目录

引言

复分析(complex Analysis)研究复平面$\mathbb{C}$到自身的函数

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C} \tag{1}$$

复平面$\mathbb{C}$上的点

$$z=x+iy \tag{2}$$

对应实平面$\mathbb{R}^2$上的点

$$(x,y) \tag{3}$$

全纯(holomorphicity function)：在复意义上可微的函数，即存在极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h},\quad h\in\mathbb{C} \tag{4}$$

- 围道积分：如果f在Ω上是全纯的，那么存在积分曲线$\gamma\in\Omega$，使得成立

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0 \tag{5}$$

- 正则性：如果f是全纯的，那么f无限可微。
- 解析延拓：如果f和g是Ω中的全纯函数，且在Ω任意邻域内相等，那么$f=g$。
- 重要主题
    - Zeta函数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad s\in\mathbb{C} \tag{6}$$

    - Theta函数

$$\Theta(z|\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\pi i n^2\tau}\mathrm{e}^{2\pi i n z} \tag{7}$$

一、复分析入门

1 复数和复平面

1.1 基本性质

虚数(imagginary number)单位：

$$i^2 = -1 \tag{8}$$

复数(complex number)：

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R} \tag{9}$$

实部(real part)和**虚部(imaginary number)**：

$$x = \mathrm{Re}(z) \qquad y = \mathrm{Im}(z) \tag{10}$$

对应**复平面(complex plane)**$\mathbb{C}$上的一个点

$$(x, y) \tag{11}$$

加法(adding)和**乘法(multiplying)**：如果

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1 \\ z_2 &= x_2 + iy_2 \end{aligned} \tag{12}$$

那么

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{13}$$
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{14}$$

交换律(commutativity)：

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \tag{15}$$
$$z_1 z_2 = z_2 z_1 \tag{16}$$

结合律(associativity)：

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \tag{17}$$
$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \tag{18}$$

分配律(distributivity)：

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \tag{19}$$

绝对值(absolute value)：

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{20}$$

三角不等式：

$$||z| - |w|| \le |z \pm w| \le |z| + |w| \tag{21}$$

复共轭(complex conjugate)：

$$\bar{z} = x - iy \tag{22}$$

- $$\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}\qquad \mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i} \tag{23}$$
- $$|z|^2=z\bar{z} \tag{24}$$

极坐标形式(polar form)：

$$\begin{aligned} z &= \rho \mathrm{e}^{i\theta} \qquad (25)\\ &= \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (26)\end{aligned}$$

1.2 收敛

收敛(converge)：称复数序列$\{z_n\}$收敛到$w\in\mathbb{C}$，如果

$$\lim_{n\to\infty}|z_n-w|=0 \tag{27}$$

记作

$$w=\lim_{n\to\infty}z_n \tag{28}$$

Cauchy序列(Cauchy sequence)：称复数序列$\{z_n\}$为Cauchy，如果当$n,m\to\infty$时

$$|z_n-z_m|\to 0 \tag{29}$$

即对于任意$\varepsilon>0$，存在$N>0$，使得对于任意$n,m>N$，成立

$$|z_n-z_m|<\varepsilon \tag{30}$$

定理1.1：复数域$\mathbb{C}$是完备的，即$\mathbb{C}$对于Cauchy序列封闭。

1.3 复平面集合

开圆(open disc)：

$$D_r(z)=\{w\in\mathbb{C}:|z-w|<r\} \tag{31}$$

闭圆(closed disc)：

$$\overline{D}_r(z)=\{w\in\mathbb{C}:|z-w|\le r\} \tag{32}$$

单位圆(unit disc)：

$$\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\} \tag{33}$$

内点(interior point)：称z为$\Omega\subset\mathbb{C}$的内点，如果存在$r>0$，使得成立

$$D_r(z)\subset\Omega \tag{34}$$

内部(interior)：Ω的内点的集合称为其内部，记作Ω°。

开的(open)：称Ω为开的，如果其每个点都是内点。

闭的(closed)：称Ω为闭的，如果其补集是开的。

极限点(limit point)：称z为Ω的极限点，如果Ω存在异于z且收敛于z的序列。

导集(derived set)：Ω的极限点构成的集合称为其导集，记作Ω'。

闭包(closure)：定义Ω闭包为$\overline{\Omega}=\Omega\cup\Omega'$。

边界(boundary)：定义Ω的边界为$\partial\Omega=\overline{\Omega}-\Omega^\circ$。

有界的(bounded)：称Ω为有界的，如果存在$M > 0$，使得对于任意$z \in \Omega$，成立

$$|z| < M \tag{35}$$

直径(diameter)：如果Ω为有界的，称其直径为

$$\mathrm{diam}(\Omega) = \sup_{z,w\in\Omega} |z - w| \tag{36}$$

紧的(compact)：称Ω为紧的，如果其为闭且有界的。

连通的(connected)：称开集Ω为连通的，如果不存在不相交的非空开集Ω_1, Ω_2使得成立

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \tag{37}$$

称闭集F是连通的，如果不存在不相交的非空闭集F_1, F_2使得成立

$$F = F_1 \cup F_2 \tag{38}$$

区域(region)：称Ω为区域，如果其为开且连通的。

定理1.2：集合Ω是紧的，当且仅当对于ℂ中的任意序列存在收敛于Ω内一点的子序列。

定理1.3：集合Ω是紧的，当且仅当对于Ω的任意开覆盖，存在有限子覆盖。

命题1.4：如果$\{\Omega_n\}$为$\mathbb{C}$中的非空紧集序列，满足

$$\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \cdots \supset \Omega_n \supset \cdots \tag{39}$$

且当$n \to \infty$时

$$\mathrm{diam}(\Omega_n) \to 0 \tag{40}$$

那么存在且存在唯一$z \in \mathbb{C}$，使得成立

$$z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n \tag{41}$$

2 复函数

2.1 连续函数

连续(continuous)：称定义在Ω上的函数f在点$z_0 \in \Omega$处连续，如果对于任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得当$z \in \Omega$且$|z - z_0| < \delta$时，成立

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \tag{42}$$

等价定义：称定义在Ω上的函数f在点$z_0 \in \Omega$处连续，如果对于任意以z_0为极限的序列$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$成立

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(z_0) \tag{43}$$

定理2.1：紧集上的连续函数有界，并可取到最值。

2.2 全纯函数

全纯函数的等价定义：如下为函数$f=u+iv$在开集$\Omega\subset\mathbb{C}$上全纯的等价定义。

- 对于任意$z\in\Omega$，如下极限存在。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \tag{44}$$

- 函数u和v在Ω上连续可微，且满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{45}$$

- 函数f在Ω上连续，且对于任意分段光滑闭曲线γ，成立

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0 \tag{46}$$

- 对于任意$z_0\in\Omega$，存在$r>0$，使得对于任意$z\in B_r(z_0)$，成立幂级数展开

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \tag{47}$$

全纯(holomorphic)：称定义在开集Ω上的函数f在点$z_0\in\Omega$处全纯，如果存在极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \tag{48}$$

整函数(entire function)：称f为整函数，如果f在$\mathbb{C}$上全纯。

导数(derivative)：如果函数f在z_0点全纯，那么定义该点的导数为

$$f'(z_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \tag{49}$$

- 如果f和g在Ω上全纯，那么$f+g$在Ω上全纯，且

$$(f+g)'=f'+g' \tag{50}$$

- 如果f和g在Ω上全纯，那么fg在Ω上全纯，且

$$(fg)'=f'g+fg' \tag{51}$$

- 如果f和g在Ω上全纯，那么在$g\neq 0$的点上$\frac{f}{g}$全纯，且

$$(\frac{f}{g})'=\frac{f'g-fg'}{g^2} \tag{52}$$

- 如果$f:\Omega\to U, g:U\to\mathbb{C}$为全纯的，那么

$$(g\circ f)'=g'(f)f' \tag{53}$$

Cauchy-Riemann方程(Cauchy-Riemann equation)：若f在Ω上全纯，记

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y) \tag{54}$$

那么成立

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} \tag{55}$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{56}$$

