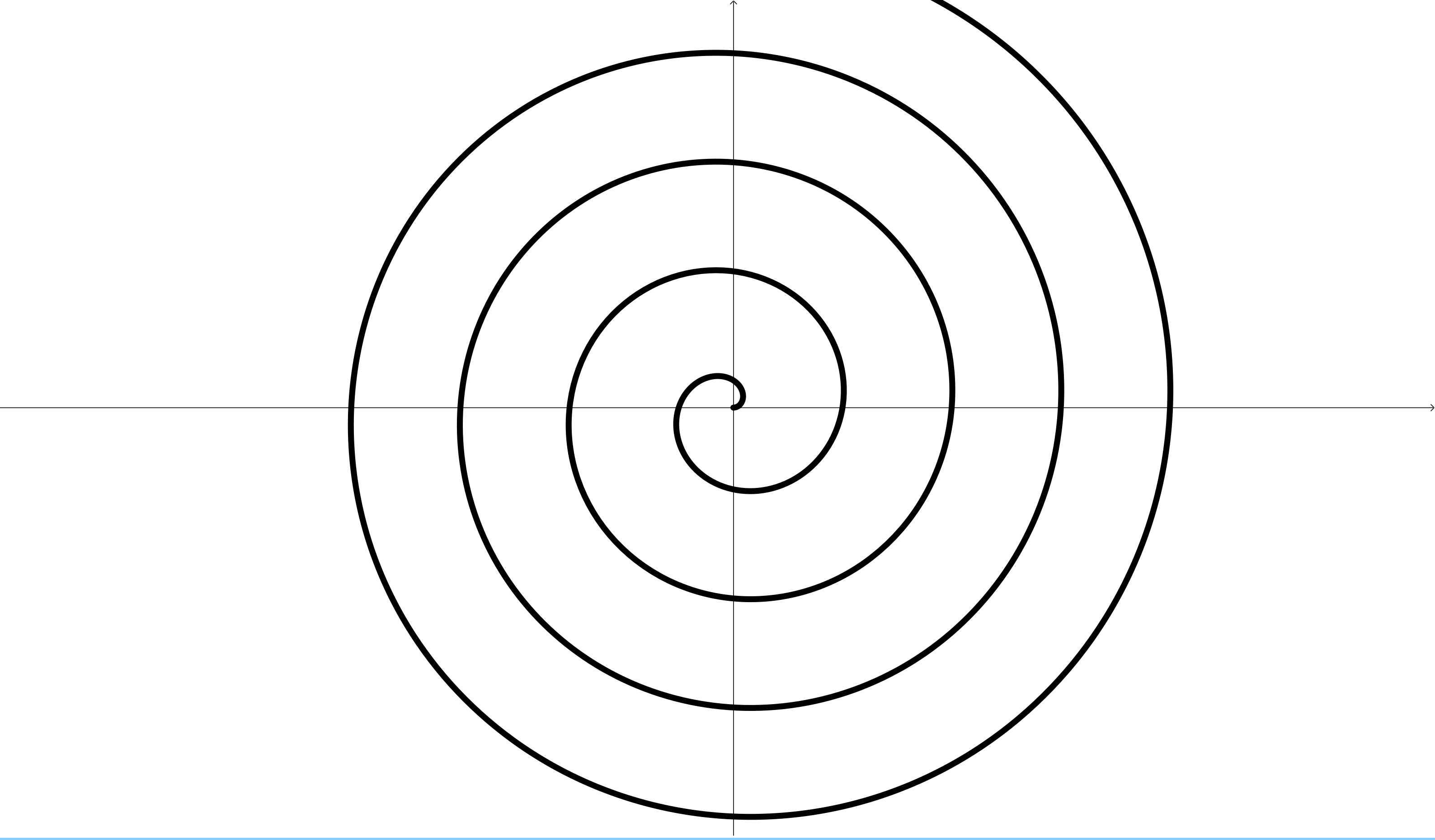

范畴论 Presentation

作者：若水

时间：April 7, 2024

上善若水任方圆

目录

第一章 范畴论 Presentation

1.1 导入

从“同构”讲起。

在分析学中，称 Banach 空间 X 与 Y 同构，并记作 $X \cong Y$，如果存在双射 $f: X \to Y$，使得 f 与 f^{-1} 均为有界线性映射。

