Question：证明：

$$2^{\aleph_0}=\aleph \tag{1}$$

Proof：记$\mathbb{Z}^+$的幂集为$\mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)$，即证明

$$\mathcal{P}\left(\mathbb{Z}^+\right)\sim(0,1] \tag{2}$$

记$\mathscr{A}$为由$\mathbb{Z}^+$中有限元素（至少一个）构成的集合的集族，即

$$\mathscr{A}=\left\{\{a_1,\cdots,a_n\}:a_1<\cdots<a_n\in\mathbb{Z}^+,n\in\mathbb{Z}^+\right\} \tag{3}$$

记$\mathscr{B}$为由$\mathbb{Z}^+$中无限元素构成的集合的集族，即

$$\mathscr{B}=\left\{\{b_1,b_2,\cdots\}:b_1<b_2<\cdots\in\mathbb{Z}^+\right\} \tag{4}$$

那么成立

$$\mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)=\{\emptyset\}\cup\mathscr{A}\cup\mathscr{B} \tag{5}$$

首先我们来证明集族$\mathscr{A}$为可数集合，即证明

$$\operatorname{card}(\mathscr{A})=\aleph_0 \tag{6}$$

注意到

$$\mathscr{A}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{A}_n \tag{7}$$

其中$\mathscr{A}_n$为由$\mathbb{Z}^+$中n个元素构成的集合的集族，这里$n\in\mathbb{Z}^+$，即

$$\mathscr{A}_n=\left\{\{a_1,\cdots,a_n\}:a_1<\cdots<a_n\in\mathbb{Z}^+\right\} \tag{8}$$

我们来证明对于每一个$n\in\mathbb{Z}^+$，$\mathscr{A}_n$都是可数集合，即

$$\operatorname{card}(\mathscr{A}_n)=\aleph_0,\quad\forall n\in\mathbb{Z}^+ \tag{9}$$

一方面，我们来证明

$$\operatorname{card}(\mathscr{A}_n)\geq\aleph_0 \tag{10}$$

构造映射$\varphi_1:\mathbb{Z}^+\to\mathscr{A}_n$为

$$\varphi_1(x)=\{x,x+1,\cdots,x+n-1\} \tag{11}$$

任取$x\neq x'\in\mathbb{Z}^+$，显然有

$$\{x,x+1,\cdots,x+n-1\}\neq\{x',x'+1,\cdots,x'+n-1\} \tag{12}$$

即

$$\varphi_1(x)\neq\varphi_1(x') \tag{13}$$

因此映射φ_1为单射，因此

$$\operatorname{card}(\mathscr{A}_n)\geq\operatorname{card}(\mathbb{Z}^+)=\aleph_0 \tag{14}$$

另一方面，我们来证明

$$\operatorname{card}(\mathscr{A}_n)\leq\aleph_0 \tag{15}$$

构造映射$\varphi_2:\mathscr{A}_n\to{\mathbb{Z}^+}^n$为

$$\varphi_2(\{a_1,\cdots,a_n\})=(a_1,\cdots,a_2) \tag{16}$$

任取

$$\{a_1, \cdots, a_n\} \neq \{a'_1, \cdots, a'_n\} \in \mathscr{A}_n \tag{17}$$

显然有

$$(a_1, \cdots, a_2) \neq (a'_1, \cdots, a'_2) \tag{18}$$

即

$$\varphi_2(\{a_1, \cdots, a_n\}) \neq \varphi_2(\{a'_1, \cdots, a'_n\}) \tag{19}$$

因此映射φ_2为单射，因此

$$\mathrm{card}(\mathscr{A}_n) \leq \mathrm{card}\left(\mathbb{Z}^{+n}\right) = \aleph_0 \tag{20}$$

由Bernstein定理，成立

$$\mathrm{card}(\mathscr{A}_n) = \aleph_0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \tag{21}$$

因此

$$\mathrm{card}(\mathscr{A}) = \mathrm{card}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n\right) = \aleph_0 \tag{22}$$

其次我们来证明集族$\mathscr{B}$为具有连续基数的集合，即证明

$$\mathrm{card}(\mathscr{B}) = \aleph \tag{23}$$

构造映射$\psi : \mathscr{B} \to (0, 1]$为

$$\psi(\{b_1, b_2, \cdots\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-b_n} \tag{24}$$

我们来证明映射ψ为双射。

对于其单射性。任取

$$\{b_1, b_2, \cdots\} \neq \{b'_1, b'_2, \cdots\} \in \mathscr{B} \tag{25}$$

不妨假设对于任意$i < j \in \mathbb{Z}^+$，成立$b_i < b_j$和$b'_i < b_j$。注意到存在$k \in \mathbb{Z}^+$，使得成立

$$b_1 = b'_1, \quad \cdots, \quad b_{k-1} = b'_{k-1}, \quad b_k \neq b'_k \tag{26}$$

这里若$k = 1$，那么表示两者第一项不相等，即$b_1 \neq b'_1$。不妨假设$b_k > b'_k$，那么

$$
\begin{aligned}
&\psi(\{b_1, b_2, \cdots\}) && (27)\\
=&\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-b_n} && (28)\\
=&\sum_{n=1}^{k} 2^{-b_n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-b_n} && (29)\\
\leq&\sum_{n=1}^{k} 2^{-b_n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-(b_k+n-k)} && (30)\\
=&\sum_{n=1}^{k} 2^{-b_n} + 2^{-b_k} && (31)\\
\leq&\sum_{n=1}^{k} 2^{-b'_n} && (32)\\
<&\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-b'_n} && (33)\\
=&\psi(\{b'_1, b'_2, \cdots\}) && (34)
\end{aligned}
$$

