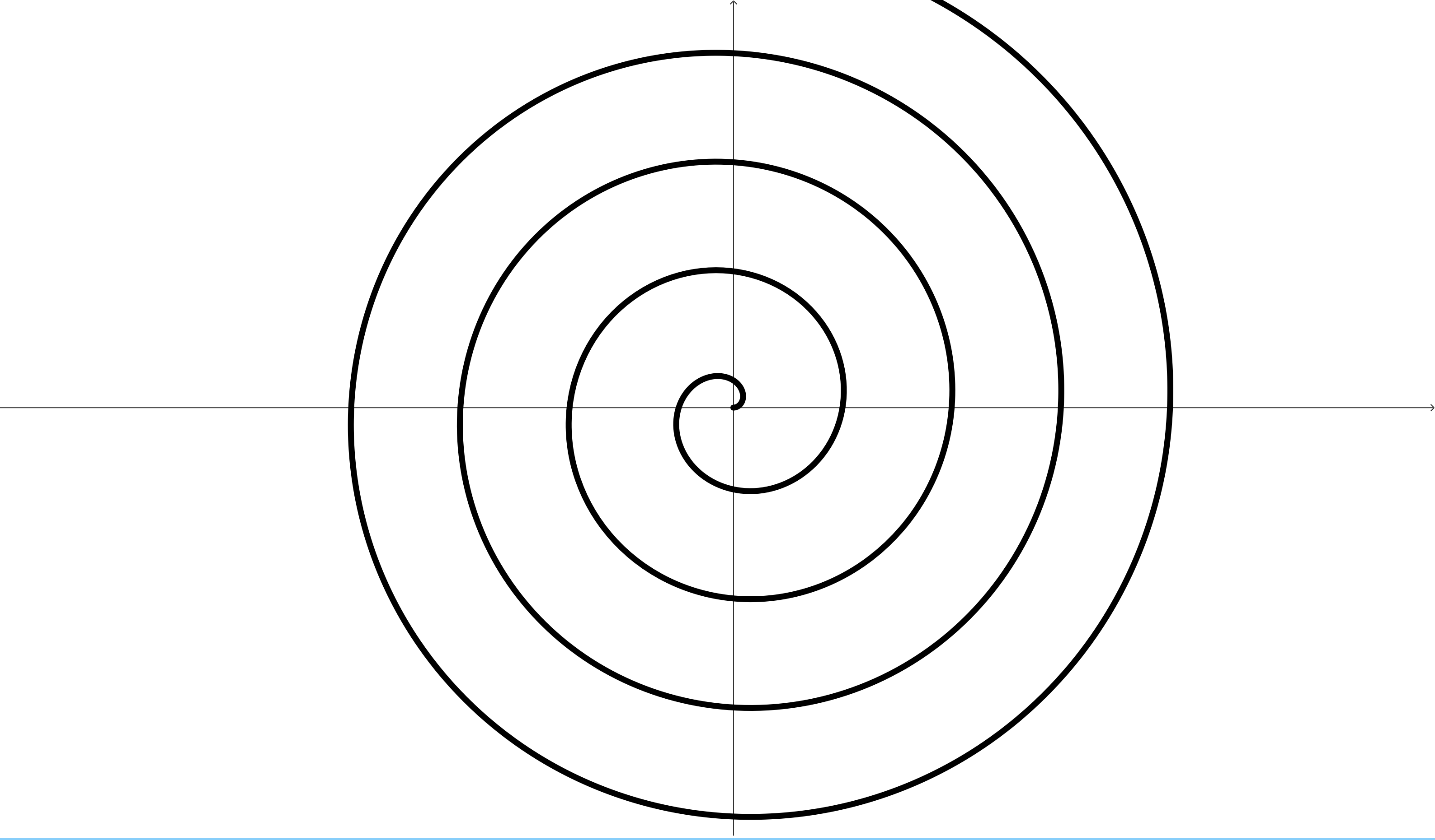

多复变函数论基础 - 史济怀 - 笔记

作者：若水

邮箱：ethanmxzhou@163.com

主页：helloethanzhou.github.io

时间：July 18, 2024

致谢

感谢 **勇敢的** 自己

目录

第一章 多复变全纯函数

1.1 全纯函数

1.1.1 全纯函数的定义

定义 1.1.1 (域)

称 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 为域，如果 Ω 为连通开集。

定义 1.1.2 (多圆柱)

对于 $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$，与 $\boldsymbol{r} = (r_1, \cdots, r_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$，定义多圆柱为

$$P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a}) = \{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_k - a_k| < r_k, 1 \leq k \leq n\}$$

特别的，定义单位多圆柱为

$$U^n = P_{\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{0}) = \{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_k| < 1, 1 \leq k \leq n\}$$

定义 1.1.3 (球)

对于 $\boldsymbol{z}_0 \in \mathbb{C}^n$，与 $r > 0$，定义球为

$$B_r(\boldsymbol{z}_0) = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n : |\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_0| < r\}$$

特别的，定义单位球为

$$B_n = B_1(\boldsymbol{0}) = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n : |\boldsymbol{z}| < 1\}$$

定义 1.1.4 (全纯函数)

对于域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$，称函数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 为全纯函数，如果对于任意 $\boldsymbol{a} \in \Omega$，存在多圆柱 $P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a})$，使得对于任意 $\boldsymbol{z} \in P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a})$，存在幂级数

$$f(z) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n} C_{\boldsymbol{\alpha}} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{a})^{\boldsymbol{\alpha}}$$

定理 1.1.1 (Taylor 展式)

