# 第七章：定积分

## 1 定积分的概念

**定义 Riemann积分**：对于定义在$[a,b]$上的函数$f(x)$，对$[a,b]$作任意划分

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b \tag{1}$$

对每一个$[x_{k-1},x_k]$任取$\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$，定义

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1} \tag{2}$$

$$\lambda=\max\{\Delta x_k\} \tag{3}$$

若存在极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k \tag{4}$$

且此极限不依赖于$[a,b]$的划分和$\xi_k$的选择，那么称此极限为$f(x)$在$[a,b]$上的定积分，记为

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{5}$$

## 2 可积的条件

### 2.1 可积的充要条件

**定义 Darboux和**：对于定义在$[a,b]$上的函数$f(x)$，对$[a,b]$作任意划分

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b \tag{6}$$

定义

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1} \tag{7}$$

$$M_k=\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]}\{f(x)\},\qquad m_k=\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]}\{f(x)\} \tag{8}$$

定义Darboux上和和下和分别为

$$\overline{S}=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k,\qquad \underline{S}=\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k \tag{9}$$

**定义 振幅**：定义$[x_{k-1},x_k]$上$f(x)$的振幅为

$$\omega_k=M_k-m_k \tag{10}$$

**定理 Datboux和的性质**：

- 若对原划分中插入新的分点则Darboux上和不增，Darboux下和不减。
- $$\overline{S}\geq\underline{S} \tag{11}$$
- $$\overline{S}\geq\inf_{x\in[a,b]}\{f(x)\}(b-a),\qquad \underline{S}\leq\sup_{x\in[a,b]}\{f(x)\}(b-a) \tag{12}$$

**定理 Darboux定理**：

$$\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}=\inf\overline{S},\qquad \lim_{\lambda\to 0}\underline{S}=\sup\underline{S} \tag{13}$$

**定理 可积的第一充要条件**：

$$\lim_{\lambda\to 0}\overline{S}=\lim_{\lambda\to 0}\underline{S} \tag{14}$$

**定理 可积的第二充要条件**：对于任意$\varepsilon,\sigma>0$，存在$\delta>0$，使得当$\lambda<\delta$时，成立

$$\sum_{\omega_k\geq\delta}\Delta x_k<\varepsilon \tag{15}$$

## 2.2 可积的充分条件

闭区间上的连续函数可积。

在闭区间上仅存在至多可数个可去间断点的函数可积。

单调有界函数可积。

## 2.3 测度理论

**Lebesgue可积准则**：闭区间上的有界函数Riemann可积当且仅当几乎处处连续。

# 3 定积分的性质

可积对加法、数乘、乘法和分段运算封闭。

可积则绝对可积；可积则平方可积；绝对可积当且仅当平方可积。

**定理 积分第一中值定理**：如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)$在$[a,b]$上不变号且可积，那么存在$\xi\in[a,b]$，使得成立

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \tag{16}$$

**定理 由积分定义的函数**：对于在$[a,b]$上可积函数$f(x)$，$F(x)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$为连续函数。

# 4 定积分的计算

**定理 原函数**：对于在$[a,b]$上可积函数$f(x)$，$F(x)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$为可导函数，且

$$F'(x)=f(x) \tag{17}$$

**微积分基本定理 Newton-Leibniz公式**：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b \tag{18}$$

**换元公式**：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x \tag{19}$$

**分部积分公式**：

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x \tag{20}$$

# 第八章：定积分的应用

## 1 面积

**参数曲线**：对于曲线

$$\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},\quad t\in[\alpha,\beta] \tag{21}$$

满足$x'(t)\geq 0$，那么由$\Gamma$围成的面积为

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}|y(t)|x'(t)\mathrm{d}t \tag{22}$$

**极坐标**：

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{23}$$

**旋转曲面**：由连续曲线$y=f(x)\geq 0$绕$x$轴围成的面积为

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x \tag{24}$$

## 2 弧长

对于曲线

$$\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},\quad t\in[\alpha,\beta] \tag{25}$$

其长度为

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t \tag{26}$$

## 3 体积

由连续曲线$y=f(x)\geq 0$绕$x$轴围成的体积为

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \tag{27}$$

## 4 质心

对于曲线

$$\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases},\quad t\in[\alpha,\beta] \tag{28}$$

其质心为

$$\left(\frac{\int_{\alpha}^{\beta}x(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t}{\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t},\frac{\int_{\alpha}^{\beta}y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t}{\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t}\right) \tag{29}$$

