线性代数应该这样学 Sheldon Axler

2022年1月12日　　11:22

目录

2022年1月25日 20:47

第一章 向量空间

2022年1月12日 11:22

§1 R^n与C^n

2022年1月12日 11:23

1. 复数(complex number)
   a. 定义：$z = a + bi, a, b \in \boldsymbol{R}$
   b. 复数的算术性质
      i. 交换性(commutativity)：$\forall x, y \in \boldsymbol{C}, x + y = y + x, xy + yx$
      ii. 结合性(associativity)：$\forall x, y, z \in \boldsymbol{C}, (x + y) + z = x + (y + z), (xy)z = x(yz)$
      iii. 分配性(distributive property)：$\forall x, y, z \in \boldsymbol{C}, x(y + z) = xy + xz$
      iv. 单位元(identities)：$\forall x \in \boldsymbol{C}, x + 0 = x, 1x = x$
      v. 加法逆元(additive inverse)：$\forall x \in \boldsymbol{C}, \exists y \in C, s.t. x + y = 0$
      vi. 乘法逆元(multiplicative inverse)：$\forall x \in \boldsymbol{C}\ and\ x \neq 0, \exists y \in \boldsymbol{C}, s.t. xy = 1$
2. $\boldsymbol{F}^n$
   a. n元组(n-tuple)：$(x_1, x_2, \dots, x_n)$，组具有长度及顺序
   b. 定义 $\boldsymbol{F}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \in F, i = 1,2, \dots, n\}$
   c. 定义 $\boldsymbol{F}^n$中的加法(addition in F^n)：
      对于$x, y \in \boldsymbol{F}^n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n), x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
   d. 定义 $\boldsymbol{F}^n$中在$\boldsymbol{F}$上的标量乘法(scalar multiplication in F^n)：
      对于$k \in \boldsymbol{F}, x \in \boldsymbol{F}^n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n), kx = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n)$
3. 域(field)：域是集合，并包含加法单位元和乘法单位元，并具有加法和乘法的封闭性，如$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$

§2 向量空间

2022年1月12日 12:00

1. 向量空间就是带有加法和标量乘法的集合$\boldsymbol{V}$，满足如下性质：
    a. 交换性(commutativity)：$\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \boldsymbol{V}, \mathrm{x}+\mathrm{y}=\mathrm{y}+\mathrm{x}$
    b. 结合性(associativity)：$\forall \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z} \in \boldsymbol{V}, \forall \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{F},(\mathrm{x}+\mathrm{y})+\mathrm{z}=\mathrm{x}+(\mathrm{y}+\mathrm{z}),(\mathrm{ab}) \mathrm{x}=\mathrm{a}(\mathrm{bx})$
    c. 分配性(distributive property)：$\forall \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \boldsymbol{V}, \forall \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \boldsymbol{F}, \mathrm{a}(\mathrm{x}+\mathrm{y})=\mathrm{ax}+\mathrm{ay},(\mathrm{a}+\mathrm{b}) \mathrm{x}=\mathrm{ax}+\mathrm{bx}$
    d. 加法单位元(additive identity)：$\exists 0 \in \boldsymbol{V}, \mathrm{s.t.} \forall \mathrm{x} \in \boldsymbol{V}, \mathrm{x}+0=0$
    e. 加法逆元(additive inverse)：$\forall \mathrm{x} \in \boldsymbol{F}, \exists \mathrm{y} \in \boldsymbol{F}, \mathrm{s.t.}\, \mathrm{x}+\mathrm{y}=0$
    f. 乘法单位元（multiplicative identity):$\exists 1 \in \boldsymbol{V}, \mathrm{s.t.} \forall \mathrm{x} \in \boldsymbol{V}, 1 \mathrm{x}=\mathrm{x}$
2. 定义$\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{S}}$表示$\boldsymbol{S}$到$\boldsymbol{F}$的所有函数的集合
3. 加法单位元具有唯一性
4. 乘法单位元具有唯一性

§3 子空间

2022年1月12日 14:38

1. 子空间（subspace）
   a. 定义 子空间：若$U \subset V$，且U为向量空间，则称U为V的子空间
   b. 子空间的充分必要条件
      i. 加法单位元：$0 \in U$
      ii. 加法封闭性：$x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$
      iii. 标量乘法封闭性：$k \in F, x \in U \Rightarrow kx \in U$
2. 子空间的和
   a. 定义 子集的和（sum of subsets):设$U_1, U_2, \ldots, U_n \subset V$,则$U_1, U_2, \ldots, U_n$的和定义为$U_1, U_2, \ldots, U_n$张成的空间，记作$\sum_{i=1}^{n} U_i$，即$\sum_{i=1}^{n} U_i = \{\sum_{i=1}^{n} x_i : x_i \in U_i, i = 1,2, \ldots, n\}$
   b. 子空间的和是包含这些子空间的最小子空间
   c. V的任意子空间的交仍为V的子空间
3. 直和（direct sum）
   a. 定义 直和
      设$U_1, U_2, \ldots, U_n$是V的子空间，若$\sum_{i=1}^{n} U_i$中的每个元素都可唯一地表示为$\sum_{i=1}^{n} x_i$，其中$x_i \in U_i, i = 1,2, \ldots, n$，称$\sum_{i=1}^{n} U_i$为直和，记作$U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$
   b. 直和的条件
      设$U_1, U_2, \ldots, U_n$是V的子空间，“$\sum_{i=1}^{n} U_i$为直和”当且仅当“$\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, x_i \in U_i, i = 1,2, \ldots, n \Rightarrow x_i = 0, i = 1,2, \ldots, n$”
   c. 设U, V都是W的子空间，则$U + V$为直和当且仅当$U \cap V = \{0\}$

第二章 有限维向量空间

2022年1月13日 18:59

§1 张成空间与线性无关

2022年1月13日 19:00

1. 线性组合与张成空间
   a. 定义 线性组合（linear combination)
      V中的一组向量$v_1, v_2, \dots, v_n$的线性组合是指形如$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$的向量，其中$a_1, a_2, \dots, a_n \in F$
   b. 定义 张成空间（span）
      i. V中的一组向量$v_1, v_2, \dots, v_n$的所有线性组合构成的集合称为$v_1, v_2, \dots, v_n$的张成空间，记作$span(v_1, v_2, \dots, v_n)$，即$span(v_1, v_2, \dots, v_n) = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n a_1, a_2, \dots, a_n \in F\}$。
      ii. 特别的$span(\,) = \{0\}$
   c. 张成空间是包含这组向量的最小子空间
   d. 定义 有限维向量空间 (finite-dimensional vector space)
      如果一个向量空间是由该空间中的某个向量组张成，则称这个向量空间是有限维的。
   e. 定义 多项式(polynomial)，$\mathcal{P}(F)$，多项式的次数（degree of a polynomial)，$\deg p$
      i. 对于函数$p: F \to F$，若存在$a_0, a_1, \dots, a_n$使得对任意$x \in F$均有$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，则称$p$为系数属于$F$的多项式。
      ii. 称$\mathcal{P}(F)$是系数属于F的全体多项式所组成的集合。
      iii. 若$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$，且$a_n \neq 0$，则称$p$的次数为$n$，记为$\deg p = n$
      iv. 特别的，规定恒等于0的多项式的次数为$-\infty$
2. 线性无关
   a. 定义 线性无关(linearly independent)
      i. V中的一组向量$v_1, v_2, \dots, v_n$线性无关，当且仅当使得$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0$的$a_1, a_2, \dots, a_n \in F$只有$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$
      ii. 特别的，规定空组$(\,)$是线性无关的
   b. 线性无关与线性相关的性质
      i. V是线性无关的当且仅当$v \neq 0$。
      ii. V中的一组向量$v_1, v_2, \dots, v_n$线性无关，当且仅当对于$\forall v \in span(v_1, v_2, \dots, v_n)$，$V$都可以唯一的表示成$v_1, v_2, \dots, v_n$的线性组合。
      iii. 一个线性无关组去掉一个向量后，余下的向量构成的向量组仍线性无关。相对的，一个线性相关组添加一个向量后所构成的向量组仍线性相关。
      iv. 线性相关性引理
         设$v_1, v_2, \dots, v_n$是V中的一个线性相关的向量组，则$\exists i \in \{1,2, \dots, n\}, s.t.\, v_i \in span(v_1, v_2, \dots, v_n)$且从$v_1, v_2, \dots, v_n$去掉$v_i$后，剩余组的张成空间仍为$span(v_1, v_2, \dots, v_n)$
      v. 在有限维向量空间中，线性无关向量组的长度不大于向量空间中的每一个张成组的长度。

§2 基

2022年1月14日 13:19

1. 定义 基 (basis)
   若V中的一个向量组既线性无关又张成V，则称该向量组为V的基。
2. 基的判定准则
   V中的向量组$v_1, v_2, \ldots, v_n$是V的基当且仅当对于每个$v \in V$都能唯一地写成$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$，其中$a_1, a_2, \cdots, a_n \in F$
3. 张成组含有基
   在向量空间中，每个张成组都可以去掉（或不去掉）一些向量来构成该向量空间的一个基。
4. 有限维向量空间的基
   每个有限维向量空间都有基。
5. 线性无关组可扩充为基
   在有限维向量空间中，每个线性无关的向量组都可以扩充为向量空间的基。
6. V的每个子空间都是V的直和项
   a. 设V是有限维的，U是V的子空间，则存在V的子空间W使得$V = U \oplus W$。
   b. 设U, W是V的子空间使得$V = U \oplus W$，并设$u_1, \ldots, u_m$是U的基，$w_1, \ldots, w_n$是W的基，那么$u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$是$V$的基。

