

习题二

第一题

已知函数 $y = f(x)$ 在下列各点的值为

x_i	-1	-0.75	-0.5	0	0.25	0.5	0.75
y_i	1.00	0.8125	0.75	1.00	1.3125	1.75	2.3125

根据最小二乘法，分别用一次、二次、三次多项式拟合上述数据，画出所给数据点和最小二乘拟合多项式的图像。

解：代码如下

```
1 clear; clc
2
3 %% 准备数据
4
5 % 输入原始数据
6 x0 = [-1, -0.75, -0.5, 0, 0.25, 0.5, 0.75];
7 y0 = [1.00, 0.8125, 0.75, 1.00, 1.3125, 1.75, 2.3125];
8
9 %% 计算最小二乘拟合多项式系数
10
11 % 利用polyfit函数，分别用一、二、三次多项式对数据点进行最小二乘拟合
12 p1 = polyfit(x0, y0, 1); % 一次多项式的系数向量
13 p2= polyfit(x0, y0, 2); % 二次多项式的系数向量
14 p3 = polyfit(x0, y0, 3); % 三次多项式的系数向量
15
16 % 输出拟合多项式的系数
17 disp('一次多项式的系数向量为: ')
18 disp(p1)
19 disp('二次多项式的系数向量为: ')
20 disp(p2)
21 disp('三次多项式的系数向量为: ')
22 disp(p3)
23
24 %% 绘图
25
26 % 计算拟合曲线的值
27 x = linspace(-1.25, 1, 1000);
28 y1 = polyval(p1, x);
29 y2 = polyval(p2, x);
30 y3 = polyval(p3, x);
31
32 % 绘制图形
33 figure
34 plot(x, y1, 'b-') % 一次拟合曲线，蓝色实线
35 hold on
36 plot(x, y2, 'r--') % 二次拟合曲线，红色虚线
37 plot(x, y3, 'g-.' ) % 三次拟合曲线，绿色点划线
38 plot(x0, y0, 'k+') % 原始数据点，黑色加号
```

```

39 hold off
40
41 % 添加图例，标题和网格线
42 legend('一次拟合曲线', '二次拟合曲线', '三次拟合曲线', '原始数据点')
43 title('多项式拟合')
44 grid on
45
46 %% 计算误差
47
48 % 计算一次拟合曲线的均方误差、最大绝对误差、平均绝对误差
49 mse1 = mean((y0 - polyval(p1, x0)).^2); % 均方误差
50 mae1 = max(abs(y0 - polyval(p1, x0))); % 最大绝对误差
51 mape1 = mean(abs(y0 - polyval(p1, x0))); % 平均绝对误差
52
53 % 计算二次拟合曲线的均方误差、最大绝对误差、平均绝对误差
54 mse2 = mean((y0 - polyval(p2, x0)).^2); % 均方误差
55 mae2 = max(abs(y0 - polyval(p2, x0))); % 最大绝对误差
56 mape2 = mean(abs(y0 - polyval(p2, x0))); % 平均绝对误差
57
58 % 计算三次拟合曲线的均方误差、最大绝对误差、平均绝对误差
59 mse3 = mean((y0 - polyval(p3, x0)).^2); % 均方误差
60 mae3 = max(abs(y0 - polyval(p3, x0))); % 最大绝对误差
61 mape3 = mean(abs(y0 - polyval(p3, x0))); % 平均绝对误差
62
63 % 输出结果
64 disp('一次拟合曲线的均方误差、最大绝对误差、平均绝对误差为：')
65 disp([mse1 mae1 mape1])
66 disp('二次拟合曲线的均方误差、最大绝对误差、平均绝对误差为：')
67 disp([mse2 mae2 mape2])
68 disp('三次拟合曲线的均方误差、最大绝对误差、平均绝对误差为：')
69 disp([mse3 mae3 mape3])

