实变函数论-江泽坚

致谢

感谢 仝策中老师 对于本课程的帮助。

目录

第一章：集合及其基数

1.集合及其运算

定义1　集族：给定值标集Λ，那么集族定义为

$$\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\} \tag{1}$$

定义2　属于：对于给定集合A，以及元素x，以下成立且仅成立其一

$$x\in A\qquad x\notin A \tag{2}$$

定义3　包含：称集合A包含于集合B，当且仅当

$$\forall x\in A\Rightarrow x\in B \tag{3}$$

记作

$$A\subset B \tag{4}$$

- 如果$A\subset B$且$B\subset C$，那么$A\subset C$。

定义4　相等：称集合A与集合B相等，当且仅当

$$A\subset B\text{且}B\subset A \tag{5}$$

记作

$$A=B \tag{6}$$

定义5　交：集合A和B的交定义为

$$A\cap B=\{x:x\in A\text{且}x\in B\} \tag{7}$$

特别的

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{x:\forall\lambda\in\Lambda,x\in A_\lambda\} \tag{8}$$

- $A\cap B=B\cap A$
- $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
- $A\cap A=A$
- $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

定义6　并：集合A和B的并定义为

$$A\cup B=\{x:x\in A\text{或}x\in B\} \tag{9}$$

特别的

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\{x:\exists\lambda\in\Lambda,x\in A_\lambda\} \tag{10}$$

- $A\cup B=B\cup A$
- $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
- $A\cup A=A$
- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

- $$A \cap B \subset A \subset A \cup B \tag{11}$$
- 如果对于任意$\lambda \in \Lambda$，成立$A_\lambda \subset B_\lambda$，那么成立

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \tag{12}$$

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \tag{13}$$

- $$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cup B_\lambda) = (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \cup (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) \tag{14}$$
$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (A_\lambda \cap B_\lambda) = (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \cap (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) \tag{15}$$
- $$(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \cap (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) = \bigcup_{\substack{\alpha \in \Lambda \\ \beta \in \Lambda}} (A_\alpha \cap B_\beta) \tag{16}$$
$$(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) \cup (\bigcap_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda) = \bigcap_{\substack{\alpha \in \Lambda \\ \beta \in \Lambda}} (A_\alpha \cup B_\beta) \tag{17}$$

定义7　**差**：集合A和B的差定义为

$$A \setminus B = A - B = \{x : x \in A \text{且} x \notin B\} \tag{18}$$

定义8　**补**：给定全集为S，集合A的补定义为

$$A^c = \{x : x \notin A \text{且} x \in S\} \tag{19}$$

- $$S^c = \emptyset, \qquad \emptyset^c = S \tag{20}$$
- $$A \cup A^c = S, \qquad A \cap A^c = \emptyset \tag{21}$$
- $$(A^c)^c = A \tag{22}$$
- 如果$A \subset B$，那么$B^c \subset A^c$。
- **De Morgan公式**：

$$(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c \tag{23}$$

$$(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c \tag{24}$$

定义9　**代数**：对于集合S，$\mathscr{F} \subset \mathcal{P}(S)$，称$\mathscr{F}$为$S$上的一个代数，如果满足

- $\varnothing \in \mathscr{F}$
- 如果$A \in \mathscr{F}$，那么$A^c \in \mathscr{F}$。
- 如果$A, B \in \mathscr{F}$，那么$A \cup B \in \mathscr{F}$。

定义10　**σ-代数**：对于集合S，$\mathscr{F} \subset \mathcal{P}(S)$，称$\mathscr{F}$为$S$上的一个$\sigma$-代数，如果满足

- $\varnothing \in \mathscr{F}$
- 如果$A \in \mathscr{F}$，那么$A^c \in \mathscr{F}$。
- 如果$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F}$，那么

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F} \tag{25}$$

定理1　最小生成σ-代数：对于$\mathscr{A} \subset \mathcal{P}(S)$，存在且存在唯一$S$上的$\sigma$-代数$\mathscr{F}(\mathscr{A})$，使得成立

- $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}(\mathscr{A}) \subset \mathcal{P}(S)$
- 对于任意σ-代数$\mathscr{F} \subset \mathcal{P}(S)$，如果$\mathscr{A} \subset \mathscr{F}$，那么$\mathscr{F}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{F}$。

称$\mathscr{F}(\mathscr{A})$为$\mathscr{A}$的最小生成σ-代数。事实上

$$\mathscr{F}(\mathscr{A}) = \bigcap_{\mathscr{F} \supset \mathscr{A}\text{为}S\text{上的}\sigma\text{-代数}} \mathscr{F} \tag{26}$$

定义11　上极限：对于集合列$A_1, A_2, \cdots$，定义其上极限为

$$\begin{aligned}
\limsup_n A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m & (27)\\
&= \left\{x \in X : \forall n \in \mathbb{N}, x \in \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right\} & (28)\\
&= \{x \in X : \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \geq n, x \in A_m\} & (29)\\
&= \{x \in X : x\text{在无穷多个}A_n\text{中}\} & (30)
\end{aligned}$$

定义12　下极限：对于集合列$A_1, A_2, \cdots$，定义其下极限为

$$\begin{aligned}
\liminf_n A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m & (31)\\
&= \left\{x \in X : \exists n \in \mathbb{N}, x \in \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m\right\} & (32)\\
&= \{x \in X : \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \geq n, x \in A_m\} & (33)\\
&= \{x \in X : x\text{在除有限个外的所有}A_n\text{中}\} & (34)
\end{aligned}$$

定义13　极限：对于集合列$A_1, A_2, \cdots$，称其收敛，如果

$$\limsup_n A_n = \liminf_n A_n \tag{35}$$

记其极限为

$$\lim_n A_n = \limsup_n A_n = \liminf_n A_n \tag{36}$$

定理2　单调收敛定理：对于集合列$A_1, A_2, \cdots$，如果其单调，那么其收敛。

- 如果集合列$A_1, A_2, \cdots$单调递增，那么

$$\lim_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \tag{37}$$

- 如果集合列$A_1, A_2, \cdots$单调递减，那么

$$\lim_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \tag{38}$$

定理3：对于σ-代数$\mathscr{F}$，如果对于任意$n \in \mathbb{N}$，成立$A_n \in \mathscr{F}$，那么

$$\limsup_n A_n \in \mathscr{F}, \qquad \liminf_n A_n \in \mathscr{F} \tag{39}$$

2.集合的基数

定义1 **对等**：对于集合A,B，称二者对等或具有相同的基数，如果存在一一映射

$$\varphi:A\rightarrow B \tag{40}$$

记作$A\sim B$。其中基数记作$\overline{\overline{A}}$和$\overline{\overline{B}}$。

定义2 **无穷集合**：对于集合A，如果存在真子集$B\subset A$，使得成立$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$，那么称$A$为无穷集合。

