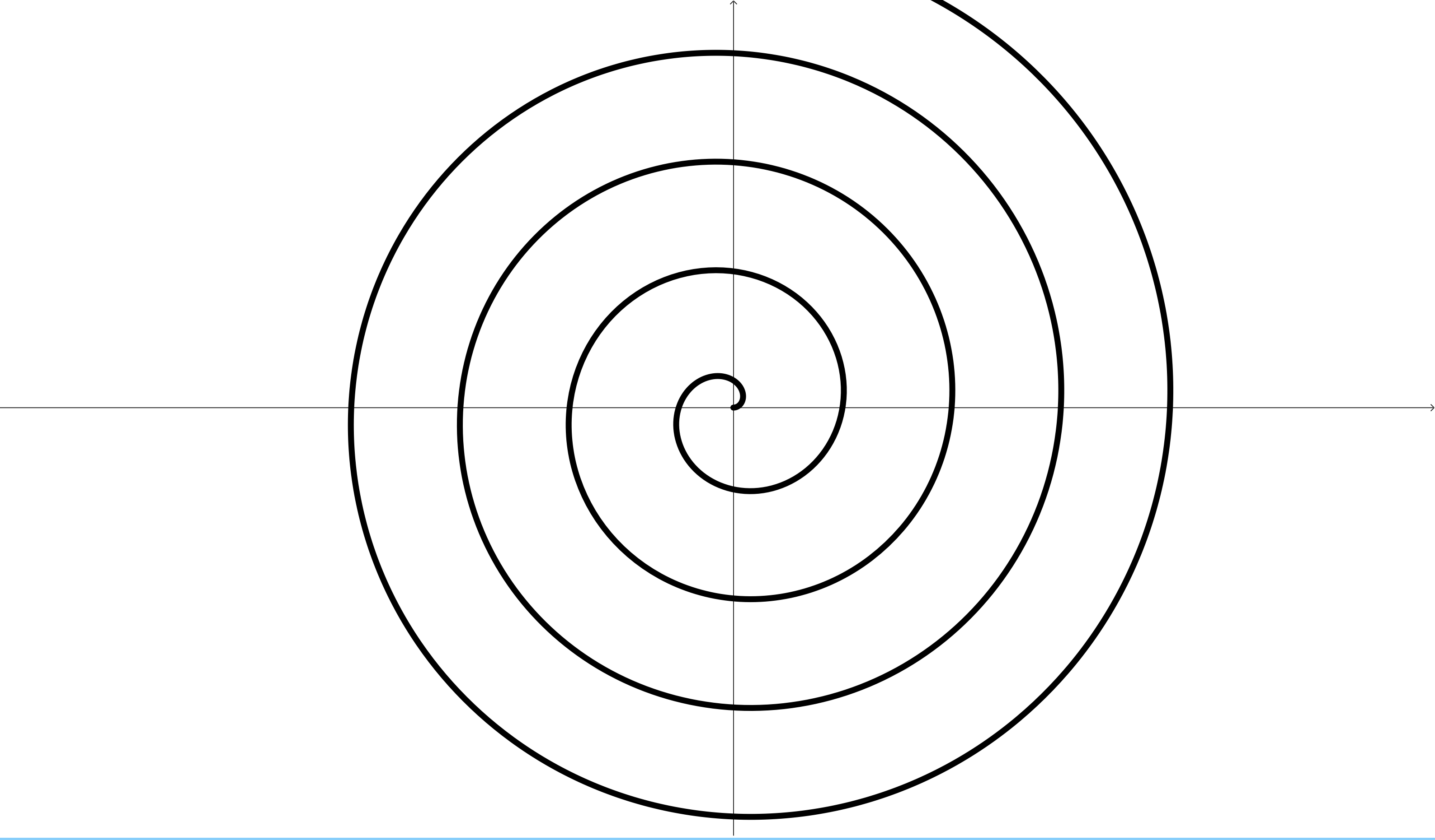


基础拓扑学讲义 - 尤承业 - 笔记

作者：若水

邮箱：ethanmxzhou@163.com

主页：helloethanzhou.github.io

时间：July 18, 2024

致谢

感谢 **勇敢的** 自己

目录

第一章 拓扑空间

1.1 拓扑空间

1.1.1 拓扑定义

定义 1.1.1 (拓扑)

对于集合 X，称子集族 $\tau \subset \mathscr{P}(X)$ 为 X 的拓扑，如果成立如下命题。

1. $\varnothing, X \in \tau$
2. 若 $A, B \in \tau$，则 $A \cap B \in \tau$。
3. 若 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda} \subset \tau$，则 $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \tau$。

♣

示例 1.1

1. 平凡拓扑：$\{\varnothing, X\}$
2. 离散拓扑：$2^X = \mathscr{P}(X)$
3. 余有限拓扑：对于无穷集合 X，则称 X 上的余有限拓扑为
$$\tau_f = \{A : A^c \subset X\text{为有限子集}\} \cup \{\varnothing\}$$
4. 余可数拓扑：对于不可数无穷集合 X，则称 X 上的余可数拓扑为
$$\tau_c = \{A : A^c \subset X\text{为可数子集}\} \cup \{\varnothing\}$$
5. 欧式拓扑：称 $\mathbb{R}^n$ 上的欧式拓扑为
$$E^n = \{U \subset \mathbb{R}^n : U\text{为开方体的并}\}$$
6. 度量拓扑：对于度量空间 (X, d)，则称 X 上由 d 诱导的拓扑为
$$\tau_d = \{U : U\text{为若干开球的并}\}$$

定义 1.1.2 (开集)

称拓扑空间的元素为开集。

♣

命题 1.1.3 (开集的性质)

1. $\varnothing, X$ 为开集。
2. 任意开集的并为开集。
3. 有限开集的交为开集。

♠

定义 1.1.4 (闭集)

称开集的补集为闭集。

♣

命题 1.1.5 (闭集的性质)

1. $\varnothing, X$ 为闭集。
2. 任意闭集的交为闭集。
3. 有限闭集的并为闭集。
4. **分离定理**：在度量空间 (X, d) 中，如果闭集 $E \cap F = \varnothing$，那么 $d(E, F) > 0$。

♠

1.1.2 拓扑结构

定义 1.1.6 (开集)

称集合 X 的子集族 $\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(X)$ 中的元素为开集，如果成立如下开集公理。

1. $\varnothing, X \in \mathscr{G}$
2. 有限交封闭：如果 $G_1, G_2 \in \mathscr{G}$，那么 $G_1 \cap G_2 \in \mathscr{G}$。
3. 任意并封闭：如果 $\{G_\lambda\} \subset \mathscr{G}$，那么 $\bigcup G_\lambda \in \mathscr{G}$。

♣

定义 1.1.7 (闭集)

称集合 X 的子集族 $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$ 中的元素为闭集，如果成立如下闭集公理。

1. $\varnothing, X \in \mathscr{F}$
2. 有限交封闭：如果 $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$，那么 $F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$。
3. 任意并封闭：如果 $\{F_\lambda\} \subset \mathscr{F}$，那么 $\bigcup F_\lambda \in \mathscr{F}$。

♣

定义 1.1.8 (开核)

对于集合 X，称算子 $\mathcal{O} : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ 为开核算子，$\mathcal{O}(E)$ 称为 E 的开核，如果成立如下开核公理。

1. 幂等性：$\mathcal{O}^2 = \mathcal{O}$
2. 包含的单调性：如果 $E \subset F$，那么 $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{O}(F)$。
3. 交的分配律：如果 $E \subset F$，那么 $\mathcal{O}(E \cap F) = \mathcal{O}(E) \cap \mathcal{O}(F)$。

♣

定义 1.1.9 (闭包)

对于集合 X，称算子 $\mathcal{C} : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ 为闭包算子，$\mathcal{C}(E)$ 称为 E 的闭包，如果成立如下闭包公理。

1. 幂等性：$\mathcal{C}^2 = \mathcal{C}$
2. 包含的单调性：如果 $E \subset F$，那么 $\mathcal{C}(E) \subset \mathcal{C}(F)$。
3. 并的分配律：如果 $E \subset F$，那么 $\mathcal{C}(E \cup F) = \mathcal{C}(E) \cup \mathcal{C}(F)$。

♣

定义 1.1.10 (邻域)

对于集合 X，称算子 $\mathcal{U} : X \to \mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$ 为邻域算子，$\mathcal{U}(x)$ 称为 x 的邻域系，$\mathcal{U}(x)$ 中的元素称为 x 的邻域，如果成立如下邻域公理。

1. 如果 $U \in \mathcal{U}(x)$，那么 $x \in U$。
2. 如果 $U, V \in \mathcal{U}(x)$，那么 $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$。
3. 如果 $U \in \mathcal{U}(x)$ 且 $U \subset V$，那么 $V \in \mathcal{U}(x)$。
4. 对于任意 $U \in \mathcal{U}(x)$，存在 $V \in \mathcal{U}(x)$，使得对于任意 $v \in V$，成立 $U \in \mathcal{U}(v)$。

♣

1.1.3 拓扑中点的结构

定义 1.1.11 (内点)

对于拓扑空间 X，称点 x 为子集 A 的内点，如果成立如下命题之一。

1. 存在开集 U，使得成立 $x \in U \subset A$。
2. $x \in A^\circ$

♣

定义 1.1.12 (接触点)

对于拓扑空间 X，称点 x 为子集 A 的接触点，如果成立如下命题之一。

1. 对于任意 x 的邻域 U，成立 $U\cap A\neq\varnothing$。
2. $x\in\overline{A}$

定义 1.1.13 (边界点)

对于拓扑空间 X，称点 x 为子集 A 的边界点，如果对于任意 x 的邻域 U，成立

$$A\cap U\neq\varnothing,\qquad U\setminus A\neq\varnothing$$

定义 1.1.14 (聚点)

