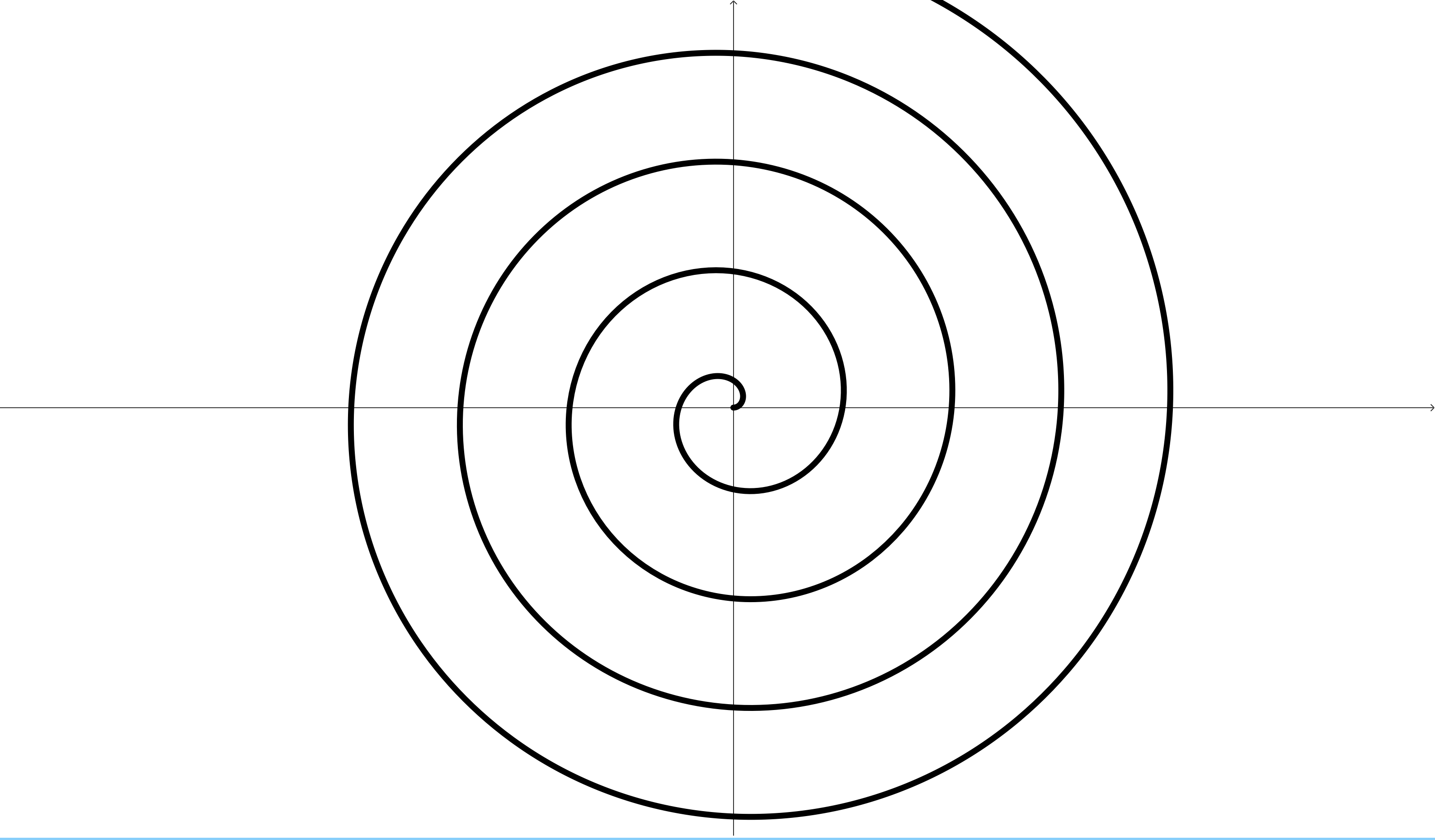

泛函分析 - 江泽坚 - 作业

作者：若水

邮箱：ethanmxzhou@163.com

主页：helloethanzhou.github.io

时间：July 18, 2024

致谢

由衷感谢 **胡前锋** 老师对于本课程的帮助

目录

第一次作业

作业 1.1 (课堂作业)

根据定义: 线性空间 X 中的一个非空子集 M 称为 X 中的线性流形, 如果对任意的 $x,y\in M$ 与数 α, 都有 $x+y,\alpha x\in M$. 证明 M 本身也成为线性空间.

证明 首先, 线性流形 M 的加法 $+$ 和数乘 $\cdot$ 来自于线性空间.

1. 根据线性流形的定义可知, 对于 $x,y\in M$, 则 $x+y,y+x\in M$, 其次 $M\subset X$, 由线性空间的公设可知,$x+y=y+x$. 公设 (1) 得证.

2. 对于 $x,y,z\in M$, 则 $x+y,y+z\in M$, 因此 $x+(y+z),(x+y)+z\in M$, 再由 $M\subset X$ 和线性空间公设可知 $x+(y+z)=(x+y)+z$. 公设 (2) 得证.

3. 根据习题 1, 对于线性空间 X, 对所有的 x, $0x=\theta$(X 中唯一的零元). 由线性流形的定义, 取 $a\in M$, $0\cdot a=\theta\in M$ 且唯一, 且 $M\subset X$, 则对任意的 $x\in M$, $x+\theta=x$. 公设 (3) 得证.

4. 对于 $x\in M\subset X$, 由线性空间 X 的公设 (4), 可知 x 存在唯一的逆元 $-x$, 利用公设 (3) 和 (6), 可知 $0\cdot x=\theta$ 和 $(-1)\cdot x=-x$, 因此存在 M 中唯一的 $(-1)\cdot x$, 使得 $x+(-1)\cdot x=\theta$. 公设 (4) 得证.

5,6,7, 8. 首先利用线性流形的定义, 可以验证相应的元素的线性组合属于 M, 同样也属于 X, 因此得到相应的等式, 公设 (5,6,7,8) 得证.

作业 1.2 (习题 1.1)

试证明: 在线性空间中, 对任意向量 x, 及数 α 都有

$$0x=\theta,\qquad (-1)x=-x,\qquad \alpha\theta=\theta.$$

证明 1. 由公设 (3), 存在唯一的 θ, 使得 $x+\theta=x$, 由公设 (6) 和 (8), $x+0\cdot x=(1+0)\cdot x=x$. 由唯一性知道 $0\cdot x=\theta$.

2. 由公设 (6) 和 1 的证明知, $x+(-1)\cdot x=0\cdot x=\theta$, 由公设 (4) 中的唯一性知 $(-1)\cdot x=-x$

3. 由 1 可知, 对任意的 x, 有,$0\cdot x=\theta$, 则 $a\cdot\theta=a\cdot(0\cdot x)=(a\cdot 0)\cdot x=\theta$.

作业 1.3 (习题 1.2)

试证明下述消去律在线性空间中成立:

$$x+y=x+z\Rightarrow y=z,$$
$$\alpha x=\alpha y\ 且\alpha\neq 0\Rightarrow x=y,$$
$$\alpha x=\beta x\ 且x\neq\theta\Rightarrow\alpha=\beta.$$

证明 1. 等式两边同时加上 $-x$, $-x+x+y=-x+x+z$, 则有 $\theta+y=\theta+z$, 因此有 $y=z$.

2. 因为 $\alpha\neq 0$, 等式两边同时乘以 $\frac{1}{\alpha}$, 则 $\frac{1}{\alpha}(\alpha x)=\frac{1}{\alpha}(\alpha y)$, 由公设 (7,8), 有 $x=y$.

3. 等式两边同时加上 $(-\beta)x$, 再利用作业题 1.1 的结论 $0\cdot x=\theta$ 和 $\alpha\cdot\theta=\theta$ 的结论, 可证若 $\alpha\cdot y=\theta$, 则 $\alpha=0$ 或者 $y=\theta$. $(\alpha-\beta)\cdot x=\theta$, 由题 $x\neq\theta$, 因此 $\alpha-\beta=0$. 得证.

作业 1.4 (习题 1.25)

设 X,Y 是赋范线性空间,T 是从 X 到 Y 的线性算子. 如果 T 是单射的, 则 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是 X 中线性无关的当且仅当 $\{Tx_1,\cdots,Tx_n\}$ 是 Y 中线性无关的.

证明 由题可知,T 是从线性空间 X 到线性空间 Y 的线性映射,T 是单射, 当且仅当 $\ker T=\{0\}$. 其次 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 线性无关的数学刻画是: 若 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i=0$ 可推出对所有的 $1\leq i\leq n$ $\alpha_i=0$.

$\Longrightarrow$ 若 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i Tx_i = 0$, 由于 T 是线性, 所以 $T(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i) = 0$. T 是单射, 则 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i = 0$. 再利用 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是线性无关, 推出 $\alpha_i = 0, \forall 1 \le i \le n$. 因此 $\{Tx_1,\cdots,Tx_n\}$ 是线性无关.

$\Longleftarrow$ 若 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i = 0$, 由于 T 是线性, 则 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i Tx_i = 0$. 由假设 $\{Tx_1,\cdots,Tx_n\}$ 是 Y 中线性无关的, 则 $\alpha_i = 0, \forall 1 \le i \le n$. 因此 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 是线性无关.

第二次作业

作业 2.1 (习题 1.8)

设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集,$C(S)$ 表示 S 上有界连续函数全体按逐点定义的加法和数乘形成的线性空间, 对 $f,g\in C(S)$, 定义距离为

$$d(f,g)=\sup_{x\in S}|f(x)-g(x)|.$$

试证明:$C(S)$ 是完备的距离线性空间.

证明 **首先, 证明 $C(S)$ 为距离空间.**

1. 任取 $f,g\in C(S)$, 那么显然成立 $d(f,g)\geq 0$. 如果 $f=g$, 那么显然 $d(f,g)=0$; 如果 $d(f,g)=0$, 那么 $\sup_{x\in S}|f(x)-g(x)|=0$, 于是对于任意 $x\in S$,$f(x)=g(x)$, 因此 $f=g$.
2. 任取 $f,g\in C(S)$, 那么显然成立 $d(f,g)=d(g,f)$.
3. 任取 $f,g,h\in C(S)$, 注意到, 任取 $x\in S$, 成立

$$\begin{aligned}
&|f(x)-h(x)|\\
\leq&|f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|\\
\leq&\sup_{x\in S}|f(x)-g(x)|+\sup_{x\in S}|g(x)-h(x)|\\
=&d(f,g)+d(g,h).
\end{aligned}$$

由 $x\in S$ 的任意性, 成立

$$d(f,h)=\sup_{x\in S}|f(x)-h(x)|\leq d(f,g)+d(g,h).$$

综合如上三点,$C(S)$ 为距离空间.

其次, 证明 $C(S)$ 为距离线性空间. 任取 $\{f_n\},\{g_n\}\subset C(S)$ 以及 $\{\alpha_n\}\subset\mathbb{R}$, 使得 $d(f_n,f)\to 0,d(g_n,g)\to 0,\alpha_n\to\alpha$, 其中 $f,g\in C(S),\alpha\in\mathbb{R}$.