微分算子(differential operator)

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{57}$$

命题2.3：如果$f(z)=F(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$在点$z_0$处全纯，那么

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)=0 \tag{58}$$

$$f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)=2\frac{\partial u}{\partial z}(z_0) \tag{59}$$

$$\det J_F(x_0,y_0)=|f'(z_0)|^2 \tag{60}$$

其中J为**Jacobian矩阵**

$$J_F(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix} \tag{61}$$

定理2.4：对于开集Ω上的复函数$f=u+iv$。如果在Ω上u和v都是连续可微的且满足Cauchy-Riemann方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{62}$$

那么f在Ω上是全纯的，且

$$f'(z)=\frac{\partial f}{\partial z} \tag{63}$$

2.3 幂级数

指数函数(exponential function)

$$\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \tag{64}$$

三角函数(trigonometric function)

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\qquad \sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{65}$$

定理2.6：对于幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n \tag{66}$$

规定

$$\frac{1}{0}=\infty,\qquad \frac{1}{\infty}=0 \tag{67}$$

收敛半径(radius of convergence)R由**Hadamard公式**给出

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sup|a_n|^{\frac{1}{n}} \tag{68}$$

- 如果$|z|<R$，那么级数绝对收敛。
- 如果$|z|>R$，那么级数发散。
- 如果$|z|=R$，那么级数敛散性不确定。

定理2.7：幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \tag{69}$$

在收敛域内定义了一个全纯函数，其导函数为

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nz^{n-1} \tag{70}$$

且收敛半径不变。

推论2.7：幂级数在收敛域内无限复可微。

解析(analytic)：称定义在开集Ω上的函数f在点$z_0\in\Omega$处是解析的，如果在z_0的邻域内存在幂级数展开

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \tag{71}$$

3 曲线积分

参数化曲线(parametrized curve)：曲线γ参数化

$$z(t):[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{C} \tag{72}$$

其反方向曲线记为γ^-

$$z^-(t)=z(b+a-t),\quad t\in[a,b] \tag{73}$$

光滑的(smooth)：称曲线$z(t)$在$[a,b]$上是光滑的，如果$z(t)$在$[a,b]$连续可微，同时$z'(t)\neq 0$。

相等(equivalent)：称两参数化曲线

$$z:[a,b]\to\mathbb{C}\qquad \tilde{z}:[c,d]\to\mathbb{C} \tag{74}$$

相等，如果存在从$[a,b]$到$[c,d]$的连续可微双射$s\mapsto t(s)$，使得$t'(s)>0$且

$$\tilde{z}(s)=z(t(s)) \tag{75}$$

封闭的(closed)：称定义在$[a,b]$上的曲线$z(t)$是封闭的，如果$z(a)=z(b)$。

曲线积分(integration along curves)：连续函数f在可参数化为$z:[a,b]\to\mathbb{C}$的光滑曲线γ上的曲线积分定义为

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t \tag{76}$$

- **线性性(linear)**：对于$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，成立

$$\int_\gamma \alpha f(z) + \beta g(z)\mathrm{d}z = \alpha \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z + \beta \int_\gamma g(z)\mathrm{d}z \tag{77}$$

- **反向性(reverse)**：

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = -\int_{\gamma^-} f(z)\mathrm{d}z \tag{78}$$

- **不等式**：

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \le \sup_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot \mathrm{length}(\gamma) \tag{79}$$

曲线长(length)：光滑曲线$\gamma : z : [a, b] \to \mathbb{C}$的长度定义为

$$\mathrm{length}(\gamma) = \int_a^b |z'(t)|\mathrm{d}t \tag{80}$$

定理3.2：若连续函数f在Ω上存在原函数F，且曲线γ起于w_1终于w_2，那么

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = F(w_2) - F(w_1) \tag{81}$$

推论3.3：若曲线γ在开集Ω上是封闭的，且连续函数f存在原函数，那么

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{82}$$

推论3.4：若f在区域Ω上是全纯的，且$f' = 0$，那么f是常函数。

二、Cauchy定理和应用

1 Goursat定理

定理1.1 Goursat定理(Goursat's theorem)：对于开集$\Omega \subset \mathbb{C}$，$T \subset \Omega$为内部含于$\Omega$的三角形，如果$f$在$\Omega$上全纯，那么

$$\int_T f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{83}$$

推论1.2：对于开集$\Omega \subset \mathbb{C}$，$R \subset \Omega$为内部含于$\Omega$的矩形，如果$f$在$\Omega$上全纯，那么

$$\int_R f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{84}$$

2 开圆上原函数的局部存在性和Cauchy定理

定理2.1：开圆上的全纯函数存在原函数。

定理2.2 开圆上的Cauchy定理(Cauchy's theorem in a disc)：如果f在开圆D上是全纯的，那么对于任意封闭曲线$\gamma \subset D$，成立

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{85}$$

事实上，如果$\Omega \subset \mathbb{C}$为连通区域，函数$f$在$\Omega$上全纯且在$\overline{\Omega}$上连续，同时$\partial\Omega$分段光滑，那么成立

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{86}$$

有趣曲线(toy contour)：称内部概念清晰的封闭曲线为有趣曲线。

定理2.3 Jordan定理：简单闭合分段光滑曲线具有**单连通**内部。

3 积分求解

- Fresnel积分(Fresnel integral)：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{87}$$

- 如果$\xi \in \mathbb{R}$，那么

$$\mathrm{e}^{-\pi\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\mathrm{e}^{-2\pi i x\xi}\mathrm{d}x \tag{88}$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2}\mathrm{d}x = \pi \tag{89}$$

4 Cauhy积分公式

4.1 柯西积分公式

定理4.1：对于开集$\Omega\subset\mathbb{C}$，闭圆$\overline{D}\subset\Omega$，定义$\partial D$的方向为正向，如果$f$在$\Omega$上全纯，那么对于任意$z\in D$，成立

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta \tag{90}$$

事实上，对于连通区域$\Omega\subset\mathbb{C}$，如果函数f在Ω上全纯且在$\overline{\Omega}$上连续，且$\partial\Omega$分段光滑，那么对于任意$z\in\Omega$，成立

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta \tag{91}$$

推论4.2：对于连通区域$\Omega\subset\mathbb{C}$，如果函数f在Ω上全纯且在$\overline{\Omega}$上连续，且$\partial\Omega$分段光滑，那么f在Ω上无穷阶可导，且对于任意$z\in\Omega$，成立

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta \tag{92}$$

称上述两式为**Cauchy积分公式(Cauchy integral formula)**。

推论4.3　平均值性质：对于在开集$\Omega\subset\mathbb{C}$上全纯的函数f，如果$z_0\in\Omega$且$D_r(z_0)\subset\Omega$，那么

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+r\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{d}\theta \tag{93}$$

推论4.4　Cauchy不等式(Cauchy inequalities)：对于开集$\Omega\subset\mathbb{C}$，如果$\overline{D}_r(z_0)\subset\Omega$，且$f$在$\Omega$上全纯，那么

$$|f^{(n)}(z_0)|\leq\frac{n!}{r^n}\sup_{z\in\partial D}|f(z)| \tag{94}$$

4.2 幂级数展开

定理4.5　Taylor展开：对于在开集Ω上的全纯函数f，如果D是以z_0为圆心的开圆且其闭包含于Ω，那么f在z_0存在幂级数展开

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad z\in D \tag{95}$$

其中

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\quad n\in\mathbb{N} \tag{96}$$

