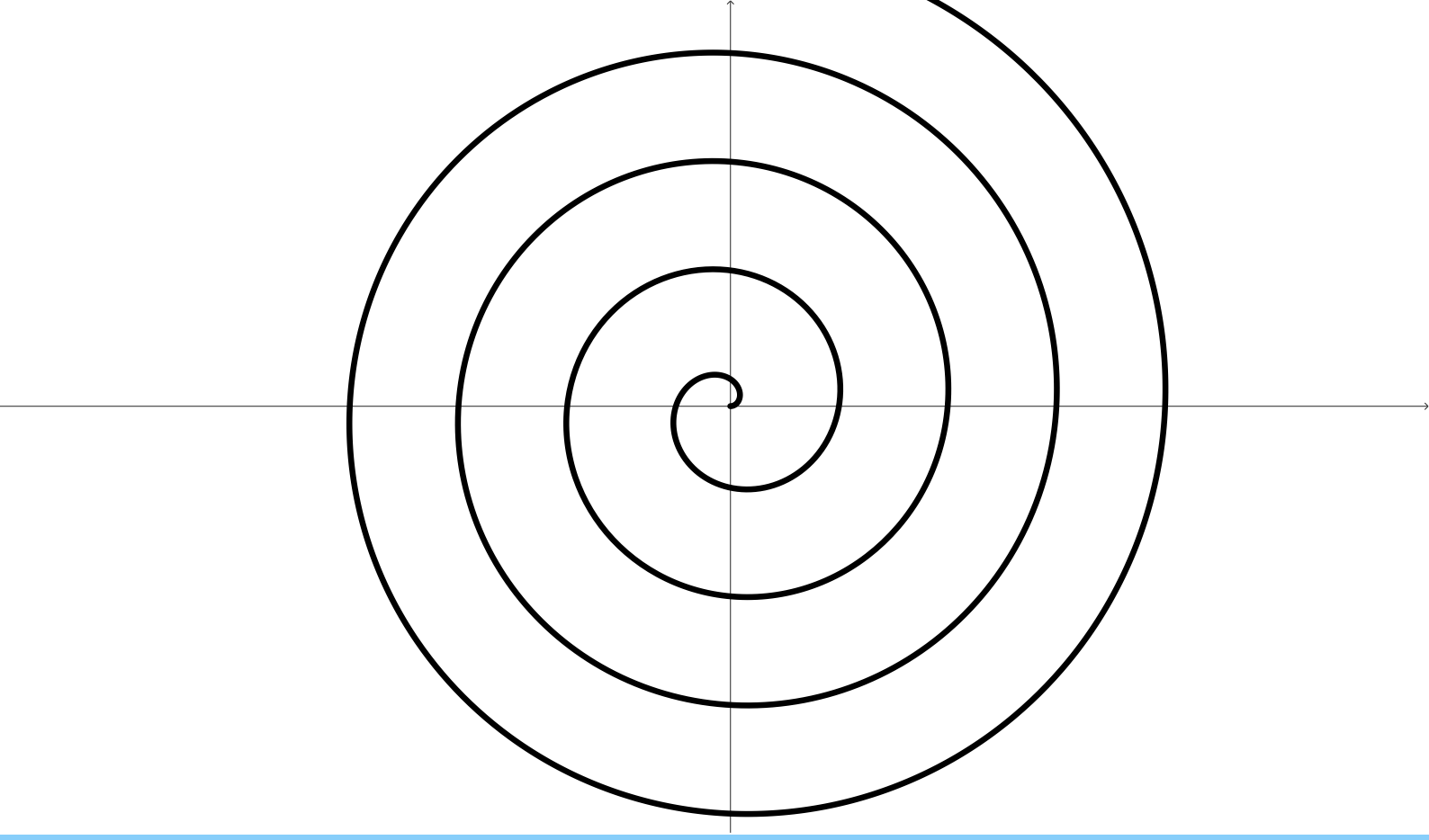
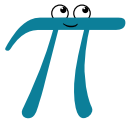


数理统计 - 茆诗松等 - 笔记

作者：若水
邮箱：ethanmxzhou@163.com
主页：helloethanzhou.github.io
时间：July 18, 2024



致谢

感谢 **勇敢的** 自己

目录

第一章 统计量及其分布

1.1 总体与概率

1.1.1 总体与个体

总体：研究对象的全体

个体：构成总体的每个成员

1.1.2 样本

样本：从总体中随机的抽取 n 个个体，记其指标值为

$$x_1, \cdots, x_n$$

那么此称为总体的一个样本，n 称为**样本容量**，或简称样本量，样本中的个体称为**样品**。

简单随机抽样原则：随机性，独立性

定义 1.1.1 (联合分布函数)

总体 X 具有分布函数 $F(x)$，$x_1, \cdots, x_n$ 为取自该总体的容量为 n 的样本，那么样本联合分布函数为

$$F(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} F(x_k)$$

1.2 样本数据的整理与表示

1.2.1 经验分布函数

定义 1.2.1 (经验分布函数)

对于取自总体分布函数为 $F(x)$ 的样本 $x_1, \cdots, x_n$，记其对应的次序统计量为 $x_{(1)}, \cdots, x_{(n)}$，定义该样本的经验分布函数为

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{(1)} \\ k/n, & x_{(k)} \le x < x_{(k+1)}, k = 1, \cdots, n-1 \\ 1, & x \ge x_{(n)} \end{cases}$$

命题 1.2.1 (经验分布函数的性质)

1. $F_n(x)$ 非减且右连续。
2. $F_n(-\infty) = 0, \quad F_n(+\infty) = 1$

定理 1.2.1 (Glivenko 定理)

对于取自总体分布函数为 $F(x)$ 的样本 $x_1, \cdots, x_n$，记其经验分布函数为 $F_n(x)$，那么

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = 0\right) = 1$$

1.2.2 频数频率分布表

定义 1.2.2 (频数频率分布表)

1. 对样本进行分组：通常为 5 ∼ 20 个。
2. 确定每组组距：
$$d = \frac{\text{样本最大观测值} - \text{样本最小观测值}}{\text{组数}}$$
3. 确定每组组限：
$$(a_0, a_1], \cdots, (a_{n-1}, a_n]$$
4. 统计样本数据落入每个区间的个数——频数

♣

表 1.1: 频数频率分布表

分组区间	频数	频率
$(a_0, a_1]$	f_1	$\frac{f_1}{\sum_{k=1}^{n} f_k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(a_{n-1}, a_n]$	f_n	$\frac{f_n}{\sum_{k=1}^{n} f_k}$

1.3 统计量及其分布

1.3.1 统计量与抽样分布

定义 1.3.1 (统计量)

对于取自总体的样本 $x_1, \cdots, x_n$，若 $T = T(x_1, \cdots, x_n)$ 中不含有任何位置参数，那么称 T 为统计量。

♣

定义 1.3.2 (抽样分布)

统计量的分布称为抽样分布。

♣

1.3.2 样本均值极其抽样分布

定义 1.3.3 (样本均值)

对于取自总体的样本 $x_1, \cdots, x_n$，其算术平均值称为样本均值，记为 $\overline{x}$，即
$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$$
特别的，在分组样本中，样本均值的近似公式为
$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} x_k f_k$$

其中 m 为组数，x_k 为第 k 组的组中值，f_k 为第 k 组的频数，同时

$$n=\sum_{k=1}^{n} f_k$$

♣

命题 1.3.1 (样本均值的性质)

1. 样本的所有偏差之和为 0，即
$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})=0$$
2. 对于任意 $c\in\mathbb{R}$，成立
$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2\leq\sum_{k=1}^{n}(x_k-c)^2$$
当且仅当 $c=\overline{x}$ 时等号成立。

♠

定理 1.3.1

对于取自总体的样本 $x_1,\cdots,x_n$，记其样本均值为 $\overline{x}$。

1. 如果总体分布为 $N(\mu,\sigma^2)$，那么 $\overline{x}$ 满足分布 $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$。
2. 对于一般的总体的分布，记 $E(x)=\mu,\mathrm{Var}(x)=\sigma^2$，那么当 $n\to\infty$ 时，$\overline{x}$ 满足近似分布 $N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，记作
$$\overline{x}\dot{\sim}N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$$

♡

1.3.3 样本方差

定义 1.3.4 (样本方差)

对于取自总体的样本 $x_1,\cdots,x_n$，定义其样本方差为

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{x})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2-n\overline{x}^2\right)$$

♣

定理 1.3.2

对于具有二阶矩的总体 X，即 $E(X)=\mu$，$\mathrm{Var}(X)=\sigma^2<+\infty$，取自总体的样本 $x_1,\cdots,x_n$，记 $\overline{x}$ 和 s^2 分别为样本均值和样本方差，那么

$$E(\overline{x})=\mu,\qquad \mathrm{Var}(\overline{x})=\frac{\sigma^2}{n}$$
$$E(s^2)=\sigma^2$$

♡

1.3.4 样本矩及其函数

定义 1.3.5 (样本原点矩)

对于取自总体的样本 $x_1,\cdots,x_n$，定义其样本 k 阶原点矩为

$$a_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^k$$

♣

定义 1.3.6 (样本中心矩)

对于取自总体的样本 $x_1,\cdots,x_n$，定义其样本 k 阶中心矩为

$$b_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^k$$

♣

定义 1.3.7 (样本偏差)

对于取自总体的样本 $x_1,\cdots,x_n$，定义其样本偏差为

$$\hat{\beta}_s=\frac{b_3}{b_2^{3/2}}$$

♣

命题 1.3.2 (样本偏差的性质)

样本偏差反应总体分布密度曲线的对称性。

1. $\hat{\beta}_s=0$：完全对称
2. $\hat{\beta}_s>0$：存在右长尾
3. $\hat{\beta}_s<0$：存在左长尾

♠

定义 1.3.8 (样本峰度)

对于取自总体的样本 $x_1,\cdots,x_n$，定义其样本峰度为

$$\hat{\beta}_k=\frac{b_3}{b_2^{\frac{3}{2}}}-3$$

♣

命题 1.3.3 (样本峰度的性质)

样本峰度反应总体分布密度曲线在其峰值附近的陡峭程度。

1. $\hat{\beta}_k>0$：比正态分布陡峭，称为尖顶型
2. $\hat{\beta}_k<0$：比正态分布平缓，称为平顶型

♠

1.3.5 次序统计量及其分布

定义 1.3.9 (次序统计量)

对于取自总体的样本 $x_1,\cdots,x_n$，称其次序统计量为

$$x_{(1)},\cdots,x_{(n)}$$

其中 $x_{(1)}\le\cdots\le x_{(n)}$。

♣

定理 1.3.3 (单个次序统计量的分布)

对于取自总体的样本 $x_1,\cdots,x_n$，如果 X 的密度函数为 $p(x)$，分布函数为 $F(x)$，那么第 k 个次序统计量 $x_{(k)}$ 的密度函数为

$$p_k(x)=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(F(x)\right)^{k-1}\left(1-F(x)\right)^{n-k}p(x)$$

♡

推论 1.3.1

1. $x_{(1)}$ 的密度函数为

$$p_1(x) = np(x)(1 - F(x))^{n-1}$$

分布函数为

$$F_1(x) = 1 - (1 - F(x))^n$$

2. $x_{(n)}$ 的密度函数为

$$p_n(x) = np(x)(F(x))^{n-1}$$

分布函数为

$$F_n(x) = (F(x))^n$$

♡

定理 1.3.4 (两个次序统计量的联合分布)

