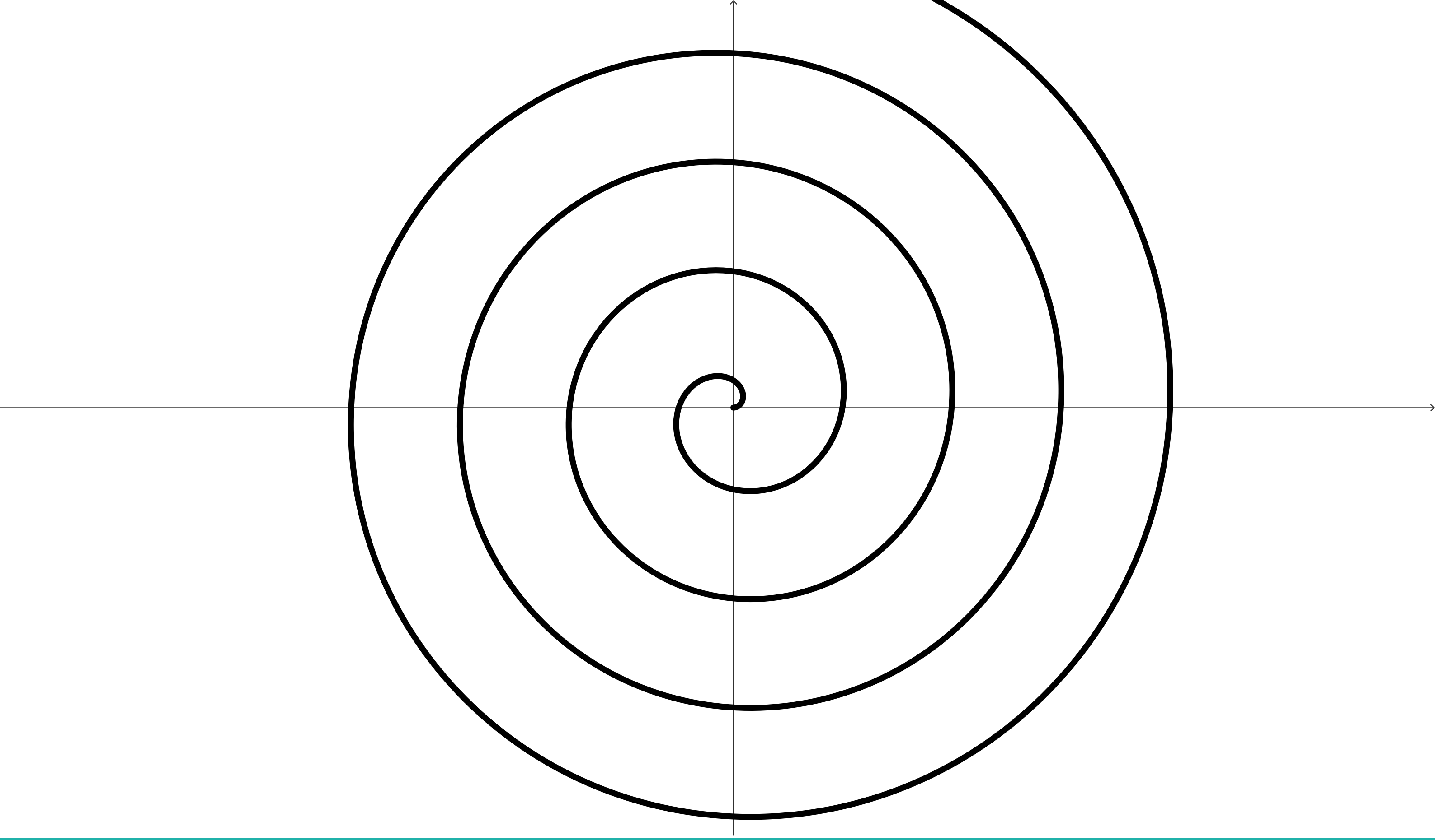

泛函分析 - 江泽坚 -课后习题

作者：若水

邮箱：ethanmxzhou@163.com

主页：helloethanzhou.github.io

时间：July 18, 2024

致谢

由衷感谢 **胡前锋** 老师对于本课程的帮助

目录

第一章 线性度量空间

习题 1.1

证明：在线性空间中，对于任意向量 x 和数 α，成立

$$
\begin{aligned}
&0x=0\\
&(-1)x=-x\\
&\alpha 0=0
\end{aligned}
$$

证明 对于 x，注意到

$$x+0x=1x+0x=(1+0)x=1x=x$$

因此由零元的唯一性，$0x=0$。于是

$$x+(-1)x=1x+(-1)x=(1-1)x=0x=0$$

因此由逆元的唯一性，$(-1)x=-x$。又注意到

$$\alpha 0=\alpha(0x)=(\alpha 0)x=0x=0$$

因此原命题得证！

习题 1.2

证明：下述消去律在线性空间中成立。

$$
\begin{aligned}
&x+y=x+z \implies y=z\\
&\alpha x=\alpha y, \alpha\neq 0 \implies x=y\\
&\alpha x=\beta x, x\neq 0 \implies \alpha=\beta
\end{aligned}
$$

证明 对于第一式，注意到

$$
\begin{aligned}
&x+y=x+z\\
\implies &-x+x+y=-x+x+z\\
\implies &(-x+x)+y=(-x+x)+z\\
\implies &0+y=0+z\\
\implies &y=z
\end{aligned}
$$

下面两式蕴含于如下命题

$$\alpha x=0 \implies \alpha=0, x=0$$

如果 $\alpha=0$，那么命题成立。如果 $\alpha\neq 0$，那么

$$\alpha x=0 \implies \frac{1}{\alpha}(\alpha x)=\frac{1}{\alpha}0 \implies (\frac{1}{\alpha}\alpha)x=0 \implies 1x=0 \implies x=0$$

于是命题得证！

习题 1.3

证明：在空间 (s) 中，序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 按坐标收敛于 x_0，当且仅当 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 按度量 d 收敛于 x_0。

证明 令 $x_n=\{x_i^{(n)}\}_{i=1}^{\infty}$，$x_0=\{x_i^{(0)}\}_{i=1}^{\infty}$。

对于充分性，如果 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 按度量 d 收敛于 x_0，即 $x_n\xrightarrow{d}x_0$，我们的目标是证明对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$，成立 $x_i^{(n)}\to x_i^{(0)}$。

任取 $n\in\mathbb{N}^*$ 以及 $\varepsilon>0$，由于 $x_n\xrightarrow{d}x_0$，那么存在 $M\in\mathbb{N}^*$，使得对于任意 $m>M$，成立

$$\sum_{i=m}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}|}{1+|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}|}<\varepsilon \implies \frac{|x_m^{(n)}-x_m^{(0)}|}{1+|x_m^{(n)}-x_m^{(0)}|}<\varepsilon \implies |x_m^{(n)}-x_m^{(0)}|<\varepsilon$$

因此 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 按坐标收敛于 x_0。

对于必要性，如果序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 按坐标收敛于 x_0，即对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$，成立 $x_i^{(n)}\to x_i^{(0)}$，我们的目标是证明 $x_n\xrightarrow{d}x_0$，即

$$d(\{x_i^{(n)}\},\{x_i^{(0)}\})=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}|}{1+|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}|}\to 0$$

任取 $\varepsilon>0$，由于 $\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{2^i}\to 0$ 且对于任意 $i\in\mathbb{N}^*$，成立 $x_i^{(n)}\to x_i^{(0)}$，那么存在 $M,N\in\mathbb{N}^*$，使得成立 $\sum_{i=M+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\varepsilon/2$，且对于任意 $1\le i\le M$，以及任意 $n>N$，成立 $|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}|<\varepsilon/2$，于是

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}|}{1+|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}|}\\
=&\sum_{i=1}^{M}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}|}{1+|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}|}+\sum_{i=M+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}|}{1+|x_i^{(n)}-x_i^{(0)}|}\\
\le&\sum_{i=1}^{M}\frac{\varepsilon}{2^{i+1}}+\sum_{i=M+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\\
<&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\
=&\varepsilon
\end{aligned}$$

因此 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 按如下度量 d 收敛于 x_0。

原命题得证！

习题 1.4

证明：空间 (c) 是可分的。

证明 定义

$$S=\{x_r=\{r_1,\cdots,r_n,r_n,\cdots\}\}:r_i\in\mathbb{Q}\}$$

显然 S 为可数集。

下面证明 S 为稠密集，任取 $\varepsilon>0$ 以及 $x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in(c)$，记 $x_n\to x_0$，那么存在 $N\in\mathbb{N}^*$，使得当 $n>N$ 时，$|x_n-x_0|<\varepsilon/2$。当 $1\le n\le N$ 时，取 r_n 满足 $|r_n-x_n|<\varepsilon$；当 $n>N$ 时，取 r_{N+1} 满足 $|r_{N+1}-x_0|<\varepsilon/4$，此时成立

$$|r_{N+1}-x_n|\le|x_n-x_0|+|r_{N+1}-x_0|<\varepsilon$$

那么令 $x_r=\{r_1,\cdots,r_N,r_{N+1},r_{N+1},\cdots\}$，于是

$$d(x_r,x)=\sup_{n\in\mathbb{N}^*}|r_n-x_n|=\max(\sup_{1\le n\le N}|r_n-x_n|,\sup_{n>N}|r_{N+1}-x_n|)\le\varepsilon$$

因此 S 为稠密集。

习题 1.5

证明：如果 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是度量空间 (X,d) 中的两个 Cauchy 序列，那么 $\{d(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列。

证明 由于 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是度量空间 (X,d) 中的两个 Cauchy 序列，那么任取 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}^*$，使得

对于任意 $m,n>N$，成立

$$d(x_m,x_n)<\varepsilon/2,\qquad d(y_m,y_n)<\varepsilon/2$$

进而

$$\begin{aligned}
&|d(x_m,y_m)-d(x_n,y_n)|\\
=&|d(x_m,y_m)-d(y_m,x_n)+d(y_m,x_n)-d(x_n,y_n)|\\
\le&|d(x_m,y_m)-d(y_m,x_n)|+|d(y_m,x_n)-d(x_n,y_n)|\\
\le&d(x_m,x_n)+d(y_m,y_n)\\
<&\varepsilon
\end{aligned}$$

因此 $\{d(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列。

习题 1.6

证明：度量空间中的 Cauchy 序列有界。

证明 设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$ 是度量空间 (X,d) 中的 Cauchy 序列，那么存在 $N\in\mathbb{N}^*$，使得对于任意 $n>N$ 时，成立 $d(x_n,d_N)<1$，因此 $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ 有界，进而 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界。

习题 1.7

对于度量空间 (X,d)，给定子集 $A\subset X$，定义

$$d(x)=\inf\{d(x,y):y\in A\},\qquad x\in X$$

证明：$d(x)$ 连续。

证明 事实上，d 为 Lipschitz 连续的。

任取 $x,y,z\in\mathbb{R}^n$，那么由三角不等式

$$||x-z|-|y-z||\le|x-y|$$

对 $z\in E$ 取下确界，那么

$$|f(x)-f(y)|\le|x-y|$$

于是 f 为 Lipschitz 连续的，进而 f 为连续的。

习题 1.8

对于 $S\subset\mathbb{R}^n$，$C(S)$ 为 S 上的全体有界连续函数构成的线性空间，定义度量为

$$d(f,g)=\sup_{x\in S}|f(x)-g(x)|$$

证明：$C(S)$ 是完备的度量线性空间。

证明 首先，证明 $C(S)$ 为度量空间。

1. 对于正则性，显然成立 $d(f,g)\ge0$。如果 $f=g$，那么显然 $d(f,g)=0$；如果 $d(f,g)=0$，那么 $\sup_{x\in S}|f(x)-g(x)|=0$，显然有 $f=g$。

2. 对于对称性，显然成立。

3. 对于三角不等式，任取 $f, g, h \in C(S)$，注意到，任取 $x \in S$

$$\begin{aligned}&|f(x)-h(x)|\\ \le&|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|\\ \le&\sup_{x\in S}|f(x)-g(x)|+\sup_{x\in S}|g(x)-h(x)|\\ =&d(f,g)+d(g,h)\end{aligned}$$

由 $x \in S$ 的任意性

$$d(f,h)=\sup_{x\in S}|f(x)-h(x)|\le d(f,g)+d(g,h)$$

因此 $C(S)$ 为度量空间。

其次，证明 $C(S)$ 为度量线性空间。任取 $f_n \xrightarrow{d} f, g_n \xrightarrow{d} g, \alpha_n \to \alpha$。