§3 维数

2022年1月17日 18:02

1. 定义 维数（dimension）,$dim\,V$
   a. 有限维向量空间的任意基的长度称为这个向量空间的维数
   b. 若V是有限维的，则V的维数记为$dim\,V$
2. 基的长度不依赖基的选取
   有限维向量空间的任意两个基的长度都相同
3. 若V是有限维的，U是V的子空间，则$dim\,U \le dim\,V$
4. 具有适当长度的线性无关组是基
   若V是有限维的，则V中每个长度为$dim\,V$的线性无关向量组都是V的基
5. 具有适当长度的张成组是基
   若V是有限维的，则V中每个长度为$dim\,V$的张成向量组都是V的基
6. 和空间的维数
   如果U,V是有限维向量空间的两个子空间，则$dim(U+V) = dim\,U + dim\,V - dim(U \cap V)$

第三章 线性映射

2022年1月18日 17:10

§1 向量空间的线性映射

2022年1月18日 17:10

1. 定义 线性映射 (linear map)
   a. 从V到W的线性映射是具有以下性质的函数$T: V \to W$:
      i. 加性(additivity)
         对所有$u, v \in V$都有$T(u+v) = Tu + Tv$
      ii. 齐性(homogeneity)
         对所有$\lambda \in F$和$v \in V$都有$T(\lambda v) = \lambda(Tv)$
   b. 从V到W的线性映射构成的集合记为$\mathcal{L}(V, W)$
   c. $T(0) = 0$
   d. 常见线性映射
      i. 零(zero)：$0v = 0$
      ii. 恒等(identity)：$Iv = v$
      iii. 微分(differentiation)：$Dp = p'$
      iv. 积分(integration)：$Tp = \int_a^b p(x)dx$
      v. 乘以x^2(multiplication by x^2)：$(Tp)(x) = x^2 p(x)$
      vi. 向后位移(backward shift)：$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$
      vii. 从F^n到F^m：$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_{1,k} x_k, \sum_{k=1}^{n} c_{2,k} x_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} c_{n,k} x_k\right)$
   e. 线性映射与定义域的基
      设$v_1, v_2, \ldots, v_n$是V的基，$w_1, w_2, \ldots, w_n \in W$，则存在且存在唯一一个线性映射$T: V \to W$使得对任意$i = 1,2,\ldots,n$都有：$Tv_i = w_i$
2. $\mathcal{L}(V, W)$上的代数运算
   a. 定义 $\mathcal{L}(V, W)$上的加法和标量乘法 (addition and scalar multipication on $\mathcal{L}(V, W)$)
      设$S, T \in \mathcal{L}(V, W)$，$\lambda \in F$，定义和$S+T$与积$\lambda T$是$V$到$W$的两个线性映射：对所有$v \in V$均有，$(S+T)(v) = Sv + Tv$，$(\lambda T)(v) = \lambda(Tv)$
   b. $\mathcal{L}(V, W)$是向量空间
   c. 线性映射的乘积 (product of linear maps)
      i. 定义：若$T \in \mathcal{L}(U, V)$，$S \in \mathcal{L}(V, W)$，则定义乘积$ST \in \mathcal{L}(V, W)$如下：对任意$u \in U$，$(ST)(u) = S(Tu)$
      ii. 代数性质
         1) 结合性(associativity)：$(T_1 T_2) T_3 = T_1 (T_2 T_3)$
         2) 单位元(identity)：$TI = IT = T$
         3) 分配性质(distributive properties)：$(S_1 + S_2)T = S_1 T + S_2 T$和$S(T_1 + T_2) = ST_1 + ST_2$

§2 零空间与值域

2022年1月19日 20:22

1. 零空间与单射性
   a. 零空间 (null space)
      i. 定义：对于$T\in\mathcal{L}(V,W)$，$null\ T=\{v\in V: Tv=0\}$
      ii. 设$T\in\mathcal{L}(V,W)$，则$null\ T\in V$
   b. 单的(injective)
      i. 定义:若$Tu=Tv$，则必有$u=v$，则称映射$T: V\to W$是单的。
      ii. 设$T: V\to W$，则T是单的当且仅当$null\ T=\{0\}$。
2. 值域与满射性
   a. 值域(range)
      i. 定义：对于映射$T: V\to W$，$range\ T=\{Tv: v\in V\}$
      ii. 设$T\in\mathcal{L}(V,W)$，则$range\ T\in W$。
   b. 满的(surjective)
      i. 定义：对于映射$T: V\to W$，若$range\ T=W$，则称T是满的。
3. 线性映射基本定理
   a. 线性映射基本定理：设V是有限维的，$T\in\mathcal{L}(V,W)$，则$range\ T$是有限维的并且$dim\,V=dim\,null\ T+dim\,range\ T$。
   b. 到更小维数向量空间的线性映射不是单的
      i. 如果V和W都是有限维向量空间，并且$\dim V>dim\,W$，那么V到W的线性映射一定不是单的。
      ii. 当变量多于方程时，齐次线性方程组必有非零解。
   c. 到更大维数向量空间的线性映射不是满的
      i. 如果V和W都是有限维向量空间，并且$dim\,V<dim\,W$，那么V到W的线性映射一定不是满的。
      ii. 当方程多于变量时，必存在一组常数项使得对应的齐次线性方程组无解。

§3 矩阵

2022年1月20日 18:54

1. 用矩阵表示线性映射
   a. 定义 矩阵 (matrix)
      i. 设$m,n\in \mathrm{N}^*$，矩阵A是由F的元素构成的m行n列的矩形阵列：$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}$
      ii. 其中$A_{i,j}$表示矩阵A的第i行第j列处的元素。
      iii. $A_{m\times n}$表示m行n列的矩形。
      iv. $A_{i,\cdot}$表示矩阵A的第i行元素构成的矩阵；$A_{\cdot,j}$表示矩阵A的第j列元素构成的矩阵。
   b. 定义 线性映射的矩阵 (matrix of a linear map)
      i. 设$T\in \mathcal{L}(V,W)$，并设$v_1,v_2,\dots,v_n$是V的基，$w_1,w_2,\dots,w_m$是W的基。规定T关于这些基的矩阵为$m\times n$矩阵$\mathcal{M}(T)$，其中$Tv_k=A_{1,k}w_1+\cdots+A_{m,k}w_m$。
      ii. $T(v_1,\dots,v_n)=(w_1,\dots,w_m)\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{n,m} \end{pmatrix}$
2. 矩阵的加法与标量乘法
   a. 矩阵加法
      i. 定义 矩阵加法 (matrix addition)
         若$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}$，$B_{m\times n}=\begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m,1} & \cdots & B_{m,n} \end{pmatrix}$，则$A_{m\times n}+B_{m\times n}=\begin{pmatrix} A_{1,1}+B_{1,1} & \cdots & A_{1,n}+B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1}+B_{m,1} & \cdots & A_{m,n}+B_{m,n} \end{pmatrix}$
      ii. 线性映射的和的矩阵
         设$S,T\in \mathcal{L}(V,W)$，则$\mathcal{M}(S+T)=\mathcal{M}(S)+\mathcal{M}(T)$
   b. 矩阵的标量乘法
      i. 定义 矩阵的标量乘法 (scalar multiplication of a matrix)
         若$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}$，$k\in F$，则$kA_{m\times n}=\begin{pmatrix} kA_{1,1} & \cdots & kA_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ kA_{m,1} & \cdots & kA_{m,n} \end{pmatrix}$
      ii. 标量乘以线性映射的矩阵
         设$k\in F$，$T\in \mathcal{L}(V,W)$，则$\mathcal{M}(kT)=k\mathcal{M}(T)$
   c. $\mathrm{F}^{m,n}$
      i. 定义 元素取自F的所有$m\times n$矩阵的集合记为$F^{m,n}$
      ii. $dim\ F^{m,n}=mn$
3. 矩阵乘法
   a. 定义 矩阵乘法 (matrix multiplication)
      设$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}$，$B_{m\times s}=\begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m,1} & \cdots & B_{m,s} \end{pmatrix}$，$C_{s\times n}=\begin{pmatrix} C_{1,1} & \cdots & C_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{s,1} & \cdots & C_{s,n} \end{pmatrix}$，则
      $A_{m\times n}=B_{m\times s}C_{s\times n}$,当且仅当$A_{i,j}=\sum_{k=1}^{s}B_{i,k}C_{k,j}$
   b. 矩阵乘法满足分配律和结合律
      i. 分配律：$A(B+C)=AB+AC,(A+B)C=AC+BC$

ii. 结合律：$(AB)C = A(BC)$

c. 线性映射乘积的矩阵

若$S \in \mathcal{L}(U,V)$，$T \in \mathcal{L}(V,W)$，则$\mathcal{M}(TS) = \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(S)$

§4 可逆性与同构的向量空间

2022年1月21日 17:15

1. 可逆的线性映射
   a. 定义 可逆 (invertible)、逆 (inverse)
      i. 线性映射$T \in \mathcal{L}(V,W)$称为可逆的，如果存在线性映射$S \in \mathcal{L}(W,V)$使得ST等于V上的恒等映射且TS等于W上的恒等映射。
      ii. 满足$ST=I$和$TS=I$的线性映射$S \in \mathcal{L}(W,V)$称为T的逆。
   b. 可逆性的性质
      i. 逆是唯一的：可逆的线性映射有唯一的逆。
      ii. 若T可逆，则它的逆记为T^{-1}。
      iii. 一个线性映射是可逆的当且仅当其是单的又是满的。
2. 同构的向量空间
   a. 定义 同构 (isomorphism)、同构的 (isomorphic)
      i. 同构就是可逆的线性映射。
      ii. 若两个向量空间存在一个同构，则称这两个向量空间是同构的。
   b. 同构与维数
      i. 维数反映了向量空间是否同构：F上两个有限维向量空间同构当且仅当其维数相等。
      ii. $\mathcal{L}(V,W)$与$F^{m,n}$同构：设$v_1,v_2,\dots,v_n$是V的基，$w_1,w_2,\dots,w_m$是W的基，则$\mathcal{M}$是$\mathcal{L}(V,W)$与$F^{m,n}$的一个同构。
      iii. $\dim \mathcal{L}(V,W)=(\dim V)(\dim W)$
3. 将线性映射视为矩阵乘
   a. 定义 向量的矩阵 (matrix of a vector)

