2023年03月03日

第一题

计算

$$\iint_S yz\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x \tag{1}$$

其中S为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的上半表面的上侧。

解： 曲面S可表示为

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \tag{2}$$

注意到

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{cy}{b^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \tag{3}$$

S的上侧即为正方向，进而

$$\begin{aligned}
&\iint_S yz\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x && (4)\\
=&c\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} y\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y && (5)\\
=&\frac{c^2}{b^2}\iint_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y && (6)\\
=&abc^2\left(\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho\right) && (7)\\
=&\frac{\pi}{4}abc^2 && (8)
\end{aligned}$$

第二题

计算

$$\iint_S z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x \tag{9}$$

其中S为柱面$x^2+y^2=1$被平面$z=0$及$z=3$所截部分的外侧。

解： 将S表示为参数方程

$$\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\,,\quad \theta\in[0,2\pi),z\in[0,3]\\ z=z\end{cases} \tag{10}$$

注意到

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,z)}=\cos\theta,\qquad \frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,z)}=\sin\theta,\qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,z)}=0 \tag{11}$$

S的外侧即为正方向，进而

$$\begin{aligned}
&\iint_S z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x && (12)\\
=&\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_0^3\mathrm{d}z\right) && (13)\\
=&6\pi && (14)
\end{aligned}$$

2023年03月08日

计算

$$I=\iint\limits_{S} x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \tag{15}$$

其中S为球面$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$的外侧。

解： 由Gauss公式

$$I=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{16}$$

其中Ω为球体$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\le R^2$。

法一： 作参数变换

$$\begin{cases} x=a+\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=b+\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=c+\rho\cos\varphi \end{cases},\qquad \rho\in[0,R],\varphi\in[0,\pi],\theta\in[0,2\pi] \tag{17}$$

进而

$$I=2\int_0^R\mathrm{d}\rho\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}((a+b+c)+\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi(\cos\theta+\sin\theta))\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta \tag{18}$$

$$=8\pi\int_0^R\mathrm{d}\rho\int_0^\pi((a+b+c)+\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi \tag{19}$$

$$=8\pi(a+b+c)\int_0^R\rho^2\mathrm{d}\rho \tag{20}$$

$$=\frac{8\pi}{3}R^3(a+b+c) \tag{21}$$

法二： 注意到

$$\left(\frac{\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},\frac{\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},\frac{\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}\right) \tag{22}$$

为均匀球体Ω的质心(a,b,c)，同时因为

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4\pi}{3}R^3 \tag{23}$$

那么

$$\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4\pi}{3}aR^3,\quad \iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4\pi}{3}bR^3,\quad \iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4\pi}{3}cR^3 \tag{24}$$

进而

$$I=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{8\pi}{3}R^3(a+b+c) \tag{25}$$

2023年03月10日

设$z,w\in\mathbb{C}$，且$\overline{z}w\neq 1$，证明：当$|z|\leq 1$且$|w|\leq 1$时，成立

$$\left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right|\leq 1 \tag{26}$$

当且仅当$|z|=1$或$|w|=1$时等号成立。

证明：注意到

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right|\leq 1 &(27)\\
\iff&\left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right|^2\leq 1 &(28)\\
\iff&\left(\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right)\left(\frac{\overline{w}-\overline{z}}{1-w\overline{z}}\right)\leq 1 &(29)\\
\iff&(w-z)\left(\overline{w}-\overline{z}\right)\leq\left(1-\overline{w}z\right)\left(1-w\overline{z}\right) &(30)\\
\iff&\left(1-|w|^2\right)\left(1-|z|^2\right)\geq 0 &(31)
\end{aligned}$$

由$|z|\leq 1$且$|w|\leq 1$，这是显然的。

考虑取等条件，等号成立当且仅当

$$\left(1-|w|^2\right)\left(1-|z|^2\right)=0 \tag{32}$$

即$|z|=1$或$|w|=1$。

命题得证！

2023年03月15日

证明：如果$\Omega \subset \mathbb{C}$为有界闭集，那么对于$\Omega$的任意开覆盖，存在有限子覆盖。

证明： 我们采用反证法，假设对于Ω的任意开覆盖，都不存在有限子覆盖。

记Ω的一个开覆盖为

$$\Omega \subset \bigcup_{\lambda} \mathcal{O}_{\lambda} \tag{33}$$

其中任意$\mathcal{O}_{\lambda}$为开集。

由于$\Omega \subset \mathbb{C}$为有界集，那么存在闭的正方形$R_0 = [a_0, b_0] \times [c_0, d_0]$，使得成立$\Omega \subset R_0$，其中$b_0 - a_0 = d_0 - c_0 = A > 0$。那么$R_0$不能被$\bigcup_{\lambda} \mathcal{O}_{\lambda}$有限子覆盖，记$z_0 \in R_0 \cap \Omega$。作$R_0$的一个分割

$$R_0 = \left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right] \times \left[c_0, \frac{c_0+d_0}{2}\right] \bigcup \left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right] \times \left[\frac{c_0+d_0}{2}, d_0\right] \bigcup \left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right] \times \left[c_0, \frac{c_0+d_0}{2}\right] \bigcup \left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right] \times \left[\frac{c_0+d_0}{2}, d_0\right] \tag{34}$$

那么这四个区域中一定存在一个区域，使得该区域与Ω的交非空且不能被$\bigcup_{\lambda} \mathcal{O}_{\lambda}$有限子覆盖，不妨记该区域为$R_1 = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$，且记$z_1 \in R_1 \cap \Omega$。

假设已成立$R_n = [a_n, b_n] \times [c_n, d_n]$不能被$\bigcup_{\lambda} \mathcal{O}_{\lambda}$有限子覆盖，且$z_n \in R_n \cap \Omega$，那么作$R_n$的一个分割

$$R_n = \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] \times \left[c_n, \frac{c_n+d_n}{2}\right] \bigcup \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] \times \left[\frac{c_n+d_n}{2}, d_n\right] \bigcup \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right] \times \left[c_n, \frac{c_n+d_n}{2}\right] \bigcup \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right] \times \left[\frac{c_n, d_n}{2}, d_0\right] \tag{35}$$

那么这四个区域中一定存在一个区域，使得该区域与Ω的交非空且不能被$\bigcup_{\lambda} \mathcal{O}_{\lambda}$有限子覆盖，不妨记该区域为$R_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] \times [c_{n+1}, d_{n+1}]$，且记$z_n \in R_n \cap \Omega$。

归纳的，我们得到一列有界闭集$R_0 \supset R_1 \supset \cdots$，和一数列$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使得任意$R_n$不能被$\bigcup_{\lambda} \mathcal{O}_{\lambda}$有限子覆盖，并且对于任意$n \in \mathbb{N}$，成立$z_n \in R_n \cap \Omega$，同时

$$\operatorname{diam}(R_n) = \sqrt{(a_n - b_n)^2 + (c_n - d_n)^2} \tag{36}$$

其中

$$b_n - a_n = \frac{A}{2^n}, \qquad d_n - c_n = \frac{A}{2^n} \tag{37}$$

因此

$$\operatorname{diam}(R_n) = \frac{\sqrt{2}A}{2^n} \to 0 \quad (n \to 0) \tag{38}$$

由紧集套定理，存在且存在唯一z，使得成立

$$z \in \bigcap_{n=0}^{\infty} R_n \tag{39}$$

注意到

$$|z_n - z| \le \operatorname{diam}(R_n) \to 0 \quad (n \to 0) \tag{40}$$

因此数列$\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$收敛且收敛至$z$。又因为$\Omega$为闭集，因此$z \in \Omega \subset \bigcup_{\lambda} \mathcal{O}_{\lambda}$，进而存在$\lambda_0$，使得成立$z \in \mathcal{O}_{\lambda_0}$。由于$\mathcal{O}_{\lambda_0}$为开集，因此存在$r > 0$，使得成立$D_r(z) \subset \mathcal{O}_{\lambda_0}$。

取$n_r = \max\left(1, 2 + \left[\frac{1}{2} + \frac{\ln r - \ln A}{\ln 2}\right]\right)$，任取$w \in R_{n_r}$，注意到

$$|w - z| \le \operatorname{diam}\left(R_{n_r}\right) = \frac{\sqrt{2}A}{2^{n_r}} < r \tag{41}$$

