第一周

第一题

求下列近似值的误差限：

$$x_1^* + x_2^* + x_4^* \tag{1}$$
$$x_1^* x_2^* x_3^* \tag{2}$$
$$x_2^*/x_4^* \tag{3}$$

其中

$$x_1^* = 1.1021, \quad x_2^* = 0.031, \quad x_3^* = 385.6, \quad x_4^* = 56.430 \tag{4}$$

解：由于

$$\varepsilon(x_1^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-4}, \quad \varepsilon(x_2^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-3}, \quad \varepsilon(x_3^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-1}, \quad \varepsilon(x_4^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-3} \tag{5}$$

那么

$$\varepsilon(x_1^* + x_2^* + x_4^*) \approx \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*) + \varepsilon(x_4^*) \approx 1.05 \times 10^{-3} \tag{6}$$
$$\varepsilon(x_1^* x_2^* x_3^*) \approx |x_2^* x_3^*|\varepsilon(x_1^*) + |x_3^* x_1^*|\varepsilon(x_2^*) + |x_1^* x_2^*|\varepsilon(x_3^*) \approx 0.215 \tag{7}$$
$$\varepsilon(x_2^*/x_4^*) \approx \frac{|x_2^*|\varepsilon(x_4^*) + |x_4^*|\varepsilon(x_2^*)}{|x_4^*|^2} \approx 9 \times 10^{-4} \tag{8}$$

第二题

序列$\{y_n\}$满足递推关系

$$y_n = 10y_{n-1} - 1, \qquad n \in \mathbb{N}^* \tag{9}$$

若$y_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$（三位有效数字），计算到$y_{10}$时误差有多大？这个计算过程稳定吗？

解：设y_n^*为y_n的近似值，那么$\varepsilon(y_n^*) = y_n^* - y_n$，于是由

$$\begin{cases} y_0 = \sqrt{2} \\ y_n = 10y_{n-1} - 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y_0^* = 1.41 \\ y_n^* = 10y_{n-1}^* - 1 \end{cases} \tag{10}$$

可知$\varepsilon(y_0^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$，$\varepsilon(y_n^*) = 10\varepsilon(y_{n-1}^*)$，进而

$$\varepsilon(y_{10}^*) = 10^{10}\varepsilon(y_0^*) = \frac{1}{2} \times 10^8 \tag{11}$$

因此计算过程不稳定。

第二周

第一题

给出$f(x) = \ln x$的数值表

x_n	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$y_n = \ln x_n$	-0.916291	-0.693147	-0.510826	-0.356675	-0.223144

使用线性插值及二次插值计算$\ln 0.54$的近似值。

解：记$x_0 = 0.54, y_0 = \ln 0.54$。

对于线性插值，由于$x_2 < x_0 < x_3$，那么取x_2, x_3进行线性插值，插值函数为

$$L_1(x) = \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} y_2 + \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} y_3 \tag{12}$$

代入数据

$$\ln 0.54 \approx L_1(0.54) \approx -0.620219 \tag{13}$$

截断误差为

$$|R_1(x)| = \frac{|f''(\xi)|}{2} |x - x_2||x - x_3| = \frac{|x - x_2||x - x_3|}{2\xi^2} \leq \frac{|x - x_2||x - x_3|}{2x_2^2} \tag{14}$$

于是

$$|R_1(0.54)| \leq 4.8 \times 10^{-3} < \frac{1}{2} \times 10^{-2} \tag{15}$$

对于二次插值，取x_1, x_2, x_3进行抛物线插值，插值函数为

$$L_2(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x - x_3)(x - x_1)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} y_2 + \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3 \tag{16}$$

代入数据

$$\ln 0.54 \approx L_2(0.54) \approx -0.615320 \tag{17}$$

截断误差为

$$|R_2(x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{6} |x - x_1||x - x_2||x - x_3| = \frac{|x - x_1||x - x_2||x - x_3|}{3\xi^3} \leq \frac{|x - x_1||x - x_2||x - x_3|}{3x_1^3} \tag{18}$$

于是

$$|R_1(0.54)| \leq 1.75 \times 10^{-3} < \frac{1}{2} \times 10^{-2} \tag{19}$$

对于二次插值，取x_2, x_3, x_4进行抛物线插值，插值函数为

$$L_2(x) = \frac{(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)} y_2 + \frac{(x - x_4)(x - x_2)}{(x_3 - x_4)(x_3 - x_2)} y_3 + \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)} y_4 \tag{20}$$

代入数据

$$\ln 0.54 \approx L_2(0.54) \approx -0.616838 \tag{21}$$

截断误差为

$$|R_2(x)| = \frac{|f'''(\xi)|}{6}|x-x_2||x-x_3||x-x_4| = \frac{|x-x_2||x-x_3||x-x_4|}{3\xi^3} \le \frac{|x-x_2||x-x_3||x-x_4|}{3x_2^3} \quad (22)$$

于是

$$|R_1(0.54)| \le 8.96 \times 10^{-4} < \frac{1}{2} \times 10^{-2} \quad (23)$$

第二题

在$[-4,4]$上给出$f(x)=\mathrm{e}^x$的等距结点函数表，若用二次插值求e^x的近似值，要求截断误差不超过10^{-6}，那么使用函数表的步长h应取多少?

解：假设插值点为x_0-h, x_0, x_0+h，那么截断误差为

$$|R_2(x)| = \frac{|f^{'''}(\xi)|}{3!}|(x-x_0+h)(x-x_0)(x-x_0-h)| \le \frac{\sqrt{3}}{27}\mathrm{e}^4 h^3 \quad (24)$$

当且仅当$\xi=4$且$x=x_0\pm\frac{h}{\sqrt{3}}$时等号成立。令$|R_2(x)|\le 10^{-6}$可知$h\le 6.58\times 10^{-3}$。

第三题

如果$f(x)=a_0+\cdots+a_nx^n$有n个不同实数根$x_1,\cdots,x_n$，证明:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^m}{f'(x_k)} = \begin{cases} 0, & 0\le m\le n-2 \\ a_n^{-1}, & m=n-1 \end{cases} \quad (25)$$

证明：由于f有n个不同实数根$x_1,\cdots,x_n$，那么

$$f(x) = a_n(x-x_1)\cdots(x-x_n) = a_n\omega_{n+1}(x) \quad (26)$$

记$p_m(x)=x^m$，那么

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^m}{f'(x_k)} = a_n^{-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{p_m(x_k)}{\omega'_{n+1}(x_k)} = a_n^{-1}p_m[x_1,\cdots,x_n] = a_n^{-1}\frac{p_m^{(n)}(\xi)}{n!} = \begin{cases} 0, & 0\le m\le n-2 \\ a_n^{-1}, & m=n-1 \end{cases} \quad (27)$$

第三周

第一题

求次数不大于3的多项式$P(x)$，使得满足条件

$$P(x_0)=f(x_0),\quad P'(x_0)=f'(x_0),\quad P''(x_0)=f''(x_0),\quad P(x_1)=f(x_1) \tag{28}$$

