记函数$f(x)=\frac{e}{2x}+\ln x, x\in(0,+\infty)$，曲线$y=f(x)$上存在三点$\left(x_1,f(x_1)\right),\left(x_2,f(x_2)\right),\left(x_3,f(x_3)\right)$，且其切线共点$(a,b)$。若$0<a<e$且$x_1<x_2<x_3$，证明：

$$\frac{2}{e}+\frac{e-a}{6e^2}<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_3}<\frac{2}{a}-\frac{e-a}{6e^2}$$

证明：曲线$y=f(x)$的过(a,b)的切线的相对应切点的横坐标x满足

$$b-f(x)=f'(x)(a-x) \tag{1}$$

即

$$\ln x+\frac{e+a}{x}-\frac{ea}{2x^2}-1=b \tag{2}$$

记函数

$$g(x)=\ln x+\frac{e+a}{x}-\frac{ea}{2x^2}-1, x\in(0,+\infty) \tag{3}$$

则容易得到曲线$y=f(x)$上存在三点其切线共点(a,b)的充分必要条件是关于x的方程

$$g(x)=b \tag{4}$$

在$x\in(0,+\infty)$内有三个互异实根。记函数$h(x)=-g\left(\frac{1}{x}\right), x\in(0,+\infty)$，即

$$h(x)=\frac{ea}{2}x^2-(e+a)x+\ln x+1, x\in(0,+\infty) \tag{5}$$

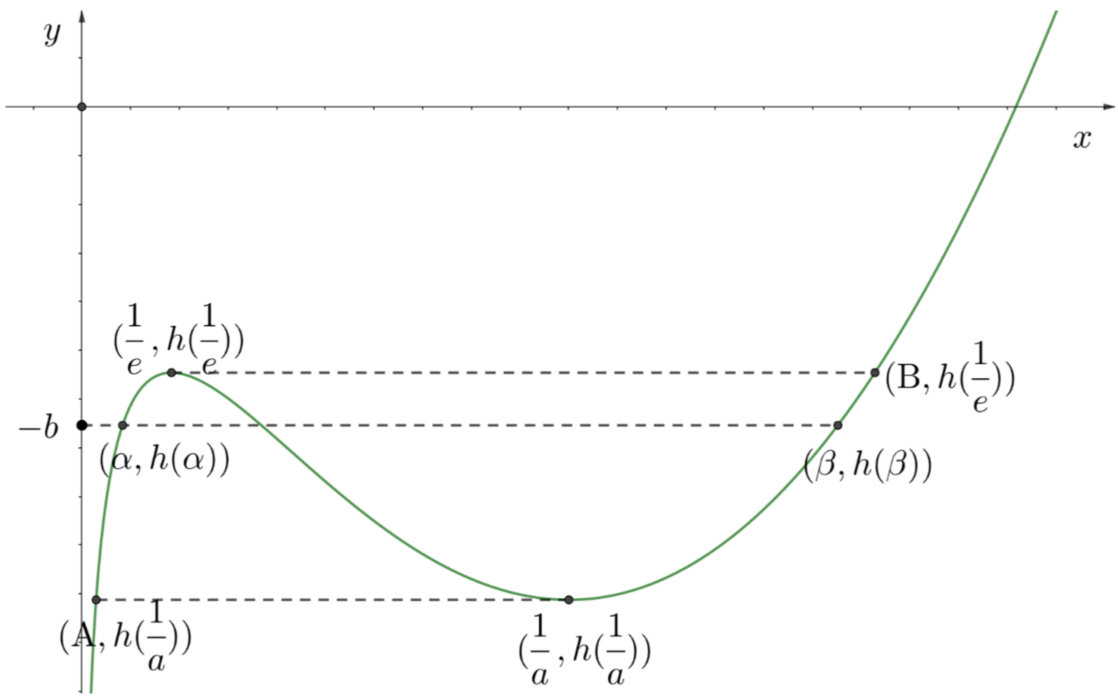
那么曲线$y=f(x)$上存在三点其切线共点(a,b)的充分必要条件是关于x的方程

$$h(x)=-b \tag{6}$$

在$x\in(0,+\infty)$内有三个互异实根。注意到，此时的三个根分别为$\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$，记$\alpha=\frac{1}{x_3},\beta=\frac{1}{x_1}$，则需要证明

$$\frac{2}{e}+\frac{e-a}{6e^2}<\alpha+\beta<\frac{2}{a}-\frac{e-a}{6e^2} \tag{7}$$