对于域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯函数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$，成立

$$f(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n} \frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{\alpha}!} (\boldsymbol{z} - \boldsymbol{a})^{\boldsymbol{\alpha}}$$

其中

$$f^{(\boldsymbol{\alpha})} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}} f, \qquad \boldsymbol{\alpha}! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

1.1.2 唯一性定理

定理 1.1.2 (唯一性定理)

对于域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯函数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$，如果存在非空开集 $G \subset \Omega$，使得成立 $f|_G = 0$，那么 $f = 0$。

证明 对于 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n$，定义

$$K = \{\boldsymbol{z} \in \Omega : \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n, f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{z}) = 0\}$$
$$K_{\boldsymbol{\alpha}} = \{\boldsymbol{z} \in \Omega : f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{z}) = 0\}$$

由于 $f^{(\boldsymbol{\alpha})}$ 为连续函数，且 $\{0\}$ 为闭集，那么 $K_{\boldsymbol{\alpha}}$ 为闭集。由于

$$K = \bigcap_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^n} K_{\boldsymbol{\alpha}}$$

那么 K 为闭集。

对于任意 $\boldsymbol{a} \in K$，由于 f 在 Ω 上全纯，那么存在 $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^n_{>0}$，使得对于任意 $\boldsymbol{z} \in P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a})$，成立幂级数展开

$$f(z) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=0}^{n} \frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{a})^{\boldsymbol{\alpha}} = 0$$

因此 $P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a}) \subset K$。由 $\boldsymbol{a}$ 的任意性，K 为开集。

由于 G 为非空开集，那么 $G \subset K$，因此 K 非空。由于

$$\Omega = K \cup (\Omega \setminus K)$$

且 Ω 连通，那么 $\Omega = K$，进而在 Ω 上成立 $f = 0$。

定理 1.1.3 (开映射定理)

对于域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯函数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$，或 f 为常函数，或 f 为开映射。

证明 如果 f 不为常函数，对于任意 $\boldsymbol{a} \in \Omega$，取 $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^n_{>0}$，使得成立 $P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a}) \subset \Omega$。由唯一性定理1.1.2，$f$ 在 $P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a})$ 不恒为 $f(\boldsymbol{a})$，于是存在 $\boldsymbol{b} \in P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a})$，使得成立 $f(\boldsymbol{a}) \neq f(\boldsymbol{b})$。

构造开集

$$D = \{\lambda \in \mathbb{C} : \boldsymbol{a} + \lambda(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \in P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a})\}$$

构造全纯函数 $g(\lambda) = f(\boldsymbol{a} + \lambda(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$，其中 $\lambda \in D$。由于

$$g(0) = f(\boldsymbol{a}) \neq f(\boldsymbol{b}) = g(1)$$

那么 g 为 D 上的不为常函数，由开映射定理1.1.3，$g(D)$ 为 $\mathbb{C}$ 中的开集，而 $g(D) \subset f(P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a}))$，因此 $f(P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a}))$ 为 $\mathbb{C}$ 中的开集，进而 f 为开映射。

定理 1.1.4 (最大模原理)

对于域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯非常函数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$，$|f|$ 不在 Ω 的内部取到最大值。

证明 如果 $|f|$ 在 Ω 内部取到最大值，那么存在 $\boldsymbol{a} \in \Omega^\circ$，使得对于任意 $\boldsymbol{z} \in \Omega$，成立 $|f(\boldsymbol{z})| \leq |f(\boldsymbol{a})|$，因此

$$f(\Omega) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq |f(\boldsymbol{a})|\}$$

由开映射定理1.1.3，$f(\Omega)$ 为开集，因此

$$f(\Omega) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| < |f(\boldsymbol{a})|\}$$

但是 $|f(\boldsymbol{a})| \in f(\Omega)$，导出矛盾 $|f(\boldsymbol{a})| < |f(\boldsymbol{a})|$！

1.2 多圆柱的 Cauchy 积分公式及其应用

1.2.1 多圆柱的 Cauchy 积分公式

定义 1.2.1 (多圆柱的特征边界)

定义多圆柱

$$P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a})=\{(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n:|z_k-a_k|<r_k,1\le k\le n\}$$

的特征边界为

$$\partial_D P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a})=\{(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{C}^n:|z_k-a_k|=r_k,1\le k\le n\}$$

♣

定理 1.2.1 (多圆柱的 Cauchy 积分公式)

对于域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 上的全纯函数 $f:\Omega\to\mathbb{C}$，如果 $\overline{P}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a})\subset\Omega$，那么对于任意 $\boldsymbol{z}\in P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a})$，成立

$$f(\boldsymbol{z})=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_D P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a})}\frac{f(\boldsymbol{\zeta})}{\prod\limits_{k=1}^{n}(\zeta_k-z_k)}\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}$$

♡

定理 1.2.2 (多圆柱的 Taylor 展式)

如果函数 f 为多圆柱 $P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a})$ 上的全纯函数，那么对于任意 $\boldsymbol{z}\in P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a})$，成立

$$f(\boldsymbol{z})=\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{N}^n}\frac{f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{a})}{\boldsymbol{\alpha}!}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{a})^{\boldsymbol{\alpha}}$$

♡

定理 1.2.3 (Cauchy 不等式)

对于域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 上的全纯函数 $f:\Omega\to\mathbb{C}$，如果 $\overline{P}_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a})\subset\Omega$，那么

$$\left|f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{a})\right|\le\frac{\boldsymbol{\alpha}!}{\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{\alpha}}}\sup_{\boldsymbol{z}\in\partial_D P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a})}|f(\boldsymbol{z})|$$

