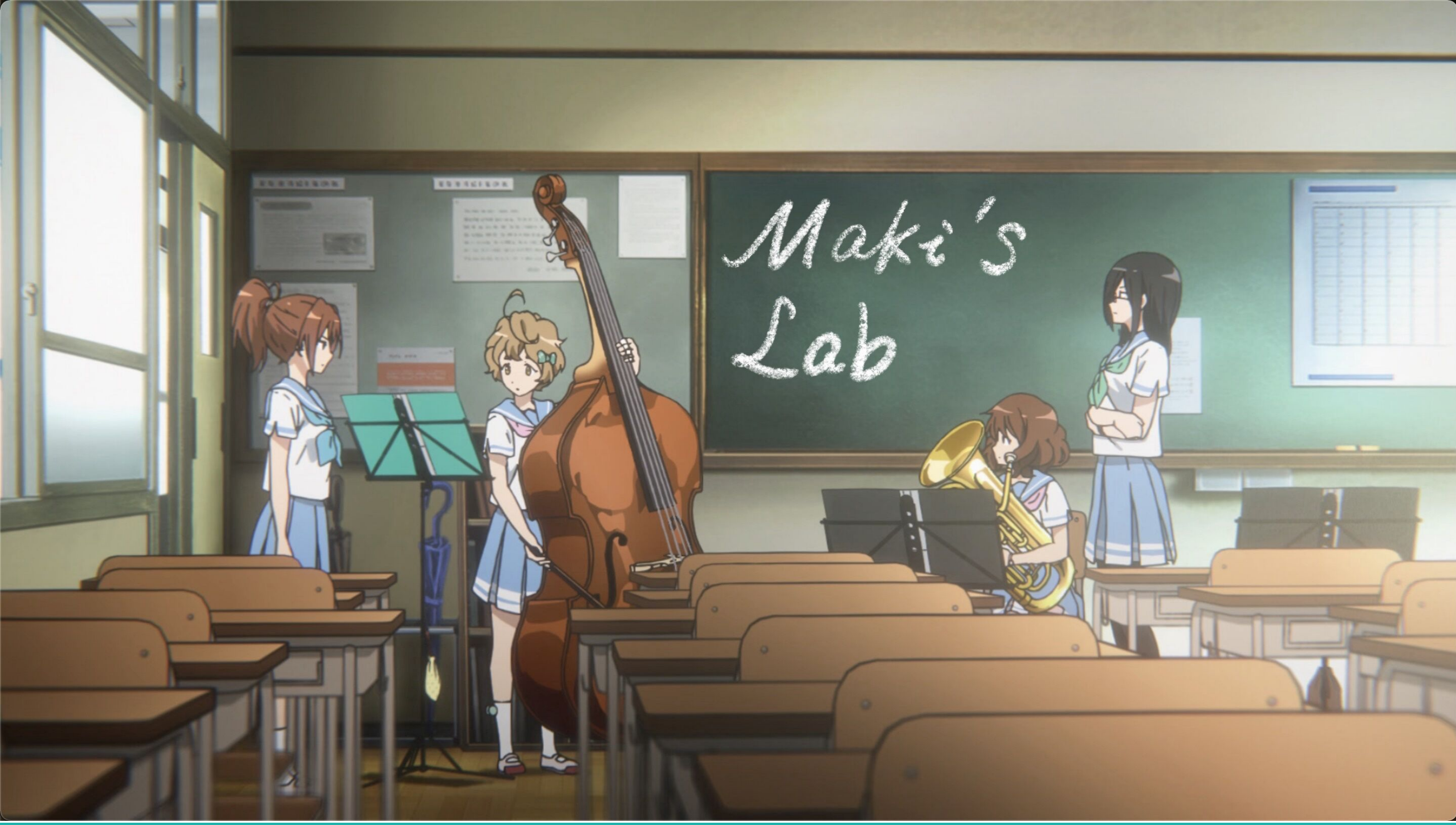
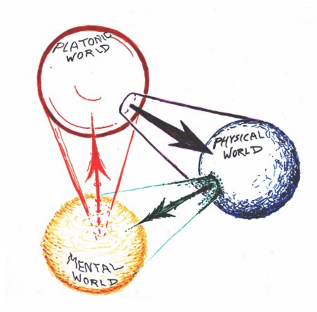


范畴论讲义

作者：Maki's Lab 范畴论委员会

时间：August 10, 2022



目录

第 1 章 范畴、函子与自然变换

1.1 介绍

在数学中，我们常常会遇到一些数学对象以及它们之间的一些映射。这些映射会满足一些基础的性质，例如我们可以定义良好的复合运算，存在恒等映射等等。

第一个例子是集合与映射。根据朴素集合论，我们知道所有的集合并不构成一个集合。一般而言，我们用"类"来表示一般的"集体"的概念。我们令 **Set** 表示由所有集合构成的类。从此以后，我们可以用 $A \in \mathbf{Set}$ 来表示 A 是一个集合。

接着，对于任意的 $A, B \in \mathbf{Set}$，我们用 $\mathbf{Set}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, B)$ 来表示由所有从 A 到 B 的映射构成的集合（这确实构成一个集合）。

我们有映射的复合运算。实际上，对于任意的 $A, B, C \in \mathbf{Set}$，我们都有良定义的复合运算

$$\circ : \mathbf{Set}(B, C) \times \mathbf{Set}(A, B) \to \mathbf{Set}(A, C)$$

将任意的 $g \in \mathbf{Set}(B, C)$ 和 $f \in \mathbf{Set}(A, B)$ 映射到确定的复合运算 $g \circ f \in \mathbf{Set}(A, C)$。

除此以外，我们有两个重要的性质，一个是结合律，一个是恒等映射。

1. 对于任意的 $h \in \mathbf{Set}(C, D), g \in \mathbf{Set}(B, C), f \in \mathbf{Set}(A, B)$，我们有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$。
2. 对于任意的 A，存在 $id_A \in \mathbf{Set}(A, A)$，使得:
   (a). 对任意 $B \in \mathbf{Set}$ 和 $f \in \mathbf{Set}(A, B)$，我们都有 $f \circ id_A = f$。
   (b). 对任意 $g \in \mathbf{Set}(B, A)$，我们都有 $id_A \circ g = g$。

我们再来看一个例子。

我们令 **Grp** 是由所有的群构成的类。对任意 $A, B \in \mathbf{Grp}$，我们令 $\mathbf{Grp}(A, B)$ 表示所有从 A 到 B 的群同态所构成的集合。

对任意 $g \in \mathbf{Grp}(B, C)$ 和 $f \in \mathbf{Grp}(A, B)$，我们定义的 $g \circ f$ 就是映射的复合运算。我们只需要注意群同态的复合还是群同态，就能证明这是良定义的。

我们显然有结合律，这是因为映射的复合运算有结合律。

除此以外，注意到恒等映射是群同态，所以 $id_A \in \mathbf{Grp}(A, A)$，满足单位态射应该有的性质。

我们看第三个例子。

我们令 **Top** 是由所有的拓扑空间构成的类。对任意 $A, B \in \mathbf{Top}$，我们令 $\mathbf{Top}(A, B)$ 表示所有从 A 到 B 的连续映射所构成的集合。

对任意 $g \in \mathbf{Top}(B, C)$ 和 $f \in \mathbf{Top}(A, B)$，我们定义的 $g \circ f$ 就是映射的复合运算。我们只需要注意连续映射的复合还是连续映射，就能证明这是良定义的。

我们显然有结合律，这是因为映射的复合运算有结合律。

除此以外，注意到恒等映射是连续映射，所以 $id_A \in \mathbf{Top}(A, A)$，满足单位态射应该有的性质。

我们马上就会知道，这三个例子分别代表了三个范畴。范畴在数学中非常的普遍，是对于抽象结构的进一步抽象。

在下一节中，我们给出定义。

1.2 范畴

我们先给出范畴的定义。

定义 1.1 (范畴)

我们称 $\mathbf{C} = (\mathrm{ob}(\mathbf{C}), \mathrm{hom}(\mathbf{C}))$ 是一个范畴，如果它满足下列条件。

1. （对象）$\mathrm{ob}(\mathbf{C})$ 是一个类，称为 $\mathbf{C}$ 中的对象。
2. （态射）对任意 $A, B \in \mathbf{C}$，我们都定义了 $\mathbf{C}(A, B) \subset \mathrm{hom}(\mathbf{C})$。$\mathbf{C}(A, B)$ 中的元素称为从 A 到 B 的态射。
3. （复合运算）对于任意的 $g \in \mathbf{C}(B, C)$ 和 $f \in \mathbf{C}(A, B)$，我们都定义了它们的复合态射 $g \circ f \in \mathbf{C}(A, C)$。
4. （结合律）对于任意的 $h \in \mathbf{C}(C, D), g \in \mathbf{C}(B, C), f \in \mathbf{C}(A, B)$，我们有 $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$。
5. （单位态射）对于任意的 A，存在 $id_A \in \mathbf{C}(A, A)$，使得:
   (a). 对任意 $B \in \mathbf{C}$ 和 $f \in \mathbf{C}(A, B)$，我们都有 $f \circ id_A = f$。
   (b). 对任意 $g \in \mathbf{C}(B, A)$，我们都有 $id_A \circ g = g$。

♣

在不引起歧义的情况下，我们可以用全体对象的类 $\mathrm{ob}(\mathbf{C})$ 来表示整个范畴 $\mathbf{C}$。

显然，前一节中的铺垫告诉我们 **Set**、**Grp**、**Top** 是三个范畴。

命题 1.1

1. 所有的集合和它们之间的映射构成了集合范畴 **Set**。
2. 所有的群和它们之间的群同态构成了群范畴 **Grp**。
3. 所有的拓扑空间和它之间的连续映射构成了拓扑空间范畴 **Top**。

♠

如何去理解范畴呢？我们可以认为，我们研究范畴，就是研究一些对象和一些满足性质的箭头。这些对象未必是集合，这些箭头也未必是映射。正如其他公理定义一样，只要满足这些条件，就会构成一个范畴。

我们下一节中会看到，在范畴之间也有一个合适的箭头，它们被称为函子。如果我们把范畴看成对象，把函子看成是态射，那么所有的范畴也会构成一个类似于范畴的结构，但是这个结构不再是范畴。

我们再来举一些例子。

命题 1.2

给定一个域 k，则所有 k 上的向量空间和它们之间的线性映射，构成了 k 上的向量空间范畴，记作 $\mathbf{Vect}_k$。♠

证明 向量空间之间线性映射的复合运算是良定义的、结合的，且存在单位态射（恒等映射）。

正如双射、群同构、同胚映射的定义，我们可以在任意一个范畴中给出同构的定义。

定义 1.2 (范畴中对象的同构)

令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，我们称 $A, B \in \mathbf{C}$ 是同构的（两个对象）当且仅当存在两个态射 $f \in \mathbf{C}(A, B), g \in \mathbf{C}(B, A)$，使得 $f \circ g = id_B$ 且 $g \circ f = id_A$。此时，我们记 $g = f^{-1}$，称为 f 的一个逆态射，而 f 被称为 A 与 B 的一个同构。

♣

引理 1.1

1. 在集合范畴中，两个集合是同构的当且仅当存在一个它们之间的双射。换言之，当且仅当它们是等势的。
2. 在群范畴中，两个群是同构的当且仅当存在一个它们之间的群同构。
3. 在拓扑空间范畴中，两个拓扑空间是同构的当且仅当存在一个它们之间的同胚映射。

♡

命题 1.3 (逆态射的唯一性)

对于任意的 $f \in \mathbf{C}(A, B)$，f^{-1} 若存在则唯一。

♠

证明 假设 g, h 都是 $f \in \mathbf{C}(A, B)$ 的逆态射，则

$$g = g \circ id_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = id_A \circ h = h$$

此即得证。

注 这里的证明和幺半群的逆元若存在则唯一的证明是完全一样的。

引理 1.2

令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，则同构关系是一个等价关系。

证明 令 $A, B, C \in \mathbf{C}$ 是三个对象。

1. （自反性）id_A 的逆还是 id_A，所以它是一个 A 上的自同构。
2. （对称性）若 $f \in \mathbf{C}(A, B)$ 是个从 A 到 B 的同构，则显然 $f^{-1} \in \mathbf{C}(B, A)$ 是个从 B 到 A 的同构。
3. （传递性）若 $g \in \mathbf{C}(B, C)$ 和 $f \in \mathbf{C}(A, B)$ 是两个同构，则显然 $g \circ f \in \mathbf{C}(A, C)$ 是个从 A 到 C 的同构。

综上所述，我们就证明了同构关系是一个等价关系。

事实上，只有一个集合作为对象的范畴和幺半群是一样的。

引理 1.3

只有一个对象且全部态射构成一个集合的范畴和幺半群是一一对应的。

证明 我们将这个对象到自身的全部态射看作一个集合，将元素的乘法定义为这些态射的复合。我们的结合律和单位元的条件恰好满足了幺半群的性质。此即得证。

引理 1.4

只有一个对象、全部态射构成一个集合且每个态射都是同构的范畴和群是一一对应的。

证明 类似地，我们将这个对象上全部的态射（同构）看作一个集合，将元素的乘法定义为这些态射的复合。结合律和单位元依然成立。根据假设，每一个态射都是同构，所以每一个元素都有可逆元。此即得证。

1.3 函子

关于函子的讨论起源于代数拓扑。我们先举一个代数拓扑中的例子。

考虑带有基点的拓扑空间范畴 $\mathbf{Top}_\bullet$。这个范畴中的对象是 (X, x_0)，其中 X 是一个拓扑空间，x_0 是 X 上的一个基点。从 (X, x_0) 到 (Y, y_0) 上的态射指的是一个连续映射 $f \in \mathbf{Top}(X, Y)$，使得 $f(x_0) = y_0$。不难检验这的确是个范畴。

对于每一个 $(X, x_0) \in \mathbf{Top}_\bullet$，我们可以定义出基本群 $\pi_1(X, x_0)$。除此以外，对于任意的 $f \in \mathbf{Top}_\bullet((X, x_0), (Y, y_0))$，我们可以定义由 f 引出的（基本群之间的）群同态 $\pi_1(f) = f_* \in \mathbf{Grp}(\pi_1(X, x_0), \pi_1(Y, y_0))$。

π_1 满足以下两个条件。假设 $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0)$，$g \in \mathbf{Top}_\bullet((Y, y_0), (Z, z_0))$，$f \in \mathbf{Top}_\bullet((X, x_0), (Y, y_0))$。

1. $\pi_1(id_{(X, x_0)}) = id_{\pi_1(X, x_0)}$。
2. $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$。

换言之，π_1 把每一个带有基点的拓扑空间映到了一个群（基本群），并把每一个保留基点的连续映射映到对应群（基本群）的一个群同态。除此以外，π_1 把恒等连续映射映到恒等恒等群同态，把复合运算映到复合运算。