对于拓扑空间 X，称点 x 为子集 A 的聚点，如果成立如下命题之一。

1. 对于任意 x 的邻域 U，成立 $U\cap A\setminus\{x\}\neq\varnothing$。
2. $x\in A'$

定义 1.1.15 (孤立点)

对于拓扑空间 X，称点 x 为子集 A 的孤立点，如果存在 x 的邻域 U，使得成立

$$A\cap U=\{x\}$$

1.1.4 拓扑中集合的结构

定义 1.1.16 (邻域)

1. 对于拓扑空间 X，称子集 U 为点 x 的邻域，如果成立如下命题之一。
   (a). 存在开集 G，使得成立 $x\in G\subset U$。
   (b). $x\in U^\circ$
2. 对于拓扑空间 X，称子集 U 为子集 A 的邻域，如果成立如下命题之一。
   (a). 存在开集 G，使得成立 $A\subset G\subset U$。
   (b). $A\subset U^\circ$

定义 1.1.17 (内部)

1. 对于拓扑空间 X，称子集 A 的内点全体为 A 的内部，记作 A°。
2. 对于拓扑空间 X，定义子集 A 的内部为包含于 A 的极大开集，换言之

$$A^\circ=\bigcup_{G\subset A\text{为开集}}G$$

命题 1.1.18 (内部的性质)

1. 如果 $A\subset B$，那么 $A^\circ\subset B^\circ$。
2. $A^\circ=A\iff A$ 为开集。
3. $(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$
4. $(A\cup B)^\circ\supset A^\circ\cup B^\circ$
5. 反例：$((-1,0]\cup[0,1))^\circ\supsetneqq(-1,0]^\circ\cup[0,1)^\circ$

定义 1.1.19 (闭包)

1. 对于拓扑空间 X，称子集 A 的接触点全体为 A 的闭包，记作 $\overline{A}$。
2. 对于拓扑空间 X，定义子集 A 的闭包为包含 A 的极小闭集，换言之

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supset A \text{为闭集}} F$$

♣

命题 1.1.20 (闭包的性质)

1. 如果 $A \subset B$，那么 $\overline{A} \subset \overline{B}$。
2. $\overline{A} = A \iff A$ 为闭集。
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
4. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
5. 反例：$\overline{(-1,0) \cap (0,1)} \subsetneq \overline{(-1,0)} \cap \overline{(0,1)}$

♠

定义 1.1.21 (边界)

对于拓扑空间 X，称子集 A 的边界点全体为 A 的边界，记作 ∂A。

♣

定义 1.1.22 (导集)

对于拓扑空间 X，称子集 A 的聚点全体为 A 的导集，记作 A'。

♣

命题 1.1.23 (导集的性质)

1. 如果 $A \subset B$，那么 $A' \subset B'$。
2. $(A \cup B)' = A' \cup B'$

♠

定义 1.1.24 (孤立点集)

对于拓扑空间 X，称子集 A 的孤立点全体为 A 的孤立点集，记作 A^i。

♣

定理 1.1.25

1. 内部与闭包的关系：

$$(A^c)^\circ = (\overline{A})^c$$

2. 闭包的分割：

$$\overline{A} = A^\circ \sqcup \partial A = A^i \sqcup A'$$

3. 全空间的分割：

$$X = A^\circ \sqcup \partial A \sqcup (A^c)^\circ = A^\circ \sqcup \partial \sqcup (\overline{A})^c$$

♡

1.1.5 拓扑结构

定义 1.1.26 (稠密集)

对于拓扑空间 X，称子集 A 为稠密集，如果 $\overline{A} = X$。

♣

示例 1.2

1. $(\mathbb{R}, \tau_f)$ 的任意无穷子集是稠密的。
2. $(\mathbb{R}, \tau_c)$ 的任意可数子集不是稠密的。

定义 1.1.27 (无处稠密集)

对于拓扑空间 X，称子集 A 为无处稠密集，如果 $(\overline{A})^\circ = \varnothing$。♣

定义 1.1.28 (可分空间)

称拓扑空间 X 为可分空间，如果 X 存在可数稠密子集。♣

示例 1.3

1. $(\mathbb{R}, \tau_f)$ 是可分的。
2. $(\mathbb{R}, \tau_c)$ 不是可分的。

定义 1.1.29 (收敛)

对于拓扑空间 X，称序列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ 收敛于点 x，并记作 $x_n \to x$，如果对于 x 的任意邻域 U，存在 $N \in \mathbb{N}^*$，使得对于任意 $n > N$，成立 $x_n \in U$。♣

注 极限不唯一：在 $(\mathbb{R}, \tau_f)$ 中，对于两两互异序列 $\{x_n\}$，以及任意 $x \in \mathbb{R}$，由于 x 的任意邻域（有限集的补集）包含 $\{x_n\}$ 的几乎所有项，于是 $x_n \to x$。

注 聚点存在定理（聚点则存在收敛于其的序列）不成立：在 $(\mathbb{R}, \tau_c)$ 中，由于 $x_n \to x \implies$ 对于几乎所有 x_n 成立 $x_n = x$，那么令 A 不可数，于是 $\overline{A} = \mathbb{R}$（包含 A 的闭集且不可数的只有 $\mathbb{R}$），取 $x \notin A$，那么 x 为 A 的聚点，但是 A 中任意序列不可能收敛于 x

1.1.6 拓扑子空间

定义 1.1.30 (子空间)

对于拓扑空间 (X, τ)，拓扑 $\tau_A = \{U \cap A : U \in \tau\}$ 为由 τ 诱导的子集 A 上的子空间拓扑，称 (A, τ_A) 为 (X, τ) 的子空间。♣

命题 1.1.31 (子空间的性质)

1. 对于拓扑空间以及 $B \subset A \subset X$，成立 $(\tau_A)_B = \tau_B$
2. 对于度量拓扑空间 (X, τ_d) 以及 $A \subset X$，成立 $\tau_{d_A} = \tau_{d|_A}$。♠

注 开集具有相对性，例如 $(0, 1)$ 是 E^1 上的开集，但不是 E^2 上的开集。

定理 1.1.32 (开闭集的相对性)

对于拓扑空间 X，以及子集 $B \subset A$，成立如下命题。

1. B 为 A 的开/闭集 $\iff$ 存在 X 的开/闭集 $C \subset X$，使得成立 $B = A \cap C$。
2. 如果 B 为 X 的开/闭集，那么 B 亦为 A 的开/闭集。
3. 如果 B 为 A 的开/闭集，且 A 为 X 的开/闭集，那么 B 亦为 X 的开/闭集。♡

1.2 连续映射与同胚映射

1.2.1 连续映射

定义 1.2.1 (连续)

对于拓扑空间 X 与 Y，称映射 $f:X\to Y$ 在点 x 处连续，如果对于 $f(x)$ 中的任意邻域 V，$f^{-1}(V)$ 为 x 的邻域。

定义 1.2.2 (序列连续)

对于拓扑空间 X 与 Y，称映射 $f:X\to Y$ 在点 x 处序列连续，如果对于任意序列 $x_n\to x$，成立 $f(x_n)\to f(x)$。

定义 1.2.3 (连续映射)

对于拓扑空间 X 与 Y，称映射 $f:X\to Y$ 为连续映射，如果成立如下命题之一。

1. 邻域的原像为邻域。
2. 开集的原像为开集。
3. 闭集的原像为闭集。

命题 1.2.4 (连续映射的封闭性)

连续映射对于四则运算与复合运算封闭。

定义 1.2.5 (拓扑性在连续映射下的像)

1. 紧致空间在连续映射下的像为紧致空间。
2. 连通空间在连续映射下的像为连通空间。
3. 道路连通空间在连续映射下的像为道路连通空间。

定理 1.2.6 (局部连续与全局连续)

对于拓扑空间 X 与 Y，以及映射 $f:X\to Y$，定义 f 在子集 A 上的限制为 $f|_A:A\to Y$，那么成立如下命题。

1. 若 f 在点 x 处连续，则 f_A 在点 x 处连续。
2. 若 A 为点 x 的邻域，且 $f|_A$ 在点 x 处连续，则 f 在 x 处连续。

定义 1.2.7 (覆盖)

1. 对于拓扑空间 X，称 $\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(X)$ 为 X 的覆盖，如果 $X=\bigcup\limits_{C\in\mathscr{C}}C$。
2. 对于拓扑空间 X，称 $\mathscr{C}\subset\mathscr{P}(X)$ 为子集 A 的覆盖，如果 $A\subset\bigcup\limits_{C\in\mathscr{C}}C$。

定理 1.2.8 (粘接引理)

对于拓扑空间 X 的有限闭覆盖 $\{A_k\}_{k=1}^n$，如果诸映射 $f|_{A_k}:A_k\to Y$ 均为连续映射，那么 $f:X\to Y$ 为连续映射。

1.2.2 同胚映射

定义 1.2.9 (同胚映射)

对于拓扑空间 X 与 Y，称双射 $f: X \to Y$ 为同胚映射，如果 f 与 f^{-1} 均为连续映射。♣

定义 1.2.10 (嵌入映射)

对于拓扑空间 X 与 Y，称连续映射 $f: X \to Y$ 为嵌入映射，如果映射 $f: X \to f(X)$ 为同胚映射。♣

定义 1.2.11 (同胚)

称拓扑空间 X 与 Y 同胚，并记作 $X \cong Y$，如果存在同胚映射 $f: X \to Y$。♣

引入记号：

$$D^n = \{x \in E^n : \|x\| \leq 1\}, \qquad S^n = \{x \in E^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