考察函数$h(x)$，其图像如下图所示



容易知道，函数$h(x)$在区间$\left(0,\frac{1}{e}\right]$和$\left[\frac{1}{a},+\infty\right)$内分别严格单调递增；在区间$\left[\frac{1}{e},\frac{1}{a}\right]$内严格单调递减。因此其极小值为$\left(\frac{1}{a},h\left(\frac{1}{a}\right)\right)$，极大值为$\left(\frac{1}{e},h\left(\frac{1}{e}\right)\right)$。记直线$y=h\left(\frac{1}{a}\right)$与曲线$y=h(x)$另一交点为$\left(\mathrm{A},h\left(\frac{1}{a}\right)\right)$；直线$y=h\left(\frac{1}{e}\right)$与曲线$y=h(x)$另一交点为$\left(\mathrm{B},h\left(\frac{1}{e}\right)\right)$。因此成立

$$0<\mathrm{A}<\alpha<\frac{1}{e}<\frac{1}{a}<\beta<\mathrm{B} \tag{8}$$

进而成立

$$\mathrm{A}+\frac{1}{a}<\alpha+\beta<\mathrm{B}+\frac{1}{e} \tag{9}$$

若要证明(7)，只需证明

$$\mathrm{A}>\frac{2}{e}-\frac{1}{a}+\frac{e-a}{6e^2} \tag{10}$$

$$\mathrm{B}<\frac{2}{a}-\frac{1}{e}-\frac{e-a}{6e^2} \tag{11}$$

(i) 对于证明$\mathrm{A}>\frac{2}{e}-\frac{1}{a}+\frac{e-a}{6e^2}=-\frac{a^2-13ea+6e^2}{6e^2a}$，当$a^2-13ea+6e^2>0$时，这是显然的。下面证明，当

$$a^2-13ea+6e^2<0 \tag{12}$$

时，成立(10)。

注意到，若要证明(10)，等价于证明

$$h\left(\frac{2}{e}-\frac{1}{a}+\frac{e-a}{6e^2}\right)<h\left(\frac{1}{a}\right) \tag{13}$$

代入可得到

$$\frac{ea}{2}\left(\frac{2}{e}-\frac{1}{a}+\frac{e-a}{6e^2}\right)^2-(e+a)\left(\frac{2}{e}-\frac{1}{a}+\frac{e-a}{6e^2}\right)+\ln\left(\frac{2}{e}-\frac{1}{a}+\frac{e-a}{6e^2}\right)+\ln a+\frac{e}{2a}+1<0 \tag{14}$$

构造函数

$$p(x)=\frac{x^4-14x^3+37x^2-168x+144}{72x}+\ln\left(-\frac{x^2-13x+6}{6}\right) \tag{15}$$

这里定义域为$0<x<1$且$x^2-13x+6<0$。考察函数$p(x)$，对$p(x)$求导函数

$$p'(x)=\frac{(x-1)^2(x-12)(3x^3-25x^2-6x+72)}{72x^2(x^2-13x+6)}>0 \tag{16}$$

进而$p(x)$在定义域内严格单调递增，因此

$$p(x)<\lim_{x\to 1^-}p(x)=0 \tag{17}$$

代入$x=ea$，得到$p(ea)<0$，这样便证明了(14)，进而证明了(10)。

(ii)对于证明$B<\frac{2}{a}-\frac{1}{e}-\frac{e-a}{6e^2}$，同理，等价于证明

$$h\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{e}-\frac{e-a}{6e^2}\right)>h\left(\frac{1}{e}\right) \tag{18}$$

代入可得到

$$\frac{ea}{2}\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{e}-\frac{e-a}{6e^2}\right)^2-(e+a)\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{e}-\frac{e-a}{6e^2}\right)+\ln\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{e}-\frac{e-a}{6e^2}\right)+\frac{a}{2e}+2>0 \tag{19}$$

构造函数

$$q(x)=\frac{x^3+22x^2+109x-132}{72}+\ln\left(-\frac{x^2+5x-12}{6x}\right) \tag{20}$$

这里定义域为$0<x<1$。考察函数$q(x)$，对$q(x)$求导函数

$$q'(x)=\frac{(x-1)^2(x+12)(3x^2+29x+72)}{72x(x^2+5x-12)}<0 \tag{21}$$

进而$q(x)$在定义域内严格单调递减，因此

$$q(x)>\lim_{x\to 1^-}q(x)=0 \tag{22}$$

代入$x=ea$，得到$q(x)>0$，这样便证明了(19)，进而证明了(11)。

综合(i)和(ii)，已证明(10)和(11)，因此(7)得证，进而原命题得证！