因此$w \in D_r(z)$，进而$R_{n_r} \subset D_r(z) \subset \mathcal{O}_{\lambda_0}$，这与$R_{n_r}$不能被$\bigcup_{\lambda} \mathcal{O}_{\lambda}$有限子覆盖矛盾！

那么对于Ω的任意开覆盖，存在有限子覆盖，原命题得证！□

2023年03月17日

第一题

对于开集的连通性的两个定义：

(1)称开集$\Omega\subset\mathbb{C}$为连通的，如果Ω不能写成两个不交非空开集的并。

(2)称开集$\Omega\subset\mathbb{C}$为连通的，如果Ω中任意两点可由包含于Ω中的连续曲线连接。

证明：

对于$(1)\implies(2)$：

任取$w\in\Omega$，令

$$\Omega_1=\{z\in\Omega: z\text{和}w\text{可由包含于}\Omega\text{中的连续曲线连接}\}\tag{42}$$
$$\Omega_2=\{z\in\Omega: z\text{和}w\text{不可由包含于}\Omega\text{中的连续曲线连接}\}\tag{43}$$

显然

$$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2,\qquad \Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing\tag{44}$$

下证$\Omega_2=\varnothing$，反证，假设$\Omega_2\neq\varnothing$。

注意到$w\in\Omega_1$，任取$z_1\in\Omega_1\subset\Omega$，那么存在$r_1>0$，使得$D_{r_1}(z_1)\subset\Omega$，进而$D_{r_1}(z_1)\subset\Omega_1$，于是$\Omega_1$为开集。

任取$z_2\in\Omega_2\subset\Omega$，因此存在$r_2>0$，使得$D_{r_2}(z_2)\subset\Omega$，进而$D_{r_2}(z_2)\subset\Omega_2$，于是$\Omega_2$为开集。

由(1)，可知$\Omega_2=\varnothing$，矛盾！因此$\Omega_2=\varnothing$，进而$\Omega=\Omega_1$，(2)成立！

对于$(2)\implies(1)$：

反证，假设存在非空开集Ω_1和Ω_2，使得成立

$$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2,\qquad \Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing\tag{45}$$

任取$z\in\Omega_1$和$w\in\Omega_2$，那么存在连续曲线$z(t):[0,1]\to\Omega$，使得成立

$$z(0)=z,\qquad z(1)=w\tag{46}$$

令

$$s=\sup\{t\in[0,1]: z(t_0)\in\Omega_1, 0\le t_0\le t\}\tag{47}$$

如果$z(s)\in\Omega_1$，那么存在$r_1>0$，使得成立$D_{r_1}(z(s))\subset\Omega_1$。由$z(t)$的连续性，存在$\delta_1>0$，使得当$|t-s|<\delta_1$时，成立$|z(t)-z(s)|<r_1$，因此$z\left(s+\frac{\delta_1}{2}\right)\in D_{r_1}(z(s))\subset\Omega_1$，与$s$的定义矛盾，因此$z(s)\notin\Omega_1$。

如果$z(s)\in\Omega_2$，那么存在$r_2>0$，使得成立$D_{r_2}(z(s))\subset\Omega_2$。由$z(t)$的连续性，存在$\delta_2>0$，使得当$|t-s|<\delta_2$时，成立$|z(t)-z(s)|<r_2$，因此$z\left(s-\frac{\delta_2}{2}\right)\in D_{r_2}(z(s))\subset\Omega_2$，与$s$的定义矛盾，因此$z(s)\notin\Omega_2$。

进而$z(s)\notin\Omega_1\cup\Omega_2=\Omega$，与$z(t)$的定义矛盾！进而原假设不成立，因此$(1)$成立！

综上所述，开集的连通性的两个定义的等价性已得证！

第二题

证明：$f(z)=\arg z\in[-\pi,\pi)$在负实轴不连续。

证明：任取负实轴上的点$z_0=-r$，其中$r\in\mathbb{R}^+$，那么$f(z_0)=-\pi$。

构造$z_n=re^{i\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi}$，其中$n\in\mathbb{N}^*$，那么对于任意$n\in\mathbb{N}^*$，成立$f(z_n)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi$。

注意到

$$\lim_{n\to\infty}z_n=-r=z_0\tag{48}$$

但是

$$\lim_{n\to\infty}f(z_n)=\pi\neq-\pi=f(z_0)\tag{49}$$

于是$f(z)$在z_0处不连续，又由于z_0的任意性，$f(z)$在负实轴上任意一点均不连续。

2023年03月22日

第一题

证明：如果f复可微，那么$\frac{\partial u}{\partial z}=i\frac{\partial v}{\partial z}$。

证明： 注意到

$$\mathrm{LHS}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{50}$$

$$\mathrm{RHS}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{51}$$

由Cauchy-Riemann方程，这是显然的。

第二题

证明：如果f是全纯的，那么$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}=0$。

证明： 注意到

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{f}}{\partial z}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}+\frac{1}{i}\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}\right) &(52)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\left(u-iv\right)}{\partial x}+\frac{1}{i}\frac{\partial\left(u-iv\right)}{\partial y}\right) &(53)\\&=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}-i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) &(54)\\&=0 &(55)\end{aligned}$$

第三题

证明：

$$4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}=\Delta \tag{56}$$

其中Δ为Laplace算子

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{57}$$

证明： 由于

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),\qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{58}$$

那么

$$4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}=4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{59}$$

第四题

证明：如果f在开集Ω是全纯的，那么其实部和虚部是调和的，即Laplace算子为0。

证明： 令$f=u+iv$，由Cauchy-Riemann方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \tag{60}$$

容易知道

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0 \tag{61}$$

$$\Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0 \tag{62}$$

第五题

如果$f=u+iv$在开集Ω是全纯的，证明f满足如下任意一个条件时，f为常数。

第一问

$\mathrm{Re}(f)$为常数。

证明： 由于u为常数，注意到

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{63}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{64}$$

因此v为常数，进而f为常数。

第二问

$\mathrm{Im}(f)$为常数。

证明： 由于v为常数，注意到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{65}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{66}$$

因此u为常数，进而f为常数。

第三问

$|f|$为常数。

证明： 由于u^2+v^2为常数，那么分别对x和y求偏导，并由Cauchy-Riemann方程得到

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0 \tag{67}$$

注意到$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$。

如果$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$，那么$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$，因此$u$为常数，由第一问，$f$为常数。

如果$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \neq 0$，那么上式存在唯一解$u = v = 0$，因此$f$为常数。

因此，f为常数。

第四问

$f' = 0$

证明： 由于

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0 \tag{68}$$

同时由于f全纯，那么

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0 \tag{69}$$

联立两式可得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{70}$$

因此f为常数。

第五问

$\overline{f}$全纯。

证明： 由于f和$\overline{f}$均是全纯的，那么$u = \frac{1}{2}(f+\overline{f})$和$v = \frac{1}{2i}(f+\overline{f})$是全纯的。由Cauchy-Riemann方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{71}$$

因此u, v均为常数，进而f为常数。

2023年03月24日

第一题

证明：对于非零复数列$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$，如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=L \tag{72}$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}=L \tag{73}$$

证明： 我们来证明

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\le\liminf_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}\le\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \tag{74}$$

由于$\limsup_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=L$，那么对于任意$\varepsilon>0$，存在$N>0$，使得对于任意$n>N$时，成立

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<L+\varepsilon \tag{75}$$

于是当$n>N+1$时

$$|a_n|<(L+\varepsilon)^{n-N-1}|a_{N+1}| \tag{76}$$

进而

$$\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}\le\limsup_{n\to\infty}(L+\varepsilon)^{1-\frac{N+1}{n}}|a_{N+1}|^{\frac{1}{n}}=L+\varepsilon \tag{77}$$

由ε的任意性，可得

$$\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \tag{78}$$

同理，由于$\liminf_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=L$，那么对于任意$\varepsilon>0$，存在$N>0$，使得对于任意$n>N$时，成立

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}>L-\varepsilon \tag{79}$$

于是当$n>N+1$时

$$|a_n|>(L-\varepsilon)^{n-N-1}|a_{N+1}| \tag{80}$$

进而

$$\liminf_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}\ge\liminf_{n\to\infty}(L-\varepsilon)^{1-\frac{N+1}{n}}|a_{N+1}|^{\frac{1}{n}}=L-\varepsilon \tag{81}$$

