 的所有特征向量。

求矩阵 A 的相似矩阵的方法：

当 A 的所有线性无关特征向量的个数等于 n，则 A 可与对角阵相似，否则不能。当 A 能与对角阵相似时，

设 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，$\lambda_i$ 为 A 的特征值，$P=(x_1x_2\cdots x_n)$，x_i 是属于 λ_i 的特征向量，则有 $P^{-1}AP=\Lambda$。

如果 A 是实对称矩阵，$\lambda_1,\cdots\lambda_s$ 为 A 的所有互不相同的特征值，λ_i 所对应的线性无关的特征向为 $x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{i_{ki}}$，把 $x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{i_{ki}}$ 进行正交化，单位化，得到 $e_{i1},e_{i2},\cdots,e_{iki}$，由所有特征值的单位正交化后的特征向量全体构成正交阵 P，则 $P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda$。

这里要注意的是，不需对所有特征向量一起进行正交化，只要对每个特征值对应的一组特征向量进行正交单位化，然后合在一起即可得 P。

三、例题分析

例 1. 求矩阵的特征值和特征向量

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{bmatrix}$$

解(一): $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & -1\\ -2 & \lambda & -1\\ -2 & 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 0\\ \lambda-2 & \lambda & \lambda-1\\ 0 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & \lambda & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-2)(\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & \lambda-1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda-1)$

$\therefore A$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=1$。对于$\lambda_{1,2}=2$，方程组(2I－A)X=0,即为

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ -2 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\qquad 即:\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

$\therefore$解为$\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, $\therefore k_1\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}(k_1\neq 0)$是属于2的特征向量。

对于$\lambda_3=1$,方程组 $(I-A)X=0$,即为$\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ -2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$\therefore$解为$\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ $\therefore k_2\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}(k_2\neq 0)$是属于$\lambda=1$的特征向量

$\therefore$A 的特征值为 2,2,1 ,A 的属于 2 的特征向量为$k_1\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}(k_1\neq 0)$,

A 的属于 1 的特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ $(k_2\neq 0)$

（二）$|\lambda I-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 3 & -4\\ -4 & \lambda+7 & -8\\ -6 & +7 & \lambda-7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 3 & -4\\ 2 & \lambda & -1-\lambda\\ -6 & 7 & \lambda-7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 3-\lambda & \lambda-3\\ 2 & \lambda & -1-\lambda\\ -6 & 7 & \lambda-7\end{vmatrix}$

$=(\lambda-3)\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & \lambda & -1-\lambda\\ -6 & 7 & \lambda-7\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ \lambda+2 & \lambda+7 & -1\\ 1 & 7 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda+2 & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}$

$=(\lambda-3)(\lambda+1)\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda+1)^2$ $\therefore$ B的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=3$

对于 $\lambda_1=\lambda_2=-1$, 解方程组(－I－A)X=0, 有: $(-I-A)=\begin{pmatrix}-2 & 3 & -4\\ 2 & -1 & 0\\ -6 & 7 & -8\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 4 & -8\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, 解向量$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

对于 $\lambda_3=3$, 方程组 $(3I-A)X=0$, $3I-A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\ 2 & 3 & -4\\ -6 & 7 & -4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\ 0 & 16 & -16\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\rightarrow\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 解向量$\xi_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}$ $\therefore B$的特征值为$-1,-1,3,$

$k_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}(k_1\neq 0)$ 是属于-1的特征向量 $k_2\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}(k_2\neq 0)$是属于3的特征向量

注 1：求特征值时困难在于计算行列式, 应尽量使用行列式性质, 将某行(列)化成有某同一因子(λ 的一次式), 然后再计算, 这样易于将多项式因式分解。由此例还可看出, 当特征值是重根时, 不一定有 2 个线性无关的特征向量。另外, 还可从解 $(\lambda I-A)X=0$ 中可验证所求的特征值是否正确。(当 $(\lambda I-A)X=0$ 只有零解时, 可以说明该 λ 不是特征值)

注 2：特征向量是非零向量这要牢记。

例 2. 设 $A=\begin{pmatrix}7 & -12 & 6\\ 10 & -19 & 10\\ 12 & -24 & 13\end{pmatrix}$,求$A^{100}$

解:求 A^{100} 一般不可能直接计算，主要通过利用 A 与对角矩阵相似来进行计算，若 $A\tilde{}\wedge$,则$A^n\sim\wedge^n$,即 $A^n=P\wedge^n p^{-1}$,其中 P 是由 A 的线性无关的特征向量为列所构成的方阵,一定要注意 P 的位置。

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-7 & 12 & -6\\ -10 & \lambda+19 & -10\\ -12 & 24 & \lambda-13\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 12 & -6\\ \lambda-1 & \lambda+19 & -10\\ \lambda-1 & 24 & \lambda-13\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & 12 & -6\\ 1 & \lambda+19 & -10\\ 1 & 24 & \lambda-13\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1 & 12 & -6\\ 0 & \lambda+7 & -4\\ 0 & 12 & \lambda-7\end{vmatrix}=(\lambda-1)[(\lambda-7)(\lambda+7)+48)]=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

对 $\lambda_{1,2}=1,$

$$\lambda(I-A)X=0, I-A=\begin{pmatrix}-6 & +12 & -6\\ -10 & 20 & -10\\ -12 & 24 & -12\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\therefore 解为:\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}及\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