解：令

$$P(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+A(x-x_0)^3 \tag{29}$$

由$P(x_1)=f(x_1)$可知

$$f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x_1-x_0)^2+A(x_1-x_0)^3=f(x_1) \tag{30}$$

因此

$$A=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_1-x_0)^3}-\frac{f'(x_0)}{(x_1-x_0)^2}-\frac{f''(x_0)}{x_1-x_0} \tag{31}$$

于是

$$\begin{aligned} P(x)=&f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 && (32)\\ &+\left(\frac{f(x_1)-f(x_0)}{(x_1-x_0)^3}-\frac{f'(x_0)}{(x_1-x_0)^2}-\frac{f''(x_0)}{x_1-x_0}\right)(x-x_0)^3 && (33)\end{aligned}$$

第二题

求次数不高于4次的多项式$P(x)$，使得满足条件

$$P(0)=P'(0)=0,\quad P(1)=P'(1)=1,\quad P(2)=1 \tag{34}$$

解：记$P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$，那么可得如下线性方程

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0\\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\implies\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\\ e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\\ -\frac{3}{2}\\ \frac{9}{4}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \tag{35}$$

因此

$$P(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2 \tag{36}$$

第四周

第一题

已知$f(x) = x^7 + x^4 + 3x + 1$，求$f[2^0, \cdots, 2^7]$和$f[2^0, \cdots, 2^8]$。

解：注意到

$$f[x_0, \cdots, x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \tag{37}$$

于是

$$f[2^0, \cdots, 2^7] = 1, \qquad f[2^0, \cdots, 2^8] = 0 \tag{38}$$

第五周

第一题

对于权$\rho = 1 + x^2$，求区间$[-1, 1]$上的首1正交多项式φ_n，其中$n = 0, 1, 2, 3$。

解：递推公式为

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 1 \qquad (39) \\ \varphi_n(x) &= x^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 + x^2) x^n \varphi_k(x) \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{-1}^{1} (1 + x^2) \varphi_k^2(x) \mathrm{d}x} \varphi_k(x) \qquad (40) \end{aligned}$$

于是

$$\varphi_0 = 1, \qquad \varphi_1 = x, \qquad \varphi_2 = x^2 - \frac{2}{5}, \qquad \varphi_3 = x^3 - \frac{9x}{14}, \qquad \varphi_4 = x^4 - \frac{46x^2}{51} + \frac{37}{357} \qquad (41)$$

第二题

对于Chebyshev多项式$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$，令$S_n(x) = T_n(2x - 1)$，其中$x \in [0, 1]$，证明：$\{S_n(x)\}$是$[0, 1]$上权$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}$的正交多项式，并求$S_0(x), S_1(x), S_2(x), S_3(x)$。

证明：由于$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$，那么$S_n(x) = \cos(n \arccos(2x - 1))$，其中$x \in [0, 1]$，于是

$$(S_m(x), S_n(x)) = \int_0^1 \rho(x) S_m(x) S_n(x) \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0 \end{cases} \qquad (42)$$

于是$\{S_n(x)\}$是$[0, 1]$上权$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}$的正交多项式，且

$$S_0(x) = 1, \quad S_1(x) = 2x - 1, \quad S_2(x) = \cos\left(2 \arccos(2x - 1)\right), \quad S_3(x) = \cos\left(3 \arccos(2x - 1)\right) \qquad (43)$$

第三题

用T_3的零点作为插值点，求$f(x) = \mathrm{e}^x$在区间$[-1, 1]$上的二次插值多项式，并估计其最大误差界。

解：T_3的零点为$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, x_1 = 0, x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$，那么容易求得其二次插值多项式为

$$P(x) = \frac{2\left(\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2}{3} x^2 + \frac{\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{3}} x + 1 \qquad (44)$$

其最大误差界为

$$|R_2| \leq \frac{\|f'''\|_\infty}{24} = \frac{\mathrm{e}}{24} \qquad (45)$$

第四题

求函数$f(x) = 1/x$在区间$[1, 3]$上对于$\mathrm{span}\{1, x\}$的最佳平方逼近多项式。

解：记$S(x) = a_0 + a_1 x$为函数$f(x) = 1/x$在区间$[1, 3]$上对于$\mathrm{span}\{1, x\}$的最佳平方逼近多项式，那么

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (1,x) \\ (x,1) & (x,x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f(x),1) \\ (f(x),x) \end{pmatrix} \tag{46}$$

于是

$$a_0 = \frac{13}{2}\ln 3 - 6, \qquad a_1 = 3 - 3\ln 3 \tag{47}$$

因此

$$S(x) = \left(\frac{13}{2}\ln 3 - 6\right) + (3 - 3\ln 3)x \tag{48}$$

平方偏差为

$$\|\delta\|_2^2 = \|f(x) - S(x)\|_2^2 = 12\ln 3 - \frac{13}{2}\ln^2 3 - \frac{16}{3} \tag{49}$$

第五题

求函数$f(x) = \ln x$在区间$[1,2]$上对于$\text{span}\{1,x\}$的最佳平方逼近多项式。

解：记$S(x) = a_0 + a_1 x$为函数$f(x) = \ln x$在区间$[1,2]$上对于$\text{span}\{1,x\}$的最佳平方逼近多项式，那么

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (1,x) \\ (x,1) & (x,x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f(x),1) \\ (f(x),x) \end{pmatrix} \tag{50}$$

于是

$$a_0 = 10\ln 4 - \frac{29}{2}, \qquad a_1 = 9 - 6\ln 4 \tag{51}$$

因此

$$S(x) = \left(10\ln 4 - \frac{29}{2}\right) + (9 - 6\ln 4)x \tag{52}$$

第六周

第一题

已知实验数据如下，用最小二乘法求形如$y=a+bx^2$的经验公式，并计算均方误差。

x_i	19	25	31	38	44
y_i	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

解：由于

$$(1，1)=5, \qquad (1,x^2)=(x^2,1)=5327, \qquad (x^2,x^2)=7277699 \tag{53}$$
$$(f(x),1)=271.4, \qquad (f(x),x^2)=369321.5 \tag{54}$$

于是

$$\begin{pmatrix} 5 & 5327 \\ 5327 & 7277699 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 271.4 \\ 369321.5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.97 \\ 0.05 \end{pmatrix} \tag{55}$$

因此

$$y=0.97+0.05x^2 \tag{56}$$

均方误差为

$$\|\delta\|^2=\|f-y\|^2=0.015 \tag{57}$$

第二题

已知实验数据如下，用最小二乘法拟合$y=f(x)$，并计算均方误差。

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
y	0	1.27	2.16	2.86	3.44	3.87	4.15	4.37	4.51	4.58	4.62	4.64

解：三次函数拟合

$$f(x)=a+bx+cx^2+dx^4 \tag{58}$$

那么

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (1,x) & (1,x^2) & (1,x^3) \\ (x,1) & (x,x) & (x,x^2) & (x,x^3) \\ (x^2,1) & (x^2,x) & (x^2,x^2) & (x^2,x^3) \\ (x^3,1) & (x^3,x) & (x^3,x^2) & (x^3,x^3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1,f(x)) \\ (x,f(x)) \\ (x^2,f(x)) \\ (x^3,f(x)) \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.04421 \\ 0.25569 \\ -0.00491 \\ 0.00003 \end{pmatrix} \tag{59}$$