对于取自总体的样本 $x_1, \cdots, x_n$，如果 X 的密度函数为 $p(x)$，分布函数为 $F(x)$，那么第 i 个次序统计量 $x_{(i)}$ 和第 j 个次序统计量 $x_{(j)}$ 的联合分布密度函数为

$$p_{ij}(x, y) = \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}(F(x))^{i-1}(F(x) - F(y))^{j-i-1}(1 - F(y))^{n-j}p(x)p(y)$$

其中 $i < j$。

♡

1.3.6 样本分位数与分位数

定义 1.3.10 (样本 p 分位数)

对于取自总体的样本 $x_1, \cdots, x_n$，定义其样本 p 分位数为

$$m_p = \begin{cases} x_{([np+1])}, & np \notin \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2}\left(x_{(np)} + x_{(np+1)}\right), & np \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

其中 $p \in (0, 1)$。

♣

定义 1.3.11 (α 分位数)

对于随机变量 X，称 x_α 为其 α 分位数，如果

$$P(X \leq x_\alpha) = \alpha$$

♣

定理 1.3.5

如果总体密度函数为 $p(x)$，x_p 为其 p 分位数，$p(x)$ 在 x_p 处连续且 $p(x_p) > 0$，那么当 $n \to +\infty$ 时，样本 p 分位数 m_p 的渐进分布为

$$m_p \dot{\sim} N\left(x_p, \frac{p(1-p)}{np^2(x_p)}\right)$$

♡

1.3.7 五数概括与箱线图

定义 1.3.12 (五数概括)

$$x_{\min},\quad Q_1=m_{0.25},\quad m_{0.5},\quad Q_3=m_{0.75},\quad x_{\max}$$

♣

定义 1.3.13 (箱线图)

1. 画一个箱子，其两侧恰为第一 4 分位数和第三 4 分位数，在中位数位置上画一条竖线，其在箱子内，这个箱子包含了样本中 50% 的数据。
2. 在箱子左右两侧各引出一条水平线，分别至最小值和最大值为止。每条线段中包含了样本 25% 的数据。

♣

1.4 三大抽样分布

表 1.2: 三大抽样分布

分布名称	表示	统计量的构造	抽样分布密度函数	期望	方差	特征函数
正态分布	$N(\mu,\sigma^2)$		$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},x\in\mathbb{R}$	μ	σ^2	$\mathrm{e}^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$
Γ 分布	$\Gamma(\alpha,\lambda)$		$p(x)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x},x>0$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha}$
χ^2 分布	$\chi^2(n)$	$\chi^2(n)=\sum_{k=1}^n(N(0,1))^2$	$p(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{n}{2}}}x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}},x>0$	n	$2n$	$(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$
F 分布	$F(m,n)$	$F(m,n)=\frac{\chi^2(m)/m}{\chi^2(n)/n}$	$p(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}},x>0$	$\frac{n}{n-2}$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$	
t 分布	$t(n)$	$t(n)=\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2(n)/n}}$	$p(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},x\in\mathbb{R}$	0	$\frac{n}{n-2}$	

定义 1.4.1 (Γ 函数)

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

♣

命题 1.4.1 (分布间的联系)

1. 若 $X\sim N(0,1)$，那么

$$X^2\sim\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

因此

$$\chi^2(n)=\Gamma\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)$$

2. 如果 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，那么

$$aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2)$$

3. 如果独立分布 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 和 $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，那么

$$X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

4. 如果 $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$，那么

$$aX \sim \Gamma(\alpha, \frac{\lambda}{a})$$

5. 如果独立分布 $X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$ 和 $Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$，那么

$$X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda)$$

♠

1.4.1 χ^2 分布

定义 1.4.2 (χ^2 分布)

对于独立同分布于标准正态分布的 $N(0,1)$ 的随机变量 $X_1, \cdots, X_n$，称随机变量 $X = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ 的分布为自由度为 n 的 χ^2 分布，记作 $X \sim \chi^2(n)$，其密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, \qquad x > 0$$

♣

命题 1.4.2 (χ^2 分布的性质)

对于来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本 $x_1, \cdots, x_n$，记其样本均值和样本方差分别为 $\overline{x}$ 和 s^2，那么

1. $\overline{x}$ 和 s^2 相互独立。
2. $$\overline{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$
3. $$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) = \Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

   即

$$s^2 \sim \Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2\sigma^2}\right)$$

♠

1.4.2 F 分布

定义 1.4.3 (F 分布)

对于独立的随机变量 $X \sim \chi^2(m)$ 和 $Y \sim \chi^2(n)$，称随机变量 $F = \frac{X/m}{Y/n}$ 的分布为自由度为 m 和 n 的 F 分布，记作 $F \sim F(m,n)$，其密度函数为

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1}\left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}, x > 0$$

♣

推论 1.4.1

对于独立的分别来自 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本 $x_1, \cdots, x_m$ 和 $y_1, \cdots, y_m$，那么记其样本方差分别为 s_x^2 和 s_y^2，那么

$$\frac{s_x^2/\sigma_1^2}{s_y^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$$

♡

1.4.3 T 分布

定义 1.4.4 (T 分布)

对于独立的随机变量 $X \sim N(0,1)$ 和 $Y \sim \chi^2(n)$，称随机变量 $t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ 的分布为自由度为 n 的 t 分布，记作 $t \sim t(n)$，其密度函数为

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, x \in \mathbb{R}$$

♣

推论 1.4.2

对于来自正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本 $x_1,\cdots,x_n$，记其样本均值和样本方差分别为 $\overline{x}$ 和 s^2，那么

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu)}{s} \sim T(n-1)$$

♡

推论 1.4.3

对于独立的分别来自 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$ 的样本 $x_1,\cdots,x_m$ 和 $y_1,\cdots,y_m$，那么记其样本方差分别为 s_x^2 和 s_y^2，且

$$s_w^2 = \frac{(m-1)s_x^2+(n-1)s_y^2}{m+n-2}$$

那么

$$\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \sim T(m+n-2)$$

♡

1.5 充分统计量

1.5.1 充分性

定义 1.5.1 (充分统计量)

对于来自总体分布函数为 $F(x;\theta)$ 的样本 $x_1,\cdots,x_n$，称统计量 $T = T(x_1,\cdots,x_n)$ 为 θ 的充分统计量，如果给定 T 的取值后，样本 $x_1,\cdots,x_n$ 的条件分布与 θ 无关。

♣

1.5.2 因子分解定理

定理 1.5.1 (Fischer-Neyman 因子分解定理)

对于来自总体概率函数为 $f(x;\theta)$ 的样本 $x_1,\cdots,x_n$，那么 $T = T(x_1,\cdots,x_n)$ 为充分统计量的充分必要条件为，存在函数 $g(t,\theta)$ 和 $h(x_1,\cdots,x_n)$，使得对于任意的 θ 和 $x_1,\cdots,x_n$，成立

$$f(x_1,\cdots,x_n;\theta) = g(T(x_1,\cdots,x_n);\theta)h(x_1,\cdots,x_n)$$

♡

定理 1.5.2

对于充分统计量 T，如果存在函数 h，使得 $T = h(S)$，那么统计量 S 也为充分统计量。

♡

第二章 参数估计

2.1 点估计的概念

2.1.1 点估计及无偏性

定义 2.1.1 (点估计)

对于来自总体的样本 $x_1,\cdots,x_n$，用于估计未知参数 θ 的统计量 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$ 称为 θ 的点估计。

定义 2.1.2 (无偏估计)

对于 θ 的点估计 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$，$\theta$ 的参数空间为 Θ，称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计，如果对于任意 $\theta\in\Theta$，成立

$$E_\theta(\hat{\theta})=\theta$$

定义 2.1.3 (可估参数)

称参数 θ 为可估参数，如果存在无偏估计 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$。

2.1.2 有效性

定义 2.1.4 (有效性)

对于 θ 的两个无偏估计 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$，称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效，如果对于任意 $\theta\in\Theta$，成立

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1)\le\mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)$$

且存在 $\theta_0\in\Theta$，使得成立

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1)<\mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)$$

2.2 矩估计及相关性

2.2.1 替换原理和矩法估计

定义 2.2.1 (替换原理)

1. 用样本矩替换总体矩。
2. 用样本矩的函数替换总体矩的函数。

根据替换原理，在总体分布形式未知场合对参数作出估计：

1. 用样本均值 $\bar{x}$ 估计总体均值 $E(X)$。
2. 用样本方差 s^2 估计总体方差 $\mathrm{Var}(X)$。
3. 用事件 A 出现的频率估计事件 A 发生的概率。
4. 用样本 p 分位数估计总体的 p 分位数。

定理 2.2.1 (Khinchin 大数定律)

对于独立同分布的随机变量序列 $X_1,\cdots,X_n$，如果对于任意 $i=1,\cdots,n$，总体 X 的 k 阶原点矩 $E(X^k)$ 存在，那么对于任意 $\varepsilon>0$，成立

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k - E(X^k)\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

♡

2.2.2 概率函数已知时未知参数的矩估计

定义 2.2.2 (矩估计)

对于具有概率函数 $p(x;\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 的总体，以及样本 $x_1,\cdots,x_n$，其中 $(\theta_1,\cdots,\theta_k)\in\Theta$ 是未知参数或参数向量，如果总体的 i 阶原点矩 μ_i 存在，而且 $\theta_i=\theta_i(\mu_1,\cdots,\mu_k)$，其中 $1\leq i\leq k$，那么 θ_i 的矩估计为

$$\hat{\theta}_i = \theta_i(a_1,\cdots,a_k),\quad i=1,\cdots,k$$

其中 a_i 为样本 i 阶原点矩

$$a_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_j^i,\quad i=1,\cdots,k$$

进一步，对于 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 的函数 $\eta=g(\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 的矩估计为

$$\hat{\eta} = g(\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_k)$$

♣

2.2.3 相合性

定义 2.2.3 (相合性)

对于未知参数 θ，以及 θ 的一个估计量 $\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(x_1,\cdots,x_n)$，称 $\hat{\theta}_n$ 为参数 θ 的相合估计，如果对于任意 $\varepsilon>0$，成立

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|\geq\varepsilon\right)=0$$

♣

定理 2.2.2 (相合估计的充分条件)

对于 θ 的一个估计量 $\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(x_1,\cdots,x_n)$，如果

$$\lim_{n\to\infty}E(\hat{\theta}_n)=\theta,\qquad \lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(\hat{\theta}_n)=0$$

那么 $\hat{\theta}_n$ 为参数 θ 的相合估计。

♡

定理 2.2.3 (相合估计在连续函数下的像为相合估计)

如果 $\hat{\theta}_{n_1},\cdots,\hat{\theta}_{n_k}$ 分别是 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 的相合估计，$\eta=g(\theta_1,\cdots,\theta_k)$ 是连续函数，那么 $\hat{\eta}=g(\hat{\theta}_{n_1},\cdots,\hat{\theta}_{n_k})$ 是 η 的相合估计。

♡

2.3 最大似然估计

2.3.1 最大似然估计

定义 2.3.1 (似然函数)

对于概率函数为 $p(x;\theta)$ 的总体，其中 $\theta \in \Theta$ 为一个或多个未知参数组成的参数向量，Θ 为参数空间，$x_1,\cdots,x_n$ 是来自该总体的样本，称样本的联合概率函数

$$L(\theta) = L(\theta; x_1,\cdots,x_n) = \prod_{k=1}^{n} p(x_k;\theta)$$

为样本的似然函数。

定义 2.3.2 (最大似然估计 MLE)

对于概率函数为 $p(x;\theta)$ 的总体，其中 $\theta \in \Theta$ 为一个或多个未知参数组成的参数向量，Θ 为参数空间，$x_1,\cdots,x_n$ 是来自该总体的样本，统计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$ 为 θ 的最大似然估计，如果对于任意 $\theta \in \Theta$，成立

$$L(\hat{\theta}) \geq L(\theta)$$

定理 2.3.1 (最大似然估计的不变性)