♡

证明 由多圆柱的 Cauchy 积分公式1.2.1

$$f(\boldsymbol{z})=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_D P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a})}\frac{f(\boldsymbol{\zeta})}{\prod\limits_{k=1}^{n}(\zeta_k-z_k)}\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}$$

那么

$$f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{a})=\frac{\boldsymbol{\alpha}!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial_D P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a})}\frac{f(\boldsymbol{\zeta})}{\prod\limits_{k=1}^{n}(\zeta_k-z_k)^{\alpha_k-1}}\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}$$

记 $M=\sup\limits_{\boldsymbol{z}\in\partial_D P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a})}|f(\boldsymbol{z})|$，进而

$$\begin{aligned}\left|f^{(\boldsymbol{\alpha})}(\boldsymbol{a})\right|&\le\frac{\boldsymbol{\alpha}!}{(2\pi)^n}\int_{\partial_D P_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{a})}\frac{|f(\boldsymbol{\zeta})|}{\prod\limits_{k=1}^{n}|\zeta_k-z_k|^{\alpha_k 1}}|\mathrm{d}\boldsymbol{\zeta}|\\&\le\frac{\boldsymbol{\alpha}!}{(2\pi)^n}\frac{M}{\prod\limits_{k=1}^{n}r_k^{\alpha_k-1}}(2\pi)^n r_1\cdots r_n\\&=M\frac{\boldsymbol{\alpha}!}{\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{\alpha}}}\end{aligned}$$

1.2.2 Weierstrass 定理

定义 1.2.2 (相对紧集)

称 G 为相对于 Ω 的紧集，并记作 $G \subset\subset \Omega$，如果 $\overline{G} \subset \Omega$，且 $\overline{G}$ 为紧集。♣

定理 1.2.4

对于域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯函数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$，如果紧集 K 成立 $K \subset G \subset\subset \Omega$，那么存在域 K, G 与 α 有关的常数 C_α，使得成立

$$\sup_{z \in K} |f^\alpha(z)| \leq C_\alpha \sup_{z \in G} |f(z)|$$

♡

证明

定理 1.2.5 (Weierstrass 定理)

对于域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯函数序列 $\{f_n : \Omega \to \mathbb{C}\}_{n=1}^\infty$，如果其在 Ω 上内闭一致收敛于 f，那么 f 为 Ω 上的全纯函数，且 $\{f_n^{(\alpha)}\}_{n=1}^\infty$ 在 Ω 上内闭一致收敛于 $f^{(\alpha)}$。♡

1.2.3 Montel 定理

定义 1.2.3 (正规族)

称域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯函数族 $\mathscr{F}$ 为正规族，如果对于任意序列 $\{f_n : \Omega \to \mathbb{C}\}_{n=1}^\infty \subset \mathscr{F}$，存在子列 $\{f_{n_k} : \Omega \to \mathbb{C}\}_{k=1}^\infty$，使得其在 Ω 上内闭一致收敛。♣

定义 1.2.4 (局部一致有界性)

域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯函数族 $\mathscr{F}$ 为局部一致有界的，如果对于任意紧集 $K \subset \Omega$，存在常数 M，使得对于任意 $z \in K$ 与 $f \in \mathscr{F}$，成立 $|f(z)| \leq M$。♣

定理 1.2.6 (Montel 定理)

对于域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯函数族 $\mathscr{F}$，成立

$$\mathscr{F} \text{ 为正规族} \iff \mathscr{F} \text{ 局部一直有界}$$

♡

1.2.4 Hurwitz 定理

定理 1.2.7 (Hurwitz 定理)

对于域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上的处处非零的全纯函数序列 $\{f_n : \Omega \to \mathbb{C}\}_{n=1}^\infty$，如果其在 Ω 上内闭一致收敛于 f，那么或 $f = 0$，或 f 处处非零。♡

1.3 Hartogs 现象

1.3.1 Hartogs 现象

定义 1.3.1 (全纯延拓)

对于域 $\Omega_0 \subsetneq \Omega \subset \mathbb{C}^n$，称 Ω 上的全纯函数 F 为 Ω_0 上的全纯函数 f 的全纯延拓，如果 $F|_{\Omega_0} = f$。

定理 1.3.1 (Hartogs 现象)

如果 $n \geq 2$，那么存在域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$，使得对于任意 Ω 上的全纯函数存在全纯延拓。

1.3.2 Reinhardt 域上的展式

定义 1.3.2 (Reinhardt 域)

称域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 为 Reinhardt 域，如果对于任意 $(z_1, \cdots, z_n) \in \Omega$ 与 $(\theta_1, \cdots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$，成立 $(\mathrm{e}^{i\theta_1} z_1, \cdots, \mathrm{e}^{i\theta_n} z_n) \in \Omega$。

定理 1.3.2 (Reinhardt 域上的展式)

如果函数 f 为 Reinhardt 域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯函数，那么对于任意 $\boldsymbol{z} \in \Omega$，存在幂级数

$$f(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^n} C_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}}$$

且该级数在 Ω 上内闭一致收敛。

定理 1.3.3

对于 Reinhardt 域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯函数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$，如果对于任意 $1 \leq k \leq n$，Ω 中存在第 k 个坐标为 0 的点，那么存在幂级数

$$f(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^n} C_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad \boldsymbol{z} \in \Omega$$

且该级数在 Ω 上内闭一致收敛。

推论 1.3.1

单位球 B_n 上的全纯函数 $f : B_n \to \mathbb{C}$ 存在幂级数

$$f(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^n} C_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad \boldsymbol{z} \in B_n$$

