一、L^p空间和Banach空间

1　L^p空间

σ-有限测度空间：以X表示底层空间，$\mathcal{F}$表示可测集的σ-代数，μ表示测度，那么称$(X,\mathcal{F},\mu)$为σ-有限测度空间。

L^p空间：对于$1\le p\le\infty$，空间$L^p(X,\mathcal{F},\mu)$表示满足如下条件的复值可测函数构成的集合。

$$\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty \tag{1}$$

L^p范数：对于$f\in L^p(X,\mathcal{F},\mu)$，定义其$L^p$范数为

$$\|f\|_{L^p(X,\mathcal{F},\mu)} = \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \tag{2}$$

1.1 Holder不等式和Minkowski不等式

共轭(conjugate)指数/对偶(dual)指数：称p,q为共轭指数或对偶指数，如果满足$1\le p,q\le\infty$，且

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \tag{3}$$

定理1.1　Holder不等式：对于共轭指数$1<p,q<\infty$，如果$f\in L^p$且$g\in L^q$，那么$fg\in L^1$，且

$$\|fg\|_{L^1}\le\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q} \tag{4}$$

定理1.2　Minkowski不等式：如果$1\le p<\infty$且$f,g\in L^p$，那么$f+g\in L^p$，且

$$\|f+g\|_{L^p}\le\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p} \tag{5}$$

1.2 L^p的完备性

定理1.3：$L^p(X,\mathcal{F},\mu)$空间关于范数$\|\cdot\|_{L^p}$是完备的。

1.3 进一步的解释

命题1.4：如果X为有限正测度集合，且$p_0\le p$，那么$L^p\subset L^{p_0}$，且

$$\frac{1}{\mu(X)^{1/p_0}}\|f\|_{L^{p_0}}\le\frac{1}{\mu(X)^{1/p}}\|f\|_{L^p} \tag{6}$$

命题1.5：如果$\mathbb{Z}$有计数测度，且$p_0\le p$，那么$L^{p_0}\subset L^p$，且$\|f\|_{L^p}\le\|f\|_{L^{p_0}}$。