对于 $\lambda_3=-1 \quad -I-A=\begin{pmatrix}-8 & 12 & -6\\ -10 & 18 & -10\\ -12 & 24 & 14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4 & 6 & -3\\ -20 & 36 & -20\\ -12 & 24 & -14\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4 & 6 & -3\\ 0 & 6 & -5\\ 0 & 6 & -5\end{pmatrix}\to$

$$\begin{pmatrix}-4 & 0 & 2\\ 0 & 6 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 6 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad\therefore 得解\begin{pmatrix}3\\5\\6\end{pmatrix}$$

$$\therefore P=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 6\end{pmatrix}\quad\therefore P^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -9 & 5\\ 6 & -12 & 7\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}\quad 同时\quad\wedge=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{pmatrix}$$

$$\therefore A^{100}=P\wedge^{100}P^{-1}=P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}P^{-1}=PP^{-1}=I$$

注：$P,\wedge$ 必须对应,即 P 的列位置与$\wedge$中特征值的位置相对应。

如$\wedge$中第 i 个位置λ_i,在 P 中必须是属于 λ_i 的特征向量在第 i 列。

例 3　设 $A=\begin{bmatrix}0&1&1&-1\\1&0&-1&1\\1&-1&0&1\\-1&1&1&0\end{bmatrix}$,求一正交阵$Q$,使$Q^{-1}AQ=\wedge$

解: $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&-1&1\\-1&\lambda&1&-1\\-1&1&\lambda&-1\\1&-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1&1\\\lambda-1&\lambda&1&-1\\\lambda-1&1&\lambda&-1\\\lambda-1&-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&-1&-1&1\\1&\lambda&1&-1\\1&1&\lambda&-1\\1&-1&-1&\lambda\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&-1&-1&1\\0&\lambda+1&2&-2\\0&2&\lambda+1&-2\\0&0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda+1&2&-2\\2&\lambda+1&-2\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2\left((\lambda+1)^2-4\right)=(\lambda-1)^2(\lambda+1-2)(\lambda+1+2)=\left(\lambda-1)^3(\lambda+3)\right)$$

$\therefore$特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1,\lambda_4=-3$

对于$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$,方程组$(I-A)X=0$,即$I-A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}\to$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ \therefore\text{得解}\ \xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \xi_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

ξ_1,ξ_2,ξ_3正交化,$\xi_2^1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}\xi_3^1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-1\end{pmatrix}$

单位化得　$\zeta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix},\zeta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\0\end{pmatrix},\zeta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{12}}\\-\frac{1}{\sqrt{12}}\\-\frac{1}{\sqrt{12}}\\-\frac{2}{\sqrt{12}}\end{pmatrix}$,

对于

$$\lambda_4=-3,有(-3I-A)X=0,-3I-A=\begin{pmatrix}-3&-1&-1&1\\-1&-3&1&-1\\-1&1&-3&-1\\1&-1&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-4&-4&-8\\0&-4&0&-4\\0&0&-4&-4\\1&-1&-1&-3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&-3\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad\therefore 解向量\ \xi_4=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\quad\therefore\zeta_4=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

由于实对称矩阵不同特征值的特征向量是正交的 $\therefore\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3,\zeta_4$ 两两正交。

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{12}}&-\frac{1}{2}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{12}}&-\frac{1}{2}\\0&0&-\frac{3}{\sqrt{12}}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\qquad\wedge=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-3\end{pmatrix},有Q^{-1}AQ=\wedge$$

例 4. 设三阶实对称阵 A 的特征值为 6, 3, 3, 与特征值 6 对应的特征向量为 $P_1=(1,1,1)^T$, 求A.

解题分析: 实对称阵必能与对角阵相似, 且正交相似.

设$P^T\ AP=\wedge$,若能求出P,则$A=P\wedge P^T$ 。P 为三阶正交阵, 已知不同特征值对应的特征向量正交, 则属于$\lambda=3$的特征向量$\xi=(x_1,x_2,x_3)^T$与P_1正交,

$\therefore$ 必满足 $x_1+x_2+x_3=0$

$$\therefore 得解\xi_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},及\xi_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},它们是属于\lambda=3的线性无关的特征向量$$

$$正交化得\xi_3^T=\xi_3-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix},记\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},将\xi_1,\xi_2,\xi^T{}_3单位化,$$

$$得\zeta_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\quad \zeta_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\ \zeta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},\quad P=(\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$$

$$\therefore 得P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\ \therefore A=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{6}{\sqrt{3}}&\frac{6}{\sqrt{3}}&\frac{6}{\sqrt{3}}\\\frac{3}{\sqrt{2}}&0&-\frac{3}{\sqrt{2}}\\\frac{3}{\sqrt{6}}&-\frac{6}{\sqrt{6}}&\frac{3}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$$

例 5. 设三阶矩阵 A 有特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，其对应的特征向量分别是 $\xi_1=[1,1,1]^T,\xi_2=[1,2,4]^T,\xi_3=[1,3,9]^T$，又向量$\beta=[1,1,3]^T$，计算$A^n\beta$。