```

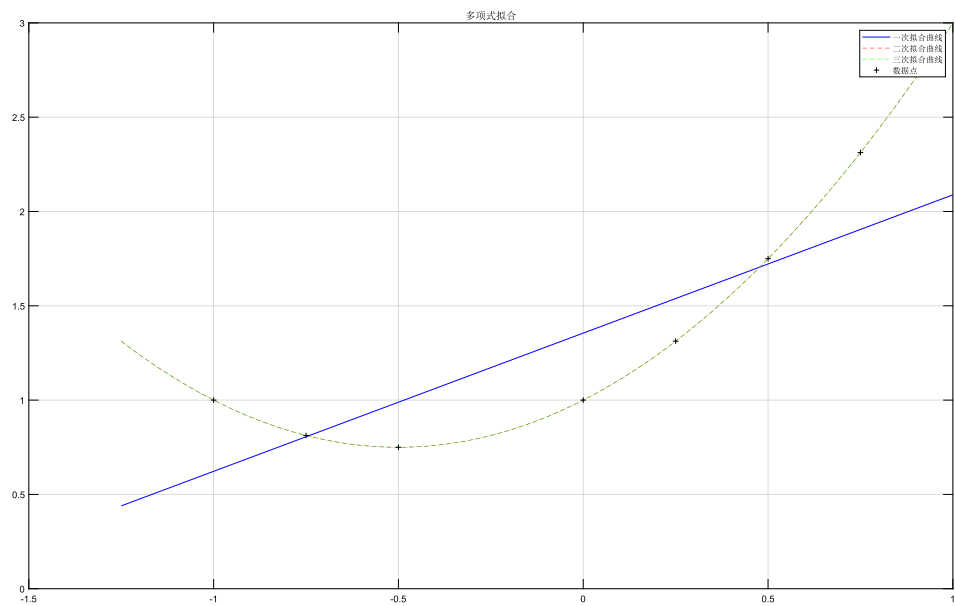
输出结果如下

```

1  一次多项式的系数向量为：
2      0.732876712328767      1.35530821917808
3
4  二次多项式的系数向量为：
5      1      1
6      1
7  三次多项式的系数向量为：
8      -9.74992473134766e-17      1
9      1      1
10
11  一次拟合曲线的均方误差、最大绝对误差、平均绝对误差为：
12      0.0776969178082192      0.407534246575342
13      0.234344422700587
14
15  二次拟合曲线的均方误差、最大绝对误差、平均绝对误差为：
16      2.46519032881566e-32      3.33066907387547e-16      9.51619735392991e-17
17
18  三次拟合曲线的均方误差、最大绝对误差、平均绝对误差为：

```

输出图像如下



第二题

已知一组实验数据如下

x_k	0.0	0.2	0.5	0.7	0.85	1.0
y_k	1.000	1.221	1.649	2.014	2.340	2.718
w_k	0.1	0.2	0.3	0.1	0.2	0.1

求二次最小二乘拟合多项式，并计算均方误差。

解：定义加权最小二乘函数

```
1 function c = weightedLeastSquaresFit(x, y, w, n)
2
3     % 名称： 加权最小二乘拟合
4     % 输入：
5     %     x: 拟合点横坐标
6     %     y: 拟合点纵坐标
7     %     w: 拟合权重
8     %     n: 拟合多项式次数
9     % 输出：
10    %     c: 拟合多项式系数
11
12    %% 函数
13
14    % 计算系数矩阵
15    A = zeros(n + 1, n + 1);
16    b = zeros(n + 1, 1);
17    for i = 1: n + 1
```

```

18         b(i) = sum(w .* y .* x .^ (i - 1));
19         for j = 1: n + 1
20             A(i, j) = sum(w .* x .^ (i + j - 2));
21         end
22     end
23     % 求解多项式系数
24     c = A \ b;
25
26 end