π_1 是一个从范畴到范畴的变换，我们称满足上面性质的范畴间的变换为一个函子。π_1 便是一个从带有基点的拓扑空间范畴到群范畴的一个函子。

我们不难看出，函子的性质也是非常好的。代数拓扑实际上就是研究从一个和拓扑相关的范畴到一个和代数相关的范畴上函子的一个学科。

定义 1.3 (函子)

令 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴，我们称 F 是一个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 的函子当且仅当

1. 对任意 $A \in \mathbf{C}$，我们定义了 $F(A) \in \mathbf{D}$，即函子把对象映到对象。
2. 对任意 $A, B \in \mathbf{C}$ 和 $f \in \mathbf{C}(A, B)$，我们定义了 $F(f) \in \mathbf{D}(F(A), F(B))$，即函子把态射映到态射。

3. 对任意 $A \in \mathbf{C}$，我们有 $F(id_A) = id_{F(A)}$，即函子把单位态射映到单位态射。
4. 对任意 $A, B, C \in \mathbf{C}$，$g \in \mathbf{C}(B, C)$ 和 $f \in \mathbf{C}(A, B)$，我们有 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$，即函子把复合态射映到复合态射。

♣

显然，基本群函子是个从带有基点的拓扑空间范畴到群范畴的一个函子。

下面，我们再看两个例子。

第一个例子是遗忘函子。

定义 1.4 (遗忘函子)

我们下面定义从群范畴 **Grp** 到集合范畴 **Set** 的遗忘函子 G。对任意群 $(A, \cdot)$，我们定义 $G((A, \cdot))$ 为集合 A，而对任意群同态 $f \in \mathbf{Grp}(G, G')$，我们定义 $G(f)$ 为这个映射 f。换言之，遗忘函子把群映到集合，把群同态映到映射，遗忘了群的结构。

♣

命题 1.4

从群范畴到集合范畴的遗忘函子是个函子。

♠

证明 显然，这个函子会把恒等群同态映到恒等映射，并且将同态的复合映到映射的复合。这就证明了遗忘函子是个函子。

接着，我们来看自由函子的例子。

定义 1.5 (自由函子)

我们下面定义从集合范畴 **Set** 到群范畴 **Grp** 的自由函子 F。对任意集合 S，我们定义 $F(S)$ 为由 S 生成的自由群。对任意映射 $f \in \mathbf{Set}(S, T)$，或 $f : S \to T$，我们定义 $F(f)$ 把 S 中的每个单词按 f 的规则映射为 T 中的一个单词。

♣

命题 1.5

从集合范畴到群范畴的自由函子是个函子。

♠

证明 A 上的恒等映射保持 A 上的每个元素，因此 F 把恒等映射映到恒等群同态。若 $g \in \mathbf{Set}(B, C)$，$f \in \mathbf{Set}(A, B)$，则 $F(g \circ f)$ 和 $F(g) \circ F(f)$ 都将 A 上的单词逐个先替换为 B 上的单词，再替换为 C 上的单词。

未来我们会知道，自由函子是遗忘函子的左伴随函子。

引理 1.5 (群作用的等价定义)

令 G 是一个群，我们可以将 G 视作一个只有一个对象的范畴。G 在一个集合上的一个群作用等价于一个从 G 到 **Set** 的函子。

♡

证明 F 是一个从 G 到 **Set** 的函子当且仅当

1. 我们指定 $F(G)$ 是某一个集合，称为集合 S。
2. 范畴 G 的每一个态射，即群 G 的每一个元素，都要被映到一个从 S 到 S 上的映射。
3. F 将范畴 G 的单位态射，即群 G 的恒等元，映射到 S 上的恒等映射。
4. 对任意 $a, b \in G$，我们有 $F(ab) = F(a) \circ F(b)$。换言之，进一步地，对任意 $s \in S$，我们有 $(ab)(s) = a(b(s))$。

显然，这和群作用的定义是等价的。

我们再证明两个小结论。

引理 1.6 (函子保持同构)

若 F 是一个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 的函子，则 F 把 $\mathbf{C}$ 中的同构映射到 $\mathbf{D}$ 中的同构。

♡

证明 假设 $A, B \in \mathbf{C}$，且 f 是一个从 A 到 B 的同构。我们只须证明 $F(f)$ 是一个从 $F(A)$ 到 $F(B)$ 的同构。

注意到 $f^{-1} \circ f = id_A$，且 $f \circ f^{-1} = id_B$。因此，$F\left(f^{-1}\right) \circ F(f) = F\left(id_A\right) = id_{F(A)}$，且 $F(f) \circ F\left(f^{-1}\right) = F\left(id_B\right) = id_{F(B)}$。根据同构的定义，$F(f)$ 是一个从 $F(A)$ 到 $F(B)$ 的同构。此即得证。

举个例子，若 $f: X \to Y$ 是个同胚，且 $f(x_0) = y_0$，则 X 在 x_0 点的基本群和 Y 在 y_0 的基本群同构。事实上，未来我们会知道，只要这两个空间同伦等价，它们的基本群就会同构。

除此以外，我们还可以定义函子的复合运算。

定义 1.6 (函子的复合)

若 G 是个从 $\mathbf{D}$ 到 $\mathbf{E}$ 的函子，且 F 是个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 的函子。对任意 $A, B \in \mathbf{C}$ 和 $f \in \mathbf{C}(A, B)$，我们定义

1. $(G \circ F)(A) = G(F(A))$。
2. $(G \circ F)(f) = G(F(f))$。

♣

引理 1.7

若 G 是个从 $\mathbf{D}$ 到 $\mathbf{E}$ 的函子，且 F 是个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 的函子，则 $G \circ F$ 是个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{E}$ 的函子。

♡

证明 令 $A, B, C \in \mathbf{C}$，$g \in \mathbf{C}(B, C)$，$f \in \mathbf{C}(A, B)$。

1. $(G \circ F)\left(id_A\right) = G\left(id_{F(A)}\right) = id_{G(F(A))} id_{(G \circ F)(A)}$。
2. $(G \circ F)(g \circ f) = G(F(g \circ f)) = G(F(g) \circ F(f)) = G(F(g)) \circ G(F(f)) = (G \circ F)(g) \circ (G \circ F)(f)$。

显然，这就告诉我们 $G \circ F$ 是个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{E}$ 的函子。

有时，我们会遇到反变函子。它和函子的唯一区别在最后一条，即 $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$。实际上，比起这种定义方法，我们采用另一种方法。

我们先定义对象完全相同，但是态射方向全部相反的范畴，称为对偶范畴。

定义 1.7 (对偶范畴)

令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，则 $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ 的对象是 $\mathbf{C}$ 中的对象，态射方向与 $\mathbf{C}$ 中的方向相反。我们称 $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ 为 $\mathbf{C}$ 的对偶范畴

♣

我们不难证明 $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ 也是一个范畴。

现在，我们来定义反变函子。

定义 1.8 (反变函子)

令 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴，则 F 是一个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 的反变函子当且仅当它是一个从 $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ 到 $\mathbf{D}$ 的函子。

♣

1.4 自然变换

如果说函子是从一个范畴到另一个范畴的“映射”，那么自然变换就是从一个函子到另一个函子的“映射”。当然，它们都需要满足一些额外的条件。

定义 1.9 (自然变换)

令 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴，F, G 都是从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 的函子，则 η 被称为一个从 F 到 G 的自然变换，当且仅当

1. 对任意 $A \in \mathbf{C}$，我们都定义了 $\eta(A) \in \mathbf{D}(F(A), G(A))$。
2. 对任意 $A, B \in \mathbf{C}$ 和 $f \in \mathbf{C}(A, B)$，我们有 $\eta(B) \circ F(f) = G(f) \circ \eta(A)$。

♣

我们来看一个例子。我们先给出几个定义。

定义 1.10

令 $\mathbf{CRing}$ 表示交换环范畴。$\mathbf{CRing}$ 中的对象是交换环，态射是交换环之间的环同态。

♣

CRing 显然是个范畴。单位态射是恒等环同态，环同态的复合还是环同态。

定义 1.11

给定 $n \in \mathbb{N}_1$，我们下面定义从 **CRing** 到 **Grp** 的函子 GL_n。对任意交换环 R，我们定义 $GL_n(R)$ 为 R 上全体 n 阶可逆 $n*n$ 矩阵在乘法下构成的群。对任意交换环的同态 $f: R \to R'$，$GL_n(f)$ 将 $GL_n(R)$ 中的每一个 R 中元素都按 f 的规则替换为 R' 中的元素。

证明 我们需要证明 $GL_n(f)$ 是良定义的，即对任意 $A \in GL_n(R)$，$GL_n(f)(A) \in GL_n(R')$。我们只须注意到 det 是关于矩阵各项的一个多项式，且环同态保持乘法和加法，就得知了 $\det(GL_n(f)(A)) = f(\det(A))$，其中 $\det(A)$ 是 R 中的一个单位，因此 $f(\det(A))$ 是 R' 中的一个单位。这就证明了 $GL_n(f)$ 是良定义的。

命题 1.6

给定 $n \in \mathbb{N}_1$，则 GL_n 是一个从 **CRing** 到 **Grp** 的函子。

证明 令 n 是一个正整数。令 $A, B, C \in$ **CRing**，$g \in \mathbf{CRing}(B, C)$，$f \in \mathbf{CRing}(A, B)$。

1. $GL_n(id_A) \in \mathbf{Grp}(GL_n(A), GL_n(A))$ 保持了每一个 A 上的 $n*n$ 可逆矩阵不变，因此是恒等群同态，即 $GL_n(id_A) = id_{GL_n(A)}$。
2. $GL_n(g \circ f)$ 将每一个 A 上的 $n*n$ 可逆矩阵中的每一项先根据 f 的规则替换为 B 的元素，再根据 g 的规则替换为 C 中的元素，即 $GL_n(g \circ f) = GL_n(g) \circ GL_n(f)$。

定义 1.12

下面我们定义从 **CRing** 到 **Grp** 的另一个函子 $*$。对任意交换环 $(R, +, \cdot)$，我们定义 $*(R) = R^\times$ 为所有单位所构成的乘法群。对任意环同态 $f: R \to R'$，我们将 $*(f): R^\times \to (R')^\times$ 定义为 $f|_{R^\times}$。

证明 我们需要证明 $*(f)$ 是良定义的，即对任意 R 的单位（乘法可逆元素）a，$f(a)$ 是 S 的单位。根据幺半群的理论，这是显然的。

命题 1.7

$*$ 是个从 **CRing** 到 **Grp** 的函子。

证明 令 $A, B, C \in$ **CRing**，$g \in \mathbf{CRing}(B, C)$，$f \in \mathbf{CRing}(A, B)$。

1. $*(id_A) = (id_A)|_{A^\times} = id_{A^\times}$。
2. $*(g \circ f) = (g \circ f)|_{A^\times} = g \circ f|_{A^\times} = g|_{B^\times} \circ f|_{A^\times} = *(g) \circ *(f)$。

定义 1.13

给定 $n \in \mathbb{N}_1$ 和 $R \in$ **CRing**，我们按 $\mathbb{R}$ 上的方式定义 $\det_R : GL_n(R) \to R^\times$。

注 所谓 $\mathbb{R}$ 上的方式，可以有多重等价的定义方式，最简单的方式可能是用余子式来递归地定义。

注 注意，和 $\mathbb{R}$ 上一样，det 是个从 $GL_n(R)$ 到 $R^\times$ 的群同态。

命题 1.8

给定 $n \in \mathbb{N}_1$，则 det 是一个从 GL_n 到 $*$ 上的自然变换。

证明 令 $R, R' \in$ **CRing**，$f \in \mathbf{CRing}(R, R')$，我们只须证明 $\det_{R'} \circ GL_n(f) = *(f) \circ \det(R)$。

令 $A \in GL_n(R)$。注意到 $(\det_{R'} \circ GL_n(f))(A) = \det_{R'}(GL_n(f)(A)) = f(\det_R(A)) = (*(f))(\det_R(A)) = (*(f) \circ \det_R)(A)$。

这就证明了 det 是一个从 GL_n 到 $*$ 上的自然变换。

下面，我们来证明自然变换的一些性质。为了方便，我们将定义融合在命题中。

命题 1.9 (自然变换的第一种复合)

若 $\mathbf{C},\mathbf{D}$ 是两个范畴，F,G,H 是三个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 的函子，η 是个从 F 到 G 的自然变换，η' 是个从 G 到 H 的自然变换，则 $\eta'\circ\eta$ 是个从 F 到 H 的自然变换。其中，对任意 $A\in\mathbf{C}$，我们定义 $(\eta'\circ\eta)(A)=\eta'(A)\circ\eta(A)\in\mathbf{D}(F(A),H(A))$。

证明 令 $A,B\in\mathbf{C}$，$f\in\mathbf{C}(A,B)$，我们只须证明 $(\eta'\circ\eta)(B)\circ F(f)=H(f)\circ(\eta'\circ\eta)(A)$。

利用 η 和 η' 的自然性，我们有

$$\begin{aligned}(\eta'\circ\eta)(B)\circ F(f)&=\eta'(B)\circ\eta(B)\circ F(f)\\&=\eta'(B)\circ G(f)\circ\eta(A)\\&=H(f)\circ\eta'(A)\circ\eta(A)\\&=H(f)\circ(\eta'\circ\eta)(A)\end{aligned}$$

这就证明了 $\eta'\circ\eta$ 是个从 F 到 H 的自然变换。

命题 1.10 (自然变换的第二种复合)

若 $\mathbf{C},\mathbf{D},\mathbf{E}$ 是三个范畴，F,F' 是两个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 的函子，G,G' 是两个从 $\mathbf{D}$ 到 $\mathbf{E}$ 的函子，η 是个从 F 到 F' 的自然变换，η' 是个从 G 到 G' 的自然变换，则 $\eta'*\eta$ 是个从 $G\circ F$ 到 $G'\circ F'$ 的自然变换。其中。对任意 $A\in\mathbf{C}$，我们定义 $(\eta'*\eta)(A)=\eta'_{F'(A)}\circ G(\eta_A)$。

注 等价地，我们可以定义 $(\eta'*\eta)(A)=\eta'_{F'(A)}\circ G(\eta_A)=G'(\eta_A)\circ\eta'_{F(A)}$。