1. **加法运算的连续性.** 任取 $\varepsilon>0$, 由于 $d(f_n,f)\to 0,d(g_n,g)\to 0$, 那么存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时, 成立

$$d(f_n,f)<\varepsilon/2,\qquad d(g_n,g)<\varepsilon/2.$$

因此当 $n>N$ 时, 成立

$$d(f_n+g_n,f+g)\leq d(f_n+g_n,f+g_n)+d(f+g_n,f+g)=d(f_n,f)+d(g_n,g)<\varepsilon.$$

于是

$$d(f_n+g_n,f+g)\to 0.$$

2. **数乘运算的连续性.** 任取 $\varepsilon>0$, 由于 $d(f_n,f)\to 0,\alpha_n\to\alpha$, 那么存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $n>N$, 成立

$$|\alpha_n-\alpha|<\varepsilon,\qquad d(f_n,f)<\varepsilon.$$

由于 f 有界, 那么存在 $M>0$, 使得成立 $d(f,0)<M$, 因此当 $n>N$ 时, 成立

$$d(f_n,0)\leq d(f,0)+d(f_n-f,0)=d(f,0)+d(f_n,f)<M+\varepsilon.$$

于是当 $n>N$ 时, 成立

$$d(\alpha_nf_n,\alpha f)\leq d(\alpha_nf_n,\alpha f_n)+d(\alpha f_n,\alpha f)=|\alpha_n-\alpha|d(f_n,0)+|\alpha|d(f_n,f)<\varepsilon(|\alpha|+M+\varepsilon).$$

进而

$$d(\alpha_nf_n,\alpha f)\to 0.$$

综合如上两点,$C(S)$ 为距离线性空间.

作业 2.2 (课堂作业)

证明:$L^p[a,b]$ 是距离线性空间, 其中 $1 \le p < \infty$, 且

$$L^p[a,b] = \left\{ f : \int_a^b |f|^p < \infty \right\}, \qquad d(f,g) = \left(\int_a^b |f-g|^p \right)^{1/p}.$$

证明 **首先, 证明 $L^p[a,b]$ 为距离空间.**

1. 任取 $f,g \in L^p[a,b]$, 显然成立 $d(f,g) \ge 0$. 当于 $[a,b]$ 上几乎处处成立 $f=g$ 时, 显然 $d(f,g)=0$; 而当 $d(f,g)=0$ 时, 成立

$$d(f,g) = 0 \implies \left(\int_a^b |f-g|^p \right)^{1/p} = 0 \implies \int_a^b |f-g|^p = 0 \implies f = g, \quad \text{a.e. in } [a,b]$$

2. 任取 $f,g \in L^p[a,b]$, 显然成立 $d(f,g) = d(g,f)$.
3. 任取 $f,g \in L^p[a,b]$, 由 Minkowsky 不等式

$$\begin{aligned} & d(f,h) \\ = & \left(\int_a^b |f-h|^p \right)^{1/p} \\ = & \left(\int_a^b |(f-g)+(g-h)|^p \right)^{1/p} \\ \le & \left(\int_a^b |f-g|^p \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g-h|^p \right)^{1/p} \\ = & d(f,g) + d(g,h). \end{aligned}$$

综合如上三点,$L^p[a,b]$ 为距离空间.

其次, 证明 $L^p[a,b]$ 为距离线性空间. 任取 $\{f_n\},\{g_n\} \subset L^p[a,b]$ 以及 $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$, 使得 $d(f_n,f) \to 0, d(g_n,g) \to 0, \alpha_n \to \alpha$, 其中 $f,g \in L^p[a,b], \alpha \in \mathbb{R}$.

1. **加法运算的连续性.** 任取 $\varepsilon > 0$, 由于 $d(f_n,f) \to 0, d(g_n,g) \to 0$, 所以存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 成立

$$d(f_n,f) < \varepsilon/2, \qquad d(g_n,g) < \varepsilon/2.$$

因此当 $n > N$ 时, 成立

$$d(f_n+g_n, f+g) \le d(f_n+g_n, f+g_n) + d(f+g_n, f+g) = d(f_n,f) + d(g_n,g) < \varepsilon.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n+g_n, f+g) = 0.$$

2. **数乘运算的连续性.** 任取 $\varepsilon > 0$, 由于 $d(f_n,f) \to 0, \alpha_n \to \alpha$, 所以存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 成立

$$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon, \qquad d(f_n,f) < \varepsilon \implies |\alpha_n| < |\alpha| + \varepsilon.$$

又由于 $f \in L^p[a,b]$, 所以存在 $M > 0$, 使得成立 $d(f,0) < M$. 于是当 $n > N$ 时, 成立

$$d(\alpha_n f_n, \alpha f) \le d(\alpha_n f_n, \alpha_n f) + d(\alpha_n f, \alpha f) = |\alpha_n| d(f_n,f) + |\alpha_n - \alpha| d(f,0) < \varepsilon(M + |\alpha| + \varepsilon).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} d(\alpha_n f_n, \alpha f) = 0.$$

综合如上两点,$L^p[a,b]$ 为距离线性空间.

第三次作业

定义 3.1 (积分绝对连续性)

对于可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的存在积分函数 f, 称 f 在 E 上是积分绝对连续的, 如果对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对于任意满足 $m(E_\delta)<\delta$ 的可测子集 $E_\delta\subset E$, 成立

$$\left|\int_{E_\delta} f\right|<\varepsilon.$$

♣

引理 3.1 (简单函数逼近引理)

对于可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上的非负可测函数 f, 存在单调递增的非负简单函数序列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, 使得成立 $\varphi_n\to f$. ♡

引理 3.2 (Lebesgue 控制收敛定理)

如果 F 在可测集 $E\subset\mathbb{R}^n$ 上可积, 在 E 上的可测函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 满足 $|f_n|\le F$, 且 f_n 在 E 上依测度收敛于 f, 或 f_n 在 E 上几乎处处收敛于 f, 那么 f 在 E 上可积, 且

$$\int_E f=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n.$$

♡

引理 3.3 (Luzin 定理)

如果 f 是可测集 E 上的几乎处处有限的可测函数, 那么对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 E 上的连续函数 g, 使得成立 $m(f\neq g)<\varepsilon$.

♡

引理 3.4 (Weierstrass 逼近定理)

对于 $[a,b]$ 上的连续函数 f, 存在多项式函数序列 $\{f_n\}$, 使得 f_n 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 f. ♡

引理 3.5 (简单函数在 L^p 空间中稠密)

记 $[a,b]$ 上的简单函数全体为

$$S[a,b]=\left\{\sum_{k=1}^n a_k\mathbb{1}_{A_k}:A_k\subset[a,b]\right\},$$

证明: 对于 $1\le p<\infty$,$S[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密.

♡

证明 首先证明 $S[a,b]\subset L^p[a,b]$. 由 Minkowsky 不等式, 成立

$$\left\|\sum_{k=1}^n a_k\mathbb{1}_{A_k}\right\|_p\le\sum_{k=1}^n|a_k|\,\|\mathbb{1}_{A_k}\|_p=\sum_{k=1}^n|a_k|\,(m(A_k))^{1/p}<\infty.$$

因此 $S[a,b]\subset L^p[a,b]$.

其次证明 $S[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密. 任取 $f\in L^p[a,b]$, 存在单调递增的非负简单函数序列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty\subset S[a,b]$, 使得成立 $\varphi_n\to f^+$, 因此 $|f^+-\varphi_n|^p\to 0$. 注意到 $|f^+-\varphi_n|^p\le|2f^+|^p$, 且 $|2f^+|^p$ 在 $[a,b]$ 上可积, 那么由 Lebesgue 控制收敛定理3.2,$|f^+-\varphi_n|^p$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b|f^+-\varphi_n|^p=0\implies\lim_{n\to\infty}\|f^+-\varphi_n\|_p=0.$$

同理, 存在单调递增的非负简单函数序列 $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty\subset S[a,b]$, 使得成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f^--\psi_n\|_p=0$. 由 Minkowsky 不等式, 成立

$$\lim_{n\to\infty}\|f-(\varphi_n-\psi_n)\|_p=\lim_{n\to\infty}\|(f^+-\varphi_n)-(f^--\psi_n)\|_p\le\lim_{n\to\infty}\|f^+-\varphi_n\|_p+\lim_{n\to\infty}\|f^--\psi_n\|_p=0.$$

进而 $S[a,b]$ 是 L^p 的稠密子集.

引理 3.6 (有界可测函数在 L^p 空间中稠密)

记 $B[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上的有界可测函数全体, 证明: 对于 $1 \le p < \infty$,$B[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密.

证明 首先证明 $B[a,b] \subset L^p[a,b]$. 任取 $f \in B[a,b]$, 那么存在 M, 使得成立 $|f| < M$, 于是

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} < (b-a)^{1/p} M < \infty,$$

因此 $f \in L^p[a,b]$, 进而 $B[a,b] \subset L^p[a,b]$.

其次证明 $B[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密. 任取 $f \in L^p[a,b]$, 以及 $\varepsilon > 0$. 定义函数序列 $f_n = \min\{f,n\}$, 那么 $f_n \in B[a,b]$. 由于 $|f|^p \in L^1[a,b]$, 那么 $|f|^p$ 可积, 由积分绝对连续性, 对于此 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $e \subset [a,b]$ 且 $m(e) < \delta$ 时, 成立 $\displaystyle\int_e |f|^p < \varepsilon^p$. 注意到

$$n^p m(|f| > n) \le \int_{|f|>n} |f|^p \le \int_a^b |f|^p < \infty,$$

那么 $m(|f| > n) \to 0$, 因此对于此 $\delta > 0$, 存在 $n \in \mathbb{N}^*$, 使得成立 $m(|f| > n) < \delta$, 于是 $\displaystyle\int_{|f|>n} |f|^p < \varepsilon^p$, 进而

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int_a^b |f_n - f|^p\right)^{1/p} = \left(\int_{|f|>n} |f|^p\right)^{1/p} < \varepsilon,$$

因此 $B[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密.

引理 3.7 (连续函数在 $B[a,b]$ 空间中稠密)

记 $C[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数全体, 证明: 对于 $1 \le p < \infty$,$C[a,b]$ 在 $B[a,b]$ 中稠密.

证明 显然 $C[a,b] \subset B[a,b]$. 任取 $f \in B[a,b]$, 那么存在 M, 使得成立 $|f| < M$. 任取 $\varepsilon > 0$, 由 Luzin 定理3.3, 存在 $g \in C[a,b]$, 使得成立 $m(f \ne g) < (\varepsilon/2M)^p$. 记 $h = \max\{\min\{g,M\}, -M\}$, 因此 $|h| \le M$, 且 $m(f \ne h) \le m(f \ne g) < (\varepsilon/2M)^p$, 从而

$$\|f-h\|_p = \left(\int_a^b |f-h|^p\right)^{1/p} = \left(\int_{f\ne g} |f-h|^p\right)^{1/p} \le (2M)(m(f \ne h))^{1/p} = \varepsilon,$$

因此 $C[a,b]$ 在 $B[a,b]$ 中稠密.

引理 3.8 (多项式函数在 $C[a,b]$ 空间中稠密)

记 $P[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上的多项式函数全体, 证明: 对于 $1 \le p < \infty$,$P[a,b]$ 在 $C[a,b]$ 中稠密.

证明 显然 $P[a,b] \subset C[a,b]$. 任取 $f \in C[a,b]$, 由 Weierstrass 逼近定理3.4, 存在多项式函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset P[a,b]$, 使得 f_n 一致收敛于 f. 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $n \ge N$, 成立 $|f_n - f| < \varepsilon(b-a)^{-1/p}$, 因此

$$\|f_n - f\|_p = \left(\int_a^b |f_n - f|^p\right)^{1/p} < \varepsilon,$$

进而 $P[a,b]$ 在 $C[a,b]$ 中稠密.

作业 3.1 (课堂作业)

证明: 对于 $1 \le p < \infty$,$L^p[a,b]$ 是可分空间.