且该级数在 B_n 上内闭一致收敛。

定理 1.3.4 (全纯延拓定理)

对于 Reinhardt 域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$，如果对于任意 $1 \leq k \leq n$，Ω 中存在第 k 个坐标为 0 的点，那么任意 Reinhardt 域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯函数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 均可延拓到域

$$\Upsilon = \{(\rho_1 z_1, \cdots, \rho_n z_n) : (z_1, \cdots, z_n) \in \Omega, 0 \leq \rho_k \leq 1, 1 \leq k \leq n\}$$

证明 由定理1.3.3，f 在 Ω 存在幂级数

$$f(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^n} C_{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad \boldsymbol{z} \in \Omega$$

任取 $\boldsymbol{w}=(w_1,\cdots,w_n)\in\Upsilon$，那么存在 $\boldsymbol{z}=(z_1,\cdots,z_n)\in\Omega$ 与 $0\le\rho_k\le1$，使得成立 $w_k=\rho_k z_k$，从而 $|w_k|\le|z_k|$，其中 $1\le k\le n$。由于 $\sum\limits_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}^n}C_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{z}^{\boldsymbol{\alpha}}$ 收敛，那么 $\sum\limits_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}^n}C_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{\alpha}}$ 收敛，且在 Υ 中内闭一致收敛。定义函数

$$F(\boldsymbol{w})=\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}^n}C_{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{\alpha}},\qquad \boldsymbol{w}\in\Upsilon$$

那么 F 为 Υ 上的全纯函数，且 $F|_\Omega=f$，进而 F 为 f 在 Υ 上的全纯延拓。

推论 1.3.2

对于 $0<r<R$，域

$$\Omega=\{\boldsymbol{z}\in\mathbb{C}^n:r<|\boldsymbol{z}|<R\}$$

上的全纯函数可延拓到球

$$B_R(\boldsymbol{0})=\{\boldsymbol{z}\in\mathbb{C}^n:|\boldsymbol{z}|<R\}$$

♡

证明 由全纯延拓定理1.3.4，命题显然！

定理 1.3.5

如果 $n\ge2$，那么域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 上的全纯函数 $f:\Omega\to\mathbb{C}$ 的零点非孤立。

♡

证明 如果 $\boldsymbol{a}\in\Omega$ 为 f 的孤立零点，那么存在 $\varepsilon>0$，使得 f 在 $B_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ 中除 $\boldsymbol{a}$ 外无零点。令

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}$$

那么 g 在 $B_\varepsilon(\boldsymbol{a})-\overline{B}_{\varepsilon/2}(\boldsymbol{a})$ 中全纯。由全纯延拓定理的推论1.3.2，g 在 $B_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ 中全纯，从而 $f(\boldsymbol{a})\ne0$，导出矛盾！

第二章 全纯映射

2.1 全纯映射的导数

2.1.1 全纯映射的导数

定义 2.1.1 (全纯映射)

对于域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$，称映射 $F=(f_1,\cdots,f_m):\Omega\to\mathbb{C}^m$ 为全纯映射，如果对于任意 $1\leq k\leq n$，$f_k:\Omega\to\mathbb{C}$ 为全纯函数。♣

定义 2.1.2 (映射的导数)

对于域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 上的映射 $F=(f_1,\cdots,f_m):\Omega\to\mathbb{C}^m$，称 F 在 $\boldsymbol{z}\in\Omega$ 处可微，如果存在线性算子 $A:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$，使得成立

$$\lim_{\boldsymbol{h}\to\boldsymbol{0}}\frac{|F(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{h})-F(\boldsymbol{z})-A(\boldsymbol{h})|}{|\boldsymbol{h}|}=0$$

♣

定理 2.1.1 (全纯映射的导数)

域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 上的全纯映射 $F=(f_1,\cdots,f_m):\Omega\to\mathbb{C}^m$ 在 Ω 上处处可微，且

$$F'(\boldsymbol{z}_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1(\boldsymbol{z})}{\partial z_1}|_{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_0} & \cdots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{z})}{\partial z_n}|_{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_0}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m(\boldsymbol{z})}{\partial z_1}|_{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_0} & \cdots & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{z})}{\partial z_n}|_{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_0}\end{pmatrix}$$

♡

定理 2.1.2

对于域 $\Omega\subset\mathbb{C}^l$ 与 $\Upsilon\subset\mathbb{C}^m$ 上的全纯映射 $F:\Omega\to\Upsilon$ 与 $G:\Upsilon\to\mathbb{C}^n$，其复合 $H=G\circ F:\Omega\to\mathbb{C}^n$ 为全纯映射，且 $H'(\boldsymbol{z})=G'(\boldsymbol{z})F'(\boldsymbol{z})$。♡

2.1.2 复 Jacobian 和实 Jacobian 的关系

定义 2.1.3 (复 Jacobian)

定义域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 上的全纯映射 $F:\Omega\to\mathbb{C}^n$ 在 $\boldsymbol{z}_0$ 处的复 Jacobian 为

$$J_F^{(\mathbb{C})}(\boldsymbol{z}_0)=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1(\boldsymbol{z})}{\partial z_1}|_{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_0} & \cdots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{z})}{\partial z_n}|_{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_0}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m(\boldsymbol{z})}{\partial z_1}|_{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_0} & \cdots & \frac{\partial f_m(\boldsymbol{z})}{\partial z_n}|_{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_0}\end{vmatrix}$$

♣

定义 2.1.4 (实 Jacobian)