由ε的任意性，可得

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\le\liminf_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}} \tag{82}$$

进而

$$L=\liminf_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\le\liminf_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}\le\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}\le\limsup_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=L \tag{83}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}=L \tag{84}$$

原命题得证！

第二题

第一问

证明：幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^n$在单位圆上任意一点均不收敛。

证明： 注意到

$$\lim_{n\to\infty}|nz^n|=\lim_{n\to\infty}n=\infty \tag{85}$$

因此幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n$在单位圆上任意一点均不收敛。

第二问

证明：幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$在单位圆上任意一点均收敛。

证明：注意到当$|z|=1$时，成立

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} \tag{86}$$

而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛，于是幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$在单位圆上任意一点均收敛。

第三问

证明：幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$在单位圆上除$z=1$外任意一点均收敛。

证明：当$z=1$时，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$显然不收敛。

当$|z|=1$且$z \neq 1$时，令$z = \cos\theta + i\sin\theta$，其中$\theta \in (0, 2\pi)$，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} \tag{87}$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta - \sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} \tag{88}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta) = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}} \tag{89}$$

因此

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta)\right| \leq \left|\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right|, \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)\right| \leq \left|\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right| \tag{90}$$

又$\frac{1}{n}$单调趋于0，那么由Dirichlet判别法，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$均收敛，进而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$收敛。

综上所述，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$在单位圆上除$z=1$外任意一点均收敛。

2023年03月29日

第一题

如果$\gamma \subset \mathbb{C}$是参数曲线为$z(t):[a,b] \to \mathbb{C}$的光滑曲线，令$\gamma^-$为$\gamma$的反向曲线，证明：对于任意连续函数$f$，成立

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = -\int_{\gamma^-} f(z)\mathrm{d}z \tag{91}$$

证明： 由于γ^-的参数方程为$z(a+b-t), t \in [a,b]$，注意到

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t \tag{92}$$

$$\int_{\gamma^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_a^b f(z(a+b-t))z'(a+b-t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t \tag{93}$$

因此

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = -\int_{\gamma^-} f(z)\mathrm{d}z \tag{94}$$

第二题

第一问

对于任意$n \in \mathbb{Z}$，计算积分

$$\int_\gamma z^n \mathrm{d}z \tag{95}$$

其中γ为以原点为中心且方向为正的任何圆。

解： 令γ的参数方程为$z(\theta) = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$，其中$\rho > 0$且$\theta \in [0, 2\pi]$，那么

$$\int_\gamma z^n \mathrm{d}z = i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\mathrm{d}\theta \tag{96}$$

当$n = -1$时，

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z = i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi i \tag{97}$$

当$n \neq -1$时，

$$\int_\gamma z^n \mathrm{d}z = i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\mathrm{d}\theta = 0 \tag{98}$$

因此

$$\int_\gamma z^n \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases} \tag{99}$$

第二问

对于任意$n \in \mathbb{Z}$，计算积分

$$\int_\gamma z^n \mathrm{d}z \tag{100}$$

其中γ为不包含原点且方向为正的任何圆。

解： 令由于γ不包含原点，所以z^n在γ围成的区域内全纯，所以

$$\int_\gamma z^n \mathrm{d}z = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{101}$$

第三问

证明：如果$|a| < r < |b|$，那么

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-a)(z-b)}\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{a-b} \tag{102}$$

其中γ为以原点为中心，半径为r且方向为正的圆。

证明： 注意到

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z-a)(z-b)} \mathrm{d}z = \frac{1}{a-b} \left(\int_{\gamma} \frac{1}{z-a} \mathrm{d}z - \int_{\gamma} \frac{1}{z-b} \mathrm{d}z \right) \tag{103}$$

注意到

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{a}{z})^n \tag{104}$$

$$\frac{1}{z-b} = -\frac{1}{b} \frac{1}{1-\frac{z}{b}} = -\frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z}{b})^n \tag{105}$$

由于$|z| = r$处该幂级数一致收敛，因此

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-a} \mathrm{d}z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}} = 2\pi i \tag{106}$$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z-b} \mathrm{d}z = -\frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} (\frac{z}{b})^n \mathrm{d}z = 0 \tag{107}$$

于是

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z-a)(z-b)} \mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{a-b} \tag{108}$$

第三题

如果f区域Ω上连续，且存在原函数，证明：f的任意两个原函数相差一个常数。

证明： 记F和G为f的两个原函数，注意到

$$(F-G)' = F' - G' = f - f = 0 \tag{109}$$

因此$F-G$为常函数，进而F和G相差一个常数，由F和G的任意性，可知f的任意两个原函数相差一个常数。

2023年04月07日

对于开集$\Omega\subset\mathbb{C}$，三角形边界$T\subset\Omega$且其内部也含于Ω，如果w在T的内部，且f在$\Omega-\{w\}$上全纯，证明：当f在w某邻域内有界时，成立

$$\int_T f(z)\mathrm{d}z=0 \tag{110}$$

证明： 我们作以w为圆心，以充分小的ε为半径的圆C_ε，使得C_ε包含于T的内部，且$f(z)$在C_ε内有界，不妨记作$|f(z)|<M$，于是

$$\int_T f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z \tag{111}$$

因此

$$\left|\int_T f(z)\mathrm{d}z\right|=\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_{C_\varepsilon}|f(z)|\mathrm{d}z\le 2\pi M\varepsilon \tag{112}$$

进而

$$\int_T f(z)\mathrm{d}z=0 \tag{113}$$

2023年04月12日

第一题

证明:

$$\int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2\pi}}{4} \tag{114}$$

证明: 记曲线为

$$\gamma_1: z=t,\qquad t:0\to R \tag{115}$$
$$\gamma_2: z=R\mathrm{e}^{it},\qquad t:0\to\frac{\pi}{4} \tag{116}$$
$$\gamma_3: z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}t,\qquad t:R\to 0 \tag{117}$$

考虑函数e^{-z^2}在$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$上的积分，由Cauchy积分定理

$$\int_{\gamma_1}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z+\int_{\gamma_3}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z=0 \tag{118}$$

考察各项积分，对于第一项

$$\int_{\gamma_1}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z=\int_0^R\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \tag{119}$$

因此

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{120}$$

对于第二项，注意到当$t\in[0,\pi]$时，成立$\cos 2t\geq 1-\frac{4}{\pi}t$，于是

$$\left|\int_{\gamma_2}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z\right| \tag{121}$$
$$\leq\int_{\gamma_2}\left|\mathrm{e}^{-z^2}\right||\mathrm{d}z| \tag{122}$$
$$=R\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-R^2\cos 2t}\mathrm{d}t \tag{123}$$
$$\leq R\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-R^2(1-\frac{4}{\pi}t)}\mathrm{d}t \tag{124}$$
$$=\frac{\pi}{4R}(1-\mathrm{e}^{-R^2}) \tag{125}$$

进而

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z=0 \tag{126}$$

对于第三项

$$\int_{\gamma_3}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^R\mathrm{e}^{-it^2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^R(\cos t^2+\sin t^2)\mathrm{d}t+i\int_0^R(\cos t^2-\sin t^2)\mathrm{d}t\right) \tag{127}$$

于是当$R\to\infty$时，成立

$$\int_0^{\infty}(\cos t^2+\sin t^2)\mathrm{d}t+i\int_0^{\infty}(\cos t^2-\sin t^2)\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \tag{128}$$

因此

$$\begin{gathered}\int_0^{\infty}(\cos t^2+\sin t^2)\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\\ \int_0^{\infty}(\cos t^2-\sin t^2)\mathrm{d}t=0\end{gathered} \tag{129}$$

所以

$$\int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2\pi}}{4} \tag{130}$$

第二题

证明:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \tag{131}$$

证明： 记曲线

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 : z = t, && t : \varepsilon \to R && (132)\\
&\gamma_2 : z = t, && t : -R \to -\varepsilon && (133)\\
&C_r : z = R\mathrm{e}^{it}, && t : 0 \to \pi && (134)\\
&C_\varepsilon : z = \varepsilon \mathrm{e}^{it}, && t : \pi \to 0 && (135)
\end{aligned}$$

考虑函数$\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}$在$\gamma_1 + \gamma_2 + C_R + C_\varepsilon$上的积分，由Cauchy积分定理

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z + \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z + \int_{C_\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z = 0 \tag{136}$$

