第一周

第一题

求下列近似值的误差限：

$$
\begin{align}
& x_1^* + x_2^* + x_4^* \tag{1} \\
& x_1^* x_2^* x_3^* \tag{2} \\
& x_2^* / x_4^* \tag{3}
\end{align}
$$

其中

$$
x_1^* = 1.1021, \quad x_2^* = 0.031, \quad x_3^* = 385.6, \quad x_4^* = 56.430 \tag{4}
$$

解：由于

$$
\varepsilon(x_1^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-4}, \quad \varepsilon(x_2^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-3}, \quad \varepsilon(x_3^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-1}, \quad \varepsilon(x_4^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-3} \tag{5}
$$

那么

$$
\begin{align}
& \varepsilon(x_1^* + x_2^* + x_4^*) \approx \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*) + \varepsilon(x_4^*) \approx 1.05 \times 10^{-3} \tag{6} \\
& \varepsilon(x_1^* x_2^* x_3^*) \approx |x_2^* x_3^*| \varepsilon(x_1^*) + |x_3^* x_1^*| \varepsilon(x_2^*) + |x_1^* x_2^*| \varepsilon(x_3^*) \approx 0.215 \tag{7} \\
& \varepsilon(x_2^* / x_4^*) \approx \frac{|x_2^*| \varepsilon(x_4^*) + |x_4^*| \varepsilon(x_2^*)}{|x_4^*|^2} \approx 9 \times 10^{-4} \tag{8}
\end{align}
$$

第二题

序列$\{y_n\}$满足递推关系

$$
y_n = 10 y_{n-1} - 1, \qquad n \in \mathbb{N}^* \tag{9}
$$

若$y_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$（三位有效数字），计算到$y_{10}$时误差有多大？这个计算过程稳定吗？

解：设y_n^*为y_n的近似值，那么$\varepsilon(y_n^*) = y_n^* - y_n$，于是由

$$
\begin{cases} y_0 = \sqrt{2} \\ y_n = 10 y_{n-1} - 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y_0^* = 1.41 \\ y_n^* = 10 y_{n-1}^* - 1 \end{cases} \tag{10}
$$

可知

$$
\begin{cases} \varepsilon(y_0^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-2} \\ \varepsilon(y_n^*) = 10 \varepsilon(y_{n-1}^*) \end{cases} \tag{11}
$$

进而

$$
\varepsilon(y_{10}^*) = 10^{10} \varepsilon(y_0^*) = \frac{1}{2} \times 10^{8} \tag{12}
$$

因此计算过程不稳定。

第二周

第一题

给出$f(x) = \ln x$的数值表

x_n	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$y_n = \ln x_n$	-0.916291	-0.693147	-0.510826	-0.356675	-0.223144

使用线性插值及二次插值计算$\ln 0.54$的近似值。

解：记$x_0 = 0.54, y_0 = \ln 0.54$。

对于线性插值，由于$x_2 < x_0 < x_3$，那么取x_2, x_3进行线性插值，插值函数为

$$L_1(x) = \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} y_2 + \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} y_3 \tag{13}$$

代入数据

$$\ln 0.54 \approx L_1(0.54) \approx -0.620219 \tag{14}$$

截断误差为

$$|R_1(x)| = \frac{|f''(\xi)|}{2} |x - x_2||x - x_3| = \frac{|x - x_2||x - x_3|}{2\xi^2} \le \frac{|x - x_2||x - x_3|}{2x_2^2} \tag{15}$$

于是

$$|R_1(0.54)| \le 4.8 \times 10^{-3} < \frac{1}{2} \times 10^{-2} \tag{16}$$

对于二次插值，取x_1, x_2, x_3进行抛物线插值，插值函数为

$$L_2(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x - x_3)(x - x_1)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3 \tag{17}$$

代入数据

$$\ln 0.54 \approx L_2(0.54) \approx -0.615320 \tag{18}$$

截断误差为

$$|R_2(x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{6} |x - x_1||x - x_2||x - x_3| = \frac{|x - x_1||x - x_2||x - x_3|}{3\xi^3} \le \frac{|x - x_1||x - x_2||x - x_3|}{3x_1^3} \tag{19}$$

于是

$$|R_1(0.54)| \le 1.75 \times 10^{-3} < \frac{1}{2} \times 10^{-2} \tag{20}$$

对于二次插值，取x_2, x_3, x_4进行抛物线插值，插值函数为

$$L_2(x) = \frac{(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} y_2 + \frac{(x - x_4)(x - x_2)}{(x_3 - x_4)(x_3 - x_2)} y_3 + \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} y_4 \tag{21}$$

代入数据

$$\ln 0.54 \approx L_2(0.54) \approx -0.616838 \tag{22}$$

截断误差为

$$|R_2(x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{6}|x-x_2||x-x_3||x-x_4| = \frac{|x-x_2||x-x_3||x-x_4|}{3\xi^3} \le \frac{|x-x_2||x-x_3||x-x_4|}{3x_2^3} \tag{23}$$

于是

$$|R_1(0.54)| \le 8.96 \times 10^{-4} < \frac{1}{2} \times 10^{-2} \tag{24}$$

第二题

在$[-4,4]$上给出$f(x)=\mathrm{e}^x$的等距结点函数表，若用二次插值求e^x的近似值，要求截断误差不超过10^{-6}，那么使用函数表的步长h应取多少?

解：假设插值点为x_0-h, x_0, x_0+h，那么截断误差为

$$|R_2(x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{3!}|(x-x_0+h)(x-x_0)(x-x_0-h)| \le \frac{\sqrt{3}}{27}\mathrm{e}^4h^3 \tag{25}$$

当且仅当$\xi=4$且$x=x_0\pm\frac{h}{\sqrt{3}}$时等号成立。令$|R_2(x)|\le 10^{-6}$可知$h\le 6.58\times10^{-3}$。

第三题

如果$f(x)=a_0+\cdots+a_nx^n$有n个不同实数根$x_1,\cdots,x_n$，证明:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^m}{f'(x_k)} = \begin{cases} 0, & 0\le m\le n-2 \\ a_n^{-1}, & m=n-1 \end{cases} \tag{26}$$

证明：由于f有n个不同实数根$x_1,\cdots,x_n$，那么

$$f(x)=a_n(x-x_1)\cdots(x-x_n)=a_n\omega_n(x) \tag{27}$$

记$p_m(x)=x^m$，那么

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^m}{f'(x_k)} = a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{p_m(x_k)}{\omega_n'(x_k)} = a_n^{-1}p_m[x_1,\cdots,x_n] = a_n^{-1}\frac{p_m^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!} = \begin{cases} 0, & 0\le m\le n-2 \\ a_n^{-1}, & m=n-1 \end{cases} \tag{28}$$

第三周

第一题

求次数不大于3的多项式$P(x)$，使得满足条件

$$P(x_0)=f(x_0),\quad P'(x_0)=f'(x_0),\quad P''(x_0)=f''(x_0),\quad P(x_1)=f(x_1) \tag{29}$$

解：令

$$P(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+A(x-x_0)^3 \tag{30}$$

由$P(x_1)=f(x_1)$可知

$$f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x_1-x_0)^2+A(x_1-x_0)^3=f(x_1) \tag{31}$$

因此

$$A=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_1-x_0)^3}-\frac{f'(x_0)}{(x_1-x_0)^2}-\frac{f''(x_0)}{x_1-x_0} \tag{32}$$

于是

$$\begin{aligned}P(x)=&f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 &(33)\\ &+\left(\frac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_1-x_0)^3}-\frac{f'(x_0)}{(x_1-x_0)^2}-\frac{f''(x_0)}{x_1-x_0}\right)(x-x_0)^3 &(34)\end{aligned}$$