推论4.6　Liouville定理(Liouville’s theorem)：如果f是$\mathbb{C}$上的有界整函数，那么f是常函数。事实上，如果f为整函数，且或$\mathrm{Re}(f)$存在上界，或$\mathrm{Re}(f)$存在下界，或$\mathrm{Im}(f)$存在上界，或$\mathrm{Im}(f)$存在下界，那么f是常函数。

推论4.6　代数基本定理(the fundamental theorem of algebra)：非常数多项式在$\mathbb{C}$中存在根。

推论4.8　$\mathbb{C}$上的代数基本定理(the fundamental theorem of algebra in $\mathbb{C}$)：$\mathbb{C}$上的非常数整函数存在零点。

推论4.9：$n\in\mathbb{N}^+$次复系数多项式$P(z)$在$\mathbb{C}$上存在n个根。记根为$w_1,\cdots,w_n$，那么P可表示为

$$P(z) = a_n(z - w_1) \cdots (z - w_n) \tag{97}$$

4.3 零点定理

定理4.10 唯一性定理：对于在区域$\Omega \subset \mathbb{C}$上的全纯函数$f$，如果存在$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$，使得对于任意$n \in \mathbb{N}^*$，成立$f(z_n) = 0$，且$\lim_{n \to \infty} z_n \in \Omega$，那么在$\Omega$上成立$f = 0$。

推论4.11：对于在区域$\Omega \subset \mathbb{C}$上的全纯函数$f$和$g$，如果存在$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$，使得对于任意$n \in \mathbb{N}^*$，成立$f(z_n) = g(z_n)$，且$\lim_{n \to \infty} z_n \in \Omega$，那么在$\Omega$上成立$f = g$。

推论4.12：对于在区域$\Omega \subset \mathbb{C}$上的全纯函数$f$，如果存在曲线$\gamma \subset \Omega$或非空开集$G \subset \Omega$，使得成立$f(\gamma) = \{0\}$或$f(G) = \{0\}$，那么在$\Omega$上成立$f = 0$。

推论4.13：对于在区域$\Omega \subset \mathbb{C}$上的全纯函数$f$，如果存在$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$，且$z_n \to z_0$，使得对于任意$n \in \mathbb{N}^*$，成立$f(z_n) = 0$，那么或在$\Omega$上成立$f = 0$，或$z_0 \in \partial\Omega$。

推论4.14：对于在$\mathbb{C}$上的整函数f，如果存在$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$，使得对于任意$n \in \mathbb{N}^*$，成立$f(z_n) = 0$，那么或在$\mathbb{C}$上成立$f = 0$，或$|z_n| \to \infty$。

推论4.15：对于在区域$\Omega \subset \mathbb{C}$上的全纯函数$f$，如果存在$z \in \Omega$，得对于任意$n \in \mathbb{N}^*$，成立$f^{(n)}(z) = 0$，那么在$\Omega$上成立$f = 0$。

推论4.16：对于在区域$\Omega \subset \mathbb{C}$上的非零全纯函数$f$，如果$f(z) = 0$，那么$f$在$z$的某去心邻域内无零点。

解析延拓(analytic continuation)：对于分别在区域Ω和Ω'中解析的函数f和F，其中$\Omega \subset \Omega'$，如果在Ω中$f = F$，那么称F是f在区域Ω的解析延拓。

5 应用

5.1 Morera定理

定理5.1 Morera定理：对于在开圆D上的连续函数f，如果对于任意三角形$T \subset D$，成立

$$\int_T f(z) \mathrm{d}z = 0 \tag{98}$$

那么f是全纯的。

事实上，对于在开集Ω上的连续函数f，如果对于任意分段光滑封闭曲线$\gamma \subset \Omega$，成立

$$\int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = 0 \tag{99}$$

那么f是全纯的。

5.2 全纯函数序列

定理5.2：对于开集$\Omega \subset \mathbb{C}$，如果$\Omega$上的全纯函数序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在$\Omega$的任意紧致子集均一致收敛于函数$f$，那么$f$在$\Omega$中是全纯的。

定理5.3：对于开集$\Omega \subset \mathbb{C}$，如果$\Omega$上的全纯函数序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$在$\Omega$的任意紧致子集均一致收敛于函数$f$，那么其导函数序列$\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$在$\Omega$的任意紧致子集都一致收敛于函数$f'$。

5.3 由积分定义的全纯函数

定理5.4：对于定义在$(z,s)\in\Omega\times[0,1]$上的连续函数$F(z,s)$，其中$\Omega\subset\mathbb{C}$为开集，如果$F(z,s)$对于$z$为全纯的，那么函数$f(z)$为全纯的，其中

$$f(z)=\int_0^1 F(z,s)\mathrm{d}s \tag{100}$$

5.4 Schwarz反射定理

对于对称的开集$\Omega\subset\mathbb{C}$，即

$$z\in\Omega\Leftrightarrow\overline{z}\in\Omega \tag{101}$$

令

$$\begin{aligned}\Omega^{+}&=\{z:z\in\Omega\text{且}\mathrm{Im}(z)>0\}\\ \Omega^{-}&=\{z:z\in\Omega\text{且}\mathrm{Im}(z)<0\}\end{aligned} \tag{102}$$

同时令

$$I=\Omega\cap\mathbb{R} \tag{103}$$

定理5.5　对称原理(Symmetry principle)：对于全纯函数f^{+}和f^{-}，如果满足

$$f^{+}(x)=f^{-}(x),\quad x\in I \tag{104}$$

那么定义在Ω上的函数f是全纯的，其中

$$f(z)=\begin{cases}f^{+}(z) & z\in\Omega^{+}\\ f^{+}(z)=f^{-}(z) & z\in I\\ f^{-}(z) & z\in\Omega^{-}\end{cases} \tag{105}$$

定理5.6　Schwarz反射定理(Schwarz reflection principle)：如果函数f在$\Omega^{+}\cup I$上为全纯的，且

$$f(x)\in\mathbb{R},\quad x\in I \tag{106}$$

那么存在在Ω上全纯的函数F，使得成立

$$F(z)=f(z),\quad z\in\Omega^{+} \tag{107}$$

事实上

$$F(z)=\begin{cases}f(z) & z\in\Omega^{+}\cup I\\ \overline{f(\overline{z})} & z\in\Omega^{-}\end{cases} \tag{108}$$

5.5 Runge近似定理

定理5.7　Runge近似定理(Runge's approximation theorem)：如果函数f在开集$\Omega\subset\mathbb{C}$上是全纯的，且$K\subset\Omega$为紧集，那么f可由奇点在$\Omega-K$上的有理函数在K上一致近似。而且如果$\Omega-K$是连通的，那么f可由多项式函数在K上一致近似。

引理5.8：如果函数f在开集$\Omega\subset\mathbb{C}$上是全纯的，且$K\subset\Omega$为紧集，那么在$\Omega-K$上存在有限多段曲线$\gamma_1,\cdots,\gamma_n$，使得对于任意$z\in K$，成立

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta \tag{109}$$

引理5.9：如果函数f在开集$\Omega\subset\mathbb{C}$上是全纯的，且$K\subset\Omega$为紧集，那么对于任意分段曲线$\gamma\subset\Omega-K$，那么如下积分可由奇点在γ上的有理函数在K上一致近似。

$$\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta \tag{110}$$

引理5.10：对于开集$\Omega\subset\mathbb{C}$，如果紧集$K\subset\Omega$满足，$\Omega-K$是连通的，且$z_0\notin K$，那么函数$\frac{1}{z-z_0}$可由多项式函数在K上一致近似。