# 6 近似计算

**Simpson公式**：

- 将$[a,b]$等间距插入$2n$个分点
$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{2n-1}<x_{2n}=b \tag{30}$$
其中$x_k=a+\frac{(b-a)k}{2n}$。
- 对于区间$[x_{2k-2},x_{2k}]$上的积分值进行抛物线拟合，得到
$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{6n}(f(x_{2k-2})+4f(x_{2k-1})+y(x_{2k})) \tag{31}$$
- 区间$[a,b]$上的积分值为
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{6n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_{2k})+4\sum_{k=1}^{n}f(x_{2k-1})\right) \tag{32}$$

# 第九章：数项级数

## 1 上极限和下极限

**定义 上极限和下极限**：对于有界数列$\{a_n\}$，定义其上下极限分别为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{k\to\infty}\sup_{n>k} a_n = \inf_{k\geq 1}\sup_{n>k} a_n \tag{33}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{k\to\infty}\inf_{n>k} a_n = \sup_{k\geq 1}\inf_{n>k} a_n \tag{34}$$

特别的，如果$\{a_n\}$无上界，那么定义$\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = +\infty$，如果$\{a_n\}$无下界，那么定义$\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = -\infty$。

**上极限的等价定义**：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = H \tag{35}$$

- 对于任意$\varepsilon > 0$，存在$N > 0$，使得对于任意$n > N$，成立$a_n < H + \varepsilon$。
- 对于任意$\varepsilon > 0$，以及任意$k > 0$，存在$n > k$，使得成立$a_n < H - \varepsilon$。

**上极限的等价定义**：

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = h \tag{36}$$

- 对于任意$\varepsilon > 0$，存在$N > 0$，使得对于任意$n > N$，成立$a_n > h - \varepsilon$。
- 对于任意$\varepsilon > 0$，以及任意$k > 0$，存在$n > k$，使得成立$a_n > h + \varepsilon$。

**定理 上极限的性质**：记$H = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$

- 如果$H \in \mathbb{R}$，那么对于任意$\varepsilon > 0$，存在无穷多个$a_n$，使得成立$a_n \in (H-\varepsilon, H+\varepsilon)$；并且至多存在有限个$a_n$，使得成立$a_n \in (H+\varepsilon, +\infty)$。
- 如果$H = +\infty$，那么对于任意$N \in \mathbb{N}^*$，存在无穷多个$a_n$，使得成立$a_n > N$。
- 如果$H = -\infty$，那么$a_n \to -\infty$。

**定理 下极限的性质**：记$h = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$

- 如果$h \in \mathbb{R}$，那么对于任意$\varepsilon > 0$，存在无穷多个$a_n$，使得成立$a_n \in (h-\varepsilon, h+\varepsilon)$；并且至多存在有限个$a_n$，使得成立$a_n \in (-\infty, h-\varepsilon)$。
- 如果$h = -\infty$，那么对于任意$N \in \mathbb{N}^*$，存在无穷多个$a_n$，使得成立$a_n < -N$。
- 如果$h = +\infty$，那么$a_n \to +\infty$。

## 2 级数的收敛性和基本性质

**定义 级数的收敛性**：如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和数列$\{S_n\}$收敛于有限值$S$，即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = S \tag{37}$$

那么称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，且收敛于$S$，并记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_k = S \tag{38}$$

否则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

**定义 余和**：对于收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，定义其余和为

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \tag{39}$$

**级数的性质**：

- 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，那么对于任意$a \in \mathbb{R}$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} au_n$收敛，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = a\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{40}$$

- 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$均收敛，那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$收敛，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \tag{41}$$

- 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，那么对其项任意加括号而不改变项的顺序后所成级数仍收敛，且收敛于同一值。

**定理 收敛的必要条件**：如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，那么

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{42}$$

**定理 Cauchy收敛原理**：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充分必要条件是，对于任意$\varepsilon > 0$，存在$N > 0$，使得对于任意$n > N$，以及任意$p > 0$，成立

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon \tag{43}$$

# 3.正项级数

## 3.1 正项级数的定义

**定义 正项级数**：如果对于任意$n \in \mathbb{N}^*$，$u_n \geq 0$，那么称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数。

**基本定理**：如果正项级数的部分和数列存在上界，那么此级数收敛；反之发散至$+\infty$。

$p$**级数**：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{cases} \text{收敛} & p > 1 \\ \text{发散} & p \leq 1 \end{cases} \tag{44}$$