在代数学中，称群 X 与 Y 同构，并记作 $X \cong Y$，如果存在双射 $f: X \to Y$，使得对于任意 $x, y \in X$，成立 $f(xy) = f(x)f(y)$。

在拓扑学中，称拓扑空间 X 与 Y 同构，并记作 $X \cong Y$，如果存在双射 $f: X \to Y$，使得 f 与 f^{-1} 均为连续映射。

1.2 范畴论

定义 1.2.1 (范畴 category)

范畴 C 包含：

- **对象 (object)**：$\mathrm{Obj}(\mathsf{C})$
- **态射 (morphism)**：$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$，其中称 A 为源 (source)，B 为目标 (target)。

成立如下公理：

1. **态射复合**：对于任意对象 $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，存在态射复合
$$\begin{aligned} \circ: \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, C) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, C) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$
2. **恒等态射**：对于任意对象 $S \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，存在恒等态射 $\mathbb{1}_S \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(S, S)$，使得对于任意态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$，成立
$$f \circ \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \circ f = f$$
3. **结合律**：对于任意态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, C), h \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(C, D)$，成立
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

♣

例题 1.1 集合范畴：

- $\mathrm{Obj}(\mathsf{Set}) = \{集合\}$
- $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(A, B) = \{映射 f: A \to B\}$

例题 1.2 矩阵范畴：

- $\mathrm{Obj}(\mathsf{V}) = \mathbb{N}^*$
- $\mathrm{Hom}_{\mathsf{V}}(m, n) = \{\{a_{ij}\}_{m \times n} : a_{ij} \in \mathbb{R}\}$

例题 1.3 群范畴：

- $\mathrm{Obj}(\mathsf{Grp}) = \{群 (G, *)\}$
- $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Grp}}((G, *), (H, \star)) = \{映射 \varphi: G \to H : \varphi(x * y) = \varphi(x) \star \varphi(y)\}$

定义 1.2.2 (左逆态射 left-inverse morphism)

对于范畴 C，以及对象 $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，称态射 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, A)$ 为态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ 的左逆态射，如果成立 $g \circ f = \mathbb{1}_A$。

♣

定义 1.2.3 (右逆态射 right-inverse morphism)

对于范畴 C，以及对象 $A,B\in\mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，称态射 $g\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B,A)$ 为态射 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ 的右逆态射，如果成立 $f\circ g=\mathbb{1}_A$。♣

定义 1.2.4 (同构态射 isomorphism)

对于范畴 C，以及对象 $A,B\in\mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，称态射 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ 为同构态射，如果存在态射 $g\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B,A)$，使得成立

$$g\circ f=\mathbb{1}_A,\qquad f\circ g=\mathbb{1}_B$$

♣

定义 1.2.5 (同构的 isomorphic)

对于范畴 C，称对象 $A,B\in\mathrm{Obj}(\mathsf{C})$ 是同构的，且记作 $A\cong B$，如果存在同构态射 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$。♣

定义 1.2.6 (单态射 monomorphism)

对于范畴 C，以及对象 $A,B\in\mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，称态射 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ 为单态射，如果对于任意对象 $Z\in\mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，以及任意态射 $\alpha_1,\alpha\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Z,A)$，成立

$$f\circ\alpha_1=f\circ\alpha_2\implies\alpha_1=\alpha_2$$

♣

定义 1.2.7 (满态射 epimorphism)

对于范畴 C，以及对象 $A,B\in\mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，称态射 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ 为满态射，如果对于任意对象 $Z\in\mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，以及任意态射 $\beta_1,\beta\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B,Z)$，成立

$$\beta_1\circ f=\beta_2\circ f\implies\beta_1=\beta_2$$

♣

命题 1.2.1 (存在左逆 $\implies$ 单态射)

对于范畴 C，以及对象 $A,B\in\mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，如果态射 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ 存在左逆态射，那么态射 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ 为单态射。♠

证明 如果态射 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ 存在左逆态射 $g\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B,A)$，那么任取 α_1,α_2，满足 $f\circ\alpha_1=f\circ\alpha_2$，由于

$$\alpha_1=\mathbb{1}\circ\alpha_1=g\circ f\circ\alpha_1=g\circ f\circ\alpha_2=\mathbb{1}\circ\alpha_2=\alpha_2$$

于是 f 是单态射。

命题 1.2.2 (存在右逆 $\implies$ 满态射)

