2022 年新高考一卷导数

周同学

2023 年 1 月 18 日

对于函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x,x\in\mathbb{R}$ 和 $g(x)=x-\ln x,x\in(0,+\infty)$，若 a,b,c 满足

$$f(a)=g(b)=f(c)=g(c)$$

且 $a<c<b$，证明：

$$a+b=2c$$

证明：

法一：注意到

$$f(x)=g(\mathrm{e}^x)\qquad f(\ln x)=g(x)$$

由于

$$f(a)=g(b)=f(c)=g(c)$$

那么

$$f(a)=f(\ln c)\qquad g(b)=g(\mathrm{e}^c)$$

注意到

$$a<0<c<1<b$$

那么

$$a=\ln c\qquad b=\mathrm{e}^c$$

进而

$$a+b=\ln c+\mathrm{e}^c=2c$$

命题得证！

法二：记

$$\alpha=\frac{\mathrm{e}^c}{\mathrm{e}^a}>1 \qquad \beta=\frac{b}{c}>1$$

由于 $f(a)=f(c),g(b)=g(c)$，容易得到

$$\begin{cases}a=\ln\frac{\ln\alpha}{\alpha-1}\\ c=\ln\frac{\alpha\ln\alpha}{\alpha-1}\end{cases} \qquad \begin{cases}b=\frac{\beta\ln\beta}{\beta-1}\\ c=\frac{\ln\beta}{\beta-1}\end{cases}$$

同时 $f(c)=g(c)$，代入可得

$$\frac{\alpha\ln\alpha}{\alpha-1}-\ln\frac{\alpha\ln\alpha}{\alpha-1}=\frac{\ln\beta}{\beta-1}-\ln\frac{\ln\beta}{\beta-1} \tag{*}$$

而若要证明 $a+b=2c$，只需证明

$$\ln\frac{\ln\alpha}{\alpha-1}+\frac{\beta\ln\beta}{\beta-1}=\ln\frac{\alpha\ln\alpha}{\alpha-1}+\frac{\ln\beta}{\beta-1}$$

显然，只需证明

$$\alpha=\beta$$

记辅助函数

$$p(x)=\frac{x\ln x}{x-1},\quad x\in(1,+\infty)$$
$$q(y)=\frac{\ln y}{y-1},\quad y\in(1,+\infty)$$

容易证明，$p(x)$ 关于 x 严格单调递增，$q(y)$ 关于 y 严格单调递减，于是

$$0<q(y)<1<p(x)$$

代入 (*) 中得到

$$p(\alpha)-\ln p(\alpha)=q(\beta)-\ln q(\beta)$$

记 $t=\frac{p(\alpha)}{q(\beta)}>1$，结合上式，容易得到

$$\begin{cases}p(\alpha)=\frac{t\ln t}{t-1}\\ q(\beta)=\frac{\ln t}{t-1}\end{cases}$$

因此

$$p(\alpha)=p(t) \qquad q(\beta)=q(t)$$

由于 $p(x)$ 和 $q(y)$ 的严格单调性，得到

$$\alpha=\beta=t$$

综上所述，原命题得证！