第二题

求次数不高于4次的多项式$P(x)$，使得满足条件

$$P(0)=P'(0)=0,\quad P(1)=P'(1)=1,\quad P(2)=1 \tag{35}$$

解：记$P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，那么可得如下线性方程

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\1&1&1&1&1\\4&3&2&1&0\\16&8&4&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{pmatrix}\implies\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\-\frac{3}{2}\\\frac{9}{4}\\0\\0\end{pmatrix} \tag{36}$$

因此

$$P(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2 \tag{37}$$

第三题

设$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，在$-5\le x\le 5$上取$n=10$，按等距节点求分段线性插值函数$I_h(x)$，计算各节点中点处的$I_h(x)$与$f(x)$的值，并估计误差。

解：令$x_k=k-5$，其中$k=0,\cdots,10$，那么对于节点x_k和x_{k+1}进行分段线性插值

$$I_k(x)=\left(\frac{1}{(k-4)^2+1}-\frac{1}{(k-5)^2+1}\right)x+\frac{3k^2-27k+62}{(k^2-10k+26)(k^2-8k+17)} \tag{38}$$

于是

$$I_k(\frac{x_k+x_{k+1}}{2})=\frac{2k^2-18k+43}{2\left(k^2-10k+26\right)\left(k^2-8k+17\right)} \tag{39}$$

$$f(\frac{x_k+x_{k+1}}{2})=\frac{1}{k^2-9k+\frac{85}{4}} \tag{40}$$

误差为

$$|R(\frac{x_k+x_{k+1}}{2})|=\left|\frac{-6k^2+54k-119}{2\left(k^2-10k+26\right)\left(k^2-8k+17\right)\left(4k^2-36k+85\right)}\right|\leq\frac{1}{5} \tag{41}$$

当且仅当$k=4.5$时等号成立。事实上

$$|R_1(x)|\leq\frac{1}{8}M_2h^2\leq\frac{1}{4} \tag{42}$$

第四周

第一题

已知$f(x) = x^7 + x^4 + 3x + 1$，求$f[2^0, \cdots, 2^7]$和$f[2^0, \cdots, 2^8]$。

解：注意到

$$f[x_0, \cdots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \tag{43}$$

于是

$$f[2^0, \cdots, 2^7] = 1, \qquad f[2^0, \cdots, 2^8] = 0 \tag{44}$$

第五周

第一题

对于权$\rho=1+x^2$，求区间$[-1,1]$上的首1正交多项式φ_n，其中$n=0,1,2,3$。

解：递推公式为

$$\varphi_0 = 1 \tag{45}$$

$$\varphi_1 = \left(x-\frac{(x\varphi_0,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\right)\varphi_0 \tag{46}$$

$$\varphi_n = \left(x-\frac{(x\varphi_{n-1},\varphi_{n-1})}{(\varphi_{n-1},\varphi_{n-1})}\right)\varphi_{n-1}-\frac{(\varphi_{n-1},\varphi_{n-1})}{(\varphi_{n-2},\varphi_{n-2})}\varphi_{n-2} \tag{47}$$

换言之

$$\varphi_0(x) = 1 \tag{48}$$

$$\varphi_n(x) = \left(x-\frac{\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+x^2)x\varphi_0^2(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+x^2)\varphi_0^2(x)\mathrm{d}x}\right)\varphi_0 \tag{49}$$

$$\varphi_n(x) = \left(x-\frac{\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+x^2)x\varphi_{n-1}^2(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+x^2)\varphi_{n-1}^2(x)\mathrm{d}x}\right)\varphi_{n-1}-\frac{\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+x^2)\varphi_{n-1}^2(x)\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{-1}^{1}(1+x^2)x\varphi_{n-2}^2(x)\mathrm{d}x}\varphi_{n-2} \tag{50}$$

于是

$$\varphi_0(x)=1,\qquad \varphi_1(x)=x,\qquad \varphi_2(x)=x^2-\frac{2}{5},\qquad \varphi_3(x)=x^3-\frac{9x}{14} \tag{51}$$

第二题

对于Chebyshev多项式

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x) \tag{52}$$

令

$$S_n(x)=T_n(2x-1),\qquad 0\le x\le 1 \tag{53}$$

证明：$\{S_n(x)\}$是$[0,1]$上权$\rho(x)=1/\sqrt{x-x^2}$的正交多项式，并求$S_0(x),S_1(x),S_2(x),S_3(x)$

。

证明：由于$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$，那么

$$S_n(x)=\cos(n\arccos(2x-1)),\qquad 0\le x\le 1 \tag{54}$$

于是

$$
\begin{aligned}
(S_m(x), S_n(x)) &= \int_0^1 \rho(x) S_m(x) S_n(x) \mathrm{d}x && (55)\\
&= \int_0^1 \frac{\cos(m \arccos(2x-1))\cos(n \arccos(2x-1))}{\sqrt{x-x^2}} \mathrm{d}x && (56)\\
\text{令 } t &= \arccos(2x-1), \quad x = \frac{1+\cos t}{2} && (57)\\
&= \int_0^\pi \cos(mt)\cos(nt) \mathrm{d}t && (58)\\
&= \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi/2, & m = n \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases} && (59)
\end{aligned}
$$

于是$\{S_n(x)\}$是$[0,1]$上权$\rho(x) = 1/\sqrt{x-x^2}$的正交多项式，且

$$
S_0(x) = 1, \qquad S_1(x) = 2x-1, \qquad S_2(x) = 8x^2-8x+1, \qquad S_3(x) = 32x^3-48x^2+18x-1 \quad (60)
$$

第三题

用T_3的零点作为插值点，求$f(x) = \mathrm{e}^x$在区间$[-1,1]$上的二次插值多项式，并估计其最大误差界。

解：由于

$$
T_n(x) = \cos(n \arccos x) \tag{61}
$$

那么

$$
T_3(x) = \cos(3 \arccos x) = x(4x^2-3) \tag{62}
$$

T_3的零点为

$$
0, \qquad -\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{63}
$$

那么其二次插值多项式为

$$
P(x) = \frac{2\left(\mathrm{e}^{\sqrt{3}/2} - \mathrm{e}^{-\sqrt{3}/2}\right)^2}{3} x^2 + \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{3}/2} - \mathrm{e}^{-\sqrt{3}/2}}{\sqrt{3}} x + 1 \tag{64}
$$

其最大误差界为

$$
|R_2(x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{6} |x(x-\sqrt{3}/2)(x+\sqrt{3}/2)| \leq \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{3}/2}}{24} \tag{65}
$$

当且仅当$\xi = \sqrt{3}/2$且$x = -1/2$时等号成立！

第四题

求函数$f(x) = 1/x$在区间$[1,3]$上对于$\mathrm{span}\{1,x\}$的最佳平方逼近多项式。

解：记$S(x) = a_0 + a_1 x$为函数$f(x) = 1/x$在区间$[1,3]$上对于$\mathrm{span}\{1,x\}$的最佳平方逼近多项式，那么

$$
\begin{pmatrix} (1,1) & (1,x) \\ (x,1) & (x,x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f(x),1) \\ (f(x),x) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & \frac{26}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln 3 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{66}
$$

于是

$$
a_0 = \frac{13}{2}\ln 3 - 6, \qquad a_1 = 3 - 3\ln 3 \tag{67}
$$

因此

$$S(x) = \left(\frac{13}{2}\ln 3 - 6\right) + (3 - 3\ln 3)x \tag{68}$$

平方偏差为

$$\|\delta\|_2^2 = \|f(x) - S(x)\|_2^2 = \|f\|_2^2 - a_0(f(x), 1) - a_1(f(x), x) = 12\ln 3 - \frac{13}{2}\ln^2 3 - \frac{16}{3} \tag{69}$$