证明 令 $A,B\in\mathbf{C}$，而 $f\in\mathbf{C}(A,B)$，我们只须证明 $(\eta'*\eta)(B)\circ(G\circ F)(f)=(G'\circ F')(f)\circ(\eta'*\eta)(A)$。而这是因为

$$\begin{aligned}(\eta'*\eta)(B)\circ(G\circ F)(f)&=\eta'_{F'(B)}\circ G(\eta_B)\circ G(F(f))\\&=G'(\eta_B)\circ\eta'_{F(B)}\circ G(F(f))\\&=G'(\eta_B)\circ G'(F(f))\circ\eta'_{F(A)}\\&=G'\left(\eta_B\circ F(f)\right)\circ\eta'_{F(A)}\\&=G'\left(F'(f)\circ\eta_A\right)\circ\eta'_{F(A)}\\&=(G'\circ F')(f)\circ G'(\eta_A)\circ\eta'_{F(A)}\\&=(G'\circ F')(f)\circ\eta'_{F'(A)}\circ G(\eta_A)\\&=(G'\circ F')(f)\circ(\eta'*\eta)(A)\end{aligned}$$

此即得证。

事实上，我们可以证明任意两个范畴间的所有函子与函子的自然变换能构成一个范畴。

定义 1.14

令 $\mathbf{C},\mathbf{D}$ 是一个范畴，我们下面定义范畴 $[\mathbf{C},\mathbf{D}]$。$[\mathbf{C},\mathbf{D}]$ 中的对象指的是从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 的函子。对于任意 $F,G\in[\mathbf{C},\mathbf{D}]$，从 F 到 G 的态射指的是从 F 到 G 的自然变换。

命题 1.11

若 $\mathbf{C},\mathbf{D}$ 是一个范畴，则 $[\mathbf{C},\mathbf{D}]$ 是个范畴。

证明 我们已经定义过自然变换的复合运算。结合律是显然的。我们只须找到单位态射（恒等自然变换）。

令 $F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$，我们令 $id_F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}](F, F)$ 表示单位态射，对任意 $A \in \mathbf{C}$，定义为 $id_F(A) = id_{F(A)}$。因为 $id_{F(A}$ 是个从 $F(A)$ 到 $F(A)$ 的态射，所以 id_F 是良定义的。

接着，令 $G \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$，$\eta \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}](F, G)$，$\eta' \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}](G, F)$。我们只须证明 $\eta \circ id_F = \eta$ 以及 $id_F \circ \eta' = \eta'$。

令 $A \in \mathbf{C}$，我们只须注意到 $(\eta \circ id_F)(A) = \eta(A) \circ id_{F(A)} = \eta(A)$ 以及 $(id_F \circ \eta')(A) = id_{F(A)} \circ \eta'(A)$，就证明了这个命题。

在一个范畴中，我们说两个对象同构当且仅当存在一个它们之间的同构。类似地，我们可以讨论两个函子是否同构。

定义 1.15 (自然同构)

令 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴，F, G 是两个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 上的函子。我们称 F 和 G（作为函子）是同构的，当且仅当它们作为 $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ 上的对象是同构的；等价地，当且仅当存在自然变换 $\eta \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}](F, G)$ 与 $\eta' \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}](G, F)$，使得 $\eta \circ \eta' = id_F$ 且 $\eta' \circ \eta = id_G$。在这样的条件下，我们称 η 是一个从 F 到 G 的自然同构。♣

引理 1.8 (自然同构的判别法则)

令 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴，F, G 是两个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 上的函子，则 η 是一个从 F 到 G 的自然同构当且仅当 η 是一个从 F 到 G 的自然变换，并且对任意 $A \in \mathbf{C}$，$\eta_A \in \mathbf{D}(F(A), G(A))$ 都是一个同构。♡

证明 先证充分性。假设 η 是一个从 F 到 G 的自然同构，则我们取 $\eta' \in\in [\mathbf{C}, \mathbf{D}](G, F)$，使得 $\eta \circ \eta' = id_F$ 且 $\eta' \circ \eta = id_G$。令 $A \in \mathbf{C}$，我们只须证明 η_A 是一个同构。注意到 $(\eta \circ \eta')(A) = \eta_A \circ \eta'_A = id_{F(A)}$。同理，$(\eta' \circ \eta)(A) = \eta'_A \circ \eta_A = id_{G(A)}$。因此，$\eta_A$ 是一个从 $F(A)$ 到 $G(A)$ 的同构。

再证必要性。假设 η 是一个从 F 到 G 的自然变换，且对任意 $A \in \mathbf{C}$，η_A 都是一个同构。我们只须对任意 $A \in \mathbf{C}$，令 $\eta'_A = (\eta_A)^{-1}$。这显然是良定义的。同样显然的是 $\eta \circ \eta' = id_F$ 且 $\eta' \circ \eta = id_G$。

此即得证。

进一步地，我们可以定义范畴的同构与范畴的等价。

定义 1.16 (范畴的同构)

令 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴，我们称它们是同构的当且仅当存在 $F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$，$G \in [\mathbf{D}, \mathbf{C}]$，使得 $G \circ F = id_{\mathbf{C}}$，$F \circ G = id_{\mathbf{D}}$。♣

定义 1.17 (范畴的等价)

令 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴，我们称它们是等价的当且仅当存在 $F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$，$G \in [\mathbf{D}, \mathbf{C}]$，使得 $G \circ F \simeq id_{\mathbf{C}}$，$F \circ G \simeq id_{\mathbf{D}}$。♣

我们可以给出两个判别法则。为此，我们引入几个定义。

定义 1.18 (函子的性质)

令 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴，F 是一个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 的函子。我们称 F 是：

1. 忠实的，若对任意 $A, B \in \mathbf{C}$，$f \mapsto F(f)$ 是单的。
2. 全的，若对任意 $A, B \in \mathbf{C}$，$f \mapsto F(f)$ 是满的。
3. 单的，若对任意 $A, B \in \mathbf{C}$，我们有 $F(A) = F(B) \implies A = B$。
4. 满的，若对任意 $D \in \mathbf{D}$，我们可以找到一个 $C \in \mathbf{C}$，使得 $F(C) = D$。
5. 本质满的，若对任意 $D \in \mathbf{D}$，我们可以找到一个 $C \in \mathbf{C}$，使得 $F(C) \simeq D$。

♣

命题 1.12 (范畴同构的判别法则)

令 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴，则它们是同构的当且仅当存在一个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 的函子 F，使得 F 是忠实的、全的、单的和满的。♠

证明 先证充分性。假设 $F \in [\mathbf{C},\mathbf{D}]$ 是个同构，则存在 $G \in [\mathbf{D},\mathbf{C}]$，使得 $G \circ F = id_{\mathbf{C}}$ 且 $F \circ G = id_{\mathbf{D}}$。从对象的角度看，显然 F 既是单的，也是满的。从态射的角度看，注意到 $G \circ F = id_{\mathbf{C}}$ 和 $F \circ G = id_{\mathbf{D}}$ 都是单位态射，不仅保持对象不动，也保持态射不动。因此 F 也既是忠实的，也是全的。

再证必要性。假设 $F \in [\mathbf{C},\mathbf{D}]$ 是忠实的、全的、单的和满的，则我们可以先找到一个 $G \in [\mathbf{D},\mathbf{C}]$，将 $\mathbf{D}$ 中的对象是映到 $\mathbf{C}$ 中的，再对任意 $C, D \in \mathbf{D}$，将 $\mathbf{D}$ 中从 C 到 D 的态射映到 $\mathbf{C}$ 中从 $G(C)$ 到 $G(D)$ 的态射。

此即得证。

命题 1.13 (范畴等价的判别法则)

令 $\mathbf{C},\mathbf{D}$ 是两个范畴，则它们是等价的当且仅当存在一个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{D}$ 的函子 F，使得 F 是忠实的、全的和本质满的。

证明 先证充分性。假设 $F \in [\mathbf{C},\mathbf{D}]$，$G \in [\mathbf{C},\mathbf{D}]$，$\eta \in [\mathbf{C},\mathbf{D}](G \circ F, id_{\mathbf{C}})$ 是个自然同构，$\eta' \in [\mathbf{C},\mathbf{D}](F \circ G, id_{\mathbf{D}})$ 是个自然同构。

令 $D \in \mathbf{D}$，则 η'_D 是一个从 $(F \circ G)(D)$ 到 D 的同构。这就证明了 F 是本质满的。进一步地，对任意 $A, B \in \mathbf{C}$ 和 $f \in \mathbf{C}[A,B]$，$\eta_B \circ (G \circ F)(f) = f \circ \eta_A$，因此 $(G \circ F)(f) = \eta_B^{-1} \circ f \circ \eta_A$。类似地，对任意 $C, D \in \mathbf{D}$ 和 $f \in \mathbf{D}[C,D]$，我们有 $(F \circ G)(f) = \eta_D^{-1} \circ f \circ \eta_C$。这就证明了 F 是忠实的和全的。

再证必要性。假设 $F \in [\mathbf{C},\mathbf{D}]$ 是忠实的、全的和本质满的。我们下面定义 $G \in [\mathbf{D},\mathbf{C}]$。对任意 $D \in \mathbf{D}$，根据本质满性，我们可以找到一个 $C \in \mathbf{C}$，使得 $F(C)$ 同构于 D。我们令 $G(D) = C$。因为 $F(C)$ 同构于 D，所以 $F(C)$ 中的态射和 D 的态射一一对应。再令 $D' \in \mathbf{D}$，我们可以找到 $C' \in \mathbf{C}$，使得 $F(C')$ 同构于 D'。由于 F 是忠实的和全的，我们可以将从 D 到 D' 的态射定义得与从 C 到 C' 态射一一对应。这样，根据定义，我们很快就发现 $G \circ F \simeq id_{\mathbf{C}}$，并且 $F \circ G \simeq id_{\mathbf{D}}$。

此即得证。

第 2 章 Yoneda 引理

2.1 小范畴和局部小范畴

定义 2.1 (小范畴)

我们称 $\mathbf{C}$ 是一个小范畴，若 $\mathrm{ob}(C)$ 和 $\mathrm{hom}(C)$ 是两个集合。♣

定义 2.2 (局部小范畴)

我们称 $\mathbf{C}$ 是一个局部小范畴，若对于任意 $A, B \in \mathbf{C}$，$\mathbf{C}(A, B)$ 都是一个集合。♣

常见的 **Grp**, **Top** 都不是小范畴，但是是局部小范畴。

在本章中，我们感兴趣的范畴都是局部小的。

2.2 Hom 函子

我们首先给出 Hom 函子的定义。

定义 2.3 (Hom 函子)

令 $\mathbf{C}$ 是一个局部小范畴，$A \in \mathbf{C}$，我们下面定义 Hom 函子 $h_A \in [\mathbf{C}, \mathbf{Set}]$。对任意 $X \in \mathbf{C}$，我们定义 $h_A(X) = \mathbf{C}[A, X]$。若 $X, Y \in \mathbf{C}$，$f \in \mathbf{C}[X, Y]$，我们下面定义 $h_A(f) \in \mathbf{Set}(h_A(X), h_A(Y)) = \mathbf{Set}(\mathbf{C}[A, X], \mathbf{C}[A, Y])$。若 $g \in \mathbf{C}[A, X]$，则 $h_A(f)(g)$ 被定义为 $f \circ g$。♣

命题 2.1

令 $\mathbf{C}$ 是一个局部小范畴，$A \in \mathbf{C}$，则 Hom 函子 $h_A \in [\mathbf{C}, \mathbf{Set}]$。♠

证明 令 $X, Y, Z \in \mathbf{C}$，$g \in \mathbf{C}[Y, Z]$，$f \in \mathbf{C}[X, Y]$，$h \in \mathbf{C}[A, X]$。

1. 因为 $h_A(id_X)(f) = id_X \circ f = f$，所以 $h_A(id_X) = id_{\mathbf{C}[A,X]} = id_{h_A(X)}$。
2. 因为 $h_A(g \circ f)(h) = g \circ f \circ h = h_A(g)(f \circ h) = (h_A(g) \circ h_A(f))(h)$，所以 $h_A(g \circ f) = h_A(g) \circ h_A(f)$。

综上所述，我们就证明了 h_A 是一个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{Set}$ 的函子。

那么 h 是一个什么对象呢？我们可以认为 $h \in [\mathbf{C}^{\mathrm{op}}, [\mathbf{C}, \mathbf{Set}]]$。换言之，$h$ 是一个从 $\mathbf{C}$ 到 $[\mathbf{C}, \mathbf{Set}]$ 的反变函子。

定义 2.4

我们下面定义函子 $h \in [\mathbf{C}^{\mathrm{op}}, [\mathbf{C}, \mathbf{Set}]]$。对任意 $A \in \mathbf{C}$，我们定义 $h(A) = h_A$。对任意 $A, B \in \mathbf{C}$ 和 $f \in \mathbf{C}(A, B)$，我们下面定义 $h(f) \in [\mathbf{C}, \mathbf{Set}](h_B, h_A)$。对任意 $C \in \mathbf{C}$，我们下面定义 $h(f) \in \mathbf{Set}(h_B(C), h_A(C)) = \mathbf{Set}(\mathbf{C}(B, C), \mathbf{C}(A, C))$。对任意 $g \in \mathbf{C}(B, C)$，我们定义 $h(f)(g) = g \circ f$。♣

命题 2.2

令 $\mathbf{C}$ 是一个局部小范畴，则 $h \in [\mathbf{C}^{\mathrm{op}}, [\mathbf{C}, \mathbf{Set}]]$。♠

证明 令 $X, Y, Z, W \in \mathbf{C}$，$g \in \mathbf{C}[Y, Z]$，$f \in \mathbf{C}[X, Y]$，$k \in \mathbf{C}[Z, W]$。

1. 因为 $h(id_X)(f) = f \circ id_X = f$，所以 $h(id_X) = id_{h_X}$。
2. 因为 $h(g \circ f)(k) = k \circ g \circ f = h(f)(k \circ g) = (h(f) \circ h(g))(k)$，所以 $h(g \circ f) = h(g) \circ h(f)$。

综上所述，我们就证明了 h 是一个从 $\mathbf{C}$ 到 $[\mathbf{C}, \mathbf{Set}]$ 的反变函子。

2.3 Yoneda 引理

命题 2.3 (Yoneda 引理)

令 $\mathbf{C}$ 是一个局部小的范畴。对任意 $A \in \mathbf{C}$ 和 $F \in [\mathbf{C}, \mathbf{Set}]$，我们有

$$[h_A, F] \simeq F(A)$$

这里的同构有两层含义：它不仅对于 A 是一个自然同构，而且对于 F 也是一个自然同构。

证明

我们首先定义 $\hat{\cdot}$。对任意 $\eta \in [h_A, F]$，我们定义 $\hat{\eta} = \eta_A(id_A)$。

接下来，我们来定义 $\bar{\cdot}$。对任意 $x \in F(A)$，我们下面定义 $\overline{x} \in [h_A, F]$。对任意 $B \in \mathbf{C}$，我们下面定义 $\overline{x}(B) \in \mathbf{Set}(h_A(B), F(B)) = \mathbf{Set}(\mathbf{C}(A, B), F(B))$。对任意 $f \in \mathbf{C}(A, B)$，我们定义 $\overline{x}_B(f) = F(f)(x)$。

