拓扑空间

第一题

已知$X=\{a,b,c,d,e\}$，下列集族中，（$T=\{X,\varnothing,\{a\},\{a,b\}\}$）是$X$上的拓扑。

第二题

已知$X=\{1,2,3\}$上的拓扑$T=\{X,\varnothing,\{1\}\}$，那么点1的邻域个数是（4）。

$$\text{包含1的开集为}\{1\}\text{与}X,\text{因此1的邻域为}\{1\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2，3\} \tag{1}$$

第三题

已知$X=\{a,b,c\}$，则X上的含有4个元素的拓扑有（9）个。

第四题

设(X,T)为拓扑空间，则下列叙述正确的为（当$T'\subset T$时，$\bigcup\limits_{U\in T'}U\in T$）。

拓扑概念

第一题

在实数空间中，有理数集$\mathbb{Q}$的内部$\mathbb{Q}^\circ$是（$\varnothing$）。

第二题

已知X是一个离散拓扑空间，A是X的子集，则下列结论中正确的是（$A'=\varnothing$）。

第三题

已知X是一个平庸拓扑空间，A是X的子集，则

- 如果$|A|=0$，那么$A'=\varnothing$
- 如果$|A|=1$，那么$A'=X-A$
- 如果$|A|\geq 2$，那么$A'=X$

第四题

定义$\mathbb{R}$上的子集族$\tau=\{(-\infty,a):-\infty\leq a\leq\infty\}$，证明：$\tau$是$\mathbb{R}$上的一个拓扑。

证明：显然$\mathbb{R},\varnothing\in\tau$且$\tau$对于有限并运算封闭。

对于任意非空指标集$\Lambda\subset[-\infty,\infty]$，令$a=\sup\Lambda$。

如果$a=-\infty$，那么$\Lambda=\{-\infty\}$，于是

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(-\infty,\lambda)=\varnothing\in\tau \tag{2}$$

如果$-\infty<a\leq\infty$，那么或$a\in\Lambda$，或存在$\{a_n\}\subset\Lambda$，使得成立$a_n<a$且$a_n\to a$。

$1.a\in\Lambda$:

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(-\infty,\lambda)=(-\infty,a)\in\tau \tag{3}$$

2.存在$\{a_n\}\subset\Lambda$，使得成立$a_n<a$且$a_n\to a$。显然$(-\infty,a_n)\subset(-\infty,a)$，同时任取$x\in(-\infty,a)$，存在$n_0$，使得$x\in(-\infty,a_{n_0})$，进而

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(-\infty,\lambda)=(-\infty,a)\in\tau \tag{4}$$

结合1和2，τ对于任意并运算封闭，于是τ为$\mathbb{R}$上的一个拓扑。

第五题

对于拓扑空间$(\mathbb{R},\tau_c)$中的序列$\{x_n\}$，证明：$x_n\to x$，当且仅当存在$N\in\mathbb{N}^*$，使得当$n>N$时，成立$x_n=x$。

证明：对于充分性，如果存在$N\in\mathbb{N}^*$，使得当$n>N$时，成立$x_n=x$，那么任取x的邻域U，当$n>N$时，成立$x_n=x\in U$，于是$x_n\to x$。

对于必要性，如果$x_n\to x$，那么令可数集$A=\{x_n\}\setminus\{x\}$，于是$A^c\in\tau_c$为开集，且$x\in A^c=\{x_n\}^c\cup\{x\}$，于是$A^c$为$x$的邻域，那么存在$N>0$，使得对于任意$n>N$，成立$x_n\in A^c$，进而$x_n=x$。

综上所述，原命题得证！

乘积空间与拓扑基

第一题

证明：如果$A \subset X$为X的闭集，$B \subset Y$为Y的闭集，那么$A \times B$为$X \times Y$的闭集。

证明：由于$A \subset X$为X的闭集，$B \subset Y$为Y的闭集，那么存在X的开集$U \subset X$和Y的开集$V \subset Y$，使得成立$A = X \setminus U$且$B = Y \setminus V$，因此

$$A \times B = (X \setminus U) \times (Y \setminus V) = (X \times Y) \setminus (U \times V) \tag{5}$$

又$U \times V$为$X \times Y$的开集，那么$A \times B$为$X \times Y$的闭集。

第二题

设$\mathscr{B} = \{[a,b) : a < b\}$，证明：在拓扑空间$(\mathbb{R}, \overline{\mathscr{B}})$中，$[a,b)$既是开集，又是闭集。

证明：$[a,b)$显然是开集。注意到

$$\mathbb{R} \setminus [a,b) = \bigcup_{n=0}^{\infty} [a-n-1, a-n) \cup [b+n, b+n+1) \tag{6}$$

因此$\mathbb{R} \setminus [a,b)$为开集，于是$[a,b)$为闭集。

分离公理

第一题

对于拓扑空间X，记$X\times X$的对角子集$\Delta=\{(x,x):x\in X\}$，证明：Δ为$X\times X$的闭集$\iff X$是Hausdorff空间。