如果 $\hat{\theta}$ 为 θ 的最大似然估计，那么对于任意函数 g，$g(\hat{\theta})$ 是 $g(\theta)$ 的最大似然估计。

定理 2.3.2 (正态分布参数的最大似然估计)

对于来自正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本 $x_1,\cdots,x_n$，记样本均值为 $\overline{x}$，样本方差为 s^2，那么 μ 和 σ^2 的最大似然估计分别为

$$\hat{\mu} = \overline{x}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n}s^2$$

2.3.2 渐进正态性

定义 2.3.3 (渐进正态分布)

参数 θ 的相合估计 $\hat{\theta}_n$ 称为渐进正态的，如果存在趋于 0 的非负常数序列 $\sigma_n(\theta)$，使得成立 $\frac{\hat{\theta}_n-\theta}{\sigma_n(\theta)}$ 依分布收敛于标准正态分布。此时也称 $\hat{\theta}_n$ 服从渐进正态分布 $N(\theta,\sigma_n^2(\theta))$，记为 $\hat{\theta}_n \sim AN(\theta,\sigma_n^2(\theta))$。$\sigma_n^2(\theta)$ 称为 $\hat{\theta}_n$ 的渐近方差。

定理 2.3.3

对于密度函数为 $p(x;\theta)$ 的总体 X，其中 $\theta \in \Theta$，如果

1. 对于任意 x，以及任意 $\theta \in \Theta$，偏导数 $\frac{\partial \ln p}{\partial \theta}$，$\frac{\partial^2 \ln p}{\partial \theta^2}$ 和 $\frac{\partial^3 \ln p}{\partial \theta^3}$ 都存在。
2. 对于任意 $\theta \in \Theta$，成立

$$\left|\frac{\partial p}{\partial \theta}\right| < F_1(x), \qquad \left|\frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2}\right| < F_2(x), \qquad \left|\frac{\partial^3 p}{\partial \theta^3}\right| < F_3(x)$$

其中函数 $F_1(x), F_2(x), F_3(x)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)\mathrm{d}x < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} F_2(x)\mathrm{d}x < \infty$$

$$\sup_{\theta\in\Theta}\int_{-\infty}^{\infty} F_3(x)p(x;\theta)\mathrm{d}x < \infty$$

3. 对于任意 $\theta \in \Theta$，成立

$$0 < I(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial \ln p}{\partial\theta}\right)^2 p(x;\theta)\mathrm{d}x < \infty$$

那么对于来自该总体的样本 $x_1,\cdots,x_n$，存在未知参数 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(x_1,\cdots,x_n)$，且 $\hat{\theta}_n$ 具有相合性和渐近正态性，同时

$$\hat{\theta}_n \sim AN\left(\theta, \frac{1}{nI(\theta)}\right)$$

2.4 最小方差无偏估计

2.4.1 均方误差

定义 2.4.1 (均方误差)

对于 θ 的点估计 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$，称 $E(\hat{\theta}-\theta)^2$ 为 $\hat{\theta}$ 关于 θ 的均方误差，记为 $\mathrm{MSE}(\hat{\theta},\theta)$，或 $\mathrm{M}_\theta(\hat{\theta})$。

命题 2.4.1 (均方误差的性质)

1. - 对于 θ 的任意估计 $\hat{\theta}$ 而言，成立

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta},\theta) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta})-\theta)^2$$

2. 对于 θ 的无偏估计 $\hat{\theta}$ 而言，成立

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta},\theta) = \mathrm{Var}(\hat{\theta})$$

定义 2.4.2 (一致最小均方误差估计)

对于样本 $x_1,\cdots,x_n$，以及待估参数 θ 的一个估计类，称 $\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$ 是该估计类中 θ 中的一致最小均方误差估计，如果对于该估计类中另外任意一个 θ 的估计 $\tilde{\theta}$，在参数空间 Θ 上均成立

$$\mathrm{MSE}_\theta(\hat{\theta}) \le \mathrm{MSE}_\theta(\tilde{\theta})$$

2.4.2 一致最小方差无偏估计

定义 2.4.3 (一致最小方差无偏估计 UMVUE)

对于 θ 的一个无偏估计 $\hat{\theta}$，称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一致最小方差无偏估计，如果对于 θ 的任意无偏估计 $\tilde{\theta}$，在参数空间 Θ 上均成立

$$\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}) \le \mathrm{Var}_\theta(\tilde{\theta})$$

定理 2.4.1

对于来自某总体的样本 $X=(x_1,\cdots,x_n)$，如果 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(X)$ 是 θ 的一个无偏估计，$\mathrm{Var}(\hat{\theta})<\infty$，那么 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一致最小方差无偏估计的充分必要条件是，对于任意满足 $E(\varphi(X))=0$ 和 $\mathrm{Var}(\varphi(X))<\infty$ 的 $\varphi(X)$，以及任意 $\theta\in\Theta$，成立

$$\mathrm{Cov}_\theta(\hat{\theta},\varphi)=0$$

即

$$E(\hat{\theta}\varphi)=0$$

♡

2.4.3 充分性原则

定理 2.4.2

对于来自总体概率密度函数为 $p(x;\theta)$ 的样本 $x_1,\cdots,x_n$，如果 $T=T(x_1,\cdots,x_n)$ 是 θ 的充分统计量，那么对于 θ 的任意无偏估计 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$，成立 $\tilde{\theta}=E(\hat{\theta}|T)$ 是 θ 的无偏估计，且

$$\mathrm{Var}(\tilde{\theta})\le\mathrm{Var}(\hat{\theta})$$

♡

2.4.4 Cramer-Rao 不等式

定义 2.4.4 (Fisher 信息量)

对于满足如下条件的概率函数为 $p(x;\theta),\theta\in\Theta$ 的总体

1. 参数空间 Θ 是直线上的一个开区间。
2. 支撑 $S=\{x:p(x;\theta)>0\}$ 与 θ 无关。
3. 导数 $\frac{\partial}{\partial\theta}p(x;\theta)$ 对任意 $\theta\in\Theta$ 均存在。
4. 对于 $p(x;\theta)$，积分与微分运算可交换次序，即
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}p(x;\theta)\mathrm{d}x=\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{\infty}p(x;\theta)\mathrm{d}x=0$$
5. 期望 $E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x;\theta)\right)^2$ 存在。

称

$$I(\theta)=E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x;\theta)\right)^2$$

为总体分布的 Fisher 信息量。如果二阶导数 $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}p(x;\theta)$ 对于任意 $\theta\in\Theta$ 存在，那么

$$I(\theta)=-E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(x;\theta)\right)$$

♣

定理 2.4.3 (Cramer-Rao 不等式)

对于满足 Fisher 信息量定义的总体分布 $p(x;\theta)$，$X=(x_1,\cdots,x_n)$ 是来自该总体的样本，如果 $T=T(X)$ 是 $g(\theta)$ 的任意无偏估计，即

$$g(\theta)=\int_{\mathbb{R}^n}T(X)L(X;\theta)\mathrm{d}X$$

其中 $L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$ 为 $X=(x_1,\cdots,x_n)$ 的总体概率密度函数

$$L(X;\theta)=\prod_{k=1}^{n}p(x_k;\theta)$$

并且 $g'(\theta)=\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta}$ 存在，同时对于任意 $\theta\in\Theta$，$g(\theta)$ 的微商可在积分号下进行，即

$$g'(\theta)=\int_{\mathbb{R}^n} T(X)\frac{\partial}{\partial\theta}L(X;\theta)\mathrm{d}X$$

（对于离散总体，将上述积分号改为求和符号）那么

$$\mathrm{Var}(T)\geq\frac{(g'(\theta))^2}{nI(\theta)}$$

其中 $I(\theta)$ 为总体分布的 Fisher 信息量，$\frac{(g'(\theta))^2}{nI(\theta)}$ 称为 $g(\theta)$ 的无偏估计的方差的 C-R 下界。当等号成立时，称 $T=T(X)$ 为 $g(\theta)$ 的**有效估计**，有效估计一定是一致最小方差无偏估计。

2.5 Bayes 估计

2.6 统计判断的基础

Bayes 学派基本观点：任意未知量都可看作随机变量，可用一个概率分布去描述，这个分布称为先验分布。

2.6.1 Bayes 公式的密度函数形式

定理 2.6.1 (Bayes 公式的密度函数形式)

1. $p(x\mid\theta)$ 表示随机变量 θ 取给定值时总体的条件概率函数。
2. 根据参数 θ 的先验信息确定先验分布 $\pi(\theta)$。
3. 样本 $X=(x_1,\cdots,x_n)$ 的产生分两步进行，首先设想从先验分布 $\pi(\theta)$ 产生一个个体 θ_0，其次从 $p(X\mid\theta)$ 中产生一组样本，此时样本 X 的联合条件概率函数为
$$P(X\mid\theta_0)=\prod_{k=1}^{n}p(x_k\mid\theta)$$
4. 由于 θ_0 是设想出来的，因此需要考虑 $\pi(\theta)$，那么样本 X 和参数 θ 的联合分布为
$$h(X,\theta)=P(X\mid\theta)\pi(\theta)$$
5. 将 $h(X,\theta)$ 分解为
$$h(X,\theta)=\pi(\theta\mid X)m(X)$$
其中 $m(X)$ 为 X 的边际概率函数
$$m(X)=\int_\Theta h(X,\theta)\mathrm{d}\theta=\int_\Theta P(X\mid\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta$$
进而 θ 的后验分布为
$$\pi(\theta\mid X)=\frac{h(X,\theta)}{m(X)}=\frac{P(X\mid\theta)\pi(\theta)}{\int_\Theta P(X\mid\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta}$$

2.6.2 Bayes 估计

定义 2.6.1 (Bayes 估计)

由后验分布 $\pi(\theta\mid X)$ 估计 θ 有三种常用的方法：

1. 最大后验估计：后验分布的密度函数的最大值点。
2. 后验中位数估计：后验分布的中位数。

3. 后验期望估计：后验分布的均值。

称后验期望估计为 Bayes 估计，记为 $\hat{\theta}$。

2.6.3 共轭先验分布

定义 2.6.2 (共轭先验分布)

对于总体分布 $p(x;\theta)$ 中的参数 θ，$\pi(\theta)$ 是其先验分布，如果对于任意来自该总体的样本观测值得到的后验分布 $\pi(\theta \mid X)$ 与 $\pi(\theta)$ 属于同一个分布族，那么称该分布族为 θ 的共轭先验分布（族）。

2.7 区间估计

2.7.1 区间估计的概念

定义 2.7.1 (置信区间)

对于总体的参数 $\theta \in \Theta$，以及来自该总体的样本 $x_1,\cdots,x_n$，给定 $\alpha \in (0,1)$，如果两个统计量 $\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_L(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $\hat{\theta}_U = \hat{\theta}_U(x_1,\cdots,x_n)$，满足对于任意 $\theta \in \Theta$，成立

$$P_\theta(\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U) \ge 1-\alpha$$

那么称随机区间 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间，或简称 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 为 θ 的 $1-\alpha$ 置信区间。其中 $\hat{\theta}_L$ 和 $\hat{\theta}_U$ 分别称为 θ 的（双侧）置信下限和置信上限。

定义 2.7.2 (同等置信区间)