因此

$$
\psi(\{b_1, b_2, \cdots\}) \neq \psi(\{b'_1, b'_2, \cdots\}) \tag{35}
$$

进而映射ψ为单射。

对于其满射性。任取

$$
c \in (0, 1] \tag{36}
$$

下面寻找$\{c_1, c_2, \cdots\} \in \mathscr{B}$，使得成立

$$
\psi(\{c_1, c_2, \cdots\}) = c \tag{37}
$$

如果$c = 1$，取$\{c_1, c_2, \cdots\} = \mathbb{Z}^+$，那么

$$
\psi(\{c_1, c_2, \cdots\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 \tag{38}
$$

如果存在$\mathbb{Z}^+$中有限的元素$c'_1 < \cdots < c'_m$，使得成立

$$
\sum_{n=1}^{m} 2^{-c'_n} = c \tag{39}
$$

那么取$\{c_1, c_2, \cdots\} = \{c'_1, \cdots, c'_{m-1}, c'_m + 1, c'_m + 2, \cdots\}$，此时成立

$$
\psi(\{c_1, c_2, \cdots\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-c_n} = \sum_{n=1}^{m-1} 2^{-c'_n} + \sum_{n=m}^{\infty} 2^{-(c'_m+n-m+1)} = \sum_{n=1}^{m} 2^{-c'_n} = c \tag{40}
$$

注意，如果$m = 1$，那么取$\{c_1, c_2, \cdots\} = \{c'_m + 1, c'_m + 2, \cdots\}$。

下面考察当$c \in (0, 1)$时，且不存在$\mathbb{Z}^+$中有限的元素$c'_1 < \cdots < c'_m$，使得成立

$$
\sum_{n=1}^{m} 2^{-c'_n} = c \tag{41}
$$

我们来构造$\{c_1, c_2, \cdots\} \in \mathscr{B}$，使得

$$
\psi(\{c_1, c_2, \cdots\}) = c \tag{42}
$$

我们进行如下操作。

定义$C_0=\emptyset$。

第1步，将区间$(0,1)$分为三部分$(0,2^{-1}),(2^{-1},1),\{2^{-1}\}$。如果$c\in\{2^{-1}\}$，即$c=2^{-1}$，那么存在$\mathbb{Z}^+$中有限的元素$c_1'=1$，使得成立$2^{-c_1'}=c$，矛盾！因此$c\in(0,1)$且$c\neq 2^{-1}$，那么成立或$c\in\left(0,2^{-1}\right)$，或$c\in\left(2^{-1},1\right)$。如果$c\in\left(0,2^{-1}\right)$，那么定义$C_1=C_0$；如果$c\in\left(2^{-1},1\right)$，定义$C_1=C_0\cup\{1\}$。

递归的，假设当$c\in(\alpha_n,\beta_n)$时，已定义C_n。

第$n+1$步，将区间(α_n,β_n)分为三部分$\left(\alpha_n,\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right),\left(\frac{\alpha_n+\beta_n}{2},\beta_n\right),\left\{\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right\}$。如果$c\in\left\{\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right\}$，即$c=\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}$，那么存在$\mathbb{Z}^+$中有限的元素，即集合$C_n\cup\{n+1\}$中的元素，使得成立

$$\sum_{i\in C_n\cup\{n+1\}}2^{-i}=c \tag{43}$$

矛盾！因此$c\in(\alpha_n,\beta_n)$且$c\neq\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}$，那么成立或$c\in\left(\alpha_n,\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right)$，或$c\in\left(\frac{\alpha_n+\beta_n}{2},\beta_n\right)$。如果$c\in\left(\alpha_n,\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right)$，那么定义$C_{n+1}=C_n$；如果$c\in\left(\frac{\alpha_n+\beta_n}{2},\beta_n\right)$，定义$C_{n+1}=C_n\cup\{n+1\}$。

这样操作下去，我们得到集合列$C_1\subset C_2\subset\cdots\subset\mathbb{Z}^+$，定义

$$C=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n=\lim_{n\to\infty}C_n \tag{44}$$

显然$C\subset\mathbb{Z}^+$且为可数无穷集合。下面我们来证明

$$\sum_{i\in C}2^{-i}=c \tag{45}$$

首先证明无穷级数$\sum_{i\in C}2^{-i}$收敛，注意到

$$0<\sum_{i\in C_n}2^{-i}<\sum_{i\in C_{n+1}}2^{-i}<\sum_{i\in\mathbb{Z}^+}2^{-i}=1 \tag{46}$$

因此

$$\sum_{i\in C}2^{-i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in C_n}2^{-i} \tag{47}$$

收敛。

其次证明

$$\sum_{i\in C}2^{-i}=c \tag{48}$$

注意到

$$\alpha_n=\sum_{i\in C_n}2^{-i},\qquad \beta_n=2^{-n}+\sum_{i\in C_n}2^{-i} \tag{49}$$

同时

$$\alpha_n<c<\beta_n \tag{50}$$

令$n\to\infty$，成立

$$\sum_{i\in C}2^{-i}=c \tag{51}$$

那么取$\{c_1,c_2,\cdots\}=C$即可满足

$$\psi(\{c_1,c_2,\cdots\})=c \tag{52}$$

进而映射ψ为满射。

至此，我们证明了ψ为双射，因此

$$\operatorname{card}(\mathscr{B}) = \operatorname{card}((0,1]) = \aleph \tag{53}$$

进而

$$\operatorname{card}\left(\mathcal{P}\left(\mathbb{Z}^{+}\right)\right) = \operatorname{card}(\{\emptyset\} \cup \mathscr{A} \cup \mathscr{B}) = \aleph \tag{54}$$

即

$$\mathcal{P}\left(\mathbb{Z}^{+}\right) \sim (0,1] \tag{55}$$

综上所述，原命题得证！