现在，我们分别来证明 $\bar{\cdot} \circ \hat{\cdot} = id_{[h_A, F]}$，以及 $\hat{\cdot} \circ \bar{\cdot} = id_{F(A)}$。

1. 令 $\eta \in [h_A, F]$，$B \in \mathbf{C}$，$f \in \mathbf{C}(A, B)$。我们有 $\bar{\cdot}(\hat{\eta})_B(f) = F(f)(\hat{\eta}) = F(f)(\eta_A(id_A)) = (F(f) \circ \eta_A)(id_A) = (\eta_B \circ h_A(f))(id_A) = \eta_B(f \circ id_A) = \eta_B(f)$。这就证明了 $\bar{\cdot} \circ \hat{\cdot} = id_{[h_A, F]}$。
2. 令 $x \in F(A)$。我们有 $\hat{\cdot}(\overline{x}) = \overline{x}_A(id_A) = F(id_A)(x) = id_{F(A)}(x) = x$。这就证明了 $\hat{\cdot} \circ \bar{\cdot} = id_{F(A)}$。

最后，我们分别来证明这个同构对于 A 和 F 来说都是一个自然同构。

1. 取定 $F \in [\mathbf{C}, \mathbf{Set}]$。令 $A, B \in \mathbf{C}$，$f \in \mathbf{C}(A, B)$。对 $\eta \in [h_A, F]$，我们下面定义 $[h, F](f)(\eta) \in [h_B, F]$。之前，我们已经定义了 $h(f) \in [\mathbf{C}, \mathbf{Set}](h_B, h_A)$，所以我们当然定义 $[h, F](f)(\eta) = \eta \circ h(f)$。

   现在，我们只须证明 $\hat{\cdot}_B \circ [h, F](f) = F(f) \circ \hat{\cdot}_A$。令 $\eta \in [h_A, F]$。

   一方面，$(\hat{\cdot}_B \circ [h, F](f))(\eta) = (\hat{\cdot}_B)([h, F])(f)(\eta)) = (\hat{\cdot}_B)(\eta \circ h(f)) = (\eta \circ h(f))_B(id_B) = (\eta_B \circ h(f)_B)(id_B) = \eta_B(id_B \circ f) = \eta_B(f)$。

   另一方面，$(F(f) \circ \hat{\cdot}_A)(\eta) = F(f)(\hat{\cdot}_A(\eta)) = F(f)(\eta_A(id_A)) = (F(f) \circ \eta_A)(id_A) = (\eta_B \circ h_A(f))(id_A) = \eta_B(h_A(f)(id_A)) = \eta_B(id_A \circ f) = \eta_B(f)$。

   因此，这个同构对于 A 来说是个自然同构。
2. 取定 $A \in \mathbf{C}$。令 $F, G \in [\mathbf{C}, \mathbf{Set}]$，$\xi \in [\mathbf{C}, \mathbf{Set}](F, G)$。对 $\eta \in [h_A, F]$，我们定义 $[h_A, \cdot](\xi)(\eta) = \xi \circ \eta$。

   现在，我们只须证明 $\hat{\cdot}_G \circ [h_A, \cdot](\xi) = \xi_A \circ \hat{\cdot}_F$。令 $\eta \in [h_A, F]$。

   一方面，$(\hat{\cdot}_G \circ [h_A, \cdot](\xi))(\eta) = (\hat{\cdot}_G)([h_A, \cdot](\xi)(\eta)) = (\hat{\cdot}_G)(\xi \circ \eta) = (\xi \circ \eta)_A(id_A) = (\xi_A \circ \eta_A)(id_A)$

   另一方面，$(\xi_A \circ \hat{\cdot}_F)(\eta) = (\xi_A \circ \eta_A)(id_A)$

   因此，这个同构对于 F 来说也是个自然同构。

综上所述，我们就证明了 Yoneda 引理。

注 Yoneda 引理的证明实际上是非常繁琐的。原则上，我们可以将这个引理拆成几个小引理来证，可是这样会牺牲命题的一致性，所以我们没有这么做。实际上，这里的证明也并没有任何出人意料的地方，所有的构造都是可以轻易地想到的。因此，我们可以总结称 Yoneda 引理是不难证的。

当然，我们也有反变形式的 Yoneda 引理。

首先，我们可以类似地定义反变 Hom 函子 h^A。这是个从 $\mathbf{C}$ 到 $\mathbf{Set}$ 上的反变函子。此时，$A \mapsto h^A$ 却是一个从 $\mathbf{C}$ 到 $[\mathbf{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ 上的函子。

很快，我们就得到类似的反变形式的 Yoneda 引理。

命题 2.4

令 $\mathbf{C}$ 是一个局部小的范畴。对任意 $A \in \mathbf{C}$ 和 $G \in [\mathbf{C}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$，我们有

$$\left[h^A, G\right] \simeq G(A)$$

这里的同构有两层含义：它不仅对于 A 是一个自然同构，而且对于 G 也是一个自然同构。

证明 无需证明，因为该命题和 Yoneda 引理是完全对称的。

第 3 章 伴随函子

3.1 介绍

令 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴。有时，我们能找到一个函子 $F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ 和一个函子 $G \in [\mathbf{D}, \mathbf{C}]$，使得对任意 $X \in \mathbf{C}$ 和 $Y \in \mathbf{D}$ 都有 $\mathbf{C}(X, G(Y))$ 和 $\mathbf{D}(F(X), Y)$ 一一对应。更进一步，我们要求这样的一一对应对 X 和 Y 来说都是自然同构。我们称这样的 F 是 G 的左伴随；反过来，G 是 F 的右伴随。

实际上，这样的例子是非常普遍的。我们来举几个例子。为了简洁性，我们将自然性的结论放到下一节中证明。

考虑从 **Set** 到 **Grp** 的自由函子 F 和从 **Grp** 到 **Set** 的遗忘函子 G。任取一个集合 S 和一个群 A。利用自由群的知识，我们不难发现，从 $F(S)$ 到 A 的群同态和从 S 到 $G(A)$ 的映射是一一对应的。怎么一一对应呢？事实上，因为 $S \subset F(S)$，所以每一个从 $F(S)$ 到 A 的群同态当然给出了 S 的每一个元素的像；反过来，只要确定了 S 的像，我们就可以唯一确定地定义出 $F(S)$ 在群同态下的像——这是根据群同态的性质。因此，自由函子是遗忘函子的左伴随。

考虑从 **Grp** 到 $\mathbf{Grp}^2$ 的对角函子 Δ 和从 $\mathbf{Grp} \times \mathbf{Grp}$ 到 **Grp** 的乘积函子 π，分别定义为 $\Delta(G) = (G, G)$ 和 $\pi(G, G') = G \times G'$。现在令 $G \in \mathbf{Grp}$ 以及 $(G_1, G_2) \in \mathbf{Grp} \times \mathbf{Grp}$。我们需要证明从 (G, G) 到 (G_1, G_2) 的群同态和从 G 到 $G_1 \times G_2$ 的群同态是一一对应的。事实上，从 (G, G) 到 (G_1, G_2) 的群同态就是两个群同态，一个从 G 到 G_1，另一个从 G 到 G_2。利用群论的知识，这是显然的。因此，对角函子是乘积函子的左伴随。

考虑从 **Ab** 到 **Grp** 的嵌入函子 i 和从 **Grp** 到 **Ab** 的阿贝尔化函子 $\cdot^{\mathrm{ab}}$。令 A 是一个阿贝尔群，G 是一个群，则从 A 到 G^{ab} 的（阿贝尔群的）群同态和从 $i(A) = A$ 到 G 的群同态是一一对应的。根据阿贝尔化的泛性质，这是显然的。因此，嵌入函子是阿贝尔化函子的左伴随。

下面，我们给出定义。

3.2 伴随函子

定义 3.1 (伴随函子)

假设 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴，$F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$，$G \in [\mathbf{D}, \mathbf{C}]$。我们称 F 是 G 的左伴随，或者 G 是 F 的右伴随，当且仅当对任意 $X \in \mathbf{C}$ 和 $Y \in \mathbf{D}$，都有 $\mathbf{C}(X, G(Y))$ 和 $\mathbf{D}(F(X), Y)$ 一一对应，并且这样的一一对应对 X 和 Y 都是自然同构。具体地，我们指的是函子 $\mathbf{C}(-, G(Y)), \mathbf{D}(F(-), Y) \in [\mathbf{C}^{op}, \mathbf{Set}]$ 是自然同构的，且函子 $\mathbf{C}(X, G(-)), \mathbf{D}(F(X), -) \in [\mathbf{D}, \mathbf{Set}]$ 是自然同构的。

♣

命题 3.1

从 **Set** 到 **Grp** 的自由函子 F 是从 **Grp** 到 **Set** 的遗忘函子 G 的一个左伴随。

♠

证明 令 $S \in \mathbf{Set}$，$A \in \mathbf{Grp}$，则 $F(S)$ 是由 S 生成的自由群。对任意 $f \in \mathbf{Set}(S, F(A))$，即任意映射 $f : S \to A$，我们下面定义 $\hat{f} \in \mathbf{Grp}(F(S), A)$。$\hat{f}$ 将 $F(S)$ 中每一个单词的每一个 $s \in S$ 都按 f 改成 A 中的元素。反过来，对于任意 $g \in \mathbf{Grp}(F(S), A)$，我们定义 $\overline{g} \in \mathbf{Set}(S, G(A))$ 为 $\overline{g} = g|_S$。

根据上一节的知识，$\hat{\cdot}$ 和 $\overline{\cdot}$ 显然都是一一对应，且互为逆映射。

接着，我们证明 $\mathbf{Set}(-, G(A)), \mathbf{Grp}(F(-), A) \in [\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ 是自然同构的。为了方便。我们称这两个函子分别为 H 和 H'。

令 $S, T \in \mathbf{Set}$，$f \in \mathbf{Set}(S, T)$。令 $\eta_A = \hat{\cdot} = \hat{\cdot}_S = \hat{\cdot}_{S,A}$。在 Hom 函子中，我们已经定义过 $H(f)(g) = g \circ f$。不难发现，$H'(f)$ 的合适定义为 $H'(f)(g) = g \circ F(f)$。我们只须证明 $\hat{\cdot}_T \circ H(f) = H'(f) \circ \hat{\cdot}_S$，而这是因为

$$(\hat{\cdot}_T \circ H(f))(g) = \hat{\cdot}_T(g \circ f) = \widehat{g \circ f}$$

$$(H'(f) \circ \hat{\cdot}_S)(g) = \hat{g} \circ F(f)$$

以及显然地，$\widehat{g \circ f} = \hat{g} \circ \hat{f} = \hat{g} \circ F(f)$。

最后，我们证明 $\mathbf{Set}(S, G(-)), \mathbf{Grp}(F(S), -) \in [\mathbf{Grp}, \mathbf{Set}]$ 是自然同构的。

令 $A, B \in \mathbf{Grp}$，$f \in \mathbf{Grp}(A, B)$。为了方便，我们称这两个函子为 L 和 L'。同理，我们定义 $L(f)(g) = G(f) \circ g$ 以及 $L'(f)(g) = f \circ g$，其中 $G(f)$ 指的是映射 $f \in \mathbf{Set}(A, B)$。我们定义 $\eta_A = \hat{\cdot} = \hat{\cdot}_A = \hat{\cdot}_{S,A}$。我们只须证明 $\eta_B \circ L(f) = L'(f) \circ \eta_A$，而这是因为

$$(\eta_B \circ L(f))(g) = \hat{\cdot}(G(f) \circ g) = \widehat{G(f) \circ g} = \widehat{G(f)} \circ g$$

$$(L'(f) \circ \eta_A)(g) = f \circ \hat{g}$$

除此以外，注意到 f 本身是个群同态，因此 $\widehat{G(F)} = f$。

综上所述，我们就证明了自由函子是遗忘函子的左伴随。

命题 3.2

从 $\mathbf{Grp}$ 到 $\mathbf{Grp}^2$ 的对角函子 Δ 是从 $\mathbf{Grp}^2$ 到 $\mathbf{Grp}$ 的乘积函子 π 的一个左伴随。

证明 令 $G, G_1, G_2 \in \mathbf{Grp}$。对任意 $f \in \mathbf{Grp}(G, \pi(G_1, G_2)) = \mathbf{Grp}(G, G_1 \times G_2)$，我们定义 $\hat{f} \in \mathbf{Grp}^2(\Delta(G), (G_1, G_2)) = \mathbf{Grp}^2((G, G), (G_1, G_2))$ 为 $\hat{f} = [f_1, f_2] = [\pi_1 \circ f, \pi_2 \circ f]$。反过来，对任意 $g \in \mathbf{Grp}^2(\Delta(G), (G_1, G_2))$=$\mathbf{Grp}^2((G, G), (G_1, G_2))$，我们定义 $\overline{g} \in \mathbf{Grp}(G, \pi(G_1, G_2)) = \mathbf{Grp}(G, G_1 \times G_2)$ 为 $\overline{g} = (g_1, g_2)$。显然，$\hat{\cdot}$ 和 $\bar{\cdot}$ 给出了一个我们需要的一一对应，并且互为逆映射。

接着，我们来证明函子 $\mathbf{Grp}(-, G_1 \times G_2), \mathbf{Grp}^2(\Delta(-), (G_1, G_2)) \in [\mathbf{Grp}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set}]$ 是自然同构的。令 $G, G' \in \mathbf{Grp}$，$f \in \mathbf{Grp}(G, G')$。为了方便，令这个两个函子分别为 H 和 H'。我们当然定义 $H(f)(g) = g \circ f$，$H'(f)([g_1, g_2]) = [g_1, g_2] \circ \Delta(f) = [g_1, g_2] \circ [f, f] = [g_1 \circ f, g_2 \circ f]$，以及 $\eta_G = \hat{\cdot}_G$。

下面，我们只须证明 $\eta_{G'} \circ H(f) = H'(f) \circ \eta_G$。而这是因为

$$(\eta'_G \circ H(f))(g) = \widehat{g \circ f} = [\pi_1 \circ g \circ f, \pi_2 \circ g \circ f]$$

以及

$$(H'(f) \circ \eta_G)(g) = \widehat{g} \circ \Delta(f) = [\pi_1 \circ g, \pi_2 \circ g] \circ f = [\pi_1 \circ g \circ f, \pi_2 \circ g \circ f]$$

最后，我们来证明函子 $\mathbf{Grp}(G, \pi(-)), \mathbf{Grp}^2(\Delta(G), -) \in [\mathbf{Grp}^2, \mathbf{Set}]$ 是自然同构的。令 $(G_1, G_2), (G_1', G_2') \in \mathbf{Grp}^2$，$[f_1, f_2] \in \mathbf{Grp}^2((G_1, G_2), (G_1', G_2'))$。为了方便，令这个函子分别为 L 和 L'。我们当然定义 $L([f_1, f_2])(g) = \pi([f_1, f_2]) \circ g = (f_1 \circ \pi_1, f_2 \circ \pi_2) \circ g = (f_1 \circ \pi_1 \circ g, f_2 \circ \pi_2 \circ g) = (f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2)$，以及 $L'([f_1, f_2])([g_1, g_2]) = [f_1, f_2] \circ [g_1, g_2] = [f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2]$。