定理1 **Cantor定理**：$\overline{\overline{\mathbb{N}}}\neq\overline{\overline{\mathbb{R}}}$

定义3 **基数的比较**：对于集合A,B，如果$A\nsim B$，且存在$A^*\subset A$，使得成立$A^*\sim B$，那么称A的基数大于B的基数，记作$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$。

定理2 **Bernstein定理**：对于集合A,B，如果存在$A^*\subset A,B^*\subset B$，使得成立$A^*\sim B,A\sim B^*$，那么$A\sim B$。

推论：如果$A\subset B\subset C$且$A\sim C$，那么$A\sim B\sim C$。

定理3 **基数的三歧性**：对于任意集合A,B，以下三者成立且仅成立其一

- $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$
- $\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$
- $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$

3.可数集合

定义1 **可数集合**：称集合A为可数集合，如果$A\sim\mathbb{Z}^+$。

定理1：任意无穷集合A都存在可数子集。

定理2：可数集合的子集，或为有限集合，或为可数集合。

定理3：如果集合A可数，且集合B有限，那么$A\cup B$为可数集合。

定理4：如果集合A和B都是可数集合，那么$A\cup B$为可数集合。

定理5：如果集合A_n为可数集合，其中$k=1,2,\cdots$，那么其并

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n \tag{41}$$

为可数集合。

定理6：有理数可数，即$\mathbb{Q}\sim Z^+$。

定理7：如果集合A为无穷集合，集合B为可数集合，那么$A\cup B\sim A$。

4.不可数集合

定义1 **可数基数**：记可数集合的基数为可数基数，记作$\aleph_0$。

定义2 **连续基数**：记区间$(0,1)$的基数为可数基数，记作$\aleph$。

定理1：$\overline{\overline{\mathbb{R}}}=\aleph$

定理2：对于任意$a < b$，成立$\overline{\overline{(a,b)}} = \aleph$

定理3：如果对于任意$k \in \mathbb{Z}^+$，$\overline{\overline{A_k}} \leq \aleph$，且存在$k_0 \in \mathbb{Z}^+$，使得成立$\overline{\overline{A_{k_0}}} = \aleph$，那么成立

$$\overline{\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}} = \aleph \tag{42}$$

定理4：

$$\overline{\overline{(0,1) \times (0,1)}} = \aleph \tag{43}$$

定理5：对于任意集合A，成立

$$\overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} > \overline{\overline{A}} \tag{44}$$

定理6：可数集合的集族的基数为连续基数，即

$$2^{\aleph_0} = \aleph \tag{45}$$

第二章：n维空间中的点集

1.聚点、内点、边界点、Bolzano-Weierstrass定理

定义1　内点：对于$E\subset\mathbb{R}^n$，$x\in\mathbb{R}^n$，称x为E的内点，如果存在$\delta>0$，使得成立$N(x,\delta)\subset E$。

定义2　边界点：对于$E\subset\mathbb{R}^n$，$x\in\mathbb{R}^n$，称x为E的边界点，如果对于任意$\delta>0$，成立$E\cap N(x,\delta)\neq\varnothing$且$E^c\cap N(x,\delta)\neq\varnothing$。

定义3　孤立点：对于$E\subset\mathbb{R}^n$，$x\in\mathbb{R}^n$，称x为E的孤立点，如果存在$\delta>0$，使得成立$E\cap N(x,\delta)=\{x\}$。

定义4　聚点：对于$E\subset\mathbb{R}^n$，$x\in\mathbb{R}^n$，称x为E的聚点，如果对于任意$\delta>0$，成立$N(x,\delta)\cap E-\{x\}\neq\varnothing$。

定义5　极限点：对于$E\subset\mathbb{R}^n$，$x\in\mathbb{R}^n$，称x为E的极限点，如果存在与x互异的点集$\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}\subset E$，使得成立