考察各项积分，对于第一项，

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_{\gamma_1+\gamma_2} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z = 2i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \tag{137}$$

对于第二项，注意到当$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$时，成立$\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$，因此

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z\right| && (138)\\
\leq& \int_{C_R} \left|\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\right| |\mathrm{d}z| && (139)\\
=& 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-R\sin t}\mathrm{d}t && (140)\\
\leq& 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{2R}{\pi}t}\mathrm{d}t && (141)\\
=& \frac{\pi}{R}(1-\mathrm{e}^{-R}) && (142)
\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z = 0 \tag{143}$$

对于第三项，注意到

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z = -i\int_0^\pi \mathrm{e}^{i\varepsilon \mathrm{e}^{it}}\mathrm{d}t \tag{144}$$

于是

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} \frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z = -i\int_0^\pi \mathrm{d}t = -i\pi \tag{145}$$

因此当$R \to \infty$且$\varepsilon \to 0$时，成立

$$2i\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = i\pi \tag{146}$$

进而

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \tag{147}$$

第三题

计算积分

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x \tag{148}$$

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x \tag{149}$$

其中$a > 0$。

解：

法一：当$b \neq 0$时，记曲线

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 : z = t, && t : 0 \to R && (150)\\
&\gamma_2 : z = R\mathrm{e}^{it}, && t : 0 \to \theta && (151)\\
&\gamma_3 : z = t\mathrm{e}^{i\theta}, && t : R \to 0 && (152)
\end{aligned}$$

其中θ满足$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\sin\theta=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}},\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$。

考虑函数e^{-rz}在曲线$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$上的积分，其中$r=\sqrt{a^2+b^2}$，由Cauchy积分定理

$$\int_{\gamma_1}\mathrm{e}^{-rz}\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2}\mathrm{e}^{-rz}\mathrm{d}z+\int_{\gamma_3}\mathrm{e}^{-rz}\mathrm{d}z=0 \tag{153}$$

考察各项积分，对于第一项

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1}\mathrm{e}^{-rz}\mathrm{d}z=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t=\frac{1}{r} \tag{154}$$

对于第二项

$$\left|\int_{\gamma_2}\mathrm{e}^{-rz}\mathrm{d}z\right| \tag{155}$$
$$\le\int_{\gamma_2}\left|\mathrm{e}^{-rz}\right||\mathrm{d}z| \tag{156}$$
$$=R\int_0^\theta\mathrm{e}^{-rR\cos t}\mathrm{d}t \tag{157}$$
$$\le\frac{R}{\mathrm{e}^{rR\cos\theta}}\int_0^\theta\mathrm{d}t \tag{158}$$
$$=\frac{\theta R}{\mathrm{e}^{rR\cos\theta}} \tag{159}$$

于是

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2}\mathrm{e}^{-rz}\mathrm{d}z=0 \tag{160}$$

对于第三项

$$\int_{\gamma_3}\mathrm{e}^{-rz}\mathrm{d}z=-\mathrm{e}^{i\theta}\int_0^R\mathrm{e}^{-r\mathrm{e}^{i\theta}t}\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{i\theta}\left(\int_0^R\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x+i\int_0^R\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x\right) \tag{161}$$

于是当$R\to\infty$时，成立

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x+i\int_0^\infty\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{1}{r\mathrm{e}^{i\theta}}=\frac{a+ib}{a^2+b^2} \tag{162}$$

因此

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{a}{a^2+b^2} \tag{163}$$
$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{b}{a^2+b^2} \tag{164}$$

当$b=0$时，显然有

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a} \tag{165}$$
$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x=0 \tag{166}$$

综上所述

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{a}{a^2+b^2} \tag{167}$$
$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{b}{a^2+b^2} \tag{168}$$

法二：注意到

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{(-a+ib)x}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{(-a+ib)x}}{-a+ib}\Big|_0^\infty=\frac{1}{a-ib}=\frac{a+ib}{a^2+b^2} \tag{169}$$

因此

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{a}{a^2+b^2} \tag{170}$$
$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{b}{a^2+b^2} \tag{171}$$

2023年04月21日

第一题

如果f是在区域$z\in\mathbb{R}\times(-1,1)$上全纯函数，且对于$A>0,\eta>0$，任意$z\in\mathbb{R}\times(-1,1)$，成立

$$|f(z)|\le A(1+|z|)^{\eta} \tag{172}$$

证明：对于任意$n\in\mathbb{N}$，存在$A_n\ge 0$，使得对于任意$x\in\mathbb{R}$，成立

$$|f^{(n)}(x)|\le A_n(1+|x|)^{\eta} \tag{173}$$

证明： 任取$x\in\mathbb{R}$，作边界方向为正的圆$D=D_{\frac{1}{2}}(x)$，注意到当$z\in\partial D$时，成立

$$1+|z|\le\frac{3}{2}+|x|\le 2(1+|x|) \tag{174}$$

从而由Cauchy积分公式

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(x)| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-x)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right| && (175)\\
&\le \frac{n!}{2\pi}\int_{\partial D}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-x|^{n+1}}|\mathrm{d}\zeta| && (176)\\
&\le \frac{n!}{2\pi}\int_{\partial D}\frac{A(1+|\xi|)^{\eta}}{|\zeta-x|^{n+1}}|\mathrm{d}\zeta| && (177)\\
&\le \frac{n!}{2\pi}\int_{\partial D}\frac{A2^{\eta}(1+|x|)^{\eta}}{|\zeta-x|^{n+1}}|\mathrm{d}\zeta| && (178)\\
&= 2^{\eta+n}n!A(1+|x|)^{\eta} && (179)
\end{aligned}$$

取$A_n=2^{\eta+n}n!A$即可。

第二题

证明：对于$\mathbb{C}$上的整函数f，如果

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{f(z)}{z^m}\right|=0 \tag{180}$$

那么f至多为$m-1$次多项式。

证明：

法一：由于

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{f(z)}{z^m}\right|=0 \tag{181}$$

所以存在$R>0$，使得当$|z|\ge R$时，成立

$$|f(z)|<|z|^m \tag{182}$$

将f展开为多项式级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \tag{183}$$

取$z=R\mathrm{e}^{i\theta}$，那么

$$f(R\mathrm{e}^{i\theta})=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\mathrm{e}^{in\theta} \tag{184}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(R\mathrm{e}^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta && (185)\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\mathrm{e}^{in\theta}\right|^2\mathrm{d}\theta && (186)\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\mathrm{e}^{in\theta}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n}R^n\mathrm{e}^{-in\theta}\right)\mathrm{d}\theta && (187)\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{m,n=0}^{\infty}a_m\overline{a_n}R^{m+n}\mathrm{e}^{i(m-n)\theta}\right)\mathrm{d}\theta && (188)\\
=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_nR^n|^2\right)\mathrm{d}\theta && (189)\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2R^{2n} && (190)
\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2R^{2n}<R^{2m} \tag{191}$$

进而对于任意$n>m$，$a_n=0$，因此f至多为m次多项式，而显然f不为m次多项式，于是f至多为$m-1$次多项式。

法二：任取$z\in\mathbb{C}$，由Cauchy积分公式

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{n!}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi}\frac{f(z+R\mathrm{e}^{i\theta})}{\mathrm{e}^{in\theta}}\mathrm{d}\theta \tag{192}$$

而由于

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{f(z)}{z^m}\right|=0 \tag{193}$$

所以存在$A>0$，使得当$|z|>A$时，成立

$$|f(z)|<|z|^m \tag{194}$$

因此当$R>A-|z|$时，成立

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi}|f(z+R\mathrm{e}^{i\theta})|\mathrm{d}\theta\le\frac{n!}{R^n}|z+R\mathrm{e}^{i\theta}|^m\le\frac{n!}{R^n}(|z|^m+R^m) \tag{195}$$

于是当$n>m$且$R\to\infty$时，成立

$$f^{(n)}(z)=0 \tag{196}$$

这说明f在$\mathbb{C}$上的任意一点的Taylor展式均不超过m次，因此f至多为m次多项式，而显然f不为m次多项式，于是f至多为$m-1$次多项式。

2023年04月26日

Weierstrass定理表明$[0,1]$上的连续函数可由多项式函数一致逼近。那么是否任意单位闭圆盘上的连续函数可由多项式函数一致逼近？

解： 不一定。

因为如果单位闭圆盘$\mathbb{D}$上的连续函数f可由多项式函数P_n一致逼近，那么f在$\mathbb{D}$上全纯，这是不一定的。

2023年04月28日

第一题

对于在$\mathbb{C}$上解析的函数f，如果对于任意$z_0 \in \mathbb{C}$，其展开式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{197}$$