## 3.2 比较判别法

**比较判别法**：对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，如果存在$c > 0$，使得对于任意$n \in \mathbb{N}^*$，成立

$$u_n \le c v_n \tag{45}$$

那么

- 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。
- 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散。

**比较判别法的极限形式**：对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，记

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in [0, +\infty] \tag{46}$$

- 如果$l \in (0, +\infty)$，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$同时收敛或同时发散。
- 如果$l = 0$，而且级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。
- 如果$l = +\infty$，而且级数$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

## 3.3 Cauchy判别法

**Cauchy判别法**：对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，如果存在$N > 0$，使得对于任意$n > N$，存在$q < 1$，使得成立$\sqrt[n]{u_n} \le q$，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；如果存在$N > 0$，使得对于任意$n > N$，成立$\sqrt[n]{u_n} \ge 1$，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

**Cauchy判别法的极限形式**：对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，记

$$r = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{u_n} \tag{47}$$

- 如果$r < 1$，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。
- 如果$r > 1$，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。
- 如果$r = 1$，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的敛散性未知。

## 3.4 d’Alembert判别法

**d’Alembert判别法**：对于正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，如果存在$N > 0$，使得对于任意$n > N$，存在$q < 1$，使得成立$\frac{u_{n+1}}{u_n} \le q$，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；如果存在$N > 0$，使得对于任意$n > N$，成立$\frac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

**d'Alembert判别法的极限形式**：对于正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，记

$$\overline{r} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n}, \qquad \underline{r} = \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} \tag{48}$$

- 如果$\overline{r} < 1$，那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。
- 如果$\underline{r} > 1$，那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散。
- 如果$\overline{r} = 1$或$\underline{r} = 1$，那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$的敛散性未知。

### 3.5 Cauchy积分判别法

**Cauchy积分判别法**：对于单调递减正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，作单调递减的正函数$f(x)$，使得$f(n) = u_n$，那么$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$和$\int_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$具有相同的敛散性。

## 4.任意项级数

### 4.1 绝对收敛和条件收敛

**定义 绝对收敛**：对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，如果正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛，那么称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$为绝对收敛。

**定义 条件收敛**：对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$为收敛但不绝对收敛，那么称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$为条件收敛。

**定理**：绝对收敛级数必为收敛级数。

### 4.2 交错级数

**定义 交错级数**：如果对于任意$n \in \mathbb{N}^*$，$u_n > 0$，那么称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}u_n$为交错级数。

**Leibniz定理**：对于交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}u_n$，如果数列$\{u_n\}$单调递减且收敛于$0$，即对于任意$n \in \mathbb{N}^*$，成立$u_n \geq u_{n+1}$，且$u_n \to 0$，那么

- 交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}u_n$收敛。
- 对于余和$r_n$，成立$u_1 r_n > 0$且$|r_n| \leq u_{n+1}$。

### 4.3 Abel判别法和Dirichlet判别法

**Abel变换**：对于$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，记

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \tag{49}$$

那么

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n \tag{50}$$

**Abel引理**：对于$\{a_k\}_{k=1}^n$和$\{b_k\}_{k=1}^n$，如果$\{a_k\}_{k=1}^n$单调，并且$\left\{\sum\limits_{i=1}^{k} b_i\right\}_{k=1}^{n}$有界，那么存在$M>0$，使得成立

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq M(|a_1|+2|a_n|) \tag{51}$$

**Abel判别法**：对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$，如果数列$\{a_n\}$单调且有界，并且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛，那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛。

**Dirichlet判别法**：对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$，如果数列$\{a_n\}$单调且趋于$0$，并且数列$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k\right\}_{n=1}^{\infty}$有界，那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛。

# 5.绝对收敛级数和条件收敛级数的性质

## 5.1 绝对收敛和条件收敛的本质区别

**定理**：对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，记

$$v_n=\frac{|u_n|+u_n}{2}, \qquad w_n=\frac{|u_n|-u_n}{2} \tag{52}$$

那么

- 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛，那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$均收敛。
- 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$条件收敛，那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$均发散。

**定理 Riemann重排定理**：对于级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

- 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛，那么其任意更序级数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$绝对收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n=\sum_{n=1}^{\infty} u_n' \tag{53}$$

- 如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$条件收敛，那么其更序级数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'$可收敛于任意值或发散至$\pm\infty$。