定理5.11 Weierstrass近似定理(Weierstrass approximation theorem)：如果f在紧集$K\subset\mathbb{R}^d$上连续，那么f可由多项式函数一致近似，即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{n_1+\cdots+n_d=n} a_{n_1,\cdots,n_d}x_1^{n_1}\cdots x_d^{n_d}\rightrightarrows f \tag{111}$$

推论5.12：如果f在紧集$K\subset\mathbb{C}$上连续，那么f可由关于z和$\overline{z}$的多项式函数一致近似，即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n} a_{ij}z^i\overline{z}^j\rightrightarrows f \tag{112}$$

三、 亚纯函数和对数

1 零点和极点

奇点(point singularity)：称$z_0 \in \mathbb{C}$为函数f的奇点，如果f在z_0处不全纯，但在z_0的任意邻域内存在全纯的点。

孤立奇点(isolated point singularity)：称$z_0 \in \mathbb{C}$为函数f的孤立奇点，如果f在z_0处不全纯，但在z_0的某去心邻域全纯。

零点(zero)：称$z_0 \in \mathbb{C}$为全纯函数f的零点，如果$f(z_0) = 0$。零点均为孤立点。

定理1.1：对于连通开集Ω上的全纯函数f，如果$z_0 \in \Omega$为其零点且存在非零点，那么存在$z_0 \in U \subset \Omega$，以及U上的非零函数g，使得满足存在$n \in \mathbb{N}^*$，对于任意$z \in U$，成立

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \tag{113}$$

其中n定义为零点z_0的**阶数(order)**。特别的，如果$n = 1$，那么称z_0为**简单的(simple)**。

去心邻域(deleted neighborhood)

$$\{z : 0 < |z - z_0| < r\} \tag{114}$$

全邻域(full neighborhood)

$$\{z : |z - z_0| < r\} \tag{115}$$

极点(pole)：对于在开集$\Omega - \{z_0\}$上全纯的函数f，称z_0为f的极点，如果$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$。

定理1.2：如果$z_0 \in \Omega$为函数f的极点，那么在z_0的邻域里存在无零点全纯函数h，以及非平凡正整数$n \in \mathbb{N}^*$，使得成立

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} h(z) \tag{116}$$

其中n定义为极点z_0的**阶数(order)**。特别的，如果$n = 1$，那么称z_0为**简单的(simple)**。

定理1.3：如果$z_0 \in \Omega$为函数f的极点，那么存在在z_0的邻域上的全纯函数G，使得满足

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^n} + G(z) \tag{117}$$

其中和$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^n}$称为$f$的**主体(principal part)**，系数a_{-1}称为f在z_0处的**留数(residue)**，记作$\mathrm{res}_{z_0} f = a_{-1}$。

定理1.4：如果$z_0 \in \Omega$为函数f的n阶极点，那么

$$\mathrm{res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} (z - z_0)^n f(z) \tag{118}$$

2 留数公式

定理2.1：对于定义在开集Ω上的函数f，如果圆$C \subset \Omega$，且$z_0 \in C$为f的极点，同时f在$\Omega - \{z_0\}$上全纯，那么

$$\int_{\partial C} f(z) \mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{res}_{z_0} f \tag{119}$$

推论2.2：对于定义在开集Ω上的函数f，如果如果$C \subset \Omega$，且$z_1, \cdots, z_n \in C$为f的极点，同时f在$\Omega - \{z_1, \cdots, z_n\}$上全纯，那么

$$\int_{\partial C} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}_{z_k} f \tag{120}$$

推论2.3：对于定义在开集Ω上的函数f，如果$\Omega_\gamma \subset \Omega$，其中$\Omega_\gamma$为有趣曲线γ围成的区域，且$z_1, \cdots, z_n \in \Omega_\gamma$为$f$的极点，同时$f$在$\Omega - \{z_1, \cdots, z_n\}$上全纯，那么

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}_{z_k} f \tag{121}$$

推论2.4：对于定义在区域Ω上的函数f，如果$\partial\Omega$逐段光滑，$z_1, \cdots, z_n \in \Omega_\gamma$为$f$的极点，同时$f$在$\Omega - \{z_1, \cdots, z_n\}$上全纯，在$\overline{\Omega} - \{z_1, \cdots, z_n\}$上连续，那么

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}_{z_k} f \tag{122}$$

3 奇点和亚纯函数

3.1 奇点

可去奇点(removable singularity)：对于在开集$\Omega - \{z_0\}$上全纯的函数f，称z_0为f的可去奇点，如果存在有限极限$\lim_{z \to z_0} f(z)$。

本质奇点(essential singularity)：对于在开集$\Omega - \{z_0\}$上全纯的函数f，称z_0为f的可去奇点，如果z_0为f的孤立奇点，但不是可去奇点和极点，即不存在极限$\lim_{z \to z_0} f(z)$。

定理3.1　关于可去奇点的Riemann定理(Riemann's theorem on removable singularities)：对于在开集$\Omega - \{z_0\}$上全纯的函数f，如果f在$\Omega - \{z_0\}$上有界，那么z_0为f的可去奇点。

推论3.2：如果f存在孤立奇点z_0，那么z_0是极点，当且仅当

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty \tag{123}$$

稠密的(dense)：称$E \subset X$在X中稠密，如果$\overline{E} = X$；亦即对于任意开集$G \subset X$，$G \cap E \neq \varnothing$
。

定理3.3　Casorati-Weierstrass定理：对于在去心开圆$D_r(z_0) - \{z_0\}$上全纯的函数f，如果z_0是f的本质奇点，那么$f(D_r(z_0) - \{z_0\})$是稠密的。

3.2 扩充复平面

扩充复平面(the extended complex plane)：$\overline{\mathbb{C}}$为$\mathbb{C}$的一点紧致化。

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \tag{124}$$

Riemann球(the Riemann sphere)：定义

$$\mathbb{S} = \left\{ (X, Y, Z) : X^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \right\} \tag{125}$$

$$\mathbb{C} = \{(x, y, 0) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \tag{126}$$

Riemann球的北极记作$\mathcal{N} = (0, 0, 1)$，那么$\mathbb{C} \to \mathbb{S} - \mathcal{N}$构成双射

$$(x,y)=\left(\frac{X}{1-Z},\frac{Y}{1-Z}\right) \tag{127}$$

$$(X,Y,Z)=\left(\frac{x}{x^2+y^2+1},\frac{y}{x^2+y^2+1},\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+1}\right) \tag{128}$$

于是扩展复平面的无穷远点就可以定义为$\mathcal{N}$的像。进而

$$\mathbb{S}\simeq\overline{\mathbb{C}} \tag{129}$$

无穷远点的邻域：

$$B_r(\infty)=\{z\in\overline{\mathbb{C}}:r<|z|\le\infty\} \tag{130}$$

奇点(point singularity)：称∞为函数f的奇点，如果f在∞处不全纯，但在∞的任意邻域内存在全纯的点。

孤立奇点(isolated point singularity)：称∞为函数f的孤立奇点，如果f在∞处不全纯，但在∞的某去心邻域全纯。

可去奇点(removable singularity)：对于以∞为孤立奇点的函数f，称∞为f的可去奇点，如果0为$f(\frac{1}{z})$的可去奇点。

极点(pole)：对于以∞为孤立奇点的函数f，称∞为f的n阶极点，如果0为$f(\frac{1}{z})$的n阶极点。

本质奇点(essential singularity)：对于以∞为孤立奇点的函数f，称∞为f的本质奇点，如果0为$f(\frac{1}{z})$的本质奇点。

3.3 亚纯函数

亚纯函数(meromorphic function)：称f在开集Ω上是亚纯的，如果对于至多可数序列$\{z_n\}$，f在$\Omega-\{z_n\}$全纯，每一个z_n为f的极点，且若序列$\{z_n\}$收敛，则收敛于$\partial\Omega$。