$$\lim_{k\to\infty}x_k=x \tag{46}$$

定义6　内部：对于$E\subset\mathbb{R}^n$，称E的所有内点构成的集合为E的内部，记作E°。

定义7　导集：对于$E\subset\mathbb{R}^n$，称E的所有聚点构成的集合为E的导集，记作E'。

定义8　闭包：对于$E\subset\mathbb{R}^n$，定义E的闭包为$\overline{E}=E\cup E'$。

定义9　边界：对于$E\subset\mathbb{R}^n$，定义E的边界为$\partial E=\overline{E}-E^\circ$。

定义10　孤立点集：对于$E\subset\mathbb{R}^n$，定义E的孤立点集为$E-E'$。

定理1：聚点与极限点等价。

定理2：如果$A\subset B\subset\mathbb{R}^n$，那么$A'\subset B'$。

定理3：如果$A,B\subset\mathbb{R}^n$，那么$(A\cup B)'=A'\cup B'$。

定理4　Bolzano-Weierstrass定理：如果$E\subset\mathbb{R}^n$为有界无穷集合，那么$E'\neq\varnothing$。

定理5：孤立集合至多为可数集合。

2.开集、闭集与完备集

定义1　开集：称集合$E\subset\mathbb{R}^n$为开集，如果$E=E^\circ$。

定义2　闭集：称集合$E\subset\mathbb{R}^n$为闭集，如果$E'\subset E$。

定义3　紧集：称集合$E\subset\mathbb{R}^n$为紧集，如果E为有界闭集。

定义4　自密集：称集合$E\subset\mathbb{R}^n$为自密集，如果$E\subset E'$。

定义5　完备集：称集合$E\subset\mathbb{R}^n$为完备集，如果$E=E'$。

定义6　无处稠密：称集合$E\subset\mathbb{R}^n$为无处稠密的，如果$\overline{E}$不包含任何邻域。

定义7　G_δ型集：可数多个开集的交称为G_δ型集。

定义8　F_σ型集：可数多个闭集的并称为F_σ型集。

定理1：对于任意集合$E \subset \mathbb{R}^n$，E'和$\overline{E}$均为闭集。

定理2：F为闭集，当且仅当F^c为开集。

定理3：任意一族闭集的交为闭集。

定理4：任意一族开集的并为开集。

定理5：有限多个闭集的并为闭集。

定理6：有限多个开集的并为开集。

定理7　Borel有限覆盖定理：紧集的开覆盖存在有限子覆盖。

3.p进位表数法

定理：设$\mathscr{D}$表示所有由0和1重复排列而成的序列，那么$\mathscr{D} \sim (0,1)$。

4.一维开集、闭集、完备集的构造

> 本节讨论$\mathbb{R}$空间。

定理1：非空开集可表示为至多可数个不交开区间的并。

定理2：非空紧集存在最值且可取到最值。

定理3：非空紧集可表示为一闭区间和至多可数个不交开区间的差。

定理4：非空紧集为完备的，当且仅当其是从一闭区间去掉至多可数个彼此没有公共端点且与原来的闭区间也没有公共端点的开区间而成，即

$$F = [a,b] - \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n) \tag{47}$$

其中$a < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < b$。

Cantor集的性质：

$$\mathcal{C} = \left\{x \in [0,1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}, c_n \in \{0,2\}\right\} \tag{48}$$

- Cantor集的基数为连续基数。
- Cantor集为Lebesgue零测集。
- Cantor集为紧致集。
- Cantor集为**完美(perfect)**集，即其不存在孤立点。
- Cantor集为**无处稠密集(nowhere dense set)**，即对于任意$(x,y) \subset \mathbb{R}$，存在$(a,b) \subset (x,y)$，使得成立$(a,b) \cap \mathcal{C} = \varnothing$。
- Cantor集为**完全不连通(totally disconnected)**的，即对于任意$x < y \in \mathcal{C}$，存在$z \in (x,y)$，使得成立$z \notin \mathcal{C}$。

5.点集间的距离

定义1　集合间的距离：对于非空集合$A, B \subset \mathbb{R}^n$，定义其距离为

$$\rho(A,B) = \inf\{\rho(x,y) : x \in A, y \in B\} \tag{49}$$

定理1：对于非空闭集A, B，如果其中存在有界集，那么存在$x_0 \in A, y_0 \in B$，使得成立

$$\rho(x_0, y_0) = \rho(A, B) \tag{50}$$

定理2：对于点集E，以及$r > 0$，定义

$$U(E, r) = \{x : \rho(x, E) < r\} \tag{51}$$

那么$U(E, r)$为开集。

定理3　隔离性定理：对于非空不交闭集F_1, F_2，存在开集G_1, G_2，使得成立

$$F_1 \subset G_1, \qquad F_2 \subset G_2, \qquad G_1 \cap G_2 = \emptyset \tag{52}$$

第三章：测度理论

1.开集的体积

定义1　区间的体积：对于开区间

$$I=(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n) \tag{53}$$

闭区间

$$I=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n] \tag{54}$$

左开右闭区间

$$I=(a_1,b_1]\times\cdots\times(a_n,b_n] \tag{55}$$

左闭右开区间

$$I=[a_1,b_1)\times\cdots\times[a_n,b_n) \tag{56}$$

定义其体积为

$$|I|=\prod_{k=1}^{n}(b_k-a_k) \tag{57}$$

定理1：对于两组区间$\{I_k\}_{k=1}^{n}$和$\{J_k\}_{k=1}^{m}$，如果$\{I_k\}_{k=1}^{n}$两两不交，且

$$\bigcup_{k=1}^{n}I_k\subset\bigcup_{k=1}^{m}J_k \tag{58}$$

那么

$$\sum_{k=1}^{n}|I_k|\leq\sum_{k=1}^{m}|J_k| \tag{59}$$

引理1：任意非空开集$G\subset\mathbb{R}^n$存在可数个两两不交的左开右闭区间之并。

引理2：对于任意非空开集$G\subset\mathbb{R}^n$，如果两组左开右闭区间$\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$和$\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$均为两两不交，且

$$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n \tag{60}$$

那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|=\sum_{n=1}^{\infty}|J_n| \tag{61}$$

定义2　开集的体积：对于开集$G\subset\mathbb{R}^n$，定义其体积为

$$|G|=\sum_{n=1}^{\infty}|I_n| \tag{62}$$

其中$\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$为两两不交的左开右闭区间，且

$$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n \tag{63}$$

特别的，如果$G=\varnothing$，那么定义$|G|=0$。

定理2：对于开集$G \subset \mathbb{R}^n$，以及开集$G_n \subset \mathbb{R}^n$，其中$n \in \mathbb{N}^*$，成立

- $|G| \geq 0$，当且仅当$G = \varnothing$时等号成立。
- 如果$G_1 \subset G_2$，那么$|G_1| \leq |G_2|$，当且仅当$G_1 = G_2$时等号成立。
- $$\left|\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |G_n| \tag{64}$$

  当且仅当任意G_n两两不交时等号成立。

2.点集的外测度

定义 外测度：

$$\begin{aligned} m^* : &\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty] &(65)\\ &E \mapsto \inf\{|G| : G \supset E\text{为开集}\} &(66)\end{aligned}$$

定理 外测度的性质：

- 非负性：$m^*(E) \geq 0$，特别的$m^*(\varnothing) = 0$。
- 单调性：如果$E \subset F$，那么$m^*(E) \leq m^*(F)$。
- 次可数可加性：

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) \tag{67}$$

- 分离条件下的可数可加性：如果存在不交的开集G_n，使得$E_n \subset G)n$，那么

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) \tag{68}$$

3.可测集合及测度

定义1　可测集：称集合$E \subset \mathbb{R}^n$为可测集，如果其满足Carathéodory条件，即对于任意$T \subset \mathbb{R}^n$，成立

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \tag{69}$$

定义2　测度：

$$\begin{aligned} m : &\mathfrak{M} \to [0, \infty] &(70)\\ &E \mapsto m^*(E) &(71)\end{aligned}$$

定义3　Lebesgue代数：定义Lebesgue代数为σ-代数

$$\mathfrak{M} = \{E \subset \mathbb{R}^n : E\text{可测}\} \tag{72}$$

定义4　Borel代数：令$\mathscr{G} = \{G \subset \mathbb{R}^n\text{为开集}\}$，定义Borel代数为由$\mathscr{G}$生成的最小$\sigma$-代数

$$\mathfrak{B} = \mathscr{F}(\mathscr{G}) \tag{73}$$

- 区间 $\subset \mathfrak{B}$
- G_δ型集 $\subset \mathfrak{B}$
- F_σ型集 $\subset \mathfrak{B}$