证明 **方法一: 简单函数族.**

由引理, 我们仅需构造一个简单函数族的可数稠密子集. 取 $[a,b]$ 的可数拓扑基 $\mathscr{B} = \{[a,b] \cap (p,q) : p,q \in$

$\mathbb{Q}\} = \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$. 事实上, 任取开集 $I \subset [a,b]$, 那么 I 可表示为可数个不交开区间的并, 不妨记 $I = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$, 其中每一个 $(a_n, b_n) \subset (a,b)$. 对于每一个 (a_n, b_n), 存在有理数序列 $\{p_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$ 和 $\{q_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$, 使得 $p_{n_k} < q_{n_k}$, 且 $p_{n_k} \to a_n, q_{n_k} \to b_n$, 于是 $(a_n, b_n) = \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}, b_{n_k})$, 因此 $I = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}, b_{n_k})$, 于是 $\mathscr{B}$ 为 $[a,b]$ 的可数拓扑基. 构造 $S[a,b]$ 的可数子集

$$S_{\mathbb{Q}}[a,b] = \left\{\sum_{k=1}^{n} r_k \mathbb{1}_{B_{n_k}} : r_k \in \mathbb{Q}\right\}.$$

下面我们证明 $S_{\mathbb{Q}}[a,b]$ 为 $S[a,b]$ 的稠密子集, 分三部分进行.

1. 对于可测集 $A \subset [a,b]$, 存在 $\varphi_n \in S_{\mathbb{Q}}[a,b]$, 使得成立 $\|\varphi_n - \mathbb{1}_A\|_p \to 0$.

对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 存在开集 $G_n \supset A$, 使得成立 $m(G_n \setminus A) < 1/n$. 由于 $\mathscr{B}$ 为拓扑基, 那么对于任意开集 G, 存在可数指标集 $\Omega \subset \mathbb{N}^*$, 使得成立 $G = \bigcup_{k\in\Omega} B_k$, 因此可知

$$m\left(G \setminus \bigcup_{k\in\Omega\cap[1,N]} B_k\right) \to 0, \qquad (N \to \infty).$$

那么对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_0 \in \mathbb{N}^*$, 使得成立

$$m\left(G \setminus \bigcup_{k\in\Omega\cap[1,N_0]} B_k\right) < \varepsilon.$$

于是有限指标集 $\Lambda = \Omega \cap [1, N_0]$, 满足 $m(G \setminus \bigcup_{k\in\Lambda} B_k) < \varepsilon$. 进而对于开集 G_n, 存在有限指标集 $\Lambda_n \subset \mathbb{N}^*$, 使得成立 $G_n \supset \bigcup_{k\in\Lambda_n} B_k$, 且 $m(G_n \setminus \bigcup_{k\in\Lambda_n} B_k) < 1/n$. 而容易知道对于任意 $E, F \in \mathscr{B}$, 成立 $E \cap F \in \mathscr{B}$, 因此存在有限指标集 $\Xi_n \subset \mathbb{N}^*$, 使得成立

$$\bigcup_{k\in\Lambda_n} B_k = \bigsqcup_{k\in\Xi_n} B_k,$$

其中 $\sqcup$ 表示不交并. 令 $\varphi_n = \sum_{k\in\Xi_n} \mathbb{1}_{B_k}$, 于是由 Minkowsky 不等式

$$\begin{aligned}
&\|\varphi_n - \mathbb{1}_A\|_p \\
=&\left\|\sum_{k\in\Xi_n} \mathbb{1}_{B_k} - \mathbb{1}_A\right\|_p \\
=&\left\|\mathbb{1}_{\bigsqcup\limits_{k\in\Xi_n} B_k} - \mathbb{1}_A\right\|_p \\
=&\left\|\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{k\in\Lambda_n} B_k} - \mathbb{1}_A\right\|_p \\
\leq&\left\|\mathbb{1}_{\bigcup\limits_{k\in\Lambda_n} B_k} - \mathbb{1}_{G_n}\right\|_p + \|\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_{G_n}\|_p \\
=&m\left(G_n \setminus \bigcup_{k\in\Lambda_n} B_k\right)^{1/p} + m(G_n \setminus A)^{1/p} \\
<&\frac{2}{n^{1/p}} \to 0.
\end{aligned}$$

2. 对于可测集 $A \subset [a,b]$, 以及 $r \in \mathbb{R}$, 存在 $\varphi_n \in S_{\mathbb{Q}}[a,b]$, 使得成立 $\|\varphi_n - r\mathbb{1}_A\|_p \to 0$.

对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 存在 $r_n \in \mathbb{Q}$, 且由 1. 存在 φ_n, 使得成立 $|r - r_n| < 1/n$, 且 $\|\varphi_n - \mathbb{1}_A\|_p < 1/n$, 于是由

Minkowsky 不等式

$$\begin{aligned}
&\|r_n\varphi_n - r\mathbb{1}_A\|_p \\
\le&\|r_n\varphi_n - r_n\mathbb{1}_A\|_p + \|r_n\mathbb{1}_A - r\mathbb{1}_A\|_p \\
=&|r_n|\,\|\varphi_n - \mathbb{1}_A\|_p + |r_n - r|\,\|\mathbb{1}_A\|_p \\
\le&(|r-r_n|+|r|)\,\|\varphi_n - \mathbb{1}_A\|_p + |r_n - r|\,\|\mathbb{1}_A\|_p \\
<&\frac{|r|+m(A)}{n} + \frac{1}{n^2} \to 0.
\end{aligned}$$

3. 对于 $\sum_{k=1}^{m} a_k\mathbb{1}_{A_k} \in S[a,b]$, 存在 $\varphi_n \in S_{\mathbb{Q}}[a,b]$, 使得成立 $\left\|\varphi_n - \sum_{k=1}^{m} a_k\mathbb{1}_{A_k}\right\|_p \to 0$.

对于任意 $1 \le k \le m$, 由 2. 存在 $\varphi_n^{(k)} \in S_{\mathbb{Q}}[a,b]$, 使得当 $n \to \infty$ 时, 成立 $\left\|\varphi_n^{(k)} - a_k\mathbb{1}_{A_k}\right\|_p \to 0$, 令 $\varphi_n = \sum_{k=1}^{m} \varphi_n^{(k)}$, 于是由 Minkowsky 不等式

$$\left\|\varphi_n - \sum_{k=1}^{m} a_k\mathbb{1}_{A_k}\right\|_p \le \sum_{k=1}^{m}\left\|\varphi_n^{(k)} - a\mathbb{1}_{A_k}\right\|_p \to 0.$$

综合 1.2.3. 三点,$S_{\mathbb{Q}}[a,b]$ 是 $S[a,b]$ 的可数稠密子集, 因此 $S_{\mathbb{Q}}[a,b]$ 是 $L^p[a,b]$ 的可数稠密子集, 于是 $L^p[a,b]$ 为可分空间. 命题得证!

方法二: 多项式函数族.

由引理, 我们仅需构造一个多项式函数族的可数稠密子集. 这是容易的——构造

$$P_{\mathbb{Q}}[a,b] = \left\{\sum_{k=1}^{n} r_k x^k : r_k \in \mathbb{Q}, x \in [a,b]\right\}.$$

任取 $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \in P[a,b]$, 以及 $\varepsilon > 0$. 对于任意 $k = 1, \cdots, n$, 存在 $\{r_m^{(k)}\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$, 以及 $M_k \in \mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $m \ge M_k$, 成立 $|r_m^{(k)} - a_k| < \varepsilon/(n\|x^k\|_p)$. 记 $\varphi_m(x) = \sum_{k=1}^{n} r_m^{(k)} x^k \in P_{\mathbb{Q}}[a,b]$, 取 $M = \max_{1\le k\le n} M_k$, 那么当 $m \ge M$ 时, 成立

$$\begin{aligned}
&\|\varphi_m(x) - \varphi(x)\|_p \\
=&\left\|\sum_{k=1}^{n} r_m^{(k)} x^k - \sum_{k=1}^{n} a_k x^k\right\|_p \\
\le&\sum_{k=1}^{n} |r_m^{(k)} - a_k|\,\|x^k\|_p \\
\le&\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{n\|x^k\|_p}\,\|x^k\|_p \\
=&\varepsilon.
\end{aligned}$$

因此 $P_{\mathbb{Q}}[a,b]$ 是 $P[a,b]$ 的可数稠密子集, 于是 $P_{\mathbb{Q}}[a,b]$ 是 $L^p[a,b]$ 的可数稠密子集, 进而 $L^p[a,b]$ 为可分空间. 命题得证!

作业 3.2 (课堂作业)

证明:$C[a,b]$ 依 p 范数不完备.

证明 不妨设 $[a,b]=[-1,1]$, 构造函数

$$f_n(x)=\begin{cases}-1, & -1\le x<-1/n;\\ nx, & -1/n\le x\le 1/n;\\ 1, & 1/n<x\le 1.\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}-1, & -1\le x<0;\\ 0, & x=0;\\ 1, & 0<x\le 1.\end{cases}$$

显然 $f_n\in C[-1,1]$,$f\notin C[-1,1]$, 但是

$$\|f_n-f\|_p=\left(\int_a^b |f_n-f|^p\right)^{1/p}=\left(\frac{2}{(1+p)n}\right)^{1/p}\to 0.$$

因此 $C[-1,1]$ 不完备.

第四次作业

作业 4.1 (习题 1.14)

设 $\langle X,d\rangle$ 是完备的距离空间,E 是 X 的闭子集, 试证明 $\langle E,d\rangle$ 也是完备的距离空间.

证明 $\langle E,d\rangle$ 为距离空间是显然的, 下面证明 $\langle E,d\rangle$ 的完备性.

任取 E 中的 Cauchy 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset E\subset X$, 那么由于 X 的完备性, 存在 $x\in X$, 使得成立 $d(x_n,x)\to 0$. 任取 $r>0$, 存在 $N>0$, 使得当 $n\geq N$ 时, 成立 $d(x_n,x)<r$, 即 $x_n\in B_r(x)$. 如果对于任意 $n\geq N$, 成立 $x_n=x$, 那么 $x=x_N\in E$; 如果存在 $n_0\geq N$, 使得成立 $x_{n_0}\neq x$, 那么 $B_r(x)\cap E\setminus\{x\}\supset\{x_{n_0}\}\neq\varnothing$, 于是 x 是 E 的极限点, 又因为 E 是闭的, 那么 $x\in E$, 于是 Cauchy 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 中依距离 d 收敛于 $x\in E$, 进而 $\langle E,d\rangle$ 也是完备的距离空间.

作业 4.2 (课堂作业)

举例说明在一般的距离空间中, 完全有界集不一定是列紧的.

证明 距离空间为 $\langle\mathbb{Q},d\rangle$, 其中 $d(x,y)=|x-y|$. 取子集 $M=[0,1]\cap\mathbb{Q}$.

首先, 任取 $\varepsilon>0$, 存在 $n\in\mathbb{N}^*$, 使得成立 $1/n<\varepsilon$. 令 $N=\{k/n:0\leq k\leq n,k\in\mathbb{N}\}\subset M$, 于是对于任意 $x\in M$, 存在 $y\in N$, 使得成立 $d(x,y)=|x-y|<1/n<\varepsilon$, 因此 M 是完全有界集.

其次, 注意到数列 $\{(1+1/n)^n/3\}_{n=1}^{\infty}\subset M$, 但是 $(1+1/n)^n/3\to \mathrm{e}/3\notin M$, 因此 $\{(1+1/n)^n/3\}_{n=1}^{\infty}$ 在 M 中不存在收敛子列.

第五次作业

作业 5.1 (课堂作业)

叙述“连续, 一致连续, 收敛, 一致收敛, 几乎处处收敛, 依测度收敛”的定义.

证明 **连续**: 称函数 $f: X \to Y$ 在 X 上连续, 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 以及对于任意 $x \in X$, 存在 $\delta_{\varepsilon,x} > 0$, 使得当 $|x-y| < \delta$ 时, 成立 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

一致连续: 称函数 $f: X \to Y$ 在 X 上一致连续, 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_\varepsilon > 0$, 使得当 $|x-y| < \delta$ 时, 成立 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

收敛: 称函数序列 $\{f_n : X \to Y\}$ 在 X 上收敛于函数 f, 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 以及对于任意 $x \in X$, 存在 $N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 成立 $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$.