中的系数存在0。证明：f为多项式。

证明： 由于

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \tag{198}$$

那么对于任意$z \in \mathbb{C}$，存在$n_z \in \mathbb{N}$，使得$c_{n_z} = 0$，于是

$$f^{(n_z)}(z) = 0 \tag{199}$$

对于单位开圆盘$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$，定义

$$A_n = \{z \in \overline{\mathbb{D}} : f^{(n)}(z) = 0\} \tag{200}$$

于是

$$\overline{\mathbb{D}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \tag{201}$$

由于$\overline{\mathbb{D}}$为不可数集，那么存在$k \in \mathbb{N}$，使得A_k为不可数集，因此A_k中存在收敛的点列$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$且$z_n \to z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$，进而

$$f^{(k)}(z_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N} \tag{202}$$

由唯一型定理，在$\mathbb{C}$上成立$f^{(k)} = 0$，因此f为次数不大于k的多项式函数。

第二题

记$\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$，对于在$\overline{\mathbb{D}}$上连续无零点，且在$\mathbb{D}$上全纯的函数$f$，如果对于任意$z \in \partial\mathbb{D}$，成立$|f(z)| = 1$，证明：$f$为常函数。

证明：

法一：延拓f为

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & |z| \le 1 \\ \frac{1}{\overline{f(\frac{1}{\overline{z}})}}, & |z| > 1 \end{cases} \tag{203}$$

考察F的连续性。显然F在$|z| \neq 1$上是连续的，且F在$|z| = 1$上是内连续的。对于F在$|z| = 1$上的外连续性，任取$|z| = 1$，对于$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$满足$|z_n| > 1$且$z_n \to z$，注意到

$$\frac{1}{\overline{z_n}} \to \frac{1}{\overline{z}} = z \tag{204}$$

于是

$$F(z_n) = \frac{1}{\overline{f(\frac{1}{\overline{z_n}})}} \to \frac{1}{\overline{f(z)}} = f(z) = F(z) \tag{205}$$

因此F在$\mathbb{C}$上是连续的。

考察F的全纯性。显然F在$|z| < 1$是全纯的。对于$|z| > 1$，任取闭曲线$\gamma \subset \{z : |z| > 1\}$，令$\gamma'$为$\gamma$在映射$z \mapsto \frac{1}{z}$下的像，那么$\gamma' \subset \{z : |z| < 1\}$，于是

$$\int_{\gamma} F(z) \mathrm{d}z = \int_{\gamma} \frac{1}{\overline{f(\frac{1}{\overline{z}})}} \mathrm{d}z = -\int_{\gamma'} \frac{1}{\overline{f(\overline{z})}} \frac{\mathrm{d}z}{z^2} = 0 \tag{206}$$

因此F在$|z| > 1$上是全纯的。对于$|z| = 1$，任取三角形$T \subset \mathbb{C}$。如果$T \cap \partial\mathbb{D}$为空，那么

$$\int_T F(z) \mathrm{d}z = 0 \tag{207}$$

如果$T \cap \partial\mathbb{D}$为一个点，那么可在$T$内沿内边界作非常接近$T$的三角形$T_\varepsilon$，于是

$$\int_T F(z) \mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{T_\varepsilon} F(z) \mathrm{d}z = 0 \tag{208}$$

如果$T \cap \partial\mathbb{D}$至少为两个点，说明$T$被$\partial\mathbb{D}$分为若干部分$T_1, \cdots, T_n$，在每一个$T_k$内沿内边界作非常接近$T_k$的三角形$T_\varepsilon^{(k)}$，于是

$$\int_T F(z)\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=1}^{n}\int_{T_\varepsilon^{(k)}} F(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{209}$$

于是，对于任意三角形$T\subset\mathbb{C}$，成立

$$\int_T F(z)\mathrm{d}z = 0 \tag{210}$$

由Morera定理，F在$\mathbb{C}$上全纯。又F在$\overline{\mathbb{D}}$上有界，且连续无零点，那么存在$\delta>0$，使得对于任意$|z|\leq 1$，成立$|f(z)|>\delta$，进而$\left|\frac{1}{f(\frac{1}{\bar{z}})}\right|<\frac{1}{\delta}$，所以$F$在$\mathbb{C}$上有界。由Liouville定理，$F$为常函数，进而$f$为常函数。原命题得证！

法二：定义映射

$$\varphi:\mathbb{D}\to\pi^+=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}z>0\} \tag{211}$$

$$z\mapsto i\frac{1+z}{1-z} \tag{212}$$

其逆映射为$\varphi^{-1}(w)=\frac{w-i}{w+i}$，定义

$$F(z)=\begin{cases} f(\varphi^{-1}(z)), & z\in\pi^+\cup\mathbb{R}\\ f(\varphi^{-1}(\overline{z})), & z\in\pi^-\end{cases} \tag{213}$$

由反射定理，F在$\mathbb{C}$上全纯。又又F在$\pi^+\cup\mathbb{R}$上有界，所以F在$\mathbb{C}$上有界。由Liouville定理，F为常函数，进而f为常函数。原命题得证！

2023年05月10日

第一题

对于整函数f，证明如下函数为整函数。

$$g(z)=\begin{cases}\frac{f(z)-f(0)}{z}, & z\neq 0\\ f'(0), & z=0\end{cases} \tag{214}$$

证明： 即证明g在$z=0$处全纯。

由于f为整函数，将f展开为Taylor级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n \tag{215}$$

于是当$z\neq 0$时

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n-1} \tag{216}$$

进而

$$\lim_{z\to 0}\frac{g(z)-g(0)}{z}=\lim_{z\to 0}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}\lim_{z\to 0}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^{n-2}=\frac{f''(0)}{2} \tag{217}$$

因此g在$z=0$处全纯。

2023年05月12日

第一题

计算极点的阶数和留数。

第一问

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z-1)^2} \tag{218}$$

解：容易知道$z=-1$为一阶极点，$z=1$为二阶极点。由留数计算公式

$$\operatorname{res}_{-1}f=\lim_{z\to-1}(z+1)f(z)=\lim_{z\to-1}\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{1}{4} \tag{219}$$

$$\operatorname{res}_{1}f=\lim_{z\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-1)^2f(z)=\lim_{z\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{z+1}=-\frac{1}{4} \tag{220}$$

第二问

$$f(z)=\frac{1-\mathrm{e}^{2z}}{z^4} \tag{221}$$

解：容易知道$z=0$为三阶极点。由留数计算公式

$$\operatorname{res}_{0}f=\lim_{z\to0}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}z^3f(z)=\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\frac{1-\mathrm{e}^{2z}}{2z}=-\frac{4}{3} \tag{222}$$

第二题

计算积分

第一问

$$\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z\sin z} \tag{223}$$

解：令$f(z)=\frac{1}{z\sin z}$，那么f在$|z|<1$内存在二阶极点$z=0$，其留数为

$$\operatorname{res}_{0}f=\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}z^2f(z)=\lim_{z\to0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{z}{\sin z}=0 \tag{224}$$

那么

$$\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z\sin z}=2\pi i\cdot\operatorname{res}_0f=0 \tag{225}$$

第二问

$$\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)} \tag{226}$$

其中$C:x^2+y^2=2(x+y)$。

解：记$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$，那么$f$在$x^2+y^2<2(x+y)$内存在二阶极点$z=1$和一阶极点$z=i$，其留数分别为

$$\operatorname{res}_{1}f=\lim_{z\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-1)^2f(z)=\lim_{z\to1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{z^2+1}=-\frac{1}{2} \tag{227}$$

$$\operatorname{res}_{i}f=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}=\frac{1}{4} \tag{228}$$

那么

$$\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}=2\pi i(\operatorname{res}_1f+\operatorname{res}_if)=-\frac{\pi}{2}i \tag{229}$$

第三问

$$\int_{|z|=1}\frac{z\sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}\mathrm{d}z \tag{230}$$