定义5　几乎处处：称命题$P(x)$关于$x \in I$几乎处处成立，如果

$$m(\{x \in I : \neg P(x)\}) = 0 \tag{74}$$

记作

$$P(x), \quad \text{a.e. } x \in I \tag{75}$$

定理1　零测集可测：如果$m^*(N) = 0$，那么N为可测集。

定理2　运算封闭性：可测集对于可数交、可数并、差、补运算封闭，且可测集的内部、导集、闭包、边界和孤立点集均为可测集。

定理3　可数可加性：对于不交可测集序列$\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$，成立

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) \tag{76}$$

定理4　连续性：

- **下连续性**：如果$\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$为单调递增集合序列，那么对于任意$T \subset \mathbb{R}^n$，成立

$$m^*(T \cap \lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m^*(T \cap E_n) \tag{77}$$

  特别的，

$$m(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n) \tag{78}$$

- **上连续性**：如果$\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$为单调递减集合序列，那么对于任意满足$m^*(T) < \infty$的$T \subset \mathbb{R}^n$，成立

$$m^*(T \cap \lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m^*(T \cap E_n) \tag{79}$$

  特别的，如果存在$k \in \mathbb{N}^*$，使得成立$m(E_k) < \infty$，那么成立

$$m(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n) \tag{80}$$

定理5　$\mathfrak{M}$和$\mathfrak{B}$的关系：

- 记开集族为

$$\mathscr{G} = \{G \subset \mathbb{R}^n \text{为开集}\} \tag{81}$$

  零测集族为

$$\mathscr{N} = \{N : m(N) = 0\} \tag{82}$$

  那么

$$\mathfrak{B} \subsetneq \mathfrak{M} = \mathscr{F}(\mathscr{G} \cup \mathscr{N}) \tag{83}$$

- 对于任意$E \subset \mathbb{R}^n$，存在G_δ型集G，使得成立$G \supset E$，且$m(G) = m^*(E)$。
- 对于任意$E \in \mathfrak{M}$，存在F_σ型集F，使得成立$F \subset E$，且$m(F) = m(E)$。

定理6　可测集的等价定义：对于$E \subset \mathbb{R}^n$，以下命题等价。

- 对于任意$T \subset \mathbb{R}^n$，成立

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \tag{84}$$

- 存在G_δ型集G，使得成立$m(G - E) = 0$。
- 存在F_σ型集F，使得成立$m(E - F) = 0$。
- 存在G_δ型集G和F_σ型集F，使得成立$F \subset E \subset G$，且$m(G - F) = 0$。

- 对于任意$\varepsilon > 0$，存在开集$G \supset E$，闭集$F \subset E$，使得成立$m(G-F) < \varepsilon$。
- 对于任意$\varepsilon > 0$，存在集合$E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$，使得成立$E_1 \subset E \subset E_2$，且$m(E_2 - E_1) < \varepsilon$。

4.乘积空间

定义 截口：对于$E \subset \mathbb{R}^{p+q}$，$x \in \mathbb{R}^p$，定义$E$关于$x$的截口为

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^q : (x,y) \in E\} \tag{85}$$

对于$E \subset \mathbb{R}^{p+q}$，$y \in \mathbb{R}^q$，定义$E$关于$y$的截口为

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^p : (x,y) \in E\} \tag{86}$$

定理1：如果$A \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^p)$且$B \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^q)$，那么$A \times B \in \mathfrak{M}(\mathbb{R}^{p+q})$，且$m(A \times B) = m(A)m(B)$；若$A$和$B$之一为零测集，则$m(A \times B) = 0$。

定理2：如果$E \subset \mathbb{R}^{p+q}$为零测集，那么对于几乎处处$x \in \mathbb{R}^p$，$E_x$为零测集。

定理3：如果$E \in \mathfrak{M}(R^{p+q})$，那么对于几乎处处$x \in \mathbb{R}^p$，$E_x \in \mathfrak{M}(R^q)$。

5.保距映射

定义 保距映射：称映射$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，如果对于任意$x, y \in \mathbb{R}^n$，成立$\rho(T(x), T(y)) = \rho(x, y)$。

- T为双射。
- T^{-1}为保距映射。
- 定义$S(x) = T(x) - T(0)$，那么对于任意$\lambda \in \mathbb{R}$，成立$S(\lambda x) = \lambda S(x)$。
- 若x, y, z共线，那么$T(x), T(y), T(z)$共线。
- 如果$x \perp y$，那么$S(x+y) = S(x) + S(y)$。

引理：对于非空有界开集$G \subset \mathbb{R}^n$，存在不交闭球列$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得成立

$$m(G) = \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) \tag{87}$$

定理1：如果映射$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$为保距映射，那么对于任意$E \subset \mathbb{R}^n$，成立$m^*(T(E)) = m^*(E)$。

定理2：如果映射$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$为保距映射，那么对于任意$E \in \mathfrak{M}(R^n)$，成立$T(E) \in \mathfrak{M}(R^n)$且$m(T(E)) = m(E)$。

6.集合环上的测度的延拓

定义1　集合域：称$\mathscr{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$为$\Omega$的一个集合域，如果其对于有限并和补运算封闭。

- $\varnothing, \Omega \in \mathscr{F}$
- 域对于有限交、有限并、差和补运算封闭。

定义2　集合环：称$\mathscr{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$为$\Omega$的一个集合环，如果其对于有限并和差运算封闭。

- $\varnothing \in \mathscr{F}$
- 域对于有限交、有限并和差运算封闭。

定义3　σ-集合域：称$\mathscr{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$为$\Omega$的一个$\sigma$-集合域，如果其对于可数并和补运算封闭。

定义4　σ-集合环：称$\mathscr{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$为$\Omega$的一个$\sigma$-集合环，如果其对于可数并和差运算封闭。

定义5　集合环上的测度：对于Ω上的一个集合环$\mathscr{R}$，称映射$\mu:\mathscr{R}\to[0,\infty]$为测度，如果满足

- **空集的零测性**：$\mu(\varnothing)=0$
- **可数可加性**：如果$\{R_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{R}$几乎处处互不相交且$\bigcup_{n=1}^{\infty}R_n\subset\mathscr{R}$，那么