定义域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 上的全纯映射 $F=(f_1,\cdots,f_n):\Omega\to\mathbb{C}^n$ 在 $\boldsymbol{z}_0=(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 处的实 Jacobian 为

$$J_F^{(\mathbb{R})}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_1}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} & \cdots & \frac{\partial u_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_n}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} & \frac{\partial u_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_1}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} & \cdots & \frac{\partial u_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_n}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_1}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} & \cdots & \frac{\partial u_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_n}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} & \frac{\partial u_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_1}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} & \cdots & \frac{\partial u_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_n}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} \\ \frac{\partial u_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_1}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} & \cdots & \frac{\partial u_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_n}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} & \frac{\partial u_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_1}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} & \cdots & \frac{\partial u_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_n}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_1}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} & \cdots & \frac{\partial u_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_n}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} & \frac{\partial u_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_1}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} & \cdots & \frac{\partial u_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_n}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} \\ \frac{\partial v_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_1}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} & \cdots & \frac{\partial v_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_n}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} & \frac{\partial v_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_1}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} & \cdots & \frac{\partial v_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_n}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_1}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} & \cdots & \frac{\partial v_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial x_n}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} & \frac{\partial v_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_1}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} & \cdots & \frac{\partial v_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial y_n}\Big|_{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)} \end{vmatrix}$$

其中对于任意 $1\le k\le n$，$f_k=u_k+iv_k$，且 $z=x+iy$。

定理 2.1.3 (复 Jacobian 和实 Jacobian 的关系)

对于域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 上的全纯映射 $F:\Omega\to\mathbb{C}^n$，成立

$$J_F^{(\mathbb{R})}(\boldsymbol{z})=|J_F^{(\mathbb{C})}(\boldsymbol{z})|^2$$

2.2 双全纯映射

定义 2.2.1 (单叶全纯映射)

称域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 上的全纯映射 $F:\Omega\to\mathbb{C}^m$ 为单叶全纯映射，如果成立

$$F(\boldsymbol{z})=F(\boldsymbol{w})\implies\boldsymbol{z}=\boldsymbol{w}$$

定义 2.2.2 (双全纯映射)

称域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 上的全纯映射 $F:\Omega\to\mathbb{C}^m$ 为双全纯映射，如果存在域 $\Upsilon\subset\mathbb{C}^m$ 上的全纯映射 $G:\Upsilon\to\mathbb{C}^n$，使得成立

$$G\circ F=\mathbb{1}_\Omega,\qquad G\circ F=\mathbb{1}_\Upsilon$$

定义 2.2.3 (全纯等价)

称域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 与 $\Upsilon\subset\mathbb{C}^m$ 全纯等价，如果存在双全纯映射 $F:\Omega\to\Upsilon$。

定义 2.2.4 (全纯自同构)

称域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 上的双全纯映射 $F:\Omega\to\Omega$ 为 Ω 的全纯自同构映射。

2.3 H.Cartan 定理与球的全纯自同构

2.3.1 H.Cartan 定理

定义 2.3.1 (圆型域)

称域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 为圆型域，如果对于任意 $\boldsymbol{z} \in \Omega$ 与 $\theta \in \mathbb{R}$，成立 $\mathrm{e}^{i\theta}\boldsymbol{z} \in \Omega$。♣

定理 2.3.1 (H.Cartan 定理)

对于有界域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯映射 $F : \Omega \to \Omega$，如果存在 $\boldsymbol{z}_0 \in \Omega$，使得成立 $F(\boldsymbol{z}_0) = \boldsymbol{z}_0$，且 $F'(\boldsymbol{z}_0) = I_n$，那么 $F = \mathbb{1}_\Omega$。♡

注 域 Ω 的有界性条件不可取消。例如，对于域

$$\Omega = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1 z_2| < 1\}$$

记 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$，$h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 为无零点的全纯函数，且 $h(0) = 1$。构造映射

$$\begin{aligned} F_h : \quad & \Omega \longrightarrow \Omega \\ (z_1, z_2) & \longmapsto \left(z_1 h(z_1 z_2), \frac{z_2}{h(z_1 z_2)}\right) \end{aligned}$$

注意到

$$F_h \circ F_{\frac{1}{h}} = F_{\frac{1}{h}} \circ F_h = \mathbb{1}_\Omega$$

因此 F_h 为双全纯映射。注意到 $F_h(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，且 $F_h'(\mathbf{0}) = I_2$，但是 F_h 不为线性映射。

定理 2.3.2 (H.Cartan 定理)

对于圆型域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 与 $\Upsilon \subset \mathbb{C}^m$，如果 $\mathbf{0} \in \Omega \cap \Upsilon$，且 Ω 为有界域，那么对于双全纯映射 $F : \Omega \to \Upsilon$，若 $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，则 F 为线性映射。♡

推论 2.3.1

对于有界圆型域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$，如果 $\mathbf{0} \in \Omega$，那么对于双全纯映射 $F : \Omega \to \Omega$，若 $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，则 F 为线性映射。♡

注 圆型域 Ω 的有界性条件不可取消。例如，对于圆型域

$$\Omega = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1 z_2| < 1\}$$

记 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$，$h : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 为无零点的全纯函数。构造映射

$$\begin{aligned} F_h : \quad & \Omega \longrightarrow \Omega \\ (z_1, z_2) & \longmapsto \left(z_1 h(z_1 z_2), \frac{z_2}{h(z_1 z_2)}\right) \end{aligned}$$

注意到

$$F_h \circ F_{\frac{1}{h}} = F_{\frac{1}{h}} \circ F_h = \mathbb{1}_\Omega$$

因此 F_h 为双全纯映射，但是 F_h 不为线性映射。

2.3.2 球的全纯自同构

定理 2.3.3 (单位多圆柱上的全纯自同构映射)

