设V是F上的向量空间，$v_1,v_2,\dots,v_m$在V中线性无关，且$w\in V$。证明：

$$\dim span(v_1+w,v_2+w,\dots,v_m+w)\geq m-1$$

其中$m\in N^*$

证明：首先，m=1 当然是平凡解，下设$m\geq 2$。

其次，我们来证明一个引理：对于$a_1,a_2,\dots,a_n\in F$，

$$\begin{vmatrix}1+a_1 & a_1 & \cdots & a_1\\ a_2 & 1+a_2 & \cdots & a_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n & a_n & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}=1+a_1+a_2+\cdots+a_n$$

引理的证明：首先将行列式的第i列减去第$i+1$列，其中$i=1,2,\dots,n-1$。操作后行列式变为

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & a_1\\ -1 & 1 & \cdots & 0 & a_2\\ 0 & -1 & 1 & 0 & a_3\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1+a_n\end{vmatrix}$$

接着将行列式的第$i+1$行加上第i行，其中$i=1,2,\dots,n-1$。操作后行列式变为

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & a_1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_3\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+a_n\end{vmatrix}$$

此时行列式成为上三角形行列式，行列式的值显然为$1+a_1+a_2+\cdots+a_n$。引理得证！

下面回到原命题。

I 当$w\in span(v_1,v_2,\dots,v_m)$时，设

$$w=a_1v_1+a_2v_2+\cdots a_mv_m \tag{1}$$

其中$a_1,a_2,\dots,a_m\in F$。

下面考察$v_1+w,v_2+w,\dots,v_m+w$的线性相关性。令

$$b_1(v_1+w)+b_2(v_2+w)+\cdots+b_m(v_m+w)=0 \tag{2}$$

其中$b_1,b_2,\dots,b_m\in F$。

将(1)代入(2)并整理，得

$$\sum_{k=1}^{m}\left(b_k+a_k\sum_{i=1}^{m}b_i\right)v_k=0 \tag{3}$$

由于$v_1,v_2,\dots,v_m$线性无关，因此由(3)得

$$\begin{cases}(1+a_1)b_1+a_1b_2+\cdots+a_1b_m=0\\ a_2b_1+(1+a_2)b_2+\cdots+a_2b_m=0\\ \qquad\vdots\\ a_mb_1+a_mb_2+\cdots+(1+a_m)b_m=0\end{cases} \tag{4}$$

注意到(4)是关于$b_1,b_2,\dots,b_m$的m元齐次线性方程组，考察其系数行列式

$$\begin{vmatrix}1+a_1 & a_1 & \cdots & a_1\\ a_2 & 1+a_2 & \cdots & a_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_m & a_m & \cdots & 1+a_m\end{vmatrix} \tag{5}$$

由引理知该行列式值为

$$1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m \tag{6}$$

(i) 当

$$1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m \neq 0 \tag{7}$$

由 Cramer 法则，此时(4)仅有零解，于是(4) $\Rightarrow$

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0 \tag{8}$$

进而$v_1 + w, v_2 + w, \ldots, v_m + w$线性无关，于是

$$\dim span(v_1 + w, v_2 + w, \ldots, v_m + w) = m \geq m - 1 \tag{9}$$

(ii) 当

$$1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 0 \tag{10}$$

这说明(4)有非零解，进而$v_1 + w, v_2 + w, \ldots, v_m + w$线性相关。由(10)不妨设$a_1 \neq 0$。下面考察$v_2 + w, \ldots, v_m + w$的线性相关性。令

$$c_2(v_2 + w) + \cdots + c_m(v_m + w) = 0 \tag{11}$$

将(1)代入(12)并整理，得

$$\left(a_1 \sum_{i=2}^{m} c_i\right) v_1 + \sum_{k=2}^{m} \left(c_k + a_k \sum_{i=2}^{m} c_i\right) v_k = 0 \tag{12}$$

由于$v_1, v_2, \ldots, v_m$线性无关，因此由(13)得

$$\begin{cases} a_1 c_2 + a_1 c_3 + \cdots + a_1 c_m = 0 \\ (1 + a_2) c_2 + a_2 c_3 + \cdots + a_2 c_m = 0 \\ a_3 c_2 + (1 + a_3) c_3 + \cdots + a_3 c_m = 0 \\ \vdots \\ a_m c_2 + a_m c_3 + \cdots + (1 + a_m) c_m = 0 \end{cases} \tag{13}$$

记

$$\begin{cases} a_1 c_2 + a_1 c_3 + \cdots + a_1 c_{m-1} + a_1 c_m = 0 \\ (1 + a_2) c_2 + a_2 c_3 + \cdots + a_2 c_{m-1} + a_2 c_m = 0 \\ a_3 c_2 + (1 + a_3) c_3 + \cdots + a_3 c_{m-1} + a_3 c_m = 0 \\ \vdots \\ a_{m-1} c_2 + a_{m-1} c_3 + \cdots + (1 + a_{m-1}) c_{m-1} + a_{m-1} c_m = 0 \end{cases} \tag{14}$$

(14)是关于$c_2, c_3, \ldots, c_m$的$m - 1$元齐次线性方程组，考察其系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ 1 + a_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ a_3 & 1 + a_3 & \cdots & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-1} & \cdots & 1 + a_{m-1} & a_{m-1} \end{vmatrix} \tag{15}$$