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}R_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(R_n) \tag{88}$$

定义6　集合环上测度的延拓：对于Ω上的集合环$\mathscr{R}$上，定义σ-集合环

$$\mathscr{H}=\left\{R:\exists\{R_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{R},\bigcup_{n=1}^{\infty}R_n\supset R\right\} \tag{89}$$

对于集合环$\mathscr{R}$上的测度μ，定义其延拓为

$$\overline{\mu}:\mathscr{H}\to[0,\infty] \tag{90}$$

$$R\mapsto\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(R_n):\{R_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{R},\bigcup_{n=1}^{\infty}R_n\supset R\right\} \tag{91}$$

定义7　可测集：称$E\in\mathscr{H}$关于测度μ为可测的，如果对于任意$T\in\mathscr{H}$，成立

$$\overline{\mu}(E)=\overline{\mu}(T\cap E)+\overline{\mu}(T\cap E^c) \tag{92}$$

记$\mathscr{H}$上关于测度μ的可测集构成的集族为$\mathscr{M}_{\mu}$。

定义8　完备测度：称Ω上的集合环$\mathscr{R}$上的测度μ是完备的，如果$\mathscr{R}$对于零测集的任意子集封闭。

定理1　延拓测度的性质：对于Ω上的集合环$\mathscr{R}$上的测度μ的延拓$\overline{\mu}$，成立如下性质。

- **空集的零测性**：$\overline{\mu}(\varnothing)=0$
- **非负性**：$\overline{\mu}(R)\geq 0$
- **单调性**：如果$A\subset B\in\mathscr{H}$，那么$\overline{\mu}(A)\subset\overline{\mu}(B)$。
- **次可数可加性**：如果$\{R_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathscr{R}$，那么

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}R_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mu}(R_n) \tag{93}$$

- **定义域的延拓**：$\mathscr{H}\supset\mathscr{M}_{\mu}\supset\mathscr{R}$
- **测度的完备**：$\overline{\mu}$在$\mathscr{R}$上是完备测度。
- **延拓的一致性**：$\overline{\mu}$是$\mathscr{M}_{\mu}$上的测度，且如果$R\in\mathscr{R}$，那么$\overline{\mu}(R)=\mu(R)$。
- **可测集族为集合环**：$\mathscr{M}_{\mu}$为σ-集合环。

定义9　分布函数：对于定义在$\mathbb{R}^n$上的函数f，对于任意$k=1,\cdots,n$，定义

$$\Delta_k(f;a,b)=f(x_1,\cdots,x_{k-1},b,x_{k+1},\cdots,x_n)-f(x_1,\cdots,x_{k-1},a,x_{k+1},\cdots,x_n) \tag{94}$$

那么称f为分布函数，如果f是右连续的，且对于$\mathbb{R}^n$中的任意左开右闭区间

$$I=\{(x_1,\cdots,x_n):a_k<x_k\leq b_k,k=1,\cdots,n\} \tag{95}$$

成立

$$\mu_f(I)=\Delta_1(\Delta_2(\cdots\Delta_n(f;a_n,b_n);\cdots;a_2,b_2);a_1,b_1)\geq 0 \tag{96}$$

定义10　Lebesgue-Stieltjes外测度：对于$\mathbb{R}^n$上的分布函数f，定义Lebesgue-Stieltjes外测度为

$$
\begin{aligned}
\overline{\mu}_f :&\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty] &(97)\\
&E \mapsto \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\mu_f(I_n) : \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E\right\} &(98)
\end{aligned}
$$

定义11　$\mathbb{R}$上的Hausdorff测度：对于$p,\delta>0$，记$I_n\subset\mathbb{R}$为开区间，定义

$$
\begin{aligned}
H_{p,\delta}^* :&\mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty] &(99)\\
&E \mapsto \inf\left\{\sum_{k=1}^{n}|I_k|^p : |I_k|\le\delta, \bigcup_{k=1}^{n} I_k \supset E\right\} &(100)
\end{aligned}
$$

定义p维Hausdorff外测度为

$$
H_p^* = \lim_{\delta\to0^+} H_{p,\delta}^* \tag{101}
$$

定义12　Hausdorff维数：定义$E\subset\mathbb{R}$的Hausdorff维数为

$$
\dim(E) = \inf\{p>0 : H_p^*(E)=0\} \tag{102}
$$

定理2　Hausdorff外测度的性质：

- **空集的零测性**：$H_p^*(\varnothing)=0$
- **单调性**：如果$A\subset B\subset\mathbb{R}$，那么$H_p^*(A)\le H_p^*(B)$。
- **次可数可加性**：

$$
H_p^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty}H_p^*(E_n) \tag{103}
$$

- **分离可加性**：如果$\rho(A,B)>0$，那么$H_p^*(A\cup B)=H_p^*(A)+H_p^*(B)$。
- **膨胀性**：对于$\lambda>0$，成立$H_p^*(\lambda E)=\lambda^p H_p^*(E)$。
- **Hausdorff外测度与Lebesgue外测度**：

$$
H_1^* = m^* \tag{104}
$$

- 如果$q>p$且$H_p^*(E)<\infty$，那么$H_q^*(E)=0$；反之，如果$q>p$且$H_q^*(E)>0$，那么$H_p^*(E)=\infty$。
- 如果$I\subset\mathbb{R}$为非退化区间，那么

$$
H_p^*(I) = \begin{cases} \infty, & 0<p<1 \\ |I|, & p=1 \\ 0, & p>1 \end{cases} \tag{105}
$$

定理3　Hausdorff维数的性质：

- **Hausdorff外测度的三歧性**：

$$
H_p^*(E) = \begin{cases} \infty, & 0<p<\dim(E) \\ H_p^*(E), & p=\dim(E) \\ 0, & p>\dim(E) \end{cases} \tag{106}
$$

- **可数集的Hausdorff外测度与维数**：可数集的Hausdorff外测度为零，其Hausdorff维数为零。
- **Hausdorff维数与Lebesgue外测度**：如果$m^*(E)>0$，那么$\dim(E)=1$；如果$\dim(E)<1$，那么$m^*(E)=0$。
- **Cantor集的Hausdorff维数**：

$$\dim(\mathcal{C}) = \frac{\ln 2}{\ln 3} \tag{107}$$

第四章：可测函数

1.可测函数

定义1　可测函数：对于函数$f:E\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)\to\overline{\mathbb{R}}$，称$f$为可测函数，如果