1. 对于加法运算的连续性，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}^*$，使得当 $n > N$ 时，成立

$$d(f_n, f) < \varepsilon/2, \qquad d(g_n, g) < \varepsilon/2$$

因此当 $n > N$ 时，成立

$$d(f_n+g_n, f+g) \le d(f_n+g_n, f+g_n) + d(f+g_n, f+g) = d(f_n, f) + d(g_n, g) < \varepsilon$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n+g_n, f+g) = 0$$

2. 对于数乘运算的连续性，任取 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}^*$，使得对于任意 $n > N$，成立

$$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon, \qquad d(f_n, f) < \varepsilon$$

由于 f 有界，那么存在 $M > 0$，使得成立 $|f| < M$，因此当 $n > N$ 时，成立

$$|f_n| \le |f| + |f_n - f| < M + \varepsilon$$

进而当 $n > N$ 时，成立

$$d(\alpha_n f_n, \alpha f) \le d(\alpha_n f_n, \alpha f_n) + d(\alpha f_n, \alpha f) = |\alpha| d(f_n, f) + |\alpha_n - \alpha| \sup |f_n| < \varepsilon(|\alpha| + M + \varepsilon)$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} d(\alpha_n f_n, \alpha f) = 0$$

最后，证明 $C(S)$ 为完备的，即证明对于 Cauchy 序列封闭。任取 Cauchy 序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset C(S)$，那么对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}^*$，使得对于任意 $m, n \ge N$，成立

$$d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon \implies \sup_{x\in S} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \forall x \in S \tag{1.0}$$

因此对于任意 $x \in S$，数列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛，记 $f_n(x) \to f(x)$，在 (1) 式中令 $m \to \infty$，可得

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \qquad \forall n \ge N, \forall x \in S \tag{1.0}$$

下面证明 $f(x) \in C(S)$，即证明 $f(x)$ 有界且连续。

对于有界性。由于 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 有界，那么对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$，存在 $M_n > 0$，使得对于任意 $s \in S$，成立 $|f_n(x)| < M_n$。由 (1) 式

$$|f(x)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \le \varepsilon + M_N, \qquad \forall x \in S$$

于是 $f(x)$ 有界。

对于连续性。由 (1) 式，$f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$，因此 $f(x)$ 连续。事实上，任取 $x_0 \in S$，在 (1) 式中，令 $x_0 + h \in S$，那么成立

$$|f_N(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon, \qquad |f_N(x_0+h) - f(x_0+h)| < \varepsilon$$

又由于 $f_n(x)$ 连续，那么存在 $\delta > 0$，使得当 $|h| < \delta$ 且 $x_0 + h \in S$ 时

$$|f_N(x_0 + h) - f_N(x_0)| < \varepsilon$$

于是由三角不等式

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| \leq |f(x_0 + h) - f_N(x_0 + h)| + |f_N(x_0 + h) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon$$

因此 $f(x)$ 在 x_0 处连续，由 x_0 的任意性，$f(x)$ 为连续函数，于是 $f(x) \in C(S)$，由 (1) 式

$$\sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq N \implies d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon, \forall n \geq N \implies f_n(x) \xrightarrow{d} f(x)$$

因此 $C(S)$ 为完备的。

综上所述，原命题得证！

习题 1.9

证明：l^p 空间是完备的度量空间，其中 $1 \leq p < \infty$。

证明 我们只证完备性。任取 Cauchy 序列 $\{\{x_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}\}_{m=1}^{\infty} \subset l^p$，于是对于任意 ε，存在 $M > 0$，使得对于任意 $i, j \geq M$，成立

$$d(\{x_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}) < \varepsilon \implies \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(i)} - x_n^{(j)}|^p < \varepsilon^p \implies |x_n^{(i)} - x_n^{(j)}|^p < \varepsilon^p, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

于是对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$，数列 $\{x_n^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 序列，记 $\lim\limits_{m \to \infty} x_n^{(m)} = x_n$，下面我们证明 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$ 且 $\lim\limits_{m \to \infty} d(\{x_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = 0$。

注意到，对于任意 $m \geq M$，成立 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n^{(M)} - x_n^{(m)}|^p < \varepsilon^p$，令 $m \to \infty$，可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n^{(M)} - x_n|^p < \varepsilon^p$，于是

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \\
\leq &\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(M)} - x_n|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(M)}|^p \right)^{1/p} \right)^p \\
< &\left(\varepsilon + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(M)}|^p \right)^{1/p} \right)^p \\
< &\infty
\end{aligned}$$

因此 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$。注意到，对于任意 $k, m \geq M$，成立 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n^{(m)} - x_n^{(k)}|^p < \varepsilon^p$，令 $k \to \infty$，可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n^{(m)} - x_n|^p < \varepsilon^p$，于是 $d(\{x_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}) < \varepsilon$，因此 $\lim\limits_{m \to \infty} d(\{x_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}, \{x_n\}_{n=1}^{\infty}) = 0$。

综上所述，l^p 空间是完备的度量空间。

习题 1.10

对于赋范线性空间 X，$A \subset X$ 为有界子集，证明：A 为完全有界的 $\iff$ 对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 X 中的有限维子空间 M，使得对于任意 $a \in A$，$d(a, M) < \varepsilon$。

证明 对于必要性，如果 A 为完全有界的，那么对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 X 中的有限维子空间 M，使得对于任意 $a \in A$，存在 $m \in M$，成立 $d(a, m) < \varepsilon$，进而 $d(a, M) \leq d(a, m) < \varepsilon$。

对于充分性，如果对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 X 中的有限维子空间 M，使得对于任意 $a \in A$，$d(a, M) < \varepsilon$，那么存在 $m \in M$，成立 $d(a, m) < \varepsilon$，因此 A 为完全有界的。

习题 1.11

证明：对于赋范线性空间 X，成立

$$X\text{为有限维赋范线性空间} \iff B_r = \{x \in X : \|x\| < r\}\text{为列紧子集}$$

证明 如果 X 为 n 维赋范线性空间，那么 $X \cong E^n$，其中 E^n 为 n 为欧式空间，而 B_r 为有界子集，那么 B_r 为列紧子集。

如果 X 为无限维赋范线性空间，那么任取 $x_1 \in B_r \setminus \{0\}$，取 $x_2 = -x_1/(2\|x_1\|) \in B_r$，那么 $\|x_1 - x_2\| = \|x_1\| + 1/2 > 1/2$。

假设已经选取 $\{x_k\}_{k=1}^n \subset B_r$，使得对于任意 $i \neq j$，成立 $\|x_i - x_j\| > 1/2$，那么记 $M_n = \mathrm{Sp}\{x_k\}_{k=1}^n$，于是 M_n 为有限维子空间，因此 M_n 为完备度量空间，进而 M_n 是闭的真线性子空间。由 Riesz 引理，存在 $x_{n+1} \in B_r$，使得成立 $\|x_{n+1}\| = 1$，且对于任意 $1 \leq k \leq n$，成立 $\|x_{n+1} - x_k\| > 1/2$。

递归的，存在 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset B_r$，使得对于任意 $i \neq j$，$\|x_i - x_j\| > 1/2$，因此 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 没有收敛子列，进而 B_r 不为列紧子集。

习题 1.12

$\mathbb{R}^n$ 以 $\|\cdot\|_2$ 形成赋范线性空间。

证明 显然！

习题 1.13

在 $\mathbb{R}^n$ 中定义度量

$$\rho(\{x_k\}_{k=1}^n, \{y_k\}_{k=1}^n) = \max_{1 \leq k \leq n} \{|x_k - y_k|\}$$

其中 $x = (x_1, \cdots, x_n), y_n = (y_1, \cdots, y_n)$。证明：$(\mathbb{R}^n, \rho)$ 为完备的度量线性空间。

证明 我们只证完备性。任取 Cauchy 序列 $\{\{x_k^{(m)}\}_{k=1}^n\}_{m=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$，于是对于任意 ε，存在 $M > 0$，使得对于任意 $i, j \geq M$，成立

$$\rho(\{x_k^{(i)}\}_{k=1}^n, \{x_k^{(j)}\}_{k=1}^n) < \varepsilon \implies \max_{1 \leq k \leq n} \{|x_k^{(i)} - x_k^{(j)}|\} < \varepsilon \implies |x_k^{(i)} - x_k^{(j)}| < \varepsilon, \forall 1 \leq k \leq n$$

于是对于任意 $1 \leq k \leq n$，数列 $\{x_k^m\}_{m=1}^\infty$ 为 Cauchy 序列，记 $\lim\limits_{m \to \infty} x_k^{(m)} = x_k$，于是 $\{x_k\}_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$，下面我们证明 $\lim\limits_{m \to \infty} \rho(\{x_k^{(m)}\}_{k=1}^n, \{x_k\}_{k=1}^n) = 0$。

注意到，对于任意 $r, m \geq M$，成立 $\max\limits_{1 \leq k \leq n} \{|x_k^{(m)} - x_k^{(r)}|\} < \varepsilon$，令 $r \to \infty$，可得 $\max\limits_{1 \leq k \leq n} \{|x_k^{(m)} - x_k|\} < \varepsilon$，于是 $\rho(\{x_k^{(m)}\}_{k=1}^n, \{x_k\}_{k=1}^n) < \varepsilon$，因此 $\lim\limits_{m \to \infty} \rho(\{x_k^{(m)}\}_{k=1}^n, \{x_k\}_{k=1}^n) = 0$。

综上所述，$(\mathbb{R}^n, \rho)$ 为完备的度量空间。

习题 1.14

对于完备度量空间 (X, d)，如果 $F \subset X$ 为闭集，那么 (F, d) 为完备的度量空间。

证明 (F, d) 为度量空间是显然的，下面我们证明 (F, d) 的完备性。

任取 Cauchy 序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset F \subset X$，那么由于 X 的完备性，存在 $x \in X$，使得成立 $x_n \xrightarrow{d} x$。任取 $r > 0$，由于 $x_n \xrightarrow{d} x$，那么存在 $N > 0$，使得当 $n \geq N$ 时，成立 $d(x_n, x) < r$，即 $x_n \in B_r(x)$。如果对于任意 $n \geq N$，成立 $x_n = x$，那么 $x = x_N \in F$；如果存在 $n_0 \geq N$，使得成立 $x_{n_0} \neq x$，那么 $B_r(x) \cap F \supset \{x_{n_0}\} \neq \varnothing$，于是 x 为 F 的极限点，由于 F 为闭集，那么 $x \in F$，于是 Cauchy 序列在 F 中依度量 d 收敛于 $x \in F$，进而 (F, d) 完备的，原命题得证！

习题 1.15

对于 $1 \leq p < \infty$，子集 $X \subset l^p$ 为列紧的，当且仅当如下命题同时成立。

1. 存在 $M > 0$，使得对于任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$，成立 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < M$。

2. 对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N \in \mathbb{N}^*$，使得对于任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$，成立 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p < \varepsilon$。

证明 对于必要性，任取 $\varepsilon > 0$，如果 X 是列紧的，那么 X 是完全有界的，于是存在有限数列序列 $\{\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}, \cdots, \{x_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}\} \subset X$，使得对于任意数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$，存在 $k = 1, \cdots, m$，使得成立 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n - x_n^{(k)}|^p < \dfrac{\varepsilon}{2^p}$。

对于数列序列 $\{\{x_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}, \cdots, \{x_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}\}$，存在 $N \in \mathbb{N}^*$，使得对于任意 $k = 1, \cdots, n$，成立 $\sum\limits_{n=N}^{\infty} |x_n^{(k)}|^p < \dfrac{\varepsilon}{2^p}$。

记 $M^{1/p} = \dfrac{\varepsilon^{1/p}}{2} + \max\limits_{1 \leq k \leq m} \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n^{(k_0)}|^p \right)^{1/p}$，任取数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$，于是存在 $k_0 = 1, \cdots, m$，使得成立 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n - x_n^{(k_0)}|^p < \dfrac{\varepsilon}{2^p}$，因此