对于范畴 C，以及对象 $A,B\in\mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，如果态射 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ 存在右逆态射，那么态射 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ 为满态射。♠

证明 如果态射 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ 存在右逆态射 $g\in\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B,A)$，那么任取 β_1,β_2，满足 $\beta_1\circ f=\beta_2\circ f$，由于

$$\beta_1=\beta_1\circ\mathbb{1}=\beta_1\circ f\circ g=\beta_2\circ f\circ g=\beta_2\circ\mathbb{1}=\beta_2$$

于是 f 是满态射。

例题 1.4 在群范畴 Grp 中，群同态映射

$$\begin{aligned}\varphi:\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}&\longrightarrow S_3\\ [0]_3&\longmapsto(1)\\ [1]_3&\longmapsto(132)\\ [2]_3&\longmapsto(123)\end{aligned}$$

为单态射，但是不存在左逆，因为群同态映射 $S_3 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 只能为平凡映射。

1.3 函数

定义 1.3.1 (函数 function)

称 f 为定义域为 A，陪域为 B 的函数，如果对于任意 $a \in A$，存在且存在唯一 $b \in B$，使得成立 $f(a) = b$。记作

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto f(a) \end{aligned}$$

♣

定义 1.3.2 (单射 injection)

称函数 $f : A \to B$ 是单的，如果 $f(a_1) = f(a_2)$，那么 $a_1 = a_2$。单射记作 $f : A \hookrightarrow B$。♣

定义 1.3.3 (满射 surjection)

称函数 $f : A \to B$ 是满的，如果对于任意 $b \in B$，存在 $a \in A$，使得成立 $f(a) = b$。满射记作 $f : A \twoheadrightarrow B$。♣

定义 1.3.4 (双射 bijection)

称函数 $f : A \to B$ 是双射，并记作 $f : A \xrightarrow{\sim} B$，如果其既单又满。♣

定义 1.3.5 (同构的 isomorphic)

称集合 A 与 B 为同构的，并记做 $A \cong B$，如果存在双射 $f : A \to B$。♣

定义 1.3.6 (逆 inverse)

对于双射 $f : A \to B$，定义其逆为

$$\begin{aligned} f^{-1} : \quad B &\longrightarrow A \\ f(a) &\longmapsto a \end{aligned}$$

♣

定义 1.3.7 (左逆 left-inverse)

称函数 $g : B \to A$ 为函数 $f : A \to B$ 的左逆，如果成立 $g \circ f = \mathbb{1}_A$。♣

定义 1.3.8 (右逆 right-inverse)

称函数 $g : B \to A$ 为函数 $f : A \to B$ 的右逆，如果成立 $f \circ g = \mathbb{1}_B$。♣

定义 1.3.9 (单态射 monomorphism)

称函数 $f : A \to B$ 是单态射，如果对于任意集合 Z，以及任意函数 $\alpha_1, \alpha_2 : Z \to A$，成立

$$f \circ \alpha_1 = f \circ \alpha_2 \implies \alpha_1 = \alpha_2$$

♣

定义 1.3.10 (满态射 epimorphism)

称函数 $f : A \to B$ 是满态射，如果对于任意集合 Z，以及任意函数 $\beta_1, \beta_2 : B \to Z$，成立

$$\beta_1 \circ f = \beta_2 \circ f \implies \beta_1 = \beta_2$$

♣

定理 1.3.1

对于函数 $f: A \to B$，如下命题等价。

1. f 为单射。
2. f 存在左逆。
3. f 为单态射。

♡

证明 $1 \Longrightarrow 2$：如果 f 为单射，定义函数

$$\begin{aligned} g : \operatorname{im} f &\longrightarrow A \\ f(a) &\longmapsto a \end{aligned}$$

首先来验证 g 的定义是良好的。取 $a_1, a_2 \in A$，满足 $f(a_1) = f(a_2)$，由 f 的单射性，$a_1 = a_2$，于是 g 定义良好。其次来验证 $g \circ f = \mathbb{1}$。任取 $a \in A$，注意到 $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = a$，那么 $g \circ f = \mathbb{1}$。综合这两点，f 存在左逆 g。

$1 \Longrightarrow 3$：如果 f 为单射，任取 $\alpha_1, \alpha_2 : Z \to A$，满足 $f \circ \alpha_1 = f \circ \alpha_2$。任取 $z \in Z$，注意到

$$f(\alpha_1(z)) = (f \circ \alpha_1)(z) = (f \circ \alpha_2)(z) = f(\alpha_2(z))$$