- 对于任意$c\in\mathbb{R}$，成立$E[f\geq c]\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$。
- 对于任意$c\in\mathbb{R}$，成立$E[f\leq c]\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$。
- 对于任意$c\in\mathbb{R}$，成立$E[f>c]\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$。
- 对于任意$c\in\mathbb{R}$，成立$E[f<c]\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$。

推论：如果$f:E\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)\to\overline{\mathbb{R}}$为可测函数，那么$E[f=\pm\infty]\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$。

定理1：对于$E\in\mathfrak{M}(\mathbb{R}^n)$，如果在$E$上几乎处处成立$f(x)=g(x)$，那么$f$可测当且仅当$g$可测。

定理2　局部可测和整体可测：如果f是可测集E上的可测函数，且$E_0\subset E$为可测子集，那么f也是E_0上的可测函数；反之，如果对于任意$n\in\mathbb{N}^*$，f均为可测集E_n上的可测函数，且$\bigcup_{n=1}^\infty E_n=E$，那么$f$也是$E$上的可测函数。

定理3　线性、乘积和除法：对于可测集E上的可测函数f和g，成立

- 对于任意$c\in\mathbb{R}$，如果cf在E上几乎处处存在意义，那么cf也是E上的可测函数。
- 如果$f+g$在E上几乎处处存在意义，那么$f+g$也是E上的可测函数。
- 如果fg在E上几乎处处存在意义，那么fg也是E上的可测函数。
- 定义

$$\frac{1}{f(x)}=\begin{cases}\frac{1}{f(x)}, & 0<|f(x)|<\infty\\ 0, & f(x)=\pm\infty\\ \infty, & f(x)=0\end{cases}\tag{108}$$

　　那么$\frac{1}{f}$是E上的可测函数。

定理4　确界和极限：如果$\{f_n\}_{n=1}^\infty$为可测集E上的可测函数序列，那么如下函数均为E上的可测函数。

$$\sup f_n,\qquad \inf f_n,\qquad \limsup f_n,\qquad \liminf f_n\tag{109}$$

于是如果f_n在E上几乎处处收敛于f，那么f为可测函数。

定理5　正部和负部：对于可测集E上的可测函数f，定义其正部和负部分别为

$$f^+=\max\{f,0\}=\frac{|f|+f}{2},\qquad f^-=\max\{-f,0\}=\frac{|f|-f}{2}\tag{110}$$

那么f可测当且仅当f^+和f^-均可测。

定义2　下方图形：对于定义在$E\subset\mathbb{R}^n$上的非负函数f，定义f在E上的下方图形为

$$G(E;f)=\{(x,t):x\in E,0\leq t<f(x)\}\tag{111}$$

定义3　简单函数：对于互不相交的有限可测集合序列$\{E_k\}_{k=1}^n\subset\mathbb{R}^2$，$\{c_k\}_{k=1}^n\in\mathbb{R}$，定义$E=\bigcup_{k=1}^n E_k$上的简单函数为

$$\varphi=\sum_{k=1}^n c_k\mathbb{1}_{E_k}\tag{112}$$

对于非负简单函数φ，容易知道

$$G(E;\varphi)=\bigcup_{k=1}^{n}E_k\times[0,c_k) \tag{113}$$

定理6：对于可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上的非负函数f，如下命题等价。

- f是E上的可测函数。
- $G(E;f)$是$\mathbb{R}^{n+1}$上的可测集。
- 存在单调递增的非负简单函数序列$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得成立$\varphi_n\to f$。

2.Egorov定理

收敛点集的结构：对于有限测度的可测集E上的仅取有限值的可测函数序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$和可测函数f，成立

$$\{x\in E:f_n(x)\to f(x)\}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}\left\{x\in E:|f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{k}\right\} \tag{114}$$

Egorov定理（几乎处处收敛则近乎一致收敛）：对于有限测度的可测集E上的几乎处处有限的可测函数序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，如果f_n在E上几乎处处收敛于几乎处处有限的函数f，那么对于任意$\delta>0$，存在可测子集$E_\delta\subset E$，使得$m(E-E_\delta)<\delta$，且f_n在E_δ上一致收敛于f。

Egorov定理的本质：$m(E)<\infty$。例：令$E=[0,\infty)$，$f_n=\mathbb{1}_{[n,\infty)}$，$f=0$。

Egorov逆定理：对于有限测度的可测集E上几乎处处有限的可测函数序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，如下命题等价。

- f_n在E上几乎处处收敛于f。
- 对于任意$\delta>0$，存在可测子集$E_\delta\subset E$，使得$m(E-E_\delta)<\delta$，且f_n在E_δ上一致收敛于几乎处处有限的函数f。

3.Luzin定理

连续：称定义在I上的函数f在$x_0\in I$处是连续的，如果对于任意ε，存在$\delta>0$，使得对于任意$x\in I\cap N_\delta(x_0)$，成立$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。

Luzin定理（可测则近乎连续）：如果f是可测集E上的几乎处处有限的可测函数，那么对于任意$\varepsilon>0$，存在闭集$F\subset E$，使得成立$m(E-F)<\varepsilon$，且f在F上连续。

Tietze延拓定理：对于闭集$F\subset\mathbb{R}^n$，连续函数$f:F\to\mathbb{R}$可延拓为连续函数$\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，且$\varphi\Big|_F=f$。

4.Lebesgue定理和Riesz定理

依测度收敛：对于可测集E上的几乎处处有限的可测函数序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$和可测函数f，称f_n在E上依测度收敛于f，并记作$f_n\xrightarrow{m}f$，如果对于任意$\varepsilon>0$，成立

$$\lim_{n\to\infty}m(E[|f_n-f|\geq\varepsilon])=0 \tag{115}$$

Lebesgue定理（几乎处处收敛则依测度收敛）：对于有限测度的可测集E，如果$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$为E上的几乎处处有限的可测函数序列，f为E上的几乎处处有限的可测函数，且在E上几乎处处成立$f_n\to f$，那么$f_n\xrightarrow{m}f$。