第五题

求函数$f(x) = \ln x$在区间$[1, 2]$上对于$\text{span}\{1, x\}$的最佳平方逼近多项式。

解：记$S(x) = a_0 + a_1 x$为函数$f(x) = \ln x$在区间$[1, 2]$上对于$\text{span}\{1, x\}$的最佳平方逼近多项式，那么

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (1,x) \\ (x,1) & (x,x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f(x),1) \\ (f(x),x) \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\ln 2 - 1 \\ 2\ln 2 - \frac{3}{4} \end{pmatrix} \tag{70}$$

于是

$$a_0 = 20\ln 2 - \frac{29}{2}, \qquad a_1 = 9 - 12\ln 2 \tag{71}$$

因此

$$S(x) = \left(20\ln 2 - \frac{29}{2}\right) + (9 - 12\ln 2)x \tag{72}$$

第六周

第一题

已知实验数据如下，用最小二乘法求形如$y=a+bx^2$的经验公式，并计算均方误差。

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

解：由于

$$(1，1)=5, \qquad (1,x^2)=(x^2,1)=5327, \qquad (x^2,x^2)=7277699 \tag{73}$$
$$(f(x),1)=271.4, \qquad (f(x),x^2)=369321.5 \tag{74}$$

于是

$$\begin{pmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 271.4 \\ 369321.5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.97 \\ 0.05 \end{pmatrix} \tag{75}$$

因此

$$y=0.97+0.05x^2 \tag{76}$$

均方误差为

$$\|\delta\|^2=\|f-y\|^2=0.015 \tag{77}$$

第二题

已知实验数据如下，用最小二乘法拟合$y=f(x)$，并计算均方误差。

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
y	0	1.27	2.16	2.86	3.44	3.87	4.15	4.37	4.51	4.58	4.62	4.64

解：三次函数拟合

$$f(x)=a+bx+cx^2+dx^3 \tag{78}$$

那么

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (1,x) & (1,x^2) & (1,x^3) \\ (x,1) & (x,x) & (x,x^2) & (x,x^3) \\ (x^2,1) & (x^2,x) & (x^2,x^2) & (x^2,x^3) \\ (x^3,1) & (x^3,x) & (x^3,x^2) & (x^3,x^3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1,f(x)) \\ (x,f(x)) \\ (x^2,f(x)) \\ (x^3,f(x)) \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.04421 \\ 0.25569 \\ -0.00491 \\ 0.00003 \end{pmatrix} \tag{79}$$

因此

$$f(x)=0.04421+0.25569x-0.00491x^2+0.00003x^3 \tag{80}$$

均方误差为

$$\|\delta\|^2=\|f-y\|^2=0.00871 \tag{81}$$

第三题

确定如下求积公式中的待定系数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度。

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h) \tag{82}$$

解：由如下方程

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-2h}^{2h} \mathrm{d}x = A_{-1} + A_0 + A_1 \\ \displaystyle\int_{-2h}^{2h} x\mathrm{d}x = A_{-1}(-h) + A_1 h \\ \displaystyle\int_{-2h}^{2h} x^2\mathrm{d}x = A_{-1}h^2 + A_1 h^2 \end{cases} \iff \begin{cases} A_{-1} + A_0 + A_1 = 4h \\ A_{-1}(-h) + A_1 h = 0 \\ A_{-1}h^2 + A_1 h^2 = \frac{16}{3}h^3 \end{cases} \tag{83}$$

解得

$$A_{-1} = \frac{8}{3}h, \qquad A_0 = -\frac{4}{3}h, \qquad A_1 = \frac{8}{3}h \tag{84}$$

此时

$$\int_{-2h}^{2h} x^3\mathrm{d}x = A_{-1}(-h^3) + A_1 h^3 = 0 \tag{85}$$

$$\int_{-2h}^{2h} x^4\mathrm{d}x = \frac{64}{5}h^5, \qquad A_{-1}h^4 + A_1 h^4 = \frac{16}{3}h^5 \tag{86}$$

因此该求积公式具有3次代数精度。

第四题

确定如下求积公式中的待定系数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度。

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}f(-1) + \frac{2}{3}f(x_1) + f(x_2) \tag{87}$$

解：由如下方程

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(-1) + \frac{2}{3}x_1 + x_2 \\ \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_1^2 + x_2^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 = 2 \\ \frac{1}{3}(-1) + \frac{2}{3}x_1 + x_2 = 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_1^2 + x_2^2 = \frac{2}{3} \end{cases} \tag{88}$$

解得

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{6}}{5}, \quad x_2 = \frac{3+2\sqrt{6}}{15} \qquad \text{或} \qquad x_1 = \frac{1+\sqrt{6}}{5}, \quad x_2 = \frac{3-2\sqrt{6}}{15} \tag{89}$$

而

$$5x_1^2 - 2x_1 - 1 = 0, \qquad 15x_2^2 - 6x_2 - 1 = 0, \qquad 2x_1 + 3x_2 = 1 \tag{90}$$

因此

$$-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_1^3 + x_2^3 = \frac{18x_1 + 17x_2 - 19}{75} \neq 0 = \int_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x \tag{91}$$

于是该求积公式具有2次代数精度。

第八周

第一题

证明：Cotest公式具有5次代数精度。

证明：Cotest公式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{90}\left(7f\left(a\right)+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+7f\left(b\right)\right) \tag{92}$$

由于对于任意$0\le n\le 5$，成立

$$\int_a^b x^n\mathrm{d}x = \frac{b-a}{90}\left(7(f\left(a\right))^n+32\left(f\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right)^n+12\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)^n+32\left(f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)^n+7(f(b))^n\right) = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \tag{93}$$

但是

$$\int_a^b x^6\mathrm{d}x = \frac{b^7-a^7}{7} \tag{94}$$

$$\frac{b-a}{90}\left(7f(a)^6+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)^6+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)^6+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)^6+7f(b)^6\right) = \frac{b^7-a^7}{7}+\frac{(b-a)^7}{2688} \tag{95}$$

因此Cotest公式具有5次代数精度。

第二题

使用Simpson公式计算积分$\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$，并估计误差。

解：记$f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，那么由Simpson公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right) \tag{96}$$

计算得

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \approx \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}}+\frac{4}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right) \approx 0.632334 \tag{97}$$

误差为

$$|R[f]| = \frac{1}{2880}\mathrm{e}^{-\xi} \le \frac{1}{2880} \approx 3.47\times 10^{-4} \tag{98}$$

第三题

若用复合梯形公式计算积分$I=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$，问区间$[0,1]$应分多少等份才能使截断误差不超过$1/2\times 10^{-5}$？若改用复合Simpson公式，要达到同样精度区间$[0,1]$应分多少等份？

解：若用复合梯形公式计算积分$I=\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$，那么截断误差为

$$\frac{1}{12n^2}\mathrm{e}^{\xi} \le \frac{\mathrm{e}}{12n^2} \le \frac{1}{2}\times 10^{-5} \tag{99}$$

可得$n\ge 212.85$，因此区间$[0,1]$应分213等份才能使截断误差不超过$1/2\times 10^{-5}$。

若用复合Simpson公式计算积分$I=\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$，那么截断误差为

$$\frac{1}{2880n^4}\mathrm{e}^{\xi} \leq \frac{\mathrm{e}}{2880n^4} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-5} \tag{100}$$