      设$v \in V$，并设$v_1,v_2,\dots,v_n$是V的基，则规定v关于这个基的矩阵是$n\times 1$矩阵：$\mathcal{M}(v)=\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$，

      其中$c_1,\dots,c_n \in F$并满足$v=c_1v_1+\cdots+c_nv_n$。
   b. $\mathcal{M}(T)_{\cdot,k}=\mathcal{M}(Tv_k)$

      设$T\in\mathcal{L}(V,W)$，$v_2,\dots,v_n$是V的基，$w_1,w_2,\dots,w_m$是W的基，设$1\le k\le n$，则$\mathcal{M}(T)_{\cdot,k}=\mathcal{M}(Tv_k)$
   c. 线性映射的作用类似于矩阵乘

      设$T\in\mathcal{L}(V,W)$，$v\in V$，$v_2,\dots,v_n$是V的基，$w_1,w_2,\dots,w_m$是W的基。则$\mathcal{M}(Tv)=\mathcal{M}(T)\mathcal{M}(v)$
4. 算子
   a. 定义 算子 (operator)
      i. 向量空间到自身的线性映射称为算子。
      ii. 记号$\mathcal{L}(V)$表示V上全体算子所组成的集合，即$\mathcal{L}(V)=\mathcal{L}(V,V)$
   b. 设V是有限维的，并设$T\in\mathcal{L}(V)$，则以下陈述等价：
      i. T是可逆的；
      ii. T是单的；
      iii. T是满的。

§5 向量空间的积和商

2022年1月22日 18:42

1. 向量空间的积 (product of vector spaces)
   a. 定义
      i. 设$V_1,\dots,V_m$是F上的向量空间，规定积$V_1\times\cdots\times V_m=\{(v_1,\dots,v_m):v_1\in V_1,\dots,v_m\in V_m\}$
      ii. 向量空间的积的加法与标量乘法
         1) 加法：$(u_1,\dots,u_m)+(v_1,\dots,v_m)=(u_1+v_1,\dots,u_m+v_m)$
         2) 标量乘法：$k(v_1,\dots,v_m)=(kv_1,\dots,kv_m)$
   b. 向量空间的积的性质
      i. 向量空间的积是向量空间：设$V_1,\dots,V_m$是F上的向量空间，则$V_1\times\cdots\times V_m$是$F$上的向量空间。
      ii. 积的维数等于维数的和：设$V_1,\dots,V_m$均为有限维向量空间，则$V_1\times\cdots\times V_m$是有限维的，且$dim(V_1\times\cdots\times V_m)=dim\,V_1+\cdots+dim\,V_m$
      iii. 积与直和
         1) 积与直和：设$V_1,\dots,V_m$均为V的子空间。线性映射$\Gamma:V_1\times\cdots\times V_m\to V_1+\cdots+V_m$定义为$\Gamma(v_1,\dots,v_m)=v_1+\cdots+v_m$，则$V_1+\cdots+V_m$是直和当且仅当$\Gamma$是单射。
         2) 和为直和当且仅当位数相加：设V是有限维的，且$V_1,\dots,V_m$均为V的子空间，则$V_1+\cdots+V_m$是直和当且仅当$dim(V_1+\cdots+V_m)=dim\,V_1+\cdots+dim\,V_m$。
2. 向量空间的商
   a. 定义
      i. 定义 $v+U$：设$v\in V$，U是V的子空间，则$v+U$是V的子集，满足$v+U=\{v+u:u\in U\}$。
      ii. 定义 仿射子集 (affine subset)、平行 (parallet)
         1) V的仿射子集是V的形如$v+U$的子集，其中$v\in V$，U是V的子空间。
         2) 对于$v\in V$和V的子空间U，称仿射子集$v+U$平行于U。
      iii. 定义 商空间 (quotient space)
         1) 设U是V的子空间，则商空间V/U是指V的所有平行于U的仿射子集的集合，即$V/U=\{v+U:v\in V\}$。
         2) 定义 V/U上的加法和标量乘法 (addition and scalar multiplication on V/U)：设U是V的子空间，则V/U上的加法和标量乘法定义为：对$\forall v,w\in V$和$\forall\lambda\in F$,
            a) $(v+U)+(w+U)=(v+w)+U$
            b) $\lambda(v+U)=\lambda v+U$
      iv. 定义 商映射 (quotient map)
         设U是V的子空间，定义商映射π：$V\to V/U$满足对于$\forall v\in V$，$\pi(v)=v+U$。
      v. 定义 $\tilde{T}$
         设$T\in\mathcal{L}(V,W)$，定义$\tilde{T}$：$V/(null\ T)\to W$ *满足*$\tilde{T}(v+null\ T)=Tv$。
   b. 向量空间的商的性质
      i. 仿射子集的等价证明：V的非空子集U是V的仿射子集当且仅当对于$\forall v,w\in U$和$\lambda\in F$均有$\lambda v+(1-\lambda)w\in U$。
      ii. 设U是V的子空间，$v,w\in V$，则一下陈述等价：
         1) $v-w\in U$
         2) $v+U=w+U$
         3) $(v+U)\cap(w+U)\neq\emptyset$
      iii. 商空间是向量空间：设U是V的子空间，则V/U构成向量空间。
      iv. 商空间的维数
         设V是有限维的，U是V的子空间，则$dim\,V/U=dim\,V-dim\,U$。

v. $\tilde{T}$性质：设$T \in \mathcal{L}(V, W)$

1) $\tilde{T}$是$V/(null\ T)$到W的线性映射
2) $\tilde{T}$是单的
3) $range\ \tilde{T} = range\ T$
4) $V/(null\ T)$同构于$range\ T$

§6 对偶

2022年1月23日 16:54

1. 对偶空间与对偶映射
   a. 定义
      i. 线性泛函 (linear functional)：V上的线性泛函是从V到F的线性映射，即线性泛函是$T \in \mathcal{L}(V,F)$中的元素。
      ii. 对偶空间 (dual space)：V上的所有线性泛函构成的向量空间称为V的对偶空间，记为V'，即$V' = \mathcal{L}(V,F)$。
      iii. 对偶基 (dual basis)：设$v_1,\dots,v_n$是V的基，则$v_1,\dots,v_n$的对偶基是V'中的元素组$\varphi_1,\dots,\varphi_n$，其中每个$\varphi_i$都是$V$上的线性泛函，使得$\varphi_i(v_k) = \begin{cases} 1, k = i \\ 0, k \neq i \end{cases}$
      iv. 对偶映射 (dual map)：若$T \in \mathcal{L}(V,W)$，则T的对偶映射是线性映射$T' \in \mathcal{L}(W',V')$：对于$\varphi \in W'$，$T'(\varphi) = \varphi \circ T$。
   b. 设V是有限维的，则V'也是有限维的，且$\dim V' = \dim V$。
   c. 对偶基是对偶空间的基：设V是有限维的，则V的一个基的对偶基是V'的基。
   d. 对偶空间的代数性质
      i. 对$\forall S,T \in \mathcal{L}(V,W)$，有$(S+T)' = S' + T'$
      ii. 对$\forall \lambda \in F$与$\forall T \in \mathcal{L}(V,W)$，有$(\lambda T)' = \lambda T'$
      iii. 对$\forall T \in \mathcal{L}(U,V)$与$\forall S \in \mathcal{L}(V,W)$，有$(ST)' = T'S'$
2. 线性映射的对偶的零空间和值域
   a. 定义 零化子 (annihilator)：对于$U \subset V$，U的零化子定义为$U^0 = \{\varphi \in V'$：对所有的$u \in U$都有$\varphi(u) = 0\}$
   b. 零化子是子空间：设$U \subset V$，则U^0是V'的子空间。
   c. 零化子的维数：设V是有限维的，U是V的子空间，则$\dim U + \dim U^0 = \dim V$。
   d. 设V和W都是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V,W)$，则
      i. $null\ T' = (range\ T)^0$
      ii. $\dim null\ T' = \dim null\ T + \dim W - \dim V$
      iii. $\dim range\ T' = \dim range\ T$
      iv. $range\ T' = (null\ T)^0$
   e. 设V和W都是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V,W)$，则T是满的当且仅当T'是单的；T是单的当且仅当T'是满的。
3. 对偶映射的矩阵
   a. 定义 转置 (transpose)：设$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}$，称$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,m} \end{pmatrix}$为$A$的转置，记作$A^T$，即$A(i,j) = A^T(j,i)$。
   b. 矩阵转置的性质：$(AB)^T = B^T A^T$
   c. T'的矩阵是T的矩阵的转置：设$T \in \mathcal{L}(V,W)$，则$\mathcal{M}(T') = (\mathcal{M}(T))^T$。
4. 矩阵的秩
   a. 定义 行秩 (row rank)、列秩 (column rank)
      设A是属于F的m行n列的矩阵，
      i. A的行秩是A的诸行在$F^{1,n}$中的张成空间的维数。
      ii. A的列秩是A的诸列在$F^{m,1}$中的张成空间的维数。
   b. 设$A \in F^{m,n}$，则A的行秩等于列秩，记作$rank\ A$。
   c. 设V和W都是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V,W)$，则$\dim range\ T = rank\ \mathcal{M}(T)$。

