范畴论介绍

周梦轩

April 8, 2024

河北工业大学

目录

引言

从同构讲起

在分析学中，称 Banach 空间 X 与 Y 同构，并记作 $X \cong Y$，如果存在双射 $f : X \to Y$，使得 f 与 f^{-1} 均为有界线性映射。

在代数学中，称群 X 与 Y 同构，并记作 $X \cong Y$，如果存在双射 $f : X \to Y$，使得对于任意 $x, y \in X$，成立 $f(xy) = f(x)f(y)$。

在拓扑学中，称拓扑空间 X 与 Y 同构，并记作 $X \cong Y$，如果存在双射 $f : X \to Y$，使得 f 与 f^{-1} 均为连续映射。

范畴的定义与示例

范畴 category

范畴 C 包含：

- **对象 (object)**：$\mathrm{Obj}(\mathsf{C})$
- **态射 (morphism)**：$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$，其中称 A 为源 (source)，B 为目标 (target)。

成立如下公理：

1. **态射复合**：对于任意对象 $A, B, C \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，存在态射复合

$$\begin{aligned} \circ : \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, C) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, C) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

2. **恒等态射**：对于任意对象 $S \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，存在恒等态射 $\mathbb{1}_S \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(S, S)$，使得对于任意态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$，成立

$$f \circ \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B \circ f = f$$

3. **结合律**：对于任意态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B), g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, C), h \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(C, D)$，成立

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

范畴示例

集合范畴 Set:

- $\mathrm{Obj}(\mathsf{Set}) = \{\text{集合}\}$
- $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(A, B) = \{\text{映射} f : A \to B\}$

矩阵范畴 V:

- $\mathrm{Obj}(\mathsf{V}) = \mathbb{N}^*$
- $\mathrm{Hom}_{\mathsf{V}}(m, n) = \{\{a_{ij}\}_{m\times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}\}$

群范畴 Grp:

- $\mathrm{Obj}(\mathsf{Grp}) = \{\text{群}(G, *)\}$
- $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Grp}}((G, *), (H, \star)) = \{\text{映射}\varphi : G \to H \mid \varphi(x * y) = \varphi(x) \star \varphi(y)\}$

态射的定义

左逆态射，右逆态射

左逆态射：对于范畴 C，以及对象 $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，称态射 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, A)$ 为态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ 的左逆态射，如果成立 $g \circ f = \mathbb{1}_A$。

右逆态射：对于范畴 C，以及对象 $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，称态射 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, A)$ 为态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ 的右逆态射，如果成立 $f \circ g = \mathbb{1}_B$。

同构态射，同构

同构态射：对于范畴 C，以及对象 $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，称态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ 为同构态射，如果存在态射 $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, A)$，使得成立

$$g \circ f = \mathbb{1}_A, \qquad f \circ g = \mathbb{1}_B$$

同构：对于范畴 C，称对象 $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})$ 是同构的，且记作 $A \simeq B$，如果存在同构态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$。

单态射，满态射

单态射：对于范畴 C，以及对象 $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，称态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ 为单态射，如果对于任意对象 $Z \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，以及任意态射 $\alpha_1, \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(Z, A)$，成立

$$f \circ \alpha_1 = f \circ \alpha_2 \implies \alpha_1 = \alpha_2$$

满态射：对于范畴 C，以及对象 $A, B \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，称态射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A, B)$ 为满态射，如果对于任意对象 $Z \in \mathrm{Obj}(\mathsf{C})$，以及任意态射 $\beta_1, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B, Z)$，成立

$$\beta_1 \circ f = \beta_2 \circ f \implies \beta_1 = \beta_2$$

集合范畴中的一个命题

一个命题

对于映射 $f : A \to B$，如下命题等价。

1. f 为单射。
2. f 存在左逆。
3. f 为单态射。

单射 $\implies$ 存在左逆

定义映射

$$\begin{aligned} g: \quad B &\longrightarrow A \\ f(a) &\longmapsto a \end{aligned}$$

首先来验证 g 的定义是良好的。取 $a_1, a_2 \in A$，满足 $f(a_1) = f(a_2)$，由 f 的单射性，$a_1 = a_2$，于是 g 定义良好。

其次来验证 $g \circ f = \mathbb{1}_A$。任取 $a \in A$，注意到

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = a$$

那么 $g \circ f = \mathbb{1}_A$。

综合这两点，f 存在左逆 g。

存在左逆 $\implies$ 单态射

记 f 的左逆为 g，那么 $g \circ f = \mathbb{1}_A$。

任取 α_1, α_2，满足 $f \circ \alpha_1 = f \circ \alpha_2$，那么

$$\alpha_1 = \mathbb{1}_A \circ \alpha_1 = g \circ f \circ \alpha_1 = g \circ f \circ \alpha_2 = \mathbb{1}_A \circ \alpha_2 = \alpha_2$$

于是 f 是单态射。

单态射 $\implies$ 单射

任取 $a_1, a_2 \in A$，满足 $f(a_1) = f(a_2)$。

定义 $\alpha_1 : Z \to \{a_1\}$ 和 $\alpha_2 : Z \to \{a_2\}$，任取 $z \in Z$，注意到

$$(f \circ \alpha_1)(z) = f(\alpha_1(z)) = f(a_1) = f(a_2) = f(\alpha_2(z)) = (f \circ \alpha_2)(z)$$

因此 $f \circ \alpha_1 = f \circ \alpha_2$，于是 $\alpha_1 = \alpha_2$，即 $a_1 = a_2$，进而 f 是单射。

总结

定理 1

对于映射 $f: A \to B$，如下命题等价。

1. f 为单射。
2. f 存在左逆。
3. f 为单态射。

定理 2

对于映射 $f: A \to B$，如下命题等价。

1. f 为满射。
2. f 存在右逆。
3. f 为满态射。

命题的反例

反例

在群范畴 Grp 中，群同态映射

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} &\longrightarrow S_3 \\ [0]_3 &\longmapsto (1) \\ [1]_3 &\longmapsto (132) \\ [2]_3 &\longmapsto (123) \end{aligned}$$

为单态射，但是不存在左逆，因为群同态映射 $S_3 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 只能为平凡映射。

Questions?

Thank you!