F.Riesz定理（依测度收敛序列存在几乎处处收敛子列）：对于可测集E，如果$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$为E上的几乎处处有限的可测函数序列，f为E上的几乎处处有限的可测函数，且在E上成立$f_n \stackrel{m}{\longrightarrow} f$，那么存在$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$的子列$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$，使得在$E$上几乎处处成立$f_{n_k} \to f$。

推论：对于可测集E，如果$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$为$E$上的几乎处处有限的可测函数序列，$f$和$g$为$E$上的几乎处处有限的可测函数，且在$E$上成立$\varphi_n \stackrel{m}{\longrightarrow} f$和$\varphi_n \stackrel{m}{\longrightarrow} g$，那么在$E$上几乎处处成立$f = g$。

依测度收敛则不一定几乎处处收敛的反例：以下函数的定义域为$E = [0, 1)$，定义

$$f_i^{(j)} = \mathbb{1}_{[\frac{i-1}{j}, \frac{i}{j})}, \quad i, j \in \mathbb{N}^*, 1 \leq i \leq j \tag{116}$$

定义$\varphi_n = f_i^{(j)}$，那么$\varphi_n \stackrel{m}{\longrightarrow} 0$，但对于任意$x \in [0, 1)$，$\lim \varphi_n(x)$不存在。

第五章：积分理论

1.非负函数的积分

（可测）分划：将有限测度的可测集E分为有限个两两不不相交的可测子集$D=\{E_k\}_{k=1}^n$。

分划的合并：对于有限测度的可测集E的两个分划$D_1=\{E_k^{(1)}\}_{k=1}^m$，$D_2=\{E_k^{(2)}\}_{k=1}^n$，定义二者的合并为$D=\{E_i^{(1)}\cap E_j^{(2)}\}_{i,j}$，称$D$比$D_1$和$D_2$细密。

小和数与大和数：对于有限测度的可测集E的划分$D=\{E_k\}_{k=1}^n$，以及在E上非负有界的函数f，记

$$b_k=\inf_{x\in E_k}f(x),\qquad B_k=\sup_{x\in E_k}f(x) \tag{117}$$

定义f在E上关于分划D的小和数与大和数分别为

$$s_D^{(f)}=\sum_{k=1}^n b_k m(E_k),\qquad S_D^{(f)}=\sum_{k=1}^n B_k m(E_k) \tag{118}$$

- $$s_D\le S_D \tag{119}$$
- 如果分划D^*比D细密，那么
$$s_D\le s_{D^*}\le S_{D^*}\le S_D \tag{120}$$
- 对于任意两个分划D_1和D_2，成立
$$s_{D_1}\le S_{D_2},\qquad s_{D_2}\le S_{D_1} \tag{121}$$

划分的简单函数：对于有限测度的可测集E的划分$D=\{E_k\}_{k=1}^n$，定义上简单函数与下简单函数分别为

$$\underline{\varphi}_D^{(f)}=\sum_{k=1}^n b_k\mathbb{1}_{E_k},\qquad \overline{\varphi}_D^{(f)}=\sum_{k=1}^n B_k\mathbb{1}_{E_k} \tag{122}$$

- $$\underline{\varphi}_D^{(f)}\le f\le\overline{\varphi}_D^{(f)} \tag{123}$$
- $$G(E;\underline{\varphi}_D^{(f)})\subset G(E;f)\subset G(E;\overline{\varphi}_D^{(f)}) \tag{124}$$
- $$s_D^{(f)}=m(G(E;\underline{\varphi}_D^{(f)})),\qquad S_D^{(f)}=m(G(E;\overline{\varphi}_D^{(f)})) \tag{125}$$

上积分与下积分：对于有限测度的可测集E的划分$D=\{E_k\}_{k=1}^n$，以及在E上非负有界的函数f，定义上积分与下积分分别为

$$\overline{\int}_E f=\inf_D S_D^{(f)},\qquad \underline{\int}_E f=\sup_D s_D^{(f)} \tag{126}$$

- $$\overline{\int}_E f\le\underline{\int}_E f \tag{127}$$
- 如果$f\le g$，那么
$$\overline{\int}_E f\le\overline{\int}_E g,\qquad \underline{\int}_E f\le\underline{\int}_E g \tag{128}$$
- 对于可测子集$E_1,E_2\subset E$，如果$E_1\cap E_2$，$E_1\cup E_2=E$，那么

$$\overline{\int}_E f = \overline{\int}_{E_1} f + \overline{\int}_{E_2} f, \qquad \underline{\int}_E f = \underline{\int}_{E_1} f + \underline{\int}_{E_2} f \tag{129}$$

- $$\overline{\int}_E f + g \leq \overline{\int}_E f + \overline{\int}_E g, \qquad \underline{\int}_E f + g \geq \underline{\int}_E f + \underline{\int}_E g \tag{130}$$

可积函数的积分：

- $m(E) < \infty$，f非负有界可测：

$$\int_E f = \overline{\int}_E f = \underline{\int}_E f \tag{131}$$

- $m(E) < \infty$，f非负可测：令$f_n = \min\{f, n\}$，定义

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n \tag{132}$$

- f非负可测：令$E_n = E \cap B_n$，定义

$$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f \tag{133}$$

定理1　存在积分与可测的关系：对于可测集$E \subset \mathbb{R}^n$，如果f在E上非负，那么f存在积分，当且仅当f在E上可测。

定理2　简单函数的积分：对于简单函数

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbb{1}_{E_k} \tag{134}$$

其中$E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$，那么

$$\int_E \varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k m(E_k) \tag{135}$$

定理3　积分与下方图形的关系：对于可测集$E \subset \mathbb{R}^n$上的非负可测函数f，成立

$$\int_E f = m(G(E; f)) \tag{136}$$

定理4　非负可测函数积分的性质：

- 如果$f \leq g$，那么

$$\int_E f \leq \int_E g \tag{137}$$

- 对于互不相交的可测集E和F，成立

$$\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f \tag{138}$$

- $$\int_E f + g = \int_E f + \int_E g \tag{139}$$

- 如果在E上几乎处处成立$f = g$，那么

$$\int_E f=\int_E g \tag{140}$$

Levi定理：对于可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上的非负单调递增的可测函数序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，成立

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n \tag{141}$$

Lebesgue基本定理：对于可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上的非负可测函数序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，成立

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n \tag{142}$$

Fatou引理：对于可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上的非负可测函数序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，成立

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n\le\liminf_{n\to\infty}\int_E f_n \tag{143}$$