第四章 多项式

2022年1月24日 16:34

§1 多项式

2022年1月24日 16:35

1. 复数
   a. 定义 实部 (real part)，虚部 (imaginary part)， 复共轭 (complex conjugate)，模 (magnitude)：设 $z = a + bi$，其中$a, b \in R$
      i. z的实部定义为$Re\, z = a$；
      ii. z的虚部定义为$Im\, z = b$。
      iii. z的复共轭定义为$\bar{z} = Re\, z - (Im\, z)i$；
      iv. z的模定义为$|z| = \sqrt[2]{(Re\, z)^2 + (Im\, z)^2}$。
   b. 复数的性质
      i. $z + \bar{z} = 2Re\, z$
      ii. $z - \bar{z} = 2Im\, z$
      iii. $z\bar{z} = |z|^2$
      iv. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
      v. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
      vi. $\bar{\bar{z}} = z$
      vii. $max\{|Re\, z|, |Im\, z|\} \le |z|$
      viii. $|\bar{z}| = |z|$
      ix. $|wz| = |w||z|$
      x. $|w + z| \le |w| + |z|$
2. 多项式
   a. 多项式系数的唯一性
      设$a_0, \ldots, a_m \in F$，若对$\forall z \in F$均有$a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m = 0$，则$a_0 = \cdots = a_m = 0$。
   b. 多项式的代余除法
      设$p, s \in \mathcal{P}(F)$且$s \ne 0$，则存在且存在唯一的多项式$q, r \in \mathcal{P}(F)$使得$p = sq + r$，其中$deg\, r < deg\, s$。
   c. 多项式的零点
      i. 定义 多项式的零点 (zero of a polynomial)，因式 (factor)
         1) 称数$\lambda \in F$为多项式$p \in \mathcal{P}(F)$的零点（或根），当且仅当$p(\lambda) = 0$。
         2) 称多项式$s \in \mathcal{P}(F)$的因式，当且仅当存在多项式$q \in \mathcal{P}(F)$使得$p = sq$。
      ii. 多项式的每个零点都对应一个一次因式
         设$p \in \mathcal{P}(F)$，$\lambda \in F$，则$p(\lambda) = 0$当且仅当存在多项式$q \in \mathcal{P}(F)$使得对于$\forall z \in F$均有$p(z) = (z - \lambda)q(z)$。
      iii. 多项式零点的个数不超过其次数
         设$p \in \mathcal{P}(F)$是m次多项式，$m \in N^*$，则p在F中最多有m个互不相同的零点。
   d. C上多项式的分解
      i. 代数学基本定理：每个非常数的复系数多项式都存在零点。
      ii. C上多项式的分解
         若$p \in \mathcal{P}(C)$是非常数多项式，则p可以唯一分解（不计因式的次序）为：$p(z) = c(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)$，其中$c, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in C$。
   e. R上多项式的分解
      i. 实系数多项式的非实零点是成对出现的
         设$p \in \mathcal{P}(C)$是实系数多项式，若$\lambda \in C$是p的零点，则$\bar{\lambda}$也是p的零点。
      ii. R上多项式的分解
         设$p \in \mathcal{P}(R)$是实系数多项式，则p可以唯一分解（不计因式的次序）为：$p(x) = c(x - a_1) \cdots (x - a_m)(x^2 + b_1 x + c_1) \cdots (x^2 + b_n x + c_n)$，其中

$c, a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n \in R$且对于每个$i$都有$b_i^2 < 4c_i$。

第五章 本征值、本征向量、不变子空间

2022年1月25日 18:37

§1 不变子空间

2022年1月25日 18:38

1. 本征值与本征向量
   a. 定义
      i. 不变子空间 (invariant subspce)：设$T \in \mathcal{L}(V)$，称V的子空间U在T下不变，当且仅当对每个$u \in U$都有$Tu \in U$。
      ii. 本征值 (eigenvalue)：设$T \in \mathcal{L}(V)$，称数$\lambda \in F$为T的本征值，当且仅当若存在$v \in V$使得$v \neq 0$且$Tv = \lambda v$。
      iii. 本征向量 (eigenvector)：设$T \in \mathcal{L}(V)$，并设$\lambda \in F$为T的本征值，则称向量$v \in V$为T的相应于λ的本征值，当且仅当$v \neq 0$且$Tv = \lambda v$。
   b. 本征值于本征向量的性质
      i. 设V是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V)$且$\lambda \in F$，则以下条件等价：
         1) λ为T的本征值；
         2) $T - \lambda I$不是单的；
         3) $T - \lambda I$不是满的；
         4) $T - \lambda I$不是可逆的。
      ii. 设$T \in \mathcal{L}(V)$，并设$\lambda_1, \dots, \lambda_m$是$T$的互异本征值，其相应本征向量为$v_1, \dots, v_m$，则$v_1, \dots, v_m$线性无关。
      iii. 设V是有限维的，则V上每个算子最多有$dim\, V$个互异本征值。
2. 限制算子与商算子

   设$T \in \mathcal{L}(V)$且U是V的在T下的不变子空间，则限制算子与商算子的定义如下：
   a. 限制算子 (restriction operator)：$T|_U \in \mathcal{L}(U)$定义为$T|_U(u) = Tu$，其中$u \in U$。
   b. 商算子 (quotient operator)：$T/U \in \mathcal{L}(T/U)$定义为$\big(T/U\big)(v + U) = Tv + U$，其中$v \in V$。

§2 本征向量与上三角矩阵

2022年1月28日 11:20

1. 多项式作用于算子
   a. T^m
      i. 定义：设$T \in \mathcal{L}(V)$，$m \in N^*$
         1) $T^m = \underbrace{T \cdots T}_{m个}$
         2) $T^0 = I$
         3) 若T是可逆的且其逆为T^{-1}，则定义$T^{-m} = \left(T^{-1}\right)^m$
      ii. 性质：$T^{m+n} = T^m T^n$，$(T^m)^n = T^{mn}$
   b. 定义$p(T)$：设$T \in \mathcal{L}(V)$，$p \in \mathcal{P}(F)$，对$z \in F$有$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m$，则$p(T)$是定义为$p(T) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_m T^m$的算子。
   c. 多项式的积 (product of polynomials)
      i. 定义：若$p, q \in \mathcal{P}(F)$，则$pq \in \mathcal{P}(F)$是如下定义的多项式：对$\forall z \in F$有$\left(pq\right)(z) = p(z)q(z)$。
      ii. 性质：设$p, q \in \mathcal{P}(F)$，$T \in \mathcal{L}(V)$
         1) $\left(pq\right)(T) = p(T)q(T)$
         2) $p(T)q(T) = q(T)p(T)$
2. 本征值的存在性：有限维非零复向量空间上的每个算子都有本征值。
3. 上三角矩阵 (upper-triangular matrix)
   a. 定义：一个矩阵称为上三角的，如果其位于对角线下方的元素均为0。
   b. 上三角矩阵的条件：设$T \in \mathcal{L}(V)$，且$v_1, \ldots, v_m$是V的基，则以下条件等价
      i. T关于$v_1, \ldots, v_m$的矩阵是上三角的；
      ii. 对于$\forall i = 1, \ldots, m$有$Tv_i \in span(1, \ldots, v_i)$；
      iii. 对于$\forall i = 1, \ldots, m$有$span(1, \ldots, v_i)$在T下不变。
   c. 上三角矩阵的性质
      i. 上三角矩阵的存在性：设V是有限维复向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，则T关于V的某个基有上三角矩阵。
      ii. 由上三角矩阵确定可逆性：设$T \in \mathcal{L}(V)$关于V的某个基由上三角矩阵，则T是可逆的当且仅当此上三角矩阵对角线上的元素均不为0。
      iii. 从上三角矩阵确定本征值：设$T \in \mathcal{L}(V)$关于V的某个基由上三角矩阵，则T的本征值恰为此上三角矩阵对角线上的元素。

§3 本征空间与对角矩阵

2022年1月28日 20:23

1. 本征空间与对角矩阵的定义
    a. 对角矩阵 (diagonal matrix)：对角矩阵是对角线以外全是0的方阵。
    b. 可对角化 (diagonalizable)：算子$T \in \mathcal{L}(V)$称为可对角化的，如果该算子关于V的某个基有对角矩阵。
    c. 本征空间 (eigenspace)：设$T \in \mathcal{L}(V)$且$\lambda \in F$，T的相对应于λ的本征空间定义为$E(\lambda, T) = null\ (T - \lambda I)$。即$E(\lambda, T)$为$T$的相对应于λ的本征向量张成的向量空间。
2. 本征空间与对角矩阵的性质
    a. 本征空间之和为直和：设V是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V)$，$\lambda_1, \dots, \lambda_m$是$T$的互异本征值，则$E(\lambda_1, T) + \cdots + E(\lambda_m, T)$为直和且$dim(\lambda_1, T) + \cdots + dim\, E(\lambda_m, T) \le dim\, V$。
    b. 可对角化的等价条件：设V是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V)$，$\lambda_1, \dots, \lambda_m$是$T$的互异本征值，则下列条件等价：
        i. T可对角化；
        ii. V有由T的本征向量构成的基；
        iii. V有在T下不变的一维子空间$U_1, \dots, U_n$使得$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$；
        iv. $V = E(\lambda_1, T) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_m, T)$
        v. $dim\, V = dim\, E(\lambda_1, T) + \cdots + dim\, E(\lambda_m, T)$。
    c. 本征值足够多时可对角化：若$T \in \mathcal{L}(V)$有$dim\, V$个互异的本征值，则T可对角化。