解：记$f(z)=\frac{z\sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}$，容易知道$z=0$为一阶极点，其留数为

$$\operatorname{res}_0f=\lim_{z\to0}zf(z)=\lim_{z\to0}\frac{z^2\sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}=-1 \tag{231}$$

那么

$$\int_{|z|=1} \frac{z\sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}\mathrm{d}z = -2\pi i \tag{232}$$

第三题

使用Euler公式

$$\sin \pi z = \frac{\mathrm{e}^{i\pi z} - \mathrm{e}^{-i\pi z}}{2i} \tag{233}$$

证明$\sin \pi z$的复零点恰好为整数，且均为一阶零点，并计算$\frac{1}{\sin \pi z}$在$z = n \in \mathbb{Z}$处的留数。

证明： 令$\sin \pi z = 0$，得到

$$\frac{\mathrm{e}^{i\pi z} - \mathrm{e}^{-i\pi z}}{2i} = 0 \tag{234}$$

即

$$\mathrm{e}^{i2\pi z} = 1 = \mathrm{e}^{i2n\pi}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{235}$$

因此$z = n \in \mathbb{Z}$为$\sin \pi z$的复零点，且

$$(\sin \pi z)'\Big|_{z=n} = \pi \cos \pi n = \pm\pi \neq 0 \tag{236}$$

因此$z = n \in \mathbb{Z}$为$\sin \pi z$的一阶复零点。

令$f(z) = \frac{1}{\sin \pi z}$，那么$z = n \in \mathbb{Z}$均为$f$的一阶极点，于是由留数计算公式

$$\mathrm{res}_n f = \lim_{z\to n}(z-n)f(z) = \lim_{z\to n}\frac{z-n}{\sin \pi z} = \frac{(-1)^n}{\pi} \tag{237}$$

2023年05月17日

$\frac{1}{1+z^4}$的极点在哪？计算积分：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{\pi}{\sqrt{2}} \tag{238}$$

解： 容易知道$z_n=\mathrm{e}^{i\frac{2n-1}{4}\pi}$为$f(z)=\frac{1}{1+z^4}$的一阶极点，其留数为

$$\mathrm{res}_{z_n}f=\lim_{z\to z_n}(z-z_n)f(z)=\frac{1}{4z_n^3}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{i\frac{3(1-2n)}{4}\pi} \tag{239}$$

而z_n为以4为周期，且$z_0=\frac{1-i}{\sqrt{2}},z_1=\frac{1+i}{\sqrt{2}},z_2=\frac{-1+i}{\sqrt{2}},z_3=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$，因此其留数分别为

$$\mathrm{res}_{z_0}f=\frac{-1+i}{4\sqrt{2}},\quad \mathrm{res}_{z_1}f=\frac{-1-i}{4\sqrt{2}},\quad \mathrm{res}_{z_2}f=\frac{1-i}{4\sqrt{2}},\quad \mathrm{res}_{z_3}f=\frac{1+i}{4\sqrt{2}} \tag{240}$$

选取积分路径

$$\begin{aligned}\gamma_0:z=t,\quad t:-R\to R\\ \gamma:z=R\mathrm{e}^{it},\quad t:0\to\pi\end{aligned} \tag{241}$$

当$R>1$时，γ_0和γ围成的区域内含有z_1和z_2，且由留数公式

$$\int_{\gamma_0}f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z=2\pi i(\mathrm{res}_{z_1}f+\mathrm{res}_{z_2}f)=\frac{\pi}{\sqrt{2}} \tag{242}$$

注意到

$$\left|\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_{\gamma}|f(z)||\mathrm{d}z|=\int_{\gamma}\frac{|\mathrm{d}z|}{|1+z^4|}\le\int_{\gamma}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z^4|-1}=\frac{\pi R}{R^4-1}\to 0 \tag{243}$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_0}f(z)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{\sqrt{2}} \tag{244}$$

2023年05月19日

第一题

证明:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{a\mathrm{e}^a},\quad a>0 \tag{245}$$

证明: 记$f(z)=\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z^2+a^2}$，积分路径为

$$\begin{aligned}\gamma_0:z=t,\quad t:-R\to R\\ \gamma:z=R\mathrm{e}^{it},\quad t:0\to\pi\end{aligned} \tag{246}$$

当$R>a$时，由γ_0和γ围成的区域内含有f的一阶极点$z=ai$，其留数为

$$\mathrm{res}_{ai}f=\lim_{z\to ai}(z-ai)f(z)=\lim_{z\to ai}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z+ai}=\frac{1}{2ai\mathrm{e}^a} \tag{247}$$

从而

$$\int_{\gamma_0}f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\mathrm{res}_{ai}f=\frac{\pi}{a\mathrm{e}^a} \tag{248}$$

注意到，当$0\le x\le\frac{\pi}{2}$时，成立$\sin x\ge\frac{2}{\pi}x$，那么

$$\left|\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_{\gamma}|f(z)||\mathrm{d}z|\le\int_0^{\pi}\frac{R\mathrm{e}^{-R\sin t}}{R^2-a^2}\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R\mathrm{e}^{-R\sin t}}{R^2-a^2}\mathrm{d}t\le2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R\mathrm{e}^{-R\frac{2}{\pi}t}}{R^2-a^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{R^2-a^2}(1-\mathrm{e}^{-R}) \tag{249}$$

因此

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z=0 \tag{250}$$

进而

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_0}f(z)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{a\mathrm{e}^a} \tag{251}$$

第二题

证明:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\mathrm{e}^a},\quad a>0 \tag{252}$$

证明: 记$f(z)=\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{z^2+a^2}$，积分路径为

$$\begin{aligned}\gamma_0:z=t,\quad t:-R\to R\\ \gamma:z=R\mathrm{e}^{it},\quad t:0\to\pi\end{aligned} \tag{253}$$

当$R>a$时，由γ_0和γ围成的区域内含有f的一阶极点$z=ai$，其留数为

$$\mathrm{res}_{ai}f=\lim_{z\to ai}(z-ai)f(z)=\lim_{z\to ai}\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{z+ai}=\frac{1}{2\mathrm{e}^a} \tag{254}$$

从而

$$\int_{\gamma_0}f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\mathrm{res}_{ai}f=\frac{\pi}{\mathrm{e}^a}i \tag{255}$$

注意到，当$0\le x\le\frac{\pi}{2}$时，成立$\sin x\ge\frac{2}{\pi}x$，那么

$$\left|\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_{\gamma}|f(z)||\mathrm{d}z|\le\int_0^{\pi}\frac{R^2\mathrm{e}^{-R\sin t}}{R^2-a^2}\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^2\mathrm{e}^{-R\sin t}}{R^2-a^2}\mathrm{d}t\le2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{R^2\mathrm{e}^{-R\frac{2}{\pi}t}}{R^2-a^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi R}{R^2-a^2}(1-\mathrm{e}^{-R}) \tag{256}$$

因此

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z=0 \tag{257}$$

进而

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_0}f(z)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{\mathrm{e}^a} \tag{258}$$

第三题

证明：

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}, \quad a>1 \tag{259}$$

证明： 记$f(z)=\frac{4z}{(z^2+2az+1)^2}$，积分路径为$\gamma: z=\mathrm{e}^{i\theta}, \theta\in[0,2\pi]$，在此积分路径内$f$含有二阶极点$z=\sqrt{a^2-1}-a$，其留数为

$$\mathrm{res}_{\sqrt{a^2-1}-a} f = \lim_{z\to\sqrt{a^2-1}-a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-(\sqrt{a^2-1}-a))^2 f(z) = \frac{a}{(a^2-1)^{\frac{3}{2}}} \tag{260}$$

因此

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{res}_{\sqrt{a^2-1}-a} f = \frac{2\pi a i}{(a^2-1)^{\frac{3}{2}}} \tag{261}$$

而

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{i\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2} \tag{262}$$

从而

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-1)^{\frac{3}{2}}} \tag{263}$$

第四题

证明：

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}, \quad a>|b|, a, b\in\mathbb{R} \tag{264}$$

证明： 记$f(z)=\frac{2}{bz^2+2az+b}$，积分路径为$\gamma: z=\mathrm{e}^{i\theta}, \theta\in[0,2\pi]$。

若$b=0$，显然成立

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a} = \frac{2\pi}{a} \tag{265}$$

若$b\neq 0$，在此积分路径内f含有一阶极点$z_0=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$，其留数为

$$\mathrm{res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \tag{266}$$

因此

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i \mathrm{res}_{z_0} f = \frac{2\pi i}{\sqrt{a^2-b^2}} \tag{267}$$

