记

$$\mathscr{A}=\left\{\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}:n\in\mathbb{Z}^+\right\} \tag{1}$$

$$A=\left\{\frac{1}{2n-1}:n\in\mathbb{Z}^+\right\},\qquad B=\left\{\frac{1}{2n}:n\in\mathbb{Z}^+\right\} \tag{2}$$

$$S=A\cup B \tag{3}$$

$$\mathscr{P}=\{T:T\subset A\},\qquad \mathscr{Q}=\{T:T^c\subset A\} \tag{4}$$

求证:

$$\mathscr{F}(\mathscr{A})=\mathscr{P}\cup\mathscr{Q} \tag{5}$$

证明:

首先我们证明$\mathscr{P}\cup\mathscr{Q}$为一个$\sigma$-代数。

包含空集：注意到$\emptyset\subset A$，因此$\emptyset\in\mathscr{P}$，进而$\emptyset\in\mathscr{P}\cup\mathscr{Q}$。

对补封闭：任取集合$T\in\mathscr{P}\cup\mathscr{Q}$。

如果$T\in\mathscr{P}$，那么$T\subset A$，因此$T^c\in\mathscr{Q}$，进而$T^c\in\mathscr{P}\cup\mathscr{Q}$。

如果$T\in\mathscr{Q}$，那么$T^c\subset A$，因此$T^c\in\mathscr{P}$，进而$T^c\in\mathscr{P}\cup\mathscr{Q}$。

因此$T\in\mathscr{P}\cup\mathscr{Q}$。

集族$\mathscr{P}$对于可数并封闭：任取集合列$A_1,A_2,\cdots\in\mathscr{P}$，那么

$$A_n\subset A,\quad \forall n\in\mathbb{Z}^+ \tag{7}$$

因此

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset A \tag{8}$$

进而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{P} \tag{9}$$

集族$\mathscr{Q}$对于可数并封闭：任取集合列$B_1,B_2,\cdots\in\mathscr{Q}$，那么

$$B_m^c\subset A,\quad \forall m\in\mathbb{Z}^+ \tag{10}$$

因此

$$\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}B_m\right)^c=\bigcap_{m=1}^{\infty}B_m^c\subset A \tag{11}$$

进而

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}B_m\in\mathscr{Q} \tag{12}$$

集族$\mathscr{P}\cup\mathscr{Q}$对可数并封闭：在集族$\mathscr{P}\cup\mathscr{Q}$中任取集合列，由于$\mathscr{P}\cap\mathscr{Q}=\emptyset$，因此该集合列可分为两类，不妨仍记为$A_1,A_2,\cdots\in\mathscr{P}$和$B_1,B_2,\cdots\in\mathscr{Q}$。注意，这里该集合列均存在集族$\mathscr{P}$和集族$\mathscr{Q}$中的元素，因为上文已讨论过集族$\mathscr{P}$和集族$\mathscr{Q}$的可数并封闭性；同时，这里将两类集合列都写为无穷的形式，是因为倘若其中一类集合列仅有有限个元素，不妨记为$A_1,A_2,\cdots,A_n$，那么将其写成$A_1,A_2,\cdots,A_n,A_n,\cdots$，保证其无穷的形式。下面开始讨论集族$\mathscr{P}\cup\mathscr{Q}$的可数并封闭性。

注意到

$$\mathscr{Q}=\{T:T^c\subset A\}=\{T\cup B:T\subset A\} \tag{13}$$

由于

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}B_m\in\mathscr{Q} \tag{14}$$

因此存在$N\subset A$，使得

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}B_m=N\cup B \tag{15}$$

同时又因为存在$M\subset A$，使得

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=M \tag{16}$$

因此

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\bigcup\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}B_m\right)=M\cup N\cup B=(M\cup N)\cup B\in\mathscr{Q} \tag{17}$$

进而

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\bigcup\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}B_m\right)\in\mathscr{P}\cup\mathscr{Q} \tag{18}$$

至此，我们证明了$\mathscr{P}\cup\mathscr{Q}$为一个$\sigma$-代数。

下面我们证明$\mathscr{P}\cup\mathscr{Q}$为包含$\mathscr{A}$的最小$\sigma$-代数。

任取全集S的子集的σ-代数$\mathscr{F}$，满足$\mathscr{A}\subset\mathscr{F}$。

由于$\mathscr{F}$对可数并封闭，因此$\mathscr{P}\subset\mathscr{F}$。特别的，$A\in\mathscr{F}$，因此$B=A^c\in\mathscr{F}$。

注意到

$$\mathscr{Q}=\{T:T^c\subset A\}=\{T\cup B:T\subset A\} \tag{19}$$

因此$\mathscr{Q}\subset\mathscr{F}$。

进而

$$\mathscr{P}\cup\mathscr{Q}\subset\mathscr{F} \tag{20}$$

至此，我们证明了$\mathscr{P}\cup\mathscr{Q}$为包含$\mathscr{A}$的最小$\sigma$-代数。

综上所述，

$$\mathscr{F}(\mathscr{A})=\mathscr{P}\cup\mathscr{Q} \tag{21}$$

原命题得证！