## 5.2 Cauchy乘积

**定义 Cauchy乘积**：对于数列$\{u_k\}_{k=1}^n$和$\{v_k\}_{k=1}^n$，记

$$c_n=\sum_{k=1}^{n} u_k v_{n+1-k} \tag{54}$$

那么称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$的Cauchy乘积。

**定理 Cauchy定理**：如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$均绝对收敛，那么其任意项乘积$u_i v_j$的任意排列所构成的级数也绝对收敛，并且

$$\sum_{i,j} \sum_{\mathrm{form}(i,j)} u_i v_j = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) \tag{55}$$

**定理 Mertens定理**：如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$条件收敛，那么其Cauchy乘积仍收敛，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k v_{n+1-k} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right) \tag{56}$$

# 第十章：反常积分

## 1 无穷限的反常积分

### 1.1 无穷限的反常积分的定义

**定义 无穷限的反常积分**：对于定义在$[a,+\infty)$上的函数$f(x)$，且对于任意$A>a$，函数$f(x)$在区间$[a,A]$上可积。如果存在极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x \tag{57}$$

那么称该极限为$f(x)$在区间$[a,+\infty)$上的反常积分，并记

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x \tag{58}$$

**Cauchy收敛原理**：反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛的充分必要条件是：对于任意$\varepsilon>0$，存在$A_0>a$，使得对于任意$A_1,A_2>A_0$，成立

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \tag{59}$$

**定理**：绝对收敛的反常积分必收敛。

$p$**级数**：

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1\\ +\infty, & p\le 1\end{cases} \tag{60}$$

### 1.2 收敛判别法

**收敛判别法**：

- 如果$0\le f(x)\le\varphi(x)$，且积分$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$收敛，那么积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛。
- 如果$f(x)\ge\varphi(x)\ge 0$，且积分$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$发散，那么积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散。

**比较判别法的极限形式**：对于$f(x)\ge 0$且$\varphi(x)\ge 0$，记

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=l \tag{61}$$

- $0<l<+\infty$：积分$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$具有相同的敛散性。
- $l=0$：如果积分$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$收敛，那么积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛。
- $l=+\infty$：如果积分$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$发散，那么积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散。

### 1.3 Cauchy判别法

**Cauchy判别法**：

- 对于$f(x)\ge 0$，如果存在$p>1$和$c>0$，使得成立

$$f(x)\le\frac{c}{x^p} \tag{62}$$

  那么积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛。

- 对于$f(x) \geq 0$，如果存在$p \leq 1$和$c > 0$，使得成立

$$f(x) \geq \frac{c}{x^p} \tag{63}$$

那么积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散。

**Cauchy判别法的极限形式**

- 对于$f(x) \geq 0$，如果存在$p > 1$，使得成立

$$\lim_{x \to +\infty} x^p f(x) \in [0, +\infty) \tag{64}$$

那么积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛。

- 对于$f(x) \geq 0$，如果存在$p \leq 1$，使得成立

$$\lim_{x \to +\infty} x^p f(x) \in (0, +\infty] \tag{65}$$

那么积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散。

## 1.4 Abel判别法和Dirichlet判别法

**第二中值定理**：如果$f(x)$在$[a,b]$上可积，$g(x)$在$[a,b]$上单调，那么存在$\xi \in [a,b]$，使得成立

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x \tag{66}$$

特别的，如果$g(x)$单调递增且$g(a) \geq 0$，那么存在$\xi \in [a,b]$，使得成立

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(b)\int_{\xi}^b f(x)\mathrm{d}x \tag{67}$$

如果$g(x)$单调递减且$g(b) \geq 0$，那么存在$\xi \in [a,b]$，使得成立

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\mathrm{d}x \tag{68}$$

**Abel判别法**：如果函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上积分收敛，$g(x)$单调且有界，那么积分$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛。

**Dirichlet判别法**：如果对任意$A > a$，积分$\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$一致有界，且当$x \to +\infty$时函数$g(x)$单调趋于$0$，那么积分$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛。

# 2 无界函数的反常积分

## 2.1 无界函数的反常积分的定义

**定义 无界函数反常积分**：对于定义在$(a,b]$上且以$a$为奇点的函数$f(x)$，且对于任意$0 < \eta < b-a$，函数$f(x)$在区间$[a+\eta, b]$上可积。如果存在极限

$$\lim_{\eta \to 0^+} \int_{a+\eta}^b f(x)\mathrm{d}x \tag{69}$$

那么称该极限为$f(x)$在区间$(a,b]$上的反常积分，并记

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta \to 0^+} \int_{a+\eta}^b f(x)\mathrm{d}x \tag{70}$$