因此

$$f(x)=0.04421+0.25569x-0.00491x^2+0.00003x^4 \tag{60}$$

均方误差为

$$\|\delta\|^2=\|f-y\|^2=0.00871 \tag{61}$$

第三题

确定如下求积公式中的待定系数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度。

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)\mathrm{d}x \approx A_{-1}f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h) \tag{62}$$

解：由如下方程

$$\int_{-2h}^{2h} \mathrm{d}x = A_{-1} + A_0 + A_1 \tag{63}$$

$$\int_{-2h}^{2h} x\mathrm{d}x = A_{-1}(-h) + A_1 h \tag{64}$$

$$\int_{-2h}^{2h} x^2\mathrm{d}x = A_{-1}h^2 + A_1 h^2 \tag{65}$$

解得

$$A_{-1} = \frac{8}{3}h, \qquad A_0 = -\frac{4}{3}h, \qquad A_1 = \frac{8}{3}h \tag{66}$$

此时

$$\int_{-2h}^{2h} x^3\mathrm{d}x = A_{-1}(-h^3) + A_1 h^3 = 0 \tag{67}$$

$$\int_{-2h}^{2h} x^4\mathrm{d}x = \frac{64}{5}h^5, \qquad A_{-1}h^4 + A_1 h^4 = \frac{16}{3}h^5 \tag{68}$$

因此该求积公式具有3次代数精度。

第四题

确定如下求积公式中的待定系数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度。

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3}f(-1) + \frac{2}{3}f(x_1) + f(x_2) \tag{69}$$

解：由如下方程

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 \tag{70}$$

$$\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(-1) + \frac{2}{3}x_1 + x_2 \tag{71}$$

$$\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_1^2 + x_2^2 \tag{72}$$

解得

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{6}}{5}, \quad x_2 = \frac{3+2\sqrt{6}}{15}; \qquad \text{or} \qquad x_1 = \frac{1+\sqrt{6}}{5}, \quad x_2 = \frac{3-2\sqrt{6}}{15} \tag{73}$$

当$x_1 = \dfrac{1-\sqrt{6}}{5}, x_2 = \dfrac{3+2\sqrt{6}}{15}$时

$$\int_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x = 0, \qquad \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_1^3 + x_2^3 = \frac{2(57-2\sqrt{6})}{225} \tag{74}$$

此时该求积公式具有2次代数精度。

当$x_1 = \dfrac{1+\sqrt{6}}{5}, x_2 = \dfrac{3-2\sqrt{6}}{15}$时

$$\int_{-1}^{1} x^3 \mathrm{d}x = 0, \qquad \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_1^3 + x_2^3 = \frac{2(57 + 2\sqrt{6})}{225} \tag{75}$$

此时该求积公式具有2次代数精度。

第八周

第一题

证明：Cotest公式具有5次代数精度。

证明：Cotest公式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{90}\left(7f\left(a\right)+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+7f\left(b\right)\right) \tag{76}$$

注意到

$$\int_a^b x^0\mathrm{d}x = \frac{b-a}{90}\left(7f(a)^0+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)^0+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)^0+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)^0+7f(b)^0\right) = b-a \tag{77}$$

$$\int_a^b x^1\mathrm{d}x = \frac{b-a}{90}\left(7f(a)^1+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)^1+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)^1+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)^1+7f(b)^1\right) = \frac{b^2-a^2}{2} \tag{78}$$

$$\int_a^b x^2\mathrm{d}x = \frac{b-a}{90}\left(7f(a)^2+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)^2+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)^2+7f(b)^2\right) = \frac{b^3-a^3}{3} \tag{79}$$

$$\int_a^b x^3\mathrm{d}x = \frac{b-a}{90}\left(7f(a)^3+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)^3+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)^3+7f(b)^3\right) = \frac{b^4-a^4}{4} \tag{80}$$

$$\int_a^b x^4\mathrm{d}x = \frac{b-a}{90}\left(7f(a)^4+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)^4+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)^4+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)^4+7f(b)^4\right) = \frac{b^5-a^5}{5} \tag{81}$$

$$\int_a^b x^5\mathrm{d}x = \frac{b-a}{90}\left(7f(a)^5+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)^5+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)^5+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)^5+7f(b)^5\right) = \frac{b^6-a^6}{6} \tag{82}$$

但是

$$\int_a^b x^6\mathrm{d}x = \frac{b^7-a^7}{7} \tag{83}$$

$$\frac{b-a}{90}\left(7f(a)^6+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)^6+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)^6+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)^6+7f(b)^6\right) = \frac{b^7-a^7}{7}+\frac{(b-a)^7}{2688} \tag{84}$$

因此Cotest公式具有5次代数精度。

第二题

使用Simpson公式计算积分$\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$，并估计误差。

解：记$f(x)=\mathrm{e}^{-x}$，那么由Simpson公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right) \tag{85}$$

计算得

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \approx \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}}+\frac{4}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right) \approx 0.632334 \tag{86}$$

误差为

$$|R[f]| = \frac{1}{2880}\mathrm{e}^{-\xi} \leq \frac{1}{2880} \approx 3.47\times 10^{-4} \tag{87}$$

第三题

若用复合梯形公式计算积分$I=\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$，问区间$[0,1]$应分多少等份才能使截断误差不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-5}$？若改用复合Simpson公式，要达到同样精度区间$[0,1]$应分多少等份？

解：若用复合梯形公式计算积分$I=\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$，那么截断误差为

$$\frac{1}{12n^2}\mathrm{e}^{\xi} \le \frac{\mathrm{e}}{12n^2} \le \frac{1}{2}\times 10^{-5} \tag{88}$$

可得$n\ge 212.85$，因此区间$[0,1]$应分213等份才能使截断误差不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-5}$。

若用复合Simpson公式计算积分$I=\int_0^1 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$，那么截断误差为

$$\frac{1}{2880n^4}\mathrm{e}^{\xi} \le \frac{\mathrm{e}}{2880n^4} \le \frac{1}{2}\times 10^{-5} \tag{89}$$

可得$n\ge 3.71$，因此区间$[0,1]$应分4等份才能使截断误差不超过$\frac{1}{2}\times 10^{-5}$。

第九周

第一题

分别使用梯形公式和Simpson公式计算如下积分：

$$\int_0^1 \frac{x}{4+x^2}\mathrm{d}x, \qquad n=8 \tag{90}$$

解：记$f(x)=x/(4+x^2)$，那么由梯形公式

$$T_n=\frac{b-a}{2n}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right) \tag{91}$$

可得$T_8\approx 0.11140$；由Simpson公式

$$S_n=\frac{b-a}{6n}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+4\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)+f(b)\right) \tag{92}$$

可得$S_8\approx 0.11157181$。

第二题

分别使用梯形公式和Simpson公式计算如下积分：

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-\sin^2 x}\mathrm{d}x, \qquad n=6 \tag{93}$$