解法一，由矩阵可相似于对角阵的条件知 A～∧，$P^{-1}AP=\wedge$

$$A^n=P\wedge^n P^{-1}$$

$$\because P=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}\ \therefore P^{-1}=\begin{bmatrix}3&\frac{-5}{2}&\frac{1}{2}\\-3&4&-1\\1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^n\beta=P\wedge^n P^{-1}\beta=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&2^n&\\&&3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-\frac{5}{2}&\frac{1}{2}\\-3&4&-1\\1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&2^n&\\&&3^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-2^{n+1}\\3^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{bmatrix}$$

法二,根据特征值,特征向量的定义,我们有 $A\xi_i=\lambda_i\xi_i$ ， $A^n\xi_i=\lambda_i^n\xi_i(i=1,2,3)$

又 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关,$\therefore\beta$ 可由 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性表示，设 $\beta=x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3$

即解增广矩阵为 A 的方程组， $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&2&0&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&0&2&2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$

$\therefore\beta=2\xi_1-2\xi_2+\xi_3$

$$\therefore A^n\beta=A^n(2\xi_1-2\xi_2+\xi_3)=2\xi_1-2\cdot2^n\xi_2+3^n\xi_3=\begin{bmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{bmatrix}$$

法二比法一简单,但要用到更多的知识。

例 6. 设 A 为三阶矩阵,已知 I－A,3I－A,I+A 都不可逆,试问 A 是否能相似于对角阵?说明理由

解：矩阵 A 能与对角阵相似，如果 ①若 A 的全部特征值互异，或者
②A 有 n 个线性无关的特征向量。

依题意,A 矩阵未知,因此也不能知它是否有 n=3 个线性无关的特征向量,只能依据①,且由题知， I－A,3I－A,I+A 不可逆。

$\therefore|I-A|=0,|3I-A|=0,|I+A|=0$

这即是 $|\lambda I-A|=0$, 当 $\lambda=1,3,-1$ 时成立,即 λ=1,3,-1 是 A 的特征值,而 A 为三阶矩阵只有 3 个特征值,∴它们互异， ∴A 能与对角阵相似。

例 7. 设 A 和 B 都是 n 阶实对称阵,并且有相同的特征多项式,试证 A～B。问一般矩阵有相同的特征多项式时是否一定相似?

证明. A 和 B 有相同的特征多项式， ∴A 和 B 有相同的特征值,设特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n$

又 A,B 都是实对称阵， ∴A,B 都能与对角阵 $\wedge=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$ 相似,

即 $P_1^{-1}AP_1=\wedge,P_2^{-1}BP_2=\wedge,\therefore P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2$

$\therefore\ P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}=B$, 记 $P=P_1P_2^{-1}$ ，则 $P^{-1}=P_2P_1^{-1}\ \therefore P^{-1}AP=B\quad\therefore A\sim B$

一般矩阵时,虽然有相同的特征值,但不一定能相似。

例如 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ ， $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, B 只能与自己本身相似。

A 不能与 B 相似 但 $|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2,|\lambda I-B|=(\lambda-1)^2$

例 8. 求证非零的幂零矩阵 A($A\neq 0$,但$A^m=0$,m为某正整数),不能与对角阵相似

证法一 反证法:设 A 能与对角阵相似,则存在可逆矩阵 P

使$P^{-1}AP=\Lambda$, $\therefore A=P\Lambda P^{-1}$ $\therefore A^m=P\Lambda^m P^{-1}$ $\therefore P\Lambda^m P^{-1}=0$ $\therefore \Lambda^m=0$

即$\wedge=\begin{pmatrix}0&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}$,由此可知 $A=P\wedge P^{-1}=0$与$A\neq 0$矛盾。

证法二 其实,A 的所有特征值确实都为 0

设λ_i是A的第i个特征值,x_i是属于λ_i的特征向量

则 $Ax_i=\lambda_i x_i$ $\therefore A^m x_i={\lambda_i}^m x_i$ $\therefore 0=\lambda_i^m x_i$ $\therefore \lambda_i^m=0,\lambda_i=0$

对于(0I－A)X=0,由于 $A\neq 0,\therefore r(A)\geq 1$

$\therefore$ $AX=0$ 的基础解系最多含有解向量个数为 n−1。

即 A 的线性无关的特征向量个数不超过 n−1<n,故 A 不能与对角阵相似。

例 9. 设 A 为数域 P 上的一个 n 阶方阵,且 $A^2=A$,证明 A 与对角矩阵 C 相似,其中

$$C=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&1&&&&&\\&&\ddots&&&&\\&&&1&&&\\&&&&0&&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&0\end{pmatrix}$$

证明:因为 A 满足 $A^2=A,\therefore A$的特征值不是 1 就是 0。

A(I−A)=0 $\therefore$r(A)+r(I−A)≤n ①

又 r(I)=r(I−A+A)≤r(I−A)+r(A) , 而 r(I)=n

$\therefore$ r(I−A)+r(A)≥n ②

由①②得,r(I−A)+r(A)=n。设 r(A)=r,则 AX=0 的基础解系含有 n−r 个线性无关的向量,即$(\lambda I-A)Z=0$,当$\lambda=0$时有 n−r 个线性无关的特征向量。

又 r(I−A)=n−r, 则 (I−A)X=0 的基础解系含有 r 个线性无关的向量。即($(\lambda I-A)X=0$,当$\lambda=1$时,有 r 个线性无关的特征向量。即λ=1 是 A 的 r 重特征值. $\therefore$ A有n个线性无关的特征向量,故 A 能与对角阵相似,