可得$n \geq 3.71$，因此区间$[0,1]$应分4等份才能使截断误差不超过$1/2 \times 10^{-5}$。

第九周

第一题

分别使用梯形公式和Simpson公式计算如下积分：

$$\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x, \qquad n=8 \tag{101}$$

解：记$f(x)=x/(4+x^2)$，那么由梯形公式

$$T_n=\frac{b-a}{2n}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right) \tag{102}$$

可得$T_8\approx 0.11140$；由Simpson公式

$$S_n=\frac{b-a}{6n}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+4\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)+f(b)\right) \tag{103}$$

可得$S_8\approx 0.11157181$。

第二题

分别使用梯形公式和Simpson公式计算如下积分：

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-\sin^2 x}\mathrm{d}x, \qquad n=6 \tag{104}$$

解：记$f(x)=\sqrt{4-\sin^2 x}$，那么由梯形公式

$$T_n=\frac{b-a}{2n}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right) \tag{105}$$

可得$T_6\approx 1.03562$；由Simpson公式

$$S_n=\frac{b-a}{6n}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+4\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)+f(b)\right) \tag{106}$$

可得$S_6\approx 1.03576389$。

第三题

构造Gauss型求积公式

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}f(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0)+A_1 f(x_1) \tag{107}$$

解：求关于权函数$\rho(x)=1/\sqrt{x}$的2次正交多项式，由递推关系

$$\varphi_0=1 \tag{108}$$

$$\varphi_1=\left(x-\frac{(x\varphi_0,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}\right)\varphi_0 \tag{109}$$

$$\varphi_n=\left(x-\frac{(x\varphi_{n-1},\varphi_{n-1})}{(\varphi_{n-1},\varphi_{n-1})}\right)\varphi_{n-1}-\frac{(\varphi_{n-1},\varphi_{n-1})}{(\varphi_{n-2},\varphi_{n-2})}\varphi_{n-2} \tag{110}$$

其中

$$(f,g)=\int_0^1 \rho f g \tag{111}$$

容易知道

$$\varphi_0(x)=1,\qquad \varphi_1(x)=x-\frac{1}{3},\qquad \varphi_2(x)=x^2-\frac{6}{7}x+\frac{3}{35} \tag{112}$$

那么x_0,x_1为多项式$\varphi_2(x)$的零点，不妨

$$x_0=\frac{15-2\sqrt{30}}{35},\qquad x_1=\frac{15+2\sqrt{30}}{35} \tag{113}$$

那么

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=A_0+A_1 \iff A_0+A_1=2 \tag{114}$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=A_0x_0+A_1x_1 \iff x_0A_0+x_1A_1=\frac{2}{3} \tag{115}$$

解得

$$A_0=1+\frac{\sqrt{30}}{18},\qquad A_1=1-\frac{\sqrt{30}}{18} \tag{116}$$

因此

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}f(x)\mathrm{d}x\approx\left(1+\frac{\sqrt{30}}{18}\right)f\left(\frac{15-2\sqrt{30}}{35}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{30}}{18}\right)f\left(\frac{15+2\sqrt{30}}{35}\right) \tag{117}$$

第四题

用$n=2,3$的Gauss-Legendre公式计算积分

$$\int_1^3 \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x \tag{118}$$

解：令

$$f(x)=\mathrm{e}^{x+2}\sin(x+2) \tag{119}$$

那么

$$\int_1^3 \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \tag{120}$$

首先求Legendre多项式$L_n(x)$

$$L_1(x)=x,\quad L_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2},\quad L_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x,\quad L_4(x)=\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{8}{3} \tag{121}$$

当$n=2$时，记

$$\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)+A_2f(x_2) \tag{122}$$

$L_3(x)$的零点为

$$x_0=0,\qquad x_1=-\frac{\sqrt{15}}{5},\qquad x_2=\frac{\sqrt{15}}{5} \tag{123}$$

由

$$
\begin{cases}
\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = A_0 + A_1 + A_2 \\
\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = A_0x_0 + A_1x_1 + A_2x_2 \\
\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = A_0x_0^2 + A_1x_1^2 + A_2x_2^2
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
A_0 + A_1 + A_2 = 2 \\
A_0x_0 + A_1x_1 + A_2x_2 = 0 \\
A_0x_0^2 + A_1x_1^2 + A_2x_2^2 = \frac{2}{3}
\end{cases}
\tag{124}
$$

解得

$$
A_0 = \frac{8}{9}, \qquad A_1 = \frac{5}{9}, \qquad A_2 = \frac{5}{9} \tag{125}
$$

因此

$$
\int_{1}^{3} \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{5}{9} f(-\sqrt{15}/5) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{15}/5) \approx 10.948 \tag{126}
$$

当$n = 3$时，记

$$
\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) \tag{127}
$$

$L_4(x)$的零点为

$$
x_0 = -\sqrt{\frac{1}{35}\left(15 - 2\sqrt{30}\right)}, \qquad x_1 = \sqrt{\frac{1}{35}\left(15 - 2\sqrt{30}\right)} \tag{128}
$$

$$
x_2 = -\sqrt{\frac{1}{35}\left(15 + 2\sqrt{30}\right)}, \qquad x_3 = \sqrt{\frac{1}{35}\left(15 + 2\sqrt{30}\right)} \tag{129}
$$

由

$$
\begin{cases}
\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 \\
\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = A_0x_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 \\
\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = A_0x_0^2 + A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + A_3x_3^2 \\
\int_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x = A_0x_0^3 + A_1x_1^3 + A_2x_2^3 + A_3x_3^3
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 2 \\
A_0x_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0 \\
A_0x_0^2 + A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + A_3x_3^2 = \frac{2}{3} \\
A_0x_0^3 + A_1x_1^3 + A_2x_2^3 + A_3x_3^3 = 0
\end{cases}
\tag{130}
$$

解得

$$
A_0 = \frac{1}{36}\left(18 + \sqrt{30}\right), \qquad A_1 = \frac{1}{36}\left(18 + \sqrt{30}\right) \tag{131}
$$

$$
A_2 = \frac{1}{36}\left(18 - \sqrt{30}\right), \qquad A_3 = \frac{1}{36}\left(18 - \sqrt{30}\right) \tag{132}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
\int_{1}^{3} \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx & \frac{1}{36}\left(18 + \sqrt{30}\right) f\left(-\sqrt{\frac{1}{35}\left(15 - 2\sqrt{30}\right)}\right) && (133) \\
& + \frac{1}{36}\left(18 + \sqrt{30}\right) f\left(\sqrt{\frac{1}{35}\left(15 - 2\sqrt{30}\right)}\right) && (134) \\
& + \frac{1}{36}\left(18 - \sqrt{30}\right) f\left(-\sqrt{\frac{1}{35}\left(15 + 2\sqrt{30}\right)}\right) && (135) \\
& + \frac{1}{36}\left(18 - \sqrt{30}\right) f\left(\sqrt{\frac{1}{35}\left(15 + 2\sqrt{30}\right)}\right) && (136) \\
\approx & 10.950140 && (137)
\end{aligned}
$$

第十周

第一题

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln 3 = 1.09861228866811\cdots \tag{138}$$

第一问

使用Romberg方法计算积分$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x}$。

解：精确数值积分值如下

n	T_n	S_n	C_n	R_n
2^0	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{742}{675}$	$\frac{431686}{392931}$
2^1	$\frac{7}{6}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{342611}{311850}$	$\frac{694837621103}{632468286450}$
2^2	$\frac{67}{60}$	$\frac{9137}{8316}$	$\frac{66175037683}{60235074900}$	$\frac{17236032440552211 7934761}{1568891280274535832 61500}$
2^3	$\frac{30581}{27720}$	$\frac{1260484963}{1147334760}$	$\frac{26180652570471192967}{23830656645774069000}$	$\frac{2543916341749761587353177982278737317 4797}{2315572443489162052032021419067600522 3000}$