解：记$f(x)=\sqrt{4-\sin^2 x}$，那么由梯形公式

$$T_n=\frac{b-a}{2n}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right) \tag{94}$$

可得$T_6\approx 1.03562$；由Simpson公式

$$S_n=\frac{b-a}{6n}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+4\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)+f(b)\right) \tag{95}$$

可得$S_6\approx 1.03576389$。

第三题

构造Gauss型求积公式

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}f(x)\mathrm{d}x \approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1) \tag{96}$$

解：求关于权函数$\rho(x)=1/\sqrt{x}$的2次正交多项式，由递推关系

$$\varphi_0=1 \tag{97}$$

$$\varphi_n=x^n-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x^n,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}\varphi_k \tag{98}$$

其中

$$(f,g)=\int_0^1 \rho f g \tag{99}$$

容易知道

$$\varphi_0(x)=1,\qquad \varphi_1(x)=x-\frac{1}{3},\qquad \varphi_2(x)=x^2-\frac{6}{7}x+\frac{3}{35} \tag{100}$$

那么x_0,x_1为多项式$\varphi_2(x)$的零点，不妨

$$x_0=\frac{15-2\sqrt{30}}{35},\qquad x_1=\frac{15+2\sqrt{30}}{35} \tag{101}$$

那么

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=A_0+A_1 \iff A_0+A_1=2 \tag{102}$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=A_0x_0+A_1x_1 \iff x_0A_0+x_1A_1=\frac{2}{3} \tag{103}$$

解得

$$A_0=1+\frac{\sqrt{30}}{18},\qquad A_1=1-\frac{\sqrt{30}}{18} \tag{104}$$

因此

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}f(x)\mathrm{d}x\approx\left(1+\frac{\sqrt{30}}{18}\right)f\left(\frac{15-2\sqrt{30}}{35}\right)+\left(1-\frac{\sqrt{30}}{18}\right)f\left(\frac{15+2\sqrt{30}}{35}\right) \tag{105}$$

第四题

用$n=2,3$的Gauss-Legendre公式计算积分

$$\int_1^3 \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x \tag{106}$$

解：记

$$f(x)=\mathrm{e}^x\sin x \tag{107}$$

$$g(x)=f(x+2)=\mathrm{e}^{x+2}\sin(x+2) \tag{108}$$

那么

$$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x \tag{109}$$

首先求Legendre多项式$L_n(x)$

$$L_1(x)=x,\quad L_2(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2},\quad L_3(x)=\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x,\quad L_4(x)=\frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{8}{3} \tag{110}$$

当$n=2$时，记

$$\int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)+A_2f(x_2) \tag{111}$$

$L_3(x)$的零点为

$$x_0=0,\qquad x_1=-\frac{\sqrt{15}}{5},\qquad x_2=\frac{\sqrt{15}}{5} \tag{112}$$

由

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = A_0 + A_1 + A_2 \iff A_0 + A_1 + A_2 = 2 \tag{113}$$

$$\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = A_0x_0 + A_1x_1 + A_2x_2 \iff A_0x_0 + A_1x_1 + A_2x_2 = 0 \tag{114}$$

$$\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = A_0x_0^2 + A_1x_1^2 + A_2x_2^2 \iff A_0x_0^2 + A_1x_1^2 + A_2x_2^2 = \frac{2}{3} \tag{115}$$

解得

$$A_0 = \frac{8}{9}, \qquad A_1 = \frac{5}{9}, \qquad A_2 = \frac{5}{9} \tag{116}$$

因此

$$\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x \approx \frac{5}{9}g(-\sqrt{15}/5) + \frac{8}{9}g(0) + \frac{5}{9}g(\sqrt{15}/5) \approx 10.948 \tag{117}$$

当$n=3$时，记

$$\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x \approx A_0f(x_0) + A_1f(x_1) + A_2f(x_2) + A_3f(x_3) \tag{118}$$

$L_4(x)$的零点为

$$x_0 = -\sqrt{\frac{1}{35}\left(15-2\sqrt{30}\right)}, \qquad x_1 = \sqrt{\frac{1}{35}\left(15-2\sqrt{30}\right)} \tag{119}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{1}{35}\left(15+2\sqrt{30}\right)}, \qquad x_3 = \sqrt{\frac{1}{35}\left(15+2\sqrt{30}\right)} \tag{120}$$

由

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 \iff A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 2 \tag{121}$$

$$\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = A_0x_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 \iff A_0x_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 = 0 \tag{122}$$

$$\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = A_0x_0^2 + A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + A_3x_3^2 \iff A_0x_0^2 + A_1x_1^2 + A_2x_2^2 + A_3x_3^2 = \frac{2}{3} \tag{123}$$

$$\int_{-1}^{1} x^3\mathrm{d}x = A_0x_0^3 + A_1x_1^3 + A_2x_2^3 + A_3x_3^3 \iff A_0x_0^3 + A_1x_1^3 + A_2x_2^3 + A_3x_3^3 = 0 \tag{124}$$

解得

$$A_0 = \frac{1}{36}\left(18+\sqrt{30}\right), \qquad A_1 = \frac{1}{36}\left(18+\sqrt{30}\right) \tag{125}$$

$$A_2 = \frac{1}{36}\left(18-\sqrt{30}\right), \qquad A_3 = \frac{1}{36}\left(18-\sqrt{30}\right) \tag{126}$$

因此

$$\begin{aligned}
\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 g(x)\mathrm{d}x \approx & \frac{1}{36}\left(18+\sqrt{30}\right) g\left(-\sqrt{\frac{1}{35}\left(15-2\sqrt{30}\right)}\right) && (127)\\
& + \frac{1}{36}\left(18+\sqrt{30}\right) g\left(\sqrt{\frac{1}{35}\left(15-2\sqrt{30}\right)}\right) && (128)\\
& + \frac{1}{36}\left(18-\sqrt{30}\right) g\left(-\sqrt{\frac{1}{35}\left(15+2\sqrt{30}\right)}\right) && (129)\\
& + \frac{1}{36}\left(18-\sqrt{30}\right) g\left(\sqrt{\frac{1}{35}\left(15+2\sqrt{30}\right)}\right) && (130)\\
\approx & 10.950140 && (131)
\end{aligned}$$

第十周

第一题

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln 3 = 1.09861228866811\cdots \tag{132}$$

第一问

使用Romberg方法计算积分$\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x}$。

解：精确数值积分值如下

n	T_n	S_n	C_n	R_n
2^0	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{742}{675}$	$\frac{431686}{392931}$
2^1	$\frac{7}{6}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{342611}{311850}$	$\frac{694837621103}{632468286450}$
2^2	$\frac{67}{60}$	$\frac{9137}{8316}$	$\frac{66175037683}{60235074900}$	$\frac{172360324405522117934761}{156889128027453583261500}$
2^3	$\frac{30581}{27720}$	$\frac{1260484963}{1147334760}$	$\frac{26180652570471192967}{23830656645774069000}$	$\frac{25439163417497615873531779822787373174797}{23155724434891620520320214190676005223000}$