**Cauchy收敛原理**：对于定义在$(a,b]$上且以$a$为奇点的函数$f(x)$，反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛的充分必要条件是：对于任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得对于任意$0<\eta_1,\eta_2<\delta$，成立

$$\left|\int_{a+\eta_1}^{a+\eta_2} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon \tag{71}$$

**$p$级数**

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p<1\\ +\infty, & p\geq 1\end{cases} \tag{72}$$

## 2.2 Cauchy判别法

**Cauchy判别法**：

- 对于以为$a$为奇点的$f(x)\geq 0$，如果存在$p<1$和$c>0$，使得成立

  $$f(x)\leq \frac{c}{(x-a)^p} \tag{73}$$

  那么积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛。
- 对于以为$a$为奇点的$f(x)\geq 0$，如果存在$p\geq 1$和$c>0$，使得成立

  $$f(x)\geq \frac{c}{(x-a)^p} \tag{74}$$

  那么积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散。

**Cauchy判别法的极限形式**

- 对于以为$a$为奇点的$f(x)\geq 0$，如果存在$p<1$，使得成立

  $$\lim_{x\to a^+}(x-a)^p f(x)\in[0,+\infty) \tag{75}$$

  那么积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛。
- 对于以为$a$为奇点的$f(x)\geq 0$，如果存在$p\geq 1$，使得成立

  $$\lim_{x\to a^+}(x-a)^p f(x)\in(0,+\infty] \tag{76}$$

  那么积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$发散。

## 2.2 Abel判别法和Dirichlet判别法

**Abel判别法**：对于以$a$为奇点的$f(x)$，如果$f(x)$在$(a,b]$上可积，$g(x)$单调有界，那么积分$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛。

**Dirichlet判别法**：对于以$a$为奇点的$f(x)$，如果对于任意$0<\eta<b-a$，积分$\int_{a+\eta}^b f(x)\mathrm{d}x$有界，且当$x\to a^+$时函数$g(x)$单调趋于0，那么积分$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛。

## 2.3 Cauchy主值

**Cauchy主值**：对于以$c$为奇点的$f(x)$，满足$a<c<b$，如果存在极限

$$\lim_{\eta\to 0^+}\left(\int_a^{c-\eta} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\eta}^b f(x)\mathrm{d}x\right) \tag{77}$$

那么称此极限为反常积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$的Cauchy主值，记作

$$\mathrm{P.V.}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to 0^+}\left(\int_a^{c-\eta} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+\eta}^b f(x)\mathrm{d}x\right) \tag{78}$$

# 第十一章：函数项级数、幂级数

## 1 函数项级数的一致收敛

### 1.1 一致收敛的定义

**定义 一致收敛**：称函数序列$\{S_n(x)\}$一致收敛，如果其逐点收敛到函数$S(x)$，且对于任意$\varepsilon > 0$，存在$N > 0$，使得当$n > N$时，对于任意$x$，成立

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \tag{79}$$

记作

$$S_n(x) \rightrightarrows S(x) \tag{80}$$

**定义 内闭一致收敛**：称函数序列$\{S_n(x)\}$在$I$上内闭一致收敛，如果对于任意闭区间$[a, b] \subset I$，函数序列$\{S_n(x)\}$在闭区间$[a, b]$上一致收敛。

**定理 一致收敛的等价定义**：称函数序列$\{S_n(x)\}$在$x \in I$内一致收敛，如果其逐点收敛到函数$S(x)$，且

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I}\{S_n(x) - S(x)\} = 0 \tag{81}$$

**定理 Cauchy收敛原理**：函数序列$\{S_n(x)\}$一致收敛，当且仅当对于任意$\varepsilon > 0$，存在$N > 0$，使得对于任意$n > N$和$p > 0$，以及任意$x$，成立

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon \tag{82}$$

### 1.2 一致收敛函数序列的性质

**定理 连续性定理**：如果函数序列$\{S_n(x)\}$中每一项$S_n(x)$在$[a, b]$上都连续，且

$$S_n(x) \rightrightarrows S(x), \quad x \in [a, b] \tag{83}$$

那么函数$S(x)$在$[a, b]$上连续，即

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} S_n(x) \tag{84}$$

**定理 可积性定理**：如果函数序列$\{S_n(x)\}$中每一项$S_n(x)$在$[a, b]$上都连续，且

$$S_n(x) \rightrightarrows S(x), \quad x \in [a, b] \tag{85}$$

那么函数$S(x)$在$[a, b]$上可积，且

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\mathrm{d}x \tag{86}$$

同时

$$\int_a^x S_n(t)\mathrm{d}t \rightrightarrows \int_a^x S(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b] \tag{87}$$