一致收敛: 称函数序列 $\{f_n : X \to Y\}$ 在 X 上一致收敛于函数 f, 如果对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 对于任意 $x \in X$, 成立 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

几乎处处收敛: 称几乎处处有限的函数序列 $\{f_n : X \to Y\}$ 在可测集 X 上几乎处处收敛于可测函数 f, 如果存在零测集 $E \subset X$, 使得对于任意 $\varepsilon > 0$, 以及任意 $x \in X \setminus E$, 存在 $N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 成立 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

依测度收敛: 称几乎处处有限的函数序列 $\{f_n : X \to Y\}$ 在可测集 X 上依测度于可测函数 f, 如果对于任意 $\delta, \varepsilon > 0$, 存在 $N_{\delta,\varepsilon} \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 成立 $m(E[|f_n - f| \geq \delta]) < \varepsilon$.

作业 5.2 (习题 1.15)

证明:$l^p(1 \leq p < \infty)$ 中子集 S 是列紧的充要条件是

i 存在常数 $M > 0$, 使对一切 $x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in S$, 都有 $\sum\limits_{n=1}^\infty |\xi_n|^p \leq M$.

ii 任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使当 $k \geq N$, 对一切 $x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in S$ 有 $\sum\limits_{n=k}^\infty |\xi_n|^p \leq \varepsilon$.

证明 对于必要性, 任取 $\varepsilon > 0$, 如果 S 是列紧的, 那么 S 是完全有界的, 于是存在有限数列序列 $\{\{\xi_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty, \cdots, \{\xi^{(m)}\}_{n=1}^\infty\} \subset S$, 使得对于任意数列 $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in S$, 存在 $k = 1, \cdots, m$, 使得成立 $\sum\limits_{n=1}^\infty |\xi_n - \xi_n^{(k)}|^p < \dfrac{\varepsilon}{2^p}$.

对于数列序列 $\{\{\xi_n^{(1)}\}_{n=1}^\infty, \cdots, \{\xi_n^{(m)}\}_{n=1}^\infty\}$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $k = 1, \cdots, m$, 成立 $\sum\limits_{n=N}^\infty |\xi_n^{(k)}|^p < \dfrac{\varepsilon}{2^p}$.

记 $M^{1/p} = \dfrac{\varepsilon^{1/p}}{2} + \max\limits_{1 \leq k \leq m} \left(\sum\limits_{n=1}^\infty |\xi_n^{(k_0)}|^p\right)^{1/p}$, 任取数列 $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in S$, 于是存在 $k_0 = 1, \cdots, m$, 使得成立 $\sum\limits_{n=1}^\infty |\xi_n - \xi_n^{(k_0)}|^p < \dfrac{\varepsilon}{2^p}$, 因此

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^p \\
\leq &\left(\left(\sum_{n=1}^\infty |\xi_n - \xi_n^{(k_0)}|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{n=1}^\infty |\xi_n^{(k_0)}|^p\right)^{1/p}\right)^p \\
< &\left(\left(\frac{\varepsilon}{2^p}\right)^{1/p} + \max_{1 \leq k \leq m}\left(\sum_{n=1}^\infty |\xi_n^{(k_0)}|^p\right)^{1/p}\right)^p \\
= &M;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=N}^{\infty}|\xi_n|^p\\
\leq&\left(\left(\sum_{n=N}^{\infty}|\xi_n-\xi_n^{(k_0)}|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=N}^{\infty}|\xi_n^{(k_0)}|^p\right)^{1/p}\right)^p\\
\leq&\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\xi_n^{(k_0)}|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=N}^{\infty}|\xi_n^{(k_0)}|^p\right)^{1/p}\right)^p\\
<&\left(\left(\frac{\varepsilon}{2^p}\right)^{1/p}+\left(\frac{\varepsilon}{2^p}\right)^{1/p}\right)^p\\
=&\varepsilon.
\end{aligned}
$$

对于充分性,任取数列序列 $\{\{\xi_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}\}_{m=1}^{\infty}\subset S$, 由 1, 存在 $M>0$, 使得对于任意 $m\in\mathbb{N}^*$, 成立 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n^{(m)}|^p<M$, 因此对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$, 数列 $\{\xi_n^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ 以 M 为界, 于是可依对角线方法找到正整数子列 $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$, 存在 ξ_n, 使得成立 $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_n^{(m_k)}=\xi_n$. 由于对于任意 $k\in\mathbb{N}^*$, 成立 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n^{(m_k)}|^p<M$, 那么令 $k\to\infty$, 可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p<M$, 于是 $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^p$.

任取 $\varepsilon>0$, 由 (ii), 存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 使得对于数列 $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^p$, 成立 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}|\xi_n|^p<\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}$, 以及对于任意 $k\in\mathbb{N}^*$, 成立 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}|\xi_n^{(m_k)}|^p<\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}$. 因为对于任意 $1\leq n\leq N$, 成立 $\lim\limits_{k\to\infty}\xi_n^{(m_k)}=\xi_n$, 所以存在 $K\in\mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $k\geq K$, 以及任意 $1\leq n\leq N$, 成立 $|\xi_n^{(m_k)}-\xi_n|<(\varepsilon/(2N))^{1/p}$, 因此对于任意 $k\geq K$, 成立

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n^{(m_k)}-\xi_n|^p\\
=&\sum_{n=1}^{N}|\xi_n^{(m_k)}-\xi_n|^p+\sum_{n=N+1}^{\infty}|\xi_n^{(m_k)}-\xi_n|^p\\
\leq&\sum_{n=1}^{N}|\xi_n^{(m_k)}-\xi_n|^p+\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n^{(m_k)}|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^p\right)^{1/p}\right)^p\\
<&\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\\
=&\varepsilon,
\end{aligned}
$$

进而 $\{\xi_n^{(m_k)}\}_{n=1}^{\infty}\to\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, 因此子集 $S\subset l^p$ 为列紧的.

作业 5.3 (课堂作业)

对于 $1\leq p<\infty$,$\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, 定义 $\mathbb{C}$ 上的线性空间

$$H^p=\{\mathbb{D}\text{内的解析函数}f:\sup_{0\leq r<1}m_p^{(r)}(f)<\infty\}$$

$$m_p[f;r]=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\mathrm{d}\theta\right)^{1/p},\qquad 0\leq r<1$$

证明:H^p 为以 $\|f\|=\sup\limits_{0\leq r<1}m_p[f;r]$ 为范数的赋范线性空间.

证明 结论蕴含于如下三条性质.

正定性:$\|f\|\geq 0$ 显然成立, 且

$$\begin{aligned}
&\|f\|=0\\
\Longleftrightarrow\ &\sup_{0\leq r<1} m_p[f;r]=0\\
\Longleftrightarrow\ &m_p[f;r]=0,\forall r\in[0,1)\\
\Longleftrightarrow\ &\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\mathrm{d}\theta=0,\forall r\in[0,1)\\
\Longleftrightarrow\ &f=0 \text{ a.e. in } \mathbb{D}.
\end{aligned}$$

绝对齐性:

$$\begin{aligned}
\|af\|&=\sup_{0\leq r<1} m_p[af;r]\\
&=\sup_{0\leq r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|af(re^{i\theta})|^p\mathrm{d}\theta\right)^{1/p}\\
&=|a|\sup_{0\leq r<1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\mathrm{d}\theta\right)^{1/p}\\
&=|a|\sup_{0\leq r<1} m_p[f;r]\\
&=|a|\|f\|.
\end{aligned}$$

三角不等式: 任取 $0\leq r<1$, 由 Minkowsky 不等式

$$\begin{aligned}
&m_p[f+g;r]\\
=&\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})+g(re^{i\theta})|^p\mathrm{d}\theta\right)^{1/p}\\
\leq&\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\mathrm{d}\theta\right)^{1/p}+\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(re^{i\theta})|^p\mathrm{d}\theta\right)^{1/p}\\
=&m_p[f;r]+m_p[g;r]\\
\leq&\sup_{0\leq r<1} m_p[f;r]+\sup_{0\leq r<1} m_p[g;r]\\
=&\|f\|+\|g\|.
\end{aligned}$$

由 r 的任意性,$\|f+g\|\leq\sup\limits_{0\leq r<1} m_p[f+g;r]\leq\|f\|+\|g\|<\infty$.

作业 5.4 (习题 1.17)

设 $M[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 上有界函数全体按逐点定义的加法和数乘形成的线性空间. 当 $x=x(t)\in M[a,b]$, 定义范数

$$\|x\|=\sup_{a\leq t\leq b}|x(t)|.$$

证明: 按这个范数 $M[a,b]$ 是 Banach 空间.

证明 任取 Cauchy 序列 $\{f_n\}\subset M[a,b]$, 于是对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $m,n\geq N$, 成立

$$\|f_m-f_n\|<\varepsilon\implies|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon,\quad\forall x\in[a,b],$$

于是对于任意 $x\in[a,b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$ 为 Cauchy 序列, 记 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$.

由于对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$,$f_n\in M[a,b]$, 于是存在 K_n, 使得成立 $\|f_n\|<K_n$. 在上式中令 $m\to\infty$, 可得

$$\|f-f_n\|<\varepsilon\implies\|f\|\leq\|f_n-f\|+\|f_n\|<\varepsilon+K_n<\infty,$$
$$\|f-f_n\|<\varepsilon\implies|\|f\|-\|f_n\||<\varepsilon,$$

因此 $f \in M[a,b], \|f_n\| \to \|f\|$, 于是 $M[a,b]$ 为完备空间, 进而 $M[a,b]$ 是 Banach 空间.

第六次作业

作业 6.1 (习题 1.23)

设 X 是赋范线性空间,$x_n \in X, n = 1, 2, \cdots$. 如果 $\{\sum_{n=1}^{k} x_n\}_{k=1}^{\infty}$ 是 X 中收敛序列, 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛. 如果数值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ 收敛, 称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 绝对收敛.

试证明:X 中任何绝对收敛的级数都收敛当且仅当 X 是 Banach 空间.

证明 对于必要性, 任取 Cauchy 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, 我们来递归的寻找子序列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $k \in \mathbb{N}^*$, 成立 $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}$.

i 取 $\varepsilon = 2^{-1}$, 于是存在 $N_1 \in \mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $m, n \geq N_1$, 成立 $\|x_m - x_n\| < 2^{-1}$. 取 $n_1 = N_1$.

ii 如果已取 $n_1, \cdots, n_k$, 那么取 $\varepsilon = 2^{-(k+1)}$, 于是存在 $N_{k+1} \in \mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $m, n \geq N_{k+1}$, 成立 $\|x_m - x_n\| < 2^{-(k+1)}$. 取 $n_{k+1} = \max\{N_k, N_{k+1}\} + 1$.

递归的, 子序列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}^*$ 满足对于任意 $k \in \mathbb{N}^*$, 成立 $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}$, 因此

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1,$$

即序列级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ 绝对收敛. 由必要性假设, 序列级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ 收敛, 即序列 $\{\sum_{k=1}^{m}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k})\}_{m=1}^{\infty}$ 收敛, 因此序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛. 记 $x_{n_k} \to x \in X$, 那么任取 $\varepsilon > 0$, 存在 $K \in \mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $k \geq K$, 成立 $\|x_{n_k} - x\| < \varepsilon/2$. 而序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 序列, 那么对于此 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $m, n \geq N$, 成立 $\|x_m - x_n\| < \varepsilon/2$. 那么当 $n, n_k \geq N$ 且 $k \geq K$, 成立

$$\|x_n - x\| \leq \|x_n - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon,$$

因此 $x_n \to x \in X$, 进而 X 为完备的赋范线性空间, 即 Banach 空间.

