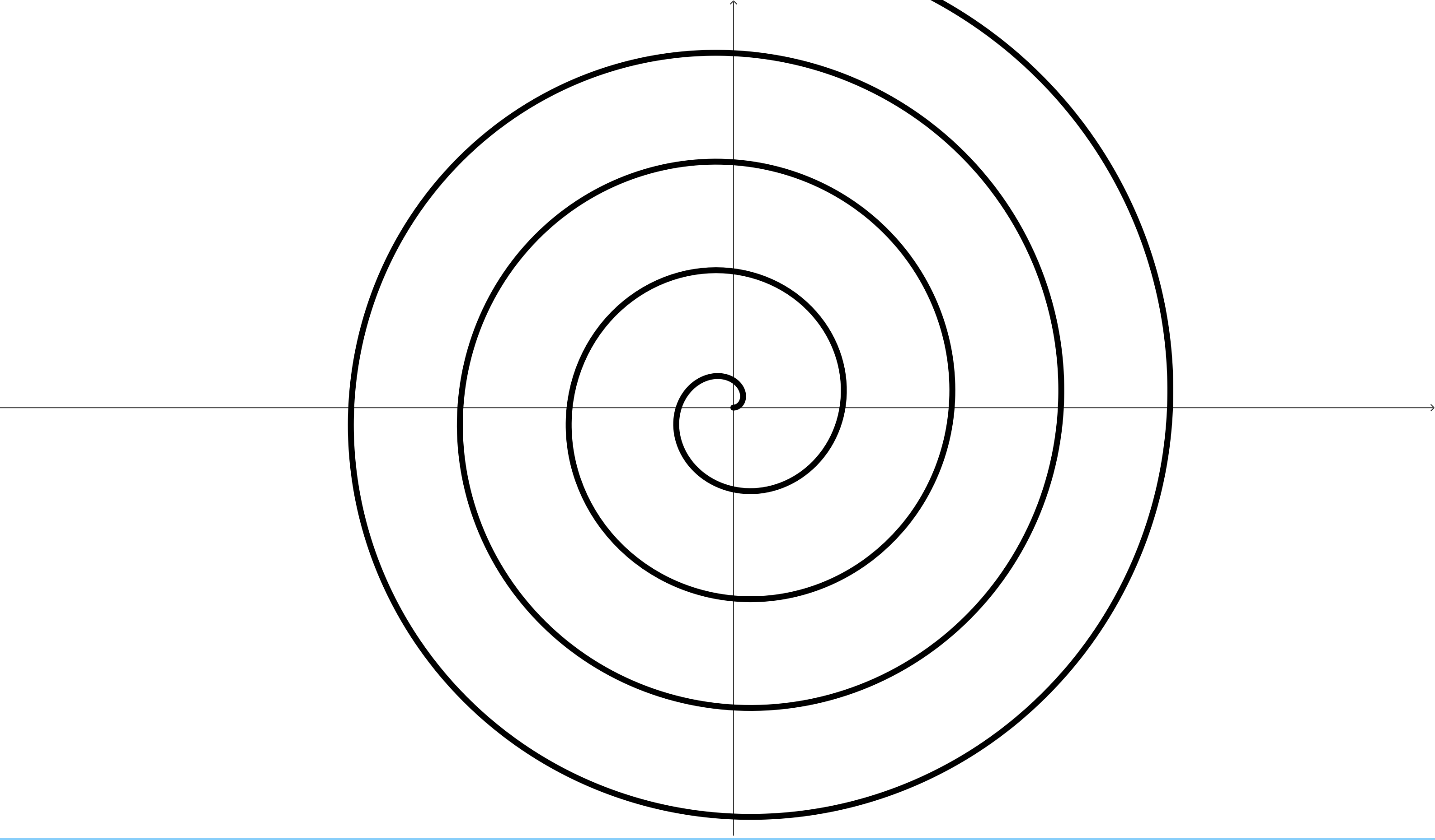

# Lectures in Harmonic Analysis-Thomas H. Wolf-Notebook


作者：若水

邮箱：ethanmxzhou@163.com

主页：helloethanzhou.github.io


时间：July 23, 2024

上善若水任方圆

# 致谢

感谢 **勇敢的** 自己

# 目录

# 第一章 $L^1$ Fourier 变换

**定义 1.1 ($L^1$ Fourier 变换 $L^1$ Fourier transform)**

1. 对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，定义其 Fourier 变换为
$$\begin{aligned}\widehat{f}: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{C}\\ \xi &\longmapsto \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$
其中 $x\cdot\xi$ 表示内积。
2. 更一般的，对于 $\mathbb{R}^n$ 上的赋有范数
$$\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R}^n)$$
的有限复值测度空间 $M(\mathbb{R}^n)$，其中 $|\mu|$ 为总变差，通过 $f \to \mu, \mathrm{d}\mu = f\mathrm{d}x$，$L^1(\mathbb{R}^n)$ 包含在 $M(\mathbb{R}^n)$ 中，此时推广 Fourier 变换为
$$\widehat{\mu}(\xi) = \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}\mu(x)$$

♣

**示例 1.1** 对于 $a \in \mathbb{R}^n$ 与 $E \subset \mathbb{R}^n$，定义 Dirac 测度
$$\delta_a(E) = \begin{cases} 1, & a \in E\\ 0, & a \notin E\end{cases}$$
那么
$$\widehat{\delta_a}(\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi i a\cdot\xi}$$