第六章 内积空间

2022年2月4日 19:18

§1 内积与范数

2022年2月4日　19:18

1. 内积
   a. 定义 点积 (dot product)：对于$x, y \in R^n$，x和y的点积定义为$x \cdot y = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$，其中$x = (x_1, \ldots, x_n)$，$y = (y_1, \ldots, y_n)$。
   b. 内积 (inner product)
      i. 定义：V上的内积就是一个函数，它把V中的元素的每个有序对(u, v)都映射为一个数$\langle u, v\rangle \in F$，并具有下列性质：
         1) 正性 (positivity)：对于$\forall v \in V$均有$\langle v, v\rangle \geq 0$；
         2) 定性 (definiteness)：$\langle v, v\rangle = 0$当且仅当$v = 0$；
         3) 第一个位置的加性 (additivity in first slot)：对于$\forall u, v, w \in V$均有$\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$；
         4) 第一个位置的齐性 (homogeneity in first slot)：对于$\forall \lambda \in F$和$\forall u, v \in V$均有$\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$；
         5) 共轭对称性 (fonjugate symmetry)：对于$\forall u, v \in V$均有$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$。
      ii. 特例
         1) 欧几里得内积：F^n上的欧几里得内积定义为：$\langle (w_1, \ldots, w_n), (z_1, \ldots, z_n)\rangle = w_1\overline{z_1} + \cdots + w_n\overline{z_n}$；
         2) 定义在区间$[-1,1]$上的实值连续函数构成的向量空间上可定义内积如下：$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$；
         3) 在$\mathcal{P}(R)$上可定义内积如下：$\langle p, q\rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x}dx$。
      iii. 内积的性质
         1) 对于每个取定的$u \in V$，将v映射为$\langle v, u\rangle$的函数时V到F的线性映射；
         2) 对于$\forall v \in V$，均有$\langle 0, v\rangle = 0$，$\langle v, 0\rangle = 0$；
         3) 对于$\forall u, v, w \in V$均有$\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, v\rangle$；
         4) 对于$\forall \lambda \in F$和$\forall u, v \in V$均有$\langle u, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle u, v\rangle$。
   c. 定义 内积空间 (inner product space)：内积空间就是带有内积的向量空间V。
2. 范数
   a. 范数 (norm)
      i. 定义：对于$v \in V$，v的范数定义为$\|v\| = \sqrt[2]{\langle v, v\rangle}$。
      ii. 特例
         1) 若$(z_1, \ldots, z_n) \in F^n$，取欧几里得内积，则$\|(z_1, \ldots, z_n)\| = \sqrt[2]{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}$；
         2) 定义在区间$[-1,1]$上的实值连续函数构成的向量空间上可定义内积如下：$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$，则$\|f\| = \sqrt[2]{\int_{-1}^{1}(f(x))^2dx}$；
         3) 在$\mathcal{P}(R)$上可定义内积如下：$\langle p, q\rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x}dx$，则$\|p\| = \sqrt[2]{\int_0^\infty (p(x))^2e^{-x}dx}$。
      iii. 范数的基本性质
         1) $\|v\| = 0$当且仅当$v = 0$；
         2) 对于$\forall \lambda \in F$均有$\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$。
   b. 正交 (orthogonal)
      i. 定义：两个向量$u, v \in V$称为正交的，如果$\langle u, v\rangle = 0$。
      ii. 正交性与0
         1) 0正交于V中的任意向量；

2) 0是V中唯一一个正交于自身的向量。

iii. 勾股定理（毕达哥拉斯定理）：设u和v是V中的正交向量，则$\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$。其逆定理在实内积空间中成立。

iv. 正交分解：设$u,v\in V$且$v\neq 0$，令$c=\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$，$w=u-\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v$，则$\langle w,v\rangle=0$且$u=cv+w$。

c. 柯西–施瓦茨不等式（Cauchy-Schwarz inequality）

i. 设$\mathrm{u},\mathrm{v}\in \mathrm{V}$，则$|\langle \mathrm{u},\mathrm{v}\rangle|\leq \|\mathrm{u}\|\|\mathrm{v}\|$，当且仅当$\mathrm{u},\mathrm{v}$线性相关时等号成立。

ii. 特例

1) 若$x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\in R$，则$\left(x_1y_1+\cdots+x_ny_n\right)^2\leq (x_1^2+\cdots+x_n^2)(y_1^2+\cdots+y_n^2)$，当且仅当存在$\lambda,\mu\in R$使得对任意$i=1,\dots,n$均有$\lambda x_i+\mu y_i=0$。

2) 若f,g均为定义在区间$[-1,1]$上的实值连续函数，则$\left(\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx\right)^2\leq (\int_{-1}^{1}\left(f(x)\right)^2dx)(\int_{-1}^{1}\left(g(x)\right)^2dx)$。

d. 三角不等式：设$u,v\in V$，则$\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$，当且仅当存在$\lambda,\mu\in R$使得$\lambda u+\mu v=0$且$\lambda\mu\leq 0$。

e. 平行四边形恒等式：设$u,v\in V$，则$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2(\|u\|^2+\|v\|^2)$。

§2 规范正交基

2022年2月7日 12:54

1. 规范正交基
   a. 规范正交向量组
      i. 定义 规范正交的 (orthonormal)
         1) 如果一个向量组中每个向量的范数都是1且与其他向量正交，则称这个向量组是规范正交的。
         2) 也就是说，V上的向量组$e_1, \dots, e_n$是规范正交的，如果$\left\langle e_i, e_j \right\rangle = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$。
      ii. 规范正交线性组合的范数：若$e_1, \dots, e_n$是V中的规范正交向量组，则对所有$a_1, \dots, a_n \in F$均有$\|a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n\|^2 = |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2$。
      iii. 规范正交向量组的线性相关性：每个规范正交向量组都是线性无关的。
   b. 规范正交基 (orthonormal basis)
      i. 定义：V的规范正交基是V中的规范正交向量组构成的基。
      ii. 性质
         1) 存在性
            a) 每个有限维内积空间都存在规范正交基。
            b) V中每个长度为$dim\, V$的规范正交向量组都是V的规范正交基。
            c) 设V是有限维的，则V中每个规范正交向量组都可以扩充成V的规范正交基。
         2) 将向量写成规范正交基的线性组合：设$e_1, \dots, e_n$是V中的规范正交向量基且$v \in V$，则$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_n \rangle e_n$且$\|v\| = |\langle v, e_1 \rangle|^2 + \cdots + |\langle v, e_n \rangle|^2$。
         3) 格拉姆-施密特过程 (Gram-Schmidt Procedure)：设$v_1, \dots, v_m$是V中的线性无关向量组。设$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$。对于$i = 2, \dots, m$，定义$e_i$如下：$e_i = \frac{v_i - \langle v_i, e_1 \rangle e_1 - \cdots - \langle v_i, e_{i-1} \rangle e_{i-1}}{\|v_i - \langle v_i, e_1 \rangle e_1 - \cdots - \langle v_i, e_{i-1} \rangle e_{i-1}\|}$，则$e_1, \dots, e_m$是$V$中的规范正交组，使得对于$i = 1, \dots, m$有$span(v_1, \dots, v_i) = span(e_1, \dots, e_i)$。
         4) 关于规范正交基的上三角矩阵：设$T \in \mathcal{L}(V)$。如果T关于V的某个基有上三角矩阵，则T关于V的某个规范正交基也有上三角矩阵。
         5) 舒尔定理 (Schur Theorem)：设V是有限维的复向量空间且$T \in \mathcal{L}(V)$，则T关于V的某个规范正交基有上三角矩阵。
2. 内积空间上的线性泛函
   a. 定义 线性泛函 (linear functional)：V上的线性泛函是从V到F的线性映射，即线性泛函是$T \in \mathcal{L}(V, F)$中的元素。
   b. 里斯表示定理 (Riesz Representation Theorem)：设V是有限维的，$e_1, \dots, e_n$是V中的规范正交向量基且φ是V上的线性泛函，则存在唯一的向量$u = \overline{\varphi(e_1)} e_1 + \cdots + \overline{\varphi(e_n)} e_n$使得对于每个$v \in V$均有$\varphi(v) = \langle v, u \rangle$。

§3 正交补与极小化问题

2022年2月7日 22:37

1. 正交补
    a. 正交补 (orthogonal complement)
        i. 定义：设U是V的子集，则U的正交补是由V中与U的每个向量都正交的那些向量组成的集合：$U^{\perp}=\{v\in V$对每个$u\in U$均有$\langle v,u\rangle=0\}$。
        ii. 基本性质
            1) 若U是V的子集，则$U^{\perp}$是V的子空间；
            2) $\{0\}^{\perp}=V$；
            3) $V^{\perp}=\{0\}$；
            4) 若U是V的子集，则$U\cap U^{\perp}=\{0\}$；
            5) 若U和W均为V的子集且$U\subset W$，则$W^{\perp}\subset U^{\perp}$。
        iii. 子空间与其正交补的直和：设U是V的有限维子空间，则$V=U\oplus U^{\perp}$。
        iv. 正交补的维数：若V是有限维的且U是V的子空间，则$dim\,U^{\perp}=dim\,V-dim\,U$。
        v. 正交补的正交补：设U是V的有限维子空间，则$\left(U^{\perp}\right)^{\perp}=U$。
    b. 正交投影 (orthogonal projection)
        i. 定义：设U是V的有限维子空间。定义V到U上的正交投影为如下算子$P_U\in\mathcal{L}(V)$：对于$v\in V$，将其写成$v=u+w$，其中$u\in U$且$w\in U^{\perp}$，则$P_Uv=u$。
        ii. 正交投影P_U的性质：设U是V的有限维子空间且$v\in V$，则
            1) $P_U\in\mathcal{L}(V)$；
            2) 对于每个$u\in U$均有$P_Uu=u$；
            3) 对于每个$w\in U^{\perp}$均有$P_Uw=0$；
            4) $range\ P_U=U$；
            5) $null\ P_U=U^{\perp}$；
            6) $v-P_Uv\in U^{\perp}$；
            7) $P_U^2=P_U$；
            8) $\|P_Uv\|\le\|v\|$；
            9) 对于U的每个规范正交基$e_1,\dots,e_n$均有$P_Uv=\langle v,e_1\rangle e_1+\cdots+\langle v,e_n\rangle e_n$。
2. 极小化问题
    a. 到子空间的最小距离：设U是V的有限维子空间，$\mathrm{v}\in\mathrm{V}$且$\mathrm{u}\in\mathrm{U}$，则$\|\mathrm{v}-\mathrm{P_U v}\|\le\|\mathrm{v}-\mathrm{u}\|$，当且仅当$\mathrm{u}=\mathrm{P_U v}$时等号成立。
    b. 例：求解函数的多项式近似（近似程度比Taylor展开要精细）。