示例 1.4 $(-1,1) \cong (-1,1)$：

$$\begin{aligned} (-1,1) &\longrightarrow (-1,1) \\ x &\longmapsto \tan\frac{\pi}{2}x \end{aligned}$$

示例 1.5 $E^n \cong D^n \setminus S^{n-1}$：

$$\begin{aligned} E^n &\longrightarrow D^n \setminus S^{n-1} \\ x &\longmapsto \frac{x}{1+\|x\|} \end{aligned}$$

示例 1.6 $E^n \setminus \{O\} \cong E^n \setminus D^n$：

$$\begin{aligned} E^n &\longrightarrow D^n \setminus S^{n-1} \\ x &\longmapsto x + \frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

示例 1.7 $S^2 \setminus \{\mathcal{N}\} \cong E^2$：定义 Riemann 球面

$$\mathbb{S} = \left\{(X,Y,Z) : X^2 + Y^2 + \left(Z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}$$

Riemann 球面的北极记作 $\mathcal{N} = (0,0,1)$，那么存在同胚映射

$$\begin{aligned} \mathcal{R}: \mathbb{S} \setminus \{\mathcal{N}\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y,z) &\longmapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{-1}: \qquad \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{S} \setminus \{\mathcal{N}\} \\ (x,y) &\longmapsto \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, 1 - \frac{2}{1+x^2+y^2}\right) \end{aligned}$$

从而 $\mathbb{S} \setminus \{\mathcal{N}\} \cong \mathbb{C}$；换言之，$S^2 \setminus \{\mathcal{N}\} \cong E^2$。

1.3 乘积空间与拓扑基

定义 1.3.1 (生成子集族)

对于集合 X 的子集族 $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$，定义由 $\mathscr{B}$ 生成的子集族为

$$\begin{aligned}\overline{\mathscr{B}} &= \{U \subset X : U\text{为}\mathscr{B}\text{中集合的并}\}\\ &= \{U \subset X : \forall x \in U, \exists B \in \mathscr{B}, x \in B \subset U\}\end{aligned}$$

♣

定义 1.3.2 (投影)

对于集合 X 与 Y，定义其投影为

$$\begin{aligned}j_x : &X \times Y \to X\\ &(x, y) \to x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}j_y : &X \times Y \to Y\\ &(x, y) \to y\end{aligned}$$

♣

1.3.1 乘积空间

定义 1.3.3 (乘积拓扑)

对于拓扑空间 (X, τ) 与 (Y, υ)，令 $\mathscr{B} = \{U \times V : U \in \tau, V \in \upsilon\}$，称 $\overline{\mathscr{B}}$ 为 $X \times Y$ 上的乘积拓扑，$(X \times Y, \overline{\mathscr{B}})$ 为 (X, τ) 与 (Y, υ) 的乘积空间。

♣

命题 1.3.4

1. $\overline{\mathscr{B}}$ 为 $X \times Y$ 上的一个拓扑。
2. 映射 $f : X \to Y \times Z$ 连续 $\iff$ 映射 $j_y \circ f$ 与 $j_z \circ f$ 连续。

♠

1.3.2 拓扑基

定义 1.3.5 (拓扑基)

称集合 X 的子集族 $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ 为集合 X 的拓扑基，如果成立如下命题之一。

1. $\overline{\mathscr{B}}$ 为 X 的一个拓扑。
2. $\bigcup\limits_{B \in \mathscr{B}} B = X$，且对于任意 $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$，成立 $B_1 \cap B_2 \in \overline{\mathscr{B}}$。
3. $\bigcup\limits_{B \in \mathscr{B}} B = X$，且对于任意 $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$，以及任意 $x \in B_1 \cap B_2$，存在 $B \in \mathscr{B}$，使得成立 $x \in B \subset B_1 \cap B_2$。

♣

定义 1.3.6 (拓扑空间的拓扑基)

称集合 X 的子集族 $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$ 为拓扑空间 (X, τ) 的拓扑基，如果成立如下命题之一。

1. $\overline{\mathscr{B}} = \tau$
2. $\mathscr{B} \subset \tau \subset \overline{\mathscr{B}}$

♣

定理 1.3.7

如果 $\mathscr{B}$ 为拓扑空间 (X,τ) 的拓扑基，那么成立如下命题。

1. $x \in A^{\circ} \iff$ 存在 $B \in \mathscr{B}$，使得成立 $x \in B \subset A$。
2. $x \in A' \iff$ 对于任意 $B \in \mathscr{B}$，若 $x \in B$，则 $A \cap B \setminus \{x\} \neq \varnothing$。
3. $x \in \overline{A} \iff$ 对于任意 $B \in \mathscr{B}$，若 $x \in B$，则 $A \cap B \neq \varnothing$。
4. 映射 $f: Y \to X$ 连续 $\iff$ 对于任意 $B \in \mathscr{B}$，$f^{-1}(B)$ 为 Y 的开集。

♡

1.4 同胚不变性，遗传性与可乘性

定义 1.4.1 (拓扑概念与拓扑性质)

1. 称拓扑空间在同胚映射下保持不变的概念为拓扑概念。
2. 称拓扑空间在同胚映射下保持不变的性质为拓扑性质。

♣

定义 1.4.2 (遗传性)

称拓扑性质 P 具有遗传性，如果若拓扑空间 X 成立 P，则其任意子空间 A 亦成立 P。

♣

定义 1.4.3 (可乘性)

称拓扑性质 P 具有可乘性，如果若拓扑空间 X 与 Y 成立 P，则其乘积空间 $X \times Y$ 也成立 P。

♣

表 1.1: 拓扑性质的遗传性与可乘性

拓扑性质	遗传性	可乘性
T_1 公理	✓	✓
T_2 公理	✓	✓
T_3 公理	✓	✓
T_4 公理	×	×
C_1 公理	✓	✓
C_2 公理	✓	✓
可分性	✓	×
紧致性	×	✓
列紧性		
连通性	×	✓
道路连通性	×	✓

第二章 拓扑性质

2.1 分离公理与可数公理

2.1.1 分离公理

定义 2.1.1 (T_0 公理)

称拓扑空间 X 成立 T_0 公理，如果对于任意点 $x \neq y$，存在开集 U，使得成立或 $x \in U$ 且 $y \notin U$，或 $y \in U$ 且 $x \notin U$。♣

定义 2.1.2 (T_1 公理)

称拓扑空间 X 成立 T_1 公理，如果成立如下命题之一。

1. 对于任意点 $x \neq y$，存在 x 的邻域 U 与 y 的邻域 V，使得成立 $x \notin V$ 且 $y \notin U$。
2. 对于任意点 x，子集 $\{x\}$ 为闭集。

♣

定义 2.1.3 (T_2 公理)

称拓扑空间 X 成立 T_2 公理，如果成立如下命题之一。

1. 对于任意点 $x \neq y$，存在 x 的邻域 U 与 y 的邻域 V，使得成立 $U \cap V = \varnothing$。
2. $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ 为 $X \times X$ 的闭集。

♣

定义 2.1.4 (T_3 公理)

称拓扑空间 X 成立 T_3 公理，如果成立如下命题之一。

1. 对于任意点 x 与闭集 F，若 $x \notin F$，则存在 x 的邻域 U 与 F 的邻域 V，使得成立 $U \cap V = \varnothing$。
2. 对于任意点 x 与 x 的开邻域 U，存在 x 的开邻域 V，使得成立 $\overline{V} \subset U$。

♣

定义 2.1.5 (T_4 公理)

称拓扑空间 X 成立 T_4 公理，如果成立如下命题之一。

1. 对于任意不交闭集 E, F，存在 E 的邻域 U 与 F 的邻域 V，使得成立 $U \cap V = \varnothing$。
2. 对于任意闭集 F 与 F 的开邻域 U，存在 F 的开邻域 V，使得成立 $\overline{V} \subset U$。

♣

定义 2.1.6 (Hausdorff 空间)

称成立 T_2 公理的拓扑空间为 Hausdorff 空间。♣

定理 2.1.7 (分离公理间的关系)

$$T_2 \implies T_1, \qquad T_0 + T_3 \implies T_2, \qquad T_1 + T_3 \implies T_2, \qquad T_1 + T_4 \implies T_3$$

♡

命题 2.1.8

如果拓扑空间 X 成立 T_1 公理，且点 x 为子集 A 的聚点，那么对于 x 的任意邻域 U，$A \cap U$ 为无穷集。♠

定理 2.1.9 (Hausdorff 空间中的唯一收敛性)

在 Hausdorff 空间中，收敛点列存在且存在唯一极限。♡

定理 2.1.10 (度量空间)
度量空间 (X,d) 成立 T_1,T_2,T_3,T_4,C_1 公理。♡

2.1.2 可数公理

定义 2.1.11 (邻域系)
对于拓扑空间 X，称点 x 的邻域全体为 x 的邻域系，记作 $\mathscr{N}(x)$。♣

定义 2.1.12 (邻域基)
对于拓扑空间 X，称 $\mathscr{U}\subset\mathscr{N}(x)$ 为点 x 的邻域基，如果对于任意 $N\in\mathscr{N}(x)$，存在 $U\in\mathscr{U}$，使得成立 $U\subset N$。♣

示例 2.1

1. 邻域系为邻域基。
2. 开邻域系为邻域基。
3. 如果 $\mathscr{B}$ 为拓扑基，那么 $\mathscr{U}=\{B\in\mathscr{B}:x\in B\}$ 为 x 的邻域基。

定义 2.1.13 (C_1 公理)
称拓扑空间成立 C_1 公理，如果其中任意一点处存在可数邻域基。♣

定理 2.1.14 (嵌套定理)
对于拓扑空间，如果某点处存在可数邻域基，那么该点处存在单调递减的可数邻域基。♡

定理 2.1.15 (聚点定理)
如果拓扑空间 X 为 C_1 空间，且 $x\in\overline{A}$，那么存在序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A$，使得成立 $x_n\to x$。♡