**定理 可导性定理**：如果函数序列$\{S_n(x)\}$中每一项$S_n(x)$在$[a, b]$上都存在连续导数$S'_n(x)$，且

$$S_n(x) \to S(x), \quad x \in [a, b] \tag{88}$$

同时

$$S'_n(x) \rightrightarrows \sigma(x), \quad x \in [a, b] \tag{89}$$

那么

$$S'(x) = \sigma(x), \quad x \in [a, b] \tag{90}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} S_n(x) \tag{91}$$

且

$$S_n(x) \rightrightarrows S(x), \quad x \in [a, b] \tag{92}$$

## 1.3 一致收敛级数的性质

**定理 和的连续性**：如果函数级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$中每一项$u_n(x)$在$[a,b]$上都连续，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x), \quad x \in [a, b] \tag{93}$$

那么函数$S(x)$在$[a,b]$上连续，即

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \tag{94}$$

**定理 逐项求积**：如果函数级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$中每一项$u_n(x)$在$[a,b]$上都连续，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x), \quad x \in [a, b] \tag{95}$$

那么函数$S(x)$在$[a,b]$上可积，且

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x \tag{96}$$

同时

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n(t)\mathrm{d}t \rightrightarrows \int_a^x S(t)\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b] \tag{97}$$

**定理 逐项可微**：如果函数序列$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$中每一项$u_n(x)$在$[a,b]$上都存在连续导数$u_n'(x)$，且

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \to S(x), \quad x \in [a, b] \tag{98}$$

同时

$$\sum_{k=1}^{n} u_k'(x) \rightrightarrows \sigma(x), \quad x \in [a, b] \tag{99}$$

那么

$$S'(x) = \sigma(x), \quad x \in [a, b] \tag{100}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x) \tag{101}$$

且

$$\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\rightrightarrows S(x),\quad x\in[a,b] \tag{102}$$

## 1.4 一致收敛判别法

**Weierstrass判别法**：如果存在数列$\{a_n\}$，使得成立数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，且对于任意$x\in I$，成立$|u_n(x)|\le a_n$，那么函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$I$上一致收敛。

**Abel判别法**：如果函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$在$I$上一致收敛，同时对于任意$x\in I$，数列$\{a_n(x)\}$单调，且存在$M>0$，使得对于任意$n\in\mathbb{N}^*$和$x\in I$，成立$|a_n(x)|\le M$，那么函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$在$I$上一致收敛。

**Dirichlet判别法**：如果存在$M>0$，使得对于任意$n\in\mathbb{N}^*$和$x\in I$，成立$\sum\limits_{k=1}^{n}b_k(x)\le M$，同时对于任意$x\in I$，数列$\{a_n(x)\}$单调，且函数序列$\{a_n(x)\}$在$I$上一致收敛于$0$，那么函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$在$I$上一致收敛。

# 2 幂级数

## 2.1 收敛半径

**定义 幂级数**：

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \tag{103}$$

**定义 收敛域**：对于幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，定义其收敛域为收敛的点的集合。

**定义 收敛半径**：对于幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，如果存在$\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$，那么其收敛半径定义为

$$R=\begin{cases}\frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}, & 0<\overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<\infty\\ \infty, & \overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0\\ 0, & \overline{\lim}_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty\end{cases} \tag{104}$$

**定理 Cauchy-Hadamard定理**：如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$半径为$R$，那么

- 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$在$|x-x_0|<R$内绝对收敛。
- 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$在$|x-x_0|>R$内发散。

**定理 d'Alembert判别法**：对于幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，由于

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\le\liminf_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}\le\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \tag{105}$$

因此如果存在$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$，那么收敛半径为

$$R=\begin{cases}\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}, & 0<\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<\infty\\ \infty, & \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=0\\ 0, & \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\infty\end{cases} \tag{106}$$

**定理 Abel第一定理**：

- 如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$在点$x=\xi$收敛，那么该幂级数在$|x-x_0|<|x-\xi|$内绝对收敛。
- 如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$在点$x=\xi$发散，那么该幂级数在$|x-x_0|>|x-\xi|$内发散。