近似数值积分值为

n	T_n	S_n	C_n	R_n
2^0	1.33333	1.11111	1.0992592	1.09863054837
2^1	1.16667	1.10000	1.0986403	1.09861258816
2^2	1.11667	1.09873	1.0986130	1.09861229119
2^3	1.10321	1.09862	1.0986123	1.09861228868

第二问

使用三点Gauss-Legendre求积公式计算积分$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x}$。

解：注意到

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+2} \tag{139}$$

令$f(x) = 1/(x+2)$，三点Gauss-Legendre求积公式为

$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{5}{9} f(-\sqrt{15}/5) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{15}/5) \tag{140}$$

代入数据可得

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+2} \approx \frac{56}{51} \approx 1.0980 \tag{141}$$

第三问

使用五点Gauss-Legendre求积公式计算积分$\displaystyle\int_1^3\frac{\mathrm{d}x}{x}$。

解：注意到

$$\int_1^3\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x+2} \tag{142}$$

令$f(x)=1/(x+2)$，五点Gauss-Legendre求积公式为

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{128}{225}f(0)&+\frac{1}{900}\left(322+13\sqrt{70}\right)f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{7}\left(35-2\sqrt{70}\right)}\right) &(143)\\ &+\frac{1}{900}\left(322+13\sqrt{70}\right)f\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{7}\left(35-2\sqrt{70}\right)}\right) &(144)\\ &+\frac{1}{900}\left(322-13\sqrt{70}\right)f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{7}\left(35+2\sqrt{70}\right)}\right) &(145)\\ &+\frac{1}{900}\left(322-13\sqrt{70}\right)f\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{7}\left(35+2\sqrt{70}\right)}\right) &(146)\end{aligned}$$

代入数据可得

$$\int_1^3\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x+2}\approx\frac{12244}{11145}\approx 1.098609 \tag{147}$$

第四问

将区间$[1,3]$分为四等份，使用复合两点Gauss-Legendre求积公式计算积分$\displaystyle\int_1^3\frac{\mathrm{d}x}{x}$。

解：使用两点Gauss-Legendre求积公式计算积分

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x-\frac{a+b}{a-b}} \tag{148}$$

记$f(x)=1/(x-\frac{a+b}{a-b})$，两点Gauss-Legendre求积公式为

$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x\approx f(-1/\sqrt{3})+f(1/\sqrt{3}) \tag{149}$$

代入数据

$$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x+\frac{b+a}{b-a}}\approx-\frac{3(a-b)(a+b)}{a^2+4ab+b^2} \tag{150}$$

注意到

$$\int_1^3\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_{\frac{3}{2}}^2\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_2^{\frac{5}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_{\frac{5}{2}}^3\frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{151}$$

代入数据可得

$$\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x}\approx\frac{15}{37},\quad\int_{\frac{3}{2}}^2\frac{\mathrm{d}x}{x}\approx\frac{21}{73},\quad\int_2^{\frac{5}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x}\approx\frac{27}{121},\quad\int_{\frac{5}{2}}^3\frac{\mathrm{d}x}{x}\approx\frac{33}{181}, \tag{152}$$

因此

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\frac{5}{2}}^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} \approx \frac{64983552}{59154601} \approx 1.09854 \tag{153}$$

第五问

比较如上计算结果。

解：在使用Romberg方法计算数值积分时，越靠借右下角，数值精度越高。

Gauss-Legendre求积公式的数值精度如下

	精确值	积分值	误差
三点Gauss-Legendre求积公式	$\ln 3$	$\frac{56}{51}$	5.73×10^{-4}
五点Gauss-Legendre求积公式	$\ln 3$	$\frac{12244}{11145}$	3.04×10^{-6}
复合两点Gauss-Legendre求积公式	$\ln 3$	$\frac{64983552}{59154601}$	7.47×10^{-5}

因此五点Gauss-Legendre求积公式数值精度最高。

第二题

确定如下数值微分公式的截断误差表达式

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(4f(x_0+h) - 3f(x_0) - f(x_0+2h)) \tag{154}$$

解：由$f(x)$的Taylor展开

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)^3 \tag{155}$$

因此

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(\alpha)}{3!}h^3 \tag{156}$$

$$f(x_0+2h) = f(x_0) + 2f'(x_0)h + 4\frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + 8\frac{f^{(3)}(\beta)}{3!}h^3 \tag{157}$$

进而截断误差为

$$f'(x_0) - \frac{1}{2h}(4f(x_0+h) - 3f(x_0) - f(x_0+2h)) = \frac{1}{3}h^2(2f^{(3)}(\beta) - f^{(3)}(\alpha)) = \frac{1}{3}h^2 f^{(3)}(\xi) \tag{158}$$

第三题

对于对称正定矩阵$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，定义$\|x\|_A = \sqrt{(Ax,x)}$，证明$\|x\|_A$为向量范数。

- $\|x\|_A \geq 0$，当且仅当$x=0$时等号成立。
- $\|\lambda x\|_A = |\lambda|\|x\|_A$
- $\|x+y\|_A \leq \|x\|_A + \|y\|_A$

证明：由于A为正定矩阵，那么存在可逆矩阵Q，使得成立$A = Q^TQ$，因此

$$\|x\|_A = \sqrt{(Ax,x)} = \sqrt{x^TAx} = \sqrt{(Qx)^T(Qx)} = \|Qx\|_2 \tag{159}$$

对于正定性，显然$\|x\| \geq 0$，且

$$\|x\|_A = 0 \iff \|Qx\|_2 = 0 \iff Qx = 0 \iff x = 0 \tag{160}$$

对于绝对齐性，注意到

$$\|\lambda x\|_A = \|\lambda Qx\|_2 = |\lambda|\|Qx\|_2 = |\lambda|\|x\|_A \tag{161}$$

对于三角不等式，注意到

$$\|x + y\|_A = \|Q(x + y)\|_2 = \|Qx + Qy\|_2 \leq \|Qx\|_2 + \|Qy\|_2 = \|x\|_A + \|y\|_A \tag{162}$$

第十一周

第一题

对于$\lambda \neq 0$，设

$$A = \begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{163}$$

证明：当$|\lambda| = 2/3$时，$\text{cond}(A)_\infty$取到最小值。

证明：由于

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & -1 \\ -\frac{1}{\lambda} & 2 \end{pmatrix} \tag{164}$$

因此

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq 2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{3|\lambda|, 2\} = \begin{cases} 3|\lambda|, & |\lambda| \geq 2/3 \\ 2, & |\lambda| < 2/3 \end{cases} \tag{165}$$

$$\|A^{-1}|_\infty = \max_{1\leq i\leq 2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| = \max\left\{1 + \frac{1}{|\lambda|}, 2 + \frac{1}{|\lambda|}\right\} = 2 + \frac{1}{|\lambda|} \tag{166}$$

因此

$$\text{cond}(A)_\infty = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty = \begin{cases} 6|\lambda| + 3, & |\lambda| \geq 2/3 \\ 4 + \dfrac{2}{|\lambda|}, & |\lambda| < 2/3 \end{cases} \tag{167}$$

因此当$|\lambda| = 2/3$时，$\text{cond}(A)_\infty$取到最小值7。

第二题

设

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{pmatrix} \tag{168}$$

计算A的条件数$\text{cond}(A)_2$与$\text{cond}(A)_\infty$。

解：由于

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -98 & 99 \\ 99 & -100 \end{pmatrix} \tag{169}$$