定理 2.1.16 (Heine 定理/归结原理)
C_1 空间中序列连续与连续等价；换言之，对于 C_1 空间 X 以及映射 $f:X\to Y$，f 在 x 处连续 $\iff$ 对于任意序列 $x_n\to x$，成立 $f(x_n)\to f(x)$。♡

定义 2.1.17 (C_2 公理)
称拓扑空间成立 C_2 公理，如果其存在可数拓扑基。♣

定理 2.1.18 ($C_2\implies C_1$)
如果拓扑空间 X 为 C_2 空间，那么其为 C_1 空间。♡

证明 由于 X 为 C_2 空间，那么 X 存在可数拓扑基 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$。任取点 x，断言：$\mathscr{U}=\{B_n:x\in B_n,n\in\mathbb{N}^*\}$ 为 X 的可数邻域基。因此 X 为 C_1 空间。

定理 2.1.19 ($C_2\implies$ 可分)
如果拓扑空间 X 为 C_2 空间，那么其为可分空间。♡

证明 由于 X 为 C_2 空间，那么 X 存在可数拓扑基 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$。在诸 B_n 中任取点 x_n，断言：$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 的可数稠密子集。因此 X 为 C_1 空间。

定理 2.1.20 (可分度量空间 $\Longrightarrow C_2$)

如果拓扑空间 X 为可分度量空间，那么其为 C_2 空间。

证明 由于 X 为可分空间，那么 X 存在可数稠密子集 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$。断言：$\bigcup\limits_{m,n=1}^{\infty} B_{1/m}(x_n)$ 为 X 的可数拓扑基。因此 X 为 C_2 空间。

2.2 Urysohn 引理

定理 2.2.1 (Urysohn 引理)

如果拓扑空间 X 成立 T_4 公理，那么对于任意不交闭集 A, B，存在连续映射 $f : X \to E^1$，使得成立 $f(A) = \{0\}$ 且 $f(B) = \{1\}$。

定理 2.2.2 (Tietze 扩张定理)

如果拓扑空间 X 成立 T_4 公理，那么对于任意闭集 F 与连续映射 $f : F \to E^1$，存在连续映射 $\tilde{f} : X \to E^1$，使得 $\tilde{f}|_F = f$。

定义 2.2.3 (可度量化)

称拓扑空间 (X, τ) 可度量化，如果成立如下命题之一。

1. 存在度量 $d : X \times X \to X$，使得成立 $\tau_d = \tau$。
2. 存在度量空间 (Y, d)，以及嵌入映射 $f : (X, \tau) \to (Y, d)$。

定理 2.2.4 (Urysohn 度量化定理)

如果拓扑空间成立 T_1, T_4 与 C_2 公理，那么其可嵌入 Hilbert 空间中。

2.3 紧致性

2.3.1 完全有界性

定义 2.3.1 (δ-网)

对于度量空间 (X, d)，称子集 A 为 X 的 δ-网，如果 $\bigcup\limits_{a \in A} B_\delta(a) = X$。

定义 2.3.2 (完全有界性)

称度量空间为完全有界的，如果对于任意 $\delta > 0$，其存在有限 δ-网。

定义 2.3.3 (Lebesgue 数)

对于列紧度量空间 (X, d)，若 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$ 成立 $X \notin \mathscr{U}$，则定义 $\mathscr{U}$ 的 Lebesgue 数为

$$L_X(\mathscr{U}) = \inf_{x \in X} \sup_{U \in \mathscr{U}} \inf_{u \in U^c} d(x, u)$$

命题 2.3.4

对于列紧度量空间 (X,d),如果 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$ 成立 $X\notin\mathscr{U}$,且 $L_X(\mathscr{U})>0$,同时对于任意 $\delta\in(0,L_X(\mathscr{U}))$ 与 $x\in X$，存在 $U\in\mathscr{U}$，使得成立 $B_\delta(x)\subset U$。

2.3.2 列紧性与紧致性

定义 2.3.5 (列紧性)

称拓扑空间为列紧空间，如果其任意序列存在收敛子序列。

定义 2.3.6 (紧致性)

称拓扑空间为紧致空间，如果其任意开覆盖存在有限子覆盖。

定理 2.3.7 (完全有界性，列紧性与紧致性的关系)

1. 度量空间：紧致性 $\Longleftrightarrow$ 列紧性 $\Longrightarrow$ 完全有界性 $\Longrightarrow$ 有界性
2. 欧式空间：紧致性 $\Longleftrightarrow$ 有界性 + 闭性
3. C_1+ 紧致性 $\Longrightarrow$ 列紧性
4. 紧致性 $+T_2 \Longrightarrow T_3+T_4$

定理 2.3.8 (最值定理)

1. 列紧空间 X 上的连续函数 $f:X\to E^1$ 有界，且可取到最值。
2. 紧致空间 X 上的连续函数 $f:X\to E^1$ 有界，且可取到最值。

定义 2.3.9 (紧致子集)

称拓扑空间 X 的子集 A 为紧致子集，如果成立如下命题之一。

1. A 作为 X 的子空间为紧致空间。
2. A 在 X 中的任意开覆盖存在有限子覆盖。

2.3.3 局部紧致性

定义 2.3.10 (局部紧致性)

称拓扑空间为局部紧致空间，如果其中任意一点处存在紧致邻域。

定理 2.3.11 (局部紧致空间的性质)

1. 局部紧致 $+T_2 \Longrightarrow T_3$
2. 局部紧致 $+T_2+C_2 \Longrightarrow$ 仿紧
3. 任意一点处的紧致邻域构成邻域基。
4. 局部紧致空间的开子集是局部紧致子集。

2.3.4 仿紧性

定义 2.3.12 (局部有限覆盖)
称拓扑空间 X 的覆盖 $\mathscr{C}$ 是局部有限的，如果对于任意 $x \in X$，存在 x 的邻域 U，使得 $\{U \cap C \neq \varnothing : C \in \mathscr{C}\}$ 有限。 ♣

定义 2.3.13 (加细覆盖)
称拓扑空间 X 的覆盖 $\mathscr{C}$ 是覆盖 $\mathscr{C}_0$ 的加细覆盖，如果对于任意 $C \in \mathscr{C}$，存在 $C_0 \in \mathscr{C}_0$，使得成立 $C \subset C_0$。 ♣

定义 2.3.14 (开加细覆盖)
称拓扑空间 X 的覆盖 $\mathscr{C}_0$ 的加细覆盖 $\mathscr{C}$ 是开的，如果 $\mathscr{C}$ 是开覆盖。 ♣

定义 2.3.15 (仿紧性)
称拓扑空间为仿紧空间，如果其任意开覆盖存在局部有限的开加细覆盖。 ♣

定理 2.3.16 (仿紧空间的性质)
1. 紧致性 $\Longrightarrow$ 仿紧性
2. 度量 $\Longrightarrow$ 仿紧性
3. 仿紧性 $+T_2 \Longrightarrow T_4$ ♡

2.4 连通性

定义 2.4.1 (连通性)
称拓扑空间 X 为连通空间，如果成立如下命题之一。
1. X 不能分解为非空不交开集的并。
2. X 不能分解为非空不交闭集的并。
3. X 的既开又闭的子集仅为 $\varnothing$ 与 X。 ♣

定理 2.4.2 (连通空间的性质)
1. E^1 中的连通子集为区间。
2. 存在稠密连通子集的拓扑空间为连通空间。
3. 如果 X_0 为 X 的既开又闭子集，C 为 X 的连通子集，那么或 $C \subset X_0$，或 $C \cap X_0 = \varnothing$。
4. 如果 C 为 X 的连通子集，且 $C \subset Y \subset \overline{C}$，那么 $Y \subset X$ 为 X 的连通子集。
5. 如果 X 存在连通覆盖 $\mathscr{C}$，以及连通子集 A，使得对于任意 $C \in \mathscr{C}$，成立 $A \cap C \neq \varnothing$，那么 X 为连通空间。 ♡

定义 2.4.3 (连通分支)
称拓扑空间 X 的连通子集 C 为连通分支，如果对于任意 X 的连通子集 C'，成立或 $C' \subset C$，或 $C \cap C' = \varnothing$。 ♣

命题 2.4.4 (连通分支的性质)

1. 连通分支为极大连通子集。
2. 拓扑空间 X 的非空连通子集 $C \subset X$ 包含于唯一一个连通分支 $\mathscr{C} = \{C' \subset X : C'\text{连通}, C \cap C' \neq \varnothing\}$ 内。
3. 拓扑空间的连通分支两两不交。
4. 连通分支为闭集。

定义 2.4.5 (局部连通性)

称拓扑空间为局部连通空间，如果其中任意一点处的连通邻域构成邻域基。

注 局部连通空间的连通分支为开集。

注 连通 $\not\Rightarrow$ 局部连通：

$$\{(x, \sin(1/x)) : 0 < x < 1\} \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$$

2.5 道路连通性

定义 2.5.1 (道路)

定义拓扑空间 X 上的道路为连续映射 $a : I \to X$，其中 $a(0)$ 与 $a(1)$ 分别称为 a 的起点与终点，统称为端点。

定义 2.5.2 (点道路)

称道路 $a : I \to \{x\}$ 为点道路，记作 e_x。

定义 2.5.3 (闭路)

称拓扑空间 X 上的道路 $a : I \to X$ 为闭路，如果 $a(0) = a(1)$。

定义 2.5.4 (道路的逆)

定义拓扑空间 X 上的道路 $a : I \to X$ 的逆 $\overline{a} : I \to X$ 为 $\overline{a}(t) = a(1-t)$。

定义 2.5.5 (道路的积)