**证明**
$$\widehat{\delta_a}(\xi) = \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}\delta_a(x) = \mathrm{e}^{-2\pi i a\cdot\xi}$$

**示例 1.2** 令 $\Gamma(x) = \mathrm{e}^{-\pi|x|^2}$，则
$$\widehat{\Gamma}(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi|\xi|^2}$$

**证明** 由于
$$\widehat{\Gamma}(\xi) = \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\Gamma(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\pi|x|^2}\mathrm{d}x$$
注意到该积分的变量仅为一维变量，因此不妨考虑 $n = 1$。由 Gauss 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\mathrm{d}x = 1$，则
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\pi|x|^2}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\pi|\xi|^2}$$

$L^1$ Fourier 变换存在一些基本的估计，我们罗列如下。

**命题 1.1**

如果 $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$，那么 $\widehat{\mu}$ 为有界函数，且
$$\|\widehat{\mu}\|_\infty \le \|\mu\|_{M(\mathbb{R}^n)}$$

♠

**证明** 对于任意 $\xi \in \mathbb{R}^n$，由于
$$|\widehat{\mu}(\xi)| = \left|\int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}\mu(x)\right| \le \int |\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}|\mathrm{d}|\mu|(x) = \|\mu\|_{M(\mathbb{R}^n)}$$
因此
$$\|\widehat{\mu}\|_\infty = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\widehat{\mu}(\xi)| \le \|\mu\|_{M(\mathbb{R}^n)}$$

**命题 1.2**

如果 $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$，那么 $\widehat{\mu}$ 为连续函数。

**证明** 固定 $\xi \in \mathbb{R}^n$，考虑

$$\widehat{\mu}(\xi+h)=\int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot(\xi+h)}\mathrm{d}\mu(x)$$

由于 $|\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot(\xi+h)}|=1$ 且 $|\mu|(\mathbb{R}^n)<\infty$，那么由控制收敛定理

$$\lim_{h\to 0}\widehat{\mu}(\xi+h)=\lim_{h\to 0}\int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot(\xi+h)}\mathrm{d}\mu(x)=\int \lim_{h\to 0}\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot(\xi+h)}\mathrm{d}\mu(x)=\int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}\mu(x)=\widehat{\mu}(\xi)$$

现在我们列出 Fourier 变换的一些基本性质，这些性质并不涉及微分和积分。

**命题 1.3 (Fourier 变换的基本性质)**

令 $f \in L^1(\mathbb{R}^n), \tau \in \mathbb{R}^n$，且 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为可逆线性变换。

1. 令 $f_\tau(x)=f(x-\tau)$，则
$$\widehat{f_\tau}(\xi)=\mathrm{e}^{-2\pi i\tau\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)$$
2. 令 $e_\tau(x)=\mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\tau}$，则
$$\widehat{e_\tau f}(\xi)=\widehat{f}(\xi-\tau)$$
3. 令 $T^{-t}$ 表示 $T$ 的逆转置，则
$$\widehat{f\circ T}=|\det(T)|^{-1}\widehat{f}\circ T^{-t}$$
4. 令 $\tilde{f}(x)=\overline{f(-x)}$，则
$$\widehat{\tilde{f}}=\overline{\widehat{f}}$$

**证明**

1. $$\widehat{f_\tau}(\xi)=\int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}f_\tau(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}f(x-\tau)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-2\pi i\tau}\int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-2\pi i\tau\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)$$
2. $$\widehat{e_\tau f}(\xi)=\int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}e_\tau(x)f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot(\xi+\tau)}f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}f(x-\tau)\mathrm{d}x=\widehat{f}(\xi-\tau)$$
3. $$\begin{aligned}\widehat{f\circ T}(\xi)&=\int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}f(Tx)\mathrm{d}x\\&=|\det(T)|^{-1}\int \mathrm{e}^{-2\pi i(T^{-1}x\cdot\xi)}f(x)\mathrm{d}x\\&=|\det(T)|^{-1}\int \mathrm{e}^{-2\pi i(x\cdot T^{-t}\xi)}f(x)\mathrm{d}x\\&=|\det(T)|^{-1}\widehat{f}\circ T^{-t}(\xi)\end{aligned}$$
4. $$\widehat{\tilde{f}}(\xi)=\int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\tilde{f}(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\overline{f(-x)}\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\overline{f(x)}\mathrm{d}x=\overline{\int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}f(x)\mathrm{d}x}=\overline{\widehat{f}(\xi)}$$

进一步考察情况 3。如果 $T$ 为正交变换，那么 $\widehat{f\circ T}=\widehat{f}\circ T$。特别的，如果 $f$ 为径向函数 (radial function)，那么 $\widehat{f}$ 亦为径向函数。所谓径向函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$，就是成立如下性质之一的函数：

1. 存在函数 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$，使得对于任意 $x\in\mathbb{R}^n$，成立 $f(x)=\varphi(\|x\|)$。
2. 对于任意旋转 $\rho\in\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$，成立 $f\circ\rho=f$。

如果 $T$ 为膨胀 (dilation)，即存在 $r>0$，使得成立 $Tx=rx$，那么 $f(rx)$ 的 Fourier 变换为 $r^{-n}\widehat{f}(r^{-1}\xi)$。反之，$r^{-n}f(r^{-1}x)$ 的 Fourier 变换为 $\widehat{f}(r\xi)$。