且A^TA与$(A^{-1})^TA^{-1}$的特征值均为

$$19603 + 2574\sqrt{58}, \qquad \frac{1}{19603 + 2574\sqrt{58}} \tag{170}$$

那么

$$\|A\|_2 = \sqrt{19603 + 2574\sqrt{58}} \approx 198 \tag{171}$$
$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{19603 + 2574\sqrt{58}} \approx 198 \tag{172}$$
$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le 2}\sum_{j=1}^{2}|a_{ij}| = \max\{199, 197\} = 199 \tag{173}$$
$$\|A^{-1}\|_\infty = \max_{1\le i\le 2}\sum_{j=1}^{2}|a_{ij}| = \max\{197, 199\} = 199 \tag{174}$$

因此

$$\operatorname{cond}(A)_2 = \|A^{-1}\|_2\|A\|_2 = 19603 + 2574\sqrt{58} \approx 39206 \tag{175}$$
$$\operatorname{cond}(A)_\infty = \|A^{-1}\|_\infty\|A\|_\infty = 39601 \tag{176}$$

第三题

设

$$A = \begin{pmatrix} 10 & a & 0 \\ b & 10 & b \\ 0 & a & 5 \end{pmatrix} \tag{177}$$

$\det A \neq 0$。求线性方程$Ax = b$的Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代收敛的充分必要条件。

解：由题意

$$\det A = 500 - 15ab \neq 0 \iff ab \neq \frac{100}{3} \tag{178}$$

Jacobi迭代矩阵为

$$B_J = I - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{10} & 0 \\ -\frac{b}{10} & 0 & -\frac{b}{10} \\ 0 & -\frac{a}{5} & 0 \end{pmatrix} \tag{179}$$

而矩阵B_J的特征值为

$$0, \qquad \frac{1}{10}\sqrt{3ab}, \qquad -\frac{1}{10}\sqrt{3ab} \tag{180}$$

因此

$$\rho(B_J) = \frac{\sqrt{3|ab|}}{10} \tag{181}$$

而Jacobi迭代收敛 $\iff$

$$\rho(B_J) < 1 \iff \frac{\sqrt{3|ab|}}{10} < 1 \iff |ab| < \frac{100}{3} \tag{182}$$

Gauss-Seidel迭代矩阵为

$$B_G = I - (D-L)^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{10} & 0 \\ 0 & \frac{ab}{100} & -\frac{b}{10} \\ 0 & -\frac{a^2b}{500} & \frac{ab}{50} \end{pmatrix} \tag{183}$$

而矩阵B_G的特征值为

$$0, \qquad 0, \qquad \frac{3ab}{100} \tag{184}$$

因此

$$\rho(B_G) = \frac{3|ab|}{100} \tag{185}$$

而Gauss-Seidel迭代收敛 $\Longleftrightarrow$

$$\rho(B_G) < 1 \iff \frac{3|ab|}{100} < 1 \iff |ab| < \frac{100}{3} \tag{186}$$

第三题

对于线性方程组

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{187}$$

若使用迭代法

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \alpha \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \tag{188}$$

求迭代法收敛的充分必要条件，并求出收敛最快的α。

解：一阶线性定常迭代为

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \left(\alpha \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{189}$$

迭代矩阵为

$$B = \alpha \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha + 1 & 2\alpha \\ \alpha & 2\alpha + 1 \end{pmatrix} \tag{190}$$

而B的特征值为

$$a + 1, \qquad 4a + 1 \tag{191}$$

因此

$$\rho(B) = \max\{|\alpha + 1|, |4\alpha + 1|\} = \begin{cases} |\alpha + 1|, & -2/5 \le a \le 0 \\ |4\alpha + 1|, & a < -2/5 \text{或} a > 0 \end{cases} \tag{192}$$

而迭代收敛 $\Longleftrightarrow$

$$\rho(B) < 1 \iff \max\{|\alpha + 1|, |4\alpha + 1|\} < 1 \iff -1/2 < \alpha < 0 \tag{193}$$

而

$$\min \rho(B) = \rho(-2/5) = 3/5 \tag{194}$$

因此当$\alpha = -2/5$时，收敛速度最快。

第十二周

第一题

证明：对于

$$A=\begin{pmatrix}3&0&-2\\0&2&1\\-2&1&2\end{pmatrix} \tag{195}$$

使用Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代解线性方程$Ax=b$均收敛，试比较哪种方法收敛快。

证明：定义

$$D=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\qquad L=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\2&-1&0\end{pmatrix},\qquad U=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{196}$$

注意到A与$2D-A$的特征多项式均为

$$1-11x+7x^2-x^3 \tag{197}$$

因此A与$2D-A$的特征值均为正数，进而A与$2D-A$均为正定矩阵，从而使用Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代解线性方程$Ax=b$均收敛。

为比较收敛速度，对于Jacobi迭代

$$B_J=I-D^{-1}A,\qquad \rho(B_J)=\frac{\sqrt{33}}{6} \tag{198}$$

对于Gauss-Seidel迭代

$$B_G=I-(D-L)^{-1}A,\qquad \rho(B_G)=\frac{11}{12} \tag{199}$$

而$\rho(B_J)>\rho(B_G)$，因此Gauss-Seidel迭代更快。

第二题

证明：对于线性方程组$Ax=b$，其中A为对称正定矩阵，迭代公式

$$x^{(n+1)}=x^{(n)}+w(b-Ax^{(n)}) \tag{200}$$

在$0<w<2/\lambda_{\max}$时收敛，其中$\lambda_{\max}$为矩阵A的最大特征值。

证明：迭代公式为

$$x^{(n+1)}=(I-wA)x^{(n)}+wb \tag{201}$$

此为一阶定常迭代，因此迭代收敛的充分必要条件为

$$\rho(I-wA)<1 \tag{202}$$

考察矩阵$I-wA$的特征值，注意到

$$(I-wA)x=(1-w\lambda)x \iff Ax=\lambda x \tag{203}$$

因此记矩阵A的最大与最小特征值为$\lambda_{\max}$与$\lambda_{\min}$，那么

$$\rho(I-wA)=\max\{|1-w\lambda_{\max}|,|1-w\lambda_{\min}|\}<1 \iff 0<w<\frac{2}{\lambda_{\max}} \tag{204}$$

第三题

求解方程

$$x^3 - x^2 - 1 = 0 \tag{205}$$

在$x_0 = 1.5$附近的根。求分别使用二分法和如下迭代公式

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n^2}, \qquad x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + x_n^2}, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{x_n - 1}} \tag{206}$$

是否收敛。

解：如果使用二分法，由于

$$1.5^3 - 1.5^2 - 1 = 0.125 > 0 > -0.216 = 1.4^3 - 1.4^2 - 1 \tag{207}$$

那么方程在区间$(1.4, 1.5)$内存在根x^*，迭代速度为

$$|x_n - x^*| \leq \frac{0.1}{2^n} \tag{208}$$

如果使用迭代公式

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n^2} \tag{209}$$

记$f(x) = 1 + 1/x^2$，由于

$$f(1.3) = \frac{269}{169} \in (1.3, 1.6), \qquad f(1.6) = \frac{89}{64} \in (1.3, 1.6) \tag{210}$$

因此存在$x^* \in (1.3, 1.6)$，使得成立$f(x^*) = x^*$。而对于$1.3 \leq x \leq 1.6$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} \in \left[-\frac{1000}{2197}, -\frac{125}{256}\right] \implies |f'(x)| \leq 0.92 \tag{211}$$