于是 $\alpha_1 = \alpha_2$，进而 f 是单态射。

$2 \Longrightarrow 3$：如果 f 存在左逆 g，任取 α_1, α_2，满足 $f \circ \alpha_1 = f \circ \alpha_2$，那么

$$\alpha_1 = \mathbb{1} \circ \alpha_1 = g \circ f \circ \alpha_1 = g \circ f \circ \alpha_2 = \mathbb{1} \circ \alpha_2 = \alpha_2$$

于是 f 是单态射。

$2 \Longrightarrow 1$：如果 f 存在左逆 g，任取 $a_1, a_2 \in A$，满足 $f(a_1) = f(a_2)$，那么

$$a_1 = \mathbb{1}(a_1) = (g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = (g \circ f)(a_2) = \mathbb{1}(a_2) = a_2$$

于是 f 是单射。

$3 \Longrightarrow 1$：如果 f 是单态射，任取 $a_1, a_2 \in A$，满足 $f(a_1) = f(a_2)$。定义 $\alpha_1 : Z \to \{a_1\}$ 和 $\alpha_2 : Z \to \{a_2\}$，任取 $z \in Z$，注意到

$$(f \circ \alpha_1)(z) = f(\alpha_1(z)) = f(a_1) = f(a_2) = f(\alpha_2(z)) = (f \circ \alpha_2)(z)$$

因此 $f \circ \alpha_1 = f \circ \alpha_2$，于是 $\alpha_1 = \alpha_2$，即 $a_1 = a_2$，进而 f 是单射。

定理 1.3.2

对于函数 $f: A \to B$，如下命题等价。

1. f 为满射。
2. f 存在右逆。
3. f 为满态射。

♡

证明 $1 \Longrightarrow 2$：如果 f 是满射，定义函数

$$\begin{aligned} g : B &\longrightarrow A \\ b &\longmapsto a \end{aligned}$$

这里要说明的是对于特别的 $b \in B$，$f^{-1}(b)$ 中的元素可能不唯一，这时候任取其一即可，此时便说明 g 定义良好。然后我们来验证 $f \circ g = \mathbb{1}$。任取 $b \in B$，注意到 $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(f^{-1}(b)) = b$，那么 $f \circ g = \mathbb{1}$，进而 f 存在右逆 g。

$1 \Longrightarrow 3$：如果 f 为满射，任取 β_1, β_2，满足 $\beta_1 \circ f = \beta_2 \circ f$。任取 $b \in B$，存在 $a \in A$，使得成立 $f(a) = b$，因此

$$\beta_1(b) = \beta_1(f(a)) = (\beta_1 \circ f)(a) = (\beta_2 \circ f)(a) = \beta_2(f(a)) = \beta_2(b)$$

于是 $\beta_1 = \beta_2$，进而 f 是满态射。

$2 \Longrightarrow 3$：如果 f 存在右逆 g，任取 β_1, β_2，满足 $\beta_1 \circ f = \beta_2 \circ f$，那么

$$\beta_1 = \beta_1 \circ \mathbb{1} = \beta_1 \circ f \circ g = \beta_2 \circ f \circ g = \beta_2 \circ \mathbb{1} = \beta_2$$

于是 f 是满态射。

$2 \Longrightarrow 1$：如果 f 存在右逆 g，任取 $b \in B$，注意到 $g(b) \in A$，且 $f(g(b)) = (f \circ g)(b) = \mathbb{1}(b) = b$，因此 f 为满射。

$3 \Longrightarrow 1$：如果 f 是满态射，任取 $b \in B$。定义 $\beta_1 : B \to \{1\}$ 以及

$$\begin{aligned} \beta_2 : B &\longrightarrow \{0, 1\} \\ b &\longmapsto \begin{cases} 1, & b \in \mathrm{im} f \\ 0, & b \in B \setminus \mathrm{im} f \end{cases} \end{aligned}$$

任取 $a \in A$，注意到

$$(\beta_1 \circ f)(a) = \beta_1(f(a)) = 1 = \beta_2(f(a)) = (\beta_2 \circ f)(a)$$

因此 $\beta_1 \circ f = \beta_2 \circ f$，于是 $\beta_1 = \beta_2$，即 $b \in \mathrm{im} f$，进而 f 是满射。