对于任意单位多圆柱 U^n 上的全纯自同构映射 $f: U^n \to U^n$，存在 $(a_1, \cdots, a_n) \in U^n$，与 $\theta_1, \cdots, \theta_n \in \mathbb{R}$，以及置换 $\tau: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$，使得成立

$$f(z_1, \cdots, z_n) = \left(\mathrm{e}^{i\theta_1}\frac{z_{\tau(1)} - a_1}{1 - \overline{a}_1 z_{\tau(1)}}, \cdots, \mathrm{e}^{i\theta_n}\frac{z_{\tau(n)} - a_n}{1 - \overline{a}_n z_{\tau(n)}}\right)$$

定理 2.3.4 (单位球上的全纯自同构映射)

对于单位球柱 B_n 上的全纯自同构映射 $f: B_n \to B_n$，如果 $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$，那么存在且存在唯一酉矩阵 $\boldsymbol{U}$，使得成立

$$f(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{U}\boldsymbol{z}, \qquad \boldsymbol{z} \in B_n$$

定理 2.3.5

对于 $\boldsymbol{a} \in B_n$，记 $s^2 = 1 - |\boldsymbol{a}|^2$，以及

$$\boldsymbol{P} = \begin{cases} \dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^H, & \boldsymbol{a} \neq \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{a} = \mathbf{0} \end{cases}, \qquad \boldsymbol{A} = s\boldsymbol{I}_n + (1-s)\boldsymbol{P}$$

定义映射

$$\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{z}) = \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}}{1 - \boldsymbol{z}^T\overline{\boldsymbol{a}}}$$

那么映射 $\varphi_{\boldsymbol{a}}$ 具有如下性质。

1. $\varphi_{\boldsymbol{a}}(\mathbf{0}) = \varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$
2. $\varphi_{\boldsymbol{a}}'(\mathbf{0}) = \overline{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}^T - \boldsymbol{A}^T, \varphi_{\boldsymbol{a}}'(\boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{A}^T/s^2$
3. 对于任意 $\boldsymbol{z} \in \overline{B}_n$，成立
$$1 - |\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{z})|^2 = \frac{(1 - |\boldsymbol{a}|^2)(1 - |\boldsymbol{z}|^2)}{|1 - \boldsymbol{z}^T\overline{\boldsymbol{a}}|^2}$$
4. $\varphi_{\boldsymbol{a}} \circ \varphi_{\boldsymbol{a}} = \mathbb{1}_{B_n}$
5. $\varphi_{\boldsymbol{a}}$ 为双全纯函数。

定理 2.3.6 (单位球上的全纯自同构映射)

对于单位球柱 B_n 上的全纯自同构映射 $f: B_n \to B_n$，如果 $f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$，那么存在且存在唯一酉矩阵 $\boldsymbol{U}$，使得成立

$$f(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{U}\varphi_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{z}), \qquad \boldsymbol{z} \in B_n$$

第三章 Cauchy 积分公式

3.1 球的 Cauchy 积分公式

定义 3.1.1 (Cauchy 核)

定义函数 $f:\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ 在单位球 B_n 中的 Cauchy 核为

$$C(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\zeta})=\frac{1}{(1-\boldsymbol{z}^T\overline{\boldsymbol{\zeta}})^n}$$

♣

定义 3.1.2 (Cauchy 积分)

对于 $f\in L(\sigma)$，定义其 Cauchy 积分为

$$C_f(\boldsymbol{z})=\int_{\partial B_n}C(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\zeta})f(\boldsymbol{\zeta})\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{\zeta}),\qquad \boldsymbol{z}\in B_n$$

♣

定理 3.1.1 (球的 Cauchy 积分公式)

对于在 B_n 上全纯且在 $\overline{B}_n$ 上连续的函数 f，成立

$$f(\boldsymbol{z})=\int_{\partial B_n}\frac{f(\boldsymbol{\zeta})}{(1-\boldsymbol{z}^T\overline{\boldsymbol{\zeta}})^n}\mathrm{d}\sigma(\boldsymbol{\zeta}),\qquad \boldsymbol{z}\in B_n$$

♡

3.2 $\mathbb{C}$ 上的非齐次 Cauchy 积分公式及其应用

3.2.1 非齐次 Cauchy 积分公式

定理 3.2.1

对于具有光滑定向边界的有界域 $\Omega\subset\mathbb{C}$，如果 f 为 $\overline{\Omega}$ 上的连续可微函数，那么对于任意 $z\in\Omega$，成立

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega}\frac{1}{\zeta-z}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\overline{\zeta}$$

♡

3.2.2 平面上 $\overline{\partial}$ 问题的解

定理 3.2.2

对于有界域 $\Omega\subset\mathbb{C}$，如果 f 为 Ω 上的有界连续可微函数，令

$$u(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Omega}\frac{1}{\zeta-z}\frac{\partial f(\zeta)}{\partial\overline{\zeta}}\mathrm{d}\zeta\wedge\mathrm{d}\overline{\zeta},\qquad z\in\Omega$$

那么 u 在 Ω 上连续可微，且存在 $C\in\mathbb{R}$，使得成立

$$\frac{\partial u}{\partial\overline{z}}=f,\qquad \sup_{\Omega}|u|\leq C\sup_{\Omega}|f|$$

♡

附录 A 单复变函数定理扩展

定理 A.0.1 (Bieberbach 定理)

对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的单的全纯函数 f，如果 $f(0)=0$，且 $f'(0)=1$，那么作 Taylor 展式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