如果 $a(1) = b(0)$，那么定义拓扑空间 X 上的道路 $a : I \to X$ 与 $b : I \to X$ 的积为

$$\begin{aligned} ab : I &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto \begin{cases} a(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ b(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

定义 2.5.6 (道路连通性)

称拓扑空间 X 为道路连通空间，如果对于任意点 x, y，存在道路 $a : I \to X$，使得成立 $a(0) = x$ 且 $a(1) = y$。

注

1. 道路连通 $\Longrightarrow$ 连通

2. 连通 $\not\Longrightarrow$ 道路连通：

$$\{(x,\sin(1/x)) : 0 < x < 1\} \cup \{(0,y) : -1 \leq y \leq 1\}$$

定义 2.5.7 (道路连通等价关系)

定义拓扑空间 X 上的道路连通等价关系 $x \sim y \iff$ 存在道路 $a : I \to X$，使得成立 $a(0) = x$ 且 $a(1) = y$。♣

定义 2.5.8 (道路连通分支)

定义拓扑空间 X 关于道路连通等价关系 $\sim$ 的等价类为道路连通分支。♣

命题 2.5.9 (道路连通分支的性质)

1. 道路连通分支为极大道路连通子集。
2. 道路连通分支为连通子集。♠

定义 2.5.10 (局部道路连通性)

称拓扑空间为局部道路连通空间，如果其中任意一点处的道路连通邻域构成邻域基。♣

注 道路连通 $\not\Longrightarrow$ 局部道路连通：

$$\{(x,y) : x \in \mathbb{Q}\text{或}y = 0\}$$

命题 2.5.11

1. 局部道路连通空间的道路分支为既开又闭的连通分支。
2. 连通 + 局部道路连通 $\Longrightarrow$ 道路连通 ♠

第三章 商空间

3.1 常见曲面

图 3.1: 圆：D^2

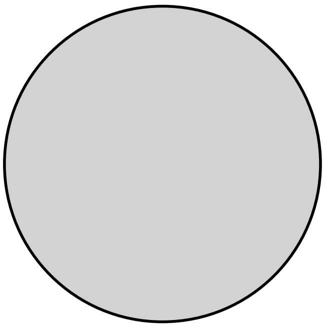


图 3.2: 圆周：S^1

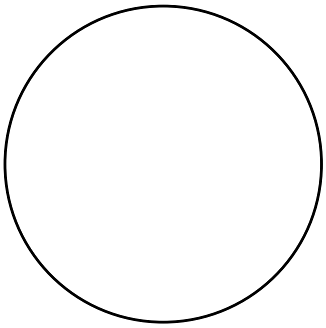


图 3.3: 平环

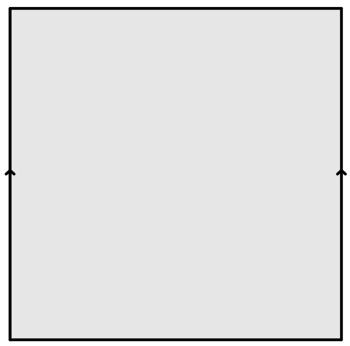


图 3.4: Möbius 带

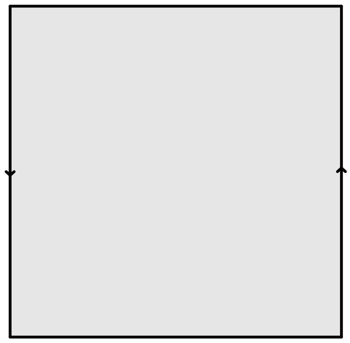


图 3.5: 环面：T^2

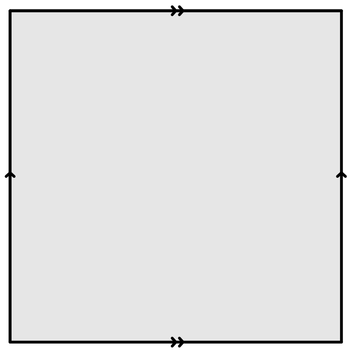


图 3.6: Klein 瓶：$2P^2$

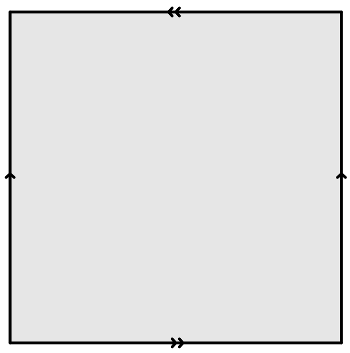


图 3.7: 射影平面：P^2

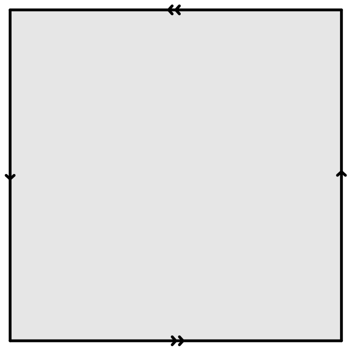
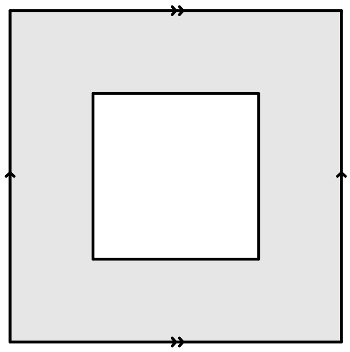


图 3.8: 环柄



3.2 商空间与商映射

定义 3.2.1 (商集)

定义集合 X 关于等价关系 $\sim$ 的商集为 $X/\sim$。特别的，定义集合 X 关于子集 A 的商集为 $X/A = X/\overset{A}{\sim}$，其中 $x_1 \overset{A}{\sim} x_2 \iff x_1 = x_2$ 或 $x_1, x_2 \in A$。♣

定义 3.2.2 (商拓扑)

定义拓扑空间 (X, τ) 关于等价关系 $\sim$ 的商拓扑为

$$\tilde{\tau} = \{V \subset X/\sim : \pi^{-1}(V) \in \tau\}$$

其中 $\pi : X \to X/\sim$ 为自然映射。♣

定义 3.2.3 (商空间)

定义拓扑空间 (X, τ) 关于等价关系 $\sim$ 的商空间为 $(X/\sim, \tilde{\tau})$。♣

定义 3.2.4 (商映射)

对于拓扑空间 X 与 Y，称满映射 $f : X \to Y$ 为商映射，如果对于任意 Y 的子集 B，成立 B 为 Y 的开集 $\iff f^{-1}(B)$ 为 X 的开集。♣

定理 3.2.5 (商映射的性质)

1. 自然映射 $\pi : X \to X/\sim$ 为商映射。
2. 对于拓扑空间 X, Y, Z, 如果 $f : X \to Y$ 为商映射, 那么映射 $g : Y \to Z$ 连续 $\iff$ 映射 $g \circ f : X \to Z$ 连续。
3. 如果 $f : X \to Y$ 为商映射, 那么 $X/\overset{f}{\sim} \cong Y$, 其中 $x_1 \overset{f}{\sim} x_2 \iff f(x_1) = f(x_2)$。
4. 连续且满的开映射为商映射; 连续且满的闭映射为商映射。
5. 如果 X 为紧致空间, Y 为 Hausdorff 空间, 那么连续满映射 $f : X \to Y$ 为商映射。
6. 商映射的复合为商映射。

♡

3.3 拓扑流形与闭曲面

3.3.1 拓扑流形

定义 3.3.1 (拓扑流形)

称 Hausdorff 空间 X 为 n 维拓扑流形, 如果对于任意点 x, 存在 x 的邻域 U, 使得成立或 $U \cong E^n$, 或 $U \cong E^n_+$, 其中 $E^n_+ = \{(x_1, \cdots, x_n) \in E^n : x_n \geq 0\}$。

♣

注

1. $E^n \ncong E^n_+$
2. $E^m \cong E^n \iff m = n$
3. 拓扑流形为局部道路连通且局部紧致的 C_1 空间。

定义 3.3.2 (内点)

对于 n 维拓扑流形 X, 称点 x 为内点, 如果存在 x 的开邻域 U, 使得成立 $U \cong E^n$。

♣

定义 3.3.3 (边界点)

对于 n 维拓扑流形 X, 称点 x 为边界点, 如果对于任意 x 的开邻域 U, 成立 $U \ncong E^n$。

♣

定义 3.3.4 (内部)

称拓扑流形 X 的内点全体为 X 的内部, 记作 X°。

♣

定义 3.3.5 (边界)

称拓扑流形 X 的边界点全体为 X 的边界, 记作 ∂X。

♣

命题 3.3.6

n 维拓扑流形的边界为无边界点的 $n-1$ 维拓扑流形。

♠

3.3.2 闭曲面

定义 3.3.7 (曲面)

称二维流形为曲面。

♣

示例 3.1 E^2, D^2, S^2, T^2, P^2 以及平环、Möbius 带、Klein 瓶为曲面。

定义 3.3.8 (闭曲面)

称无边界点的紧致连通曲面为闭曲面。♣

示例 3.2

1. S^2, T^2, P^2 以及 Klein 瓶为闭曲面。
2. E^2, D^2 以及平环、Möbius 带不为闭曲面。
3. 如果 Γ 为偶数边多边形，那么成对粘接边，可得闭曲面。

定义 3.3.9 (安环柄的球面)

称安 n 个环柄的球面为亏格为 n 的可定向闭曲面，记作 nT^2。♣

定义 3.3.10 (安交叉帽的球面)

称安 n 个 Möbius 带的球面为亏格为 n 的不可定向闭曲面，记作 nP^2。♣

定义 3.3.11 (闭曲面的标准表示)

$$nT^2 : a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}\cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$$
$$mP^2 : a_1a_1a_2a_2\cdots a_ma_m$$
♣