下面，我们只须证明 $\eta_{(G_1', G_2')} \circ L([f_1, f_2]) = L'([f_1, f_2]) \circ \eta_{(G_1, G_2)}$。而这是因为

$$(\eta_{(G_1', G_2')} \circ L([f_1, f_2]))(g) = (f_1 \circ \widehat{g_1, f_2} \circ g_2) = [f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2]$$

以及

$$(L'([f_1, f_2]) \circ \eta_{G_1, G_2})(g) = [f_1, f_2] \circ [g_1, g_2] = [f_1 \circ g_1, f_2 \circ g_2]$$

综上所述，我们就证明了对角函子是乘积函子的一个左伴随。

命题 3.3

从 $\mathbf{Grp}$ 到 $\mathbf{Ab}$ 的阿贝尔化函子 $\cdot^{\mathrm{ab}}$ 是从 $\mathbf{Ab}$ 到 $\mathbf{Grp}$ 的嵌入函子 i 的左伴随。

证明

由于证明是类似的，所以我们会跳过一些细节，尽可能快地证明这个命题。

令 $G, G' \in \mathbf{Grp}$，$A, B \in \mathbf{Ab}$，$f \in \mathbf{Grp}(G, i(A))$，$g \in \mathbf{Ab}(G^{\mathrm{ab}}, A)$。我们定义 $\hat{f} = f^{\mathrm{ab}}$，$\overline{g} = g \circ \pi$。利用群论的知识，$\hat{}$ 和 $\bar{}$ 显然都是一一对应，并且互为逆映射。

我们先证明 $\hat{}$ 对于 G 是一个自然同构。

令 $f \in \mathbf{Grp}(G, G')$。令 $H = \mathbf{Grp}(-, i(A))$，$H' = \mathbf{Ab}(-^{\mathrm{ab}}, A)$。我们只须证明 $\hat{}_{G'} \circ H(f) = H'(f) \circ \hat{}_{G}$，而这是因为

$$(\hat{}_{G'} \circ H(f))(g) = \widehat{g \circ f} = (g \circ f)^{\mathrm{ab}} = g^{\mathrm{ab}} \circ f^{\mathrm{ab}}$$

以及

$$(H'(f) \circ \hat{}_{G})(g) = \hat{g} \circ f^{\mathrm{ab}} = g^{\mathrm{ab}} \circ f^{\mathrm{ab}}$$

我们再证明 $\hat{}$ 对于 A 是一个自然同构。

令 $f \in \mathbf{Ab}(A, B)$。令 $H = \mathbf{Grp}(G, i(-))$，$H' = \mathbf{Ab}(G^{\mathrm{ab}}, -)$。我们只须证明 $\hat{}_{B} \circ H(f) = H'(f) \circ \hat{}_{A}$，而这是因为

$$(\hat{}_{B} \circ H(f))(g) = \widehat{i(f) \circ g} = f^{\mathrm{ab}} \circ g^{\mathrm{ab}} = f \circ g^{\mathrm{ab}}$$

以及

$$(H'(f) \circ \hat{}_{A})(g) = f \circ \hat{g} = f \circ g^{\mathrm{ab}}$$

综上所述，我们就证明了阿贝尔化函子是嵌入函子的一个左伴随。

3.3 泛态射

为了更好地理解伴随，我们此时引入泛态射。

定义 3.2 (泛态射)

令 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴，$F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ 是一个函子，$X \in \mathbf{D}$，$A \in \mathbf{C}$，$u \in \mathbf{D}(X, F(A))$。我们称 (A, u) 是一个从 X 到 F 的泛态射当且仅当对任意 $A' \in \mathbf{C}$ 和任意 $f \in \mathbf{D}(X, F(A'))$，都存在唯一的态射 $h \in \mathbf{C}(A, A')$，使得 $f = F(h) \circ u$。

泛态射有一个重要的性质：若存在则唯一，并且是在唯一的同构下唯一。我们下面进一步阐释这一性质。

命题 3.4 (泛态射的泛性质)

令 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴，$F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ 是一个函子，$X \in \mathbf{D}$。从 X 到 F 的泛态射 (A, u) 若存在则唯一，并且在唯一的同构下唯一。换言之，如果 (A, u)，(A', u') 是两个从 X 到 F 的泛态射，则存在唯一的同构 $h \in \mathbf{C}(A, A')$，使得 $u' = F(h) \circ u$。

证明 假设 (A, u)，(A', u') 是两个泛态射，则我们分别可以取 $h \in \mathbf{C}(A, A')$，$h' \in \mathbf{C}(A', A)$，使得 $u' = F(h) \circ u$，$u = F(h') \circ u'$。特别地，这告诉我们 $u = F(h') \circ u' = F(h') \circ F(h) \circ u = F(h' \circ h) \circ u$。注意到对于 $u \in \mathbf{D}(X, F(A))$，我们有唯一的 $k \in \mathbf{C}(A, A)$，使得 $u = F(k) \circ u$。这样的 k 显然是 id_A。因此，根据泛态射的定义，我们必须有

$h' \circ h = id_A$。利用对称性，同理可知 $h \circ h' = id_{A'}$。这就告诉我们 h 是一个从 A 到 A' 的同构。这就证明了同构的存在性。

同构的唯一性是由 h 的唯一性得到的，而 h 的唯一性显然是通过泛态射的定义得到的。

综上所述，我们就证明了从 X 到 F 的泛态射 (A, u) 若存在则唯一，并且在唯一的同构下唯一。

注 通过上面的方式，我们可以在唯一的同构下唯一地定义出 (A, u)。我们将泛态射满足的性质称为一个泛性质。

反过来，我们可以完全对偶地定义出一个从 F 到 X 的泛态射。

定义 3.3

令 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴，$F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ 是一个函子，$X \in \mathbf{D}$，$A \in \mathbf{C}$，$u \in \mathbf{D}(F(A), X)$。我们称 (A, u) 是一个从 F 到 X 的泛态射当且仅当对任意 $A' \in \mathbf{C}$ 和任意 $f \in \mathbf{D}(F(A'), X)$，都存在唯一的态射 $h \in \mathbf{C}(A', A)$，使得 $f = u \circ F(h)$。

♣

完全同理地，这样的泛态射若存在则也在唯一的同构下唯一。

命题 3.5

令 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴，$F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ 是一个函子，$X \in \mathbf{D}$。从 F 到 X 的泛态射 (A, u) 若存在则唯一，并且在唯一的同构下唯一。换言之，如果 (A, u)，(A', u') 是两个从 F 到 X 的泛态射，则存在唯一的同构 $h \in \mathbf{C}(A', A)$，使得 $u' = u \circ F(h)$。

♠

证明 证明是完全对偶的，我们不必证明。

我们在下一章中会看到泛态射的推广，即极限与余极限。我们把悬念留到下一章中。极限与余极限和泛态射一样，可以不存在，但是只要存在就在唯一的同构下唯一。通过泛态射，我们可以定义出一些在唯一的同构下唯一的对象。同样，利用极限与余极限，我们将这样的想法高度推广。

在下一节中，我们会看到泛态射和伴随函子的关联。

3.4 伴随函子与泛态射

在这一节中，我们重点要证明伴随函子的一个等价命题。

命题 3.6 (伴随函子的泛性质)

假设 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ 是两个范畴，$F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$，则存在 $G \in [\mathbf{D}, \mathbf{C}]$，使得 F 是 G 的一个左伴随当且仅当对任意 $Y \in \mathbf{D}$，都存在从 F 到 Y 的泛态射。换言之，对任意 $Y \in \mathbf{D}$，我们都可以找到一个 $G(Y) \in \mathbf{C}$ 和对应的 $u_Y \in \mathbf{D}(F(G(Y)), Y)$，使得对任意 $X \in \mathbf{C}$ 和 $f \in \mathbf{D}(F(X), Y)$，都能找到唯一的 $h \in \mathbf{C}(X, G(Y))$，使得 $f = u_Y \circ F(h)$。

♠

证明 先证充分性。假设 F 是 G 的一个左伴随。令 $Y \in \mathbf{D}$，我们当然取 $G(Y) \in \mathbf{C}$。对 $id_{G(Y)} \in \mathbf{C}(G(Y), G(Y))$，我们可以在自然同构的一一对应 $\hat{\cdot}$ 下找到 $u_Y = \widehat{id_{G(Y)}} \in \mathbf{D}(F(G(Y)), Y)$。令 $X \in \mathbf{C}$，$f \in \mathbf{D}(F(X), Y)$。令 $\bar{\cdot} = \hat{\cdot}^{-1}$，则 $\overline{f} \in \mathbf{C}(X, G(Y))$。

因为 F 是 G 的一个左伴随，所以 $H = \mathbf{C}(-, G(Y)), H' = \mathbf{D}(F(-), Y)$ 是自然同构的。因此，我们有

$$\left(\hat{\cdot}_{G(Y)} \circ H\left(\overline{f}\right)\right)\left(id_{G(Y)}\right) = \left(H'\left(\overline{f}\right) \circ \hat{\cdot}_{G(Y)}\right)\left(id_{G(Y)}\right)$$

换言之，

$$f = \widehat{\overline{f}} = \widehat{id_{G(Y)}} \circ F\left(\overline{f}\right) = u_Y \circ F\left(\overline{f}\right)$$

这就证明了存在性。下面，我们证明唯一性。假设 $f = u_Y \circ F(h)$。我们只须证明 $h = \overline{f}$。注意到我们可以把

h 写作 $\bar{\hat{h}}$，所以 $\hat{h} = u_Y \circ F\left(\bar{\hat{h}}\right) = u_Y \circ F(h) = f$。对左右两边同时取 $\bar{\cdot}$，我们就得到了 $h = \bar{\hat{h}} = \bar{f}$。这就证明了唯一性，也便证明了充分性。

再证必要性。假设对任意 $Y \in \mathbf{D}$，都存在 $G(Y) \in \mathbf{C}$ 和 $u_Y \in \mathbf{D}(F(G(Y),Y))$，使得对任意 $X \in \mathbf{C}$ 和 $f \in \mathbf{D}(F(X),Y)$，都能找到唯一的 $h \in \mathbf{C}(X, G(Y))$，使得 $f = u_Y \circ F(h)$。

下面，我们定义 $\hat{\cdot}$ 和 $\bar{\cdot}$。对任意 $h \in \mathbf{C}(X, G(Y))$，我们定义 $\hat{h} = u_Y \circ F(h)$。反过来，对于任意的 $f \in \mathbf{D}(F(X),Y)$，我们定义 $\bar{f}$ 为唯一的态射 h，使得 $f = u_Y \circ F(h)$。根据 h 的存在性和唯一性，$\hat{\cdot}$ 和 $\bar{\cdot}$ 互为逆映射，因此 $\hat{\cdot}$ 是从 $\mathbf{C}(X, G(Y))$ 到 $\mathbf{D}(F(X),Y)$ 的一一对应。

接着，我们证明 $\hat{\cdot}$ 对于 X 是一个自然同构。令 $H = \mathbf{C}(-, G(Y))$，$H' = \mathbf{D}(F(-),Y)$。令 $X, X' \in \mathbf{C}$，$f \in \mathbf{C}(X, X')$。我们只须证明

$$\eta_{X'} \circ H(f) = H'(f) \circ \eta_X$$

而这是因为

$$(\eta_{X'} \circ H(f))(g) = \widehat{g \circ f} = u_Y \circ F(g \circ f) = u_Y \circ F(g) \circ F(f)$$

以及

$$(H'(f) \circ \eta_X)(g) = \hat{g} \circ F(f) = u_Y \circ F(g) \circ F(f)$$

现在，我们证明 $\hat{\cdot}$ 对于 Y 是一个自然同构。令 $L = \mathbf{C}(X, G(-))$，$L' = \mathbf{D}(F(X), -)$。令 $Y, Y' \in \mathbf{D}$，$f \in \mathbf{D}(Y, Y')$。我们只须证明

$$\eta_{Y'} \circ L(f) = L'(f) \circ \eta_Y$$

注意到

$$(\eta_{Y'} \circ L(f))(g) = \widehat{G(f) \circ g} = u_Y \circ F(G(f) \circ g) = u_{Y'} \circ F(G(f)) \circ F(g)$$

以及

$$(L'(f) \circ \eta_Y)(g) = f \circ u_Y \circ F(g)$$

因此，我们只须证明 $u_{Y'} \circ F(G(f)) = f \circ u_Y$。

我们将 $f \circ u_Y$ 看成一个整体，根据 $u_{Y'}$ 的泛性质，我们知道存在唯一的 h，使得 $u_{Y'} \circ F(h) = f \circ u_Y$。

事实上，我们还没有定义过 $G(f)$，也没有证明过 G 是一个函子。因此，我们当然令 $G(f) = h$，这就使得 $u_{Y'} \circ F(G(f)) = f \circ u_Y$。

最后，我们只须证明 G 是一个函子。

1. 一方面，注意到 $u_Y \circ F\left(id_{G(Y)}\right) = u_Y \circ id_{F(G(Y))} = id_Y \circ u_Y$，因此根据定义，我们有 $G\left(id_Y\right) = id_{G(Y)}$。
2. 另一方面，因为 $u_Y \circ F(G(g)) = g \circ u_Y$ 以及 $u_Y \circ F(G(f)) = f \circ u_Y$，所以 $u_Y \circ F(G(g) \circ G(f)) = u_Y \circ F(G(g)) \circ F(G(f)) = g \circ u_Y \circ F(G(f)) = g \circ f \circ u_Y$。根据定义，我们有 $G(g \circ f) = G(g) \circ G(f)$。

这样，我们就证明了必要性。

综上所述，我们证明了 $F \in [\mathbf{C}, \mathbf{D}]$ 有一个左伴随 $G \in [\mathbf{D}, \mathbf{C}]$ 当且仅当对任意 $Y \in \mathbf{D}$，都有一个从 F 到 Y 的泛态射。换言之，对任意 $Y \in \mathbf{D}$，都能找到一个 $G(Y) \in \mathbf{C}$ 以及一个 $u_Y \in \mathbf{D}(F(G(Y)), Y)$，使得对任意 $X \in \mathbf{C}$ 和 $f \in \mathbf{D}(F(X), Y)$，都能找到唯一的 $h \in \mathbf{C}(X, G(Y))$，使得 $f = u_Y \circ F(h)$。