对于充分性, 任取绝对收敛序列级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, 那么数列级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ 收敛, 因此对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $n \geq N$ 和 $p \in \mathbb{N}^*$, 成立 $\sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon$, 那么对于此 $\varepsilon > 0$, 成立

$$\left\|\sum_{k=1}^{n+p} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k\right\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k\right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\| < \varepsilon,$$

因此序列 $\{\sum_{k=1}^{n} x_k\}_{n=1}^{\infty}$ 为 Cauchy 序列. 由 X 是完备的赋范线性空间, 那么序列 $\{\sum_{k=1}^{n} x_k\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛, 即序列级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛.

作业 6.2 (习题 1.11)

设 $\langle X, \|\cdot\|\rangle$ 是赋范线性空间,$r > 0$. 如果球 $B = \{x \in X : \|x\| < r\}$ 是列紧的, 则 X 必是有限维的. 试利用 Riesz 引理证明之.

证明 不妨假设 $r > 1$. 反证, 假设 X 为无限维的, 那么任取 $x_1 \in B \setminus \{0\}$, 取 $x_2 = -x_1/(2\|x_1\|) \in B$, 那么 $\|x_1 - x_2\| = \|x_1\| + 1/2 > 1/2$.

假设已经选取 $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset B$, 使得对于任意 $i \neq j$, 成立 $\|x_i - x_j\| > 1/2$, 那么记 $M_n = \mathrm{Sp}\{x_k\}_{k=1}^{n}$, 于是 M_n 为有限维子空间, 因此 M_n 为完备度量空间, 进而 M_n 是闭的真线性子空间. 由 Riesz 引理, 存在 $x_{n+1} \in B$, 使得成

立 $\|x_{n+1}\|=1$, 且对于任意 $1 \le k \le n$, 成立 $\|x_{n+1}-x_k\|>1/2$.

递归的, 存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$, 使得对于任意 $i \ne j, \|x_i - x_j\| > 1/2$, 因此 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 没有收敛子列, 进而 B 不为列紧子集, 矛盾! 因此 X 为有限维赋范线性空间.

第七次作业

作业 7.1 (课堂作业)

证明: 存在且存在唯一 $[0,1]$ 上的连续函数 $x(t)$, 使得成立 $x(t)=\frac{1}{2}\cos x(t)-b(t)$, 其中 $b(t)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数.

证明 构造映射

$$\begin{aligned}T:&C[0,1]\to C[0,1],\\ &x(t)\mapsto \frac{1}{2}\cos x(t)-b(t).\end{aligned}$$

任取 $x(t),y(t)\in C[0,1]$, 注意到

$$\begin{aligned}&d(T(x(t)),T(y(t)))\\ =&\sup_{[0,1]}|T(x(t))-T(y(t))|\\ =&\frac{1}{2}\sup_{[0,1]}|\cos x(t)-\cos y(t)|\\ =&\sup_{[0,1]}\left|\sin\frac{x(t)+y(t)}{2}\sin\frac{x(t)-y(t)}{2}\right|\\ \le&\frac{1}{2}|x(t)-y(t)|.\end{aligned}$$

因此 T 为以 $\frac{1}{2}$ 为 Lipchitz 常数的压缩映射, 由压缩映像原理, 存在且存在唯一 $x(t)\in C[0,1]$, 使得成立 $T(x(t))=x(t)$, 即 $x(t)=\frac{1}{2}\cos x(t)-b(t)$.

作业 7.2 (习题 2.5)

设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域. 令 $L^2(D)$ 表示所有 D 上平方可积的复值函数 $f(x)$ 按逐点定义的加法和数乘形成的线性空间, 设

$$(f,g)=\int_D f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x,\qquad \text{当} f,g\in L^2(D).$$

试证明:$L^2(D)$ 按如上定义的内积是一个 Hilbert 空间.

证明 首先证明 $L^2(D)$ 为内积空间.

正定性: 任取 $f\in L^2(D)$, 显然成立 $(f,f)\ge 0$, 且

$$\begin{aligned}&(f,f)=0\\ \iff&\int_D|f|^2=0\\ \iff&f=0.\end{aligned}$$

共轭对称性: 任取 $f,g\in L^2(D)$, 那么

$$(f,g)=\iint\limits_D f\overline{g}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\overline{\iint\limits_D g\overline{f}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\overline{(g,f)}.$$

左线性: 任取 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ 以及 $f,g,h\in L^2(D)$, 那么显然成立 $(\lambda f+\mu g,h)=\lambda(f,h)+\mu(g,h)$.

综合以上三点,$L^2(D)$ 为内积空间, 下面证明 $L^2(D)$ 的完备性.

任取 Cauchy 序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset L^2(D)$, 递归寻找子序列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $k\in\mathbb{N}^*$, 成立 $\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_2<2^{-k}$.

i 取 $\varepsilon=2^{-1}$, 存在 $N_1\in\mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $m,n\ge N_1$, 成立 $\|f_m-f_n\|_2<2^{-1}$. 取 $n_1=N_1$.

ii 如果已取 $n_1,\cdots,n_k$, 那么取 $\varepsilon=2^{-(k+1)}$, 于是存在 $N_{k+1}\in\mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $m,n\geq N_{k+1}$, 成立 $\|f_m-f_n\|_2<2^{-(k+1)}$. 取 $n_{k+1}=\max\{N_k,N_{k+1}\}+1$.

递归的, 可得子序列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}^*$ 满足对于任意 $k\in\mathbb{N}^*$, 成立 $\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_2<2^{-k}$.

考虑级数

$$f=f_{n_1}+\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}}-f_{n_k}),\qquad S_m(f)=f_{n_1}+\sum_{k=1}^{m}(f_{n_{k+1}}-f_{n_k});$$

$$g=|f_{n_1}|+\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|,\qquad S_m(g)=|f_{n_1}|+\sum_{k=1}^{m}|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|,$$

对于任意 $m\in\mathbb{N}^*$, 由 Minkowsky 不等式

$$\|S_m(g)\|_2\leq\|f_{n_1}\|_2+\sum_{k=1}^{m}\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_2<\|f_{n_1}\|_2+\sum_{k=1}^{m}2^{-k}<1+\|f_{n_1}\|_2,$$

由 Levi 单调收敛定理

$$\|g\|_2=\left(\int_X|g|^2\right)^{1/2}=\left(\int_X\lim_{m\to\infty}|S_m(g)|^2\right)^{1/2}=\lim_{m\to\infty}\left(\int_X|S_m(g)|^2\right)^{1/2}=\lim_{m\to\infty}\|S_m(g)\|_2\leq 1+\|f_{n_1}\|_2,$$

因此级数 g 几乎处处收敛, 于是级数 f 几乎处处绝对收敛, 那么存在零测集 N, 使得级数 f 在 $D\setminus N$ 上绝对收敛. 不妨当 $x\in N$ 时, 令 $f(x)=0$, 那么 f 为可测函数.

注意到

$$\|f\|_2=\left(\int_D|f|^2\right)^{1/2}=\left(\int_{D\setminus N}|f|^2\right)^{1/2}\leq\left(\int_{D\setminus N}|g|^2\right)^{1/2}=\left(\int_D|g|^2\right)^{1/2}=\|g\|_2<\infty,$$

因此 $f\in L^p$. 同时注意到

$$\|f-f_{n_k}\|_2=\left\|\sum_{i=k+1}^{\infty}(f_{n_{i+1}}-f_{n_i})\right\|_2\leq\sum_{i=k+1}^{\infty}\|f_{n_{i+1}}-f_{n_i}\|_2<\sum_{i=k+1}^{\infty}2^{-i}=\frac{1}{2^k}\to 0,$$

因此子序列 $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 在 $L^2(D)$ 空间中收敛于 f. 任取 $\varepsilon>0$, 存在 $K\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n_k\geq k\geq K$ 时, 成立 $\|f-f_{n_k}\|_2<\varepsilon/2$ 且 $\|f_k-f_{n_k}\|_2<\varepsilon/2$, 于是

$$\|f-f_k\|_2\leq\|f-f_{n_k}\|_2+\|f_k-f_{n_k}\|_2<\varepsilon,$$

进而序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $L^2(D)$ 空间中收敛于 f.

综上所述,$L^2(D)$ 为 Hilbert 空间.

作业 7.3 (课堂作业)

对于有界区域 $D\subset\mathbb{C}$, 定义 $\mathbb{C}$ 上的线性空间

$$A^2(D)=\left\{f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}\mid f\text{在}D\text{内解析, 且}\iint_D|f(x+iy)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty\right\},$$

$$(f,g)=\iint_D f(x+iy)\overline{g(x+iy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明:$A^2(D)$ 为 Hilbert 空间.

证明 首先证明 $A^2(D)$ 为内积空间.

正定性: 任取 $f\in A^2(D)$, 显然成立 $(f,f)\geq 0$, 且

$$\begin{aligned}&(f,f)=0\\\iff&\iint_D|f(x+iy)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\\\iff&f=0.\end{aligned}$$

共轭对称性: 任取 $f,g\in A^2(D)$, 那么

$$(f,g)=\iint\limits_D f(x+iy)\overline{g(x+iy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\overline{\iint\limits_D g(x+iy)\overline{f(x+iy)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\overline{(g,f)}.$$

左线性: 任取 $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ 以及 $f,g,h\in A^2(D)$, 那么显然成立 $(\lambda f+\mu g,h)=\lambda(f,h)+\mu(g,h)$.

综合以上三点,$A^2(D)$ 为内积空间, 下面证明 $A^2(D)$ 的完备性.

任取 Cauchy 序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset A^2(D)$, 由于 $A^2(D)$ 为 $L^2(D)$ 的线性流形, 而 $L^2(D)$ 为完备的, 那么存在 $f\in L^2(D)$, 使得成立 $\|f-f_n\|_2\to 0$. 那么存在 $n_0\in\mathbb{N}^*$, 使得成立 $\|f-f_{n_0}\|_2<1$, 由 Minkowsky 不等式

$$\|f\|_2\le\|f-f_{n_0}\|_2+\|f_{n_0}\|_2<1+\|f_{n_0}\|_2<\infty.$$

下面证明 f 在 D 内解析.