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \\
\leq & \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_n^{(k_0)}|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(k_0)}|^p \right)^{1/p} \right)^p \\
< & \left(\left(\frac{\varepsilon}{2^p} \right)^{1/p} + \max_{1 \leq k \leq m} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(k_0)}|^p \right)^{1/p} \right)^p \\
= & M
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \sum_{n=N}^{\infty} |x_n|^p \\
\leq & \left(\left(\sum_{n=N}^{\infty} |x_n - x_n^{(k_0)}|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=N}^{\infty} |x_n^{(k_0)}|^p \right)^{1/p} \right)^p \\
\leq & \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_n^{(k_0)}|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{n=N}^{\infty} |x_n^{(k_0)}|^p \right)^{1/p} \right)^p \\
< & \left(\left(\frac{\varepsilon}{2^p} \right)^{1/p} + \left(\frac{\varepsilon}{2^p} \right)^{1/p} \right)^p \\
= & \varepsilon
\end{aligned}
$$

由紧致性证明 2，注意到 $X \subset \bigcup\limits_{x \in X} B_{\frac{\varepsilon^{1/p}}{2}}(x)$，那么存在 $x^{(1)}, \cdots, x^{(m)} \in X$，使得成立 $X \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} B_{\frac{\varepsilon^{1/p}}{2}}(x^{(k)})$，不妨仍设为 $x^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$，那么存在 $N \in \mathbb{N}^*$，使得对于任意 $1 \leq k \leq m$，成立 $\sum\limits_{n=N}^{\infty} |x_n^{(k)}|^p < \dfrac{\varepsilon^{1/p}}{2}$，于是任

取数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$，存在 k_0，使得 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in B_{\frac{\varepsilon^{1/p}}{2}}(x^{(k_0)})$，进而

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p \\
\leq &\left(\left(\sum_{n=N}^{\infty} |x_n - x_n^{(k_0)}|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=N}^{\infty} |x_n^{(k_0)}|^p\right)^{1/p}\right)^p \\
< &\left(\frac{\varepsilon^{1/p}}{2} + \frac{\varepsilon^{1/p}}{2}\right)^p \\
= &\varepsilon
\end{aligned}
$$

对于充分性，任取数列序列 $\{\{x_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}\}_{m=1}^{\infty} \subset X$，由 2，存在 $M > 0$，使得对于任意 $m \in \mathbb{N}^*$，成立 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n^{(m)}|^p < M$，因此对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$，数列 $\{x_n^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ 以 M 为界，于是可依对角线方法找到正整数子列 $\{m_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}^*$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$，存在 x_n，使得成立 $\lim\limits_{k\to\infty} x_n^{(m_k)} = x_n$。由于对于任意 $k \in \mathbb{N}^*$，成立 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n^{(m_k)}|^p < M$，那么令 $k \to \infty$，可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < M$，于是 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$。

任取 $\varepsilon > 0$，由 2，存在 $N \in \mathbb{N}^*$，使得对于数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p$，成立 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} |x_n|^p < \frac{\varepsilon}{2^{p+1}}$，以及对于任意 $k \in \mathbb{N}^*$，成立 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} |x_n^{(m_k)}|^p < \frac{\varepsilon}{2^{p+1}}$。因为对于任意 $1 \leq n \leq N$，成立 $\lim\limits_{k\to\infty} x_n^{(m_k)} = x_n$，所以存在 $K \in \mathbb{N}^*$，使得对于任意 $k \geq K$，以及任意 $1 \leq n \leq N$，成立 $|x_n^{(m_k)} - x_n| < (\varepsilon/(2N))^{1/p}$，因此对于任意 $k \geq K$，成立

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(m_k)} - x_n|^p \\
= &\sum_{n=1}^{N} |x_n^{(m_k)} - x_n|^p + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n^{(m_k)} - x_n|^p \\
\leq &\sum_{n=1}^{N} |x_n^{(m_k)} - x_n|^p + \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(m_k)}|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}\right)^p \\
< &\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
= &\varepsilon
\end{aligned}
$$

习题 1.16

$\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\}$ 空间中的子集 S 是列紧的，当且仅当对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$，存在 M_n，对于任意 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in S$，成立 $|x_n| \leq M_n$，其中

$$
d(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}
$$

♠

证明 对于必要性，如果 S 是列紧的，那么 S 是完全有界的，因此对于任意 $\varepsilon > 0$，存在有限个数列 $\{\{x_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}\}_{k=1}^{m}$，使得对于任意 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in S$，存在 $1 \leq k \leq m$，使得成立 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - x_n^{(k)}|}{1 + |x_n - x_n^{(k)}|} < \varepsilon$。任取 $n \in \mathbb{N}^*$，令 $M_n =$

$\dfrac{2^n\varepsilon}{1-2^n\varepsilon}+\max\limits_{1\le k\le m}|x_n^{(k)}|$，且 $\varepsilon<2^{-n}$，那么对于任意 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\in S$，成立

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2^n}\frac{|x_n-x_n^{(k)}|}{1+|x_n-x_n^{(k)}|}<\varepsilon\\ \Longrightarrow\ &\frac{|x_n-x_n^{(k)}|}{1+|x_n-x_n^{(k)}|}<\varepsilon\\ \Longrightarrow\ &|x_n-x_n^{(k)}|<\frac{2^n\varepsilon}{1-2^n\varepsilon}\\ \Longrightarrow\ &|x_n|\le|x_n-x_n^{(k)}|+|x_n^{(k)}|<\frac{2^n\varepsilon}{1-2^n\varepsilon}+\max_{1\le k\le m}|x_n^{(k)}|=M_n\end{aligned}$$

对于充分性，任取序列 $\{\{x_n^{(m)}\}_{n=1}^\infty\}_{m=1}^\infty$，那么对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$，存在 M_n，数列 $\{x_n^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ 以 M_n 为界，于是可依对角线方法找到正整数子列 $\{m_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}^*$，使得对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$，存在 x_n，使得成立 $\lim\limits_{k\to\infty}x_n^{(m_k)}=x_n$，因此任取 $\varepsilon>0$，存在 $K\in\mathbb{N}^*$，使得对于任意 $k>K$，成立 $|x_n^{(m_k)}-x_n|<\varepsilon$，因此

$$d(\{x_n^{(m_k)}\}_{n=1}^\infty,\{x_n\}_{n=1}^\infty)=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2^n}\frac{|x_n^{(m_k)}-x_n|}{1+|x_n^{(m_k)}-x_n|}<\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{2^n}=\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}<\varepsilon$$

进而 $\lim\limits_{k\to\infty}d(\{x_n^{(m_k)}\}_{n=1}^\infty,\{x_n\}_{n=1}^\infty)=0$，即序列 $\{\{x_n^{(m)}\}_{n=1}^\infty\}_{m=1}^\infty$ 存在收敛子列 $\{\{x_n^{(m_k)}\}_{n=1}^\infty\}_{k=1}^\infty$，$S$ 是列紧的。

综上所述，原命题得证！

习题 1.17

定义线性空间

$$M[a,b]=\{f:\exists K_f,\ \text{s.t. }\|f\|<M_f\},\qquad \|f\|=\sup_{[a,b]}|f|$$

证明：$M[a,b]$ 为 Banach 空间。

证明 首先，证明 $M[a,b]$ 为赋范线性空间。

正定性：显然 $\|f\|\ge 0$，且

$$\|f\|=0\iff\sup_{[a,b]}|f|=0\iff f=0$$

绝对齐性：

$$\|af\|=\sup_{[a,b]}|af|=|a|\sup_{[a,b]}|f|=|a|\|f\|$$

三角不等式：任取 $x\in[a,b]$，注意到

$$|f(x)+g(x)|\le|f(x)|+|g(x)|\le\sup_{[a,b]}|f|+\sup_{[a,b]}|g|$$

由 x 的任意性，$\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|$。

综合如上三点，$M[a,b]$ 为赋范线性空间。

首先，证明 $M[a,b]$ 的完备性。任取 Cauchy 序列 $\{f_n\}\subset M[a,b]$，于是对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}^*$，使得对于任意 $m,n\ge N$，成立

$$\|f_m-f_n\|<\varepsilon\implies|f_m(x),f_n(x)|<\varepsilon,\quad\forall x\in[a,b]$$

于是对于任意 $x\in[a,b]$，数列 $\{f_n(x)\}$ 为 Cauchy 序列，记 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$。由于对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$，$f_n\in M[a,b]$，于是存在 K_n，使得成立 $\|f_n\|<K_n$。在式 (1) 中令 $m\to\infty$，可得

$$\|f-f_n\|<\varepsilon\implies\|f\|\le\|f_n-f\|+\|f_n\|<1+M_n<\infty$$

因此 $f\in M[a,b]$，同时可得 $\|f_n\|\to\|f\|$，于是 $M[a,b]$ 为完备空间。

综上所述，$M[a,b]$ 为完备的赋范线性空间，即 Banach 空间。

习题 1.18

证明：有界变差函数空间

$$V[a,b]=\{f:[a,b]\to\mathbb{C}:V_a^b(f)<\infty\}$$

依范数

$$\|f\|=|f(a)|+V_a^b(f)$$

构成 Banach 空间。

习题 1.19

举例说明：在一般的度量空间中，完全有界集不一定是列紧的。

证明 在度量空间 $\mathbb{Q}$ 中，取子集 $M=[0,1]\cap\mathbb{Q}$。

首先，任取 $\varepsilon>0$，存在 $n\in\mathbb{N}^*$，使得成立 $\frac{1}{n}<\varepsilon$。令 $N=\{\frac{k}{n}:0\le k\le n,k\in\mathbb{N}\}\subset M$，于是对于任意 $x\in M$，存在 $y\in N$，使得成立 $|x-y|<\frac{1}{n}<\varepsilon$，于是 M 是完全有界集。

其次，存在 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset M$，使得成立 $x_n\to\frac{1}{\sqrt{2}}\notin\mathbb{Q}$，因此 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 在 $\mathbb{Q}$ 中不存在收敛子列。

综上所述，在 $\mathbb{Q}$ 中，完全有界集不一定是列紧的。

习题 1.20

对于度量空间 (X,d) 中的 Cauchy 序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$，证明：如果 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 存在依距离 d 收敛至 x 的子序列 $\{x_{k_n}\}_{n=1}^\infty$，那么 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛至 x。

证明 任取 $\varepsilon>0$，由于 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 为 Cauchy 序列，且 $\{x_{k_n}\}_{n=1}^\infty$ 依距离 d 收敛于 x，那么存在 $N>0$，使得对于任意 $n>N$，成立

$$d(x_n,x_{k_n})<\varepsilon/2,\qquad d(x_{k_n},x)<\varepsilon/2$$

于是

$$d(x_n,x)<d(x_n,x_{k_n})+d(x_{k_n},x)<<\varepsilon$$

因此 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 依距离 d 收敛于 x。

习题 1.21

f 连续，当且仅当闭集的原像是闭集。

证明 显然！

习题 1.22

对于 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间 X，$\{e_k\}_{k=1}^\infty\subset X$ 为 X 的一组基，那么 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 X 的维数是多少？

证明 容易注意到 $\{e_k\}_{k=1}^\infty\cup\{ie_k\}_{k=1}^\infty\subset X$ 为 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 X 的一组基。

习题 1.23

对于赋范线性空间 $(X,\|\cdot\|)$，以及序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$，称序列级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty x_n$ 收敛，如果序列 $\displaystyle\left\{\sum_{k=1}^n x_k\right\}_{n=1}^\infty$ 收敛；称序列级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty x_n$ 绝对收敛，如果数列级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty\|x_n\|$ 收敛。

证明：赋范线性空间 X 中绝对收敛序列级数为收敛序列级数 $\iff$ X 为 Banach 空间。

证明 对于必要性，任取 Cauchy 序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$，我们来递归的寻找子序列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}^*$，使得对于任意 $k\in\mathbb{N}^*$，成立 $\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|<2^{-k}$。

1. 取 $\varepsilon=2^{-1}$，于是存在 $N_1\in\mathbb{N}^*$，使得对于任意 $m,n\geq N_1$，成立 $\|x_m-x_n\|<2^{-1}$。取 $n_1=N_1$。2. 如果已取 $n_1,\cdots,n_k$，那么取 $\varepsilon=2^{-(k+1)}$，于是存在 $N_{k+1}\in\mathbb{N}^*$，使得对于任意 $m,n\geq N_{k+1}$，成立 $\|x_m-x_n\|<2^{-(k+1)}$。取 $n_{k+1}=\max\{N_k,N_{k+1}\}+1$。