近似数值积分值为

n	T_n	S_n	C_n	R_n
2^0	1.33333	1.11111	1.0992592	1.09863054837
2^1	1.16667	1.10000	1.0986403	1.09861258816
2^2	1.11667	1.09873	1.0986130	1.09861229119
2^3	1.10321	1.09862	1.0986123	1.09861228868

第二问

使用三点Gauss-Legendre求积公式计算积分$\displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x}$。

解：注意到

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+2} \tag{133}$$

令$f(x) = 1/(x+2)$，三点Gauss-Legendre求积公式为

$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{5}{9} f(-\sqrt{15}/5) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{15}/5) \tag{134}$$

代入数据可得

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+2} \approx \frac{56}{51} \approx 1.0980 \tag{135}$$

第三问

使用五点Gauss-Legendre求积公式计算积分$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x}$。

解：注意到

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+2} \tag{136}$$

令$f(x)=1/(x+2)$，五点Gauss-Legendre求积公式为

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{128}{225}f(0) &+ \frac{1}{900}\left(322+13\sqrt{70}\right)f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{7}\left(35-2\sqrt{70}\right)}\right) &(137)\\ &+ \frac{1}{900}\left(322+13\sqrt{70}\right)f\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{7}\left(35-2\sqrt{70}\right)}\right) &(138)\\ &+ \frac{1}{900}\left(322-13\sqrt{70}\right)f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{7}\left(35+2\sqrt{70}\right)}\right) &(139)\\ &+ \frac{1}{900}\left(322-13\sqrt{70}\right)f\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{7}\left(35+2\sqrt{70}\right)}\right) &(140)\end{aligned}$$

代入数据可得

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+2} \approx \frac{12244}{11145} \approx 1.098609 \tag{141}$$

第四问

将区间$[1,3]$分为四等份，使用复合两点Gauss-Legendre求积公式计算积分$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x}$。

解：使用两点Gauss-Legendre求积公式计算积分

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x-\frac{a+b}{a-b}} \tag{142}$$

记$f(x)=1/(x-\frac{a+b}{a-b})$，两点Gauss-Legendre求积公式为

$$\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x \approx f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3}) \tag{143}$$

代入数据

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\frac{b+a}{b-a}} \approx -\frac{3(a-b)(a+b)}{a^2+4ab+b^2} \tag{144}$$

注意到

$$\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\frac{5}{2}}^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{145}$$

代入数据可得

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x} \approx \frac{15}{37}, \quad \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{\mathrm{d}x}{x} \approx \frac{21}{73}, \quad \int_2^{\frac{5}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x} \approx \frac{27}{121}, \quad \int_{\frac{5}{2}}^3 \frac{\mathrm{d}x}{x} \approx \frac{33}{181}, \tag{146}$$

因此

$$\int_{1}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_{2}^{\frac{5}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_{\frac{5}{2}}^{3}\frac{\mathrm{d}x}{x}\approx\frac{64983552}{59154601}\approx 1.09854 \tag{147}$$

第五问

比较如上计算结果。

解：在使用Romberg方法计算数值积分时，越靠借右下角，数值精度越高。

Gauss-Legendre求积公式的数值精度如下

	精确值	积分值	误差
三点Gauss-Legendre求积公式	$\ln 3$	$\frac{56}{51}$	5.73×10^{-4}
五点Gauss-Legendre求积公式	$\ln 3$	$\frac{12244}{11145}$	3.04×10^{-6}
复合两点Gauss-Legendre求积公式	$\ln 3$	$\frac{64983552}{59154601}$	7.47×10^{-5}

因此五点Gauss-Legendre求积公式数值精度最高。

第二题

确定如下数值微分公式的截断误差表达式

$$f'(x_0)=\frac{1}{2h}(4f(x_0+h)-3f(x_0)-f(x_0+2h)) \tag{148}$$

解：由$f(x)$的Taylor展开

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)^3 \tag{149}$$

因此

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\frac{f^{(3)}(\alpha)}{3!}h^3 \tag{150}$$

$$f(x_0+2h)=f(x_0)+2f'(x_0)h+4\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+8\frac{f^{(3)}(\beta)}{3!}h^3 \tag{151}$$

进而截断误差为

$$f'(x_0)-\frac{1}{2h}(4f(x_0+h)-3f(x_0)-f(x_0+2h))=\frac{1}{3}h^2(2f^{(3)}(\beta)-f^{(3)}(\alpha))=\frac{1}{3}h^2f^{(3)}(\xi) \tag{152}$$

第三题

对于对称正定矩阵$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，定义$\|x\|_A=\sqrt{(Ax,x)}$，证明$\|x\|_A$为向量范数。

- $\|x\|_A\geq 0$，当且仅当$x=0$时等号成立。
- $\|\lambda x\|_A=|\lambda|\|x\|_A$
- $\|x+y\|_A\leq\|x\|_A+\|y\|_A$

证明：由于A为正定矩阵，那么存在可逆矩阵Q，使得成立$A=Q^TQ$，因此

$$\|x\|_A=\sqrt{(Ax,x)}=\sqrt{x^TAx}=\sqrt{(Qx)^T(Qx)}=\|Qx\|_2 \tag{153}$$

对于正定性，显然$\|x\|\geq 0$，且

$$\|x\|_A=0\iff\|Qx\|_2=0\iff Qx=0\iff x=0 \tag{154}$$

对于绝对齐性，注意到

$$\|\lambda x\|_A = \|\lambda Q x\|_2 = |\lambda| \|Q x\|_2 = |\lambda| \|x\|_A \tag{155}$$

对于三角不等式，注意到

$$\|x + y\|_A = \|Q(x + y)\|_2 = \|Qx + Qy\|_2 \leq \|Qx\|_2 + \|Qy\|_2 = \|x\|_A + \|y\|_A \tag{156}$$

第十一周

第一题

对于$\lambda \neq 0$，设

$$A = \begin{pmatrix} 2\lambda & \lambda \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{157}$$

证明：当$|\lambda| = 2/3$时，$\mathrm{cond}(A)_\infty$取到最小值。

证明：由于

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & -1 \\ -\frac{1}{\lambda} & 2 \end{pmatrix} \tag{158}$$

因此

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le 2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{3|\lambda|, 2\} = \begin{cases} 3|\lambda|, & |\lambda| \ge \frac{2}{3} \\ 2, & |\lambda| < \frac{2}{3} \end{cases} \tag{159}$$

$$\|A^{-1}|_\infty = \max_{1\le i\le 2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| = \max\left\{1 + \frac{1}{|\lambda|}, 2 + \frac{1}{|\lambda|}\right\} = 2 + \frac{1}{|\lambda|} \tag{160}$$

因此

$$\mathrm{cond}(A)_\infty = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty = \begin{cases} 6|\lambda| + 3, & |\lambda| \ge \frac{2}{3} \\ 4 + \frac{2}{|\lambda|}, & |\lambda| < \frac{2}{3} \end{cases} \tag{161}$$

因此当$|\lambda| = 2/3$时，$\mathrm{cond}(A)_\infty$取到最小值7。

第二题

设

$$A = \begin{pmatrix} 100 & 99 \\ 99 & 98 \end{pmatrix} \tag{162}$$

计算A的条件数$\mathrm{cond}(A)_2$与$\mathrm{cond}(A)_\infty$。

解：由于

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -98 & 99 \\ 99 & -100 \end{pmatrix} \tag{163}$$