扩充复平面上的亚纯函数(meromorphic function in the extended complex plane)：称$\mathbb{C}$上的亚纯函数f是在$\overline{\mathbb{C}}$上的亚纯函数，如果f在∞处全纯，或者∞为f的极点。

定理3.4：扩展复平面上的亚纯函数是有理函数。

4 辐角原理和应用

定理4.1 辐角原理(the argument principle)：对于定义在开集$\Omega\subset\mathbb{C}$上的亚纯函数f，如果开圆$C\subset\Omega$，且f在∂C上无极点和零点，那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial C}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=n_z-n_p \tag{131}$$

其中n_z和n_p分别为f在C的零点数和极点数。

推论4.2：对于定义在开集$\Omega\subset\mathbb{C}$上的亚纯函数f，如果$\Omega_\gamma\subset\Omega$，其中$\Omega_\gamma$为有趣曲线$\gamma$围成的区域，且$f$在$\gamma$上无极点和零点，那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega_\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=n_z+n_p \tag{132}$$

其中n_z和n_p分别为f在Ω_γ的零点数和极点数。

定理4.3 Rouché定理：对于定义在开集$\Omega\subset\mathbb{C}$上的全纯函数f和g，如果开圆$C\subset\Omega$，且对于任意$z\in\partial C$，成立

$$|f(z)|>|g(z)| \tag{133}$$

那么f和$f+g$在C上存在相同数目的零点。

定理4.4 开映射定理(open mapping theorem)：如果f在开集$\Omega\subset\mathbb{C}$上是全纯函数，那么f是开的，即f把开集映成开集，或f为常函数。

全纯函数将开集映为开集，将域映为域，除非为常函数。

定理4.5 最大模原理(maximum modulus principle)：如果f在区域Ω上是全纯函数，那么$|f|$不在Ω内取到最大值，除非f为常函数。事实上，又如果f在Ω内无零点，那么$|f|$不在Ω内取到最小值，除非f为常函数。

推论4.6：对于有界域$\Omega\subset\mathbb{C}$，如果f在Ω上全纯，且在$\overline{\Omega}$上连续，那么

$$\sup_{z\in\Omega}|f(z)|\leq\sup_{z\in\overline{\Omega}-\Omega}|f(z)| \tag{134}$$

定理4.7 Schwartz引理：对于单位开圆盘$\mathbb{D}$，如果f在$\mathbb{D}$上全纯，且$f(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$，那么$|f'(0)|\leq 1-|f()|$，且对于任意$z\in\mathbb{D}$，成立$|f(z)|\leq|z|$，当且仅当存在$\theta\in\mathbb{R}$，使得$f(z)=\mathrm{e}^{i\theta}z$时等号成立。

定理4.8 Schwartz-Pick引理：对于单位开圆盘$\mathbb{D}$，如果f在$\mathbb{D}$上全纯，且$f(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$，那么对于任意$z,w\in\mathbb{D}$，成立

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(z)}f(w)}\right|\leq\left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| \tag{135}$$

5 同伦和单连通区域

同伦(homotopic)：对于开集Ω中定义在$[a,b]$的参数化曲线$\gamma_0(t)$和$\gamma_1(t)$，满足具有相同的始点和终点，即

$$\gamma_0(a)=\gamma_1(a)=\alpha,\qquad\gamma_0(b)=\gamma_1(b)=\beta \tag{136}$$

称曲线γ_0和γ_1在Ω中是同伦的，如果对于任意$s\in[0,1]$，存在开集Ω中定义在$[a,b]$的参数化曲线$\gamma_s(t)$，使得成立

$$\gamma_s(a)=\alpha,\qquad\gamma_s(b)=\beta \tag{137}$$

并且对于任意$t\in[a,b]$，成立

$$\gamma_s(t)|_{s=0}=\gamma_0(t),\qquad\gamma_s(t)|_{s=1}=\gamma_1(t) \tag{138}$$

同时$\gamma_s(t)$对于$(s,t)\in[0,1]\times[a,b]$上是连续的。

单连通(simply connected)：称区域$\Omega\subset\mathbb{C}$是单连通的，如果对于Ω中任意两条具有相同的始点和终点的曲线都是同伦的。

定理5.1：如果f在Ω上是全纯的，那么对于任意Ω中的同伦曲线γ_0和γ_1，成立

$$\int_{\gamma_0}f(z)\mathrm{d}z=\int_{\gamma_1}f(z)\mathrm{d}z \tag{139}$$

定理5.2：单连通区域中任何全纯函数都存在原函数。

推论5.3：对于单连通区域Ω中的全纯函数f，那么对于Ω中任意闭曲线γ，成立

$$\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z=0 \tag{140}$$

6 复对数

定理6.1：如果Ω为单连通区域，且$1 \in \Omega, 0 \notin \Omega$，那么在$\Omega$中存在对数的分支$F(z) = \log_{\Omega}(z)$，使得成立

- F在Ω中是全纯的。
- 对于任意$z \in \Omega$，成立$\mathrm{e}^{F(z)} = z$。
- 对于任意$r \in \mathbb{R}^+ \cap \Omega$，成立$F(r) = \ln r$。

对数的主分支(the principal branch of the logarithm)：对于裂隙平面$\Omega = \mathbb{C} - (-\infty, 0]$，存在对数的主分支

$$\log z = \ln r + i\theta \tag{141}$$

其中$z = r\mathrm{e}^{i\theta}$且$r \in \mathbb{R}^+, \theta \in (-\pi, \pi)$。

- $$\log(z_1 z_2) \neq \log z_1 + \log z_2 \tag{142}$$
- 对于$|z| < 1$，成立

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \tag{143}$$

幂(power)：如果Ω为单连通区域，且$1 \in \Omega, 0 \notin \Omega$，选择对数的分支，对于任意$\alpha \in \mathbb{C}$，定义幂

$$z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha \log z} \tag{144}$$

定理6.2：如果函数f在单连通区域Ω上是全纯非零函数，那么在Ω上存在全纯函数g，使得成立

$$f(z) = \mathrm{e}^{g(z)} \tag{145}$$

其中$g(z)$可以表示为$\log f(z)$，并确定了该对数的一个分支。

7 Fourier级数和调和函数

定理7.1：如果f在开圆$D_R(z_0)$上是全纯的，那么f存在在该开圆上收敛的幂级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{146}$$

其中对于任意$n \in \mathbb{N}$以及$0 < r < R$，成立

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\mathrm{e}^{i\theta}) \mathrm{e}^{-in\theta} \mathrm{d}\theta \tag{147}$$

此外，当$n \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$时，成立

$$0 = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\mathrm{e}^{i\theta}) \mathrm{e}^{-in\theta} \mathrm{d}\theta \tag{148}$$

推论7.2　中值定理(mean-value property)：如果f在开圆$D_R(z_0)$上是全纯的，那么对于任意$0 < r < R$，成立

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\mathrm{e}^{i\theta}) \mathrm{d}\theta \tag{149}$$

推论7.3：如果f在开圆$D_R(z_0)$上是全纯的，且$u = \mathrm{Re}(f)$，那么对于任意$0 < r < R$，成立

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r\mathrm{e}^{i\theta})\mathrm{d}\theta \tag{150}$$