对于总体的参数 $\theta \in \Theta$，以及来自该总体的样本 $x_1,\cdots,x_n$，给定 $\alpha \in (0,1)$，如果两个统计量 $\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_L(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $\hat{\theta}_U = \hat{\theta}_U(x_1,\cdots,x_n)$，满足对于任意 $\theta \in \Theta$，成立

$$P_\theta(\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U) = 1-\alpha$$

那么称随机区间 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的同等置信区间。

定义 2.7.3 (单侧置信下限)

对于总体的参数 $\theta \in \Theta$，以及来自该总体的样本 $x_1,\cdots,x_n$，给定 $\alpha \in (0,1)$，如果统计量 $\hat{\theta}_L = \hat{\theta}_L(x_1,\cdots,x_n)$ 满足对于任意 $\theta \in \Theta$，成立

$$P_\theta(\hat{\theta}_L \le \theta) \ge 1-\alpha$$

那么称 $\hat{\theta}_L$ 为 θ 的（单侧）置信下限。

定义 2.7.4 (单侧置信上限)

对于总体的参数 $\theta \in \Theta$，以及来自该总体的样本 $x_1,\cdots,x_n$，给定 $\alpha \in (0,1)$，如果统计量 $\hat{\theta}_U = \hat{\theta}_U(x_1,\cdots,x_n)$ 满足对于任意 $\theta \in \Theta$，成立

$$P_\theta(\hat{\theta}_U \ge \theta) \ge 1-\alpha$$

那么称 $\hat{\theta}_U$ 为 θ 的（单侧）置信上限。

2.7.2 枢轴量法

定理 2.7.1 (构造枢轴量的方法)

1. 构造函数 $G = G(x_1, \cdots, x_n, \theta)$，使得 G 的分布不依赖于 θ，此函数 G 称为**枢轴量**。
2. 选择常数 a, b，使得对于给定 $\alpha \in (0,1)$，使得成立
$$P(a \le G \le b) = 1 - \alpha$$
3. 将不等式 $a \le G \le b$ 等价变形为 $\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U$，即
$$P_\theta(\hat{\theta}_L \le \theta \le \hat{\theta}_U) = 1 - \alpha$$
那么区间 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 为 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 同等置信区间。
4. 其中常数 a, b 的选择应该使得区间 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 的长度最短，否则使得成立
$$P(G < a) = P(G > b) = \frac{\alpha}{2}$$
称这样得到的置信区间 $[\hat{\theta}_L, \hat{\theta}_U]$ 为**等尾置信区间**。

♡

2.7.3 单个正态总体参数的置信区间

表 2.1: 单个正态总体参数的置信区间

目标	条件	枢轴量	分布	置信区间
μ	σ 已知	$\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu)}{\sigma}$	$N(0,1)$	$\left[\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} n_{1-\frac{\alpha}{2}},\quad \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} n_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$
μ	σ 未知	$\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu)}{s}$	$T(n-1)$	$\left[\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}},\quad \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$
σ^2	μ 未知	$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}},\quad \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right]$

2.7.4 大样本置信区间

在有些场合，寻找枢轴量及其分布比较困难。在样本量充分大时，可用渐进分布来构造近似的置信区间。以下为二点分布关于比例 p 的置信区间。

对于来自二点分布 $b(1,p)$ 的样本 $x_1, \cdots, x_n$，由中心极限定理

$$N = \frac{\sqrt{n}(\overline{x} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \dot{\sim} N(0,1)$$

因此置信水平为 $1-\alpha$ 的同等置信区间为

$$\left[\frac{1}{1+\frac{n^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}}\left(\overline{x} + \frac{n^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n} - \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n} n^2_{1-\frac{\alpha}{2}} + \left(\frac{n^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n}\right)^2}\right),\quad \frac{1}{1+\frac{n^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}}\left(\overline{x} + \frac{n^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n} + \sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n} n^2_{1-\frac{\alpha}{2}} + \left(\frac{n^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n}\right)^2}\right)\right]$$

其中 $n_{1-\frac{\alpha}{2}}$ 为 $N(0,1)$ 的 $1-\frac{\alpha}{2}$ 分位数。由于 n 充分大，略去 $\frac{n^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}$ 项，因此置信水平为 $1-\alpha$ 的同等置信区间近似为

$$\left[\overline{x} - n_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}},\quad \overline{x} + n_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\right]$$

2.7.5 样本量的确定

定义 2.7.5 (保证概率)

称置信水平 $1-\alpha$ 为保证概率。

定义 2.7.6 (绝对误差)

称置信区间的半径（即长度的一半）为绝对误差。

2.7.6 两个正态总体下的置信区间

$x_1,\cdots,x_m$ 是取自 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的样本，$y_1,\cdots,y_n$ 是取自 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的样本，两个样本相互独立，记 $\overline{x}$ 和 $\overline{y}$ 分别记为两者的样本均值，s_x^2 和 s_y^2 分别记为两者的样本方差。

表 2.2: 两个正态总体下的置信区间

目标	条件	枢轴量	分布	置信区间
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2 和 σ_2^2 已知	$\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}$	$N(0,1)$	$\left[(\overline{x}-\overline{y})-n_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}},\quad (\overline{x}-\overline{y})+n_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\right]$
$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$ 未知	$\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$	$T(m+n-2)$	$\left[(\overline{x}-\overline{y})-s_w t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},\quad (\overline{x}-\overline{y})+s_w t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right]$
$\mu_1-\mu_2$	$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}=c$ 已知	$\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{s_{w_c}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{c}{n}}}$	$T(m+n-2)$	$\left[(\overline{x}-\overline{y})-s_{w_c} t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{c}{n}},\quad (\overline{x}-\overline{y})+s_{w_c} t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{c}{n}}\right]$
$\mu_1-\mu_2$	n_1 和 n_2 充分大	$\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n}}}$	$N(0,1)$	$\left[(\overline{x}-\overline{y})-n_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n}},\quad (\overline{x}-\overline{y})+n_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n}}\right]$
$\mu_1-\mu_2$	一般情况	$\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{s_0}$	$T(l)$	$\left[(\overline{x}-\overline{y})-s_0 t_{1-\frac{\alpha}{2}},\quad (\overline{x}-\overline{y})+s_0 t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$
σ_2^2/σ_1^2	一般情况	$\frac{s_x^2/\sigma_1^2}{s_y^2/\sigma_2^2}$	$F(m-1,n-1)$	$\left[\frac{s_x^2}{s_y^2}\frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2}}},\quad \frac{s_x^2}{s_y^2}\frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2}}}\right]$

其中

$$s_w^2=\frac{(m-1)s_x^2+(n-1)s_y^2}{m+n-2}$$

$$s_{w_c}^2=\frac{(m-1)s_x^2+(n-1)\frac{s_y^2}{c}}{m+n-2}$$

$$s_0^2=\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n}$$

$$l=\left[\frac{s_0^4}{\frac{s_x^4}{m^2(m-1)}+\frac{s_y^4}{n^2(n-1)}}\right]$$

第三章 假设检验

3.1 假设检验的基本思想与概念

3.1.1 假设检验问题

基本思想：如果试验结果与假设 H 发生矛盾，那么拒绝原假设 H，否则接受原假设 H。

假设检验问题：

1. **假设**：两个非空不交参数集合。
2. **检验**：通过样本对一个假设作出“对”或“不对”的具体判断规则。
3. **参数假设检验问题**：假设可用一个参数的集合表示的检验问题。

3.1.2 假设检验的基本步骤

一、建立假设

对于来自参数分布族 $\{F(x,\theta):\theta\in\Theta\}$ 的样本 $x_1,\cdots,x_n$，其中 Θ 为参数空间，如果非空集合 $\Theta_0\subset\Theta$，那么命题 $H_0:\theta\in\Theta_0$ 称为**原假设**或**零假设**，命题 $H_a:\theta\in\Theta\setminus\Theta_0$ 称为**对立假设**或**备择假设**，那么 H_0 对 H_a 的假设检验问题记为

$$H_0:\theta\in\Theta_0 \qquad \text{vs} \qquad H_a:\theta\in\Theta\setminus\Theta_0$$

如果 Θ_0 仅含有一个点，那么称 H_0 为**简单原假设**，否则称为**复杂原假设**或**复合原假设**。当 H_0 为简单假设时，其形式可写为 $H_0:\theta=\theta_0$，此时备择假设通常有如下三种可能：

$$H_1:\theta\neq\theta_0,\qquad H_2:\theta<\theta_0,\qquad H_3:\theta>\theta_0$$

称 H_0 vs H_1 为**双侧假设**或**双边假设**，H_0 vs H_2 以及 H_0 vs H_3 为**单侧假设**或**单边假设**。

在假设检验中，通常将不宜轻易否定的假设作为原假设。

二、选择检验统计量，给出拒绝域形式

当有了具体的样本后，将样本空间划分为两个互不相交的部分 W 和 $\overline{W}$，当样本属于 W 时，拒绝 H_0，否则接受 H_0。称 W 为该检验的**拒绝域**，$\overline{W}$ 为该检验的**接受域**。事实上，在拒绝域和接受域外，还有**保留域**，但通常将保留域合并于接受域内。

选择分布已知的**检验统计量** $T(X)$，确定拒绝域 W 的形式。

三、选择显著性水平

当 $\theta\in\Theta_0$ 时，样本由于随机性却落入了拒绝域 W，于是采取了拒绝 H_0 的错误决策，称之为**第一类错误**或**拒真错误**，记第一类错误概率为

$$\alpha(\theta)=P\{X\in W\mid H_0\},\quad \theta\in\Theta_0$$

当 $\theta\in\Theta\setminus\Theta_0$ 时，样本由于随机性却落入了接受域 $\overline{W}$，于是采取了接受 H_0 的错误决策，称之为**第二类错误**或**取伪错误**，记第二类错误概率为

$$\beta(\theta)=P\{X\in\overline{W}\mid H_a\},\quad \theta\in\Theta\setminus\Theta_0$$

定义 3.1.1 (势函数)

对于检验问题

$$H_0:\theta\in\Theta_0 \qquad \text{vs} \qquad H_a:\theta\in\Theta\setminus\Theta_0$$

其拒绝域为 W，那么定义势函数为

$$\rho(\theta)=P_\theta(X\in W),\quad \theta\in\Theta$$

即

$$\rho(\theta)=\begin{cases}\alpha(\theta), & \theta\in\Theta_0\\ 1-\beta(\theta), & \theta\in\Theta\setminus\Theta_0\end{cases}$$

♣

定义 3.1.2 (显著性检验)

对于检验问题

$$H_0:\theta\in\Theta_0 \quad \text{vs} \quad H_a:\theta\in\Theta\setminus\Theta_0$$

其势函数为 $\rho(\theta)$，如果一个检验满足对于任意 $\theta\in\Theta_0$，成立

$$\rho(\theta)\le\alpha$$

那么称该检验为显著性水平为 α 的显著性检验，简称水平为 α 的检验。

♣

四、给出拒绝域

依据显著性水平 α 以及拒绝域 W 的形式，确定具体的拒绝域。

五、做出判断

由拒绝域 W 唯一相互确定的**判断准则**为

1. 如果 $(x_1,\cdots,x_n)\in W$，那么拒绝 H_0。
2. 如果 $(x_1,\cdots,x_n)\in\overline{W}$，那么接受 H_0。

3.1.3 检验的 p 值

定义 3.1.3 (检验的 p 值)