且$A^T A$与$(A^{-1})^T A^{-1}$的特征值均为

$$19603 + 2574\sqrt{58}, \qquad \frac{1}{19603 + 2574\sqrt{58}} \tag{164}$$

那么

$$\|A\|_2 = \sqrt{19603 + 2574\sqrt{58}} \approx 198 \tag{165}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{19603 + 2574\sqrt{58}} \approx 198 \tag{166}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le 2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{199, 197\} = 199 \tag{167}$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max_{1 \le i \le 2} \sum_{j=1}^{2} |a_{ij}| = \max\{197, 199\} = 199 \tag{168}$$

因此

$$\mathrm{cond}(A)_2 = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2 = 19603 + 2574\sqrt{58} \approx 39206 \tag{169}$$

$$\mathrm{cond}(A)_\infty = \|A^{-1}\|_\infty \|A\|_\infty = 39601 \tag{170}$$

第三题

设

$$A = \begin{pmatrix} 10 & a & 0 \\ b & 10 & b \\ 0 & a & 5 \end{pmatrix} \tag{171}$$

$\det A \neq 0$。求线性方程$Ax = b$的Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代收敛的充分必要条件。

解：由题意

$$\det A = 500 - 15ab \neq 0 \iff ab \neq \frac{100}{3} \tag{172}$$

Jacobi迭代矩阵为

$$B_J = I - D^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{10} & 0 \\ -\frac{b}{10} & 0 & -\frac{b}{10} \\ 0 & -\frac{a}{5} & 0 \end{pmatrix} \tag{173}$$

而矩阵B_J的特征值为

$$0, \qquad \frac{1}{10}\sqrt{3ab}, \qquad -\frac{1}{10}\sqrt{3ab} \tag{174}$$

因此

$$\rho(B_J) = \frac{\sqrt{3|ab|}}{10} \tag{175}$$

而Jacobi迭代收敛 $\iff$

$$\rho(B_J) < 1 \iff \frac{\sqrt{3|ab|}}{10} < 1 \iff |ab| < \frac{100}{3} \tag{176}$$

Gauss-Seidel迭代矩阵为

$$B_G = I - (D - L)^{-1}A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{10} & 0 \\ 0 & \frac{ab}{100} & -\frac{b}{10} \\ 0 & -\frac{a^2 b}{500} & \frac{ab}{50} \end{pmatrix} \tag{177}$$

而矩阵B_G的特征值为

$$0, \qquad 0, \qquad \frac{3ab}{100} \tag{178}$$

因此

$$\rho(B_G) = \frac{3|ab|}{100} \tag{179}$$

而Gauss-Seidel迭代收敛 $\iff$

$$\rho(B_G) < 1 \iff \frac{3|ab|}{100} < 1 \iff |ab| < \frac{100}{3} \tag{180}$$

第三题

对于线性方程组$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$，若使用迭代法

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \alpha \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \tag{181}$$

求迭代法收敛的充分必要条件，并求出收敛最快的α。

解：一阶线性定常迭代为

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \left(\alpha \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{182}$$

迭代矩阵为

$$B = \alpha \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\alpha + 1 & 2\alpha \\ \alpha & 2\alpha + 1 \end{pmatrix} \tag{183}$$

而B的特征值为

$$a + 1, \qquad 4a + 1 \tag{184}$$

因此

$$\rho(B) = \max\{|\alpha + 1|, |4\alpha + 1|\} = \begin{cases} |\alpha + 1|, & -\frac{2}{5} \le a \le 0 \\ |4\alpha + 1|, & a < -\frac{2}{5} \text{或} a > 0 \end{cases} \tag{185}$$

而迭代收敛 $\iff$

$$\rho(B) < 1 \iff \max\{|\alpha + 1|, |4\alpha + 1|\} < 1 \iff -\frac{1}{2} < \alpha < 0 \tag{186}$$

而

$$\min \rho(B) = \rho(-2/5) = 3/5 \tag{187}$$

因此当$\alpha = -2/5$时，收敛速度最快。

第十二周

第一题

证明：对于

$$A=\begin{pmatrix}3&0&-2\\0&2&1\\-2&1&2\end{pmatrix}\tag{188}$$

使用Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代解线性方程$Ax=b$均收敛，试比较哪种方法收敛快。

证明：定义

$$D=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},\qquad L=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\2&-1&0\end{pmatrix},\qquad U=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\tag{189}$$

注意到A与$2D-A$的特征多项式均为

$$1-11x+7x^2-x^3\tag{190}$$

因此A与$2D-A$的特征值均为正数，进而A与$2D-A$均为正定矩阵，从而使用Jacobi迭代和Gauss-Seidel迭代解线性方程$Ax=b$均收敛。

为比较收敛速度，对于Jacobi迭代

$$B_J=I-D^{-1}A,\qquad \rho(B_J)=\frac{\sqrt{33}}{6}\tag{191}$$

对于Gauss-Seidel迭代

$$B_G=I-(D-L)^{-1}A,\qquad \rho(B_G)=\frac{11}{12}\tag{192}$$

而$\rho(B_J)>\rho(B_G)$，因此Gauss-Seidel迭代更快。

第二题

证明：对于线性方程组$Ax=b$，其中A为对称正定矩阵，迭代公式

$$x^{(n+1)}=x^{(n)}+w(b-Ax^{(n)})\tag{193}$$

在$0<w<2/\lambda_{\max}$时收敛，其中$\lambda_{\max}$为矩阵A的最大特征值。

证明：迭代公式为

$$x^{(n+1)}=(I-wA)x^{(n)}+wb\tag{194}$$

此为一阶定常迭代，因此迭代收敛的充分必要条件为

$$\rho(I-wA)<1\tag{195}$$

考察矩阵$I-wA$的特征值，注意到

$$(I-wA)x=(1-w\lambda)x\iff Ax=\lambda x\tag{196}$$

因此记矩阵A的最大与最小特征值为$\lambda_{\max}$与$\lambda_{\min}$，那么

$$\rho(I-wA)=\max\{|1-w\lambda_{\max}|,|1-w\lambda_{\min}|\}<1\iff 0<w<\frac{2}{\lambda_{\max}}\tag{197}$$

第三题

求解方程$x=1+1/x^2$在$x_0=1.5$附近的根，迭代公式为$x_{n+1}=1+1/x_n^2$。

解：记$f(x)=1+1/x^2$，注意到

$$f(1.3)=\frac{269}{169}\in(1.3,1.6),\qquad f(1.6)=\frac{89}{64}\in(1.3,1.6)\tag{198}$$

因此存在$x^*\in(1.3,1.6)$，使得成立$f(x^*)=x^*$。而

$$f'(x)=-\frac{2}{x^3}\in\left[-\frac{1000}{2197},-\frac{125}{256}\right],\qquad x\in[1.3,1.6]\implies|f'(x)|\le 0.92\tag{199}$$