四、Laurent展式

1 解析函数的Laurent展式

Laurent展式：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{151}$$

Laurent系数：

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad \gamma:|\zeta-z_0|=\rho\in(r,R) \tag{152}$$

Laurent级数：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{153}$$

正则部分：

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{154}$$

主要部分：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} \tag{155}$$

定理1.1：对于收敛圆环为

$$H:0\le r<|z-z_0|<R\le\infty \tag{156}$$

的双边幂级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{157}$$

- $f(z)$内闭一致收敛于H。
- $f(z)$在H内解析。
- $f(z)$在H内可逐项求导。
- $f(z)$可沿曲线$\gamma\subset H$逐项积分。

定理1.2　Laurent定理：在圆环$H:0\le r<|z-z_0|<R\le\infty$内的解析函数$f(z)$存在且存在唯一Laurent展式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \tag{158}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad \gamma:|\zeta-z_0|=\rho\in(r,R) \tag{159}$$

2 孤立奇点

奇点：称$z_0 \in \mathbb{C}$为函数f的奇点，如果f在z_0处不解析，但在z_0的任意邻域内存在解析的点。

孤立奇点：称$z_0 \in \mathbb{C}$为函数f的奇点，如果f在z_0处不解析，但在z_0的某去心邻域内解析，即在z_0的某去心邻域内存在Laurent级数。

可去奇点：f的孤立奇点z_0为可去奇点的等价定义。

- f在z_0的主要部分为零。
- 存在有限极限$\lim_{z \to z_0} f(z)$。
- f在z_0的某去心邻域内有界。

极点：f的孤立奇点z_0为n阶极点的等价定义。

- f在z_0的主要部分为

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} \tag{160}$$

- f在z_0的某去心邻域内可表示为

$$f(z) = \frac{\lambda(z)}{(z-z_0)^n} \tag{161}$$

  其中$\lambda(z)$在z_0点的邻域内解析，且$\lambda(z_0) \neq 0$。
- z_0为$\frac{1}{f}$的n阶零点。
-

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \tag{162}$$

$$0 < \lim_{z \to z_0} (z-z_0)^n f(z) < \infty \tag{163}$$

本质奇点：f的孤立奇点z_0为本质奇点的等价定义。

- f在z_0的主要部分为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} \tag{164}$$

- 不存在极限$\lim_{z \to z_0} f(z)$。

定理2.1 Weierstrass定理：如果z_0为函数f的本质奇点，那么对于任意$z \in \overline{\mathbb{C}}$，存在$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$，满足$z_n \to z_0$，且

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = z \tag{165}$$

定理2.2 Picard定理：如果z_0为函数f的本质奇点，那么对于除可能的一个值z'外任意$z \in \mathbb{C}$，存在$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$，满足$z_n \to z_0$，且对于任意$n \in \mathbb{N}^*$，成立

$$f(z_n) = z \tag{166}$$

3 无穷远点上的解析函数

孤立奇点：如果存在$r \geq 0$，使得f在$|z| > r$内解析，那么称∞为f的孤立奇点。

可去奇点、极点和本质奇点：如果0为$f(\frac{1}{z})$的可去奇点、n阶极点或本质奇点，那么称∞为$f(z)$的可去奇点、n阶极点或本质奇点。

五、Fourier变换

Fourier变换：

$$\hat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-2\pi ix\xi}\mathrm{d}x,\quad \xi\in\mathbb{R} \tag{167}$$

Fourier逆变换：

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi ix\xi}\mathrm{d}\xi,\quad x\in\mathbb{R} \tag{168}$$

1 $\mathfrak{F}$

$\mathfrak{F}_a$：对于任意$a>0$，定义$\mathfrak{F}_a$族为满足如下条件的函数集族。

- f在S_a上是全纯的，其中

$$S_a=\{z\in\mathbb{C}:|\mathrm{Im}(z)|<a\} \tag{169}$$

- 存在常数$A>0$，使得对于任意$x\in\mathbb{R}$和$|y|<a$，成立

$$f(x+iy)\leq\frac{A}{1+x^2} \tag{170}$$

$\mathfrak{F}$:

$$\mathfrak{F}=\bigcup_{a>0}\mathfrak{F}_a \tag{171}$$

2 $\mathfrak{F}$上的Fourier变换

定理2.1：如果$f\in\mathfrak{F}_a$，那么对于任意$b\in[0,a)$，成立

$$|\hat{f}(\xi)|\leq B\mathrm{e}^{-2\pi b|\xi|} \tag{172}$$

定理2.2：如果$f\in\mathfrak{F}$，那么成立Fourier逆变换：

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{2\pi ix\xi}\mathrm{d}\xi,\quad x\in\mathbb{R} \tag{173}$$

引理2.3：对于$A\in\mathbb{R}^+,B\in\mathbb{R}$，成立

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-(A+iB)\xi}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{A+iB} \tag{174}$$

定理2.4：如果$f\in\mathfrak{F}$，那么

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n) \tag{175}$$

3 Paley-Wiener定理

定理3.1：如果存在$a,A>0$，使得满足$|\hat{f}(\xi)|\leq A\mathrm{e}^{-2\pi a|\xi|}$，那么$f$是在带状区域$S_b=\{z\in\mathbb{C}:|\mathrm{Im}(z)|<b\}$上的全纯函数$f$在$\mathbb{R}$上的限制。

推论3.2：如果存在$a>0$，使得满足$\hat{f}(\xi)=O(\mathrm{e}^{-2\pi a|\xi|})$，并且$f$在非空开区间上为零，那么$f=0$。

定理3.3 Paley-Wiener定理：对于在$\mathbb{R}$上连续且适度减小的函数f，f在$\mathbb{C}$上的延拓满足$|f(z)| \leq A\mathrm{e}^{2\pi M|z|}$，当且仅当$\hat{f}$在$[-M, M]$上受支持。

定理3.4：对于在扇形区域

$$S = \{z : -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}\} \tag{176}$$

上全纯且在$\overline{S}$上连续的函数F，如果F在S的边界上满足$|F| \leq 1$，且存在$c, C > 0$，使得在S上成立$|F| \leq C\mathrm{e}^{c|z|}$，那么在$S$上成立

$$|F| \leq 1 \tag{177}$$

定理3.5：对于适度下降的f及$\hat{f}$，对于任意$\xi < 0$，成立$\hat{f}(\xi) = 0$，当且仅当f可以延拓为在上半闭平面$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$连续有界且在内部全纯的函数。

六、整函数

1 Jensen公式

在本节记以原点为圆心以R为半径的开圆盘和圆周分别记为D_R和C_R。

定理1.1 Jensen公式：对于开集$\Omega\subset\mathbb{C}$，如果$\overline{D}_R\subset\Omega$，函数$f$在$\Omega$上全纯，$f(0)\neq 0$且$0\notin f(C_R)$，那么记$f$在$D_R$上的零点为$z_1,\cdots,z_n$（以重数计），成立

$$\log|f(0)|=\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{|z_k|}{R}\right)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta \tag{178}$$

推论：对于在$\overline{D}_R$上全纯的函数f，定义$\mathfrak{n}(\mathfrak{r})$为$f$在$D_r$上的零点，其中$0<r<R$，如果$f(0)\neq 0$且$0\notin f(C_R)$，那么

$$\int_0^R\mathfrak{n}(\mathfrak{r})\frac{\mathrm{d}\mathfrak{t}}{\mathfrak{r}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(Re^{i\theta})|\mathrm{d}\theta-\log|f(0)| \tag{179}$$

