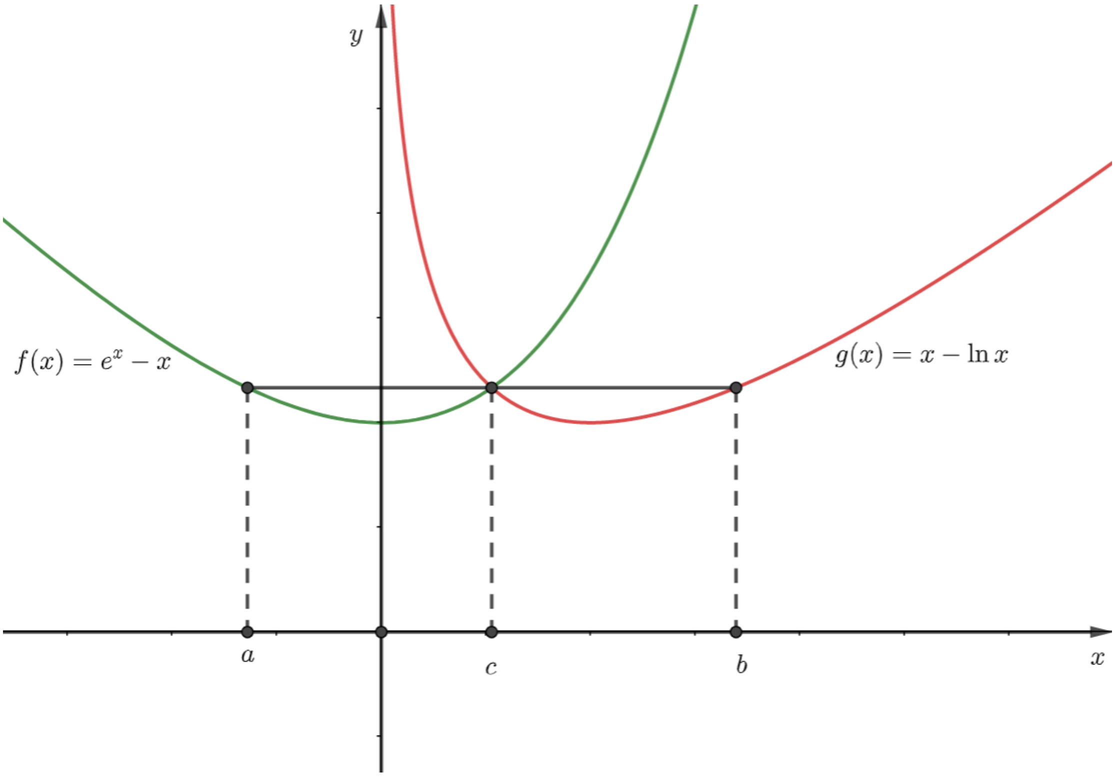
对于函数$f(x)=e^x-x$和$g(x)=x-\ln x$，若a,b,c满足

$$f(a)=g(b)=f(c)=g(c)$$

且$a<c<b$，证明：

$$a+b=2c$$

解：



如图所示。记$x=\frac{e^c}{e^a}\in(1,+\infty)$，$y=\frac{b}{c}\in(1,+\infty)$，由于$f(a)=f(c)$，$g(b)=g(c)$，即

$$e^a-a=e^c-c \tag{1}$$

$$b-\ln b=c-\ln c \tag{2}$$

容易得到

$$\begin{cases} a=\ln\dfrac{\ln x}{x-1} \\ c=\ln\dfrac{x\ln x}{x-1} \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} b=\dfrac{y\ln y}{y-1} \\ c=\dfrac{\ln y}{y-1} \end{cases} \tag{4}$$

此时还有$f(c)=g(c)$，代入(3)和(4)，得到

$$\frac{x\ln x}{x-1}-\ln\frac{x\ln x}{x-1}=\frac{\ln y}{y-1}-\ln\frac{\ln y}{y-1} \tag{5}$$

而若要证明$a+b=2c$，只需证明

$$\ln\frac{\ln x}{x-1}+\frac{y\ln y}{y-1}=\ln\frac{x\ln x}{x-1}+\frac{\ln y}{y-1} \tag{6}$$

而显然，$(6)\Leftrightarrow$

$$x=y \tag{7}$$

即只需证明(7)。

对于(5)，记$\begin{cases}A=\frac{x\ln x}{x-1}\\ B=\frac{\ln y}{y-1}\end{cases}$，考察$A$和$B$。记$p(x)=\frac{x\ln x}{x-1},x\in(1,+\infty)$；$q(y)=\frac{\ln y}{y-1},y=\frac{b}{c}\in(1,+\infty)$。这里显然有$p(x)$和$q(x)$均为正。容易知道，$p(x)$为严格单调递增函数，$q(y)$为严格单调递减函数。因此

$$p(x)>\lim_{x\to1+}p(x)=1 \tag{8}$$

$$q(y)<\lim_{y\to1+}q(y)=1 \tag{9}$$

进而$A=p(x)>1$，$B<q(y)=1$。代入(5)可得

$$A-\ln A=B-\ln B \tag{10}$$

记$t=\frac{A}{B}\in(1,+\infty)$，结合(10)，容易得到

$$\begin{cases}A=\dfrac{t\ln t}{t-1}\\ B=\dfrac{\ln t}{t-1}\end{cases} \tag{11}$$

因此，

$$p(x)=p(t),q(y)=q(t) \tag{12}$$

而由于$p(x)$和$q(y)$均为严格单调函数，进而可以得到

$$x=y=t \tag{13}$$

这样就证明了(7)。

综上所述，原命题得证！