递归的，子序列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}^*$，使得对于任意 $k\in\mathbb{N}^*$，成立 $\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|<2^{-k}$，因此 $\sum\limits_{k=1}^\infty\|x_{n_{k+1}}-x_{n_k}\|<1$，即序列级数 $\sum\limits_{k=1}^\infty(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})$ 绝对收敛。由必要性假设，序列级数 $\sum\limits_{k=1}^\infty(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})$ 收敛，即序列 $\left\{\sum\limits_{k=1}^m(x_{n_{k+1}}-x_{n_k})\right\}_{m=1}^\infty$ 收敛，因此序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 收敛。记 $x_{n_k}\to x\in X$，那么任取 $\varepsilon>0$，存在 $K\in\mathbb{N}^*$，使得对于任意 $k\geq K$，成立 $\|x_{n_k}-x\|<\varepsilon/2$。而序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 为 Cauchy 序列，那么对于此 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}^*$，使得对于任意 $m,n\geq N$，成立 $\|x_m-x_n\|<\varepsilon/2$。那么当 $n,n_k\geq N$ 且 $k\geq K$，$\|x_n-x\|\leq\|x_n-x_{n_k}\|+\|x_{n_k}-x\|<\varepsilon$，因此 $x_n\to x\in X$，进而 X 为完备的赋范线性空间，即 Banach 空间。

对于充分性，任取绝对收敛序列级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty x_n$，那么数列级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty\|x_n\|$ 收敛，因此对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}^*$，使得对于任意 $n\geq N$ 和 $p\in\mathbb{N}^*$，成立 $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\|x_k\|<\varepsilon$，那么对于此 $\varepsilon>0$，成立

$$\left\|\sum_{k=1}^{n+p}x_k-\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|=\left\|\sum_{k=n+1}^{n+p}x_k\right\|\leq\sum_{k=n+1}^{n+p}\|x_k\|$$

因此序列 $\left\{\sum\limits_{k=1}^n x_k\right\}_{n=1}^\infty$ 为 Cauchy 序列，由 X 是完备的赋范线性空间，那么序列 $\left\{\sum\limits_{k=1}^n x_k\right\}_{n=1}^\infty$ 收敛，即序列级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty x_n$ 收敛。

习题 1.24

对于线性算子 $T:(X,\|\cdot\|_X)\to(Y,\|\cdot\|_Y)$，证明：如果 X 为有限维空间，那么 T 是有界线性算子，且 $T(X)$ 为有限维空间。

证明 取 X 的一组基 $\{e_k\}_{k=1}^n$，那么存在 $\mu>0$，使得对于任意 $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$，成立

$$\sum_{k=1}^n|\lambda_n|\leq\mu\left\|\sum_{k=1}^n\lambda_ke_k\right\|_X$$

任取 $x\in X$，存在 $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$，使得成立 $x=\sum\limits_{k=1}^n\lambda_ke_k$，进而

$$\begin{aligned}\|T(x)\|_Y&=\left\|T\left(\sum_{k=1}^n\lambda_ke_k\right)\right\|_Y\\&=\left\|\sum_{k=1}^n\lambda_kT\left(e_k\right)\right\|_Y\\&\leq\sum_{k=1}^n|\lambda_k|\|T(e_k)\|_Y\\&\leq\max_{1\leq k\leq m}\|T(e_k)\|_Y\sum_{k=1}^n|\lambda_k|\\&\leq\mu\max_{1\leq k\leq m}\|T(e_k)\|_Y\left\|\sum_{k=1}^n\lambda_ke_k\right\|_X\\&=\mu\max_{1\leq k\leq m}\|T(e_k)\|_Y\|x\|_X\end{aligned}$$

显然 $T(X)=\operatorname{span}\{T(e_k)\}_{k=1}^n$，因此 $\dim T(X)\le n$。

习题 1.25

设 X,Y 是线性赋范空间，$T:X\to Y$ 为线性算子，证明：如果 T 为单射，那么 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 在 X 中线性无关，当且仅当 $\{Tx_i\}_{i=1}^n$ 在 Y 中线性无关。

证明 对于必要性，如果 $\{x_i\}_{i=1}^n$ 在 X 中线性无关，那么令

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i Tx_i=0 \implies \sum_{i=1}^n T(\alpha_i x_i)=0$$

由于 T 为单射，因此

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i=0 \implies \alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$$

于是 $\{Tx_i\}_{i=1}^n$ 在 Y 中线性无关。

对于充分性，如果 $\{Tx_i\}_{i=1}^n$ 在 Y 中线性无关，那么令

$$\sum_{i=1}^n \beta_i x_i=0 \implies T\left(\sum_{i=1}^n \beta_i x_i\right)=0 \implies \sum_{i=1}^n \beta_i Tx_i=0 \implies \beta_1=\cdots=\beta_n=0$$

综上所述，原命题得证！

习题 1.26

对于有界线性算子 $T:(X,\|\cdot\|_X)\to(Y,\|\cdot\|_Y)$，证明：

$$\|T\|=\sup_{|x|_X=1}\|T(x)\|_Y=\sup_{|x|_X\le 1}\|T(x)\|_Y$$

证明 显然！

习题 1.27

对于 Banach 空间 X 上的有界线性算子 $T:(X,\|\cdot\|)\to(X,\|\cdot\|)$，证明：如果存在有界线性算子 $S:(X,\|\cdot\|)\to(X,\|\cdot\|)$，使得成立 $TS=ST=I$，那么 T 是有界可逆的，且 $T^{-1}=S$；反之，如果 T 是有界可逆的，那么 $T^{-1}T=TT^{-1}=I$。

证明 如果存在有界线性算子 $S:(X,\|\cdot\|)\to(X,\|\cdot\|)$，使得成立 $TS=ST=I$，那么由 $ST=I$ 可得 T 为单射，由 $TS=I$ 可得 T 为满射，因此 T 为双射。又因为 $T^{-1}=S$，那么 T 为有界可逆线性算子。

反之显然！

习题 1.28

对于度量空间 (X,d)，证明：如果 $T:X\to X$ 为压缩映射，那么对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$，T^n 为压缩映射；反之不然。

证明 如果 $T:X\to X$ 为以 $0<q<1$ 为 Lipschitz 常数的压缩映射，那么对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$，成立

$$d(T^n(x),T^n(y))\le q^n d(x,y)$$

反之，取 $T:[0,1/2]\to\mathbb{R}$ 为 $T(x)=4x^2/3$，那么

$$|T^2(x)-T^2(y)|=\frac{16}{9}|x^4-y^4|=\frac{16}{9}(x^3+x^2y+xy^2+y^3)|x-y|\le\frac{8}{9}|x-y|$$

因此 T^2 为压缩映射，但是对于任意 $0<q<1$，取 $x=7/16,y=5/16$，那么

$$|T(x)-T(y)|=\frac{4}{3}|x^2-y^2|=|x-y|>q|x-y|$$

因此 T 不为压缩映射。

习题 1.29

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭子集 $K \subset \mathbb{R}^n$，证明：如果映射 $T : K \to K$ 满足对于任意 $x, y \in K$，成立 $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$，那么 T 在 K 中存在且存在唯一不动点。

证明 我们来证明 T 为压缩映射，反证，如果对于任意 $0 < q < 1$，使得存在 $x, y \in K$，使得成立 $d(T(x), T(y)) > qd(x, y)$，那么对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$，存在 $x_n, y_n \in K$，使得成立 $d(T(x_n), T(y_n)) > (1 - 1/n)d(x_n, y_n)$。由于 K 为有界闭集，那么存在 $x, y \in K$，不妨设 $x_n \to x, y_n \to y$，那么 $d(T(x), T(y)) \geq d(x, y)$，矛盾！

习题 1.30

证明：当 $|\lambda|$ 充分小时，积分方程

$$f(x) = \varphi(x) + \lambda \int_0^1 K(x, y) f(y) \mathrm{d}y$$

在 $L^2[0, 1]$ 中存在且存在唯一解，其中 $\varphi \in L^2[0, 1]$，$K(x, y)$ 为 $[0, 1]^2$ 上的可测函数，且

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(x, y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty$$

第二章 Hilbert 空间

习题 2.1

对于内积空间 X，以及非零元 $x, y \in X$，证明如下命题。

1. 如果 x 与 y 正交，那么 x 与 y 线性无关。
2. $$(x, y) = 0 \iff \|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|, \forall \lambda \in \mathbb{C}$$
3. $$(x, y) = 0 \iff \|x + \lambda y\| \geq \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

证明 对于 1，任取 λ 和 μ，使得成立 $\lambda x + \mu y = 0$，因此

$$(\lambda x+\mu y, x) = (0, x) \implies \lambda\|x\|^2+\mu(y, x) = 0 \implies \lambda = 0(\lambda x+\mu y, y) = (0, y) \implies \lambda(x, y)+\mu\|y\|^2 = 0 \implies \mu = 0$$

那么 x 与 y 线性无关。

对于 2，注意到

$$\begin{aligned}
&\|x + \lambda y\| = \|x - \lambda y\|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \\
\iff &(x + \lambda y, x + \lambda y) = (x - \lambda y, x - \lambda y), \forall \lambda \in \mathbb{C} \\
\iff &\|x\|^2 + \overline{\lambda}(x, y) + \lambda\overline{(x, y)} + |\lambda|^2\|y\|^2 = \|x\|^2 - \overline{\lambda}(x, y) - \lambda\overline{(x, y)} + |\lambda|^2\|y\|^2, \forall \lambda \in \mathbb{C} \\
\iff &\overline{\lambda}(x, y) + \lambda\overline{(x, y)} = 0, \forall \lambda \in \mathbb{C} \\
\implies &(x, y)\overline{(x, y)} = 0 \\
\iff &|(x, y)|^2 = 0 \\
\iff &(x, y) = 0
\end{aligned}$$

而显然成立 $(x, y) = 0 \implies \overline{\lambda}(x, y) + \lambda\overline{(x, y)} = 0, \forall \lambda \in \mathbb{C}$。

对于 3，注意到

$$\begin{aligned}
&\|x + \lambda y\| \geq \|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \\
\iff &(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq \|x\|^2, \forall \lambda \in \mathbb{C} \\
\iff &\|x\|^2 + \overline{\lambda}(x, y) + \lambda\overline{(x, y)} + |\lambda|^2\|y\|^2 \geq \|x\|^2, \forall \lambda \in \mathbb{C} \\
\iff &\overline{\lambda}(x, y) + \lambda\overline{(x, y)} + |\lambda|^2\|y\|^2 \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

对于必要性，显然成立

$$(x, y) = 0 \implies \overline{\lambda}(x, y) + \lambda\overline{(x, y)} + |\lambda|^2\|y\|^2 \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

对于充分性，如果对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}$，成立

$$\overline{\lambda}(x, y) + \lambda\overline{(x, y)} + |\lambda|^2\|y\|^2 \geq 0$$

那么若 $y = 0$，显然成立 $(x, y) = 0$；若 $y \neq 0$，取 $\lambda = -(x, y)/\|y\|^2$，于是

$$\overline{\lambda}(x, y) + \lambda\overline{(x, y)} + |\lambda|^2\|y\|^2 = -\frac{|(x, y)|^2}{\|y\|^2} \geq 0 \implies (x, y) = 0$$

习题 2.2

如果 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为内积空间 X 中的正规正交集，那么对于任意 $x,y\in X$，成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)(y,e_n)|\le\|x\|\|y\|$$

证明 由 Bessel 不等式，对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$，成立

$$\sum_{k=1}^{n}|(x,e_k)|^2\le\|x\|^2,\qquad \sum_{k=1}^{n}|(y,e_k)|^2\le\|y\|^2$$

令 $n\to\infty$，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2\le\|x\|^2,\qquad \sum_{n=1}^{\infty}|(y,e_n)|^2\le\|y\|^2$$

由 Hölder 不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)(y,e_n)|\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|(y,e_n)|^2\right)^{1/2}\le\|x\|\|y\|$$

习题 2.3

证明：对于 Hilbert 空间中的正规正交集 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$，如果

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_ne_n,\qquad y=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_ne_n$$

那么

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\overline{\beta_n}$$

且级数绝对收敛。

证明

$$(x,y)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_ne_n,\sum_{n=1}^{\infty}\beta_ne_n\right)=\sum_{i,j=1}^{n}(\alpha_ie_i,\beta_je_j)=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_i\overline{\beta_j}(e_i,e_j)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\overline{\beta_n}$$

由于

$$(x,e_n)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_ke_k,e_n\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(e_k,e_n)=\alpha_n$$

$$(y,e_n)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\beta_ke_k,e_n\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k(e_k,e_n)=\beta_n$$

那么由命题2.2

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n\overline{\beta_n}|=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)(y,e_n)|\le\|x\|\|y\|$$