2.可积函数

存在积分：对于可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上的可测函数f，如果其正部和负部的积分之一有限，那么称f在E上存在积分，并且定义其积分为

$$\int_E f=\int_E f^+-\int_E f^- \tag{144}$$

可积函数：对于可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上的可测函数f，如果其正部和负部的积分均有限，那么称f为E上可积函数，并且定义其积分为

$$\int_E f=\int_E f^+-\int_E f^- \tag{145}$$

存在积分函数的性质：

- **数乘**：对于可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上的可测函数f，如果f在E上存在积分，那么对于任意$k\in\mathbb{R}$，kf存在积分，且

$$\int_E kf=k\int_E f \tag{146}$$

- **单调性**：对于可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上的可测函数f和g，如果f和g在E上存在积分，且$f\le g$，那么

$$\int_E f\le\int_E g \tag{147}$$

- **积分路径的可加性**：对于$\mathbb{R}^n$上的互不相交的可测集$\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$，以及在$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$上的可测函数$f$，如果$f$在$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$上存在积分，那么$f$在任意$E_n$上均存在积分，且

$$\int_{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n} f=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f \tag{148}$$

- 对于可测集$E\subset\mathbb{R}^n$上的可测函数f，如果f在E上存在积分，且在E上几乎处处成立$f=g$，那么g在E上存在积分，且

$$\int_E f=\int_E g \tag{149}$$

可积函数的性质：

- **加法**：对于可测集$E \subset \mathbb{R}^n$上的可测函数f和g，如果f和g在E上可积，那么$f+g$在E上可积，且

$$\int_E f+g=\int_E f+\int_E g \tag{150}$$

- 对于可测集$E \subset \mathbb{R}^n$上的可测函数f和g，如果g在E上可积，且在E上成立$|f| \leq g$，那么f在E上可积。
- **整体可积与局部可积**：对于可测集$E \subset \mathbb{R}^n$上的可测函数f，如果f在E上可积，那么f在E的任意可测子集上可积。
- **可积和绝对可积**：对于可测集$E \subset \mathbb{R}^n$上的可测函数f，成立f在E上可积，当且仅当$|f|$在E上可积。
- **有界则可积**：如果f是有限测度的可测集$E \subset \mathbb{R}^n$上的有界可测函数，那么f在E上可积。
- **可积则几乎处处有限**：对于可测集$E \subset \mathbb{R}^n$上的可测函数f，如果f在E上可积，那么f几乎处处有限。

定理 Lebesgue可积和Riemann可积的关系：如果有界函数f在$[a,b]$上Riemann可积，那么f在$[a,b]$上Lebesgue可积，且二者积分相等。

Lebesgue可积准则：如果f是区间$[a,b]$上的有界函数，那么f在$[a,b]$上Riemann可积，当且仅当f在$[a,b]$上几乎处处连续。

（函数的）积分绝对连续性：对于可测集$E \subset \mathbb{R}^n$上的存在积分函数f，称f在E上是积分绝对连续的，如果对于任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对于任意满足$m(E_\delta)<\delta$的可测子集$E_\delta \subset E$，成立

$$\left|\int_{E_\delta} f\right|<\varepsilon \tag{151}$$

（函数族的）积分等度绝对连续性：对于可测集$E \subset \mathbb{R}^n$上的可积函数族$\mathscr{F}$，称$\mathscr{F}$在E上是积分等度绝对连续的，如果对于任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对于任意满足$m(E_\delta)<\delta$的可测子集$E_\delta \subset E$，以及任意$f \in \mathscr{F}$，成立

$$\left|\int_{E_\delta} f\right|<\varepsilon \tag{152}$$

定理 可积则积分绝对连续：对于可测集$E \subset \mathbb{R}^n$上的可测函数f，如果f在E上可积，那么f在E上是积分绝对连续的。

Vitali定理：如果$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是有限测度的可测集$E \subset \mathbb{R}^n$上的积分等度绝对连续的函数序列，且f_n在E上依测度收敛于f，那么f在E上可积，且

$$\int_E f=\lim_{n \to \infty} \int_E f_n \tag{153}$$

Lebesgue控制收敛定理：如果F在可测集$E \subset \mathbb{R}^n$上可积，在E上的可测函数序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$满足$|f_n| \leq F$，且f_n在E上依测度收敛于f，或f_n在E上几乎处处收敛于f，那么f在E上可积，且

$$\int_E f=\lim_{n \to \infty} \int_E f_n \tag{154}$$

Lebesgue有界收敛定理：如果$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$是有限测度的可测集$E \subset \mathbb{R}^n$上的可测函数序列，且f_n在E上一致有界，同时f_n在E上依测度收敛于f，那么f在E上可积，且

$$\int_E f=\lim_{n \to \infty} \int_E f_n \tag{155}$$

3.Fubini定理

引理：对于可测集$E \subset \mathbb{R}^{p+q}$，那么$m(E_x)$是$\mathbb{R}^p$上几乎处处存在定义的可测函数，并且

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}^p} m(E_x) \tag{156}$$

Fubini定理：如果f是$\mathbb{R}^{p+q}$上的可积函数，那么

- 对于几乎任意的$x \in \mathbb{R}^p$，函数$f(x,y)$关于$y \in \mathbb{R}^q$可积。
- 几乎处处存在定义的函数$g(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y$在$\mathbb{R}^p$上可积。
- 成立等式

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f = \int_{\mathbb{R}^p}\int_{\mathbb{R}^q} f = \int_{\mathbb{R}^q}\int_{\mathbb{R}^p} f \tag{157}$$

推论：

- 如果f是$\mathbb{R}^{p+q}$上的非负可测函数，那么对于几乎任意的$x \in \mathbb{R}^p$，函数$f(x,y)$关于$y \in \mathbb{R}^q$非负可测，且成立等式

$$\int_{\mathbb{R}^{p+q}} f = \int_{\mathbb{R}^p}\int_{\mathbb{R}^q} f = \int_{\mathbb{R}^q}\int_{\mathbb{R}^p} f \tag{158}$$

- 如果f是$\mathbb{R}^{p+q}$上的可测函数，那么对于几乎任意的$x \in \mathbb{R}^p$，函数$|f(x,y)|$关于$y \in \mathbb{R}^q$可积，且

$$\int_{\mathbb{R}^p}\int_{\mathbb{R}^q} |f| < \infty \tag{159}$$

4.微分与积分