进而不动点迭代收敛，收敛速度为

$$|x_n - x^*| < \frac{0.92^n}{1 - 0.92}|x_1 - x_0| \tag{212}$$

如果使用迭代公式

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{1 + x_n^2} \tag{213}$$

记$f(x) = \sqrt[3]{1 + x^2}$，注意到

$$f(1.4) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{370} \in (1.4, 1.5), \qquad f(1.5) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{26} \in (1.4, 1.5) \tag{214}$$

因此存在$x^* \in (1.4, 1.5)$，使得成立$f(x^*) = x^*$。而对于$1.4 \leq x \leq 1.5$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x\frac{\sqrt[3]{1 + x^2}}{1 + x^2} \in \left[\frac{7}{111}\sqrt[3]{370}, \frac{2}{13}\sqrt[3]{26}\right] \implies |f'(x)| \leq 0.46 \tag{215}$$

进而不动点迭代收敛，收敛速度为

$$|x_n - x^*| < \frac{0.46^n}{1 - 0.46}|x_1 - x_0| \tag{216}$$

如果使用迭代公式

$$x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{x_n - 1}} \tag{217}$$

记$f(x) = 1/\sqrt{x-1}$，那么

$$f'(x) = -\frac{1}{2(x-1)^{3/2}} \tag{218}$$

由于当$1.4 < x < 1.5$时，成立

$$|f'(x)| > |f'(1.5)| = \sqrt{2} > 1 \tag{219}$$

因此不动点迭代不收敛。

第十三周

第一题

应用Newton法于方程$f(x)=x^n-a=0$和方程$f(x)=1-a/x^n=0$，分别求出$\sqrt[n]{a}$的迭代公式，并求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-x_{n+1}}{(\sqrt[n]{a}-x_n)^2} \tag{220}$$

解：对于

$$f(x)=x^n-a,\qquad f'(x)=nx^{n-1},\qquad f''(x)=n(n-1)x^{n-2} \tag{221}$$

迭代公式为

$$x_{k+1}=(1-\frac{1}{n})x_k+\frac{a}{nx_k^{n-1}} \tag{222}$$

由于

$$f(\sqrt[n]{a})=0,\qquad f'(\sqrt[n]{a})=na^{1-1/n} \tag{223}$$

那么该迭代公式在$\sqrt[n]{a}$附近平方收敛，且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2}=-\frac{f''(\sqrt[n]{a})}{2f'(\sqrt[n]{a})}=\frac{1-n}{2\sqrt[n]{a}} \tag{224}$$

对于

$$f(x)=1-\frac{a}{x^n},\qquad f'(x)=\frac{an}{x^{n+1}},\qquad f''(x)=-\frac{an(n+1)}{x^{n+2}} \tag{225}$$

迭代公式为

$$x_{k+1}=(1+\frac{1}{n})x_k+\frac{x_k^{n+1}}{an} \tag{226}$$

由于

$$f(\sqrt[n]{a})=0,\qquad f'(\sqrt[n]{a})=\frac{n}{\sqrt[n]{a}} \tag{227}$$

那么该迭代公式在$\sqrt[n]{a}$附近平方收敛，且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[n]{a}-x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a}-x_k)^2}=-\frac{f''(\sqrt[n]{a})}{2f'(\sqrt[n]{a})}=\frac{n+1}{2\sqrt[n]{a}} \tag{228}$$

第二题

证明迭代公式

$$x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a} \tag{229}$$

是计算$\sqrt{a}$的三阶方法。如果初值x_0充分靠近根$\sqrt{a}$，求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a}-x_{n+1}}{(\sqrt{a}-x_n)^3} \tag{230}$$

证明：令

$$f(x)=\frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a} \tag{231}$$

那么$f(\sqrt{a})=\sqrt{a}$，且

$$f'(x)=\frac{3(a-x^2)^2}{(a+3x^2)^2},\qquad f'(\sqrt{a})=0 \tag{232}$$

那么方程$x=f(x)$在$\sqrt{a}$附近存在且存在唯一解$x^*=\sqrt{a}$。

（法一）由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-\sqrt{a}}{(x_n-\sqrt{a})^3}=\lim_{x\to\sqrt{a}}\frac{f(x)-\sqrt{a}}{(x-\sqrt{a})^3}=\lim_{x\to\sqrt{a}}\frac{\frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}-\sqrt{a}}{(x-\sqrt{a})^3}=\lim_{x\to\sqrt{a}}\frac{1}{a+3x^2}=\frac{1}{4a} \tag{233}$$

因此迭代公式$x_{n+1}=f(x_n)$是计算$\sqrt{a}$的三阶方法。

（法二）由于

$$f''(x)=\frac{48ax(x^2-a)}{(a+3x^2)^3},\qquad f''(\sqrt{a})=0 \tag{234}$$

$$f'''(x)=-\frac{48a(a^2-18ax^2+9x^4)}{(a+3x^2)^4},\qquad f'''(\sqrt{a})=\frac{3}{2a} \tag{235}$$

因此迭代公式$x_{n+1}=f(x_n)$是计算$\sqrt{a}$的三阶方法，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-\sqrt{a}}{(x_n-\sqrt{a})^3}=\frac{f'''(\sqrt{a})}{3!}=\frac{1}{4a} \tag{236}$$

第三题

用如下方法求$f(x)=x^3-3x-1$的在$x_0=2$附近的零点，零点的准确值为

$$x^*=1.87938524\cdots \tag{237}$$

要求计算结果四位有效数字准确。

第一问

Newton法，$x_0=2$

解：Newton迭代为

$$x_{n+1}=\varphi(x_n),\qquad \varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \tag{238}$$

代入可得

$$x_{n+1}=\frac{2x_n^3+1}{3(x_n^2-1)} \tag{239}$$

代入数据可得

$$x_0=2,\quad x_1=\frac{17}{9}\approx 1.88889,\quad x_2=\frac{10555}{5616}\approx 1.87945,\quad x_3=\frac{1264474496323}{672812825256}\approx 1.87939 \tag{240}$$

第二问

弦截法，$x_0 = 2, x_1 = 1.9$

解：弦截法迭代为

$$x_{n+2} = \varphi(x_{n+1}, x_n), \qquad \varphi(x, y) = x - \frac{x-y}{f(x)-f(y)} f(x) \tag{241}$$

代入可得

$$x_{n+2} = x_{n+1} - \frac{f(x_{n+1})}{x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2} \tag{242}$$

代入数据可得

$$x_0 = 2, \quad x_1 = \frac{19}{10} = 1.9, \quad x_2 = \frac{1582}{841} \approx 1.88109, \quad x_3 = \frac{342180814}{182068107} \approx 1.87941 \tag{243}$$

第三问

抛物线法，$x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 2$

解：经过x_0, x_1, x_2三点的抛物线为

$$p_2(x) = f(x_2) + f[x_1, x_2](x - x_2) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_1)(x - x_2) \tag{244}$$

代入数据

$$f[x_1, x_2] = 16, \quad f[x_0, x_1, x_2] = 6 \tag{245}$$

而

$$\omega_3 = f[x_1, x_2] + f[x_0, x_1, x_2](x_2 - x_1) = 10 \tag{246}$$

因此

$$x_3 = x_2 - \frac{2f(x_2)}{\omega_3 + \operatorname{sgn}(\omega_3)\sqrt{\omega_3^2 - 4f(x_2)f[x_0, x_1, x_2]}} = \frac{\sqrt{19}+7}{6} \approx 1.89314 \tag{247}$$

经过x_1, x_2, x_3三点的抛物线为

$$p_2(x) = f(x_3) + f[x_2, x_3](x - x_3) + f[x_1, x_2, x_3](x - x_2)(x - x_3) \tag{248}$$