任取闭圆 $\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|\le r\}\subset D$, 由于 f_n 在 D 内解析, 那么由 Taylor 定理, 对于任意 $m,n\in\mathbb{N}^*$, 存在且存在唯一 Taylor 展式

$$f_m(z)-f_n(z)=\sum_{k=0}^\infty a_k(z-z_0)^k=\sum_{k=0}^\infty a_k\rho^k\mathrm{e}^{ik\theta},\qquad \rho,|z-z_0|\le r.$$

记

$$g(z)=\sum_{k=0}^\infty a_k(z-z_0)^k=\sum_{k=0}^\infty a_k\rho^k\mathrm{e}^{ik\theta},\qquad \rho,|z-z_0|\le r;$$

$$g_k(z)=\sum_{j=0}^k a_j(z-z_0)^j=\sum_{j=0}^k a_j\rho^j\mathrm{e}^{ij\theta},\qquad \rho,|z-z_0|\le r.$$

由于 g 在闭圆 $|z-z_0|\le r$ 内连续, 那么存在 M, 使得成立 $|g|<M$. 由于 $g_k\to g$, 那么存在 $K_0\in\mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $k\ge K_0$, 成立 $|g_k-g|<1$, 因此当 $k\ge K_0$ 时, 成立

$$|g_k|\le|g_k-g|+|g|<1+M.$$

由 Abel 定理, 函数级数 g 在闭圆 $|z-z_0|\le r$ 中内闭一致收敛且绝对收敛, 那么函数序列 $\{g_k\}_{k=0}^\infty$ 在闭圆 $|z-z_0|\le r$ 中内闭一致收敛且绝对收敛. 因此函数序列 $\{\overline{g_k}\}_{k=0}^\infty$ 在闭圆 $|z-z_0|\le r$ 中内闭一致收敛且绝对收敛, 于是函数级数 $|g|^2=\sum\limits_{k,l=0}^\infty a_k\overline{a_l}\rho^{k+l}\mathrm{e}^{i(k-l)\theta}$ 双重求和指标有意义. 由于函数序列 $\{g_k\}_{k=0}^\infty$ 在闭圆 $|z-z_0|\le r$ 中内闭一致收敛, 那么对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $K\in\mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $k,l\ge K$, 成立 $|g_k-g_l|<\varepsilon/(2(1+M))$, 因此当 $k,l\ge\max\{K_0,K\}$ 时, 成立

$$||g_k|^2-|g_l|^2|=|g_k\overline{g_k}-g_l\overline{g_l}|\le|g_k\overline{g_k}-g_k\overline{g_l}|+|g_k\overline{g_l}-g_l\overline{g_l}|=(|g_k|+|g_l|)|g_k-g_l|<\varepsilon,$$

于是函数序列 $\{|g_k|^2\}_{k=0}^\infty$ 在闭圆 $|z-z_0|\le r$ 中内闭一致收敛, 进而函数级数 $|g|^2=\sum\limits_{k,l=0}^\infty a_k\overline{a_l}\rho^{k+l}\mathrm{e}^{i(k-l)\theta}$ 在闭圆 $|z-z_0|\le r$ 中内闭一致收敛.

考察级数 $h(\rho)=\sum\limits_{k=0}^\infty|a_k|^2\rho^{2k+1}$, 记 $h_k(\rho)=\sum\limits_{j=0}^k|a_j|^2\rho^{2j+1}$, 当 $l>k\ge\max\{L_0,L\}$ 时, 在 $0\le\rho\le r$ 时, 成立

$$|h_k(\rho)-h_l(\rho)|=\left|\sum_{j=k}^l|a_j|^2\rho^{2j+1}\right|\le r\left|\sum_{j=k}^l|a_j|^2\rho^{2j}\right|\le r\left|\left|\sum_{j=0}^k a_j\rho^j\mathrm{e}^{ij\theta}\right|^2-\left|\sum_{j=0}^l a_j\rho^j\mathrm{e}^{ij\theta}\right|^2\right|=r||g_k|^2-|g_l|^2|<r\varepsilon$$

因此函数序列 $\{|h_k|^2\}_{k=0}^\infty$ 在闭集 $\rho\in[0,r]$ 中内闭一致收敛, 进而函数级数 $h(\rho)=\sum\limits_{k=0}^\infty|a_k|^2\rho^{2k+1}$ 在闭集 $\rho\in[0,r]$ 中内闭一致收敛.

由于 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 为 Cauchy 序列, 那么对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $L\in\mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $m,n\ge L$, 成立 $\|f_m-f_n\|_2<$

$\sqrt{\pi}r\varepsilon$. 由如上讨论, 注意到

$$
\begin{aligned}
&\|f_m-f_n\|_2^2\\
=&\iint\limits_D |f_m(x+iy)-f_n(x+iy)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
\geq&\iint\limits_{|z-z_0|\leq r} |f_m(x+iy)-f_n(x+iy)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\int_0^r \rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_n\rho^k\mathrm{e}^{ik\theta}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\overline{a_k}\rho^k\mathrm{e}^{-ik\theta}\right)\mathrm{d}\theta\\
=&\int_0^r \rho\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k,l=0}^{\infty}a_k\overline{a_l}\rho^{k+l}\mathrm{e}^{i(k-l)\theta}\right)\mathrm{d}\theta\\
=&\int_0^r \sum_{k,l=0}^{\infty}a_k\overline{a_l}\rho^{k+l+1}\left(\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i(k-l)\theta}\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\rho\\
=&2\pi\int_0^r\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2\rho^{2k+1}\mathrm{d}\rho\\
=&2\pi\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|^2\int_0^r\rho^{2k+1}\mathrm{d}\rho\\
=&\pi\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|^2}{k+1}r^{2k+2}\\
\geq&\pi r^2|a_0|^2\\
=&\pi r^2|f_m(z_0)-f_n(z_0)|^2,
\end{aligned}
$$

因此当 $m,n\geq L$ 时, 成立 $|f_m(z_0)-f_n(z_0)|<\varepsilon$, 由 z_0 的任意性, 可得 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 D 中任意闭圆内一致收敛于 f.

取开圆 $K\subset D$, 使得成立 $\overline{K}\subset D$, 任取三角形 $T\subset D$, 由于 f_n 解析, 那么由 Goursat 定理可得 $\displaystyle\int_T f_n=0$. 由于 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $\overline{K}$ 内一致收敛于 f, 那么 f 在 K 内连续, 且 $\displaystyle\int_T f_n\to\int_T f$, 因此 $\displaystyle\int_T f=0$. 由 Morera 定理,f 在 K 内解析. 由 K 的任意性,f 在 D 内解析, 因此 $f\in A^2(D)$.

综上所述,$A^2(D)$ 为 Hilbert 空间.

第八次作业

作业 8.1 (2.1)

设 X 是内积空间,$x, y \in X$ 为非零元, 试证明:

1. 如果 x 与 y 正交, 那么 x 与 y 线性无关;
2. x 与 y 正交的充分必要条件是对任意数 α,
$$\|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\|;$$
3. x 与 y 正交的充分必要条件是对任意数 α,
$$\|x+\alpha y\| \geq \|x\|.$$

证明

(1) 任取数 α 和 β, 使得成立 $\alpha x+\beta y=0$, 因此

$$\begin{aligned}
(\alpha x+\beta y, x)=(0, x) &\Longrightarrow \alpha\|x\|^2+\beta(y, x)=0 \Longrightarrow \alpha=0, \\
(\alpha x+\beta y, y)=(0, y) &\Longrightarrow \alpha(x, y)+\beta\|y\|^2=0 \Longrightarrow \beta=0,
\end{aligned}$$

那么 x 与 y 线性无关.

(2) 注意到

$$\begin{aligned}
& \|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|, \forall \alpha \\
\Longleftrightarrow\ & (x+\alpha y, x+\alpha y)=(x-\alpha y, x-\alpha y), \forall \alpha \\
\Longleftrightarrow\ & \|x\|^2+\overline{\alpha}(x, y)+\alpha \overline{(x, y)}+|\alpha|^2\|y\|^2=\|x\|^2-\overline{\alpha}(x, y)-\alpha \overline{(x, y)}+|\alpha|^2\|y\|^2, \forall \alpha \\
\Longleftrightarrow\ & \overline{\alpha}(x, y)+\alpha \overline{(x, y)}=0, \forall \alpha \\
\Longrightarrow\ & (x, y) \overline{(x, y)}=0 \\
\Longleftrightarrow\ & |(x, y)|^2=0 \\
\Longleftrightarrow\ & (x, y)=0 ;
\end{aligned}$$

而显然成立 $(x, y)=0 \Longrightarrow \overline{\alpha}(x, y)+\alpha \overline{(x, y)}=0, \forall \alpha$.

(3) 注意到

$$\begin{aligned}
& \|x+\lambda y\| \geq\|x\|, \forall \lambda \in \mathbb{C} \\
\Longleftrightarrow\ & (x+\lambda y, x+\lambda y) \geq\|x\|^2, \forall \lambda \in \mathbb{C} \\
\Longleftrightarrow\ & \|x\|^2+\overline{\lambda}(x, y)+\lambda \overline{(x, y)}+|\lambda|^2\|y\|^2 \geq\|x\|^2, \forall \lambda \in \mathbb{C} \\
\Longleftrightarrow\ & \overline{\lambda}(x, y)+\lambda \overline{(x, y)}+|\lambda|^2\|y\|^2 \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{C} .
\end{aligned}$$

对于必要性, 显然成立 $(x, y)=0 \Longrightarrow \overline{\lambda}(x, y)+\lambda \overline{(x, y)}+|\lambda|^2\|y\|^2 \geq 0, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

对于充分性, 如果对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}$, 成立 $\overline{\lambda}(x, y)+\lambda \overline{(x, y)}+|\lambda|^2\|y\|^2 \geq 0$, 那么若 $y=0$, 显然成立 $(x, y)=0$; 若 $y \neq 0$, 取 $\lambda=-(x, y)/\|y\|$, 于是

$$\overline{\lambda}(x, y)+\lambda \overline{(x, y)}+|\lambda|^2\|y\|^2=-\frac{|(x, y)|^2}{\|y\|} \geq 0 \Longrightarrow (x, y)=0 .$$

作业 8.2 (习题 2.2)

设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是内积空间 X 中的正规正交集, 则对任意 $x, y \in X$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(x, e_n)(y, e_n)| \leq\|x\|\|y\| .$$

证明 由 Bessel 不等式, 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 成立

$$\sum_{k=1}^{n} |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2, \qquad \sum_{k=1}^{n} |(y, e_k)|^2 \leq \|y\|^2.$$

令 $n \to \infty$, 那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leq \|x\|^2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |(y, e_n)|^2 \leq \|y\|^2.$$

由 Hölder 不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)(y, e_n)| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(y, e_n)|^2\right)^{1/2} \leq \|x\|\|y\|.$$

作业 8.3 (习题 2.3)

设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Hilbert 空间 H 中的正规正交集,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, \qquad y = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n.$$

试证明

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \overline{\beta_n},$$

且右端级数绝对收敛.

证明

$$(x, y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n\right) = \sum_{i,j=1}^{n} (\alpha_i e_i, \beta_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j} (e_i, e_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \overline{\beta_n}.$$

由于

$$(x, e_n) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, e_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (e_k, e_n) = \alpha_n$$

$$(y, e_n) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e_k, e_n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k (e_k, e_n) = \beta_n,$$

那么由命题8.2

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n \overline{\beta_n}| = \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)(y, e_n)| \leq \|x\|\|y\|.$$

因此级数绝对收敛.

作业 8.4 (习题 2.4)

设 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是可分 Hilbert 空间 H 的正规正交基, 证明: 任给 $x, y \in H$,

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)\overline{(y, e_n)},$$

且右端级数绝对收敛.

证明

由命题8.3, 该命题显然!

第九次作业

作业 9.1 (习题 2.10)

试证明 H^* 按如下范数:
$$\|f\| = \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)|, \qquad 当 f \in H^*,$$
是完备的赋范线性空间.

证明 **首先证明 H^* 为线性空间.**

任取 $f, g \in H^*, \lambda, \mu \in \mathbb{C}, x, y \in H$, 注意到

$$(f+g)(x+y) = f(x+y) + g(x+y) = f(x) + f(y) + g(x) + g(y) = (f+g)(x) + (f+g)(y),$$
$$(f+g)(\lambda x) = f(\lambda x) + g(\lambda x) = \lambda f(x) + \lambda g(x) = \lambda(f+g)(x),$$
$$(\lambda f)(x+y) = \lambda f(x+y) = \lambda f(x) + \lambda f(y) = (\lambda f)(x) + (\lambda f)(y),$$
$$(\lambda f)(\mu x) = \lambda f(\mu x) = \lambda\mu f(x) = \mu(\lambda f)(x)$$
$$\sup_{\|x\|\le 1} |(f+g)(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)+g(x)| \le \sup_{\|x\|\le 1} (|f(x)|+|g(x)|) \le \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)| + \sup_{\|x\|\le 1} |g(x)| = \|f\| + \|g\|,$$
$$\sup_{\|x\|\le 1} |(\lambda f)(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} |\lambda f(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} \lambda |f(x)| = \lambda \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)| = \lambda \|f\|,$$
那么 $f+g$ 与 λf 为有界线性泛函, 等价于 $f+g$ 与 λf 为连续线性泛函, 因此 $f+g, \lambda f \in H^*$, 进而 H^* 为线性空间.