**定理 Abel第二定理**：幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$在收敛域中内闭一致收敛。

## 2.2 幂级数的性质

**定理 连续性定理**：幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$的和函数$S(x)$在其收敛域内连续。

**定理 逐项积分**：幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$的和函数$S(x)$在其收敛半径内可以逐项积分，即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int a_n(x-x_0)^n\mathrm{d}x=\int\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\mathrm{d}x \tag{107}$$

收敛半径相等，但收敛域可能扩大。

**定理 逐项微分**：幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$的和函数$S(x)$在其收敛半径内可以逐项微分，即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a_n(x-x_0)^n\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\mathrm{d}x \tag{108}$$

收敛半径相等，但收敛域可能缩小。

## 2.3 函数的幂级数展开

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{109}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \qquad x \in (-1,1] \tag{110}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad x \in (-1,1) \tag{111}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{112}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{113}$$

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n-1}, \qquad x \in [-1,1] \tag{114}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \qquad x \in (-1,1) \tag{115}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \qquad x \in [-1,1) \tag{116}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right) - \ln\left(1-\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}, \qquad x \in (0,1) \tag{117}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{2n+1} = \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \qquad x \in (0,1] \tag{118}$$

# 第十二章：Fourier级数和Fourier变换

## 1 函数的Fourier级数展开

### 1.1 Fourier级数的引进

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\tag{119}$$

### 1.2 三角函数系的正交性

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases}2\pi, & n=0\\ 0, & n\in\mathbb{N}^*\end{cases}\tag{120}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x=0,\quad n\in\mathbb{N}\tag{121}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases}2\pi, & m=n=0\\ \pi, & m=n\in\mathbb{N}^*\\ 0, & m\neq n\in\mathbb{N}^*\end{cases}\tag{122}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & m=n=0\\ \pi, & m=n\in\mathbb{N}^*\\ 0, & m\neq n\in\mathbb{N}^*\end{cases}\tag{123}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx\mathrm{d}x=0,\quad m,n\in\mathbb{N}\tag{124}$$

### 1.3 Fourier系数

**Fourier-Euler公式**：对于$[-\pi,\pi]$上展开为一致收敛的三角级数的函数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\tag{125}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}\tag{126}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}^*\tag{127}$$

对于$[-T,T]$上展开为一致收敛的三角级数的函数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{T}x+b_n\sin\frac{n\pi}{T}x\right)\tag{128}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\cos\frac{n\pi}{T}x\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}\tag{129}$$

$$b_n=\frac{1}{T}\int_{-T}^{T}f(x)\sin\frac{n\pi}{T}x\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}^*\tag{130}$$

## 1.4 收敛判别法

**Fourier级数的收敛判别法**：对于$[-\pi,\pi]$上可积和绝对可积的函数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\tag{131}$$

如果$f(x)$在$x$点处存在左右极限

$$f(x^-)=\lim_{\Delta x\to0^-}f(x+\Delta x)\tag{132}$$
$$f(x^+)=\lim_{\Delta x\to0^+}f(x+\Delta x)\tag{133}$$

以及存在广义单侧导数

$$f'_-(x^-)=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x^-)}{\Delta x}\tag{134}$$
$$f'_+(x^+)=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x^+)}{\Delta x}\tag{135}$$

那么$f(x)$的Fourier级数在$x$点处收敛，且收敛于$\frac{1}{2}(f(x^-)+f(x^+))$。

特别的，如果$f(x)$在$x$点处存在单侧导数

$$f'_-(x)=\lim_{\Delta x\to0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\tag{136}$$
$$f'_+(x)=\lim_{\Delta x\to0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\tag{137}$$

那么$f(x)$的Fourier级数在$x$点处收敛，且收敛于$f(x)$。

## 1.5 Fourier级数的复数形式

对于在$[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}]$上可积且绝对可积的函数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x)\tag{138}$$

其中$\omega_n=\frac{2\pi}{T}$。记

$$c_0=a_0,\quad c_n=a_n-ib_n,\quad c_{-n}=a_n+ib_n,\qquad n\in\mathbb{N}^*\tag{139}$$

那么

$$f(x)\sim\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\mathrm{e}^{in\omega x}\tag{140}$$

其中

$$c_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(x)\mathrm{e}^{-in\omega x}\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}\tag{141}$$

## 1.6 收敛判别法的证明

**Dirichlet积分**：对于$[-\pi,\pi]$上可积且绝对可积的函数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{142}$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N} \tag{143}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}^* \tag{144}$$