第七章 内积空间上的算子

2022年2月8日 20:45

§1 自伴算子与正规算子

2022年2月8日 20:45

1. 伴随
   a. 定义 伴随 (adjoint)：设$T \in \mathcal{L}(V,W)$，T的伴随是满足如下条件的函数$T^*: W \to V$：对所有$v \in V$和所有$w \in W$均有$\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$。
   b. 伴随是线性映射，若$T \in \mathcal{L}(V,W)$，则$T^* \in \mathcal{L}(V,W)$。
   c. 伴随的性质
      i. 对于所有$S, T \in \mathcal{L}(V,W)$均有$(S+T)^* = S^* + T^*$；
      ii. 对于所有$\lambda \in F$和$T \in \mathcal{L}(V,W)$均有$(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*$；
      iii. 对于所有$T \in \mathcal{L}(V,W)$均有$(T^*)^* = T$；
      iv. 对于V上的恒等算子有$I^* = I$；
      v. 对于所有$T \in \mathcal{L}(V,W)$和$S \in \mathcal{L}(W,U)$均有$(ST)^* = T^*S^*$。
   d. T^*的零空间与值域：设$T \in \mathcal{L}(V,W)$，则
      i. $null\ T^* = \left(range\ T\right)^\perp$；
      ii. $range\ T^* = (null\ T)^\perp$；
      iii. $null\ T = \left(range\ T^*\right)^\perp$；
      iv. $range\ T = (null\ T^*)^\perp$。
   e. T^*的矩阵：设$T \in \mathcal{L}(V,W)$，假设$e_1, \dots, e_n$是V的规范正交基，$f_1, \dots, f_m$是W的规范正交基，则$\mathcal{M}(T^*)$是$\mathcal{M}(T)$的共轭转置(conjugate transpose)。其中共轭转置的定义为：F上的$m \times n$矩阵$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m,1} & \cdots & A_{m,n} \end{pmatrix}$的共轭转置矩阵为$n \times m$矩阵$\begin{pmatrix} \overline{A_{1,1}} & \cdots & \overline{A_{1,m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{A_{n,1}} & \cdots & \overline{A_{n,m}} \end{pmatrix}$。
2. 自伴算子
   a. 定义 自伴的 (self-adjoint)
      i. 算子$T \in \mathcal{L}(V)$称为自伴的，如果$T = T^*$。
      ii. 即$T \in \mathcal{L}(V)$是自伴的当且仅当对于所有$v, w \in V$有$\langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle$。
   b. 性质
      i. 自伴算子的每个本征值都是实数。
      ii. 设V是复内积空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，则T是自伴的当且仅当对于每个$v \in V$均有$\langle Tv, v\rangle \in R$。
      iii. 若T是V上的自伴算子使得对于所有$v \in V$均有$\langle Tv, v\rangle = 0$，则$T = 0$。
      iv. 设V是复内积空间，$T \in \mathcal{L}(V)$。假设对于所有$v \in V$均有$\langle Tv, v\rangle = 0$，则$T = 0$。
3. 正规算子
   a. 定义 正规的 (normal)
      i. 内积空间上的算子称为正规的，如果其与其伴随是交换的。
      ii. 即$T \in \mathcal{L}(V)$称为正规的，如果$TT^* = T^*T$。
   b. 性质
      i. 算子$T \in \mathcal{L}(V)$是正规的当且仅当对于所有$v \in V$均有$\|Tv\| = \|T^*v\|$。
      ii. 设$T \in \mathcal{L}(V)$是正规的，且v是T的相应于本征值λ的本征向量，则v也是T^*的相应于本征值$\bar{\lambda}$的本征向量。
      iii. 设$T \in \mathcal{L}(V)$是正规的，则T的相应于不同本征值的本征向量是正交的。

§2 谱定理

2022年2月10日 17:40

1. 复谱定理：在复向量空间上，设$T \in \mathcal{L}(V)$，则以下条件等价——
    a. T是正规的；
    b. V有一个由T的本征向量组成的规范正交基；
    c. T关于V的某个规范正交基具有对角矩阵。
2. 实谱定理
    a. 引理
        i. 可逆的二次式：设$T \in \mathcal{L}(V)$且是自伴的，并设$b, c \in R$使得$b^2 < 4c$，则$T^2 + bT + cI$是可逆的。
        ii. 自伴算子都有本征值：设$V \neq \{0\}$且$T \in \mathcal{L}(V)$且是自伴的，则T有本征值。
        iii. 自伴算子与不变子空间：设$T \in \mathcal{L}(V)$且是自伴的，并设U是V的在T下不变的子空间，则
            1) $U^\perp$在T下不变；
            2) $T|_U \in \mathcal{L}(U)$是自伴的；
            3) $T|_{U^\perp} \in \mathcal{L}(U^\perp)$是自伴的。
    b. 实谱定理：在实向量空间上，设$T \in \mathcal{L}(V)$，则以下条件等价——
        i. T是自伴的；
        ii. V有一个由T的本征向量组成的规范正交基；
        iii. T关于V的某个规范正交基具有对角矩阵。

§3 正算子与等距同构

2022年2月12日 13:08

1. 正算子
   a. 定义 正算子 (positive operator)：称算子$T \in \mathcal{L}(V)$是正的，如果T是自伴的且对所有$v \in V$均有$\langle Tv, v\rangle \geq 0$。
   b. 定义 平方根 (square root)：算子R称为算子T的平方根，如果$R^2 = T$。
   c. 正算子的刻画：设$T \in \mathcal{L}(V)$，则以下条件等价——
      i. T是正的；
      ii. T是自伴的且T的所有本征值非负；
      iii. T存在正的平方根；
      iv. T存在自伴的平方根；
      v. 存在算子$R \in \mathcal{L}(V)$使得$T = R^*R$。
   d. V上每个正算子都有唯一的正平方根。
2. 等构同距
   a. 定义 等构同距 (isometry)：算子$S \in \mathcal{L}(V)$称为等距同构，如果对所有$v \in V$均有$\|Sv\| = \|v\|$。
   b. 等距同构的刻画：设$S \in \mathcal{L}(V)$，则以下条件等价——
      i. S是等距同构；
      ii. 对所有$u, v \in V$均有$\langle Su, Sv\rangle = \langle u, v\rangle$；
      iii. 对V中的任意规范正交向量组$e_1, \ldots, e_n$均有$Se_1, \ldots, Se_n$是规范正交的；
      iv. V存在规范正交向量组$e_1, \ldots, e_n$使得$Se_1, \ldots, Se_n$是规范正交的；
      v. $S^*S = I$；
      vi. $SS^* = I$；
      vii. S^*是等距同构；
      viii. S是可逆的且$S^{-1} = S^*$。
   c. 设V是复内积空间，$S \in \mathcal{L}(V)$，则以下条件等价——
      i. S是等距同构；
      ii. V有一个由S的本征向量组成的规范正交基，相应的本征值的绝对值均为1。

§4 极分解与奇异值分解

2022年2月12日 13:08

1. 极分解
    a. 记号$\sqrt[2]{T}$：若T是正算子，则用$\sqrt[2]{T}$表示T的唯一的正平方根。
    b. 极分解：设$T \in \mathcal{L}(V)$，则有一个等距同构$S \in \mathcal{L}(V)$使得$T = S\sqrt[2]{T^*T}$。
2. 奇异值分解
    a. 定义 奇异值 (singular values)：设$T \in \mathcal{L}(V)$，则T的奇异值就是$\sqrt[2]{T^*T}$的本征值，而且每个本征值λ都要重复$dim\, E(\lambda, \sqrt[2]{T^*T})$次。
    b. 奇异值分解：设$T \in \mathcal{L}(V)$有奇异值$s_1, \ldots, s_n$，则V有两个规范正交基$e_1, \ldots, e_n$和$f_1, \ldots, f_n$使得对每个$v \in V$均有$Tv = s_1\langle v, e_1\rangle f_1 + \cdots + s_n\langle v, e_n\rangle f_n$。
    c. 设$T \in \mathcal{L}(V)$，则T的奇异值就是T^*T的本征值的非负平方根，而且每个本征值λ都要重复$dim\, E(\lambda, T^*T)$次。

第八章 复向量空间上的算子

2022年2月12日 18:20

§1 广义本征向量和幂零算子

2022年2月12日 18:20

1. 算子幂的零空间和值域
   a. 算子幂的零空间
      i. 递增的零空间序列：设$T \in \mathcal{L}(V)$，则$\{0\} = null\, T^0 \subset null\, T^1 \subset \cdots \subset null\, T^k \subset null\, T^{n+1} \subset \cdots$。
      ii. 零空间序列中的等式：设$T \in \mathcal{L}(V)$且$m \in N^*$使得$null\, T^m = null\, T^{m+1}$，则对于$k \geq m$，有$null\, T^k = null\, T^m$。
      iii. 零空间停止增长：设$T \in \mathcal{L}(V)$，令$n = dim\, V$，则对于$m \geq n$，均有$null\, T^m = null\, T^n$。
   b. 算子幂的值域
      i. 递减的值域序列：设$T \in \mathcal{L}(V)$，则$V = range\, T^0 \supset range\, T^1 \supset \cdots \supset range\, T^k \supset range\, T^{k+1} \supset \cdots$。
      ii. 值域序列中的等式：设$T \in \mathcal{L}(V)$且$m \in N^*$使$range\, T^m = range\, T^{m+1}$，则对于$k \geq m$，有$range\, T^k = range\, T^m$。
      iii. 值域停止缩短：设$T \in \mathcal{L}(V)$，令$n = dim\, V$，则对于$m \geq n$，均有$range\, T^m = range\, T^n$。
   c. 算子幂的零空间与值域关系
      i. 设$T \in \mathcal{L}(V)$，则$V = null\, T^{dim\, V} \oplus range\, T^{dim\, V}$。
      ii. 设$T \in \mathcal{L}(V)$且$m \in N^*$，则$null\, T^m = null\, T^{m+1} \Leftrightarrow range\, T^m = range\, T^{m+1}$。
2. 广义本征向量
   a. 定义 广义本征向量 (generalized eigenvector)：设$T \in \mathcal{L}(V)$，λ是T的本征值。向量$v \in V$称为T的相应于λ的广义本征值，如果$v \neq 0$且存在$k \in N^*$使得$(T - \lambda I)^k v = 0$。
   b. 定义 广义本征空间 (generalized eigenspace)：设$T \in \mathcal{L}(V)$且$\lambda \in F$，则T的相应于λ的广义本征空间定义为T的相应于λ的所有广义本征向量的集合以及0向量，记作$G(\lambda, T)$。
   c. 广义本征空间的刻画：设$T \in \mathcal{L}(V)$且$\lambda \in F$，则$G(\lambda, T) = null(T - \lambda I)^{dim\, V}$。
   d. 设$T \in \mathcal{L}(V)$且$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$是$T$的所有不同的本征值，$v_1, \ldots, v_m$分别为相应的广义本征向量，则$v_1, \ldots, v_m$线性无关。
3. 幂零算子
   a. 定义 幂零的 (nilpotent)：一个算子称为幂零的，如果其某个幂等于0。
   b. 设$N \in \mathcal{L}(V)$是幂零的，则$N^{dim\, V} = 0$。
   c. 幂零算子的矩阵：设N是V上的幂零算子，那么V有一个基使得N关于这个基的矩阵形如$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$。