进而不动点迭代收敛，收敛速度为

$$|x_n-x^*|<\frac{0.92^n}{1-0.92}|x_1-x_0|\tag{200}$$

二分法收敛速度为

$$|x_n-x^*|<\frac{0.1}{2^{n+1}}\tag{201}$$

从而二分法收敛速度快。若要求误差小于0.5×10^{-5}，则使用求得根为

$$x^*=1.46557\tag{202}$$

第四题

求解方程$x=\sqrt[3]{1+x^2}$在$x_0=1.5$附近的根，迭代公式为$x_{n+1}=\sqrt[3]{1+x_n^2}$。

解：记$f(x)=\sqrt[3]{1+x^2}$，注意到

$$f(1.4)=\frac{1}{5}\sqrt[3]{370}\in(1.4,1.5),\qquad f(1.5)=\frac{1}{2}\sqrt[3]{26}\in(1.4,1.5)\tag{203}$$

因此存在$x^*\in(1.4,1.5)$，使得成立$f(x^*)=x^*$。而

$$f'(x)=\frac{2}{3}x\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{1+x^2}\in\left[\frac{7}{111}\sqrt[3]{370},\frac{2}{13}\sqrt[3]{26}\right],\quad x\in[1.4,1.5]\implies|f'(x)|\le 0.46\tag{204}$$

进而不动点迭代收敛，收敛速度为

$$|x_n-x^*|<\frac{0.46^n}{1-0.46}|x_1-x_0|\tag{205}$$

二分法收敛速度为

$$|x_n-x^*|<\frac{0.1}{2^{n+1}}\tag{206}$$

从而不动点迭代收敛速度快。若要求误差小于0.5×10^{-5}，则使用不动点迭代求得根为

$$x^*=1.46557\tag{207}$$

第五题

求解方程$x=1/\sqrt{x-1}$在$x_0=1.5$附近的根，迭代公式为$x_{n+1}=1/\sqrt{x_n-1}$。

解：记$f(x)=1/\sqrt{x-1}$，注意到

$$f(1.4)=\frac{1}{2}\sqrt{10}>1.4,\qquad f(1.5)=\sqrt{2}<1.5\tag{208}$$

因此存在$x^* \in (1.4, 1.5)$，使得成立$f(x^*) = x^*$。而

$$f'(x) = -\frac{1}{2(x-1)^{\frac{3}{2}}} \in \left[-\frac{5}{8}\sqrt{10}, -\sqrt{2}\right], \qquad x \in [1.4, 1.5] \implies |f'(x)| > 1 \quad (209)$$

进而不动点迭代不收敛，若要求误差小于0.5×10^{-5}，则使用二分法求得根为

$$x^* = 1.46557 \quad (210)$$

第十三周

第一题

应用Newton法于方程$f(x) = x^n - a = 0$和方程$f(x) = 1 - a/x^n = 0$，分别求出$\sqrt[n]{a}$的迭代公式，并求

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a} - x_{n+1}}{(\sqrt[n]{a} - x_n)^2} \tag{211}$$

解：对于

$$f(x) = x^n - a, \qquad f'(x) = nx^{n-1}, \qquad f''(x) = n(n-1)x^{n-2} \tag{212}$$

迭代公式为

$$x_{k+1} = (1 - \frac{1}{n})x_k + \frac{a}{nx_k^{n-1}} \tag{213}$$

由于

$$f(\sqrt[n]{a}) = 0, \qquad f'(\sqrt[n]{a}) = na^{1-1/n} \tag{214}$$

那么该迭代公式在$\sqrt[n]{a}$附近平方收敛，且

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a} - x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a} - x_k)^2} = -\frac{f''(\sqrt[n]{a})}{2f'(\sqrt[n]{a})} = \frac{1-n}{2\sqrt[n]{a}} \tag{215}$$

对于

$$f(x) = 1 - \frac{a}{x^n}, \qquad f'(x) = \frac{an}{x^{n+1}}, \qquad f''(x) = -\frac{an(n+1)}{x^{n+2}} \tag{216}$$

迭代公式为

$$x_{k+1} = (1 + \frac{1}{n})x_k + \frac{x_k^{n+1}}{an} \tag{217}$$

由于

$$f(\sqrt[n]{a}) = 0, \qquad f'(\sqrt[n]{a}) = \frac{n}{\sqrt[n]{a}} \tag{218}$$

那么该迭代公式在$\sqrt[n]{a}$附近平方收敛，且

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a} - x_{k+1}}{(\sqrt[n]{a} - x_k)^2} = -\frac{f''(\sqrt[n]{a})}{2f'(\sqrt[n]{a})} = \frac{n+1}{2\sqrt[n]{a}} \tag{219}$$

第二题

证明迭代公式

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3a)}{3x_n^2 + a} \tag{220}$$

是计算$\sqrt{a}$的三阶方法。如果初值x_0充分靠近根$\sqrt{a}$，求

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a} - x_{n+1}}{(\sqrt{a} - x_n)^3} \tag{221}$$

证明：令

$$f(x)=\frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a} \tag{222}$$

那么$f(\sqrt{a})=\sqrt{a}$，且

$$f'(x)=\frac{3(a-x^2)^2}{(a+3x^2)^2},\qquad f'(\sqrt{a})=0 \tag{223}$$

那么方程$x=f(x)$在$\sqrt{a}$附近存在且存在唯一解$x^*=\sqrt{a}$。

（法一）由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-\sqrt{a}}{(x_n-\sqrt{a})^3}=\lim_{x\to\sqrt{a}}\frac{f(x)-\sqrt{a}}{(x-\sqrt{a})^3}=\lim_{x\to\sqrt{a}}\frac{\frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a}-\sqrt{a}}{(x-\sqrt{a})^3}=\lim_{x\to\sqrt{a}}\frac{1}{a+3x^2}=\frac{1}{4a} \tag{224}$$

因此迭代公式$x_{n+1}=f(x_n)$是计算$\sqrt{a}$的三阶方法。

（法二）由于

$$f''(x)=\frac{48ax(x^2-a)}{(a+3x^2)^3},\qquad f''(\sqrt{a})=0 \tag{225}$$

$$f'''(x)=-\frac{48a(a^2-18ax^2+9x^4)}{(a+3x^2)^4},\qquad f'''(\sqrt{a})=\frac{3}{2a} \tag{226}$$

因此迭代公式$x_{n+1}=f(x_n)$是计算$\sqrt{a}$的三阶方法，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-\sqrt{a}}{(x_n-\sqrt{a})^3}=\frac{f'''(\sqrt{a})}{3!}=\frac{1}{4a} \tag{227}$$

第三题

用如下方法求$f(x)=x^3-3x-1$的在$x_0=2$附近的零点，零点的准确值为

$$x^*=1.87938524\cdots \tag{228}$$

要求计算结果四位有效数字准确。

第一问

Newton法，$x_0=2$

解：Newton迭代为

$$x_{n+1}=\varphi(x_n),\qquad \varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)} \tag{229}$$

