§1. 插值法

1.1 Lagrange 插值

已知插值结点 $x_i (i=0,1,\cdots,n)$ 和函数 $y=f(x)$ 在结点 x_i 的函数值 $y_i = f(x_i)\ (i=0,1,\cdots,n)$，实现函数 $f(x)$ 的 Lagrange 插值。插值多项式可表示为

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

其中 $l_k(x)$ 为 Lagrange 插值基函数，表达式为

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \qquad k=0,1,\cdots,n$$

Matlab 代码如下：

```
function [f,f0] = Lagrange(x,y,x0)
%求已知数据点的Lagrange插值多项式f，并计算插值多项式f在数据点x0的函数值f0
syms t;
n = length(x);
f = 0.0;
for i = 1:n
    l = y(i);
    for j = 1:i-1
        l = l*(t-x(j))/(x(i)-x(j));
    end;
    for j = i+1:n
        l = l*(t-x(j))/(x(i)-x(j));
    end;
    f = f + l;
    simplify(f);
    if(i==n)
       f0 = subs(f,'t',x0);
       f = collect(f);
       f = vpa(f,6);
    end
end
```

1.2 Newton 插值

已知插值结点 $x_i (i=0,1,\cdots,n)$ 和函数 $y=f(x)$ 在结点 x_i 的函数值 $y_i = f(x_i)\ (i=0,1,\cdots,n)$，实现函数 $f(x)$ 的 Newton 插值。插值多项式可表示为

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$

$$+ f(x_0, x_1, \cdots, x_n)(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})$$

其中 $f(x_0, x_1, \cdots, x_k)$ 为 $f(x)$ 的 k 阶差商，定义为

$$f(x_0, x_1, \cdots, x_k) = \frac{f(x_0, \cdots, x_{k-2}, x_k) - f(x_0, x_1, \cdots, x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

而 $f(x_0, x_k) = \dfrac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$ 为函数 $f(x)$ 关于点 x_0, x_k 的一阶差商。差商的计算可列表如下：

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f(x_0, x_1)$			
x_2	$f(x_2)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_0, x_1, x_2)$		
x_3	$f(x_3)$	$f(x_2, x_3)$	$f(x_1, x_2, x_3)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3)$	
x_4	$f(x_4)$	$f(x_3, x_4)$	$f(x_2, x_3, x_4)$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$	$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

1.3 三次样条插值

已知插值结点 $x_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 和函数 $y = f(x)$ 在结点 x_i 的函数值 $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$，实现函数 $f(x)$ 的三次样条插值。插值多项式可表示为

$$S(x) = M_j \frac{(x_{j+1} - x)^3}{6h_j} + M_{j+1} \frac{(x - x_j)^3}{6h_j} + \left(y_j - \frac{M_j h_j^2}{6} \right) \frac{x_{j+1} - x}{h_j}$$

$$+ \left(y_{j+1} - \frac{M_{j+1} h_j^2}{6} \right) \frac{x - x_j}{h_j} \qquad j = 0, 1, \cdots, n-1$$

对于第一类边界条件 $S'(x_0) = f_0', S'(x_n) = f_n'$，有

$$
\begin{bmatrix} 2 & \lambda_0 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}
$$

其中

$$
\begin{cases} \lambda_0 = \mu_n = 1, d_0 = \dfrac{6}{h_0}\left(\dfrac{y_1 - y_0}{h_0} - f_0^{'}\right), d_n = \dfrac{6}{h_{n-1}}\left(f_n^{'} - \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\right) \\ \mu_j = \dfrac{h_{j-1}}{h_{j-1} + h_j}, \lambda_j = \dfrac{h_j}{h_{j-1} + h_j} \qquad\qquad j = 1, 2, \cdots, n-1 \\ d_j = 6\dfrac{[(y_{j+1} - y_j)/h_j] - [(y_j - y_{j-1})/h_{j-1}]}{h_{j-1} + h_j} \end{cases}
$$

对于第二类边界条件 $S^{''}(x_0) = f_0^{''}, S^{''}(x_n) = f_n^{''}$，有

$$
M_0 = f_0^{''}, M_n = f_n^{''}
$$

令 $\lambda_0 = \mu_n = 0, d_0 = 2f_0^{''}, d_n = 2f_n^{''}$，则与第一类边界条件下的方程类似。

Matlab 代码如下：

```
function [f,f0] = ThrSample2 (x,y,y2_1, y2_N,x0)
%求第二类边界条件下已知数据点的三次样条插值多项式f,并计算插值多项式f在数据点x0的函数值f0
syms t;
f = 0.0;
f0 = 0.0;
if(length(x) == length(y))
    n = length(x);
else
    disp('x与y的维数不匹配');
    return;
end
for i=1:n
    if(x(i)<=x0)&& (x(i+1)>=x0)
        k = i;
        break;
    end
end
```

```
A = diag(2*ones(1,n));
u = zeros(n-1,1);
lamda = zeros(n-1,1);
d = zeros(n,1);
for i=2:n-1
    lamda(i) = (x(i+1)-x(i))/(x(i+1)-x(i-1));
    u(i) = 1-lamda(i);
    d(i) =6*((y(i+1)-y(i))/lamda(i)- (y(i)-y(i-1))/u(i));
    A(i, i-1) = u(i);
    A(i, i+1) = lamda(i);
end
d(1) = 2*y2_1;
d(n) = 2*y2_N;
m =A\d;
h = x(k+1) - x(k);
f = m(k)*(x(k+1)-t)^3/6/h + m(k+1)*(t-x(k))^3/6/h + ...
     (y(k+1)-m(k+1)*h*h/6)*(t-x(k))/h + ...
     (y(k)-m(k)*h*h/6)*(x(k+1)-t)/h
    f0 = subs(f,'t',x0);
```

对于周期边界条件

$$S(x_0+0)=S(x_n-0),S^{'}(x_0+0)=S^{'}(x_n-0),S^{''}(x_0+0)=S^{''}(x_n-0)$$

由 $M_0=M_n$， $\lambda_n M_1+\mu_n M_{n-1}+2M_n=d_n$， 有

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

其中

$$\lambda_n=\frac{h_0}{h_{n-1}+h_0},\mu_n=1-\lambda_n,d_n=6\frac{[(y_1-y_0)/h_0]-[(y_n-y_{n-1})/h_{n-1}]}{h_{n-1}+h_0}$$

其余与第一类边界条件下的方程类似。