因此级数绝对收敛。

习题 2.4

对于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的正规正交基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$，证明：对于任意 $x,y\in\mathcal{H}$，成立

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)\overline{(y,e_n)}$$

且级数绝对收敛。

证明 由命题2.3，该命题显然！

习题 2.5

对于区域 $D\subset\mathbb{R}^n$，定义 $\mathbb{R}$ 上的线性空间

$$L^2(D)=\left\{f:D\to\mathbb{C}\mid\int_D|f|^2<\infty\right\},\qquad (f,g)=\int_D f\overline{g}$$

证明：$L^2(D)$ 为 Hilbert 空间。

证明 首先证明 $L^2(D)$ 为内积空间。

正定性：任取 $f\in L^2(D)$，显然成立 $(f,f)\geq 0$，且

$$\begin{aligned}&(f,f)=0\\ \iff&\int_D|f|^2=0\\ \iff&f=0\end{aligned}$$

共轭对称性：任取 $f,g\in L^2(D)$，那么

$$(f,g)=\iint\limits_D f\overline{g}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\overline{\iint\limits_D g\overline{f}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\overline{(g,f)}$$

左线性：任取 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ 以及 $f,g,h\in L^2(D)$，那么显然成立 $(\lambda f+\mu g,h)=\lambda(f,h)+\mu(g,h)$。

综合以上三点，$L^2(D)$ 为内积空间，下面证明 $L^2(D)$ 的完备性。

任取 Cauchy 序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset L^2(D)$，递归寻找子序列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}^*$，使得对于任意 $k\in\mathbb{N}^*$，成立 $\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_2<2^{-k}$。

1. 取 $\varepsilon=2^{-1}$，存在 $N_1\in\mathbb{N}^*$，使得对于任意 $m,n\geq N_1$，成立 $\|f_m-f_n\|_2<2^{-1}$。取 $n_1=N_1$。2. 如果已取 $n_1,\cdots,n_k$，那么取 $\varepsilon=2^{-(k+1)}$，于是存在 $N_{k+1}\in\mathbb{N}^*$，使得对于任意 $m,n\geq N_{k+1}$，成立 $\|f_m-f_n\|_2<2^{-(k+1)}$。取 $n_{k+1}=\max\{N_k,N_{k+1}\}+1$。

递归的，可得子序列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}^*$ 满足对于任意 $k\in\mathbb{N}^*$，成立 $\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_2<2^{-k}$。考虑级数

$$f=f_{n_1}+\sum_{k=1}^\infty(f_{n_{k+1}}-f_{n_k}),\qquad S_m(f)=f_{n_1}+\sum_{k=1}^m(f_{n_{k+1}}-f_{n_k})$$

$$g=|f_{n_1}|+\sum_{k=1}^\infty|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|,\qquad S_m(g)=|f_{n_1}|+\sum_{k=1}^m|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|$$

对于任意 $m\in\mathbb{N}^*$，由 Minkowski 不等式

$$\|S_m(g)\|_2\leq\|f_{n_1}\|_2+\sum_{k=1}^m\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_2<\|f_{n_1}\|_2+\sum_{k=1}^m 2^{-k}<1+\|f_{n_1}\|_2$$

由 Levi 单调收敛定理

$$\|g\|_2=\left(\int_X|g|^2\right)^{1/2}=\left(\int_X\lim_{m\to\infty}|S_m(g)|^2\right)^{1/2}=\lim_{m\to\infty}\left(\int_X|S_m(g)|^2\right)^{1/2}=\lim_{m\to\infty}\|S_m(g)\|_2\leq 1+\|f_{n_1}\|_2$$

因此级数 g 几乎处处收敛，于是级数 f 几乎处处绝对收敛，那么存在零测集 N，使得级数 f 在 $D\setminus N$ 上绝对收敛。不妨当 $x\in N$ 时，令 $f(x)=0$，那么 f 为可测函数。

注意到

$$\|f\|_2=\left(\int_D|f|^2\right)^{1/2}=\left(\int_{D\setminus N}|f|^2\right)^{1/2}\leq\left(\int_{D\setminus N}|g|^2\right)^{1/2}=\left(\int_D|g|^2\right)^{1/2}=\|g\|_2<\infty$$

因此 $f\in L^p$，同时注意到

$$\|f-f_{n_k}\|_2=\left\|\sum_{i=k+1}^\infty(f_{n_{i+1}}-f_{n_i})\right\|_2\leq\sum_{i=k+1}^\infty\|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}\|_2<\sum_{i=k+1}^\infty 2^{-i}=\frac{1}{2^k}\to 0$$

因此子序列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 在 $L^2(D)$ 空间中收敛于 f。任取 $\varepsilon>0$，存在 $K\in\mathbb{N}^*$，使得当 $n_k\geq k\geq K$ 时，成立

$\|f-f_{n_k}\|_2<\varepsilon/2$ 且 $\|f_k-f_{n_k}\|_2<\varepsilon/2$，于是

$$\|f-f_k\|_2\le\|f-f_{n_k}\|_2+\|f_k-f_{n_k}\|_2<\varepsilon$$

进而序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^2(D)$ 空间中收敛于 f。

综上所述，$L^2(D)$ 为 Hilbert 空间。

习题 2.6

$$l^p\text{空间为内积空间} \iff p=2$$

证明 如果 $p=2$，那么

$$\|x+y\|_2^2+\|x-y\|_2^2=2(\|x\|_2^2+\|y\|_2^2),\qquad \forall x,y\in l^2$$

因此 L^p 空间为内积空间。

如果 $p\neq 2$，那么取 $x=(1,1,0,\cdots)$，$y=(1,-1,0,\cdots)$，因此

$$\|x+y\|_p^2=\|x-y\|_p^2=4,\qquad \|x\|_p^2=\|y\|_p^2=2^{2/p}$$

此时

$$\|x+y\|_p^2+\|x-y\|_p^2=2^3,\qquad 2(\|x\|_p^2+\|y\|_p^2)=2^{2+2/p}$$

那么

$$\|x+y\|_p^2+\|x-y\|_p^2\neq 2(\|x\|_p^2+\|y\|_p^2)$$

进而 l^p 空间不为内积空间。

习题 2.7

证明：Schmidt 正规正交法。

证明 易证！

习题 2.8

证明射影定理：如果 $\mathcal{M}$ 为 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的闭子空间，那么对于任意 $x\in\mathcal{H}$，存在且存在唯一 $(y,z)\in\mathcal{M}\times\mathcal{M}^{\perp}$，使得成立 $x=y+z$。

证明 见课本！

习题 2.9

1. 证明：如果 $\mathcal{M}$ 为 HIlbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子空间，那么 $\mathcal{M}^{\perp}$ 为 $\mathcal{H}$ 的子空间。
2. 证明：如果 $\mathcal{M}$ 为 HIlbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子空间，那么 $(\overline{\mathcal{M}})^{\perp}=\mathcal{M}^{\perp}$。
3. 证明：如果 $\mathcal{M},\mathcal{N}$ 为 HIlbert 空间 $\mathcal{H}$ 的子空间，且 $\mathcal{M}\subset\mathcal{N}$，那么 $\mathcal{N}^{\perp}\subset\mathcal{M}^{\perp}$。

证明 对于 1，任取 $x,y\in\mathcal{M}^{\perp}$，以及 $\lambda\in\mathbb{C}$，那么对于任意 $m\in\mathcal{M}$，成立

$$(x,m)=(y,m)=0$$

因此

$$(x+y,m)=(x,m)+(y,m)=0,\qquad (\lambda x,m)=\lambda(x,m)=0$$

于是 $x+y\in\mathcal{M}^{\perp}$，且 $\lambda x\in\mathcal{M}^{\perp}$，进而 $\mathcal{M}^{\perp}$ 为 $\mathcal{H}$ 的子空间。

对于 2，一方面，注意到 $\mathcal{M}\subset\overline{\mathcal{M}}$，那么 $(\overline{\mathcal{M}})^{\perp}\subset\mathcal{M}^{\perp}$。

另一方面，任取 $x\in\mathcal{M}^{\perp}$，以及 $y\in\overline{\mathcal{M}}$，那么存在 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{M}$，使得 $y_n\to y$。而 $(x,y_n)=0$，因此 $(x,y)=0$，那么 $x\in(\overline{\mathcal{M}})^{\perp}$，进而 $(\overline{\mathcal{M}})^{\perp}\supset\mathcal{M}^{\perp}$。

综合两方面，$(\overline{\mathcal{M}})^{\perp}=\mathcal{M}^{\perp}$。

对于 3，显然！

习题 2.10

证明：Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的对偶空间 $\mathcal{H}^*$ 为 Banach 空间。

证明 首先证明 $\mathcal{H}^*$ 为线性空间。

任取 $f,g\in\mathcal{H}^*$，任取 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$，任取 $x,y\in\mathcal{H}$，注意到

$$(f+g)(x+y)=f(x+y)+g(x+y)=f(x)+f(y)+g(x)+g(y)=(f+g)(x)+(f+g)(y)$$

$$(f+g)(\lambda x)=f(\lambda x)+g(\lambda x)=\lambda f(x)+\lambda g(x)=\lambda(f+g)(x)$$

$$(\lambda f)(x+y)=\lambda f(x+y)=\lambda f(x)+\lambda f(y)=(\lambda f)(x)+(\lambda f)(y)$$

$$(\lambda f)(\mu x)=\lambda f(\mu x)=\lambda\mu f(x)=\mu(\lambda f)(x)$$

$$\sup_{\|x\|\le 1}|(f+g)(x)|=\sup_{\|x\|\le 1}|f(x)+g(x)|\le\sup_{\|x\|\le 1}(|f(x)|+|g(x)|)\le\sup_{\|x\|\le 1}|f(x)|+\sup_{\|x\|\le 1}|g(x)|=\|f\|+\|g\|$$

$$\sup_{\|x\|\le 1}|(\lambda f)(x)|=\sup_{\|x\|\le 1}|\lambda f(x)|=\sup_{\|x\|\le 1}\lambda|f(x)|=\lambda\sup_{\|x\|\le 1}|f(x)|=\lambda\|f\|$$

那么 $f+g$ 与 λf 为有界线性泛函，等价于 $f+g$ 与 λf 为连续线性泛函，因此 $f+g,\lambda f\in\mathcal{H}^*$，进而 $\mathcal{H}^*$ 为线性空间。

其次证明 $\|\cdot\|$ 为范数。

对于正定性，显然 $\|f\|\ge 0$，且 $\|f\|=0\iff\sup_{\|x\|\le 1}|f(x)|=0\iff f(x)=0,\forall\|x\|\le 1\iff f=0$。事实上，对于任意 $x\in\mathcal{H}\setminus\{0\}$，成立 $f(x)=\|x\|f(x/\|x\|)$。

对于绝对齐性，注意到 $\|\lambda f\|=\sup_{\|x\|\le 1}|(\lambda f)(x)|=\sup_{\|x\|\le 1}|\lambda f(x)|=|\lambda|\sup_{\|x\|\le 1}|f(x)|=|\lambda|\|f\|$。

对于三角不等式，任取 $x\in\mathcal{H}$ 满足 $\|x\|\le 1$，注意到 $\|f\|+\|g\|=\sup_{\|x\|\le 1}|f(x)|+\sup_{\|x\|\le 1}|g(x)|\ge|f(x)|+|g(x)|\ge|f(x)+g(x)|$，由 x 的任意性，$\|f\|+\|g\|\ge\sup_{\|x\|\le 1}|(f+g)(x)|=\|f+g\|$。

综合这三点，$\|\cdot\|$ 为范数，进而 $\mathcal{H}^*$ 为赋范线性空间。

最后证明 $\mathcal{H}^*$ 为完备空间。

任取 Cauchy 序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$，那么对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}^*$，使得对于任意 $m,n\ge N$，成立 $\|f_m-f_n\|<\varepsilon$，因此 $\sup_{\|x\|\le 1}|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$，进而当 $\|x\|\le 1$ 时，成立 $|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon$，这表明 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{C}$ 为 Cauchy 序列。当 $\|x\|>1$ 时，任取 $\varepsilon>0$，由于 $\{f_n(x/\|x\|)\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{C}$ 为 Cauchy 序列，那么存在 $M\in\mathbb{N}^*$，使得对于任意 $m,n\ge N$，成立 $|f_m(x/\|x\|)-f_n(x/\|x\|)|<\varepsilon/\|x\|$，因此 $|f_m(x)-f_n(x)|=\|x\||f_m(x/\|x\|)-f_n(x/\|x\|)|<\varepsilon$，这表明 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{C}$ 为 Cauchy 序列。因此对于任意 $x\in\mathcal{H}$，序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 为 Cauchy 序列，进而定义 $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$。