而

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \frac{i\mathrm{d}\theta}{a+b\cos\theta} \tag{268}$$

从而

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \tag{269}$$

第五题

对于在去心开圆$D_r(z_0)-\{z_0\}$内全纯的函数f，证明：如果存在$A>0$和$\varepsilon>0$，使得在z_0附近，成立$|f(z)|\leq A|z-z_0|^{\varepsilon-1}$，那么$z_0$是$f$的可去奇点。

证明： 注意到

$$\lim_{z\to z_0} |(z-z_0)f(z)| \leq \lim_{z\to z_0} A|z-z_0|^{\varepsilon} = 0 \tag{270}$$

于是

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = 0 \tag{271}$$

于是z_0为$g(z)=(z-z_0)f(z)$在$D_r(z_0)$内的可去奇点，从而g在$D_r(z_0)$内全纯，将g在z_0处展开

$$g(z) = g(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \tag{272}$$

注意到

$$g(z_0)=\lim_{z\to z_0}g(z)=0 \tag{273}$$

于是

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \tag{274}$$

进而

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-1} \tag{275}$$

那么

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=g'(z_0) \tag{276}$$

从而z_0为f的可去奇点。

2023年05月24日

第一题

判断奇点及类型

第一问

$$\frac{\tan z}{z} \tag{277}$$

解： 由于

$$\frac{\tan z}{z}=\frac{\mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-iz}}{iz}\frac{1}{\mathrm{e}^{iz}+\mathrm{e}^{-iz}} \tag{278}$$

那么奇点有$z=0$和$z_n=(n-\frac{1}{2})\pi$以及$z=\infty$，其中$n\in\mathbb{Z}$。

对于$z=0$，由于

$$\lim_{z\to 0}\frac{\tan z}{z}=1 \tag{279}$$

那么$z=0$为可去奇点。

对于$z=z_n$，由于

$$\lim_{z\to z_n}\left|\frac{\tan z}{z}\right|=\infty \tag{280}$$

$$\lim_{z\to z_n}(z-z_n)\frac{\tan z}{z}=-\frac{1}{z_n} \tag{281}$$

那么$z=z_n$为一阶极点。

对于$z=\infty$，由于$|z_n|\to\infty$，那么∞为非孤立奇点。

第二问

$$\frac{z}{\mathrm{e}^z-1} \tag{282}$$

解：：容易知道$z_n=2n\pi i$和$z=\infty$为奇点，其中$n\in\mathbb{Z}$。

对于$z=z_0=0$，由于

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\mathrm{e}^z-1}=1 \tag{283}$$

那么$z=0$为可去奇点。

对于$z_n=2n\pi i$，其中$n\neq 0$，由于

$$\lim_{z\to z_n}\left|\frac{z}{\mathrm{e}^z-1}\right|=\infty \tag{284}$$

$$\lim_{z\to z_n}(z-z_n)\frac{z}{\mathrm{e}^z-1}=2n\pi i \tag{285}$$

那么$z_n=2n\pi i$为一阶极点，其中$n\neq 0$。

对于$z=\infty$，由于$|z_n|\to\infty$，那么∞为非孤立奇点。

第二题

证明：单调整函数为一次多项式。

证明： 记单调整函数为$f(z)$，定义$g(z)=f(\frac{1}{z})$，那么g在$\mathbb{C}-\{0\}$上全纯。下面考察$z=0$的奇点类型。

如果$z=0$为g的可去奇点，那么g在$z=0$的邻域$\{|z|<r\}$内有界，从而f在$\{|z|>\frac{1}{r}\}$内有界。而f连续，则f在紧集$\{|z|\leq\frac{1}{r}\}$内有界，从而f在$\mathbb{C}$上有界，由Liouville定理，f为常函数，这与单调性矛盾！

如果$z=0$为g的本质奇点，由Casorati-Weierstrass定理，$g(\{0<|z|<r\})$为稠密的，从而$f(\{|z|>\frac{1}{r}\})$是稠密的。而由f为整函数，那么$f(\{|z|<\frac{1}{r}\})$为开集，从而$f(\{|z|<\frac{1}{r}\})\cap f(\{|z|>\frac{1}{r}\})\neq\varnothing$，这与单调性矛盾！

那么$z=0$为g的极点，由Laurent展式的唯一性，g的主要部分为有限项，于是f的正则项为有限项。又由f的单调性，f至多存在一个零点，于是f的次数不多于1，而常函数并不单调，于是f为一次多项式。

综上所述，原命题得证！

第三题

证明：对于整函数f，如果对于任意$R>0$，存在$k\in\mathbb{N}$，和$A,B>0$，成立

$$\sup_{|z|=R}|f(z)|\le AR^k+B \tag{286}$$

那么f是次数不多于k的多项式。

证明： 由Cauchy不等式

$$|f^{(n)}(0)|\le\frac{n!}{R^n}\sup_{|z|=R}|f(z)|\le\frac{n!}{R^n}(AR^k+B) \tag{287}$$

当$n>k$时，令$R\to\infty$，可知$f^{(n)}(0)=0$，那么由f在$z=0$处的Taylor展开式，f在$z=0$的邻域内为次数不多于k的多项式，由唯一性定理，f在$\mathbb{C}$上为次数不多于k的多项式。

2023年05月26日

第一题

方程$z^6+6z+10=0$在$|z|<1$内有几个根?

解: 注意到，当$|z|<1$时，成立

$$|z^6+6z+10|\geq 10-|z|^6-6|z|>10-1-6=3>0 \tag{288}$$

因此方程$z^6+6z+10=0$在$|z|<1$内无根。

第二题

方程$z^6+60z+10=0$在$|z|<1$内有几个根?

解: 注意到，当$|z|=1$时，成立

$$|z^6+60z|\geq 60|z|-|z|^6=59>10 \tag{289}$$

因此由Rouché定理，方程$z^6+60z+10=0$和$z^6+60z=0$在$|z|<1$内存在相同数目的根。而$z^6+60z=0$的根为$z=0$和$z=\sqrt[5]{60}\mathrm{e}^{i\frac{2n-1}{5}\pi}$，那么方程$z^6+60z+10=0$在$|z|<1$内有且仅有一个根。

第三题

方程$z^4-8z+10=0$在$|z|<1$和$1<|z|<3$内有几个根?

解: 注意到，当$|z|\leq 1$时，成立

$$|z^4-8z+10|\geq 10-|z|^4-8|z|\geq 10-1-8>0 \tag{290}$$

因此方程$z^4-8z+10=0$在$|z|\leq 1$内无根。

注意到，当$|z|=3$时，成立

$$|z^4-8z|\geq |z|^4-8|z|=57>10 \tag{291}$$

因此由Rouché定理，方程$z^4-8z+10=0$和$z^4-8z=0$在$|z|<3$内存在相同数目的根。而$z^4-8z=0$的根为$z_1=0$，$z_2=2$，$z_3=2\omega$，$z_4=2\omega^2$，其中ω为三次单位根，因此$z^4-8z=0$在$|z|<3$内存在4个根，于是方程$z^4-8z+10=0$在$|z|<3$内存在4个根，进而方程$z^4-8z+10=0$在$1<|z|<3$内存在4个根。

2023年05月31日

第一题

对于开圆盘$D_r=\{z\in\mathbb{C}:|z|<r\}$，如果$f$在$\overline{D}_r$上全纯，且存在$A>0$，使得当$|z|=r$时，$|f(z)|>A$，同时$|f(0)|<A$，证明：$f$在$D_r$内存在零点。

证明：假设f在D_r内无零点，那么定义$g=\frac{1}{f}$，于是当$|z|=r$时，$|g(z)|=\frac{1}{|f(z)|}<\frac{1}{A}$，而$|g(0)|=\frac{1}{|f(0)|}>\frac{1}{A}$，这与最大模原理矛盾！因此$f$在$D_r$内无零点。