引理1.2：如果$z_1,\cdots,z_n$是f在D_R上的零点，那么

$$\int_0^R\mathfrak{n}(\mathfrak{r})\frac{\mathrm{d}\mathfrak{t}}{\mathfrak{r}}=\sum_{k=1}^{n}\log\left|\frac{R}{z_k}\right| \tag{180}$$

2 有限阶函数

增长阶(order of growth)：对于整函数f，定义其增长阶为

$$\rho_f=\inf\{\rho:\exists A,B>0,\forall z\in\mathbb{C},|f(z)|\leq Ae^{B|z|^\rho}\} \tag{181}$$

定理2.1：如果整函数f满足$\rho_f\leq\rho$，那么

- 存在$C>0$，使得充分大的r，满足$\mathfrak{n}(\mathfrak{r})\leq\mathfrak{C}\mathfrak{r}^\rho$。
- 如果$z_1,\cdots,z_n$是f在D_R上的非原点零点，那么对于任意$s>\rho$，成立

$$\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|^s<\infty \tag{182}$$

3 无穷积

3.1 概论

命题3.1：对于$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$，如果

$$\sum_{n=1}^{\infty}<\infty \tag{183}$$

那么如下无穷积收敛

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+z_n) \tag{184}$$

并且收敛于0，当且仅当存在$z_k=0$。

命题3.2：对于$\Omega\subset\mathbb{C}$上的全纯函数序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，如果存在$c_n>0$，使得成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty \tag{185}$$

并且对于任意$z \in \Omega$，成立

$$|f_n(z) - 1| \le c_n \tag{186}$$

那么

- 无穷积$\prod_{n=1}^{\infty} f$一致收敛于Ω上的全纯函数f。
- 如果对于任意$n \in \mathbb{N}^*$，成立$f(n) \neq 0$，那么

$$\frac{f'}{f} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'}{f_n} \tag{187}$$

3.2 例：正弦函数的无穷积

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \tag{188}$$

4 Weierstrass无穷积

定理4.1：对于任意$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$，满足$|z_n| \to \infty$，存在$\mathbb{C}$上的整函数$f$，使得$f$以且仅以$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$为零点；而且如果$\mathbb{C}$上的整函数$h$亦以且仅以$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$为零点，那么存在$\mathbb{C}$上的整函数$g$，使得成立$h = f\mathrm{e}^g$。事实上$f$可取Weierstrass积。

自然因子(canonical factor)：对于度$n \in \mathbb{N}$，定义自然因子为

$$E_n(z) = \begin{cases} 1 - z, & n = 0 \\ (1 - z)\mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k}}, & n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \tag{189}$$

引理4.2：对于任意$|z| \le \frac{1}{2}$，成立$|1 - E_n(z)| \le 2\mathrm{e}|z|^{n+1}$。

Weierstrass积(Weierstrass product)：

$$f(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{z}{z_n}\right) \tag{190}$$

5 Hadamard因子分解定理

定理5.1 Hadamard因子分解定理(Hadamard’s factorization theorem)：如果f为$\mathbb{C}$上的以ρ为增长阶的整函数，且以且仅以$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$（和0）为零点，那么

$$f(z) = \mathrm{e}^{P(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{[\rho]}\left(\frac{z}{z_n}\right) \tag{191}$$

其中P为次数不多于$[\rho]$的多项式，m为f在$z = 0$的零点阶。

引理5.2：如果$|z| \le \frac{1}{2}$，那么存在$c > 0$，使得成立

$$|E_n(z)| \ge \mathrm{e}^{-c|z|^{n+1}} \tag{192}$$

如果$|z| \ge \frac{1}{2}$，那么存在$c' > 0$，使得成立

$$|E_n(z)| \ge |1 - z|\mathrm{e}^{-c'|z|^n} \tag{193}$$

引理5.3：对于任意$\rho < s < [\rho] + 1$，存在$c > 0$，成立

$$\left|\prod_{n=1}^{\infty} E_{[\rho]}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \geq \mathrm{e}^{-c|z|^s} \tag{194}$$

除非

$$z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \partial D_{|z_n|^{-([\rho]+1)}}(z_n) \tag{195}$$

推论5.4：对于任意$\rho < s < [\rho]+1$，存在$c > 0$和$\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$，满足$r_n \to \infty$，且对于任意$|z| = r_n$，成立

$$\left|\prod_{n=1}^{\infty} E_{[\rho]}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \geq \mathrm{e}^{-c|z|^s} \tag{196}$$

七、Γ函数和ζ函数

1 Γ函数

Γ函数:

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{s-1}\mathrm{d}t,\quad s\in\mathbb{C}-(\mathbb{Z}-\mathbb{N}^*)\tag{197}$$

1.1 解析延拓

命题1.1：Γ函数可解析延拓于$\mathrm{Re}(s)>0$。

引理1.2：

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),\quad ,\qquad \mathrm{Re}(s)>0\tag{198}$$

定理1.3：Γ函数可解析延拓于$\mathbb{C}$上仅以$\mathbb{Z}-\mathbb{N}^*$为简单极点的亚纯函数，其中Γ在$-n\in\mathbb{Z}-\mathbb{N}^*$处的留数为$\frac{(-1)^n}{n!}$。

1.2 Γ函数的性质

定理1.4：

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s},\quad s\in\mathbb{C}\tag{199}$$

引理1.5：

$$\int_0^{\infty}\frac{v^{a-1}}{1+v}\mathrm{d}v=\frac{\pi}{\sin\pi a},\quad 0<a<1\tag{200}$$

定理1.6：Γ函数成立如下性质。

- $\frac{1}{\Gamma}$是仅以$s\in\mathbb{Z}-\mathbb{N}^*$为简单零点的整函数。
- $\frac{1}{\Gamma}$存在增长阶

$$\left|\frac{1}{\Gamma(s)}\right|\le c_1\mathrm{e}^{c_2|s|\log|s|}\tag{201}$$

  因此$\frac{1}{\Gamma}$是以1为增长阶的，即对于任意$\varepsilon>0$，存在c，使得成立

$$\left|\frac{1}{\Gamma(s)}\right|\le c\mathrm{e}^{c_2|s|^{1+\varepsilon}}\tag{202}$$

定理1.7：

$$\Gamma(s)=\frac{1}{s\mathrm{e}^{\gamma s}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{s}{n}}\tag{203}$$

其中γ为Euler常数

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log k\right)\tag{204}$$

2 ζ函数

Riemannζ函数：

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\qquad s\in\mathbb{C}-\{1\}\tag{205}$$

2.1 泛函方程和解析延拓

ϑ函数：

$$\vartheta(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\pi n^2 t},\quad t>0\tag{206}$$

- $$\vartheta(t)=\frac{\vartheta(\frac{1}{t})}{\sqrt{t}}\tag{207}$$
- 存在$C>0$，使得对于任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$0<t<\delta$时，成立

$$\vartheta(t)\leq\frac{C}{\sqrt{t}}\tag{208}$$

- 存在$C>0$，使得对于任意$t\geq 1$，成立

$$|\vartheta(t)-1|\leq C\mathrm{e}^{-\pi t}\tag{209}$$

ξ函数：

$$\xi(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),\qquad \mathrm{Re}(s)>1\tag{210}$$

命题2.1：ζ函数可解析延拓于$\mathrm{Re}(s)>1$。

定理2.2：

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}u^{\frac{s}{2}-1}(\vartheta(u)-1)\mathrm{d}u,\qquad \mathrm{Re}(s)>1\tag{211}$$