§2 算子的分解

2022年2月12日 18:20

1. 复向量空间上算子的刻画
   a. 如果$T \in \mathcal{L}(V)$且$p \in \mathcal{P}(F)$，则$null\, p(T)$和$range\, p(T)$在T下不变。
   b. 复向量空间上算子的刻画：假设V是复向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，设$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$是$T$的不同本征值，则
      i. $\mathrm{V} = G(\lambda_1, T) \oplus \cdots \oplus G(\lambda_m, T)$；
      ii. 每个$G(\lambda_k, T)$在T下都是不变的；
      iii. 每个$(T - \lambda_k I)|_{G(\lambda_k, T)}$都是幂零的。
   c. 设V是复向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，则V有一个由T的广义本征向量组成的基。
2. 本征值的重数
   a. 定义 重数 (multiplicity)：设$T \in \mathcal{L}(V)$，T的本征值λ的重数为$dim\, null(T - \lambda I)^{dim\, V}$。
   b. 设V是复向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，则T的所有本征值的重数直和为$dim\, V$。
3. 分块对角矩阵
   a. 定义 分块对角矩阵 (block diagonal matrix)：分块对角矩阵是形如$\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix}$，其中$A_1, \ldots, A_m$位于对角线上且为方阵，矩阵的所有其他元素均为0。
   b. 具有上三角块的分块对角矩阵：假设V是复向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，设$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$是$T$的所有互不相同的本征值，重数分别为$d_1, \ldots, d_m$，那么$V$有一个基使得$T$关于这个基有分块矩阵$\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_m \end{pmatrix}$，其中每个$A_k$都是如下所示的$d_k \times d_k$的上三角矩阵：$A_k = \begin{pmatrix} d_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_k \end{pmatrix}$。
4. 平方根
   a. 设$N \in \mathcal{L}(V)$是幂零的，则$N + I$有平方根。
   b. 设V是复向量空间，如果$T \in \mathcal{L}(V)$是可逆的，则T有平方根。

§3 特征多项式和极小多项式

2022年2月14日　17:15

1. 凯莱—哈密顿定理（Hamilton-Cayley Theorem）
   a. 定义 特征多项式 (characteristic polynomial)：设V是复向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，令$\lambda_1, \dots, \lambda_m$表示$T$的所有互不相同的本征值，重数分别为$d_1, \dots, d_m$。多项式$(z-\lambda_1)^{d_1} \cdots (z-\lambda_m)^{d_m}$称为$T$的特征多项式。
   b. 特征多项式的次数和零点：设V是复向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，则
      i. T的特征多项式的次数为$dim\, V$；
      ii. T的特征多项式的零点恰好是T的本征值。
   c. 凯莱—哈密顿定理：设V是复向量空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，令q表示T的特征多项式，则$q(T) = 0$。
2. 极小多项式
   a. 定义
      i. 首一多项式 (monic polynomial)：首一多项式是指最高次数的项的次数为1的多项式。
      ii. 极小多项式 (minimal polynomial)：设$T \in \mathcal{L}(V)$，则T的极小多项式是唯一一个使得$p(T) = 0$的次数最小的首一多项式p。
   b. 性质
      i. 极小多项式的存在性：设$T \in \mathcal{L}(V)$，则存在唯一一个次数最小的首一多项式p使得$p(T) = 0$。
      ii. 设$T \in \mathcal{L}(V)$，$q \in \mathcal{P}(F)$，则$q(T) = 0$当且仅当q是T的极小多项式的多项式倍。
      iii. 在复向量空间中，设$T \in \mathcal{L}(V)$，则T的特征多项式是T的极小多项式的多项式倍。
      iv. 设$T \in \mathcal{L}(V)$，T的极小多项式的零点恰为T的本征值。

§4 若尔当形

2022年2月14日 17:15

1. 对应于幂零算子的基：设N是幂零的，则存在向量$v_1,\dots,v_n\in V$和非负整数$m_1,\dots,m_n$使得
   a. 矩阵$\begin{pmatrix} v_1 & Nv_1 & \cdots & N^{m_n}v_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n & Nv_n & \cdots & N^{m_n}v_n \end{pmatrix}$中的元素构成$V$的基；
   b. 对于$k=1,\dots,n$均有$N^{m_k+1}v_k=0$。
2. 定义 若尔当基 (Jordan basis)：设$T\in\mathcal{L}(V)$，V的基称为T的若尔当基，如果T关于这个基具有分块对角矩阵$\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$，其中每个$A_k$都是形如$\begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$的上三角矩阵。
3. 若尔当形：设V是复向量空间，如果$T\in\mathcal{L}(V)$，则V有一个基是T的若尔当基。

第九章 实向量空间上的算子

2022年2月14日　　17:50

§1 复化

2022年2月14日 17:50

1. 向量空间的复化
   a. 定义 V的复化 (complexification of V)：设V是实向量空间
      i. V的复化记作V_C，其等于$V\times V$，其中的元素是有序对(u,v)，其中$u,v\in V$，但我们把它写作$u+iv$；
      ii. 定义V_C上的加法为$(u_1+iv_1)+(u_2+iv_2)=(u_1+u_2)+i(v_1+v_2)$，其中$u_1,u_2,v_1,v_2\in V$；
      iii. 定义V_C上的复标量乘法为$(a+bi)(u+iv)=(au-bv)+i(av+bu)$，其中$a,b\in R$，$u,v\in V$。
   b. 设V是实向量空间，则关于以上定义的加法和标量乘法，V_C是复向量空间。
   c. V的基是V_C的基：设V是实向量空间，则
      i. 若$v_1,\dots,v_n$是V作为实向量空间的基，则其也是V_C作为复向量空间的基；
      ii. V_C作为复向量空间的维数等于V作为实向量空间的维数。
2. 算子的复化
   a. 定义 T的复化 (complexification of T)：设V是实向量空间，$T\in\mathcal{L}(V)$。T的复化是定义为$T_C(u+iv)=Tu+iTv$的算子$T_C\in\mathcal{L}(V_C)$，其中$u,v\in V$。
   b. T_C的矩阵等于T的矩阵：设$v_1,\dots,v_n$是实向量空间V的基，$T\in\mathcal{L}(V)$。则$\mathcal{M}(T)=\mathcal{M}(T_C)$，其中这两个矩阵都是关于基$v_1,\dots,v_n$的矩阵。
   c. 非零的有限维向量空间上的每个算子都有一维或二维不变子空间。
3. 复化的极小多项式，本征值与特征多项式
   a. 复化的极小多项式：设V是实向量空间，$T\in\mathcal{L}(V)$，则T_C的极小多项式等于T的极小多项式。
   b. 复化的本征值及其性质
      i. 定义 T_C的实本征值：设V是实向量空间，$T\in\mathcal{L}(V)$，则T_C的实本征值等于T的本征值。
      ii. 性质
         1) 设V是实向量空间，$T\in\mathcal{L}(V)$，$\lambda\in C$，$k\in N^*$，$u,v\in V$。则$(\mathrm{T_C}-\lambda\mathrm{I})^k(u+iv)=0\Leftrightarrow(T_C-\bar{\lambda}I)^k(u-iv)=0$。
         2) 设V是实向量空间，$T\in\mathcal{L}(V)$，$\lambda\in C$。则λ是T_C的本征值当且仅当$\bar{\lambda}$是T_C的本征值。
         3) 设V是实向量空间，$T\in\mathcal{L}(V)$，$\lambda\in C$是T_C的本征值。则λ作为T_C的本征值的重数等于$\bar{\lambda}$作为T_C的本征值的重数。
         4) 奇数维实向量空间上的每个算子都有本征值。
   c. 复化的特征多项式及其性质
      i. 定义 特征多项式 (characteristic polynomial)：设V是实向量空间，$T\in\mathcal{L}(V)$。则T的特征多项式定义为T_C的特征多项式。
      ii. 性质
         1) 设V是实向量空间，$T\in\mathcal{L}(V)$，则T_C的特征多项式的系数都是实数，从而保证了定义的合理性。
         2) 特征多项式的次数和零点：设V是实向量空间，$T\in\mathcal{L}(V)$，则
            a) T的特征多项式的系数都是实的；
            b) T的特征多项式的次数为$dim\,V$；
            c) T的所有本征值恰为T的本征多项式的所有实零点。
         3) 凯莱—哈密顿定理（Hamilton-Cayley Theorem）：设V是实向量空间，$T\in\mathcal{L}(V)$，令q表示T的特征多项式，则$q(T)=0$。