定理 3.3.12 (闭曲面分类定理)

1. 闭曲面或为 nT^2，或为 mP^2，其中 $n \in \mathbb{N}$ 且 $m \in \mathbb{N}^*$。
2. $\{nT^2 : n \in \mathbb{N}\} \cap \{mP^2 : m \in \mathbb{N}^*\} = \varnothing$
3. $m = n \iff mT^2 = nT^2 = \iff mP^2 = nP^2$
4. 如果闭曲面的多边形表示存在同向边时，该闭曲面为 $(l/2 - k + 1)P^2$；否则为 $((l/2 - k + 1)/2)T^2$。其中 l 为边数，k 为顶点类数。

♡

定义 3.3.13 (连通与)

将两个闭曲面挖去一个圆，然后将洞口对接，所得闭曲面称为原来两个闭曲面的连通与，记作 $M\#N$。♣

定理 3.3.14 (闭曲面的连通与)

1. $mT^2\#nT^2 = (m + n)T^2$
2. $mP^2\#nP^2 = (m + n)P^2$
3. $mT^2\#nP^2 = (2m + n)P^2$

♡

Listing 3.1: 闭曲面分类定理主函数

```
clear; clc

% 输入闭曲面的多边形表示字符串
% 例如输入:ab-1a-1cdcbd
string = input('请输入字符串:', 's');

% 调用函数
[type, edgeNumber, nodeNumber] = closedSurfaceType(string);

% 输出
```

```
fprintf('边数为: %d\n', edgeNumber)
fprintf('节点类数为: %d\n', nodeNumber)
fprintf('闭曲面类型为: %s\n', type)
```

Listing 3.2: 闭曲面类型函数

```
function [type, edgeNumber, nodeNumber] = closedSurfaceType(string)

    % 名称:闭曲面类型
    % 输入:
    %     string:字符串
    % 输出:
    %     type:闭曲面类型
    %     edgeNumber:边数
    %     nodeNumber:节点类数
    % 说明:
    %     输入为字符串,类型为:
    %     一个字母+其他类型(或没有)+一个字母+其他类型(或没有)+...
    %     相同字母仅输入且输入两次
    %     例如:ab^-1a0cdcbd

    %% 函数

    % 定义多边形表示矩阵
    polygonsRepresentMatrice = stringToMatrix(string);

    % 定义边数
    edgeNumber = size(polygonsRepresentMatrice, 2);

    % 判断是否由同向对
    sameDirectionPairs = 0;
    for i = 1: edgeNumber - 1
        for j = i + 1: edgeNumber
            if all(polygonsRepresentMatrice(:, i) == polygonsRepresentMatrice(:, j))
                sameDirectionPairs = 1;
            end
        end
    end

    % 计算节点类数
    nodeNumber = nodeClass(string);

    % 计算闭曲面类型
    if sameDirectionPairs == 1
        n = (edgeNumber - 2 * nodeNumber + 2) / 2;
        type = [num2str(n), 'P^2'];
    else
        n = (edgeNumber - 2 * nodeNumber + 2) / 4;
        type = [num2str(n), 'T^2'];
```

```
    end

end
```

Listing 3.3: 节点类函数

```
function [equivalentClassNumber, equivalentClassMatrix] = nodeClass(string)

    % 名称:节点类
    % 输入:
    %     string:字符串
    % 输出:
    %     equivalentClassNumber:闭曲面的顶点类数
    %     equivalentClassMatrix:闭曲面的顶点类矩阵
    % 说明:
    %     输入为字符串,类型为:
    %     一个字母+其他类型(或没有)+一个字母+其他类型(或没有)+...
    %     相同字母仅输入且输入两次
    %     例如:ab^-1a0cdcbd

    %% 准备

    % 定义多边形表示矩阵
    polygonsRepresentMatrice = stringToMatrix(string);

    % 定义节点数量
    nodeNumber = size(polygonsRepresentMatrice, 2);

    % 定义节点矩阵
    nodeMatrix = [polygonsRepresentMatrice' zeros(nodeNumber, 2)];
    for n = 1: nodeNumber
        if nodeMatrix(n, 2) == 0
            nodeMatrix(n, 3: 4) = [n mod(n-2, nodeNumber) + 1];
        else
            nodeMatrix(n, 3: 4) = [mod(n-2, nodeNumber) + 1 n];
        end
    end

    %% 计算顶点类数和顶点类矩阵

    equivalentClassNumber = 0;                      % 初始化等价类数目
    allNode = 1: nodeNumber;                        % 全部节点
    selectedNode = zeros(1, nodeNumber);            % 初始化已选节点
    selectedNodeNumber = 0;                         % 初始化已选节点数目
    equivalentClassMatrix = [];                     % 初始化等价类矩阵

    while selectedNodeNumber < nodeNumber % 设置while循环,直至选取全部节点

        unselectedNode = setdiff(allNode, selectedNode); % 重置未选节点
```

```
firstNode = unselectedNode(1);             % 首节点
currentSelectedNode = zeros(1, nodeNumber); % 初始化已选节点
currentSelectedNodeNumber = 0;             % 初始化已选节点数目

for n = 1: nodeNumber % 循环寻找首节点所在边和方向
    judge = 1;
    for direc = 3: 4 % 3表示前节点,4表示后节点
        if nodeMatrix(n, direc) == firstNode
            firstedge = n;              % 首边
            firstType = nodeMatrix(n, 1); % 首边类型
            firstDirection = direc;    % 首节点位于首边的方向
            judge = 0;
            break
        end
    end
    if judge == 0
        break
    end
end

currentNode = 0;             % 初始化迭代节点
currentedge = firstedge;     % 初始化迭代边
currentType = firstType;     % 初始化迭代边类型
currentDirection = firstDirection; % 初始化迭代节点位于迭代边的方向

while firstNode ~= currentNode % 直至所选节点围成圈为止

    % 寻找同类型的边
    for n = 1: nodeNumber
        if n ~= currentedge && nodeMatrix(n, 1) == currentType
            sameTypeedge = n; % 设置同类型的边
            break
        end
    end
    currentNode = nodeMatrix(sameTypeedge, currentDirection); % 更新迭代节点

    % 寻找迭代节点所在的其他边
    for direc = 3: 4 % 3表示前节点,4表示后节点
        if nodeMatrix(mod(sameTypeedge-2, nodeNumber)+1, direc) == currentNode % 如果迭代节点为
            前边的节点
            currentedge = mod(sameTypeedge - 2, nodeNumber) + 1; % 更新迭代边
            currentType = nodeMatrix(currentedge, 1);      % 更新迭代边类型
            currentDirection = direc;                      % 更新迭代节点位于迭代边的方向
        end
    end
    for direc = 3: 4 % 3表示前节点,4表示后节点
        if nodeMatrix(mod(sameTypeedge, nodeNumber)+1, direc) == currentNode % 如果迭代节点为后
            边的节点
            currentedge = mod(sameTypeedge, nodeNumber) + 1; % % 更新迭代边
```

```
                currentType = nodeMatrix(currentedge, 1); % 更新迭代边类型
                currentDirection = direc;                 % 更新迭代节点位于迭代边的方向
            end
        end

        currentSelectedNodeNumber = currentSelectedNodeNumber + 1; % 更新迭代已选节点数目
        selectedNodeNumber = selectedNodeNumber + 1;          % 更新已选节点数目
        currentSelectedNode(currentSelectedNodeNumber) = currentNode; % 更新迭代已选节点
        selectedNode(selectedNodeNumber) = currentNode;       % 更新已选节点

    end

    for n = 1: nodeNumber % 修改已选节点矩阵的呈现
        if n ~= nodeNumber
            if currentSelectedNode(n + 1) == 0
                currentSelectedNode = [currentSelectedNode(n) currentSelectedNode];
                currentSelectedNode(n + 1) = [];
                break
            end
        else
            currentSelectedNode = [currentSelectedNode(nodeNumber) currentSelectedNode];
            currentSelectedNode(nodeNumber + 1) = [];
        end
    end

    equivalentClassNumber = equivalentClassNumber + 1;             % 更新等价类数目
    equivalentClassMatrix(equivalentClassNumber, :) = currentSelectedNode; % 更新等价类矩阵

end

% 去除等价类矩阵的零列
for n = nodeNumber: -1: 1
    if sum(equivalentClassMatrix(:, n)) == 0
        equivalentClassMatrix(:, n) = [];
    else
        break
    end
end

end
```

Listing 3.4: 字符串转为矩阵函数

```
function matrix = stringToMatrix(string)

    % 名称:字符串转为矩阵
    % 输入:
    %     string:字符串
    % 输出:
```

```
%     matrix:矩阵
% 说明:
%     输入为字符串,类型为:
%     一个字母+其他类型(或没有)+一个字母+其他类型(或没有)+...
%     相同字母仅输入且输入两次
%     例如:ab^-1a0cdcbd
%
%     输出为2行矩阵
%     第一行代表边类型
%     第二行代表边方向
%     例如输入:
%             a b^{-1} a^{-1} c d c b d
%     输出矩阵为:
%             1  2     1    3 4 3 2 4
%             0  1     1    0 0 0 0 0


%% 函数
% 使用正则表达式提取字母
letterArray = regexp(string, '[a-zA-Z]', 'match');

% 创建一个结构体来存储字母和对应的值
letterStruct = struct();

% 初始化一个计数器
count = 1;
% 遍历字母数组
for n = 1: length(letterArray)
    % 获取当前字母
    letter = letterArray{n};
    % 检查字母是否已经在结构体中
    if isfield(letterStruct, letter)
        % 字母已存在, 不需要重复存储
        continue;
    end
    % 将字母存储在结构体中, 并分配一个唯一的值
    letterStruct.(letter) = count;
    % 增加计数器
    count = count + 1;
end

% 初始化矩阵
matrix = zeros(2, length(string));
% 转化为矩阵
for n = 1: length(string)
    if isletter(string(n))
        matrix(1, n) = letterStruct.(string(n));
        if n < length(string) && ~isletter(string(n+1))
            matrix(2, n) = 1;
```

```
            end
        end
    end
    % 找到全是0的列的索引
    zeroColumns = all(matrix == 0, 1);
    % 删除全是0的列
    matrix = matrix(:, ~zeroColumns);

end
```