```

主函数

```

1  clear; clc
2
3  %% 准备数据
4
5  % 输入原始数据
6  x0 = [0.0, 0.2, 0.5, 0.7, 0.85, 1.0];
7  y0 = [1.000, 1.221, 1.649, 2.014, 2.340, 2.718];
8  w = [0.1, 0.2, 0.3, 0.1, 0.2, 0.1];
9
10 %% 计算加权最小二乘拟合多项式系数
11 n = 2; % 拟合多项式次数
12 c = weightedLeastSquaresFit(x0, y0, w, n);
13 % 输出拟合多项式的系数
14 disp('二次多项式的系数向量为: ')
15 disp(c)
16
17 %% 绘图
18
19 % 计算拟合曲线的值
20 x = linspace(-0.25, 1.25, 1000);
21 y = c(1) * ones(1, 1000);
22 for k = 1: n
23     y = y + c(k) * x .^ k;
24 end
25
26 % 绘制图形
27 figure
28 plot(x, y, 'b-') % 二次拟合曲线, 蓝色实线
29 hold on
30 plot(x0, y0, 'k+') % 原始数据点, 黑色加号
31 hold off
32
33 % 添加图例, 标题和网格线
34 legend('二次拟合曲线', '原始数据点')
35 title('加权多项式拟合')
36 grid on
37
38 %% 计算误差
39
40 % 计算二次拟合曲线的均方误差、最大绝对误差、平均绝对误差
41 m = size(x0, 2);
42 y = c(1) * ones(1, m);
43 for k = 1: n

```

```

44     y = y + c(k) * x0 .^ k;
45 end
46 mse2 = mean((y0 - y.^2)); % 均方误差
47 mae2 = max(abs(y0 - y)); % 最大绝对误差
48 mape2 = mean(abs(y0 - y)); % 平均绝对误差
49
50 % 输出结果
51 disp('二次拟合曲线的均方误差、最大绝对误差、平均绝对误差为：')
52 disp([mse2 mae2 mape2])
53

```

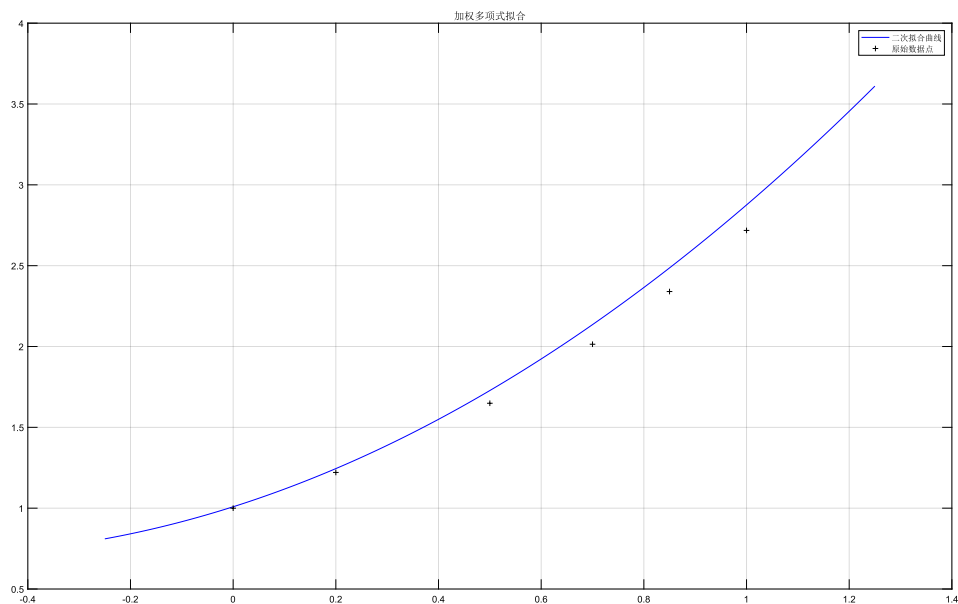
输出结果如下

```

1  二次多项式的系数向量为：
2      1.00876388907147
3      0.858131088382626
4      0.840708191462776
5
6  二次拟合曲线的均方误差、最大绝对误差、平均绝对误差为：
7      -2.27010629254655      0.157658866525572
      0.0894231704314411