成立

$$|a_n|\le n,\qquad n\in\mathbb{N}$$

♡

定理 A.0.2 (Koebe 定理 1/4 掩盖定理)

对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的单的全纯函数 f，如果 $f(0)=0$，且 $f'(0)=1$，那么 $f(\mathbb{D})\supset\mathbb{D}/4$。

♡

证明 作 Taylor 展式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

任取 $w\notin f(\mathbb{D})$，令

$$g(z)=\frac{wf(z)}{w-f(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^n=z+\left(a_2+\frac{1}{w}\right)z^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

由 Bieberbach 定理A.0.1，$|a_2|$ 且 $|a_2+1/w|\le 2$，因此

$$\frac{1}{|w|}\le\left|a_2+\frac{1}{w}\right|+|a_2|\le 4$$

从而 $|w|\ge 1/4$，进而 $f(\mathbb{D})\supset\mathbb{D}/4$。

引理 A.0.1 (Schwartz 引理)

对于单位开圆盘 $\mathbb{D}$，如果 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 为全纯函数，且 $f(0)=0$，那么

$$|f'(0)|\le 1,\qquad |f(z)|\le|z|,\qquad z\in\mathbb{D}$$

当且仅当存在 $\theta\in\mathbb{R}$，使得 $f(z)=\mathrm{e}^{i\theta}z$ 时等号成立。

♡

证明 构造

$$g(z)=\begin{cases} f(z)/z, & z\in\mathbb{D}\setminus\{0\}\\ f'(0), & z=0\end{cases}$$

那么 $g(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 内全纯。由最大模原理，对于任意 $0<r<1$，成立

$$\max_{|z|<r}|g(z)|\le\max_{\theta\in\mathbb{R}}|g(r\mathrm{e}^{i\theta})|=\max_{\theta\in\mathbb{R}}\frac{|f(r\mathrm{e}^{i\theta})|}{r}\le\frac{1}{r}$$

令 $r\to 1$，那么 $|g(z)|\le 1$，于是

$$|f'(0)|\le 1,\qquad |f(z)|\le|z|,\qquad z\in\mathbb{D}$$

若存在 $z\ne 0$，使得成立 $|f(z)|=|z|$ 或 $|f'(0)|=1$，则由最大模原理，g 为常函数，因此存在 $\theta\in\mathbb{R}$，使得 $f(z)=\mathrm{e}^{i\theta}z$。

引理 A.0.2 (Schwartz-Pick 引理)

对于单位开圆盘 $\mathbb{D}$，如果 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 为全纯函数，那么

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(z)}f(w)}\right|\le\left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right|,\qquad z,w\in\mathbb{D}$$

♡

证明 首先容易证明对于 $z,w\in\overline{\mathbb{D}}$，当 $\overline{w}z\neq 1$ 时，成立

$$\left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right|\le 1$$

当且仅当 $|z|=1$ 或 $|w|=1$ 时等号成立。

对于 $w\in\mathbb{D}$，定义映射

$$\begin{aligned}\varphi_w:\mathbb{D}&\longrightarrow\mathbb{D}\\ z&\longmapsto\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\end{aligned}$$

我们来证明 φ_w 为全纯双射。注意到

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi_w(z+h)-\varphi_w(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|w|^2-1}{(1-\overline{w}(z+h))(1-\overline{w}z)}=\frac{|w|^2-1}{(1-\overline{w}z)^2}$$

因此 φ_w 为全纯映射。同时注意到

$$(\varphi_w\circ\varphi_w)(z)=z$$

因此 φ_w 为双射。

由于 $\varphi_w(w)=0$，那么 $\varphi_w^{-1}(0)=w$。考察映射

$$\psi_w=\varphi_{f(w)}\circ f\circ\varphi_w^{-1}$$

由于 φ_w 和 f 均为 $\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 上的全纯函数，那么 ψ_w 为为 $\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 上的全纯函数，且

$$\psi_w(0)=(\varphi_{f(w)}\circ f\circ\varphi_w^{-1})(0)=0$$

于是由 Schwartz 引理A.0.1，对于任意 $z\in\mathbb{D}$，成立

$$|\psi_w(z)|\le|z|$$

即

$$|(\varphi_{f(w)}\circ f\circ\varphi_w^{-1})(z)|\le|z|$$

而 φ_w 为双射，因此存在 $z'\in\mathbb{D}$，使得成立 $z=\varphi_w(z')$，因此

$$|(\varphi_{f(w)}\circ f)(z')|\le|\varphi_w(z')|$$

进而

$$\left|\frac{f(w)-f(z')}{1-\overline{f(w)}f(z')}\right|\le\left|\frac{w-z'}{1-\overline{w}z'}\right|$$

由 z' 与 w 的任意性，原命题得证！

引理 A.0.3

对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数 f，如果 $f(\mathbb{D})\subset M\mathbb{D}$，$|f(0)|\neq 0$，那么当 $|z|=r<|f(0)|<M$ 时，成立

$$|f(z)|\ge\frac{M(|f(0)|-Mr)}{M-r|f(0)|}$$

♡

证明 当 $M=1$ 时，由 Schwartz-Pick 引理A.0.2

$$|z|\ge\left|\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(z)}f(0)}\right|,\qquad z\in\mathbb{D}$$

从而

$$1-|z|^2 \leq 1-\left|\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(z)}f(0)}\right|^2 = \frac{(1-|f(z)|^2)(1-|f(0)|^2)}{|1-\overline{f(z)}f(0)|^2} \leq \frac{(1-|f(z)|^2)(1-|f(0)|^2)}{(1-|f(z)||f(0)|)^2}$$