现在，我们重新证明上面的三对伴随函子。

引理 3.1

从 **Set** 到 **Grp** 的自由函子 F 是从 **Grp** 到 **Set** 的遗忘函子 G 的一个左伴随。

证明 令 A 是一个群，我们定义 $G(A)$ 为集合 A。我们下面定义 $u_A \in \mathbf{Grp}(F(G(A)), A) = \mathbf{Grp}(F(A), A)$。对任意 $F(A)$ 的单词，我们将其映射为其在 A 中的值。这显然是一个群同态。令 $S \in \mathbf{Set}$，$f \in \mathbf{Grp}(F(S), A)$。我们只须证明存在唯一的 $h \in \mathbf{Set}(S, G(A))$，使得 $f = u_Y \circ F(h)$。

显然，$f|_S$ 是满足条件的一个映射。反过来，如果 h 满足这个条件，那么同时右乘嵌入映射 $i \in \mathbf{Set}(S, F(S))$，我们就得到了

$$f|_S = f \circ i = u_A \circ F(h) \circ i = h$$

此即得证。

引理 3.2

从 **Grp** 到 $\mathbf{Grp}^2$ 的对角函子 Δ 是从 $\mathbf{Grp}^2$ 到 **Grp** 的乘积函子 π 的一个左伴随。

证明 令 $(G_1, G_2) \in \mathbf{Grp}^2$，我们定义 $\pi(G_1, G_2) = G_1 \times G_2$。我们下面定义 $u_{G_1,G_2} \in \mathbf{Grp}^2(\Delta(\pi(G_1, G_2)), (G_1, G_2)) = \mathbf{Grp}^2((G_1 \times G_2, G_1 \times G_2), (G_1, G_2))$ 为 $u_{G_1,G_2} = [\pi_1, \pi_2]$。

令 $G \in \mathbf{Grp}$，$[f_1, f_2] \in \mathbf{Grp}^2((G, G), (G_1, G_2))$。我们只须证明存在唯一的 $h \in \mathbf{Grp}(G, G_1 \times G_2)$，使得 $[f_1, f_2] = u_{G_1,G_2} \circ [h, h] = [\pi_1 \circ h, \pi_2 \circ h]$。

很显然，唯一的取法是 $h = (h_1, h_2)$。此即得证。

引理 3.3

从 **Grp** 到 **Ab** 的阿贝尔化函子 $\cdot^{\mathrm{ab}}$ 是从 **Ab** 到 **Grp** 的嵌入函子 i 的左伴随。

证明 令 A 是一个阿贝尔群，我们定义 $i(A)$ 为群 A，$u_G \in \mathbf{Ab}(i(A)^{\mathrm{ab}}, A)$ 为恒等映射 id_A。令 G 是一个群，$f \in \mathbf{Ab}\left(G^{\mathrm{ab}}, A\right)$。我们只须证明存在唯一的 $h \in \mathbf{Grp}(G, i(A))$，使得 $f = u_A \circ h^{\mathrm{ab}} = h^{\mathrm{ab}}$。

显然，我们可以令 $h = f \circ \pi$。利用群论的知识，唯一性是熟知的结论。此即得证。

第 4 章 极限

4.1 介绍

在范畴论中，或许最重要的一个概念就是极限。这个词出自逆极限（inverse limit），但实际含义和我们在分析学中熟悉的极限的区别很大。为了让大家更好地理解这一概念，我们先举几种常见的极限。

正如我们在前面说过的，极限是泛态射的推广。和泛态射一样，极限可以不存在，但是一旦存在就唯一。

我们在抽象代数、点集拓扑学和代数拓扑学中都学习了很多极限的实例，只是没有用范畴论的语言将它们统一起来。在这一章中，我们将越来越深入地介绍范畴论中极限的概念。

4.2 积

在某些范畴 $\mathbf{C}$ 中，我们可以定义两个对象 A, B 的积，记作 $A \times B$。积不是孤立存在的，我们会对应地有两个“投影映射” $\pi_1 \in \mathbf{C}(A \times B, A)$，$\pi_2 \in \mathbf{C}(A \times B, B)$，并且满足某些泛性质。

下面，我们给出对象的积的定义。

定义 4.1 (积)

令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，$A, B \in \mathbf{C}$，A 和 B 的乘积指的是一个对象 $A \times B$，使得我们能找到两个映射 $\pi_1 \in \mathbf{C}(A \times B, A)$，$\pi_2 \in \mathbf{C}(A \times B, B)$，使得对任意 $C \in \mathbf{C}$、$f_1 \in \mathbf{C}(C, A)$ 和 $f_2 \in \mathbf{C}(C, B)$，都能找到唯一的 $f \in \mathbf{C}(C, A \times B)$，使得 $f_1 = \pi_1 \circ f$，$f_2 = \pi_2 \circ f$。

和泛态射一样，我们可以证明两个对象的积若存在则唯一，并且在唯一的同构下唯一。

命题 4.1

令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，$A, B \in \mathbf{C}$，若 $A \times B$ 存在，则在唯一的同构下唯一。

证明 证明和泛态射的唯一性是完全一致的，只不过这里我们有两个复合的条件，而不是一个。

下面，我们举几个例子。

引理 4.1

在集合范畴中，两个集合的积是它们的笛卡尔乘积。

证明 令 $A, B, C \in \mathbf{Set}$，$f_1 \in \mathbf{Set}(C, A)$，$f_2 \in \mathbf{Set}(C, B)$。显然，唯一的使得 $f_1 = \pi_1 \circ f$，$f_2 = \pi_2 \circ f$ 的 $f \in \mathbf{Set}(C, A \times B)$ 是 $f = (f_1, f_2)$。换言之，对任意 $x \in C$，我们定义 $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$。此即得证。

引理 4.2

在群范畴中，两个群的积是它们的直积。

证明 令 $A, B, C \in \mathbf{Grp}$，$f_1 \in \mathbf{Grp}(C, A)$，$f_2 \in \mathbf{Grp}(C, B)$。显然，唯一的使得 $f_1 = \pi_1 \circ f$，$f_2 = \pi_2 \circ f$ 的 $f \in \mathbf{Grp}(C, A \times B)$ 也是 $f = (f_1, f_2)$。换言之，对任意 $x \in C$，我们定义 $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$。此即得证。

引理 4.3

在拓扑空间范畴中，两个拓扑空间的积是它们的积空间。

证明 令 $A, B, C \in \mathbf{Top}$，$f_1 \in \mathbf{Top}(C, A)$，$f_2 \in \mathbf{Top}(C, B)$。显然，唯一的使得 $f_1 = \pi_1 \circ f$，$f_2 = \pi_2 \circ f$ 的 $f \in \mathbf{Top}(C, A \times B)$ 还是 $f = (f_1, f_2)$。换言之，对任意 $x \in C$，我们定义 $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$。此即得证。

引理 4.4

在域 k 上的向量空间范畴中，两个向量空间的积是它们的直积。

证明 令 $A, B, C \in \mathbf{Vect}_k$，$f_1 \in \mathbf{Vect}_k(C, A)$，$f_2 \in \mathbf{Vect}_k(C, B)$。显然，唯一的使得 $f_1 = \pi_1 \circ f$，$f_2 = \pi_2 \circ f$ 的 $f \in \mathbf{Vect}_k(C, A \times B)$ 依然是 $f = (f_1, f_2)$。换言之，对任意 $x \in C$，我们定义 $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$。此即得证。

通过上面几个引理，我们对两个对象的积的了解就足够了。很明显，常见的范畴上积的结构都是类似的。

事实上，我们可以轻易地定义任意多个对象的积。同样地，任意多个对象的积可以不存在，但是若存在则在唯一的同构下唯一。

定义 4.2 (（任意）积)

令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，I 是一个非空指标集，对任意 $i \in I$ 都有 $A_i \in \mathbf{C}$，则 $\{A_i\}_{i \in I}$ 的乘积指的是一个对象 $\prod_{i \in I} A_i$，使得我们能对每一个 $i \in I$，找到映射 $\pi_i \in \mathbf{C}\left(\prod_{i \in I} A_i, A\right)$，使得对任意 $C \in \mathbf{C}$ 和 $\{f_i \in \mathbf{C}(C, A_i)\}_{i \in I}$，都能找到唯一的 $f \in \mathbf{C}\left(C, \prod_{i \in I}\right)$，使得对任意 $i \in I$，都有 $f_i = \pi_i \circ f$。

在以上的几个例子中，积都可以推广到任意积，分别是集合的任意笛卡尔乘积，群的任意乘积，拓扑空间的任意积空间，向量空间的任意直积。囿于篇幅，我们不再赘述了。

在这里，任意指代的是 I 是任意的指标集。

4.3 余积

对偶地，我们可以定义余积。

定义 4.3 (余积)

令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，$A, B \in \mathbf{C}$，A 和 B 的余积指的是一个对象 $A \coprod B$，使得我们能找到两个映射 $i_1 \in \mathbf{C}(A, A \coprod B)$，$i_2 \in \mathbf{C}(B, A \coprod B)$，使得对任意 $C \in \mathbf{C}$、$f_1 \in \mathbf{C}(A, C)$ 和 $f_2 \in \mathbf{C}(B, C)$，都能找到唯一的 $f \in \mathbf{C}(A \coprod B, C)$，使得 $f_1 = f \circ i_1$，$f_2 = f \circ i_2$。

定义 4.4 (（任意）余积)

令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，I 是一个非空指标集，对任意 $j \in I$ 都有 $A_j \in \mathbf{C}$，则 $\{A_j\}_{j \in I}$ 的余积指的是一个对象 $\coprod_{j \in I} A_j$，使得我们能对每一个 $j \in I$，找到映射 $i_j \in \mathbf{C}\left(A_j, \coprod_{j \in I} A_j\right)$，使得对任意 $C \in \mathbf{C}$ 和 $\{f_j \in \mathbf{C}(A_j, C)\}_{j \in I}$，都能找到唯一的 $f \in \mathbf{C}\left(\coprod_{j \in I} A_j, C\right)$，使得对任意 $j \in I$，都有 $f_j = f \circ i_j$。

和泛态射一样，我们可以证明两个对象的积若存在则唯一，并且在唯一的同构下唯一。

命题 4.2

令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，$A, B \in \mathbf{C}$，若 $A \coprod B$ 存在，则在唯一的同构下唯一。

证明 证明是同理的。

同样，我们来看几个例子。

为了照顾不了解一般的无交并这个概念的同学，我们在这里给出定义。

定义 4.5 (集合的无交并)

令 A, B 是两个集合，我们定义它们的无交并为 $A \coprod B = \{(a, 1) : a \in A\} \cup \{(b, 2) : b \in B\}$。

一般来说，集合是会有交集的，我们通过引入第二个坐标来迫使它们无交，给出无交并的定义。很显然，两个有限集合的无交并的大小就是它们的大小的和，即便它们可能有交，甚至可能完全相等。

接下来，我们定义任意无交并。

定义 4.6 (集合的（任意）无交并)

令 I 是一个非空指标集，$\{A_i\}_{i\in I}$ 是一族集合，我们定义它们的无交并为

$$\coprod_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}\{(a_i, i) : a_i \in A_i\}$$

♣

同样地，即便 A_i 之间可能两两有交集，我们还是可以定义通过第二个坐标迫使它们无交，给出任意无交并的定义。同样地，有限多个有限集合的无交并的大小是它们的大小的和。

我们可以把每一个 A_j 都嵌入到 $\coprod_{j\in I} A_j$ 中，即对任意 $j \in I$，都存在一个 $i_j : A_j \to \coprod_{j\in I} A_j$，定义为

$$i_j(x) = (x, j)$$

这显然是一个单射，因此在集合范畴中，这样的 i_j 是个单射。

实际上，不难发现，集合范畴中的余积就是无交并。同样，为了方便，我们只证明两个对象的余积。

引理 4.5

在集合范畴中，两个集合的余积是它们的无交并。

♡

证明 令 $A, B, C \in \mathbf{Set}$, $f_1 \in \mathbf{Set}(A, C)$, $f_2 \in \mathbf{Set}(B, C)$。显然，唯一的使得 $f_1 = f \circ i_1$, $f_2 = f \circ i_2$ 的 $f \in \mathbf{Set}(A \coprod B, C)$ 是

$$f(a, 1) = f_1(a)$$
$$f(b, 2) = f_2(b)$$

此即得证。

引理 4.6

在群范畴中，两个群的余积是它们的自由积。

♡

注 现在，我们复习一下自由积的定义。两个群 A, B 的自由积 $A * B$ 是由所有的（形式）单词 $s_1 \cdots s_n$ 的等价类所构成的，其中 $s_1, \cdots, s_n \in A \cup B$。我们可以将 A 或 B 中的单位元省略，也可以将连续的 A 中元素或 B 中元素合并。这两个操作给出了单词的等价类。事实上，这就迫使我们，即便 A 和 B 完全相等，我们也不能约掉连续的 A 中元素和 B 中元素。换言之，我们实际上给 A 和 B 中的元素贴上了标签，即每个元素是属于 A 还是属于 B。在一定程度上，这和集合的无交并的思路是一致的，这是群的自由积的定义中最重要的细节。

注 在 A 和 B 的自由积 $A * B$ 中，我们用显然的方法定义两个嵌入 $i_1 \in \mathbf{Grp}(A, A * B)$，$i_2 \in \mathbf{Grp}(B, A * B)$，即将 A 或 B 中的元素，看成只有一个字母的单词。它们显然都是群同态。

证明 令 $A, B, C \in \mathbf{Grp}$，$f_1 \in \mathbf{Grp}(A, C)$，$f_2 \in \mathbf{Grp}(B, C)$。显然，唯一的使得 $f_1 = f \circ i_1$，$f_2 = f \circ i_2$ 的 $f \in \mathbf{Grp}(A * B, C)$ 是将 A 中的每个字母按 f_1 的规则映到 C 中，将 B 中的每个字母按 f_2 的规则映到 C 中。此即得证。

引理 4.7

在拓扑空间范畴中，两个拓扑空间的余积是它们的无交并空间。

♡

证明 令 $A, B, C \in \mathbf{Top}$，$f_1 \in \mathbf{Top}(A, C)$，$f_2 \in \mathbf{Top}(B, C)$。显然，唯一的使得 $f_1 = f \circ i_1$，$f_2 = f \circ i_2$ 的 $f \in \mathbf{Top}(A \coprod B, C)$ 是

$$f(a, 1) = f_1(a)$$
$$f(b, 2) = f_2(b)$$

此即得证。

引理 4.8

在域 k 上的向量空间范畴中，两个向量空间的余积是它们的直和。

注 向量空间的直和记作 $\oplus$。在有限个向量空间的情况下，直和和直积是等价的。但是在无限的情况下，二者就不等价了。向量空间的直积中的向量可以是任意笛卡尔乘积中的元素，但是对直和中的向量，我们要求除了有限个个位置以外都是 0。为了强调直和的概念，即便在有限的情况下，我们也用 $\oplus$ 的记号，而不用 $\prod$ 的记号，即便在有限的情况下二者是等价的。正是因为向量空间的缘故，我们有时也用 $\oplus$ 来作为余积的符号。