对角阵为 $C=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}$ $\{C$中1的个数即为 $r(A)$, 也是 A的特征值 $\lambda=1$的重数 $\}$

例 10. 已知三阶矩阵 A 的特征值为 1,-1,2, 设矩阵 $B=A^3-5A^2$,

试求:(1)矩阵 B 的特征值及其相似对角阵,

(2)行列式 $|B|$及$|A-5I|$。

解:(1)要求 $B=A^3-5A^2$ 的特征值, 只能通过 A 的特征值来求, 由 A 与 B 关系来求, 由于 A 的特征值互异, 故 A 可与对角阵相似, 对角阵 $\wedge=\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$。即

$Q^{-1}AQ=\wedge$, Q是由A的线性无关的特征向量为列的矩阵。

$\therefore A=Q\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}Q^{-1}$, $\therefore A^3=Q\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2^3\end{pmatrix}Q^{-1}$,

$$\therefore B=A^3-5A^2=Q\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&2^3\end{pmatrix}Q^{-1}-5Q\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2^2\end{pmatrix}Q^{-1}=Q\begin{pmatrix}-4&&\\&-6&\\&&-12\end{pmatrix}Q^{-1} \qquad \text{(a)}$$

$\therefore B$的特征值为 $-4,-6,-12$, 与对角阵$\begin{pmatrix}-4&&\\&-6&\\&&-12\end{pmatrix}$相似。

(2)由(a)式 $\therefore$ $|B|=|Q|\begin{vmatrix}-4&&\\&-6&\\&&-12\end{vmatrix}|Q^{-1}|=-72\times4=-288$,

而 $|B|=|A^3-5A^2|=|A^2||A-5I|=|A^2||A-5I|$, 又$|A|=-2$,

$\therefore$ $|A-5I|=\dfrac{-72\cdot4}{4}=-72$。

第六章　二次型

一、基本要求

1. 掌握二次型及其矩阵表示,了解二次型秩的概念,了解合同概念,了解惯性定理。

2. 掌握用正交变换以及配方法化二次型为标准形的方法,了解用初等变换化二次型为标准形的方法。

3. 了解二次型和对应矩阵的正定性及其判别法。

二、重点和难点

1. 基本概念:

①二次型及其矩阵表示, 合同。

②矩阵标准形,规范形。

③正定二次型,正定对称矩阵。

2. 主要结论:

对于实二次型 $f = X^T AX$,有以下结论:

①必有正交变换 $X = PY$,使得

$$f = \lambda_1 {y_1}^2 + \lambda_2 {y_2}^2 + \cdots + \lambda_n {y_n}^2$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为 A 的 n 个特征值,这一结论实际上等价于对实对称矩阵 A,有正交阵 P ,使 $A = P\Lambda P^{-1} = P\Lambda P^T$,这里 Λ 是以 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为对角元素的对角阵,正交阵 P 的列向量则是 A 的对应于 λ_i 的特征向量。

②必有可逆的矩阵 P(未必正交)使在变换 x=py 之下,二次型化为标准形,这种矩阵可以用配方法或初等变换找到。

③设二次型 f 的秩为 $r(\le n)$,则 f 的标准形可以写成如下形式:

$$f = k_1 {y_1}^2 + \cdots + k_p {y_p}^2 - k_{p+1} {y_{p+1}}^2 - \cdots - k_r {y_r}^2,$$

这里 $k_i > 0$ (i=1,2,⋯,p,p+1,⋯r),p 是由 f 确定的常数,称为 f 的正惯性指数,r-p 为 f 的负惯性指数,这一结论实际上是说明了,虽然二次型的标准形可以有多种形式,但其中正项个数和负项个数是由 f 唯一确定的。

对于实二次型 $f = X^T AX, (X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n, A = (a_{ij})_{nxn}$ 为实对称阵$)$,下列命题是等价的:

① f 是正定的;

② 任意 $X \in R^n, X \ne 0$,则 $X^T AX > 0$;

③ f 的正惯性指数 p=r=n;

④A 的 n 个特征值全为正;

⑤存在可逆方阵 C,使 $A = C^T C$;

⑥A 的所有顺序主子式大于零。

3. 疑难解释:

①二次型的矩阵表示式 $X^T AX$ 中的 A 应该是对称的,只有 A 是对称矩阵的意义下,二次

型的矩阵表示式才是唯一的,即若 $X^TAX = X^TBX$ 对任何 X 成立,而 A、B 均对称,则 A=B, 对一般矩阵而言,若 $X^TA_1X = X^TB_1X$ 对任何 X 成立,并不能得出 $A_1 = B_1$。例如:

$$(x_1.x_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1.x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

对任何 X, 等式成立,但

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}。$$

②对任一实系数的 n 元二次型 X^TAX ,总可以用可逆线性变换 $X = PY$ 化为仅有平方项的形式:

$$f = a_1y_1^{\ 2} + a_2y_2^{\ 2} + \cdots + a_ry_r^{\ 2}$$

此即为 f 的标准形,当标准形中系数是±1时,称为规范形。根据惯性定理,一个二次型的标准形虽然不唯一,但其中正项系数个数与负项系数个数则是确定的,此即正负惯性指数,由此可知,一个二次型的规范形是唯一的。