§2 实内积空间上的算子

2022年2月14日 17:50

1. 实内积空间上的正规算子
   a. 非自伴的正规算子：设V是二维实内积空间，$T \in \mathcal{L}(V)$。则以下条件等价：
      i. T是正规的但不是自伴的；
      ii. T关于V的每个规范正交基的矩阵都有$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$的形式，其中$b \neq 0$；
      iii. T关于V的某个规范正交基的矩阵有$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$的形式，其中$b > 0$。
   b. 正规算子和不变子空间：设V是实内积空间，$T \in \mathcal{L}(V)$是正规的，U是V的在T下不变的子空间，则
      i. $U^{\perp}$在T下不变；
      ii. U在T^*下不变；
      iii. $\left(T|_U\right)^* = (T^*)|_U$；
      iv. $T|_U \in \mathcal{L}(U)$和$T|_{U^{\perp}} \in \mathcal{L}(U^{\perp})$都是正规算子。
   c. 设V是实内积空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，则以下条件等价：
      i. T是正规的；
      ii. V有规范正交基使得T关于这个基有分块对角矩阵，对角线上的每个块是1×1矩阵，或者是形如$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$的$2 \times 2$矩阵，其中$b > 0$。
2. 实内积空间上的等距同构
   a. 设V是实内积空间，$S \in \mathcal{L}(V)$，则以下条件等价：
      i. S是等距同构；
      ii. V有规范正交基使得S关于这个基有分块对角矩阵，对角线上的每个块是1或-1构成的1×1矩阵，或者是形如$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$的$2 \times 2$矩阵，其中$\theta \in (0, \pi)$。

第十章 迹与行列式

2022年2月14日　21:37

§1 迹

2022年2月14日 21:37

1. 基的变更
   a. 定义
      i. 单位矩阵 (identity matrix)：设$n \in N$，$n \times n$对角矩阵$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$称为单位矩阵，记作$I$。
      ii. 可逆的 (invertible)、逆 (inverse)：方阵A称为可逆的，如果存在一个同样大小的方阵B使得$AB = BA = I$。称B为A的逆，记作$B = A^{-1}$。
   b. 线性映射之积的矩阵：假设$u_1, \dots, u_n$，$v_1, \dots, v_n$以及$w_1, \dots, w_n$都是V的基，设$S, T \in \mathcal{L}(V)$，则$\mathcal{M}\left(ST, (u_1, \dots, u_n), (w_1, \dots, w_n)\right) = \mathcal{M}\left(S, (v_1, \dots, v_n), (w_1, \dots, w_n)\right) \mathcal{M}\left(T, (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)\right)$。
   c. 恒等算子关于两个基的矩阵：设$u_1, \dots, u_n$和$v_1, \dots, v_n$都是V的基，则矩阵$\mathcal{M}\left(I, (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)\right)$和$\mathcal{M}\left(I, (v_1, \dots, v_n), (u_1, \dots, u_n)\right)$互为逆矩阵。
   d. 基变换公式：设$T \in \mathcal{L}(V)$，$u_1, \dots, u_n$和$v_1, \dots, v_n$都是V的基，记$A = \mathcal{M}\left(I, (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n)\right)$，则$\mathcal{M}\left(T, (u_1, \dots, u_n)\right) = A^{-1} \mathcal{M}\left(T, (v_1, \dots, v_n)\right) A$。
2. 迹：算子与矩阵间的联系
   a. 定义 迹
      i. 定义 算子的迹 (trace of an operator)：设$T \in \mathcal{L}(V)$，T的迹为如下定义，并记为$trace\ T$——
         1) 在复向量空间中，T的迹等于T的按重数重复的全体本征值之和；
         2) 在实向量空间中，T的迹等于T_C的按重数重复的全体本征值之和。
      ii. 定义 矩阵的迹 (trace of a matrix)：定义方阵A的迹为其对角线元素之和，记为$trace\ A$。
   b. 性质
      i. 算子的迹等于其矩阵的迹：设$T \in \mathcal{L}(V)$，则$trace\ T = trace\ \mathcal{M}(T)$。
      ii. 算子的矩阵的迹不依赖于基：设$T \in \mathcal{L}(V)$，$u_1, \dots, u_n$和$v_1, \dots, v_n$都是V的基，则$trace\ \mathcal{M}\left(T, (u_1, \dots, u_n)\right) = trace\ \mathcal{M}\left(T, (v_1, \dots, v_n)\right)$。
      iii. 如果A和B是相同阶数的方阵，则$trace(AB) = trace(BA)$。
      iv. 迹的可加性：若$S, T \in \mathcal{L}(V)$，则$trace(S + T) = trace\ S + trace\ T$。
      v. 迹和特征多项式：设$T \in \mathcal{L}(V)$，$n = dim\ V$，则$trace\ T$等于T的特征多项式中z^{n-1}的系数的相反数。
      vi. 不存在算子$S, T \in \mathcal{L}(V)$使得$ST - TS = I$。

§2 行列式

2022年2月14日 21:37

1. 算子的行列式
   a. 定义 算子的行列式 (determinant of an operater)：设$T \in \mathcal{L}(V)$，T的行列式为如下定义，并记为$det\,T$——
      i. 在复向量空间中，T的行列式等于T的按重数重复的全体本征值之积；
      ii. 在实向量空间中，T的行列式等于T_C的按重数重复的全体本征值之积。
   b. 性质
      i. 行列式和特征多项式：设$T \in \mathcal{L}(V)$，$n = dim\,V$，则$det\,T$等于T的特征多项式中常数项的$(-1)^n$倍。
      ii. V上的算子是可逆的当且仅当其行列式是非零的。
      iii. 设$T \in \mathcal{L}(V)$，则T的特征多项式等于$det(zI - T)$。
      iv. 行列式的可乘性：设$S, T \in \mathcal{L}(V)$，则$det(ST) = det(TS) = (det\,S)(det\,T)$。
      v. 设V是实内积空间，$S \in \mathcal{L}(V)$是等距同构，则$|det\,S| = 1$。
      vi. 设V是实内积空间，$T \in \mathcal{L}(V)$，则$|det\,T| = det\sqrt[2]{T^*T}$。
2. 矩阵的行列式
   a. 排列
      i. 定义 排列 (permutation)：$(1, \dots, n)$的一个排列是一个组$(m_1, \dots, m_n)$，其中$1, \dots n$中的每个数恰好出现一次。$(1, \dots, n)$的所有排列组成的集合记为$perm\,n$。
      ii. 定义 排列的符号 (sign of a permutation)：如果在组$(m_1, \dots, m_n)$中使得$1 \le i < j \le n$且i出现在j后面的整数对(i, j)的个数是偶数，那么排列$(m_1, \dots, m_n)$的符号定义为1；如果这种数对的个数是奇数，则定义为-1。也就是说，排列的符号等于1，如果自然顺序被改变了偶数次；等于-1，如果自然顺序被改变了奇数次。
      iii. 性质：交换一个排列中的两个元素，则该排列的符号相反。
   b. 矩阵的行列式
      i. 定义 矩阵的行列式 (determinant of a matrix)：$n \times n$矩阵$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$的行列式定义为$det\,A = \sum_{(m_1, \dots, m_n) \in perm\,n} \left(sign(m_1, \dots, m_n)\right) A_{m_1,1} \cdots A_{m_n,n}$。
      ii. 性质
         1) 设A是方阵，B是通过交换A的两列得到的矩阵，则$det\,A + det\,B = 0$。
         2) 如果方阵A有两列是相同的，则$det\,A = 0$。
         3) 重排矩阵的列：设$A = (A_{\cdot,1} \quad \cdots \quad A_{\cdot,n})$是$n \times n$矩阵，$(m_1, \dots, m_n)$是一个排列，则$det(A_{\cdot,m_1} \quad \cdots \quad A_{\cdot,m_n}) = \left(sign(m_1, \dots, m_n)\right) det\,A$。
         4) 设k, n是满足$1 \le k \le n$的正整数，固定除$A_{\cdot,k}$之外的那些$n \times 1$矩阵$A_{\cdot,1}, \dots, A_{\cdot,k-1}, A_{\cdot,k+1}, \dots, A_{\cdot,n}$，则把$n \times 1$列向量$A_{\cdot,k}$映为$det(A_{\cdot,1} \quad \cdots \quad A_{\cdot,n})$的函数，是从$F$上的$n \times 1$矩阵构成的向量空间到$F$的线性映射。
         5) 矩阵行列式的可乘性：若A和B是大小相同的方阵，则$det(AB) = det(BA) = (det\,A)(det\,B)$。
         6) 算子的矩阵的行列式不依赖于基：设$T \in \mathcal{L}(V)$，$u_1, \dots, u_n$和$v_1, \dots, v_n$都是V的基，则$det\,\mathcal{M}\left(T, (u_1, \dots, u_n)\right) = det\,\mathcal{M}\left(T, (v_1, \dots, v_n)\right)$。
         7) 算子的行列式等于其矩阵的行列式：设$T \in \mathcal{L}(V)$，则$det\,T = det\,\mathcal{M}(T)$。
3. 行列式的符号
   a. 体积
      i. 定义

1) 定义 长方体 (box)：R^n中的长方体是集合$\{(y_1, \ldots, y_n) \in R^n : x_k < y_k < x_k + r_k, k = 1, \ldots, n\}$，其中$r_1, \ldots, r_n$是正整数，$(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$。数$r_1, \ldots, r_n$称为长方体的边长。
2) 定义 长方体的体积 (volume of a box)：R^n中边长为$r_1, \ldots, r_n$的长方体B的体积定义为$volume\ B = r_1 \cdots r_n$。
3) 定义 体积 (volume)：设$\Omega \subset R^n$，则Ω的体积定义为$volume\ \Omega = int(volume\ B_1 + volume\ B_2 + \cdots)$，其中$B_1, B_2, \ldots$是长方形序列，且满足$\Omega \subset (B_1 \cap B_2 \cap \cdots)$，取遍所有这样的长方体序列。
4) 记号 $T(\Omega)$：对于定义在集合Ω上的函数T，定义$T(\Omega) = \{Tx : x \in \Omega\}$。

ii. 性质

1) 设$T \in \mathcal{L}(R^n)$是正算子，$\Omega \in R^n$，则$volume\ T(\Omega) = (det\ T)(volume\ \Omega)$。
2) 设$S \in \mathcal{L}(R^n)$是等距同构，$\Omega \in R^n$，则$volume\ T(\Omega) = volume\ \Omega$。
3) 设$T \in \mathcal{L}(R^n)$，$\Omega \in R^n$，则$volume\ T(\Omega) = |det\ T|(volume\ \Omega)$。