在假设检验问题中，利用样本观测值能够作出拒绝原假设的最小显著性水平称为检验的 p 值。

1. 如果 $p\le\alpha$，那么在显著性水平 α 下拒绝 H_0。
2. 如果 $p>\alpha$，那么在显著性水平 α 下接受 H_0。

♣

3.2 正态总体参数假设检验

3.2.1 单个正态总体均值的检验

表 3.1: 单个正态总体均值的检验

检验	条件	H_0	H_a	统计检验量	分布	拒绝域	p 值
		$\mu \le \mu_0$	$\mu > \mu_0$			$\{u \ge u_{1-\alpha}\}$	$1-\Phi(u_0)$
u 检验	σ 已知	$\mu \ge \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$u = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu_0)}{\sigma}$	$N(0,1)$	$\{u \le u_{\alpha}\}$	$\Phi(u_0)$
		$\mu = \mu_0$	$\mu \ne \mu_0$			$\{\lvert u\rvert \ge u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$2(1-\Phi(\lvert u_0\rvert))$
		$\mu \le \mu_0$	$\mu > \mu_0$			$\{t \ge t_{1-\alpha}\}$	$P(T \ge t_0)$
t 检验	σ 未知	$\mu \ge \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$t = \frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu_0)}{s}$	$T(n-1)$	$\{t \le t_{\alpha}\}$	$P(T \le t_0)$
		$\mu = \mu_0$	$\mu \ne \mu_0$			$\{\lvert t\rvert \ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$P(\lvert T\rvert \ge \lvert t_0\rvert)$

3.2.2 两个正态总体均值差的检验

表 3.2: 两个正态总体均值差的检验

检验	条件	H_0	H_a	检验统计量	分布	拒绝域	p 值
		$\mu_1 \le \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$			$\{u \ge u_{1-\alpha}\}$	$1-\Phi(u_0)$
u 检验	σ_1, σ_2 已知	$\mu_1 \ge \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$u=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}$	$N(0,1)$	$\{u \le u_\alpha\}$	$\Phi(u_0)$
		$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \ne \mu_2$			$\{\lvert u\rvert \ge u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$2(1-\Phi(\lvert u_0\rvert))$
		$\mu_1 \le \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$			$\{t \ge t_{1-\alpha}\}$	$P(T \ge t_0)$
t 检验	$\sigma_1 = \sigma_2$ 未知	$\mu_1 \ge \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$t=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$	$T(m+n-2)$	$\{t \le t_\alpha\}$	$P(T \le t_0)$
		$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \ne \mu_2$			$\{\lvert t\rvert \ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$P(\lvert T\rvert \ge \lvert t_0\rvert)$
		$\mu_1 \le \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$			$\{u \ge u_{1-\alpha}\}$	$1-\Phi(u_0)$
u 检验	m, n 充分大	$\mu_1 \ge \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$u=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n}}}$	$N(0,1)$	$\{u \le u_\alpha\}$	$\Phi(u_0)$
		$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \ne \mu_2$			$\{\lvert u\rvert \ge u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$2(1-\Phi(\lvert u_0\rvert))$
		$\mu_1 \le \mu_2$	$\mu_1 > \mu_2$			$\{t \ge t_{1-\alpha}\}$	$P(T \ge t_0)$
t 检验	一般情况	$\mu_1 \ge \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$t=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n}}}$	$T(l)$	$\{t \le t_\alpha\}$	$P(T \le t_0)$
		$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 \ne \mu_2$			$\{\lvert t\rvert \ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$P(\lvert T\rvert \ge \lvert t_0\rvert)$

其中

$$s_w^2=\frac{(m-1)s_x^2+(n-1)s_y^2}{m+n-2}$$

$$l=\left[\frac{\left(\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n}\right)^2}{\frac{s_x^4}{m^2(m-1)}+\frac{s_y^4}{n^2(n-1)}}\right]$$

3.2.3 成对数据检验

表 3.3: 成对数据检验

H_0	H_a	统计检验量	分布	拒绝域	p 值
$\mu \le 0$	$\mu > 0$			$\{t \ge t_{1-\alpha}\}$	$P(T \ge t_0)$
$\mu \ge 0$	$\mu < 0$	$t = \frac{\sqrt{n}\bar{d}}{s_d}$	$T(n-1)$	$\{t \le t_\alpha\}$	$P(T \le t_0)$
$\mu = 0$	$\mu \ne 0$			$\{\lvert t\rvert \ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$P(\lvert T\rvert \ge \lvert t_0\rvert)$

3.2.4 正态总体方差的检验

表 3.4: 正态总体方差的检验

检验	条件	H_0	H_a	统计检验量	分布	拒绝域	p 值
		$\sigma^2 \le \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$			$\{\chi^2 \ge \chi^2_{1-\alpha}\}$	$P(\chi^2 \ge \chi_0^2)$
χ^2 检验	一个	$\sigma^2 \ge \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\{\chi^2 \le \chi^2_\alpha\}$	$P(\chi^2 \le \chi_0^2)$
		$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \ne \sigma_0^2$			$\{\chi^2 \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{\chi^2 \ge \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$2\min\{P(\chi^2 \le \chi_0^2), P(\chi^2 \ge \chi_0^2)\}$
		$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$			$\{F \ge F_{1-\alpha}\}$	$P(F \ge F_0)$
F 检验	两个	$\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F = \frac{s_x^2}{s_y^2}$	$F(m-1, n-1)$	$\{F \le F_\alpha\}$	$P(F \le F_0)$
		$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$			$\{F \le F_{\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{F \ge F_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$2\min\{P(F \le F_0), P(F \ge F_0)\}$

3.3 其他分布参数的假设检验

表 3.5: 其他分布参数的假设检验

检验	条件	H_0	H_a	统计检验量	分布	拒绝域	p 值
		$\lambda \le \lambda_0$	$\lambda > \lambda_0$			$\{\chi^2 \ge \chi^2_{1-\alpha}\}$	$P(\chi^2 \ge \chi^2_0)$
χ^2 分布	$\mathrm{Exp}(\frac{1}{\lambda})$	$\lambda \ge \lambda_0$	$\lambda < \lambda_0$	$\frac{2n\overline{x}}{\lambda_0}$	$\chi^2(2n)$	$\{\chi^2 \le \chi^2_\alpha\}$	$P(\chi^2 \le \chi^2_0)$
		$\lambda = \lambda_0$	$\lambda \ne \lambda_0$			$\{\chi^2 \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{\chi^2 \ge \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$2\min\{P(\chi^2 \le \chi^2_0), P(\chi^2 \ge \chi^2_0)\}$
		$p \le p_0$	$p > p_0$				$P(x \ge x_0)$
B 检验	$B(1,p)$	$p \ge p_0$	$p < p_0$	x	$B(n,p)$		$P(x \le x_0)$
		$p = p_0$	$p \ne p_0$				$2\min\{P(x \le x_0), P(x \ge x_0)\}$
		$\theta \le \theta_0$	$\theta > \theta_0$			$\{u \ge u_{1-\alpha}\}$	$1 - \Phi(u_0)$
u 检验	大样本分布 $F(x;\theta)$	$\theta \ge \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\theta_0)}{\sqrt{\sigma^2(\hat{\theta})}}$	$N(0,1)$	$\{u \le u_\alpha\}$	$\Phi(u_0)$
		$\theta = \theta_0$	$\theta \ne \theta_0$			$\{\lvert u\rvert \ge u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$2(1 - \Phi(\lvert u_0\rvert))$

其中分布 $F(x;\theta)$ 的均值为 θ，方差为 $\sigma(\theta)$，$\hat{\theta}$ 为 θ 的最大似然估计。

3.4 似然比检验与分布拟合检验

3.4.1 似然比检验的思想

定义 3.4.1 (似然比)

对于来自密度函数为 $p(x;\theta), \theta \in \Theta$ 的总体的样本 $x_1, \cdots, x_n$，对于如下检验问题

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs} \quad H_a : \theta \in \Theta \setminus \Theta_0$$

定义改假设检验问题的似然比统计量为

$$\Lambda(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\sup_{\theta\in\Theta} p(x_1, \cdots, x_n; \theta)}{\sup_{\theta\in\Theta_0} p(x_1, \cdots, x_n; \theta)}$$

即

$$\Lambda(x_1, \cdots, x_n) = \frac{p(x_1, \cdots, x_n; \hat{\theta})}{p(x_1, \cdots, x_n; \hat{\theta}_0)}$$

其中 $\hat{\theta}$ 和 $\hat{\theta}_0$ 分别为参数空间 Θ 和 Θ_0 上的最大似然估计。 ♣

定义 3.4.2 (似然比检验 LRT)

对于来自密度函数为 $p(x;\theta), \theta \in \Theta$ 的总体的样本 $x_1, \cdots, x_n$，对于如下检验问题

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs} \quad H_a : \theta \in \Theta \setminus \Theta_0$$

其似然比统计量

$$\Lambda(x_1,\cdots,x_n)=\frac{p(x_1,\cdots,x_n;\hat{\theta})}{p(x_1,\cdots,x_n;\hat{\theta}_0)}$$

作为检验问题的检验统计量，且取拒绝域为 $W=\{\Lambda(x_1,\cdots,x_n)\geq\lambda_0\}$，其中临界值 λ_0 满足对于任意 $\theta\in\Theta_0$，成立

$$P_\theta(\Lambda(x_1,\cdots,x_n)\geq\lambda_0)\leq\alpha$$

那么称此检验为显著性水平为 α 的似然比检验。

♣

3.4.2 分布数据的 χ^2 拟合优度检验

定理 3.4.1

总体被分为 r 类 $A_1,\cdots,A_r$，考虑假设检验

$$H_0:A_k\text{所占的比率为}p_k,\quad k=1,\cdots,r$$

其中 p_k 已知且 $\sum_{k=1}^r p_k=1$。从该总体抽出 n 个样本，n_k 为样本中属于 A_k 的样本个数，记检验统计量为

$$\chi^2=\sum_{k=1}^r\frac{(n_k-np_k)^2}{np_k}$$

那么当 H_0 成立时，成立

$$\chi^2\xrightarrow{\mathrm{L}}\chi^2(r-1)$$

因此对于显著性水平 α，拒绝域为 $W=\{\chi^2\geq\chi^2_{1-\alpha}\}$，检验的 p 值为 $p=P(\chi^2\geq\chi^2_0)$。

如果 A_k 出现的概率含有 s 个参数，那么可用最大似然估计方法估计出该 s 个参数，然后再算出 p_k 的估计值 $\hat{p}_k$，于是统计检验量

$$\chi^2=\sum_{k=1}^r\frac{(n_k-n\hat{p}_k)^2}{n\hat{p}_k}\xrightarrow{\mathrm{L}}\chi^2(r-s-1)$$

♡

3.4.3 分布的 χ^2 拟合优度检验

对于来自分布函数为 $F(x)$ 的总体的样本 $x_1,\cdots,x_n$，考虑假设检验问题

$$H_0:F(x)=F_0(x)$$

其中 $F_0(x)$ 为可含参的理论分布。

一、总体 X 为离散分布

如果总体 X 为至多可数个值 $a_1,a_2,\cdots$，将其分为 r 类 $A_1,\cdots,A_r$，使得每一个 A_k 中的样本个数 n_k 不小于 5，记 $P(X\in A_k)=p_k$，那么原假设检验转化为

$$H_0:A_kp_k,\quad k=1,\cdots,r$$

二、总体 X 为连续分布

如果总体 X 的分布为 F_0，选取 $-\infty=a_0<a_1<\cdots<a_{r-1}<a_r=\infty$，记 $A_k=(a_{k-1},a_k]$，那么

$$p_k=P(X\in A_k)=F_0(a_k)-F_0(a_{k-1}),\quad k=1,\cdots,r$$

于是原假设转化为

$$H_0:A_kp_k,\quad k=1,\cdots,r$$

3.4.4 列联表的独立性检验

将总体分为两个属性 A 和 B，其中 A 有 r 个类 $A_1,\cdots,A_r$，B 有 s 个类 $B_1,\cdots,B_s$，从总体中抽取 n 个样本，设其中有 n_{ij} 个个体属于 A_i 和 B_j，构造列联表 $\{n_{ij}\}_{r\times s}$。