第四章 基本群

4.1 同伦映射

4.1.1 同伦

定义 4.1.1 (同伦)

对于拓扑空间 X 与 Y，称连续映射 $f,g:X\to Y$ 同伦，并记做 $f\overset{H}{\simeq}g$，或 $H:f\simeq g$，如果存在连续映射 $H:X\times I\to Y$，使得成立

$$H(x,0)=f(x),\qquad H(x,1)=g(x),\qquad x\in X$$

同伦关系为等价关系，记 $X\to Y$ 上的连续映射在同伦关系下的等价类为 $[X,Y]$。♣

示例 4.1 对于拓扑空间 X，以及凸集 $Y\subset E^n$，定义连续映射 $f,g:X\to Y$ 的直线同伦为

$$\begin{aligned}H:X\times I&\longrightarrow Y\\(x,t)&\longmapsto(1-t)f(x)+tg(x)\end{aligned}$$

示例 4.2 对于拓扑空间 X，如果连续映射 $f,g:X\to S^n$ 成立对于任意 $x\in X$，成立 $f(x)+g(x)\neq0$，那么 f 与 g 间的同伦为

$$\begin{aligned}H:X\times I&\longrightarrow S^n\\(x,t)&\longmapsto\frac{(1-t)f(x)+tg(x)}{\|(1-t)f(x)+tg(x)\|}\end{aligned}$$

示例 4.3 对于拓扑空间 X，如果连续映射 $f,g:X\to S^1$ 成立对于任意 $x\in X$，成立 $f(x)+g(x)=0$，那么 f 与 g 间的同伦为

$$\begin{aligned}H:X\times I&\longrightarrow S^1\\(x,t)&\longmapsto\frac{\mathrm{e}^{it\pi}}{f(x)}\end{aligned}$$

命题 4.1.2 (同伦的复合)

如果 $f_0\simeq f_1:X\to Y$，且 $g_0\simeq g_1:Y\to Z$，那么 $g_0\circ f_0\simeq g_1\circ f_1:X\to Z$。♠

4.1.2 相对同伦

定义 4.1.3 (相对同伦)

对于拓扑空间 X 与 Y，称连续映射 $f,g:X\to Y$ 相对于 $A\subset X$ 同伦，并记做 $f\overset{H}{\simeq}g\ \mathrm{rel}A$，或 $H:f\simeq g\ \mathrm{rel}A$，如果存在连续映射 $H:X\times I\to Y$，使得成立

$$\begin{aligned}&H(x,0)=f(x),\qquad &&H(x,1)=g(x),\qquad &&x\in X\\&H(a,t)=f(a),\qquad &&H(a,t)=g(a),\qquad &&(a,t)\in A\times I\end{aligned}$$

相对于 A 的同伦关系为等价关系。♣

命题 4.1.4 (相对同伦的复合)

如果 $f_0\simeq f_1\ \mathrm{rel}A$，且 $g_0\simeq g_1\ \mathrm{rel}A$，那么 $g_0\circ f_0\simeq g_1\circ f_1\ \mathrm{rel}A$。♠

4.2 基本群

4.2.1 定端同伦

定义 4.2.1 (定端同伦)

称道路 $a,b:I\to X$ 定端同伦，并记做 $a\simeq b$，如果存在连续映射 $H:I\times I\to X$，使得成立

$$
\begin{aligned}
&H(s,0)=a(s), && H(s,1)=b(s), && s\in I\\
&H(0,t)=a(0)=b(0), && H(1,t)=a(1)=b(1), && t\in I
\end{aligned}
$$

定端同伦关系为等价关系。

命题 4.2.2 (定端同伦的性质)

1. 如果 $a\simeq b$，那么 $\overline{a}\simeq\overline{b}$。
2. 如果 $a_1\simeq b_1$，且 $a_2\simeq b_2$，同时 $a_1(1)=a_2(0)$，那么 $b_1(1)=b_2(0)$，且 $a_1a_2\simeq b_1b_2$。
3. 如果 $a(1)=b(0)$，且 $b(1)=c(0)$，那么 $(ab)c\simeq a(bc)$。
4. 对于连续映射 $f:X\to Y$，道路 $a,b:I\to X$，如果 $a\simeq b$，那么 $f\circ a\simeq f\circ b$。
5. 对于连续映射 $f:X\to Y$，道路 $a,b:I\to X$，如果 $a(1)=b(0)$，那么 $(f\circ a)(1)=(f\circ b)(0)$，且 $(f\circ a)(f\circ b)=f\circ(ab)$。
6. 对于连续映射 $f:X\to Y$，道路 $a:I\to X$，成立 $\overline{f\circ a}=f\circ\overline{a}$。

4.2.2 道路类

定义 4.2.3 (道路类)

称道路 $a:I\to X$ 在定端同伦下的等价类为道路类，记作 $[a]$。拓扑空间 X 的道路类全体记作 $[X]$。

定义 4.2.4 (道路类的逆)

定义拓扑空间 X 上的道路类 α 的逆为 $\alpha^{-1}=[\overline{a}]$，其中 $a\in\alpha$。

定义 4.2.5 (道路类的积)

如果 $\alpha(1)=\beta(0)$，那么定义拓扑空间 X 上的道路类 α 与 β 的积为 $\alpha\beta=[ab]$，其中 $a\in\alpha,b\in\beta$，且 $a(1)=b(0)$。

命题 4.2.6 (道路类的性质)

1. $(\alpha^{-1})^{-1}=\alpha$
2. $(\alpha\beta)^{-1}=\beta^{-1}\alpha^{-1}$
3. $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$
4. 令 $e_0=[e_{\alpha(0)}],e_1=[e_{\alpha(1)}]$，则

$$\alpha\alpha^{-1}=e_0,\quad \alpha^{-1}\alpha=e_1,\quad e_0\alpha=\alpha e_1=\alpha$$

4.2.3 基本群

定义 4.2.7 (基本群)

定义拓扑空间 X 的基本群为 $\pi_1(X,x_0)=\{[a]\in[X]\mid a[0]=a[1]=x_0\}$。

1. 运算：积
2. 单位元：$e=[e_{x_0}]$
3. 逆元：α^{-1}
4. 结合律：$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$

示例 4.4 S^n 的基本群:

$$\pi_1(S^n)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & n=1\\ \{e\}, & n\geq 2\end{cases}$$

示例 4.5 T^n 的基本群：

$$T^n=\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n\text{个}},\qquad \pi_1(T^n)=\mathbb{Z}^n$$

定义 4.2.8 (连续映射诱导的基本群同态映射)

对于连续映射 $f:X\to Y$，如果 $x_0\in X$ 且 $y_0=f(x_0)\in Y$，那么定义由 f 诱导的基本群同态映射为

$$\begin{aligned} f_\pi:\pi_1(X,x_0)&\longrightarrow\pi_1(Y,y_0)\\ [a]&\longmapsto[f\circ a]\end{aligned}$$

定理 4.2.9 (连续映射诱导的基本群同态映射的复合)

对于连续映射 $f:X\to Y$ 与 $g:Y\to Z$，如果 $x_0\in X, y_0=f(x_0)\in Y, z_0=g(y_0)\in Z$，那么

$$(g\circ f)_\pi=g_\pi\circ f_\pi:\pi_1(X,x_0)\to\pi_2(Z,z_0)$$

定理 4.2.10 (同胚映射诱导的基本群同态映射)

对于同胚映射 $f:X\to Y$，如果 $x_0\in X$ 且 $y_0=f(x_0)\in Y$，那么由 f 诱导的基本群同态映射 $f_\pi:\pi_1(X,x_0)\to\pi_1(Y,y_0)$ 为群同构映射。

定理 4.2.11 (同伦映射诱导的基本群同态间的关系)

对于同伦 $f\overset{H}{\simeq}g:X\to Y$，取 $x_0\in X$，记 $y_0=f(x_0), y_1=g(x_0)$，那么 $w(t)=H(x_0,t)$ 为 y_0 到 y_1 的道路。记 $\omega=[w]$，那么 $\omega_\#:\pi_1(Y,y_0)\to\pi_1(Y,y_1)$ 为群同构映射。由如上假设，成立 $g_\pi=\omega_\#\circ f_\pi$，即成立如下交换图。

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(Y,y_0) \arrow[dd, "\omega_\#"] \\
\pi_1(X,x_0) \arrow[ur, "f_\pi"] \arrow[dr, "g_\pi"'] & \\
 & \pi_1(Y,y_1)
\end{tikzcd}$$

定理 4.2.12 (基本群与基点的关系)

对于拓扑空间 X，如果 x_0 与 x_1 道路连通，那么取 ω 为从 x_0 到 x_1 的道路类，可定义群同构映射

$$\begin{aligned} \omega_{\#}: \pi_1(X,x_0) &\longrightarrow \pi_1(X,x_1) \\ \alpha &\longmapsto \omega^{-1}\alpha\omega \end{aligned}$$

因此 $\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X,x_1)$。

定理 4.2.13 (基本群与道路连通分支的关系)

对于拓扑空间 X 的道路连通分支 A，$x_0 \in A$，由包含映射 $i: A \to X$ 诱导的基本群同态映射 $i_\pi: \pi_1(A,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$ 为群同构映射，因此 $\pi_1(A,x_0) \cong \pi_1(X,x_0)$。