代入可得

$$x_{n+1}=\frac{2x_n^3+1}{3(x_n^2-1)} \tag{230}$$

代入数据可得

$$x_0=2,\quad x_1=\frac{17}{9}\approx 1.88889,\quad x_2=\frac{10555}{5616}\approx 1.87945,\quad x_3=\frac{1264474496323}{672812825256}\approx 1.87939 \tag{231}$$

第四题

对于$f(x)=0$的Newton公式

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{232}$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{(x_{n+1}-x_n)^2}=-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \tag{233}$$

其中$f(x^*)=0$。

证明：由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \tag{234}$$

那么

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{(x_{n+1}-x_n)^2}&=-\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_{n+1})/f'(x_{n+1})}{(f(x_n)/f'(x_n))^2} && (235)\\
&=-\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_{n+1})(f'(x_n))^2}{f'(x_{n+1})(f(x_n))^2} && (236)\\
&=-\lim_{n\to\infty}\frac{(f(x_{n+1})-f(x^*))(f'(x_n))^2}{f'(x_{n+1})(f(x_n)-f(x^*))^2} && (237)\\
&=-\lim_{n\to\infty}\frac{f'(\xi_{n+1})(x_{n+1}-x^*)(f'(x_n))^2}{f'(x_{n+1})(f'(\xi_n))^2(x_n-x^*)^2} && (238)\\
&=-\lim_{n\to\infty}\frac{f'(\xi_{n+1})(f'(x_n))^2}{f'(x_{n+1})(f'(\xi_n))^2}\frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^2} && (239)\\
&=-\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} && (240)
\end{aligned}$$

第十四周

第一题

非线性方程组

$$\begin{cases}3x^2-y^2=0\\3xy^2-x^3-1=0\end{cases}\tag{241}$$

在$(0.4,0.7)$附近存在解，构造不动点迭代，使得其收敛至此解，并计算精确到10^{-5}，其中向量范数为$\|\cdot\|_\infty$。

解：记

$$\Phi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}}y\\\sqrt{\dfrac{1+x^3}{3x}}\end{pmatrix}\tag{242}$$

那么原方程组的解为向量函数Φ的不动点。设迭代区域为$D=[0.4,0.6]\times[0.7,1]$，由于Φ的Jacobi矩阵为

$$\Phi'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\dfrac{2x^3-1}{2\sqrt{3x^3(x^3+1)}}&0\end{pmatrix}\implies\rho\left(\Phi'\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)=\sqrt{\frac{1-2x^3}{6\sqrt{x^3(x^3+1)}}}\le\frac{\sqrt{109}}{2\sqrt{3}\sqrt[4]{266}}\approx0.75\tag{243}$$

进而在(x^*,y^*)的邻域内该不动点迭代收敛。迭代结果如下表

n	x	y
0	0.4	0.7
1	0.404145	0.94163
2	0.54365	0.937673
3	0.541366	0.843598
4	0.487052	0.844641
5	0.487654	0.873764
6	0.504468	0.873392
7	0.504253	0.863476
8	0.498528	0.863598
9	0.498598	0.866878
10	0.500492	0.866838
11	0.500469	0.865741
12	0.499836	0.865755
13	0.499844	0.86612

n	x	y
14	0.500055	0.866116
15	0.500052	0.865994
16	0.499982	0.865995
17	0.499983	0.866036
18	0.500006	0.866035
19	0.500006	0.866022
精确解	0.5	$\sqrt{3}/2 \approx 0.86602540$

第十五周

第一题

用改进Euler法和梯形法解初值问题

$$y' = x^2 + x - y, \qquad y(0) = y \tag{244}$$

取步长$h = 0.1$，计算到$x = 0.5$，并与精确解$y = -\mathrm{e}^{-x} + x^2 - x + 1$相比较。

解：使用Euler法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{10}(x_n^2 + x_n - y_n), \qquad x_n = x_0 + nh \tag{245}$$

可得

$$y(0) = 0, \quad y(0.1) = 0, \quad y(0.2) = 0.011, \quad y(0.3) = 0.039, \quad y(0.4) = 0.06951, \quad y(0.5) = 0.118559 \tag{246}$$

使用梯形法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{20}(x_n^2 + x_n - y_n + x_{n+1}^2 + x_{n+1} - y_{n+1}) \tag{247}$$

$$\Longleftrightarrow y_{n+1} = \frac{1}{21}(x_n^2 + x_n + x_{n+1}^2 + x_{n+1} + 19y_n) \tag{248}$$

可得

$$y(0) = 0 \qquad y(0.1) = \frac{11}{2100} \approx 0.00524 \qquad y(0.2) = \frac{236}{11025} \approx 0.02141 \tag{249}$$

$$y(0.3) = \frac{45719}{926100} \approx 0.04937 \qquad y(0.4) = \frac{437114}{4862025} \approx 0.08990 \qquad y(0.5) = \frac{2347907}{16336404} \approx 0.14372 \tag{250}$$

与精确解的比较

	精确解	Euler法	误差	梯形法	误差
y_0	0	0	0	0	0
y_1	0.00516	0	0.00516	0.00524	0.00008
y_2	0.02127	0.011	0.01027	0.02141	0.00014
y_3	0.04918	0.039	0.01018	0.04937	0.00019
y_4	0.08968	0.06951	0.02017	0.08990	0.00022
y_5	0.14347	0.11856	0.02491	0.14372	0.00

第十六周

第一题

证明：对于任意t，如下Runge-Kutta方法为二阶精度

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(K_2 + K_3) \\ K_1 = f(x_n, y_n) \\ K_2 = f(x_n + th, y_n + thK_1) \\ K_3 = f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hK_1) \end{cases} \tag{251}$$

证明：截断误差为

$$T_{n+1} = y(x_n + h) - y_n - \frac{h}{2}(f(x_n + th, y_n + thf_n) + f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hf_n)) \tag{252}$$

其中

$$y_n = y(x_n), \qquad f_n = f(x_n, y_n) \tag{253}$$

作Taylor展开

$$y(x_n + h) = y_n + hy_n' + \frac{h^2}{2}y_n'' + O(h^3) = y_n + hf_n + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f_n) + O(h^3) \tag{254}$$

$$f(x_n + th, y_n + thf_n) = f_n + thf_x + thf_y f_n + O(h^2) \tag{255}$$

$$f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hf_n) = f_n + (1-t)hf_x + (1-t)hf_y f_n + O(h^2) \tag{256}$$

其中

$$f_x = f_x(x_n, y_n), \qquad f_y = f_y(x_n, y_n) \tag{257}$$

因此

$$\begin{aligned} T_{n+1} =& y(x_n + h) - y_n - \frac{h}{2}(f(x_n + th, y_n + thf_n) + f(x_n + (1-t)h, y_n + (1-t)hf_n)) && (258) \\ =& y_n + hf_n + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f_n) + O(h^3) - y_n && (259) \\ &- \frac{h}{2}(f_n + thf_x + thf_y f_n + O(h^2)) && (260) \\ &- \frac{h}{2}(f_n + (1-t)hf_x + (1-t)hf_y f_n + O(h^2)) && (261) \\ =& O(h^3) && (262) \end{aligned}$$

因此该Runge-Kutta方法为二阶精度。