③用正交变换化二次型为标准形,实际上等同于用正交矩阵把实对称阵相似变化为对角形。此时所得二次型的标准形中系数即为 A 的全部特征值。

④判断矩阵 A 是否为正定时,其前提条件是 A 为对称矩阵。

三、例题分析

例 1: 将二次型 $f = (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_4 + 2x_2x_3$ $+2x_2x_4 + 2x_3x_4$ 表示成矩阵形式,并求该二次型的秩。

解: 将二次型表示成矩阵形式 X^TAX 时,其中 A 是对称矩阵,且 $2a_{ij}$ 即为 x_ix_j 的系数 $(i \neq j)$,而 a_{ii} 即为 x_i^2 的系数,由此即得:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

而该二次型的秩实际上即为矩阵 A 的秩。

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

∴其秩为 3。

例 2: 设 A 与 B 合同,C 与 D 合同,且它们均是 n 阶对称阵,问下列结论是否成立,为什么?

(1)(A+C)与(B+D)合同。

(2) $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ 合同。

证明: (1)(A+C)与(B+D)不一定合同。

A与B合同,则有可逆阵P,使 $A = PBP^T$,同理C与D合同,则有可逆阵Q,使 $C = QDQ^T$,但 P 与 Q 未必相同。

另一方面 A 与 B 合同,则 r(A)=r(B)。C 与 D 合同则 r(C)=r(D)。但是 r(A+C)未必与 r(B+D)相同。我们若能找到 A、B、C、D 四个矩阵,使 A 与 B 合同,C 与 D 合同,而 A+C 与 B+D 有不同的秩,则可说明 A+C 与 B+D 不合同。找这种反例一般都是找比较特殊的矩阵。

如 $A = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$　　$B = \begin{pmatrix} 2 & \\ & -1 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 2 & \\ & 2 \end{pmatrix}$　　$D = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$

显然　$B = PAP^T$,　$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \\ & 1 \end{pmatrix}$, 即 A 与 B 合同。

$C = QDQ^T$,　$Q = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \\ & \sqrt{2} \end{pmatrix}$,即 C 与 D 合同。

而 A+C= $\begin{pmatrix} 3 & \\ & 1 \end{pmatrix}$,r(A+C)=2　　$B + D = \begin{pmatrix} 3 & \\ & 0 \end{pmatrix}$, r(B+D)=1

$\therefore$A+C 与 B+D 不合同。

(2) $\begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} B & O \\ O & D \end{pmatrix}$合同。

因为 A 与 B 合同,则有 P 可逆,使 $A = PBP^T$,C 与 D 合同,则有 Q 可逆,使 $C = QDQ^T$,作矩阵

$$R = \begin{pmatrix} P & \\ & Q \end{pmatrix}$$

则 R 也可逆,而且

$$R\begin{pmatrix} B & \\ & D \end{pmatrix}R^T = \begin{pmatrix} P & \\ & Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & \\ & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^T & \\ & Q^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PBP^T & \\ & QDQ^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \\ & C \end{pmatrix}$$

因此$\begin{pmatrix} A & \\ & C \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} B & \\ & D \end{pmatrix}$合同 。

例 3,将下列二次型化为标准形,并求所用的满秩线性变换:

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^2 - 6x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3$

错解: (1) 用配方法

$$f = (x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 + 4x_2x_3 + 4x_3^2) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2$$

$$设\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形: $f = y_1^2 + y_2^2$, 而变换矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 用配方法

$$f = -5(x_1^2 - \frac{4}{5}x_1x_2 + \frac{4}{25}x_2^2) - \frac{26}{5}x_2^2 - 4(x_3^2 - x_1x_3 + \frac{1}{4}x_1^2) + x_1^2$$

$$= -5(x_1 - \frac{2}{5}x_2)^2 - \frac{26}{5}x_2^2 - 4(x_3 - \frac{1}{2}x_1)^2 + x_1^2$$

$$设\begin{cases} y_1 = x_1 - \frac{2}{5}x_2 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = -\frac{1}{2}x_1 + x_3 \\ y_4 = x_1 \end{cases}, \quad 于是所求变换矩阵为 \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

且由于三个列向量线性无关,故 P 为满秩矩阵。

分析:

第(1)题所做配方是正确的,错误出在线性变换中表达式中,首先(*)式有错,当 $y_3 = 0$ 时,所用线性变换不是满秩的。为了使变换满秩,可以设 $y_3 = x_3$(不唯一),在施行满秩线性变换之后, $f(x_1, x_2, x_3)$ 的标准形实际上是 $f = y_1^2 + y_2^2 + 0 \cdot y_3^2$ 而不能认为 $y_3 = 0$,其次,满秩线性变换的形式应该是以 y_1, y_2, y_3 来表示 x_1, x_2, x_3,所以应该从

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 + 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \quad 得出 \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

所以变换矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第(2)题的错误在于对 x_1 进行配方时,没有把所含 x_1 的项全部集中起来加以配方,结果把含有 3 个变量的二次型变成了含有四个变量的二次型。其次,在求变换矩阵时犯了与第(1)题同样的错误,第三,题解中没有给出 f 的标准形,不合题目要求。

第(2)题正确的解法如下:

解法 1:用配方法

$$f=-5[x_1^2-\frac{4}{5}x_1(x_2+x_3)+\frac{4}{25}(x_2+x_3)^2]+\frac{4}{5}(x_2+x_3)^2-6x_2^2-4x_3^2$$
$$=-5[x_1-\frac{2}{5}x_2-\frac{2}{5}x_3]^2-\frac{26}{5}x_2^2+\frac{8}{5}x_2x_3-\frac{16}{5}x_3^2$$
$$=-5[x_1-\frac{2}{5}x_2-\frac{2}{5}x_3]^2-\frac{26}{5}(x_2^2-\frac{4}{13}x_2x_3+\frac{4}{169}x_3^2)-\frac{40}{13}x_3^2$$
$$=-5(x_1-\frac{2}{5}x_2-\frac{2}{5}x_3)^2-\frac{26}{5}(x_2-\frac{2}{13}x_3)^2-\frac{40}{13}x_3^2$$

设 $\begin{cases} y_1=x_1-\frac{2}{5}x_2-\frac{2}{5}x_3 \\ y_2=\quad x_2-\frac{2}{13}x_3 \\ y_3=\quad x_3 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} x_1=y_1+\frac{2}{5}y_2+\frac{6}{13}y_3 \\ x_2=\quad y_2+\frac{2}{13}y_3 \\ x_3=\quad y_3 \end{cases}$.

则变换矩阵为: $P=\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{6}{13} \\ 0 & 1 & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

f 的标准形为: $f=-5y_1^2-\frac{26}{5}y_2^2-\frac{40}{13}y_3^2$.

解法 2:用初等变换法, 原二次型相应的矩阵为: $A=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$,

则 $\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第一列}\times(\frac{2}{5})\text{加到第二、三列}]{\text{第一行}\times(\frac{2}{5})\text{加到第二、三行}}$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{26}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{16}{5} \\ 1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列}\times(\frac{2}{13})\text{加到第三列}]{\text{第2行}\times(\frac{2}{13})\text{加到第三行}} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{26}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{40}{13} \\ 1 & \frac{2}{5} & \frac{6}{13} \\ 0 & 1 & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故 f 的标准形为: $f = -5y_1^2 - \frac{26}{5}y_2^2 - \frac{40}{13}y_3^2$.

变换矩阵为: $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{6}{13} \\ 0 & 1 & \frac{2}{13} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$。

解法 3: 用初等变换法，根据 A 中元素特点,我们可以尽量避免用分数运算。

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3列}\times(\frac{1}{2})\text{加到第1列}]{\text{第3行}\times(\frac{1}{2})\text{加到第1行}} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第1列}\times(\frac{1}{2})\text{加到第2列}]{\text{第1行}\times(\frac{1}{2})\text{加到第2行}} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

于是标准形为: $f=-4y_1^2-5y_2^2-4y_3^2$,

所用满秩变换矩阵为: $p=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1\end{pmatrix}$.

例 4. 将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 化为规范形并求所用的满秩线性变换。

解法一:用正交变换法。

二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$,则

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$$

$\therefore A$的特征值为$\lambda_1=2.\lambda_2=\lambda_3=-1$

对$\lambda_1=2$, $\quad \lambda_1 I-A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 3 & -3\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

则特征向量$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$应满足$\begin{cases}x_1-x_3=0\\ x_2-x_3=0\end{cases}$ 则可取$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

单位化后得 $\xi_1=(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})^T$

对$\lambda_2=\lambda_3=-1,\quad -I-A=\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

则特征向量$(x_1,x_2,x_3)^T$应满足$x_1+x_2+x_3=0$

则得两个线性无关的特征向量为$\xi_2=(-1,0,1)^T,\xi_3=(-1.1.0)^T$

ξ_2、ξ_3标准正交化后得$:\eta_2=(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^T$ $\qquad\eta_3=(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}})^T$

则得正交阵: $P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$

因此原二次型可在线性变换 x=py 之下化为标准形 $f=2y_1^2-y_2^2-y_3^2$

再作变换$\begin{cases}y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}Z_1\\y_2=\quad Z_2\\y_3=\quad Z_3\end{cases}$,则得规范形为: $f=Z_1^2-Z_2^2-Z_3^2,$

所用变换为 X=PQZ 这里 Q=$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$ $PQ=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&0&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

解法二: 用配方法. 该二次型中没有平方项,仅有混合项,因此为了利用配方,可先作变换:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

则二次型化为包含平方项的形式: $f(x_1.x_2.x_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_3$.