记Fourier级数的部分和

$$S_n(f(x))=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{145}$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x+u)+f(x-u))\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u \tag{146}$$

**Riemann引理**：对于在$[a,b]$上可积且绝对可积的函数$\psi(x)$，成立

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b\psi(x)\sin px\mathrm{d}x=\lim_{p\to\infty}\int_a^b\psi(x)\cos px\mathrm{d}x=0 \tag{147}$$

**局部性定理**：函数$f(x)$的Fourier级数在$x$点处的敛散性仅与该点的邻域有关。

**Dini判别法**：如果对于$s$，函数$\varphi(u)=f(x+u)+f(x-u)-2s$满足，存在$\varepsilon>0$，使得在$[0,\varepsilon]$上，$\frac{\varphi(u)}{u}$可积且绝对可积，那么$f(x)$的Fourier级数在$x$点处收敛于$s$。

**Lipschitz判别法**：如果对于充分小的$\varepsilon>0$，函数$f(x)$在$x$点处满足Lipschitz条件，即存在$L>0$和$\alpha\in(0,1]$，使得成立

$$|f(x\pm u)-f(x)|<Lu^{\alpha} \tag{148}$$

那么$f(x)$的Fourier级数在$x$点处收敛，且收敛于$\frac{1}{2}(f(x^-)+f(x^+))$。

## 1.7 Fourier级数的性质

**一致收敛性**：

- 对于周期为$2\pi$的可积且绝对可积的函数$f(x)$，如果存在$\delta>0$，使得$f(x)$在区间$[a-\delta,b+\delta]$上存在有界导函数，那么$f(x)$的Fourier级数在区间$[a,b]$上一致收敛，且收敛于$f(x)$。
- 对于周期为$2\pi$的可积且绝对可积的函数$f(x)$，如果存在$\delta>0$，使得$f(x)$在区间$[a-\delta,b+\delta]$上连续且为分段单调函数，那么$f(x)$的Fourier级数在区间$[a,b]$上一致收敛，且收敛于$f(x)$。

**逐项求积**：对于$[-\pi,\pi]$上的分段连续函数$f(x)$，其Fourier级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{149}$$

那么对于任意$[a,b]\subset[-\pi,\pi]$，成立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}(b-a) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b (a_n\cos nx + b_n \sin nx)\mathrm{d}x \tag{150}$$

**最佳平方平均逼近**：对于$n$次三角多项式

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx + B_k\cos kx) \tag{151}$$

其中$A_0, A_k, B_k$均为常数，以及对于$[-\pi,\pi]$上的可积且平方可积函数$f(x)$，称

$$\delta^2(f, T_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-T_n(x))^2\mathrm{d}x \tag{152}$$

为三角多项式$T_n(x)$在平方平均意义下逼近$f(x)$的偏差。对于$f(x)$的Fourier级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{153}$$

其$n$次部分和

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\cos kx) \tag{154}$$

为$f(x)$的最佳平方平均逼近，即对于任意$n$次三角多项式$T_n(x)$，成立

$$\delta^2(f, S_n) \le \delta^2(f, T_n) \tag{155}$$

# 2 Fourier变换

## 2.1 Fourier变换的概念

以下讨论的函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内绝对可积。

**定义 Fourier变换**：对于在$(-\infty,+\infty)$内绝对可积的函数$f(x)$，记其Fourier变换为

$$F(f) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\omega x}\mathrm{d}x \tag{156}$$

**定义 Fourier逆变换**：对于在$(-\infty,+\infty)$内绝对可积的函数$f(x)$，记其Fourier逆变换为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{i\omega x}\mathrm{d}\omega \tag{157}$$

- $\hat{f}(\omega)$是$\omega \in (-\infty,+\infty)$内的连续函数。
- **Riemann引理**：

$$\lim_{\omega\to\infty}\hat{f}(\omega) = 0 \tag{158}$$

- **Fourier积分公式**：

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-i\omega x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{i\omega x}\mathrm{d}\omega \tag{159}$$

## 2.2 Fourier变换的一些性质

- **线性**:

$$F(af+bg)=aF(f)+bF(g) \tag{160}$$

- **平移**: 令$g(x)=f(x-s)$，那么

$$F(g)=\mathrm{e}^{-i\omega s}F(f) \tag{161}$$

- **导数**: 如果

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0 \tag{162}$$

  那么

$$F(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f)=i\omega F(f) \tag{163}$$

  即

$$\hat{f}'=i\omega\hat{f} \tag{164}$$