第一证明 $f\in\mathcal{H}^*$，由于 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 为 Cauchy 序列，那么对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in\mathbb{N}^*$，使得对于任意 $m,n\ge N$，成立 $\|f_m-f_n\|<\varepsilon$，因此 $|\|f_m\|-\|f_n\||\le\|f_m-f_n\|\le\varepsilon$，因此 $\{\|f_n\|\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{C}$ 为 Cauchy 序列，因此存在 $z\in\mathbb{C}$，使得成立 $\lim_{n\to\infty}\|f_n\|=z$。任取 $x,y\in\mathcal{H}$，任取 $\lambda\in\mathbb{C}$，注意到

$$f(x+y)=\lim_{n\to\infty}f_n(x+y)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)+f_n(y)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)+\lim_{n\to\infty}f_n(y)=f(x)+f(y)$$

$$f(\lambda x)=\lim_{n\to\infty}f_n(\lambda x)=\lim_{n\to\infty}\lambda f_n(x)=\lambda\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lambda f(x)$$

$$\sup_{\|x\|\le 1}|f(x)|=\sup_{\|x\|\le 1}|\lim_{n\to\infty}f_n(x)|=\sup_{\|x\|\le 1}\lim_{n\to\infty}|f_n(x)|\le\lim_{n\to\infty}\sup_{\|x\|\le 1}|f_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\|f_n\|=z$$

因此 f 为有界线性算子，等价于 f 为连续线性泛函，因此 $f\in\mathcal{H}^*$。

第二证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f-f_n\|=0$。注意到对于任意 $\|x\|\leq 1$，

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|\\
=&\lim_{n\to\infty}\sup_{\|x\|\leq 1}|f(x)-f_n(x)|\\
=&\lim_{n\to\infty}\sup_{\|x\|\leq 1}|\lim_{m\to\infty}f_m(x)-f_n(x)|\\
=&\lim_{n\to\infty}\sup_{\|x\|\leq 1}\lim_{m\to\infty}|f_m(x)-f_n(x)|\\
\leq&\lim_{m,n\to\infty}\sup_{\|x\|\leq 1}|f_m(x)-f_n(x)|\\
=&\lim_{m,n\to\infty}\|f_m-f_n\|\\
=&0
\end{aligned}$$

综合这两点，$f_n\to f$，进而 $\mathcal{H}^*$ 为完备空间。

综上所述，$(\mathcal{H}^*,\|\cdot\|)$ 为完备赋范线性空间，即 Banach 空间。

习题 2.11

对于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$，成立

$$\|x\|=\sup_{\|y\|\leq 1}|(x,y)|$$

证明 记 $f:\mathcal{H}\to\mathbb{C},\quad y\mapsto(y,x)$，注意到 $f\in\mathcal{H}$，那么由 Frechet-Riesz 表现定理

$$\sup_{\|y\|\leq 1}|(x,y)|=\sup_{\|y\|\leq 1}|f(y)|=\|f\|=\|x\|$$

习题 2.12

对于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的有界共轭双线性泛函 $f:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$，存在且存在唯一有界线性算子 $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$，使得对于任意 $x,y\in\mathcal{H}$，成立 $f(x,y)=(T(x),y)$。

证明 对于任意 $x\in\mathcal{H}$，记线性泛函

$$\begin{aligned}
g_x:\mathcal{H}&\longrightarrow\mathbb{C}\\
y&\longmapsto\overline{f(x,y)}
\end{aligned}$$

那么 g_x 由 $x\in\mathcal{H}$ 唯一确定。

由于 f 有界，那么存在 $C>0$，使得对于任意 $x,y\in\mathcal{H}$，成立 $|f(x,y)|\leq C\|x\|\|y\|$，进而

$$\|g_x\|=\sup_{\|y\|\leq 1}|g_x(x)|=\sup_{\|y\|\leq 1}|f(x,y)|\leq C\|x\|$$

那么 $g_x\in\mathcal{H}^*$。由 Frechet-Riesz 表现定理，存在且存在唯一 $z_{g_x}\in\mathcal{H}$，使得对于任意 $y\in\mathcal{H}$，成立 $g_x(y)=(y,z_{g_x})$，且 $\|g_x\|=\|z_{g_x}\|$。

注意到 z_{g_x} 由 x 唯一确定，那么记

$$\begin{aligned}
T:\mathcal{H}&\longrightarrow\mathcal{H}\\
x&\longmapsto z_{g_x}
\end{aligned}$$

于是

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\leq 1}\|z_{g_x}\|=\sup_{\|x\|\leq 1}\|g_x\|\leq C$$

$$f(x,y)=\overline{g_x(y)}=\overline{(y,z_{g_x})}=(z_{g_x},y)=(T(x),y)$$

习题 2.13

1. 证明：对于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的正规正交集 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$，如果对于任意 $x\in\mathcal{H}$，成立 $\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,a_n)|^2$，那么 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{H}$ 的正规正交基。
2. 证明：对于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的正规正交集 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$，如果 $\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n-b_n\|^2<1$，且 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{H}$ 的正规正交基，那么 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{H}$ 的正规正交基。

证明 对于 1，将正规正交集 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 扩充为 $\mathcal{H}$ 的正规正交基 N，那么对于任意 $x\in\mathcal{H}$，成立

$$\|x\|^2=\sum_{e\in N}|(x,e)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2\implies (x,e)=0,\forall e\in N\setminus\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$$

因此

$$x=\sum_{e\in N}(x,e)e=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e$$

由 x 的任意性，$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $\mathcal{H}$ 的正规正交基。

对于 2，$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 不为 $\mathcal{H}$ 的正规正交基，那么存在 $x\in\mathcal{H}$，使得成立 $x\perp \mathrm{Sp}\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$，进而由 Scharz 不等式

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,a_n)|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|(x,a_n-b_n)|^2\le\sum_{n=1}^{\infty}\|x\|^2\|a_n-b_n\|^2<\|x\|^2$$

矛盾！

习题 2.14

证明：对于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_1$ 与 $\mathcal{H}_2$，有界线性算子 $T:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$ 的 Hilbert 共轭算子 $T^*:\mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_1$ 为有界线性算子。

证明 由2.11，成立

$$\begin{aligned}\|T^*\|&=\sup_{\|y\|\le1}\|T^*(y)\|\\&=\sup_{\|y\|\le1}\sup_{\|x\|\le1}|(x,T^*(y))|\\&=\sup_{\|y\|\le1}\sup_{\|x\|\le1}|(T(x),y)|\\&=\sup_{\|x\|\le1}\sup_{\|y\|\le1}|(T(x),y)|\\&=\sup_{\|x\|\le1}\|T(x)\|\\&=\|T\|\end{aligned}$$

习题 2.15

证明：对于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$，如果有界线性算子 $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ 成立对于任意 $x\in\mathcal{H}$，成立 $\mathrm{Re}(T(x),x)=0$，那么 $T+T^*=0$。

证明 由于 $\mathrm{Re}(T(x),x)=0$，那么

$$(T(x),x)=(x,T^*(x))=\overline{(T^*(x),x)}=-(T^*(x),x)$$

因此对于任意 $x\in\mathcal{H}$，成立 $((T+T^*)(x),x)=0$。

令 $S=T+T^*$，那么 $S^*=S$，注意到

$$(S(x),y)+(S(y),x)=(S(x),x)+(S(y),y)+(S(x),y)+(S(y),x)=(S(x+y),x+y)=0$$

$$i(S(y),x)-i(S(x),y)=(S(x),x)+(S(y),y)-i(S(x),y)+-(S(y),x)=(S(x+iy),x+iy)=0$$

因此

$$(S(x),y)=(S(y),x)=0,\qquad \forall x,y\in\mathcal{H}$$

进而

$$(S(x),S(x))=0\iff S(x)=0\iff S=0\iff T+T^*=0$$

习题 2.16

对于有界线性算子

$$\begin{aligned} T: \quad & l^2\longrightarrow l^2 \\ & (x_n)_{n=1}^{\infty}\longmapsto\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{n,m}x_m\right)_{n=1}^{\infty}\end{aligned}$$

其 Hilbert 共轭算子为

$$\begin{aligned} T^*: \quad & l^2\longrightarrow l^2 \\ & (x_n)_{n=1}^{\infty}\longmapsto\left(\sum_{m=1}^{\infty}a^*_{n,m}x_m\right)_{n=1}^{\infty}\end{aligned}$$

证明：

$$a^*_{n,m}=\overline{a_{m,n}},\qquad \forall m,n\in\mathbb{N}^*$$

证明 取 l^2 的正规正交基 $e_n=(\delta_{n,m})_{m=1}^{\infty}$，那么对于任意 $(x_n)_{n=1}^{\infty}\in l^2$，可唯一表示为

$$(x_n)_{n=1}^{\infty}=\sum_{n=1}^{\infty}x_ne_n$$

因此对于有界线性算子 $T:l^2\to l^2$，成立

$$T((x_n)_{n=1}^{\infty})=\sum_{n=1}^{\infty}x_nT(e_n)=\sum_{n=1}^{\infty}x_n(a_{n,m})_{m=1}^{\infty}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_na_{n,m}\right)_{m=1}^{\infty}$$

进而

$$(T((x_n)_{n=1}^{\infty}),e_l)=\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}x_na_{n,m}\right)_{m=1}^{\infty},e_l\right)=\sum_{n=1}^{\infty}x_na_{n,l}$$

特别的

$$T(e_n)=(a_{n,m})_{m=1}^{\infty},\qquad (T(e_n),e_m)=a_{n,m}$$

同理可得

$$T^*(e_n)=(a^*_{n,m})_{m=1}^{\infty},\qquad (T^*(e_n),e_m)=a^*_{n,m}$$

由于 T^* 为 T 的 Hilbert 共轭算子，那么

$$a^*_{n,m}=(T^*(e_n),e_m)=(e_n,T(e_m))=\overline{(T(e_m),e_n)}=\overline{a_{m,n}}$$

第三章 Banach 空间

习题 3.1

记

$$l^\infty = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty : \exists M, \forall n \in \mathbb{N}^*, |x_n| \le M\}, \qquad \|\{\{x_n\}_{n=1}^\infty\| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n|$$

如果矩阵 (a_{ij}) 满足

$$\sup_{i\in\mathbb{N}^*} \sum_{j=1}^\infty |a_{ij}| < \infty$$

那么定义线性算子

$$\begin{aligned} T: \quad & l^\infty \longrightarrow l^\infty \\ & \{x_n\}_{n=1}^\infty \longmapsto \left\{\sum_{j=1}^\infty a_{ij}x_i\right\}_{i=1}^\infty \end{aligned}$$

证明：T 为有界线性算子，且

$$\|T\| = \sup_{i\in\mathbb{N}^*} \sum_{j=1}^\infty |a_{ij}|$$

证明 由题意，存在 $M > 0$，使得成立 $\sup\limits_{i\in\mathbb{N}^*} \sum\limits_{j=1}^\infty |a_{ij}| \le M$。

首先证明 T 的定义良好性，任取 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in l^\infty$，注意到对于任意 $i \in \mathbb{N}^*$，成立

$$\left|\sum_{j=1}^\infty a_{ij}x_i\right| \le \sum_{j=1}^\infty |a_{ij}||x_i| \le \sup_{i\in\mathbb{N}^*} \sum_{j=1}^\infty |a_{ij}||x_i| \le M|x_i|$$

因此 $\left\{\sum\limits_{j=1}^\infty a_{ij}x_i\right\}_{i=1}^\infty \in l^\infty$，进而 T 定义良好。

其次证明 T 为有界线性算子，且

$$\|T\| = \sup_{i\in\mathbb{N}^*} \sum_{j=1}^\infty |a_{ij}|$$

一方面

$$
\begin{aligned}
\|T\| &= \sup \frac{\left\|\left\{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_i\right\}_{i=1}^{\infty}\right\|}{\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|} \\
&= \sup \frac{\sup\limits_{i\in\mathbb{N}^*} \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_i\right|}{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n|} \\
&\leq \sup \frac{\sup\limits_{i\in\mathbb{N}^*} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}||x_i|}{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n|} \\
&\leq \sup \frac{\left(\sup\limits_{i\in\mathbb{N}^*} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|\right)\left(\sup\limits_{i\in\mathbb{N}^*} |x_i|\right)}{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n|} \\
&= \sup_{i\in\mathbb{N}^*} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \\
&\leq M
\end{aligned}
$$