记总体中的个体仅属于 A_i 和仅属于 B_j 的概率分别为 $p_{i\cdot}$ 和 $p_{\cdot j}$，总体中的个体同时属于 A_i 和 B_j 的概率为 p_{ij}，那么得到二维离散分布表 $\{p_{ij}\}_{r\times s}$，A 和 B 两属性度量的假设可表述为

$$H_0: p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j},\quad i=1,\cdots,r; j=1,\cdots,s$$

H_0 成立时 p_{ij} 的最大似然估计为

$$\hat{p}_{ij}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{r}n_{kj}\sum_{k=1}^{s}n_{ik}$$

那么检验统计量为

$$\chi^2=\sum_{i,j}\frac{(n_{ij}-n\hat{p}_{ij})^2}{n\hat{p}_{ij}}\xrightarrow{\text{L}}\chi^2((r-1)(s-1))$$

因此对于显著性水平 α，拒绝域为 $W=\{\chi^2\geq\chi^2_{1-\alpha}\}$，检验的 p 值为 $p=P(\chi^2\geq\chi^2_0)$。

3.5 正态性检验

3.5.1 正态概率纸

对于给定的样本观测值 $x_1,\cdots,x_n$，做点

$$\left(x_{(k)},\frac{k-0.375}{n+0.25}\right),\quad k=1,\cdots,n$$

如果诸点在一条直线附近，那么认为该批数据来自正态总体；否则不认为该批数据来自正态总体。

3.5.2 W 检验

对于来自正态分布总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本 $x_1,\cdots,x_n$，其中 $8\leq n\leq 50$，定义 W 统计量为

$$W=\frac{\sum_{k=1}^{n}(w_k-\overline{w})^2(x_{(k)}-\overline{x})^2}{\sum_{k=1}^{n}(w_k-\overline{w})^2\sum_{k=1}^{n}(x_{(k)}-\overline{x})^2}=\frac{\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}w_k^2(x_{(k)}-x_{(n+1-k)})^2}{\sum_{k=1}^{n}(x_{(k)}-\overline{x})^2}$$

其中

$$\boldsymbol{e}=\begin{pmatrix}E\left(\frac{x_{(1)}-\mu}{\sigma}\right)\\ \vdots\\ E\left(\frac{x_{(n)}-\mu}{\sigma}\right)\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\text{Cov}\left(\frac{x_{(1)}-\mu}{\sigma},\frac{x_{(1)}-\mu}{\sigma}\right) & \cdots & \text{Cov}\left(\frac{x_{(1)}-\mu}{\sigma},\frac{x_{(n)}-\mu}{\sigma}\right)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \text{Cov}\left(\frac{x_{(n)}-\mu}{\sigma},\frac{x_{(1)}-\mu}{\sigma}\right) & \cdots & \text{Cov}\left(\frac{x_{(n)}-\mu}{\sigma},\frac{x_{(n)}-\mu}{\sigma}\right)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}=\frac{\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{e}}{\sqrt{\boldsymbol{e}^T(\boldsymbol{C}^{-1})^2\boldsymbol{e}}}$$

拒绝域为 $\{W\leq W_\alpha\}$，其中 W_α 为 α 分位数。

3.5.3 EP 检验

对于来自正态分布总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本 $x_1,\cdots,x_n$，其中 $n\geq 8$，定义 EP 检验统计量为

$$T_{\mathrm{EP}}=1+\frac{n}{\sqrt{3}}+\frac{2}{n}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\exp\left(-\frac{(x_j-x_i)^2}{2\frac{n-1}{n}s^2}\right)-\sqrt{2}\sum_{k=1}^{n}\exp\left(-\frac{(x_k-\overline{x})^2}{4\frac{n-1}{n}s^2}\right)$$

拒绝域为 $\{T_{\mathrm{EP}}\geq T_{\mathrm{EP}_{1-\alpha}}\}$，其中 $T_{\mathrm{EP}_{1-\alpha}}$ 为 $1-\alpha$ 分位数。

3.6 非参数检验

3.6.1 游程检验

对于依时间顺序连续得到的样本观测值 $x_1,\cdots,x_n$，记样本中位数为 m_e，对于 $k=1,\cdots,n$，记

$$y_k=\begin{cases}1, & x_k\geq m_e\\ 0, & x_k<m_e\end{cases}$$

$y_1,\cdots,y_n$ 构成 $0-1$ 序列。

记 $0-1$ 序列中 0 和 1 的个数分别为 n_1 和 n_2，游程总数为 R，那么 $1<n_1,n_2<n$ 且 $2\leq R\leq n$。同时 $|n_1-n_2|$ 为 0 或 1。原假设为

$$H_0:\text{样本序列符合随机抽取的原则}$$

R 的分布如下

$$P(R=2k)=\frac{2\binom{n_1-1}{k-1}\binom{n_2-1}{k-1}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}},\quad k=1,\cdots,\left[\frac{n_1+n_2}{2}\right]$$

$$P(R=2k+1)=\frac{\binom{n_1-1}{k-1}\binom{n_2-1}{k}+\binom{n_1-1}{k}\binom{n_2-1}{k-1}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}},\quad k=1,\cdots,\left[\frac{n_1+n_2-1}{2}\right]$$

拒绝域为 $\{R\leq R_{\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{R\geq R_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$，检验的 p 值为 $2\min\{P(R\leq R_0),P(R\geq R_0)\}$。

3.6.2 符号检验

表 3.6: 符号检验

H_0	H_a	拒绝域	检验的 p 值
$x_p\leq x_0$	$x_p>x_0$	$\{S^+\geq c\}$	$\sum_{k=S_0^+}^{n}\binom{n}{k}(1-p)^kp^{n-k}$
$x_p\geq x_0$	$x_p<x_0$	$\{S^+\leq c\}$	$\sum_{k=0}^{S_0^+}\binom{n}{k}(1-p)^kp^{n-k}$
$x_p=x_0$	$x_p\neq x_0$	$\{S^+\leq c_1\}\cup\{S^+\geq c_2\}$	$2\min\left\{\sum_{k=0}^{S_0^+}\binom{n}{k}(1-p)^kp^{n-k},\sum_{k=S_0^+}^{n}\binom{n}{k}(1-p)^kp^{n-k}\right\}$

其中 S^+ 为 $x_1-x_0,\cdots,x_n-x_0$ 中正数的个数，即

$$S^+=\sum_{k=1}^{n}I_{x_k>x_0}$$

3.6.3 秩和检验

定义 3.6.1 (秩)

对于来自连续分布 $F(x)$ 的简单随机样本 $x_1,\cdots,x_n$，次序样本为 $x_{(1)},\cdots,x_{(n)}$，称 x_k 秩为 r_k，如果 $x_k=x_{(r_k)}$，记作 $R_k=r_k$。

♣

定义 3.6.2 (秩统计量)

对于来自连续分布 $F(x)$ 的简单随机样本 $x_1,\cdots,x_n$，R_k 为 x_k 的秩，那么称 $R=(R_1,\cdots,R_n)$ 为 $x_1,\cdots,x_n$ 的秩统计量。

♣

对于来自连续分布 $F(x-\theta)$ 的简单随机样本 $x_1,\cdots,x_n$,其中 θ 为总体的中位数,记 R_k 为 $|x_k|$ 在 $|x_1|,\cdots,|x_n|$ 中的秩，定义符号秩和统计量为

$$W^+=\sum_{k=1}^{n}R_kI_{x_k>0}\sim W^+(n)$$

H_0	H_a	拒绝域
$\theta\le 0$	$\theta>0$	$\{W^+\le W_\alpha^+\}$
$\theta\ge 0$	$\theta<0$	$\{W^+\ge W_\alpha^+\}$
$\theta=0$	$\theta\ne 0$	$\{W^+\le W_{\frac{\alpha}{2}}^+\}\cup\{W^+\ge W_{1-\frac{\alpha}{2}}^+\}$

其中 $W_\alpha^++W_{1-\alpha}^+=\frac{1}{2}n(n-1)$。

对于来自连续分布 $F(x-\theta_1)$ 的简单随机样本 $x_1,\cdots,x_m$ 和对于来自连续分布 $F(x-\theta_2)$ 的简单随机样本 $y_1,\cdots,y_n$，产生的秩为

$$R=(Q_1,\cdots,Q_m,R_1,\cdots,R_n)$$

那么秩和统计量为

$$W=\sum_{k=1}^{n}R_k\sim W(m,n)$$

H_0	H_a	拒绝域
$\theta_1\le\theta_2$	$\theta_1>\theta_2$	$\{W\le W_\alpha\}$
$\theta_1\ge\theta_2$	$\theta_1<\theta_2$	$\{W\ge W_\alpha\}$
$\theta_1=\theta_2$	$\theta_1\ne\theta_2$	$\{W\le W_{\frac{\alpha}{2}}\}\cup\{W\ge W_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$

其中 $W_\alpha+W_{1-\alpha}=n(m+n-1)$。

第四章 方差分析与回归分析

4.1 方差分析

4.1.1 问题的提出

因子：A
水平：$A_1,\cdots,A_r$
结果：y_{ij}，其中 $i=1,\cdots,r$

4.1.2 单因子方差分析的统计模型

在单因子试验中，记因子为 A，设其由 r 个水平，记为 $A_1,\cdots,A_r$，在每一个水平下考察的指标可以看成一个总体，现有 r 个水平，故有 r 个总体，假定：

1. 每一个总体均为正态分布，记为 $N(\mu_k,\sigma_k^2)$，其中 $k=1,\cdots,r$。
2. 各总体的方差相同，记为 $\sigma_1^2=\cdots=\sigma_r^2=\sigma^2$。
3. 从每一总体中抽取的样本是互相独立的，即所有的试验结果 y_{ij} 都相互独立。

作假设检验：

$$H_0:\mu_1=\cdots=\mu_r \quad \text{vs} \quad H_a:\mu_1,\cdots,\mu_r$$

如果 H_0 成立，称因子 A 的 r 个水平没有显著差异，简称因此 A 不显著。

对 r 个总体每个作 m 次重复实现，得到试验结果 $\{y_{ij}\}_{r\times m}$，定义随机误差为

$$\varepsilon_{ij}=y_{ij}-\mu_i$$

那么试验结果 y_{ij} 的数据结构式为

$$y_{ij}=\mu_i+\varepsilon_{ij}$$

单因子方差分析的统计模型为

$$\begin{cases} y_{ij}=\mu_i+\varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{ij}\text{相互独立} \\ \varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2) \end{cases}$$

总均值

$$\mu=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r}\mu_k$$

因子 A 的第 k 个水平的主效应

$$a_i=\mu_i-\mu$$

容易知道

$$\sum_{k=1}^{r}a_k=0$$

$$\mu_k=\mu+a_k$$

于是统计模型改写为

$$\begin{cases} y_{ij} = \mu + a_i + \varepsilon_{ij} \\ \sum_{i=1}^{r} a_i = 0 \\ \varepsilon_{ij}\text{相互独立} \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \end{cases}$$

统计假设改写为

$$H_0 : a_1 = \cdots = a_r = 0 \quad \text{vs} \quad H_a : a_1, \cdots, a_r\text{不全为0}$$