定理2.3：ξ函数在$\mathrm{Re}(s)>1$上全纯，且可解析延拓于$\mathbb{C}$上仅以0和1为简单极点的亚纯函数，而且

$$\xi(s)=\xi(1-s),\quad s\in\mathbb{C}\tag{212}$$

定理2.4：ζ函数可解析延拓于$\mathbb{C}$上仅以1为简单极点的亚纯函数。

命题2.5：存在$\mathbb{C}$上的整函数序列$\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$，满足$|\delta_n(s)|\leq\frac{n^{\mathrm{Re}(s)+1}}{|s|}$，且对于任意$n>1$，成立

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n^s}-\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x^s}=\sum_{k=1}^{n-1}\delta_n(s)\tag{213}$$

推论2.6：$\zeta(s)-\frac{1}{s-1}$在$\mathrm{Re}(s)>0$上全纯，且

$$\zeta(s)-\frac{1}{s-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n(s)\tag{214}$$

命题2.7：对于任意$\sigma\in[0,1]$和$\varepsilon>0$，存在常数c_{ε}，使得成立

- 如果$\sigma\leq\mathrm{Re}(s)$且$|t|\geq 1$，那么

$$|\zeta(s)|\leq c_{\varepsilon}|t|^{1-\sigma+\varepsilon}\tag{215}$$

- 如果$\mathrm{Re}(s) \geq 1$且$|t| \geq 1$，那么

$$|\zeta'(s)| \leq c_\varepsilon |t|^\varepsilon \tag{216}$$

八、ζ函数和素数定理

Euler函数：定义Euler函数$\pi(x)$为不大于x的素数的个数。

素数定理(the prime number theorem)：

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \qquad (x \to \infty) \tag{217}$$

ζ函数的素数展开：

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ns}} \tag{218}$$

1 ζ函数的零点

Riemann假设(Riemann hypothesis)：ζ函数的非平凡零点(nontrivial zero)的实部为$\frac{1}{2}$。

定理1.1：ζ函数在临界带$0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$外的零点仅有$-2\mathbb{N}^*$。

定理1.2：ζ函数$\mathrm{Re}(s) = 1$上无零点。

引理1.3：如果$\mathrm{Re}(s) > 1$，那么存在$\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得成立

$$\log \zeta(s) = \sum_{p,m} \frac{p^{-ms}}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} \tag{219}$$

引理1.4：

$$3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta \geq 0, \quad \theta \in \mathbb{R} \tag{220}$$

推论1.5：如果$x > 1$且$y \in \mathbb{R}$，那么

$$\log\left|\zeta^3(x)\zeta^4(x+iy)\zeta(x+2iy)\right| \geq 0 \tag{221}$$

命题1.6：对于任意$\varepsilon > 0$，如果$\mathrm{Re}(s) \geq$且$|\mathrm{Im}(s)| \geq 1$，那么存在c_ε，使得成立

$$\frac{1}{|\zeta(s)|} \leq c_\varepsilon |\mathrm{Im}(s)|^\varepsilon \tag{222}$$

2 转化为ψ和ψ_0函数

Tchebychevψ函数：定义

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \exists p, \exists m \in \mathbb{N}^*, n = p^m \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{223}$$

那么Tchebychevψ函数可等价定义如下

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p \tag{224}$$

$$= \sum_{n=1}^{[x]} \Lambda(n) \tag{225}$$

$$= \sum_{p \leq x} \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p \tag{226}$$

ψ_0函数：

$$\psi_0(x)=\int_1^x \psi(u)\mathrm{d}u \tag{227}$$

命题2.1：如下两命题等价

$$\psi(x)\sim x \qquad (x\to\infty) \tag{228}$$

$$\pi(x)\sim \frac{x}{\log x} \qquad (x\to\infty) \tag{229}$$

命题2.2：如果

$$\psi_0(x)\sim x \qquad (x\to\infty) \tag{230}$$

那么

$$\psi(x)\sim x \qquad (x\to\infty) \tag{231}$$

因此

$$\pi(x)\sim \frac{x}{\log x} \qquad (x\to\infty) \tag{232}$$

命题2.3：对于任意$c>1$，成立

$$\psi_0(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)\mathrm{d}s \tag{233}$$

引理2.4：如果$c>0$，那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\mathrm{d}s=\begin{cases}0, & 0<x\le 1\\ 1-\frac{1}{x}, & x\ge 1\end{cases} \tag{234}$$

九、共形映射

Motivation：满足如何性质的开集$\Omega\subset\mathbb{C}$使得存在从Ω到$\mathbb{D}$的全纯双射。

1 共形等价

共形映射(conformal map)或双全纯(biholomorphism)：称全纯双射为共形映射或双全纯映射。

双全同态(biholomorphic)：如果$f:U\to V$为共形映射，那么称U和V是共形等价或双全同态。

命题1.1：如果$f:U\to V$为全纯单射，那么对于任意$z\in U$，$f'(z)\neq 0$。特别的，$f^{-1}:f(U)\to U$为全纯的。因此，开集U和V是共形等价的，当且仅当存在全纯函数$f:U\to V$和$g:V\to U$，使得对于任意$z\in U$和$w\in V$，成立$g(f(z))=z$和$f(g(w))=w$。

1.1 圆盘和上半平面

上半平面(upper half-plane)：

$$\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}(z)>0\}\tag{235}$$

定理1.2：如下映射为共形映射

$$\begin{aligned}F:&\mathbb{H}\to\mathbb{D}&(236)\\z&\mapsto\frac{i-z}{i+z}&(237)\end{aligned}$$

其逆映射为

$$\begin{aligned}G:&\mathbb{D}\to\mathbb{H}&(238)\\w&\mapsto i\frac{1-w}{1+w}&(239)\end{aligned}$$

1.2 例

- **平移(translation)**：

$$\begin{aligned}\mathbb{C}&\to\mathbb{C}&(240)\\z&\mapsto z+h&(241)\end{aligned}$$

- **膨胀(dilation)**：

$$\begin{aligned}\mathbb{C}&\to\mathbb{C}&(242)\\z&\mapsto cz\qquad(c\neq 0)&(243)\end{aligned}$$

- 幂映射：

$$\begin{aligned}&S=\{z\in\mathbb{C}:0<\arg(z)<\frac{\pi}{n}\}\to\mathbb{H}&(244)\\&z\mapsto z^n\qquad(n\in\mathbb{N}^*)&(245)\end{aligned}$$

- 分式映射：

$$\begin{aligned}&\{z\in\mathbb{C}:|z|<1,\operatorname{Im}(z)>0\}\to\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}(z)>0,\operatorname{Im}(z)>0\}&(246)\\&z\mapsto\frac{1+z}{1-z}&(247)\end{aligned}$$

- 对数映射：

$$\mathbb{H} \to \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im}(z) < \pi\} \tag{248}$$
$$z \mapsto \log z \tag{249}$$

- 指数映射：

$$\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| < \frac{\pi}{2}, \mathrm{Im}(y) > 0\} \to \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| < 1, \mathrm{Im}(y) > 0\} \tag{250}$$
$$z \mapsto \mathrm{e}^{iz} \tag{251}$$

- 正弦映射：

$$\mathbb{H} \to \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| < \frac{\pi}{2}, \mathrm{Im}(y) > 0\} \tag{252}$$
$$z \mapsto \sin z \tag{253}$$

1.3 带状区域上的Dirichlet问题

Dirichlet问题(Dirichlet problem)：

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \Omega \\ u = f, & \partial\Omega \end{cases} \tag{254}$$

引理1.3：对于开集$V, U \subset \mathbb{C}$，如果$f : V \to U$是全纯函数，$u : U \to \mathbb{C}$是调和函数，那么$u \circ f : V \to \mathbb{C}$是调和函数。

2 Schwarz引理；圆盘和上半平面的自同构

引理2.1：