然后配方: $f = 2(y_1 + y_3)^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2$

令 $\begin{cases} Z_1 = \sqrt{2}(y_1 + y_3) \\ Z_2 = \sqrt{2}y_2 \\ Z_3 = \sqrt{2}y_3 \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}Z_1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}Z_3 \\ y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}Z_2 \\ y_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}Z_3 \end{cases}$

得规范形为 $f = Z_1^2 - Z_2^2 - Z_3^2$

所用线性变换为: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(Z_1 + Z_2 - Z_3) \\ x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(Z_1 - Z_2 - Z_3) \\ x_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}Z_3 \end{cases}$

解法三:用初等变换法. 原二次型的矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第2列}\times(\frac{1}{2})\text{加到第1列}]{\text{第2行}\times(\frac{1}{2})\text{加到第1行}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2列}-\text{第1列}]{\text{第2行}-\text{第1行}}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{3}{2}\\ 0 & -1 & -\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 1 & -1 & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第1列}\times(-\frac{3}{2})+\text{第3列}]{\text{第1行}\times(-\frac{3}{2})+\text{第3行}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{9}{4}\\ 1 & -1 & -\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第2列}\times(-\frac{1}{2})+\text{第3列}]{\text{第2行}\times(-\frac{1}{2})+\text{第3行}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 1 & -1 & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{第3列}\times\frac{1}{\sqrt{2}}]{\text{第3行}\times\frac{1}{\sqrt{2}}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

则规范形为 $f=y_1^2-y_2^2-y_3^2$

所用变换为 X=PY, $P=\begin{pmatrix}1 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

说明:以上三个解法中解法一的计算量相对较大。事实上,如果没有明确要求必须用正交变换,在求标准形时,用配方法或初等变换法会比较简单。

例 5: 设二次型 $f(x_1.x_2.x_3)=3x_1^2+3x_3^2+4x_1x_2+8x_1x_3+4x_2x_3$
求正交变换 X=PY,把 f 变为标准形。

解题分析:将二次型(或实对称阵)通过正交变换化为标准形(或对角矩阵)的一般步骤是:

(1) 先写出二次型矩阵 A,并求出 A 的全部特征值 $\lambda_1.\lambda_2\ldots\lambda_n$。

(2) 对每个特征值求出相应的特征向量。

(3) 对应不同特征值的特征向量是相互正交的。单重特征值的特征向量,只需进行单位化,对应 r 重根的特征值,应先求出 r 个线性无关的特征向量,然后利用施密特正交化过程,得到对应于这 r 重特征值的 r 个相互正交的单位特征向量。

这样,标准形中平方项的系数(或对角阵的对角元素)就是 $\lambda_1.\lambda_2\ldots\lambda_n$,即 A 的全部特征值,而这 n 个相互正交的单位特征列向量按特征值的相应的顺序排列成的矩阵即为所作的正

交变换阵。

解: 二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}3&2&4\\2&0&2\\4&2&3\end{pmatrix}$$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-4\\-2&\lambda&-2\\-4&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda+1&0&-1-\lambda\\-2&\lambda&-2\\-4&-2&\lambda-3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&0&-1\\-2&\lambda&-2\\-4&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&0&0\\-2&\lambda&-4\\-4&-2&\lambda-7\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+1)(\lambda^2-7\lambda-8)=(\lambda+1)^2(\lambda-8)$$

$$\therefore \lambda_1=8,\ \ \lambda_2=\lambda_3=-1$$

对 $\lambda_1=8$,特征向量 $\xi=(x_1.x_2.x_3)^T$ 应满足 $(\lambda_1 I-A)\xi=0$

而 $\lambda_1 I-A=\begin{pmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$

可得 $\xi=(x_1,x_2,x_3)^T=(2,1,2)^T$,把$\xi$单位化后得$\xi^\circ=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})^T$。

对 $\lambda_2=\lambda_3=-1$,

$$-I-A=\begin{pmatrix}-4&-2&-1\\-2&-1&-2\\-4&-2&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

可得两个线性无关的特征向量为 $\eta_1=(-\frac{1}{2},\ 1,\ 0)^T,\ \eta_2=(-1,0,1)^T$

把他们单位正交化得:$\eta_1^0=(-\frac{1}{\sqrt5},\frac{2}{\sqrt5},0)^T$, $\eta_2^0=(\frac{-4}{\sqrt{45}},\frac{-2}{\sqrt{45}},\frac{5}{\sqrt{45}})^T$

则可令 $P=(\xi^0,\ \eta_1^0,\ \eta_2^0)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{4}{\sqrt{45}}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt{45}}\\\frac{2}{3}&0&\frac{5}{\sqrt{45}}\end{pmatrix}$

在正交线性变换 X=PY 下,二次型变为标准形

$$f = 8y_1^2 - y_2^2 - y_3^3 \ .$$

说明:上述解法中,η_1, η_2 取出后进行标准正交化得到 η_1^0, η_2^0,这一过程比较麻烦,我们也可直接从特征向量空间找正交的特征向量。$\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 的特征向量均应满足

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

可从方程先得一个特征向量 $\eta_1 = (1, 0, -1)^T$,然后再满足方程 $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ 的向量中找一个与 η_1 正交的向量 η_2,设 $\eta_2 = (a, b, c)^T$,则

$$\begin{cases} 2a + b + 2c = 0 \\ a \qquad\ - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -4a \\ c = a \end{cases}$$

可取 $\eta_2 = (1, -4, 1)^T$, 再把η_1, η_2 单位化得 $\eta_1^0 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\eta_2^0 = (\frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}})$

这样,得到正交矩阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$$

在线性变换 X=PY 下仍得标准形

$$f = 8y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$$

这里也说明正交变换中 P 可以不一样,但标准形结果是确定的。

例 6,判断二次型 $f = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$ 是否正定。

解法一: 配方: 将二次型配方化为平方和即标准形,再依定义判定。

$$f = 6(x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3)^2 + \frac{13}{3}(x_2 + \frac{2}{13}x_3)^2 + \frac{243}{39}x_3^2 \geq 0$$