第二题

证明：对于单位开圆盘$\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$，如果$\{w_k\}_{k=1}^n\subset\partial\mathbb{D}$，那么存在$z\in\partial\mathbb{D}$，使得成立

$$\prod_{k=1}^n|z-w_k|\geq 1 \tag{292}$$

进而证明存在$w\in\partial\mathbb{D}$，使得成立

$$\prod_{k=1}^n|w-w_k|=1 \tag{293}$$

证明：定义函数

$$f(z)=\prod_{k=1}^n(z-w_k),\quad z\in\mathbb{C} \tag{294}$$

注意到

$$|f(0)|=\prod_{k=1}^n|w_k|=1 \tag{295}$$

那么由最大模原理

$$\sup_{z\in\partial\mathbb{D}}|f(z)|\geq|f(0)|=1 \tag{296}$$

又$\partial\mathbb{D}$为紧集，所以存在$z\in\partial\mathbb{D}$，使得$|f(z)|\geq 1$。

又由于f的连续性，且$f(w_1)=0$，那么存在w使得成立$|f(w)|=1$。

第三题

证明Schwartz-Pick引理：对于单位开圆盘$\mathbb{D}$，如果f在$\mathbb{D}$上全纯，且$f(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$，那么对于任意$z,w\in\mathbb{D}$，成立

$$\left|\frac{f(w)-f(z)}{1-\overline{f(w)}f(z)}\right|\leq\left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right| \tag{297}$$

证明：首先容易证明对于$z,w\in\overline{\mathbb{D}}$，当$\overline{w}z\neq 1$时，成立

$$\left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right|\leq 1 \tag{298}$$

当且仅当$|z|=1$或$|w|=1$时等号成立。

对于$w\in\mathbb{D}$，定义映射：

$$\varphi_w:\mathbb{D}\to\mathbb{D} \tag{299}$$

$$z\mapsto\frac{w-z}{1-\overline{w}z} \tag{300}$$

我们来证明φ_w为全纯双射。注意到

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi_w(z+h)-\varphi_w(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|w|^2-1}{(1-\overline{w}(z+h))(1-\overline{w}z)}=\frac{|w|^2-1}{(1-\overline{w}z)^2} \tag{301}$$

因此φ_w为全纯映射。同时注意到

$$(\varphi_w\circ\varphi_w)(z)=z \tag{302}$$

因此φ_w为双射。

由于$\varphi_w(w)=0$，那么$\varphi_w^{-1}(0)=w$。考察映射

$$\psi_w=\varphi_{f(w)}\circ f\circ\varphi_w^{-1} \tag{303}$$

由于φ_w和f均为$\mathbb{D}\to\mathbb{D}$上的全纯函数，那么ψ_w为为$\mathbb{D}\to\mathbb{D}$上的全纯函数，且

$$\psi_w(0) = (\varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_w^{-1})(0) = 0 \tag{304}$$

于是由Schwartz引理，对于任意$z \in \mathbb{D}$，成立

$$|\psi_w(z)| \le |z| \tag{305}$$

即

$$|(\varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_w^{-1})(z)| \le |z| \tag{306}$$

而φ_w为双射，因此存在$z' \in \mathbb{D}$，使得成立$z = \varphi_w(z')$，因此

$$|(\varphi_{f(w)} \circ f)(z')| \le |\varphi_w(z')| \tag{307}$$

进而

$$\left|\frac{f(w) - f(z')}{1 - \overline{f(w)} f(z')}\right| \le \left|\frac{w - z'}{1 - \overline{w} z'}\right| \tag{308}$$

由z'与w的任意性，原命题得证！

2023年06月09日

第一题

计算

$$\int_{|z|=r}(1+z^2+\overline{z})\mathrm{d}z \tag{309}$$

解：令$z=re^{i\theta}$，那么

$$\int_{|z|=r}(1+z^2+\overline{z})\mathrm{d}z=ri\int_0^{2\pi}(\mathrm{e}^{i\theta}+r^2\mathrm{e}^{i3\theta}+r)\mathrm{d}\theta=2\pi r^2 i \tag{310}$$

第二题

证明：如果$a>0$，那么

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2a}\log a \tag{311}$$

证明：记$f(z)=\frac{\log z}{z^2+a^2}$，积分路径为

$$\begin{aligned}
&\gamma_1: z=t, && t:\varepsilon\to R \qquad (312)\\
&\gamma_2: z=-t, && t:R\to\varepsilon \qquad (313)\\
&C_\varepsilon: z=\varepsilon\mathrm{e}^{it}, && t:\pi\to 0 \qquad (314)\\
&C_R: z=R\mathrm{e}^{it}, && t:0\to\pi \qquad (315)
\end{aligned}$$

注意到当$\varepsilon<a<R$时，f在积分路径围成的区域内存在一阶极点$z=ai$，其留数为

$$\mathrm{res}_{ai}f=\lim_{z\to ai}(z-ai)f(z)=\frac{\log a+i\frac{\pi}{2}}{2ai} \tag{316}$$

因此由留数公式

$$\int_{\gamma_1}f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2}f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_\varepsilon}f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\,\mathrm{res}_{ai}f=\frac{\pi\log a}{a}+i\frac{\pi^2}{2a} \tag{317}$$

考察各项积分。对于C_ε项

$$\int_{C_\varepsilon}f(z)\mathrm{d}z=\varepsilon\int_0^\pi\frac{t\mathrm{e}^{it}}{\varepsilon^2\mathrm{e}^{i2t}+a^2}\mathrm{d}t-i\varepsilon\ln\varepsilon\int_0^\pi\frac{\mathrm{e}^{it}}{\varepsilon^2\mathrm{e}^{i2t}+a^2}\mathrm{d}t\to 0\qquad(\varepsilon\to 0^+) \tag{318}$$

对于C_R项

$$\left|\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z\right|=R\left|\int_0^\pi\frac{(i\ln R-t)\mathrm{e}^{it}}{R^2\mathrm{e}^{i2t}+a^2}\mathrm{d}t\right|\le R\int_0^\pi\frac{|i\ln R-t|}{|R^2\mathrm{e}^{i2t}+a^2|}\mathrm{d}t\le R\int_0^\pi\frac{\pi+\ln R}{R^2-a^2}\mathrm{d}t=\pi R\frac{\pi+\ln R}{R^2-a^2}\to 0\qquad(R\to\infty) \tag{319}$$

对于γ_2项

$$\int_{\gamma_2}f(z)\mathrm{d}z=\int_\varepsilon^R\frac{\log t+i\pi}{t^2+a^2}\mathrm{d}t=\int_\varepsilon^R\frac{\log t}{t^2+a^2}\mathrm{d}t+i\pi\int_\varepsilon^R\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} \tag{320}$$

而

$$\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}=\frac{\pi}{2a} \tag{321}$$

因此当$\varepsilon\to 0$且$R\to\infty$时，成立

$$2\int_0^\infty\frac{\log x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x+i\frac{\pi^2}{2a}=\frac{\pi\log a}{a}+i\frac{\pi^2}{2a} \tag{322}$$

因此

$$\int_0^\infty\frac{\log x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2a}\log a \tag{323}$$

第三题

证明：如果$|a|<1$，那么

$$\int_0^{2\pi}\log|1-a\mathrm{e}^{i\theta}|\mathrm{d}\theta=0 \tag{324}$$

进而证明$|a|\le 1$时，上式仍然成立。

证明： 记$f(z)=\frac{\log(1-az)}{iz},|z|\le 1$，由于$1-az\in\{x+iy:x>0,y\in\mathbb{R}\}$，因此$\log(1-az)$在$|z|\le 1$时全纯。注意到$z=0$为$f(z)$的可去奇点，因此$f(z)$在$|z|\le 1$全纯，那么

$$\int_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z=0 \tag{325}$$

进而

$$\int_0^{2\pi}\log|1-a\mathrm{e}^{i\theta}|\mathrm{d}\theta=\mathrm{Re}\int_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z=0 \tag{326}$$

而当$|a|=1$时，记$a=\mathrm{e}^{i\alpha}$，注意到

$$\int_0^{2\pi}\log|1-a\mathrm{e}^{i\theta}|\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\log|1-\mathrm{e}^{i(\theta+\alpha)}|\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\log|1-\mathrm{e}^{i\theta}|\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(2\sin\theta)\mathrm{d}\theta=0 \tag{327}$$

最后的积分来自这篇论文，当然这里有一个富有技巧性的证法：

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x &(328)\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin 2x)\mathrm{d}x &(329)\\
&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\ln 2+\ln(\sin x)+\ln(\cos x))\mathrm{d}x &(330)\\
&=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I &(331)
\end{aligned}$$

因此

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2 \tag{332}$$