4.1.3 平方和分解

一、实验数据

表 4.1: 符号检验

因子水平	试验数据	和	均值
A_1	$y_{11}, \cdots, y_{1m}$	$T_1 = \sum_{j=1}^{m} y_{1j}$	$\overline{y}_1 = \frac{T_1}{m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	$y_{r1}, \cdots, y_{rm}$	$T_r = \sum_{j=1}^{m} y_{rj}$	$\overline{y}_r = \frac{T_r}{m}$
		$T = \sum_{i=1}^{r} T_i$	$\overline{y} = \frac{T}{rm} = \frac{T}{n}$

二、组内偏差与组间方差

记

$$y_{ij} - \overline{y} = (y_{ij} - \overline{y}_i) + (\overline{y}_i - \overline{y})$$

$$\overline{\varepsilon}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{ij}$$

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{m} \overline{\varepsilon_i} = \frac{1}{n} \sum_{i,j} \varepsilon_{ij}$$

组内偏差为

$$y_{ij} - \overline{y}_i = \varepsilon_{ij} - \overline{\varepsilon}_i$$

组间偏差为

$$\overline{y}_i - \overline{y} = a_i + \overline{\varepsilon}_i - \overline{\varepsilon}$$

三、偏差平方和及其自由度

偏差平方和

$$Q = \sum_{k=1}^{n} (y_k - \overline{y})^2$$

自由度

$$f_Q = n - 1$$

四、总平方和分解公式

总偏差平方和

$$S_T = \sum_{i,j} (y_{ij} - \overline{y})^2 = \sum_{i,j} y_{ij}^2 - \frac{T^2}{n}, \quad f_T = n - 1$$

组内偏差平方和（因子 A 的偏差平方和）

$$S_A = m \sum_{i=1}^{r} (\overline{y}_i - \overline{y})^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{r} T_i^2 - \frac{T^2}{n}, \quad f_A = r - 1$$

组内偏差平方和（误差偏差平方和）

$$S_e = \sum_{i,j} (y_{ij} - \overline{y}_i)^2 = \sum_{i,j} y_{ij}^2 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{r} T_i^2, \quad f_e = n - r$$

总平方和分解式

$$S_T = S_A + S_e$$

4.1.4 检验方法

均方

$$\mathrm{MS} = \frac{Q}{f_Q}$$

因子均方和误差均方

$$\mathrm{MS}_A = \frac{S_A}{f_A}, \qquad \mathrm{MS}_e = \frac{S_e}{f_e}$$

定理 4.1.1

1. $$\frac{S_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n - r), \quad E(S_e) = (n - r)\sigma^2$$
2. $$E(S_A) = (r - 1)\sigma^2 + m \sum_{i=1}^{r} a_i^2$$
3. 若 H_0 成立，那么
$$\frac{S_A}{\sigma^2} \sim \chi^2(r - 1), \quad E(S_e) = (r - 1)\sigma^2$$
4. S_A 与 S_e 相互独立。

♡

检验统计量

$$F = \frac{\mathrm{MS}_A}{\mathrm{MS}_e} \sim F(r - 1, n - r)$$

拒绝域

$$W = \{F \geq F_{1-\alpha}\}$$

1. $F \geq F_{1-\alpha}$：拒绝原假设，认为因子 A 显著。
2. $F \leq F_{1-\alpha}$：接受原假设，认为因子 A 不显著。

检验的 p 值为

$$p = P(F \geq F_0)$$

表 4.2: 单因子方差分析表

来源	平方和	自由度	均方	F 比	p 值
因子 A	S_A	$f_A = r-1$	$\mathrm{MS}_A = \frac{S_A}{f_A}$	$F = \frac{\mathrm{MS}_A}{\mathrm{MS}_e}$	$p = P(F \geq F_0)$
误差 e	S_e	$f_e = n-r$	$\mathrm{MS}_e = \frac{S_e}{f_e}$		
总和 T	S_T	$f_T = n-1$			

4.1.5 参数估计

一、点估计

1.
$$y_{ij} \sim N(\mu + a_i, \sigma^2)$$

2. μ 的最大似然估计为
$$\hat{\mu} = \overline{y}$$

3. a_i 的最大似然估计为
$$\hat{a}_i = \overline{y}_i - \overline{y}$$

4. σ^2 的最大似然估计为
$$\hat{\sigma}^2 = \mathrm{MS}_e$$

二、置信区间

由于
$$\overline{y}_i \sim N(\mu_i, \frac{\sigma^2}{m}), \qquad \frac{S_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-r)$$

因此
$$\frac{\sqrt{m}(\overline{y}_i - \mu_i)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}} \sim T(f_e)$$

进而 μ_i 的 $1-\alpha$ 的置信区间为
$$\left[\overline{y}_i - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{m}}, \quad \overline{y}_i + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{m}}\right]$$

4.1.6 重复数不等情形

一、数据

记从第 i 个水平下的总体获得 m_i 个试验结果，记为 $y_{i1}, \cdots, y_{im_i}$，其中 $i = 1, \cdots, r$，实验总次数为 $n = m_1 + \cdots + m_r$，统计模型为
$$\begin{cases} y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{ij}\text{相互独立} \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \end{cases}$$

二、总均值

加权均值
$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} m_i\mu_i$$

水平效应：
$$a_i = \mu_i - \mu$$

统计模型为

$$\begin{cases} y_{ij} = \mu + a_i + \varepsilon_{ij} \\ \sum_{i=1}^{r} m_i a_i = 0 \\ \varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \end{cases}$$

四、各平方和的计算

$$T_i = \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}, \qquad \overline{y}_i = \frac{T_i}{m_i}$$

$$T = \sum_{i,j} y_{ij} = \sum_{i=1}^{r} T_i, \qquad \overline{y} = \frac{T}{n}$$

$$S_T = \sum_{i,j} (y_{ij} - \overline{y})^2 = \sum_{i,j} y_{ij}^2 - \frac{T^2}{n}, \qquad f_T = n - 1$$

$$S_A = \sum_{i=1}^{r} m_i (\overline{y}_i - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{T_i^2}{m_i} - \frac{T^2}{n}, \qquad f_A = r - 1$$

$$S_e = \sum_{i,j} (y_{ij} - \overline{y}_i)^2 = \sum_{i,j} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{r} \frac{T_i^2}{m_i}, \qquad f_e = n - r$$

4.2 多重比较

4.2.1 水平均值差的置信区间

检验问题

$$H_0 : \mu_i - \mu_j = 0 \quad \text{vs} \quad H_a : \mu_i - \mu_j \neq 0$$

由于

$$\overline{y}_i - \overline{y}_j \sim N\left(\mu_i - \mu_j, \left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}\right)\sigma^2\right)$$

而 $\frac{S_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-r)$，因此

$$\frac{(\overline{y}_i - \overline{y}_j) - (\mu_i - \mu_j)}{\sqrt{\left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}\right)\hat{\sigma}^2}} \sim T(n-r)$$

那么置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\overline{y}_i - \overline{y}_j - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}\right)\hat{\sigma}^2}, \quad \overline{y}_i - \overline{y}_j + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}\right)\hat{\sigma}^2}\right]$$

这也是检验问题的接受域 $\overline{W}$。如果包含 0，那么接受原假设，认为 μ_i 和 μ_j 无显著差异；反之拒绝原假设，认为 μ_i 和 μ_j 存在显著差异。

4.2.2 多重比较问题

首先经过方差检验，表明因子 A 是显著的，即 r 个水平均值不全相等，那么考虑如下多重比较问题检验

$$H_0^{ij} : \mu_i = \mu_j, \quad 1 \leq i < j \leq r$$

拒绝域

$$W = \bigcup_{1\le i<j\le r} \{|\overline{y}_i - \overline{y}_j| \ge c_{ij}\}$$

4.2.3 重复数相等的 T 法

当 $m_1 = \cdots = m_r = m$ 时，记 $c_{ij} = c$，于是检验统计量为

$$\frac{\sqrt{m}(\overline{y}_i - \mu_i)}{\hat{\sigma}} \sim T(n-r)$$

当原假设成立时，$\mu_1 = \cdots = \mu_r = \mu$，此时

$$P(W) = P\left(q(r, n-r) \ge \frac{c\sqrt{m}}{\hat{\sigma}}\right)$$

其中 t 化极差统计量为

$$q(r, n-r) = \max_{1\le i\le r} \frac{\sqrt{m}(\overline{y}_i - \mu_i)}{\hat{\sigma}} - \min_{1\le j\le r} \frac{\sqrt{m}(\overline{y}_j - \mu_j)}{\hat{\sigma}}$$

仅与 n 和 r 有关。由 $P(W) = \alpha$，可知

$$c = q_{1-\alpha}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{m}}$$

因此，如果

$$|\overline{y}_i - \overline{y}_j| \ge q_{1-\alpha}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{m}}$$

那么认为水平 A_i 和 A_j 存在显著差异；反之认为水平 A_i 和 A_j 无显著差异。

4.2.4 重复数不等场合的 S 法

由于

$$\frac{(\overline{y}_i - \overline{y}_j) - (\mu_i - \mu_j)}{\sqrt{\left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}\right)\hat{\sigma}^2}} \sim T(n-r)$$

当原假设成立时，$\mu_1 = \cdots = \mu_r = \mu$，此时

$$\frac{(\overline{y}_i - \overline{y}_j)^2}{\left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}\right)\hat{\sigma}^2} \sim F(1, n-r)$$

令 $c_{ij} = c\sqrt{\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}}$，那么

$$P(W) = P\left(\max_{1\le i<j\le r} \frac{(\overline{y}_i - \overline{y}_j)^2}{\left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}\right)\hat{\sigma}^2} \ge \frac{c^2}{\hat{\sigma}^2}\right)$$

其中

$$\frac{\max_{1\le i<j\le r} \frac{(\overline{y}_i - \overline{y}_j)^2}{\left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}\right)\hat{\sigma}^2}}{r-1} \sim F(r-1, n-r)$$

由 $P(W) = \alpha$，可知

$$\frac{c^2}{\hat{\sigma}^2} = (r-1)f_{1-\alpha}$$

即

$$c_{ij} = \sqrt{(r-1)f_{1-\alpha}\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}\right)}$$

其中 $f_{1-\alpha}$ 为 $F(r-1,n-r)$ 的 $1-\alpha$ 分位数。因此，如果

$$|\overline{y}_i-\overline{y}_j|\geq\sqrt{(r-1)f_{1-\alpha}\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_j}\right)}$$

那么认为水平 A_i 和 A_j 存在显著差异；反之认为水平 A_i 和 A_j 无显著差异。

4.3 方差齐性检验

方差齐性检验

$$H_0:\sigma_1^2=\cdots=\sigma_r^2$$

4.3.1 Hartley 检验

对于单因子方差分析中含有 r 个样本，当 $m_1=\cdots=m_r=m$ 时，设第 i 个样本方差为

$$s_i^2=\frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}(y_{ij}-\overline{y}_i)^2$$

检验统计量为

$$H=\frac{\max\{s_i^2\}}{\min\{s_i^2\}}\sim H(r,m-1)$$

拒绝域为

$$W=\{H\geq H_{1-\alpha}\}$$

4.3.2 Bartlett 检验

对于单因子方差分析中含有 r 个样本，设第 i 个样本方差为

$$s_i^2=\frac{1}{m_i-1}\sum_{k=1}^{m_i}(y_{ij}-\overline{y}_i)^2=\frac{Q_i}{f_i}$$

其中 m_i 为第 i 个样本的容量且 $m_i\geq 5$，$Q_i=\sum_{k=1}^{m_i}(y_{ij}-\overline{y}_i)^2$ 和 $f_i=m_i-1$ 为该样本的偏差平方和自由度。s_i^2 的算术加权平均即为均方误差

$$\mathrm{MS}_e=\frac{1}{f_e}\sum_{i=1}^{r}Q_i=\sum_{i=1}^{r}\frac{f_i}{f_e}s_i^2$$