代入数据

$$f[x_2, x_3] = \frac{1}{18}\left(94 + 13\sqrt{19}\right), \quad f[x_1, x_2, x_3] = \frac{1}{6}\left(37 + \sqrt{19}\right) \tag{249}$$

而

$$\omega_4 = f[x_2, x_3] + f[x_1, x_2, x_3](x_3 - x_2) = \frac{1}{18}\left(11 + 29\sqrt{19}\right) \tag{250}$$

因此

$$x_4 = x_3 - \frac{2f(x_3)}{\omega_4 + \operatorname{sgn}(\omega_4)\sqrt{\omega_4^2 - 4f(x_4)f[x_1, x_2, x_3]}} \tag{251}$$

$$= \frac{2678 - 364\sqrt{19} + 7\sqrt{8349236 - 1913374\sqrt{19}} + \sqrt{38\left(4174618 - 956687\sqrt{19}\right)}}{-8002 + 1970\sqrt{19} + 6\sqrt{8349236 - 1913374\sqrt{19}}} \tag{252}$$

$$\approx 1.87914 \tag{253}$$

第四题

对于$f(x) = 0$的Newton公式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{254}$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{(x_{n+1} - x_n)^2} = -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \tag{255}$$

其中$f(x^*) = 0$。

证明：由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \tag{256}$$

那么

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{(x_{n+1} - x_n)^2} = -\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{n+1})/f'(x_{n+1})}{(f(x_n)/f'(x_n))^2} \tag{257}$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{n+1})(f'(x_n))^2}{f'(x_{n+1})(f(x_n))^2} \tag{258}$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \frac{(f(x_{n+1}) - f(x^*))(f'(x_n))^2}{f'(x_{n+1})(f(x_n) - f(x^*))^2} \tag{259}$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_{n+1})(x_{n+1} - x^*)(f'(x_n))^2}{f'(x_{n+1})(f'(\xi_n))^2(x_n - x^*)^2} \tag{260}$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_{n+1})(f'(x_n))^2}{f'(x_{n+1})(f'(\xi_n))^2} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} \tag{261}$$

$$= -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \tag{262}$$

第十四周

第一题

非线性方程组

$$\begin{cases}3x^2-y^2=0\\3xy^2-x^3-1=0\end{cases}\tag{263}$$

在$(0.4,0.7)$附近存在解，构造不动点迭代，使得其收敛至此解，并计算精确到10^{-5}，其中向量范数为$\|\cdot\|_\infty$。

解：记

$$\Phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}}y\\\sqrt{\dfrac{1+x^3}{3x}}\end{pmatrix}\tag{264}$$

那么原方程组的解为向量函数Φ的不动点。设迭代区域为$D=[0.4,0.6]\times[0.7,1]$，由于Φ的Jacobi矩阵为

$$\Phi'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\dfrac{2x^3-1}{2\sqrt{3x^3(x^3+1)}}&0\end{pmatrix}\implies\rho\left(\Phi'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\sqrt{\frac{1-2x^3}{6\sqrt{x^3(x^3+1)}}}\le\frac{\sqrt{109}}{2\sqrt{3}\sqrt[4]{266}}\approx0.75\tag{265}$$

进而在(x^*,y^*)的邻域内该不动点迭代收敛。迭代结果如下表

n	x	y
0	0.4	0.7
1	0.404145	0.94163
2	0.54365	0.937673
3	0.541366	0.843598
4	0.487052	0.844641
5	0.487654	0.873764
6	0.504468	0.873392
7	0.504253	0.863476
8	0.498528	0.863598
9	0.498598	0.866878
10	0.500492	0.866838
11	0.500469	0.865741
12	0.499836	0.865755
13	0.499844	0.86612

n	x	y
14	0.500055	0.866116
15	0.500052	0.865994
16	0.499982	0.865995
17	0.499983	0.866036
18	0.500006	0.866035
19	0.500006	0.866022
精确解	0.5	$\sqrt{3}/2 \approx 0.86602540$

第十五周

第一题

用改进Euler法和梯形法解初值问题

$$y' = x^2 + x - y, \qquad y(0) = 0 \tag{266}$$

取步长$h = 0.1$，计算到$x = 0.5$，并与精确解$y = -\mathrm{e}^{-x} + x^2 - x + 1$相比较。

解：使用Euler法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{10}(x_n^2 + x_n - y_n), \qquad x_n = x_0 + nh \tag{267}$$

可得

$$y(0) = 0, \quad y(0.1) = 0, \quad y(0.2) = 0.011, \quad y(0.3) = 0.039, \quad y(0.4) = 0.06951, \quad y(0.5) = 0.118559 \tag{268}$$

使用梯形法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{20}(x_n^2 + x_n - y_n + x_{n+1}^2 + x_{n+1} - y_{n+1}) \tag{269}$$

$$\Longleftrightarrow y_{n+1} = \frac{1}{21}(x_n^2 + x_n + x_{n+1}^2 + x_{n+1} + 19y_n) \tag{270}$$

可得

$$y(0) = 0 \qquad y(0.1) = \frac{11}{2100} \approx 0.00524 \qquad y(0.2) = \frac{236}{11025} \approx 0.02141 \tag{271}$$

$$y(0.3) = \frac{45719}{926100} \approx 0.04937 \qquad y(0.4) = \frac{437114}{4862025} \approx 0.08990 \qquad y(0.5) = \frac{2347907}{16336404} \approx 0.14372 \tag{272}$$

与精确解的比较

	精确解	**Euler法**	**误差**	**梯形法**	**误差**
y_0	0	0	0	0	0
y_1	0.00516	0	0.00516	0.00524	0.00008
y_2	0.02127	0.011	0.01027	0.02141	0.00014
y_3	0.04918	0.039	0.01018	0.04937	0.00019
y_4	0.08968	0.06951	0.02017	0.08990	0.00022
y_5	0.14347	0.11856	0.02491	0.14372	0.00025

第十六周

第一题

证明：对于任意t，如下Runge-Kutta方法为二阶精度

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_2 + K_3) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + th, y_n + thK_1) \\ K_3 = f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hK_1) \end{cases} \tag{273}$$

证明：截断误差为

$$T_{n+1} = y(x_n + h) - y_n - \frac{h}{2}(f(x_n + th, y_n + thf_n) + f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hf_n)) \tag{274}$$

其中

$$y_n = y(x_n), \qquad f_n = f(x_n, y_n) \tag{275}$$

作Taylor展开

$$y(x_n + h) = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n + O(h^3) = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f_n) + O(h^3) \tag{276}$$

$$f(x_n + th, y_n + thf_n) = f_n + thf_x + thf_y f_n + O(h^2) \tag{277}$$

$$f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hf_n) = f_n + (1-t)hf_x + (1-t)hf_y f_n + O(h^2) \tag{278}$$

其中

$$f_x = f_x(x_n, y_n), \qquad f_y = f_y(x_n, y_n) \tag{279}$$

因此

$$\begin{aligned} T_{n+1} =& y(x_n + h) - y_n - \frac{h}{2}(f(x_n + th, y_n + thf_n) + f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hf_n)) && (280) \\ =& y_n + hf_n + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f_n) + O(h^3) - y_n && (281) \\ & - \frac{h}{2}(f_n + thf_x + thf_y f_n + O(h^2)) && (282) \\ & - \frac{h}{2}(f_n + (1-t)hf_x + (1-t)hf_y f_n + O(h^2)) && (283) \\ =& O(h^3) && (284) \end{aligned}$$

因此该Runge-Kutta方法为二阶精度。