因此

$$|z|^2 \geq 1-\frac{(1-|f(z)|^2)(1-|f(0)|^2)}{(1-|f(z)||f(0)|)^2} = \frac{(|f(z)|-|f(0)|)^2}{(1-|f(z)||f(0)|)^2}$$

进而

$$|z| \geq \frac{||f(z)|-|f(0)||}{1-|f(z)||f(0)|}$$

解之

$$|f(z)| \geq \frac{|f(0)|-|z|}{1-|z||f(0)|} = \frac{|f(0)|-r}{1-r|f(0)|}$$

当 $M\neq 1$ 时，令 $g=f/M$，从而由

$$|g(z)| \geq \frac{|g(0)|-|z|}{1-|z||g(0)|} = \frac{|g(0)|-r}{1-r|g(0)|}$$

可得

$$\frac{|f(z)|}{M} \geq \frac{\frac{|f(0)|}{M}-|z|}{1-|z|\frac{|f(0)|}{M}} = \frac{\frac{|f(0)|}{M}-r}{1-r\frac{|f(0)|}{M}} \iff |f(z)| \geq \frac{M(|f(0)|-Mr)}{M-r|f(0)|}$$

引理 A.0.4

对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数 f，如果 $f(\mathbb{D})\subset M\mathbb{D}$，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，那么 $M\geq 1$，且 f 在 $\eta\mathbb{D}$ 中为单射，其中 $\eta=1/(M+\sqrt{M^2-1})$。♡

证明 作 Taylor 展式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

由 Cauchy 不等式

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n}\sup_{|z|=r}|f(z)| < \frac{n!}{r^n}M, \qquad r<1$$

从而

$$|a_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{M}{r^n}, \qquad n\in\mathbb{N}, r<1$$

令 $r\to 1^-$，从而

$$|a_n|\leq M, \qquad n\in\mathbb{N}$$

而 $|a_1|=|f'(0)|=1$，从而 $M\geq 1$。

若 f 在 $\eta\mathbb{D}$ 中不为单射，则存在 $z_1\neq z_2\in\mathbb{D}$，使得成立 $f(z_1)=f(z_2)=\beta$。不妨 $|z_1|\leq|z_2|=\rho<1/M$。令

$$g(z)=\frac{\frac{\beta}{M}-\frac{f(z)}{M}}{1-\frac{\rho}{M}\frac{f(z)}{M}}=\frac{M(\beta-f(z))}{M^2-\beta f(z)}$$

则 $|g|<M$，且 $g(z_1)=g(z_2)=0$。再令

$$h(z)=\frac{g(z)(1-\overline{z}_1z)(1-\overline{z}_2z)}{(z-z_1)(z-z_2)}$$

则 h 在 $\mathbb{D}$ 内全纯。断言：$|h|<M$。事实上，由最大模原理，$|h|$ 在 $\partial\mathbb{D}$ 上取到；而 $z\to\partial\mathbb{D}$，$|g(z)|<M$，从而 $|h|<M$。因此

$$|h(0)|=\frac{|g(0)|}{|z_1z_2|}<M$$

而 $|g(0)| \le \beta$，则 $\beta < M|z_1 z_2| < M\rho^2$。令

$$\varphi(z) = \begin{cases} f(z)/z, & z \neq 0 \\ f'(0) = 1, & z = 0 \end{cases}$$

则 φ 在 $\mathbb{D}$ 内全纯，且 $|\varphi| < M$。由引理A.0.3，当 $|z| = \rho < 1/M$ 时

$$|\varphi(z)| \ge \frac{M(\varphi(0) - M\rho)}{M - \varphi(0)\rho} = \frac{M(1 - M\rho)}{M - \rho} \implies |f(z)| \ge \frac{M(1 - M\rho)}{M - \rho}|z|$$

结合

$$\beta = |f(z_2)| \ge \frac{M(1 - M\rho)}{M - \rho}|z_2| = \frac{M(1 - M\rho)}{M - \rho}\rho \implies M\rho^2 \ge \frac{M(1 - M\rho)}{M - \rho}\rho \implies \rho \ge \frac{1}{M + \sqrt{M^2 - 1}}$$

可得要使得 f 在 $\rho\mathbb{D}$ 中不为单射，从而当 $\rho < 1/(M + \sqrt{M^2 - 1})$ 时，f 在 $\rho\mathbb{D}$ 中为单射。

定理 A.0.3 (Landou 引理)

对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数 f，如果 $f(0) = 0$，$f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$，$0 < f'(0) = \alpha \le 1$，那么 f 在 $\eta\mathbb{D}$ 上为单射，且 $\eta^2\mathbb{D} \subset f(\eta\mathbb{D})$，其中 $\eta = \alpha/(1 + \sqrt{1 - \alpha^2})$。

证明 令 $F(z) = f(z)/\alpha$，则 $F(0) = 0$，$F'(0) = 1$，且 $F(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}/\alpha$。由引理A.0.4，则 F 在 $\eta\mathbb{D}$ 中为单射，其中

$$\eta = \frac{1}{M + \sqrt{M^2 - 1}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1}} = \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 - \alpha^2}}$$

当 $|z| = \eta$ 时，由引理A.0.4

$$|F(z)| \ge \frac{M(1 - M\eta)}{M - \eta}|z|$$

从而

$$|f(z)| \ge \frac{1 - \frac{1}{\alpha}\eta}{\frac{1}{\alpha} - \eta}\eta = \frac{\alpha - \eta}{1 - \alpha\eta}\eta \ge \eta^2$$

由 Rouché 定理，$\eta^2\mathbb{D} \subset f(\eta\mathbb{D})$。