因此 T 为有界线性算子。

另一方面，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $I \in \mathbb{N}^*$，使得成立 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{Ij}| \leq \sup\limits_{i\in\mathbb{N}^*} \sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| - \varepsilon$，因此取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0, \cdots, 0, \underset{I\text{ th}}{1}, 0, 0, \cdots\}$，那么

$$
\|T\| \geq \frac{\left\|\left\{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_i\right\}_{i=1}^{\infty}\right\|}{\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|} = \frac{\sup\limits_{i\in\mathbb{N}^*} \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}x_i\right|}{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |x_n|} = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{Ij}| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}^*} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| - \varepsilon
$$

由 ε 的任意性

$$
\|T\| \geq \sup_{i\in\mathbb{N}^*} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|
$$

那么

$$
\|T\| = \sup_{i\in\mathbb{N}^*} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|
$$

习题 3.2

对于有界数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，定义线性算子

$$
\begin{aligned}
T: \quad & l^1 \longrightarrow l^1 \\
& \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto \{a_n x_n\}_{n=1}^{\infty}
\end{aligned}
$$

证明：T 为有界线性算子，且

$$
\|T\| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n|
$$

证明 由于 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为有界数列，因此存在 $M > 0$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$，成立 $|a_n| \leq M$，进而 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n| \leq M$。

首先证明 T 的定义良好性，任取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1$，注意到

$$
\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n| \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \leq M \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|
$$

因此 $\{a_n x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1$，进而 T 定义良好。

其次证明 T 为有界线性算子，且

$$\|T\|=\sup_{i\in\mathbb{N}^*}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|$$

一方面

$$\|T\|=\sup\frac{\|\{a_nx_n\}_{n=1}^{\infty}\|}{\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|}=\sup\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nx_n|}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|}\le\sup\frac{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|}=\sup_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|\le M$$

因此 T 为有界线性算子。

另一方面,对于任意 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbb{N}^*$,使得成立 $|a_N|\ge\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|-\varepsilon$,因此取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\{0,\cdots,0,\underset{N\text{ th}}{1},0,0,\cdots\}$,那么

$$\|T\|\ge\frac{\|\{a_nx_n\}_{n=1}^{\infty}\|}{\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nx_n|}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|}=|a_N|\ge\sup_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|-\varepsilon$$

由 ε 的任意性

$$\|T\|\ge\sup_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|$$

综合两方面

$$\|T\|=\sup_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|$$

习题 3.3

对于有界数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，定义线性算子

$$\begin{aligned}T:\quad & l^1\longrightarrow l^1\\ & \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\longmapsto\{a_nx_n\}_{n=1}^{\infty}\end{aligned}$$

证明：T 为有界可逆线性算子 $\Longleftrightarrow\ \inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|>0$。

证明 由于 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为有界数列，因此存在 $M>0$，使得对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$，成立 $|a_n|\le M$，进而 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|\le M$。

一、如果存在 $N\in\mathbb{N}^*$，使得成立 $a_N=0$，那么由于

$$T(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})=\{a_1x_1,\cdots,a_{N-1}x_{N-1},\underset{N\text{ th}}{0},a_{N+1}x_{N+1},a_{N+1}x_{N+2},\cdots\}$$

因此不存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^1$，使得成立

$$T(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})=\{0,\cdots,0,\underset{N\text{ th}}{1},0,0,\cdots\}$$

那么 T 不为满射，进而 T 不为有界可逆线性算子。

二、如果对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$，成立 $a_n\ne0$，那么定义线性算子

$$\begin{aligned}T^{-1}:\quad & l^1\longrightarrow l^1\\ & \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\longmapsto\{x_n/a_n\}_{n=1}^{\infty}\end{aligned}$$

注意到

$$T\circ T^{-1}=T^{-1}\circ T=I$$

因此 T 为可逆算子。

1. 如果 $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|>0$，那么存在 $a>0$，使得对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$，成立 $|a_n|\geq a>0$。由上题

$$\|T\|=\sup_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|\leq M,\qquad \|T^{-1}\|=\sup_{n\in\mathbb{N}^*}1/|a_n|\leq 1/a$$

因此 T 为有界可逆线性算子。

2. 如果 $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|=0$，那么存在 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}^*$，使得成立 $\lim\limits_{k\to\infty}|a_{n_k}|=0$。注意到

$$\|T^{-1}\|=\sup_{n\in\mathbb{N}^*}1/|a_n|\geq\sup_{k\in\mathbb{N}^*}1/|a_{n_k}|=\infty$$

因此 T 不为有界可逆线性算子。

习题 3.4

如果矩阵 (a_{ij}) 满足

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q<\infty$$

那么定义线性算子

$$\begin{aligned}T:\quad & l^p\longrightarrow l^q\\ & \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\longmapsto\left\{\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j\right\}_{i=1}^{\infty}\end{aligned}$$

其中 $1<p,q<\infty$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

证明：T 为有界线性算子。

证明 由 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}\|T(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})\|_q &=\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j\right|^q\right)^{1/q}\\ &\leq\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}||x_j|\right|^q\right)^{1/q}\\ &\leq\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\right)^{1/q}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{1/p}\right|^q\right)^{1/q}\\ &=\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|_p\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|^q\end{aligned}$$

习题 3.5

证明：对于 Banach 空间 X，如果 $T,S:X\to X$ 为有界可逆线性算子，那么 TS 为有界可逆线性算子，且 $(TS)^{-1}=S^{-1}T^{-1}$。

证明

$$\|TS\|=\sup\frac{\|T(S(x))\|}{\|x\|}=\sup\frac{\|T(S(x))\|}{\|S(x)\|}\frac{\|S(x)\|}{\|x\|}\leq\sup\frac{\|T(x)\|}{\|x\|}\sup\frac{\|S(x)\|}{\|x\|}=\|T\|\|S\|$$

习题 3.6

证明：对于赋范线性空间 X 与 Y，如果线性算子 $T:X\to Y$ 有界，那么 $\ker T$ 为 X 的闭子空间。

证明 （朴素证明）任取 $x\in\overline{\ker T}$，那么存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$，使得成立 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$。由于 T 为有界线性算子，

那么 T 为连续线性算子，因此

$$T(x)=T\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=\lim_{n\to\infty}T(x_n)=0$$

进而 $x\in\ker T$。由 x 的任意性，$\ker T$ 为 X 的闭子空间。

（优雅证明）由于 Y 为度量空间，因此 Y 满足 T_1 公理，进而 $\{0\}$ 为 Y 的闭集。而 T 有界 $\iff$ T 连续，因此 $\ker T=T^{-1}(0)$ 为闭集。

习题 3.7

证明：对于赋范线性空间 X，如果 $x\in X$ 满足对于任意连续线性泛函 $f:X\to\mathbb{C}$，成立 $f(x)=0$，那么 $x=0$。

证明 如果 $x\neq 0$，那么由 Hahn-Banach 定理的推论，存在连续线性泛函 $f:X\to\mathbb{C}$，使得成立

$$f(x)=\|x\|$$

于是

$$0=f(x)=\|x\|\neq 0$$

矛盾！因此 $x=0$。

习题 3.8

证明：如果 X 为 Banach 空间，那么对于任意 $x\in X$，成立

$$\|x\|=\sup_{\substack{f\in X^*\\ \|f\|\le 1}}|f(x)|$$

证明 由典型映射的保范性，命题显然！

习题 3.9

证明：对于赋范线性空间 X 上的次可加且正齐次泛函 $f:X\to\mathbb{R}$，换言之，对于任意 $x,y\in X$ 与 $\lambda\in\mathbb{C}$，成立

$$f(x+y)\le f(x)+f(y),\qquad f(\lambda x)=|\lambda|f(x)$$

如下命题等价。

1. T 在 0 处连续。
2. T 在 $x_0\in X$ 处连续。
3. T 在 X 上连续。
4. T 在 X 上一致连续。
5. T 在 X 上 Lipschitz 连续。
6. T 在 X 上有界。

证明 $6\implies 5$：由于

$$f(-x)=f(x),\qquad f(x)-f(y)\le f(x-y)$$

那么

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x-y)|$$

由于 f 有界，于是存在 $C>0$，使得对于任意 $x\in X$，成立 $\|f\|\le C\|x\|$。任取 $x,y\in X$，由于

$$|f(x)-f(y)|\le|f(x-y)|\le C\|x-y\|$$

那么 T 在 X 上 Lipschitz 连续。

$5\implies 4\implies 3\implies 2\implies 1$：显然！

$1 \implies 6$：由于 f 在 0 处连续，那么存在 $\delta > 0$，使得当 $\|x\| \leq \delta$ 时，成立 $|f(x)| \leq 1$，因此对于任意 $x \in X \setminus \{0\}$，成立

$$|f(x)| = \frac{\|x\|}{\delta} \left\| f\left(\frac{\delta}{\|x\|}x\right) \right\| \leq \frac{\|x\|}{\delta}$$

因此 f 在 X 上有界。

习题 3.10

证明：如果 $p(x)$ 为线性空间 X 上的半范数，那么 $p^{-1}(B(r))$ 为平衡的、吸收的凸集。

习题 3.11

证明：凸集的闭包为凸集，平衡集的闭包为平衡集，吸收集的闭包为吸收集。

习题 3.12

求解 $L^1[0,1]$ 上有界线性泛函的一般形式。

习题 3.13

证明 Hellinger-Toeplitz 定理：对于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的线性算子 $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$，如果对于任意 $x, y \in \mathcal{H}$，成立 $(T(x), y) = (x, T(y))$，那么 T 为有界线性算子。

证明 对于任意 $y \in \mathcal{H}$，构造线性泛函

$$\begin{aligned} f_y : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto (x, T(y)) \end{aligned}$$

由 Scharz 不等式

$$\|f_y\| = \sup_{\|x\|=1} |f_y(x)| = \sup_{\|x\|=1} |(x, T(y))| \leq \sup_{\|x\|=1} \|x\|\|T(y)\| = \|T(y)\|$$

因此 $f_y \in \mathcal{H}^*$。由 Riesz 表现定理，成立 $\|f_y\| = \|T(y)\|$。由于对于任意 $x \in \mathcal{H}$，由 Scharz 不等式

$$\sup_{\|y\|=1} |f_y(x)| = \sup_{\|y\|=1} |(x, T(y))| = \sup_{\|y\|=1} |(T(x), y)| \leq \sup_{\|y\|=1} \|T(x)\|\|y\| = \|T(x)\| < \infty$$

因此由一致有界原理，成立 $\sup \|y\| = 1\|f_y\| < \infty$，因此

$$\|T\| = \sup_{\|y\|=1} \|T(y)\| = \sup_{\|y\|=1} \|f_y\| < \infty$$

进而 T 为有界线性算子。

习题 3.14

证明：对于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的线性算子 $T, S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$，如果对于任意 $x, y \in \mathcal{H}$，成立 $(T(x), y) = (x, S(y))$，那么 T, S 为有界算子，且 $T = S^*$。

证明 任取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$，使得成立 $x_n \to x$ 且 $T(x_n) \to y$。由于 $\mathcal{H}$ 为 Hilbert 空间，因此 $x \in \mathcal{H}$。由于对于任意 $z \in \mathcal{H}$，成立 $(T(x_n), z) = (x_n, S(z))$，那么 $(y, z) = (x, S(z))$，因此 $(y, z) = (T(x), z)$。取 $z = T(x) - y$，那么 $\|T(x) - y\| = 0$，因此 $T(x) = y$，进而 T 为闭算子。由闭图形定理，T 为有界算子。同理可得 S 为有界算子。任取 $x, y \in \mathcal{H}$，那么

$$(T(x), y) = (x, S(y)) = (S^*(x), y) \implies T = S^*$$

习题 3.15

证明：如果 $T : X \to Y$ 为单的有界线性算子，其中 X, Y 为 Banach 空间，那么 T^{-1} 为闭算子。

证明 由 T 为连续算子，命题得证！

习题 3.16

对于赋范线性空间 X 与 Y，M 为 X 的线性子空间，$T: M \to Y$ 为线性算子，定义向量空间 $X \times Y$ 上的范数为

$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$$

证明：

$$T\text{为闭算子} \iff G(T)\text{闭集}$$

证明 对于必要性，如果 T 为闭算子，那么任取 $(x,y) \in \overline{G(T)}$，因此存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$，使得成立