其次证明 $\|\cdot\|$ 为范数.

对于正定性, 显然 $\|f\| \ge 0$, 且
$$\|f\| = 0 \iff \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)| = 0 \iff f(x) = 0, \forall \|x\| \le 1 \iff f = 0.$$
事实上, 对于任意 $x \in H \setminus \{0\}$, 成立 $f(x) = \|x\| f(x/\|x\|)$.

对于绝对齐性, 注意到
$$\|\lambda f\| = \sup_{\|x\|\le 1} |(\lambda f)(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} |\lambda f(x)| = |\lambda| \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)| = |\lambda| \|f\|.$$
对于三角不等式, 任取 $x \in H$ 满足 $\|x\| \le 1$, 注意到
$$\|f\| + \|g\| = \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)| + \sup_{\|x\|\le 1} |g(x)| \ge |f(x)| + |g(x)| \ge |f(x) + g(x)|.$$
由 x 的任意性, 可得
$$\|f\| + \|g\| \ge \sup_{\|x\|\le 1} |(f+g)(x)| = \|f+g\|.$$

综合这三点,$\|\cdot\|$ 为范数, 进而 H^* 为赋范线性空间.

最后证明 H^* 为完备空间.

任取 Cauchy 序列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, 那么对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $m, n \ge N$, 成立 $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$, 因此 $\sup_{\|x\|\le 1} |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, 进而当 $\|x\| \le 1$ 时, 成立 $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, 这表明 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ 为 Cauchy 序列. 当 $\|x\| > 1$ 时, 任取 $\varepsilon > 0$, 由于 $\{f_n(x/\|x\|)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ 为 Cauchy 序列, 那么存在 $M \in \mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $m, n \ge N$, 成立 $|f_m(x/\|x\|) - f_n(x/\|x\|)| < \varepsilon/\|x\|$, 因此 $|f_m(x) - f_n(x)| = \|x\| |f_m(x/\|x\|) - f_n(x/\|x\|)| < \varepsilon$, 这表明 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ 为 Cauchy 序列. 因此对于任意 $x \in H$, 序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ 为 Cauchy 序列, 进而定义 $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

第一证明 $f \in H^*$, 由于 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 为 Cauchy 序列, 那么对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得对于任意 $m, n \ge N$, 成立 $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$, 因此 $|\|f_m\| - \|f_n\|| \le \|f_m - f_n\| \le \varepsilon$, 因此 $\{\|f_n\|\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ 为 Cauchy 序列, 因此存在 $z \in \mathbb{C}$,

使得成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\| = z$. 任取 $x, y \in H$, 任取 $\lambda \in \mathbb{C}$, 注意到

$$f(x+y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) + f_n(y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \lim_{n\to\infty} f_n(y) = f(x) + f(y),$$

$$f(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda x) = \lim_{n\to\infty} \lambda f_n(x) = \lambda \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lambda f(x),$$

$$\sup_{\|x\|\le 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} |\lim_{n\to\infty} f_n(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \le \lim_{n\to\infty} \sup_{\|x\|\le 1} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \|f_n\| = z,$$

因此 f 为有界线性算子, 等价于 f 为连续线性泛函, 因此 $f \in H^*$.

第二证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f - f_n\| = 0$. 注意到对于任意 $\|x\| \le 1$, 成立

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| \\
=& \lim_{n\to\infty} \sup_{\|x\|\le 1} |f(x) - f_n(x)| \\
=& \lim_{n\to\infty} \sup_{\|x\|\le 1} |\lim_{m\to\infty} f_m(x) - f_n(x)| \\
=& \lim_{n\to\infty} \sup_{\|x\|\le 1} \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \\
\le& \lim_{m,n\to\infty} \sup_{\|x\|\le 1} |f_m(x) - f_n(x)| \\
=& \lim_{m,n\to\infty} \|f_m - f_n\| \\
=&0.
\end{aligned}$$

综合这两点,$f_n \to f$, 进而 H^* 为完备空间.

综上所述,$(H^*, \|\cdot\|)$ 为完备赋范线性空间, 即 Banach 空间.

作业 9.2 (习题 2.11)

证明: 对任意的 $x \in H$,

$$\|x\| = \sup_{\|y\|\le 1} |(x, y)|.$$

证明 记 $f : H \to \mathbb{C}, \quad y \mapsto (y, x)$, 注意到 $f \in H$, 那么由 Frechet-Riesz 表现定理

$$\sup_{\|y\|\le 1} |(x, y)| = \sup_{\|y\|\le 1} |f(y)| = \|f\| = \|x\|.$$

作业 9.3 (习题 2.16)

对于有界线性算子:

$$\begin{aligned}
T: \quad & l^2 \longrightarrow l^2, \\
& (x_n)_{n=1}^{\infty} \longmapsto \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m} x_m\right)_{n=1}^{\infty}.
\end{aligned}$$

其 Hilbert 共轭算子为

$$\begin{aligned}
T^*: \quad & l^2 \longrightarrow l^2, \\
& (x_n)_{n=1}^{\infty} \longmapsto \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_{n,m}^* x_m\right)_{n=1}^{\infty}.
\end{aligned}$$

证明:

$$a_{n,m}^* = \overline{a_{m,n}}, \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}^*.$$

证明 取 l^2 的正规正交基 $e_n = (\delta_{n,m})_{m=1}^{\infty}$, 其中

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m; \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

那么对于任意 $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^2$, 可唯一表示为

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

因此对于有界线性算子 $T : l^2 \to l^2$, 成立

$$T((x_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n T(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n (a_{n,m})_{m=1}^{\infty} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n a_{n,m} \right)_{m=1}^{\infty}.$$

进而

$$(T((x_n)_{n=1}^{\infty}), e_l) = \left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n a_{n,m} \right)_{m=1}^{\infty}, e_l \right) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n a_{n,l}, \qquad \forall l \in \mathbb{N}^*.$$

特别的

$$T(e_n) = (a_{n,m})_{m=1}^{\infty}, \qquad (T(e_n), e_m) = a_{n,m}, \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}^*.$$

同理可得

$$T^*(e_n) = (a^*_{n,m})_{m=1}^{\infty}, \qquad (T^*(e_n), e_m) = a^*_{n,m}, \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}^*.$$

由于 T^* 为 T 的 Hilbert 共轭算子, 那么

$$a^*_{n,m} = (T^*(e_n), e_m) = (e_n, T(e_m)) = \overline{(T(e_m), e_n)} = \overline{a_{m,n}}, \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}^*.$$

第十次作业

作业 10.1 (习题 3.6)

设 X, Y 都是赋范线性空间,T 是从 X 到 Y 之线性算子. 试证明, 如果 T 是有界的, 则 T 之零空间 $N(T)$ 是闭的.

证明 （法一）任取 $x \in \overline{N(T)}$, 那么存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, 使得成立 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. 由于 T 为有界线性算子, 那么 T 为连续线性算子, 因此

$$T(x) = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} T(x_n) = 0,$$

进而 $x \in N(T)$. 由 x 的任意性,$N(T)$ 为 X 的闭子空间.

（法二）由于 Y 为度量空间, 因此 Y 满足 T_1 公理, 进而 $\{0\}$ 为 Y 的闭集. 而 T 有界 $\iff$ T 连续, 因此 $N(T) = T^{-1}(0)$ 为闭集.

作业 10.2 (习题 3.2)

设数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界, 在 l^1 中定义线性算子

$$\begin{aligned} T: \quad & l^1 \longrightarrow l^1, \\ & \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto \{a_n x_n\}_{n=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

证明:T 为有界线性算子, 且

$$\|T\| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n|.$$

证明 由于 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为有界数列, 因此存在 $M > 0$, 使得对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 成立 $|a_n| \leq M$, 进而 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n| \leq M$.

一方面,

$$\|T\| = \sup \frac{\|\{a_n x_n\}_{n=1}^{\infty}\|}{\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|} = \sup \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n x_n|}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|} \leq \sup \frac{\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n| \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|} = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n| \leq M.$$

因此 T 为有界线性算子.

另一方面, 对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得成立 $|a_N| \geq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n| - \varepsilon$, 因此取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0, \cdots, 0, \underset{N\text{ th}}{1}, 0, 0, \cdots\}$, 那么

$$\|T\| \geq \frac{\|\{a_n x_n\}_{n=1}^{\infty}\|}{\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|} = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n x_n|}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|} = |a_N| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n| - \varepsilon.$$

由 ε 的任意性,

$$\|T\| \geq \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n|.$$

综合两方面,

$$\|T\| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n|.$$

作业 10.3 (习题 3.3)

设数列 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 有界, 在 l^1 中定义线性算子

$$\begin{aligned} T: \quad & l^1 \longrightarrow l^1, \\ & \{x_n\}_{n=1}^\infty \longmapsto \{a_n x_n\}_{n=1}^\infty. \end{aligned}$$

证明:T 为有界可逆的当且仅当

$$\inf_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n| > 0.$$

证明 由于 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ 为有界数列, 因此存在 $M>0$, 使得对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$, 成立 $|a_n|\le M$, 进而 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|\le M$.

一. 如果存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 使得成立 $a_N=0$, 那么由于

$$T(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = \{a_1x_1,\cdots,a_{N-1}x_{N-1},\underset{N\text{ th}}{0},a_{N+1}x_{N+1},a_{N+1}x_{N+2},\cdots\},$$

因此不存在 $\{x_n\}_{n=1}^\infty\in l^1$, 使得成立

$$T(\{x_n\}_{n=1}^\infty) = \{0,\cdots,0,\underset{N\text{ th}}{1},0,0,\cdots\},$$

那么 T 不为满射, 进而 T 不为有界可逆线性算子.

二. 如果对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$, 成立 $a_n\ne 0$, 那么定义线性算子

$$\begin{aligned} T^{-1}: \quad & l^1 \longrightarrow l^1, \\ & \{x_n\}_{n=1}^\infty \longmapsto \{x_n/a_n\}_{n=1}^\infty. \end{aligned}$$

注意到

$$T\circ T^{-1} = T^{-1}\circ T = I,$$

因此 T 为可逆算子.

1. 如果 $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|>0$, 那么存在 $a>0$, 使得对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$, 成立 $|a_n|\ge a>0$. 由上题

$$\|T\| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|\le M, \qquad \|T^{-1}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} 1/|a_n| \le 1/a,$$

因此 T 为有界可逆线性算子.

2. 如果 $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|=0$, 那么存在 $\{n_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}^*$, 使得成立 $\lim\limits_{k\to\infty}|a_{n_k}|=0$. 注意到

$$\|T^{-1}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} 1/|a_n| \ge \sup_{k\in\mathbb{N}^*} 1/|a_{n_k}| = \infty,$$

因此 T 不为有界可逆线性算子.

综上所述,T 为有界可逆的当且仅当

$$\inf_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|>0.$$

第十一次作业

作业 11.1 (习题 3.7)

设 X 是赋范线性空间,$x, y \in X$. 如果对 X 上任何连续线性泛函 f, 都有 $f(x) = f(y)$, 则 $x = y$.

证明 如果 $x \neq y$, 那么由 Hahn-Banach 定理的推论, 存在 X 上的连续线性泛函 f, 使得成立

$$f(x-y) = \|x-y\| \neq 0.$$

但是

$$f(x-y) = f(x) - f(y) = 0.$$

矛盾! 因此 $x = y$.