由引理知

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ 1 + a_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ a_3 & 1 + a_3 & \cdots & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-1} & \cdots & 1 + a_{m-1} & a_{m-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{m-2} \begin{vmatrix} 1 + a_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ a_3 & 1 + a_3 & \cdots & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-1} & \cdots & 1 + a_{m-1} & a_{m-1} \\ a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{m-2}\left(\begin{vmatrix} 1+a_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ a_3 & 1+a_3 & \cdots & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-1} & \cdots & 1+a_{m-1} & a_{m-1} \\ a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & 1+a_1 \end{vmatrix}\right. \\
&\qquad\left. - \begin{vmatrix} 1+a_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ a_3 & 1+a_3 & \cdots & a_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-1} & \cdots & 1+a_{m-1} & a_{m-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1+0 \end{vmatrix}\right) \\
&= (-1)^{m-2}\big((1+a_1+a_2+\cdots+a_{m-1})-(1+a_2+\cdots+a_{m-1})\big) \\
&= (-1)^{m-2}a_1 \\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

由 Cramer 法则，这说明(14)仅有零解。又满足(13)的解一定满足(14)，而(14)显然有零解，于是(14)仅有零解。于是(13)⇒

$$c_2 = c_3 = \cdots = c_m = 0 \tag{16}$$

进而$v_2+w,\dots,v_m+w$线性无关，于是

$$\dim span(v_1+w, v_2+w, \dots, v_m+w) = m-1 \geq m-1 \tag{17}$$

II 当$w \notin span(v_1,v_2,\dots,v_m)$时，因为设$v_1,v_2,\dots,v_m$在$V$中线性无关，那么$v_1,v_2,\dots,v_m$可扩充为$v_1,v_2,\dots,v_m,w_1,\dots,w_n$称为$V$的基，其中$n\in N^*$。设

$$v = d_1v_1 + d_2v_2 + \cdots + d_mv_m + e_1w_1 + e_2w_2 + \cdots + e_nw_n \tag{18}$$

由于$w \notin span(v_1,v_2,\dots,v_3)$，那么$e_1,e_2,\dots,e_n$不全为$0$，不妨设$e_1 \neq 0$。

下面考察$v_1+w,v_2+w,\dots,v_m+w$的线性相关性。令

$$f_1(v_1+w) + f_2(v_2+w) + \cdots + f_m(v_m+w) = 0 \tag{19}$$

其中$f_1,f_2,\dots,f_m \in F$

将(18)代入(19)并整理，得

$$\sum_{k=1}^{m}\left(f_k + d_k\sum_{i=1}^{m}f_i\right)v_k + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}e_kf_i\right)w_k = 0 \tag{20}$$

由于$v_1,v_2,\dots,v_m,w_1,\dots,w_n$线性无关，因此由(20)得

$$
\begin{cases}
(1+d_1)f_1 + d_1f_2 + \cdots + d_1f_m = 0 \\
d_2f_1 + (1+d_2)f_2 + \cdots + d_2f_m = 0 \\
\vdots \\
d_mf_1 + d_mf_2 + \cdots + (1+d_m)f_m = 0 \\
e_1f_1 + e_1f_2 + \cdots + e_1f_m = 0 \\
\vdots \\
e_nf_1 + e_nf_2 + \cdots + e_nf_m = 0
\end{cases} \tag{21}
$$

记

$$
\begin{cases}
e_1f_1 + e_1f_2 + \cdots + e_1f_m = 0 \\
d_2f_1 + (1+d_2)f_2 + \cdots + d_2f_m = 0 \\
\vdots \\
d_mf_1 + d_mf_2 + \cdots + (1+d_m)f_m = 0
\end{cases} \tag{22}
$$

(22)是关于$f_1,f_2,\dots,f_m$的m元齐次线性方程组，考察其系数行列式

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_1 & \cdots & e_1 & e_1 \\ d_2 & 1+d_2 & \cdots & d_2 & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ d_m & d_m & \cdots & d_m & 1+d_m \end{vmatrix} \tag{23}$$

由引理知

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} e_1 & e_1 & \cdots & e_1 \\ d_2 & 1+d_2 & \cdots & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_m & d_m & \cdots & 1+d_m \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1+e_1 & e_1 & \cdots & e_1 \\ d_2 & 1+d_2 & \cdots & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_m & d_m & \cdots & 1+d_m \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1+0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_2 & 1+d_2 & \cdots & d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_m & d_m & \cdots & 1+d_m \end{vmatrix} \\
&= (1+e_1+d_2+\cdots+d_m) - (1+d_2+\cdots+d_m) \\
&= e_1 \\
&\neq 0
\end{aligned}
$$

由 Cramer 法则，这说明(22)仅有零解。又满足(21)的解一定满足(22)，而(21)显然有零解，于是(21)仅有零解。于是(21)⇒

$$f_1 = f_2 = \cdots = f_m = 0 \tag{24}$$

进而$v_1 + w, v_2 + w, \dots, v_m + w$线性无关，于是

$$\dim span(v_1 + w, v_2 + w, \dots, v_m + w) = m \geq m - 1 \tag{25}$$

综合I与II，

$$\dim span(v_1 + w, v_2 + w, \dots, v_m + w) \geq m - 1$$

当且仅当$w \in span(v_1, v_2, \dots, v_m)$，且$1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 0$，其中$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots a_m v_m, a_1, a_2, \dots, a_m \in F$，等号成立。

于是，原命题得证！