注 在 A 和 B 的直和中，我们用显然的方法定义两个嵌入 $i_1 \in \mathbf{Vect}_k(A, A \oplus B)$，$i_2 \in \mathbf{Vect}_k(B, A \oplus B)$，定义为 $i_1(a) = (a, 0)$，$i_2(b) = (0, b)$。

证明 令 $A, B, C \in \mathbf{Vect}_k$，$f_1 \in \mathbf{Vect}_k(A, C)$，$f_2 \in \mathbf{Vect}_k(B, C)$。显然，唯一的使得 $f_1 = f \circ i_1$，$f_2 = f \circ i_2$ 的 $f \in \mathbf{Vect}_k(A \oplus B, C)$ 是

$$f(a, b) = f_1(a) + f_2(b)$$

此即得证。

4.4 终对象

下面，我们定义一个范畴的终对象。同样，终对象可以不存在，但是一旦存在就在唯一的同构下唯一。

定义 4.7 (终对象)

令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，$A \in \mathbf{C}$。我们称 A 是一个终对象，若对任意 $B \in \mathbf{C}$，都存在唯一的 $h \in \mathbf{C}(B, A)$。

终对象的定义比积和余积简单很多，事实上，我们马上会发现，在一定程度上，终对象是最简单的非平凡的极限的例子。

命题 4.3

令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，若终对象存在，则在唯一的同构下唯一。

证明 证明是同理的，我们留给感兴趣的读者作为练习。

下面，我们按照惯例，来看一些例子。

引理 4.9

在集合范畴中，终对象是单点集。

证明 不妨令 $A = \{1\}$。对任意 $B \in \mathbf{Set}$，要定义 $f \in \mathbf{Set}(B, A) = \mathbf{Set}(B, \{1\})$，我们只要对任意 $b \in B$，定义出 $f(b) \in \{1\}$，我们显然有且只有一种选择，那就是常值映射 $f \equiv 1$。这显然是个映射，此即得证。

引理 4.10

在群范畴中，终对象是平凡群。

证明 不妨令 $A = \{e\}$。对任意 $B \in \mathbf{Grp}$，要定义 $f \in \mathbf{Grp}(B, A) = \mathbf{Grp}(B, \{e\})$，我们只要对任意 $b \in B$，定义出 $f(b) \in \{e\}$，我们显然有且只有一种选择，那就是平凡映射 $f \equiv e$。这显然是个群同态，此即得证。

引理 4.11

在拓扑空间范畴中，终对象是单点空间。

证明 不妨令 $A=\{a\}$，拓扑是显然且唯一的。对任意 $B\in\mathbf{Top}$，要定义 $f\in\mathbf{Top}(B,A)=\mathbf{Top}(B,\{a\})$，我们只要对任意 $b\in B$，定义出 $f(b)\in\{a\}$，我们显然有且只有一种选择，那就是平凡映射 $f\equiv a$。这显然是个连续映射，此即得证。

引理 4.12

在域 k 上的向量空间范畴中，终对象是零空间。

证明 不妨令 $A=\{0\}$。对任意 $B\in\mathbf{Vect}_k$，要定义 $f\in\mathbf{Vect}_k(B,A)=\mathbf{Vect}_k(B,\{0\})$，我们只要对任意 $b\in B$，定义出 $f(b)\in\{0\}$，我们显然有且只有一种选择，那就是平凡映射 $f\equiv 0$。这显然是个线性映射，此即得证。

4.5 始对象

始对象是终对象的对偶概念。

定义 4.8 (始对象)

令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，$A\in\mathbf{C}$。我们称 A 是一个始对象，若对任意 $B\in\mathbf{C}$，都存在唯一的 $h\in\mathbf{C}(A,B)$。

同样，我们来看一些例子。

引理 4.13

在集合范畴中，始对象是空集。

证明 不妨令 $A=\emptyset$。对任意 $B\in\mathbf{Set}$，要定义 $f\in\mathbf{Set}(A,B)$，我们只要对任意 $a\in A$，定义出 $f(a)\in B$，然而 B 是空集，所以唯一的映射就是空映射。空映射也是映射，此即得证。

引理 4.14

在群范畴中，始对象是平凡群。

证明 不妨令 $A=\{e\}$。对任意 $B\in\mathbf{Grp}$，要定义 $f\in\mathbf{Grp}(A,B)$，我们只要对任意 $a\in A=\{e\}$，定义出 $f(a)\in B$。由于群同态是保持单位元的，所以唯一的群同态是 $f(e)=e'$。这这显然是个群同态，此即得证。

引理 4.15

在群范畴中，始对象是平凡群。

证明 不妨令 $A=\{e\}$。对任意 $B\in\mathbf{Grp}$，要定义 $f\in\mathbf{Grp}(A,B)$，我们只要对任意 $a\in A=\{e\}$，定义出 $f(a)\in B$。由于群同态是保持单位元的，所以唯一的群同态是 $f(e)=e'$。这显然是个群同态，此即得证。

引理 4.16

在拓扑空间范畴中，始对象是空拓扑空间。

证明 这里的证明和集合范畴中的证明是一样的，我们把证明留给感兴趣的读者作为练习。

引理 4.17

在域 k 上的向量空间范畴中，始对象是零空间。

证明 不妨令 $A=\{0\}$。对任意 $B\in\mathbf{Vect}_k$，要定义 $f\in\mathbf{Vect}_k(A,B)$，我们只要对任意 $a\in A=\{0\}$，定义出 $f(a)\in B$。由于线性映射是保持加法单位元的，所以唯一的线性映射是 $f(0)=0$。这显然是个线性映射，此即得证。

4.6 拉回

注 对于学习过微分流形的同学，我们要指出，范畴论中的拉回与微分流形中的拉回是不同的。下一节中，我们会讲的范畴论中的推出与微分流形中的推出也是不同的。

现在，我们给出拉回的定义。

定义 4.9 (拉回)

令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，$A, B, C \in \mathbf{C}$，$f \in \mathbf{C}(A, C)$，$g \in \mathbf{C}(B, C)$，则 f 与 g 的一个拉回是由 P, p_1, p_2 构成的，其中 $P \in \mathbf{C}$，$p_1 \in \mathbf{C}(P, A)$，$p_2 = \mathbf{C}(P, B)$，并且满足以下的性质：

1. $f \circ p_1 = g \circ p_2$。
2. 若 $Q \in \mathbf{C}$，$q_1 \in \mathbf{C}(Q, A)$，$q_2 \in \mathbf{C}(Q, B)$，且 $f \circ q_1 = g \circ q_2$，则存在唯一的 $u \in \mathbf{C}(Q, P)$，使得 $q_1 = p_1 \circ u$，$q_2 = p_2 \circ u$。

此时，我们记 $P = A \times_C B$。

♣

注 拉回的一个别称是纤维积。

一如既往地，拉回若存在，则在唯一的同构下唯一。我们将证明留给感兴趣的读者作为练习。

我们来看集合范畴的例子。实际上，群范畴、向量空间范畴等等都是类似的。

引理 4.18

令 $A, B, C \in \mathbf{Set}$，$f \in \mathbf{C}(A, C)$，$g \in \mathbf{C}(B, C)$。令

$$A \times_C B = \{(a, b) \in A \times B : f(a) = g(b)\}$$

我们下面定义 $p_1 \in \mathbf{Set}(A \times_C B, A)$ 和 $p_2 \in \mathbf{Set}(A \times_C B, B)$。

$$p_1(a, b) = a$$

$$p_2(a, b) = b$$

则 $A \times_C B, p_1, p_2$ 给出了 f 与 g 的一个拉回。

♡

证明

1. 令 $(a, b) \in A \times_C B$，则 $f(p_1(a, b)) = f(a) = g(b) = g(p_2(a, b))$。因此 $f \circ p_1 = g \circ p_2$。
2. 假设 $Q \in \mathbf{C}$，$q_1 \in \mathbf{Set}(Q, A)$，$q_2 \in \mathbf{Set}(Q, B)$，且 $f \circ q_1 = g \circ q_2$。下面，我们定义 $u \in \mathbf{Set}(Q, A \times_C B)$。

$$u(x) = (q_1(x), q_2(x))$$

显然，由 $f \circ q_1 = g \circ q_2$ 可知，u 是良定义的。

我们只须证明 $q_1 = p_1 \circ u$，$q_2 = p_2 \circ u$，而这是因为

$$p_1(u(x)) = p_1(q_1(x), q_2(x)) = q_1(x)$$

$$p_2(u(x)) = p_2(q_1(x), q_2(x)) = q_2(x)$$

此即得证。

注 特别地，我们可以利用之前学习过的无交并的概念，来进一步认识集合的纤维积。在这个引理的条件下，我们有

$$A \times_C B = \{(a, b) \in A \times B : f(a) = g(b)\} = \left\{(a, b) \in A \times B : a \in f^{-1}(g(b))\right\} = \coprod_{b \in B} f^{-1}(g(b))$$

同理，我们有

$$A \times_C B = \coprod_{b \in B} f^{-1}(g(b)) = \coprod_{a \in A} g^{-1}(f(a))$$

我们还有一个有趣的例子，那就是将原像理解为一种拉回。

引理 4.19

令 $X, Y \in \mathbf{Set}$，$f \in \mathbf{Set}(X, Y)$，$B \subset Y$，则 $f^{-1}(B)$ 是 f 和嵌入映射 $i \in \mathbf{Set}(B, Y)$ 的一个拉回。

证明 我们只须注意到

$$\{(a,b) \in A \times B : f(a) = i(b) = b\} = \left\{(a,b) \in A \times B : a = f^{-1}(b)\right\}$$

而后者与 $f^{-1}(B)$ 存在显然的一一对应，此即得证。

4.7 推出

对偶地，我们给出推出的定义。

定义 4.10 (推出)

令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，$A, B, C \in \mathbf{C}$，$f \in \mathbf{C}(C, A)$，$g \in \mathbf{C}(C, B)$，则 f 与 g 的一个拉回是由 P, i_1, i_2 构成的，其中 $P \in \mathbf{C}$，$i_1 \in \mathbf{C}(A, P)$，$i_2 = \mathbf{C}(B, P)$，并且满足以下的性质：

1. $i_1 \circ f = i_2 \circ g$。
2. 若 $Q \in \mathbf{C}$，$j_1 \in \mathbf{C}(A, Q)$，$j_2 \in \mathbf{C}(B, Q)$，且 $j_1 \circ f = j_2 \circ g$，则存在唯一的 $u \in \mathbf{C}(Q, P)$，使得 $j_1 = u \circ i_1$，$j_2 = u \circ i_2$。

此时，我们记 $P = A \sqcup_C B$。

注 拉回的一个别称是纤维余积。

一如既往地，拉回若存在，则在唯一的同构下唯一。我们将证明留给感兴趣的读者作为练习。

我们来看集合范畴的例子。实际上，群范畴、向量空间范畴等等都是类似的。

引理 4.20

令 $A, B, C \in \mathbf{Set}$，$f \in \mathbf{C}(C, A)$，$g \in \mathbf{C}(C, B)$。令

$$A \sqcup_C B = A \coprod B / \sim$$

其中 $\sim$ 是由 $\{(f(c), g(c)) \in A \times B : c \in C\}$ 生成的等价关系。

我们下面定义 $i_1 \in \mathbf{Set}\,(A, A \sqcup_C B)$ 和 $i_2 \in \mathbf{Set}\,(B, A \sqcup_C B)$。

$$i_1(a) = [a]$$
$$i_2(b) = [b]$$

则 $A \sqcup_C B, i_1, i_2$ 给出了 f 与 g 的一个推出。

证明

1. 令 $c \in C$，注意到 $i_1(f(a)) = [f(a)] = [g(a)] = i_2(g(a))$，因此 $i_1 \circ f = i_2 \circ g$。
2. 假设 $Q \in \mathbf{Set}$，$j_1 \in \mathbf{C}(X, Q)$，$j_2 \in \mathbf{C}(Y, Q)$，且 $j_1 \circ f = j_2 \circ g$。下面，我们定义 $u \in \mathbf{Set}\,(X \sqcup_Z Y, Q)$。

$$u([a]) = \begin{cases} j_1(a), & 若 a \in X \\ j_2(a), & 若 a \in Y \end{cases}$$

现在，我们证明 u 是良定义的。假设 $a \sim b$。根据 $\sim$ 的定义（它是由所有 $f(c) \sim g(c)$（其中 $c \in C$）生成的等价关系），我们只须考虑 $a = f(c)$ 和 $b = g(c)$（其中 $c \in C$）的情况，我们只须证明 $j_1(a) = j_2(b)$，而这是因为 $j_1 \circ f = j_2 \circ g$，这就证明了 u 是良定义的。

现在，我们只须证明 $j_1 = u \circ i_1$，$j_2 = u \circ i_2$，而这是因为

$$u\,(i_1(a)) = u([a]) = j_1(a)$$
$$u\,(i_2(a)) = u([a]) = j_2(a)$$

此即得证。

4.8 等化子

等化子和余等化子是我们引出极限和余极限前最后的两个例子。

定义 4.11 (等化子)

令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，$A, B \in \mathbf{C}$，$f, g \in \mathbf{C}(A, B)$，则 f 与 g 的一个等化子是由 E, e 构成的，其中 $E \in \mathbf{C}$，$e \in \mathbf{C}(E, A)$，并且满足以下的性质：

1. $f \circ e = g \circ e$。
2. 若 $F \in \mathbf{C}$，$h \in \mathbf{C}(F, A)$，且 $f \circ h = g \circ h$，则存在唯一的 $u \in \mathbf{C}(F, E)$，使得 $h = e \circ u$。

此时，我们记 $E = Eq(f, g)$。

♣

一如既往地，等化子若存在则在唯一的同构下唯一。

我们来看集合范畴的例子。

引理 4.21

令 $A, B \in \mathbf{Set}$，$f, g \in \mathbf{Set}(A, B)$。令 $E = \{a \in A : f(a) = g(a)\}$，令 $i \in \mathbf{Set}(E, A)$ 是嵌入映射，则 E, i 给出了 f 与 g 的一个等化子，即 $E = Eq(f, g)$。

♡

证明

1. 令 $a \in E$，则 $f(i(a)) = f(a) = g(a) = g(i(a))$，因此 $f \circ i = g \circ i$。
2. 假设 $F \in \mathbf{Set}$，$h \in \mathbf{Set}(F, A)$，且 $f \circ h = g \circ h$。下面，我们定义 $u \in \mathbf{Set}(F, E)$。

$$u(x) = h(x)$$

我们只须证明对任意 $x \in F$，$u(x) \in E$，而这是因为

$$f(u(x)) = f(h(x)) = g(h(x)) = g(u(x))$$

此即得证。

下面，我们做一个练习：一个有积和拉回的范畴一定有等化子。

命题 4.4 (等化子存在的一个充分条件)