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} (x_n, T(x_n)) = (x,y) \\
\iff &\lim_{n\to\infty} \|(x_n - x, T(x_n) - y)\| = 0 \\
\iff &\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| + \|T(x_n) - y\| = 0 \\
\iff &\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \lim_{n\to\infty} \|T(x_n) - y\| = 0 \\
\iff &\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} T(x_n) = y
\end{aligned}$$

由于 T 为闭算子，那么 $x \in M$ 且 $T(x) = y$，因此 $(x,y) \in G(T)$。由 (x,y) 的任意性，$G(T)$ 为闭集。

对于充分性，如果 $G(T)$ 为闭集，那么任取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$，使得成立

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} T(x_n) = y \\
\iff &\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = \lim_{n\to\infty} \|T(x_n) - y\| = 0 \\
\iff &\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| + \|T(x_n) - y\| = 0 \\
\iff &\lim_{n\to\infty} \|(x_n - x, T(x_n) - y)\| = 0 \\
\iff &\lim_{n\to\infty} (x_n, T(x_n)) = (x,y) \\
\implies &(x,y) \in \overline{G(T)}
\end{aligned}$$

由于 $G(T)$ 为闭集，那么 $(x,y) \in G(T)$，因此 $x \in M$ 且 $T(x) = y$。由 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的任意性，T 为闭算子。

习题 3.17

对于 Banach 空间 X 上的点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$，如果对于任意连续线性泛函 $f: X \to \mathbb{C}$，成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|^p < \infty$$

其中 $p \geq 1$，那么存在 $\mu > 0$，使得对于连续线性泛函 $f: X \to \mathbb{C}$，成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|^p < \mu \|f\|^p$$

证明 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$，定义线性算子

$$\begin{aligned}
T_n : X^* &\longrightarrow l^p \\
f &\longmapsto \{f(x_1), \cdots, f(x_n), 0, 0, \cdots\}
\end{aligned}$$

由于

$$\|T_n(f)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \|f\|^p \|x_k\|^p\right)^{1/p} = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^p\right)^{1/p}$$

那么对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$，T_n 为有界线性算子。由于对于任意连续线性泛函 $f:X\to\mathbb{C}$，成立

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\|T_n(f)\|_p=\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)|^p\right)^{1/p}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|^p\right)^{1/p}<\infty$$

那么由一致有界原理，存在 $\mu^{1/p}>0$，使得成立 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\|T_n\|<\mu^{1/p}$，因此对于任意连续线性泛函 $f:X\to\mathbb{C}$，成立

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|^p=\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)|^p=\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\|T_n(f)\|_p^p\le\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\|T_n\|^p\|f\|^p<\mu\|f\|^p$$

习题 3.18

证明：有限维赋范线性空间的对偶空间为有限维赋范线性空间，且维数相同；无穷维赋范线性空间的对偶空间为无穷维赋范线性空间。

证明 对于 n 维赋范线性空间 X，其基为 $\{e_k\}_{k=1}^n$，由 Hahn-Banach 定理的推论，存在 $\{f_k\}_{k=1}^n\subset X^*$，使得成立

$$f_i(e_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

容易知道 $\{f_k\}_{k=1}^n$ 线性无关，且对于任意

$$x=\sum_{k=1}^{n}x_ke_k\in X$$

成立

$$f_i(x)=\sum_{j=1}^{n}x_jf_i(e_j)$$

因此对于任意 $f\in X^*$，成立

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}x_kf(e_k)=\sum_{k=1}^{n}f(e_k)f_k(x)=\left(\sum_{k=1}^{n}f(e_k)f_k\right)(x)$$

从而

$$f=\sum_{k=1}^{n}f(e_k)f_k$$

进而 $\{f_k\}_{k=1}^n$ 为 X^* 的基，于是 X^* 为 n 维赋范线性空间。

对于无穷维赋范线性空间 X，如果 X^* 为 n 维赋范线性空间，那么 X^{**} 为 n 维赋范线性空间。由于典型映射 τ 为单的保范线性空间，那么由同构定理

$$X/\ker\tau\cong\operatorname{im}\tau\iff X\cong\tau(X)$$

因此 $\tau(X)$ 为无穷维赋范线性空间。但是 $\tau(X)\subset X^{**}$，矛盾！因此 X^* 为无穷维赋范线性空间。

习题 3.19

证明：对于 Banach 空间 X，成立

$$X\text{为自反空间}\iff X^*\text{为自反空间}$$

证明 X 的典型映射为

$$\begin{aligned}\psi:X&\longrightarrow X^{**}\\ x&\longmapsto F_x,\ \text{其中}F_x(f)=f(x)\end{aligned}$$

X^* 的典型映射为

$$\begin{aligned}\Psi: X^* &\longrightarrow X^{***}\\ f &\longmapsto \mathscr{F}_f,\text{ 其中}\mathscr{F}_f(F)=F(f)\end{aligned}$$

对于必要性，如果 X 为自反空间，那么 ψ 为满射。任取 $\mathscr{F}\in X^{***}$，对于任意 $F\in X^{**}$，存在 $x\in X$，使得成立 $\psi(x)=F$，因此对于任意 $f\in X^*$，成立 $F(f)=f(x)$，于是

$$\mathscr{F}(F)=\mathscr{F}(\psi(x))=(\mathscr{F}\circ\psi)(x)=F(\mathscr{F}\circ\psi)$$

所以 $\Psi(\mathscr{F}\circ\psi)=\mathscr{F}$，那么 Ψ 为满射，进而 X^* 为自反空间。

对于充分性，如果 X^* 为自反空间，那么由必要性，X^{**} 为自反空间。由于 $\operatorname{im}\psi$ 为 X^{**} 的闭子空间，那么 $\operatorname{im}\psi$ 为自反空间。由于 ψ 为单射，那么 $X\cong\operatorname{im}\psi$，进而 X 为自反空间。

习题 3.20

证明：对于 Banach 空间 X 与 Y，如果 $T:X\to Y$ 为保范线性双射，那么 $T^*:Y^*\to X^*$ 为保范线性双射。

证明 对于线性

$$\begin{aligned}T^*(f+g)&=(f+g)\circ T=f\circ T+g\circ T=T^*(f)+T^*(g)\\ T^*(\lambda g)&=(\lambda g)\circ T=\lambda(g\circ T)=\lambda T^*(g)\end{aligned}$$

对于双射性，构造算子

$$\begin{aligned}(T^*)^{-1}: X^* &\longrightarrow Y^*\\ f &\longmapsto f\circ T^{-1}\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}((T^*)^{-1}\circ T^*)(g)=(T^*)^{-1}(T^*(g))=(T^*)^{-1}(g\circ T)=g\circ T\circ T^{-1}=g &\implies (T^*)^{-1}\circ T^*=\mathbb{1}_{Y^*}\\ (T^*\circ(T^*)^{-1})(f)=T^*((T^*)^{-1}(f))=T^*(f\circ T^{-1})=f\circ T^{-1}\circ T=f &\implies T^*\circ(T^*)^{-1}=\mathbb{1}_{X^*}\end{aligned}$$

那么 T^* 为双射。

对于保范性，一方面

$$|(T^*(g))(x)|=|(g\circ T)(x)|=|g(T(x))|\le\|g\|\|T(x)\|=\|g\|\|x\|\implies\|T^*(g)\|\le\|g\|$$

另一方面，对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$，由于 $\|g\|=\sup\limits_{\|y\|\le 1}|g(y)|$，那么存在 $y_n\in Y$，使得成立

$$\|y_n\|\le 1,\qquad |g(y_n)|\ge\|g\|-\frac{1}{n}$$

由于 T 为双射，那么存在 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$，使得对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$，成立

$$T(x_n)=y_n,\qquad \|x_n\|=\|T(x_n)\|=\|y_n\|\le 1$$

因此

$$|(T^*(g))(x_n)|=|(g\circ T)(x_n)|=|g(T(x_n))|=|g(y_n)|\ge\|g\|-\frac{1}{n}$$

进而

$$\|T^*(g)\|=\sup_{\|x\|\le 1}|(T^*(g))(x)|\ge\sup_{n\in\mathbb{N}^*}|(T^*(g))(x_n)|\ge\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\|g\|-\frac{1}{n}=\|g\|$$

综合两方面，$\|T^*(g)\|=\|g\|$，因此 T^* 为保范算子。

综上所述，T^* 为保范线性双射。

习题 3.21

证明：对于赋范线性空间 X 与 Y，如果 $\mathcal{L}(X,Y)$ 为 Banach 空间，那么 Y 为 Banach 空间。

证明 由于 X 为非零赋范线性空间，那么存在 $x_0 \in X \setminus \{0\}$。由 Hahn-Banach 定理的推论，存在有界线性泛函 $f_0 : X \to \mathbb{C}$，使得成立

$$\|f_0\| = 1, \qquad f_0(x_0) = \|x_0\|$$

任取 Cauchy 序列 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$，对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$，定义映射

$$\begin{aligned} T_n : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \frac{f_0(x)}{f_0(x_0)} y_n \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} T_n(x+y) &= \frac{f_0(x+y)}{f_0(x_0)} y_n = \frac{f_0(x)}{f_0(x_0)} y_n + \frac{f_0(y)}{f_0(x_0)} y_n = T_n(x) + T_n(y) \\ T_n(\lambda x) &= \frac{f_0(\lambda x)}{f_0(x_0)} y_n = \lambda \frac{f_0(x)}{f_0(x_0)} y_n = \lambda T_n(x) \end{aligned}$$

因此 T_n 为线性算子。

由于

$$\|T_n(x)\| = \left\| \frac{f_0(x)}{f_0(x_0)} y_n \right\| = \frac{\|y_n\|}{\|x_0\|} \|f_0(x)\| \leq \frac{\|y_n\|}{\|x_0\|} \|f_0\| \|x\| = \frac{\|y_n\|}{\|x_0\|} \|x\| \implies \|T_n\| \leq \frac{\|y_n\|}{\|x_0\|}$$

因此 T_n 为有界算子，进而 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X,Y)$。

由于

$$\begin{aligned} \|T_m - T_n\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_m(x) - T_n(x)\| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \left\| \frac{f_0(x)}{f_0(x_0)} (y_m - y_n) \right\| \\ &= \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|y_m - y_n\|}{\|x_0\|} \|f_0(x)\| \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{\|y_m - y_n\|}{\|x_0\|} \|f_0\| \|x\| \\ &= \frac{\|y_m - y_n\|}{\|x_0\|} \end{aligned}$$

因此 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 序列。由于 $\mathcal{L}(X,Y)$ 为 Banach 空间，那么存在 $T \in \mathcal{L}(X,Y)$，使得成立 $T_n \to T$。由于对于任意 $x \in X$，成立

$$\|T_n(x) - T(x)\| \leq \|T_n - T\| \|x\|$$

那么对于任意 $x \in X$，成立 $T_n(x) \to T(x)$。特别的，$T_n(x_0) \to T(x_0)$。记 $y = T(x_0) \in Y$，那么 $y_n \to y$。

综上所述，Y 为 Banach 空间。

习题 3.22

证明：对于赋范线性空间 X，如果对于任意线性泛函 $f : X \to \mathbb{C}$，成立

$$f \text{ 依范数} \|\cdot\|_1 \text{ 连续} \implies f \text{ 依范数} \|\cdot\|_2 \text{ 连续}$$

那么存在 $M > 0$，使得对于任意 $x \in X$，成立

$$\|x\|_1 \leq M \|x\|_2$$

证明 记 X_1 为 X 依范数 $\|\cdot\|_1$ 的闭包，X_2 为 X 依范数 $\|\cdot\|_2$ 的闭包，那么 X_1 与 X_2 均为 Banach 空间。构造恒等算子

$$\begin{aligned} I : X_2 &\longrightarrow X_1 \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

任取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_2$ 以及 $x \in X_2$ 与 $y \in X_1$，满足

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_2 = \lim_{n\to\infty} \|x_n - y\|_1 = 0$$

任取线性泛函 $f : X \to \mathbb{C}$，满足 f 依范数 $\|\cdot\|_1$ 连续，那么 f 依范数 $\|\cdot\|_2$ 连续，因此

$$f(x_n) \to f(x), \qquad f(x_n) \to f(y)$$

那么 $f(x) = f(y)$。由习题3.7，$x = y$，进而 I 为闭算子。由闭图形定理，I 为有界算子，命题得证！