```

输出图像如下



第三题

设 $f(x) = \sin \pi x$, 利用Legendre多项式分别求次数为2, 3, 4的多项式 $p(x)$, 使得 $\int_0^1 (f(x) - p(x))^2 dx$ 达到最小, 并画出 $f(x)$ 和 $p(x)$ 的曲线进行比较。

解：定义加权平方逼近多项式拟合函数

```

1  function c = weightedSquaresApproximatePolynomialFit(fun, rho, n, a, b)
2
3      % 名称：    加权平方逼近多项式拟合
4      % 输入：

```

```

5      %      fun: 拟合函数
6      %      rho: 拟合权重
7      %      n: 拟合多项式次数
8      %      a: 拟合左边界
9      %      b: 拟合右边界
10     % 输出:
11     %      c: 拟合多项式系数
12
13     %% 函数
14
15     % 计算系数矩阵
16     A = zeros(n + 1, n + 1);
17     B = zeros(n + 1, 1);
18     for i = 1: n + 1
19         B(i) = integral(@(x) rho(x) .* fun(x) .* x .^ (i - 1), a, b);
20         for j = 1: n + 1
21             A(i, j) = integral(@(x) rho(x) .* x .^ (i + j - 2), a, b);
22         end
23     end
24     % 求解多项式系数
25     c = A \ B;
26
27 end

```

主函数

```

1  clear; clc
2
3  %% 准备数据
4
5  % 输入原始函数
6  fun = @(x) sin(pi * x);
7  rho = @(x) 1;
8  a = 0;
9  b = 1;
10
11  %% 计算拟合多项式系数
12  c2 = weightedSquaresApproximatePolynomialFit(fun, rho, 2, a, b);
13  c3 = weightedSquaresApproximatePolynomialFit(fun, rho, 3, a, b);
14  c4 = weightedSquaresApproximatePolynomialFit(fun, rho, 4, a, b);
15
16  % 输出拟合多项式的系数
17  disp('二次多项式的系数向量为: ')
18  disp(c2)
19  disp('三次多项式的系数向量为: ')
20  disp(c3)
21  disp('四次多项式的系数向量为: ')
22  disp(c4)
23
24  %% 绘图
25
26  % 计算拟合曲线的值
27  x = linspace(0, 1, 1000);
28
29  y2 = c2(1) * ones(1, 1000);

```

```

30 for k = 1: 2
31     y2 = y2 + c2(k) * x .^ k;
32 end
33
34 y3 = c3(1) * ones(1, 1000);
35 for k = 1: 3
36     y3 = y3 + c3(k) * x .^ k;
37 end
38
39 y4 = c4(1) * ones(1, 1000);
40 for k = 1: 4
41     y4 = y4 + c4(k) * x .^ k;
42 end
43
44 % 绘制图形
45 figure
46 plot(x, fun(x)) % 原始曲线
47 hold on
48 plot(x, y2, 'b-') % 二次拟合曲线, 蓝色实线
49 plot(x, y3, 'r--') % 三次拟合曲线, 红色虚线
50 plot(x, y4, 'g-.' ) % 四次拟合曲线, 绿色点划线
51 hold off
52
53 % 添加图例, 标题和网格线
54 legend('原始曲线', '二次拟合曲线', '三次拟合曲线', '四次拟合曲线')
55 title('平方逼近多项式拟合')
56 grid on
57

```

输出结果

```

1  二次多项式的系数向量为:
2      -0.0504654977784496
3      4.12251162087619
4      -4.12251162087619
5
6  三次多项式的系数向量为:
7      -0.0504654977784651
8      4.12251162087637
9      -4.12251162087665
10     3.06005221162348e-13
11
12 四次多项式的系数向量为:
13     0.001313455897898
14     3.08693254734936
15     0.537594209994186
16     -7.24905351468689
17     3.62452675734332

```

输出图像