令 $\mathbf{C}$ 是一个有积和拉回的范畴，$A, B \in \mathbf{C}$，$f, g \in \mathbf{C}(A, B)$，则存在 f 与 g 的一个等化子。

♠

证明 考虑 B 的自乘（积）$B \times B$。由两份 $id = id_B \in \mathbf{C}(B, B)$，我们可以得到一个 $(id, id) \in \mathbf{C}(B, B \times B)$。类似地，由 $f, g \in \mathbf{C}(A, B)$，我们可以得到一个 $(f, g) \in \mathbf{C}(A, B \times B)$。现在，令 (P, p_1, p_2) 是 (f, g) 与 (id, id) 的一个拉回。

我们只须证明 P, p_1 是 f 与 g 的一个等化子。

1. 根据拉回的第一条性质，我们有 $(f \circ p_1, g \circ p_1) = (f, g) \circ p_1 = (id, id) \circ p_2 = (p_2, p_2)$。特别地，$f \circ p_1 = g \circ p_1$。
2. 假设 $Q \in \mathbf{C}$，$q_1 \in \mathbf{C}(Q, A)$，使得 $f \circ q_1 = g \circ q_1$。我们令 $q_2 = f \circ q_1 = g \circ q_1$，因此显然有 $(f, g) \circ q_1 = (id, id) \circ q_2$。利用拉回的第二条性质，我们可以找到一个 $u \in \mathbf{C}(Q, P)$，使得 $q_1 = p_1 \circ u$。

此即得证。

事实上，对于任意一族 $f_i \in \mathbf{C}(A, B)$（$i \in I$），我们都可以定义（任意）等化子。

定义 4.12 (（任意）等化子)

令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，I 是一个非空指标集，$A, B \in \mathbf{C}$，$f_i \in \mathbf{C}(A, B)$，则 $\{f_i\}_{i \in I}$ 的一个等化子是由 E, e 构成的，其中 $E \in \mathbf{C}$，$e \in \mathbf{C}(E, A)$，并且满足以下的性质：

1. 对任意 $i, j \in I$，我们有 $f_i \circ e = f_j \circ e$。

2. 若 $F \in \mathbf{C}$，$h \in \mathbf{C}(F, A)$，且对任意 $i, j \in I$ 都有 $f_i \circ h = f_j \circ h$，则存在唯一的 $u \in \mathbf{C}(F, E)$，使得 $h = e \circ u$。

此时，我们记 $E = Eq\left(\{f_i\}_{i \in I}\right)$。♣

同样地，（任意）等化子若存在则在唯一的同构下唯一。

4.9 余等化子

余等化子是我们在讲极限前的最后一个例子，它是等化子的对偶。

定义 4.13 (余等化子)
令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，$A, B \in \mathbf{C}$，$f, g \in \mathbf{C}(A, B)$，则 f 与 g 的一个余等化子是由 C, p 构成的，其中 $C \in \mathbf{C}$，$p \in \mathbf{C}(B, C)$，并且满足以下的性质：

1. $p \circ f = p \circ g$。
2. 若 $D \in \mathbf{C}$，$h \in \mathbf{C}(B, D)$，且 $h \circ f = h \circ g$，则存在唯一的 $u \in \mathbf{C}(C, D)$，使得 $h = u \circ p$。

此时，我们记 $C = Coeq(f, g)$。♣

一如既往地，余等化子若存在则在唯一的同构下唯一。

我们来看集合范畴的例子。

引理 4.22
令 $A, B \in \mathbf{Set}$，$f, g \in \mathbf{Set}(A, B)$。令 $C = B/\sim$，其中 $\sim$ 是由 $f(a) \sim g(a)$（其中 $a \in A$）生成的等价关系。令 $p \in \mathbf{Set}(B, C)$ 是投影映射，则 C, p 给出了 f 与 g 的一个余等化子，即 $C = Coeq(f, g)$。♡

证明

1. 令 $a \in A$，则 $f(a) \sim g(a)$，所以 $p(f(a)) = [f(a)] = [g(a)] = p(g(a))$。因此，$p \circ f = p \circ g$。
2. 假设 $D \in \mathbf{C}$，$h \in \mathbf{C}(B, D)$。令 $b \in B$，我们定义 $u([b]) = h(b)$，这就使得 $h = u \circ p$。现在，我们只须证明 u 是良定义的。根据 $\sim$ 的定义，不失一般性，我们只须证明，若 $b = f(a)$，$b' = g(a)$，则 $b \sim b'$，而这是因为 $p \circ f = p \circ g$。

此即得证。

对于余等化子，我们类似地有以下的性质。

命题 4.5 (余等化子存在的一个充分条件)
令 $\mathbf{C}$ 是一个有余积和推出的范畴，$A, B \in \mathbf{C}$，$f, g \in \mathbf{C}(A, B)$，则存在 f 与 g 的一个余等化子。♠

证明 根据对偶性，这是显然的。

对偶地，对于任意一族 $f_i \in \mathbf{C}(A, B)$（$i \in I$），我们都可以定义（任意）余等化子。

定义 4.14 (（任意）余等化子)
令 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，I 是一个非空指标集，$A, B \in \mathbf{C}$，$f_i \in \mathbf{C}(A, B)$，则 $\{f_i\}_{i \in I}$ 的一个余等化子是由 C, p 构成的，其中 $C \in \mathbf{C}$，$p \in \mathbf{C}(B, C)$，并且满足以下的性质：

1. 对任意 $i, j \in I$，我们有 $p \circ f_i = p \circ f_j$。
2. 若 $D \in \mathbf{C}$，$h \in \mathbf{C}(B, D)$，且对任意 $i, j \in I$ 都有 $h \circ f_i = h \circ f_j$，则存在唯一的 $u \in \mathbf{C}(C, D)$，使得 $h = u \circ p$。

此时，我们记 $E = Coeq\left(\{f_i\}_{i \in I}\right)$。♣

同样地，（任意）余等化子若存在则在唯一的同构下唯一。

4.10 极限

在范畴论中，极限又称逆向极限、投射极限。

我们先给出 J 型图的定义。

定义 4.15 (J 型图)

令 $\mathbf{C},\mathbf{J}$ 是两个范畴。$\mathbf{C}$ 中的一个 $\mathbf{J}$ 型图指的是一个函子 $F\in[\mathbf{J},\mathbf{C}]$。♣

对于 $\mathbf{C}$ 中任意的 $\mathbf{J}$ 型图，我们都可以定义极限。首先，我们定义锥。

定义 4.16 (锥)

令 $\mathbf{C},\mathbf{J}$ 是两个范畴，F 是 $\mathbf{C}$ 中的一个 $\mathbf{J}$ 型图，则 F 的一个锥指的是 $N,\{\psi_A\}_{A\in\mathbf{J}}$，其中 $N\in\mathbf{C}$，$\psi_A\in\mathbf{C}(N,F(A))$ （$A\in\mathbf{J}$），使得对任意 $A,B\in\mathbf{J}$ 和 $f\in\mathbf{J}(A,B)$，我们有 $\psi_B=F(f)\circ\psi_A$。♣

现在，我们来定义极限。

定义 4.17 (极限)

令 $\mathbf{C},\mathbf{J}$ 是两个范畴，F 是 $\mathbf{C}$ 中的一个 $\mathbf{J}$ 型图，则 F 的一个极限指的是 $L,\{\phi_A\}_{A\in\mathbf{J}}$，其中 $L\in\mathbf{C}$，$\phi_A\in\mathbf{C}(N,F(A))$ （$A\in\mathbf{J}$），使得下列性质成立。

1. $L,\{\phi_A\}_{A\in\mathbf{J}}$ 是 F 的一个锥。换言之，对任意 $A,B\in\mathbf{J}$ 和 $f\in\mathbf{J}(A,B)$，我们有 $\phi_B=F(f)\circ\phi_A$。
2. 对 F 的任意一个锥 $N,\{\psi_A\}_{A\in\mathbf{J}}$，都存在唯一的 $u\in\mathbf{C}(N,L)$，使得对任意 $A\in\mathbf{J}$，我们有 $\psi_A=\phi_A\circ u$。♣

下面，我们举一些极限的例子。

引理 4.23

积、终对象、拉回、等化子都是某些简单的 J 型图的极限。♡

证明 根据定义，这是显然的。

一如既往地，极限若存在则在唯一的同构下唯一，我们来证明这个命题。

命题 4.6 (极限的泛性质)

令 $\mathbf{C},\mathbf{J}$ 是两个范畴，F 是 $\mathbf{C}$ 中的一个 $\mathbf{J}$ 型图，若 F 的极限存在，则在唯一的同构下唯一。♠

证明 假设 $L,\{\phi_A\}_{A\in\mathbf{J}}$、$L',\{\phi'_A\}_{A\in\mathbf{J}}$ 是 F 的两个极限，则利用极限的定义，我们可以分别对应地找到唯一的 $u\in\mathbf{C}(L',L)$ 和唯一的 $u'\in\mathbf{C}(L,L')$，使得对任意 $A,B\in\mathbf{J}$ 和 $f\in\mathbf{J}(A,B)$，我们有 $\phi'_A=\phi_A\circ u$，$\phi_A=\phi'_A\circ u'$。这就得到了 u 的唯一性。

因此，对任意的 $f\in\mathbf{J}(A,B)$，我们有 $\phi_A=\phi_A\circ(u\circ u')$，$\phi'_A=\phi'_A\circ(u'\circ u)$。

显然，对任意的 $f\in\mathbf{J}(A,B)$，我们也有 $\phi_A=\phi_A\circ id_A$，$\phi'_A=\phi'_A\circ id_{A'}$。

利用唯一性，我们知道 $u\circ u'=id_A$，$u'\circ u=id_{A'}$。这就证明了 u 是一个同构。结合刚才我们证过的结论，u 是满足该条件的唯一同构。此即得证。

事实上，只要范畴 $\mathbf{C}$ 中所有的（任意）积和等化子都存在，那么所有的极限都存在。这被称为极限存在定理

命题 4.7 (极限存在定理)

假设 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，使得所有的（任意）积和等化子都存在。令 $\mathbf{J}$ 是一个范畴，F 是 $\mathbf{C}$ 中的一个 $\mathbf{J}$ 型图，则 F 的极限存在。♠

证明

令

$$X = \prod_{A \in J} F(A)$$

$$Y = \prod_{f \in \hom(J)} F(\mathrm{cod}(f))$$

其中 $cod(f)$ 指的是 f 的陪域。此外，$dom(f)$ 指的是 f 的定义域。
下面，我们定义 $h, k \in \mathbf{C}(X, Y)$。
令

$$h = \left(F(f) \circ \pi_{\mathrm{dom}(f)}\right)_{f \in \hom(J)}$$

$$k = \left(\pi_{cod(f)}\right)_{f \in \hom(J)}$$

现在，令 L, e 是 h, k 的一个等化子。我们只须证明 $L, \{e_A\}_{A \in J}$ 是 F 的一个极限。

1. 令 $f \in \mathbf{C}(A, B)$，我们只须证明 $F(f) \circ \phi_A = \phi_B$。因为 $h \circ e = k \circ e$，所以对 $f \in \mathbf{C}(A, B)$，我们有 $F(f) \circ \pi_{\mathrm{dom}(f)} \circ e = \pi_{\mathrm{cod}(f)} \circ e$。换言之，$F(f) \circ e_A = e_B$。这就证明了 $L, \{e_A\}_{A \in J}$ 是 F 的一个锥。
2. 假设 $N, \{\psi_A\}_{A \in J}$ 是 F 的另一个锥，即对任意 $A, B \in \mathbf{C}$ 和 $f \in \mathbf{C}(A, B)$，都有 $F(f) \circ \psi_A = \psi_B$，则我们定义 $\psi \in \mathbf{C}\left(N, \prod_{A \in J} F(A)\right)$ 为 $\psi = (\psi_A)_{A \in J}$。换言之，$h \circ \psi = k \circ \psi$。利用等化子的第二个条件，我们知道存在一个态射 $u \in \mathbf{C}(N, L)$，使得 $\psi = e \circ u$。等价地，对于任意的 $A, B \in \mathbf{C}$ 和 $f \in \mathbf{C}(A, B)$，我们有 $\psi_A = e_A \circ u$。

此即得证。

4.11 余极限

在范畴论中，余极限又称正向极限、归纳极限。
对于 $\mathbf{C}$ 中任意的 $\mathbf{J}$ 型图，我们都可以定义余极限。首先，我们定义余锥。

定义 4.18 (余锥)
令 $\mathbf{C}, \mathbf{J}$ 是两个范畴，F 是 $\mathbf{C}$ 中的一个 $\mathbf{J}$ 型图，则 F 的一个余锥指的是 $N, \{\psi_A\}_{A \in \mathbf{J}}$，其中 $N \in \mathbf{C}$，$\psi_A \in \mathbf{C}(F(A), N)$ $(A \in \mathbf{J})$，使得对任意 $A, B \in \mathbf{J}$ 和 $f \in \mathbf{J}(A, B)$，我们有 $\psi_B = \psi_A \circ F(f)$。 ♣

现在，我们来定义余极限。

定义 4.19 (余极限)
令 $\mathbf{C}, \mathbf{J}$ 是两个范畴，F 是 $\mathbf{C}$ 中的一个 $\mathbf{J}$ 型图，则 F 的一个余极限指的是 $L, \{\phi_A\}_{A \in \mathbf{J}}$，其中 $L \in \mathbf{C}$，$\phi_A \in \mathbf{C}(F(A), N)$ $(A \in \mathbf{J})$，使得下列性质成立。

1. $L, \{\phi_A\}_{A \in \mathbf{J}}$ 是 F 的一个余锥。换言之，对任意 $A, B \in \mathbf{J}$ 和 $f \in \mathbf{J}(A, B)$，我们有 $\phi_B = \phi_A \circ F(f)$。
2. 对 F 的任意一个余锥 $N, \{\psi_A\}_{A \in \mathbf{J}}$，都存在唯一的 $u \in \mathbf{C}(L, N)$，使得对任意 $A \in \mathbf{J}$，我们有 $\psi_A = u \circ \phi_A$。 ♣

下面，我们举一些余极限的例子。

引理 4.24
余积、始对象、推出、余等化子都是某些简单的 J 型图的余极限。 ♡

证明 根据定义，这是显然的。
一如既往地，余极限若存在则在唯一的同构下唯一。对偶地，我们无须证明这个命题。
同样对偶地，我们有余极限存在定理。

命题 4.8 (余极限存在定理)

假设 $\mathbf{C}$ 是一个范畴，使得所有的（任意）余积和余等化子都存在。令 $\mathbf{J}$ 是一个范畴，F 是 $\mathbf{C}$ 中的一个 $\mathbf{J}$ 型图，则 F 的余极限存在。

证明 根据对偶性，这是显然的。