要使 f=0,则

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \\ x_2 + \frac{2}{13}x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

因此,对任一 $X = (x_1, x_2, x_3)^T \neq 0$,恒有 $f = X^T AX$ >0,即二次型是正定的。

解法二: 求得标准形依正惯性指数是否为 n 判定是否为正定,上面解法一中,配方后直接得到标准形为 $f = 6y_1^2 + \frac{13}{3}y_2^2 + \frac{243}{39}y_3^2$,正惯性指数为 3,故正定。

解法三: 计算二次型矩阵 A 的各阶顺序主子式是否均为正。

$$A=\begin{pmatrix}6&-2&2\\-2&5&0\\2&0&7\end{pmatrix}\qquad a_{11}=6>0$$

$$\begin{vmatrix}6&-2\\-2&5\end{vmatrix}=30-4=26>0\qquad |A|=\begin{vmatrix}6&-2&2\\-2&-5&0\\2&0&7\end{vmatrix}=162>0$$

故得二次型为正定。

说明: 1.有时还可用 A 的特征值是否全为正来判定二次型是否为正定,但本题求特征值较为困难。

2.用标准形判定二次型是否为正定时,不能光看标准形中各项是否都为正系数,还要看正项个数是否为 n，即正惯性指数是否为 n。

例 7: 求参数 t 的取值范围,使二次型

$$f=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$$

为正定

解法一:配方法

$$f=(x_1^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+t^2x_2^2+x_3^2-2tx_2x_3)+(1-t^2)x_2^2+4x_3^2+(4+2t)x_2x_3$$

$$=(x_1+tx_2-x_3)^2+(4x_3^2+(4+2t)x_2x_3+\frac{(2+t)^2}{4}x_2^2)+(1-t^2-\frac{(2+t)^2}{4})x_2^2$$

$$=(x_1+tx_2-x_3)^2+(2x_3+\frac{2+t}{2}x_2)^2-\frac{1}{4}(5t+4)tx_2^2$$

为使二次型正定,必须 $(5t+4)t<0$.解得 $-\frac{4}{5}<t<0$。

解法二：考察矩阵的各阶顺序主子式

$$A=\begin{pmatrix}1&t&-1\\t&1&2\\-1&2&5\end{pmatrix},\qquad a_{11}=1>0,\ \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=1-t^2,\qquad |A|=-t(5t+4)$$

则为使 A 正定, 令 $\begin{cases}1-t^2>0\\-t(5t+4)>0\end{cases}\Rightarrow -\frac{4}{5}<t<0$

说明:①解法一中,配方时,在配完含 x_1 的项后,也可先配含 x_2 的项,但会麻烦些。

②这种讨论二次型未知常数的取值使得二次型正定的问题,一般以顺序主子式判断会简便些。

例 8 已知实对称阵 A 满足 $A^3-4A^2+5A-2I=0$,求证 A 是正定矩阵。

证明:设 λ 是 A 的特征值,X 是相应的特征向量,即 $AX=\lambda X$

又设 $f(x)=x^3-4x^2+5x-2$, 则 $f(A)=A^3-4A^2+5A-2I$

则 $f(\lambda)$ 是 $f(A)$ 的特征值 。

而且 $f(A)X=f(\lambda)X$. 由 $f(A)=0$. 得 $f(\lambda)=0$

即 $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$

则 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2$

即 A 的特征值全大于零,又 A 为实时称,故 A 正定。

例 9　已知三阶实对称阵 A 的特征值为 1. 1. -1,且相应于 λ=-1 的特征向量是 $(-1, 1, 0)^T$,求出矩阵 A,并求出正交变换 X=PY,使二次型 X^TAX 成为标准形。

分析:实对称阵的不同特征值所对应的特征向量相互正交,因此特征值 1 所对应的特征向量必与 $(-1, 1, 0,)^T$ 正交,另一方面 A 是实对称阵,1 是它的 2 重根,因此相应于 1 有两个相互正交的特征向量 ξ_1, ξ_2,且它们均与 $(-1, 1, 0)^T$ 正交,因此与 $(-1, 1, 0)^T$ 正交的非零向量也都是 A 的属于 1 的特征向量,有了特征向量,即可求出 A 和 P.

解: 设属于特征值 $\lambda = 1$ 的特征向量 $(x_1, x_2, x_3)^T$,则

$$-x_1 + x_2 = 0$$

取 $x_1 = 1$ 则得一个特征向量为 $\xi_1 = (1, 1, 0)$, 设 $\lambda = 1$ 的另一特征向量为 $\xi_2 = (y_1, y_2, y_3)^T$,则 ξ_2 与 ξ_1 及 $(-1, 1, 0)^T$ 均正交,故

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 = 0 \\ y_1 + y_2 = 0 \end{cases}$$

由此 $y_1 = y_2 = 0$, 取 $y_3 = 1$, 得 $\xi_2 = (0.\ 0.\ 1)^T$,把三个特征向量单位化后,构成一个矩阵 P

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{则 } AP = P\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad \therefore A = P\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}P^T$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

令 X=PY, 则 $X^T AX = y^T P^T APY = y^T \Lambda y$, 这里 $\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

因此二次型 $X^T AX$ 在正交变换 X=PY 之下的标准形为

$$-y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\text{。}$$