其加权几何平均为

$$\mathrm{GMS}_e=\left(\prod_{i=1}^{r}(s_i^2)^{f_i}\right)^{\frac{1}{f_e}}$$

其中 $f_e=\sum_{i=1}^{r}f_i=n-r$。由算术-几何平均不等式

$$\mathrm{MS}_e\geq\mathrm{GMS}_e$$

当且仅当 $s_1^2=\cdots=s_r^2$ 时等号成立。而

$$B=\frac{f_e}{C}\ln\frac{\mathrm{MS}_e}{\mathrm{GMS}_e}\dot{\sim}\chi^2(r-1)$$

其中

$$C=1+\frac{1}{3(r-1)}\left(\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{f_i}-\frac{1}{f_e}\right)$$

因此拒绝域为

$$W=\left\{B\geq\chi_{1-\alpha}^2\right\}$$

4.3.3 修正的 Bartlett 检验

修正的检验统计量

$$B' = \frac{f_2 BC}{f_1(A - BC)} \tilde{\sim} F(f_1, f_2)$$

其中

$$f_1 = r - 1, \qquad f_2 = \frac{r+1}{(C-1)^2}, \qquad A = \frac{f_2}{2 - C + \frac{2}{f_{20}}}$$

拒绝域为

$$W = \{B' \geq F_{1-\alpha}\}$$

4.4 一元线性回归

4.4.1 变量间的两类关系

确定性关系，相关关系

4.4.2 一元线性回归模型

第一类回归问题

$$f(x) = E(Y \mid x) = \int_{-\infty}^{\infty} yp(y \mid x)\mathrm{d}x$$

第二类回归问题

$$y = f(x) + \varepsilon$$

其中 $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$。

一元回归模型：

$$\begin{cases} y_i = \beta_0 + \beta x_i + \varepsilon_i \\ \varepsilon_i \text{相互独立} \\ \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \end{cases}$$

由数据 (x_i, y_i) 得到的 β_0 和 β 的估计 $\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}$，称

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta} x$$

为 y 关于 x 的回归函数。给定 $x = x_0$，称 $\hat{y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta} x_0$ 为回归值。

4.4.3 回归系数的最小二乘估计

$$l_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y - \overline{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}$$

$$l_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2$$

$$l_{yy} = \sum_{i=1}^{n}(y - \overline{y})^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\overline{y}^2$$

β_0 和 β 的最小二乘估计（LSE）$\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}$ 为

$$\hat{\beta} = \frac{l_{xy}}{l_{xx}}$$
$$\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}\overline{x}$$

定理 4.4.1

在如下模型下，成立

$$\begin{cases} y_i = \beta_0 + \beta x_i + \varepsilon_i \\ \varepsilon_i \\ \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \end{cases}$$

1. $$\hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0, \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{l_{xx}}\right)\sigma^2\right), \qquad \hat{\beta} \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{l_{xx}}\right)$$

2. $$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}) = -\frac{\overline{x}}{l_{xx}}\sigma^2$$

3. 给定 x_0

$$\hat{y}_0 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}x_0 \sim N\left(\beta_0 + \beta x_0, \left(\frac{1}{n} + \frac{(\overline{x} - x_0)^2}{l_{xx}}\right)\sigma^2\right)$$

♡

4.4.4 回归模型的显著性检验

显著性： $\beta \neq 0$ 称为显著，否则称为不显著。

显著性假设检验：

$$H_0 : \beta = 0 \quad \text{vs} \quad H_a : \beta \neq 0$$

表 4.3: 方差分析表

来源	平方和	自由度	均方	F 比
回归	S_R	$f_R = 1$	$\mathrm{MS}_R = \frac{S_R}{f_R}$	$F = \frac{\mathrm{MS}_A}{\mathrm{MS}_e}$
残差	S_e	$f_e = n - 2$	$\mathrm{MS}_e = \frac{S_e}{f_e}$	
总和	S_T	$f_T = n - 1$		

一、F 检验

总偏差平方和：

$$S_T = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = l_{yy}$$

回归平方和：

$$S_R = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \overline{y})^2 = \frac{l_{xy}^2}{l_{xx}}$$

残差平方和：

$$S_e = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

平方和分解：

$$S_T = S_R + S_e$$

定理 4.4.2

在如下模型下，成立

$$\begin{cases} y_i = \beta_0 + \beta x_i + \varepsilon_i \\ \varepsilon_i \text{相互独立} \\ \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \end{cases}$$

1. $$E(S_R) = \sigma^2 + \hat{\beta} l_{xx}, \qquad E(S_e) = (n-2)\sigma^2$$
2. $$\frac{S_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2)$$
3. 如果 H_0 成立，那么
$$\frac{S_R}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$$
4. S_R 与 S_e、$\overline{y}$ 独立。

♡

统计检验量

$$F = \frac{(n-2)S_R}{S_e} \sim F(1, n-2)$$

拒绝域为 $W = \{F \geq F_{1-\alpha}\}$。

二、T 检验

检验统计量

$$T = \frac{\sqrt{(n-2)l_{xx}}\hat{\beta}}{\sqrt{S_e}} \sim T(n-2)$$

拒绝域为 $W = \{|t| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$。

三、相关系数检验

相关系数假设检验：

$$H_0 : \rho = 0 \quad \text{vs} \quad H_a : \rho \neq 0$$

检验统计量：相关系数

$$r = \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx} l_{yy}}} = \sqrt{\frac{F}{F + (n-2)}} \sim r(n-2) = \sqrt{\frac{F(1, n-2)}{F(1, n-2) + (n-2)}}$$

1. $|r| = 1$：(x_i, y_i) 共线。
2. $r > 0$：(x_i, y_i) 正相关。
3. $r < 0$：(x_i, y_i) 负相关。
4. $r = 0$：(x_i, y_i) 不相关。

拒绝域为 $W = \{|r| \geq r_{1-\alpha}\}$，其中

$$r_{1-\alpha} = \sqrt{\frac{F_{1-\alpha}}{F_{1-\alpha} + (n-2)}}$$

4.4.5 估计与预测

一、$E(y_0)$ 的置信区间

枢轴量为

$$\frac{\hat{y}_0 - E(y_0)}{\sqrt{\frac{S_e}{n-2}}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{l_{xx}}}} \sim T(n-2)$$

$1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\hat{y}_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_e}{n-2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{l_{xx}}},\quad \hat{y}_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_e}{n-2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{l_{xx}}}\right]$$

二、y_0 的预测区间

枢轴量为

$$\frac{y_0-\hat{y}_0}{\sqrt{\frac{S_e}{n-2}}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{l_{xx}}}} \sim T(n-2)$$

预测区间为

$$\left[\hat{y}_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_e}{n-2}}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{l_{xx}}},\quad \hat{y}_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_e}{n-2}}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{l_{xx}}}\right]$$

4.4.6 曲线回归方程的比较

决定系数：越大说明残差越小，回归曲线拟合越好。

$$R^2 = 1 - \frac{\sum(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum(y_i-\overline{y})^2}$$

剩余标准差：越小，回归曲线拟合越好。

$$s = \sqrt{\frac{\sum(y_i-\hat{y}_i)^2}{n-2}}$$

附录 A 概率模型

概率模型	密度函数 $p(x)$	参数范围	数学期望 $E\xi$	方差 $D\xi$	特征函数 $f(t)$
退化分布 $I_c(x)$	$p(x)=\begin{cases}1, & x=c\\0, & x\neq c\end{cases}$		c	0	e^{ict}
Bernoulli 分布	$p(x)=\begin{cases}1-p, & x=0\\p, & x=1\end{cases}$	$0<p<1$	p	$p(1-p)$	$p\mathrm{e}^{it}+1-p$
二项分布 $B(n,p)$	$b(k;n,p)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$0\leq k\leq n;0<p<1$	np	$np(1-p)$	$(p\mathrm{e}^{it}+1-p)^n$
Poisson 分布 $P(\lambda)$	$p(k;\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$	$k\in\mathbb{N};\lambda>0$	λ	λ	$\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{it}-1)}$
几何分布	$g(k;p)=p(1-p)^{k-1}$	$k\in\mathbb{N}^*,0<p<1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{p\mathrm{e}^{it}}{1-(1-p)\mathrm{e}^{it}}$
超几何分布	$p_k=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$M,n\leq N;0\leq k\leq\min\{M,n\}$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$	$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}e^{ikt}$
Pascal 分布	$p_k=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$	$k\geq r,0<p<1$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	$(\frac{(1-p)\mathrm{e}^{it}}{1-(1-p)\mathrm{e}^{it}})^r$
负二项分布	$p_k=\binom{-r}{k}p^r(p-1)^k$	$k\in\mathbb{N},0<p<1,r>0$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	$(\frac{p}{1-(1-p)\mathrm{e}^{it}})^r$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$		μ	σ	$\mathrm{e}^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$
均匀分布 $U[a,b]$	$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\leq x\leq b\\0, & \text{其他}\end{cases}$	$a<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{\mathrm{e}^{ibt}-\mathrm{e}^{iat}}{i(b-a)t}$
指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$	$p(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geq0\\0, & x<0\end{cases}$	$\lambda>0$	λ^{-1}	λ^{-2}	$(1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$
χ^2 分布	$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x\geq0\\0, & x<0\end{cases}$	$n\in\mathbb{N}^*$	n	$2n$	$(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$
Γ 分布 $\Gamma(r,\lambda)$	$p(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geq0\\0, & x<0\end{cases}$	$r,\lambda>0$	$\frac{r}{\lambda}$	$\frac{r}{\lambda^2}$	$(1-\frac{it}{\lambda})^{-r}$
Cauchy 分布	$p(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2}$	$\mu\in\mathbb{R},\lambda>0$	不存在	不存在	$\mathrm{e}^{i\mu t-\lambda\lvert t\rvert}$
t 分布	$p(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$	$n\in\mathbb{N}^*$	$0(n>1)$	$\frac{n}{n-2}(n>2)$	
Pareto 分布	$p(x)=\begin{cases}rA^r\frac{1}{x^{r+1}}, & x\geq A\\0, & x<A\end{cases}$	$r,A>0$	（$r>1$ 时存在）	（$r>2$ 时存在）	
F 分布	$p(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(n+mx)^{\frac{m+n}{2}}}, & x\geq0\\0, & x<0\end{cases}$	$m,n\in\mathbb{N}^*$	$\frac{n}{n-2}(n>2)$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}(n>4)$	
β 分布	$p(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1}, & 0<x<1\\0, & \text{其他}\end{cases}$	$p,q>0$	$\frac{p}{p+q}$	$\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$	$\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(p+k)(it)^k}{\Gamma(p+q+k)\Gamma(k+1)}$
对数正态分布	$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\mathrm{e}^{\frac{(\ln x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\0, & x\leq0\end{cases}$	$\alpha,\sigma>0$	$\mathrm{e}^{\alpha+\frac{\sigma^2}{2}}$	$\mathrm{e}^{2\alpha+\sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1)$	
Weibull 分布	$p(x)=\begin{cases}\alpha\lambda x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}, & x>0\\0, & x\leq0\end{cases}$	$\lambda,\alpha>0$	$\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}$	$\lambda^{-\frac{2}{\alpha}}(\Gamma(\frac{2}{\alpha}+1)-(\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1))^2)$	
Rayleigh 分布	$p(x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, & x\geq0\\0, & x<0\end{cases}$		$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$2-\frac{\pi}{2}$	