定义 4.2.14 (单连通空间)

称具有平凡基本群的道路连通空间为单连通空间。

示例 4.6 E^n 为单连通空间。

示例 4.7 S^n 为单连通空间，其中 $n \geq 2$。

4.3 基本群的同伦不变性

4.3.1 同伦等价

定义 4.3.1 (同伦等价)

称拓扑空间 X 与 Y 同伦等价，并记做 $X \simeq Y$，如果存在连续映射 $f: X \to Y$ 与 $g: Y \to X$，使得成立 $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$，且 $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$。

示例 4.8 $E^1 \simeq E^2$

证明 构造映射

$$\begin{aligned} f: E^1 &\longrightarrow E^2 \\ x &\longmapsto (x,0) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g: \quad E^2 &\longrightarrow E^1 \\ (x,y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

从而 $g \circ f = \mathbb{1}_{E^1}$，且

$$\begin{aligned} f \circ g: \quad E^2 &\longrightarrow E^2 \\ (x,y) &\longmapsto (x,0) \end{aligned}$$

构造

$$\begin{aligned} H: E^2 \times I &\longrightarrow E^2 \\ (x,y,t) &\longmapsto (x,ty) \end{aligned}$$

因此

$$H(x,y,0) = (f \circ g)(x,y), \qquad H(x,y,1) = \mathbb{1}_{E^2}(x,y), \qquad (x,y) \in E^2$$

那么 $g \circ f \simeq \mathbb{1}_{E^2}$，进而 $E^1 \simeq E^2$。

示例 4.9 $X \times I \simeq X$

证明 构造

$$\begin{aligned} f: X \times I &\longrightarrow X \\ (x,t) &\longmapsto x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g: X &\longrightarrow X \times I \\ x &\longmapsto (x,0) \end{aligned}$$

从而 $f\circ g=\mathbb{1}_X$，且

$$\begin{aligned} g\circ f: X\times I &\longrightarrow X\times I \\ (x,t) &\longmapsto (x,0) \end{aligned}$$

构造

$$\begin{aligned} H: X\times I\times I &\longrightarrow X\times I \\ (x,t,s) &\longmapsto (x,ts) \end{aligned}$$

因此

$$H(x,t,0)=(g\circ f)(x,y),\qquad H(x,t,1)=\mathbb{1}_{X\times I}(x,y),\qquad (x,y)\in X\times I$$

那么 $g\circ f=\mathbb{1}_{X\times I}$，进而 $X\times I\simeq X$。

定理 4.3.2 (同伦等价诱导群同构映射)

如果 $f:X\to Y$ 为同伦等价，$x_0\in X$，$y_0=f(x_0)\in Y$，那么 $f_\pi:\pi_1(X,x_0)\to\pi_2(Y,y_0)$ 为群同构映射。♡

定理 4.3.3

如果 $X\simeq Y$，且 X,Y 道路连通，那么 $\pi_1(X)\simeq\pi_1(Y)$。♡

4.3.2 形变收缩

定义 4.3.4 (形变收缩核)

称拓扑空间 X 的子空间 $A\subset X$ 为 X 的形变收缩核，如果存在连续映射 $r:X\to A$，使得成立 $r\circ i=\mathbb{1}_A$，且 $i\circ r\simeq\mathbb{1}_X$，其中 $i:A\to X$ 为包含映射。♣

定义 4.3.5 (形变收缩)

对于拓扑空间 X 的子空间 $A\subset X$，称连续映射 $H:X\times I\to X$ 为 $X\to A$ 的形变收缩，如果

$$\begin{aligned} H(x,0)&=x, && x\in X \\ H(x,1)&\in A, && x\in X \\ H(a,1)&=a, && a\in A \end{aligned}$$

♣

定理 4.3.6 (形变收缩核 $\iff$ 形变收缩)

1. 如果 A 为 X 的形变收缩核，那么存在映射 $r:X\to A$，使得成立 $r\circ i=\mathbb{1}_A$，且 $i\circ r=\mathbb{1}_X$，其中 $i:A\to X$ 为包含映射。考虑同伦 $H:\mathbb{1}_X\simeq i\circ r$，成立
$$\begin{aligned} H(x,0)&=x, && \forall x\in X \\ H(x,1)&\in A, && \forall x\in X \\ H(a,1)&=a, && \forall a\in A \end{aligned}$$
因此 $H:X\times I\to X$ 为 $X\to A$ 的形变收缩。
2. 如果 $H:X\times I\to X$ 为 $X\to A$ 的形变收缩，那么定义映射 $r:X\to A,\quad x\mapsto H(x,1)$，那么 $r\circ i=\mathbb{1}_A$，且 $i\circ r=\mathbb{1}_X$，其中 $i:A\to X$ 为包含映射，因此 A 为 X 的形变收缩核。♡

定义 4.3.7 (强形变收缩与强形变收缩核)

对于拓扑空间 X 的子空间 $A \subset X$，称连续映射 $H : X \times I \to X$ 为 $X \to A$ 的强形变收缩，A 为 X 的强收缩核，如果

$$\begin{aligned} &H(x,0) = x, && x \in X \\ &H(x,1) \in A, && x \in X \\ &H(a,t) = a, && (a,t) \in A \times I \end{aligned}$$

示例 4.10 对于 $r \in I$，r-切片 $X \times \{r\}$ 为乘积空间 $X \times I$ 的强形变收缩核，强形变收缩为

$$\begin{aligned} H : X \times I \times I &\longrightarrow X \times I \\ (x,s,t) &\longmapsto (x,(1-t)s+rt) \end{aligned}$$

示例 4.11 S^{n-1} 为 $E^n \setminus \{0\}$ 的强形变收缩核，强形变收缩为

$$\begin{aligned} H : E^n \setminus \{0\} \times I &\longrightarrow E^n \setminus \{0\} \\ (x,t) &\longmapsto (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|} \end{aligned}$$

示例 4.12 拓扑锥 $X \times I/X \times \{1\}$ 以锥顶为强形变收缩核。

示例 4.13 Möbius 带以腰圆为强形变收缩核。

示例 4.14 环面 T^2 去掉一点后，以一个经圆与一个纬圆的并集为强形变收缩核。

示例 4.15 任意闭曲面去掉一点后，可强形变收缩为一族圆周的一点并

$$\bigvee_{k=1}^{N} S^1, \qquad N = \begin{cases} 2n, & nT^2 \\ m, & mP^2 \end{cases}$$

4.3.3 可缩空间

定义 4.3.8 (可缩空间)

称与单点空间同伦等价的拓扑空间为可缩空间。

示例 4.16 E^n 中的凸集为可缩空间。

命题 4.3.9

如果 X 为可缩空间，那么对于任意 $x \in X$，x 为 X 的形变收缩核。

4.4 基本群的计算与应用

4.4.1 Van-Kampen 定理

定理 4.4.1 (Van-Kampen 定理)

如果拓扑空间 X 可分解为开集并 $X = X_1 \sqcup X_2$，并且非空交 $X_0 = X_1 \cap X_2$ 为道路连通空间，令包含映射 $i_1 : X_0 \to X_1$ 以及 $i_2 : X_0 \to X_2$，那么对于任意 $x_0 \in X$，成立

$$\pi_1(X,x_0) \cong \frac{\pi_1(X_1,x_0) * \pi_1(X_2,x_0)}{[\{i_{1_\pi}(\alpha) i_{2_\pi}(\alpha^{-1}) : \alpha \in \pi_1(X_0,x_0)\}]}$$

推论 4.4.2

如果拓扑空间 X 可分解为闭集并 $X = X_1 \cup X_2$，并且非空交 $X_0 = X_1 \cap X_2$ 为 X_1 与 X_2 的开邻域的强形变收缩核，记包含映射 $i_1 : X_0 \to X_1$ 以及 $i_2 : X_0 \to X_2$，那么对于任意 $x_0 \in X$，成立

$$\pi_1(X, x_0) \cong \frac{\pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0)}{[\{i_{1_\pi}(\alpha) i_{2_\pi}(\alpha^{-1}) : \alpha \in \pi_1(X_0, x_0)\}]}$$

♡

推论 4.4.3

如果拓扑空间 X 可分解为开集并 $X = X_1 \cup X_2$，并且非空交 $X_0 = X_1 \cap X_2$ 为单连通空间，那么对于任意 $x_0 \in X$，成立

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X_1, x_0) * \pi_1(X_2, x_0)$$

♡

推论 4.4.4

如果拓扑空间 X 可分解为开集并 $X = X_1 \cup X_2$，并且非空交 $X_0 = X_1 \cap X_2$ 为道路连通空间，同时 X_2 为单连通空间，记包含映射 $i_1 : X_0 \to X_1$，那么对于任意 $x_0 \in X$，成立

$$\pi_1(X, x_0) \cong \frac{\pi_1(X_1, x_0)}{\operatorname{Im} i_{1_\pi}}$$

♡

4.4.2 基本群的应用

示例 4.17 圆束的基本群：

$$\pi\left(\bigvee_{k=1}^{n} S^1\right) = \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n \text{ times}}$$

定理 4.4.5 (Brouwer 不动点定理)

如果 $f : D^n \to D^n$ 为连续映射，那么存在 $x \in D^n$，使得成立 $f(x) = x$。

♡

定理 4.4.6 (代数基本定理)

$\mathbb{C}$ 上的非零次一元多项式存在根。

♡

定理 4.4.7 (Jordan 曲线定理)

如果 J 为 E^2 上的 Jordan 曲线，即 $J \cong S^1$，那么 $E^2 \setminus J$ 存在且仅存在两个连通分支，且其均以 J 为边界。♡