第十二次作业

作业 12.1 (习题 3.17)

设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间 X 中的点列, 如果对任何的 $f \in X'$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|^p < \infty,$$

其中 $p \geq 1$, 则存在正数 μ, 对一切 $f \in X'$ 都有

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|^p \leq \mu \|f\|^p.$$

证明 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 定义线性算子

$$\begin{aligned} T_n : X^* &\longrightarrow l^p \\ f &\longmapsto \{f(x_1), \cdots, f(x_n), 0, 0, \cdots\}. \end{aligned}$$

由于

$$\|T_n(f)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \|f\|^p \|x_k\|^p\right)^{1/p} = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^p\right)^{1/p},$$

那么对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$，T_n 为有界线性算子. 由于对于任意连续线性泛函 $f : X \to \mathbb{C}$, 成立

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*} \|T_n(f)\|_p = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\sum_{k=1}^{n} |f(x_k)|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|^p\right)^{1/p} < \infty,$$

那么由一致有界原理, 存在 $\mu^{1/p} > 0$, 使得成立 $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \|T_n\| < \mu^{1/p}$, 因此对于任意连续线性泛函 $f : X \to \mathbb{C}$, 成立

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(x_n)|^p = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{k=1}^{n} |f(x_k)|^p = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \|T_n(f)\|_p^p \leq \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \|T_n\|^p \|f\|^p < \mu \|f\|^p.$$

第十三次作业

作业 13.1 (习题 3.13)

试利用一致有界原理证明 Hellinger-Toeplitz 定理: 设 A 是从 Hilbert 空间 H 到自身的处处定义的线性算子. 如果

$$(Ax,y)=(x,Ay), \text{当} x,y\in H,$$

则 A 是有界的.

证明 对于任意 $y\in H$, 构造线性泛函

$$\begin{aligned} f_y: H &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ x &\longmapsto (x,Ay). \end{aligned}$$

由 Scharz 不等式

$$\|f_y\|=\sup_{\|x\|=1}|f_y(x)|=\sup_{\|x\|=1}|(x,T(y))|\leq \sup_{\|x\|=1}\|x\|\|Ay\|=\|Ay\|,$$

因此 $f_y\in H^*$. 由 Riesz 表现定理, 成立 $\|f_y\|=\|Ay\|$. 由于对于任意 $x\in H$, 由 Scharz 不等式

$$\sup_{\|y\|=1}|f_y(x)|=\sup_{\|y\|=1}|(x,Ay)|=\sup_{\|y\|=1}|(Ax,y)|\leq \sup_{\|y\|=1}\|Ax\|\|y\|=\|Ax\|<\infty.$$

因此由一致有界原理, 成立 $\sup\limits_{\|y\|=1}\|f_y\|<\infty$, 因此

$$\|A\|=\sup_{\|y\|=1}\|Ay\|=\sup_{\|y\|=1}\|f_y\|<\infty,$$

进而 A 为有界线性算子.

作业 13.2 (习题 3.14)

设 A,B 都是 Hilbert 空间 H 上处处有定义的线性算子, 且

$$(Ax,y)=(x,By),\forall x,y\in H.$$

证明:A,B 都是有界的, 且 $B=A^*$.

证明 任取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset H$, 使得成立 $x_n\to x$ 且 $Ax_n\to y$. 由于 H 为 Hilbert 空间, 因此 $x\in H$. 由于对于任意 $z\in H$, 成立 $(Ax_n,z)=(x_n,Bz)$, 那么 $(y,z)=(x,Bz)$, 因此 $(y,z)=(Ax,z)$. 取 $z=Ax-y$, 那么 $\|Ax-y\|=0$, 因此 $Ax=y$, 进而 T 为闭算子. 由闭图形定理,A 为有界算子. 同理可得 B 为有界算子. 任取 $x,y\in H$, 那么

$$(Ax,y)=(x,By)=(B^*x,y)\implies A=B^*\iff B=A^*$$

第十四次作业

作业 14.1 (课堂作业)

一方面, 对于任意 $T \in (C[0,1])^*$, 存在 $g \in V[0,1]$, 使得成立

$$\begin{aligned} T : C[0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \int_0^1, f(x)\mathrm{d}g(x). \end{aligned}$$

另一方面, 对于任意 $g \in V[0,1]$, 泛函

$$\begin{aligned} T : C[0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \int_0^1, f(x)\mathrm{d}g(x). \end{aligned}$$

成立 $T \in (C[0,1])^*$.

两方面同时成立

$$\|T\| = V_0^1(g).$$

证明 设 $g \in V[0,1]$, 对于任意 $f \in C[0,1]$,Lebesgue-Stielthes 积分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}g(x)$ 存在. 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 取阶层函数

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\varphi_{\frac{k}{n}}(x) - \varphi_{\frac{k-1}{n}}(x)\right),$$

其中 $\varphi_0 = 0$, 且当 $t \in (0,1]$ 时, 成立

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le t, \\ 0, & t < x \le 1. \end{cases}$$

由于 f 在 $[0,1]$ 上一致连续, 那么 Φ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 f. 而

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi_n(x)\mathrm{d}g(x) &= \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \Phi_n(x)\mathrm{d}g(x) \\ &= \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \mathrm{d}g(x) \\ &= \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\left(g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

由于对于任意 $0 \le x \le 1$ 与 $n \in \mathbb{N}^*$, 成立 $|\Phi_n(x)| \le \|f\|$, 那么

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}g(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Phi_n(x)\mathrm{d}g(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\left(g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right),$$

从而

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}g(x)\right| &\le \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{k=1}^n \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\left|g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right| \\ &\le \|f\| \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \sum_{k=1}^n \left|g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right| \\ &\le \|f\| V_0^1(g). \end{aligned}$$

一方面, 对于任意 $g \in V[0,1]$, 容易知道

$$\begin{aligned} T : C[0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \int_0^1, f(x)\mathrm{d}g(x). \end{aligned}$$

成立 $T \in (C[0,1])^*$, 且

$$|T(f)| = \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}g(x)\right| \leq \|f\| V_0^1(g) \implies \|T\| \leq V_0^1(g).$$

另一方面, 对于任意 $T \in (C[0,1])^*$, 由于 $C[0,1]$ 为 $M[0,1]$ 的闭子空间, 其中

$$M[0,1] = \{\text{有界函数} f : [0,1] \to \mathbb{C}\}.$$

由 Hahn-Banach 定理,T 可延拓为 $M[0,1]$ 上的连续线性泛函 $\tilde{T}$, 且 $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. 对于任意 $f \in C[0,1]$, 由于 $\Phi_n, \varphi_t \in M[0,1]$, 且在 $M[0,1]$ 中 $\Phi_n \to f$, 那么

$$\tilde{T}(f) = \lim_{n\to\infty} \tilde{T}(\Phi_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\tilde{T}\left(\varphi_{\frac{k}{n}}\right) - \tilde{T}\left(\varphi_{\frac{k-1}{n}}\right)\right).$$

令

$$g(t) = \tilde{T}(\varphi_t), \qquad t \in [0,1].$$

对于 $[0,1]$ 的任意划分

$$\Delta : 0 = t_0 < \cdots < t_n = 1,$$

成立

$$\begin{aligned} V_\Delta(g) &= \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (g(t_i) - g(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^n \varepsilon_i (\tilde{T}(\varphi_{t_i}) - \tilde{T}(\varphi_{t_{i-1}})) \\ &= \tilde{T}\left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i (\varphi_{t_i} - \varphi_{t_{i-1}})\right), \end{aligned}$$

其中

$$\varepsilon_i = \frac{|g(t_i) - g(t_{i-1})|}{g(t_i) - g(t_{i-1})}, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

由于

$$\left\|\varepsilon_i(\varphi_{t_i} - \varphi_{t_{i-1}})\right\| = 1,$$

那么

$$V_\Delta(g) \leq \|\tilde{T}\| = \|T\|.$$

由 Δ 的任意性

$$V_0^1(g) \leq \|T\| \implies g \in V[0,1],$$

进而

$$\|T\| = V_0^1(g).$$

此时

$$T(f) = \tilde{T}(f) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\left(g\left(\frac{k}{n} - g\left(\frac{k-1}{n}\right) - \right)\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}g(x).$$

第十五次作业

作业 15.1 (课堂作业)

证明:$L^p[a,b]$ 空间为自反空间, 其中 $1<p<\infty$.

证明 $L^p[a,b]$ 空间的典型映射为

$$\begin{aligned}\tau: L^p[a,b] &\longrightarrow (L^p[a,b])^{**},\\ f &\longmapsto \mathscr{F}_f,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_f: (L^p[a,b])^* &\longrightarrow \mathbb{C},\\ F &\longmapsto F(f).\end{aligned}$$

任取 $\mathscr{F}\in (L^p[a,b])^{**}$, 考虑保范线性同构

$$\begin{aligned}\varphi: L^q[a,b] &\longrightarrow (L^p[a,b])^*,\\ g &\longmapsto T,\end{aligned}$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 且

$$\begin{aligned}T: L^p[a,b] &\longrightarrow \mathbb{C},\\ h &\longmapsto \int_a^b h(x)g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

构造映射

$$\Phi=\mathscr{F}\circ\varphi: L^q[a,b]\to\mathbb{C},$$

那么 $\Phi\in (L^p[a,b])^*$, 因此存在且存在唯一 $f\in L^q[a,b]$, 使得成立

$$\begin{aligned}\Phi: L^p[a,b] &\longrightarrow \mathbb{C},\\ g &\longmapsto \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

对于任意 $F\in (L^p[a,b])^*$, 令 $g=\varphi^{-1}(F)\in L^q[a,b]$, 由于

$$\begin{aligned}F: L^p[a,b] &\longrightarrow \mathbb{C},\\ h &\longmapsto \int_a^b h(x)g(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

那么

$$\mathscr{F}(F)=\mathscr{F}(\varphi(g))=(\mathscr{F}\circ\varphi)(g)=\Phi(g)=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=F(f),$$

因此 $\tau(p)=\mathscr{F}$ 由 $\mathscr{F}$ 的任意性,$\tau(L^p[a,b])=(L^p[a,b])^{**}$, 因此 $L^p[a,b]$ 空间为自反空间.

作业 15.2 (习题 3.18)

试证明: 无穷维赋范线性空间的对偶空间是无穷维的, 有限维赋范线性空间 X 的对偶空间也是有限维的, 且 $\dim X=\dim X^*$.

证明 对于 n 维赋范线性空间 X, 其基为 $\{e_k\}_{k=1}^n$, 由 Hahn-Banach 定理的推论, 存在 $\{f_k\}_{k=1}^n\subset X^*$, 使得成立

$$f_i(e_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

容易知道 $\{f_k\}_{k=1}^n$ 线性无关, 且对于任意

$$x=\sum_{k=1}^n x_k e_k \in X$$

成立

$$f_i(x)=\sum_{j=1}^n x_j f_i(e_j),$$

因此对于任意 $f\in X^*$, 成立

$$f(x)=\sum_{k=1}^n x_k f(e_k)=\sum_{k=1}^n f(e_k)f_k(x)=\left(\sum_{k=1}^n f(e_k)f_k\right)(x),$$

从而

$$f=\sum_{k=1}^n f(e_k)f_k,$$

进而 $\{f_k\}_{k=1}^n$ 为 X^* 的基, 于是 X^* 为 n 维赋范线性空间.

对于无穷维赋范线性空间 X, 如果 X^* 为 n 维赋范线性空间, 那么 X^{**} 为 n 维赋范线性空间. 由于典型映射 τ 为单的保范线性空间, 那么由同构定理

$$X/\ker\tau\cong\operatorname{im}\tau \iff X\cong\tau(X),$$

因此 $\tau(X)$ 为无穷维赋范线性空间. 但是 $\tau(X)\subset X^{**}$, 矛盾! 因此 X^* 为无穷维赋范线性空间.