证明：

$$
\begin{aligned}
&\Delta\text{为}X\times X\text{的闭集} &(7)\\
\iff& X\times X\setminus\Delta\text{为}X\times X\text{的开集} &(8)\\
\iff& \forall (x,y)\in X\times X\setminus\Delta\text{为}X\times X\setminus\Delta\text{的内点} &(9)\\
\iff& \forall x\neq y\in X,(x,y)\text{为}X\times X\setminus\Delta\text{的内点} &(10)\\
\iff& \forall x\neq y\in X,\exists x\text{的开邻域}U\subset X\text{和}y\text{的开邻域}V\subset X,\mathrm{s.t.}U\times V\subset X\times X\setminus\Delta &(11)\\
\iff& \forall x\neq y\in X,\exists x\text{的开邻域}U\subset X\text{和}y\text{的开邻域}V\subset X,\mathrm{s.t.}U\cap V=\varnothing &(12)\\
\iff& X\text{为}\mathrm{Hausdorff}\text{空间} &(13)
\end{aligned}
$$

可数公理

第一题

定义$\mathscr{B} = \{[a,b) : a < b\}$，证明：拓扑空间$(\mathbb{R}, \overline{\mathscr{B}})$不为$C_2$空间。

证明：任取拓扑基$\mathscr{A}$，注意到对于任意$a \in \mathbb{R}$，$[a, a+1)$为开集，那么存在$A_a \in \mathscr{A}$，使得成立$a \in A_a \subset [a, a+1)$。此时$\inf A_a = a$，那么对于任意$a \neq b$，成立$A_a \neq A_b$，此时构成单射$\mathbb{R} \to \mathscr{A}$，而$\mathbb{R}$不可数，因此$\mathscr{A}$不可数。

第二题

定义$\mathbb{R}$上的拓扑$\tau = \{(-\infty, a) : -\infty \leq a \leq \infty\}$，证明：$(\mathbb{R}, \tau)$为$C_2$空间，并写出其一个可数拓扑基。

证明：定义

$$\mathscr{B} = \{(-\infty, r) : r \in \mathbb{Q}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\} \tag{14}$$

显然$\mathscr{B} \subset \tau$，且$\varnothing, \mathbb{R} \in \mathscr{B}$。任取$a \in \mathbb{R}$，注意到

$$(-\infty, a) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, a)} (-\infty, r) \tag{15}$$

事实上，由于$r \in (-\infty, a)$，那么$(-\infty, r) \subset (-\infty, a)$，因此

$$(-\infty, a) \supset \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, a)} (-\infty, r) \tag{16}$$

而任取$x \in (-\infty, a)$，存在$r \in \mathbb{Q}$，使得成立$x < r < a$，于是$x \in (-\infty, r)$，因此

$$(-\infty, a) \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, a)} (-\infty, r) \tag{17}$$

那么

$$(-\infty, a) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, a)} (-\infty, r) \tag{18}$$

进而$\mathscr{B}$为拓扑空间$(\mathbb{R}, \tau)$的一个可数拓扑基，$(\mathbb{R}, \tau)$为C_2空间。

Urysohn引理和Tietze扩张定理

第一题

证明：如果拓扑空间X满足T_4公理，$A \subset X$为闭集，那么连续映射$f : A \to E^n$可扩张到X上。

证明：定义$f = (f_1, \cdots, f_n)$，那么对于每一个$f_k : A \to E^1$，可扩张为$\tilde{f}_k : X \to E^1$，于是定义$\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_n)$，因此$\tilde{f} : X \to E^n$为连续函数，且$\tilde{f}|_A = f$。

列紧空间

第一题

证明：列紧空间中的连续函数有界，且可取到最值。

证明：假设$f:X\to E^1$为连续函数，其中X为列紧空间。记$\alpha=\inf f(x)$，那么存在$\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$，使得成立$f(x_n)\to\alpha$。而$X$为列紧集，于是存在$\{n_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}^*$，使得子序列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$收敛于$x\in X$，此时$f(x_{n_k})\to f(x)$。因为子列与原序列收敛为同一点，所以$\alpha=f(x)$。

假设$f:X\to E^1$为连续函数，其中X为列紧空间。任取$\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$，由于$X$是列紧空间，于是存在$\{n_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}^*$，使得子序列$\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$收敛于$x\in X$。又因为$f$是连续函数，所以$\{f(x_{n_k})\}_{k=1}^\infty$收敛于$f(x)\in f(X)\subset E^1$，因此$f(X)$是$E^1$的列紧子集，考虑到$E^1$为度量空间，因此$f(X)$为有界闭集，于是列紧空间$X$中的连续函数$f$有界，且可取到最值。

第二题

证明：紧致度量空间是可分空间。

证明：假设X是紧致度量空间，那么X为列紧度量空间，进而X完全有界，于是X存在有限$1/n$-网A_n，记

$$A=\bigcup_{n=1}^\infty A_n \tag{19}$$

那么A为可数集合。对于任意$x\in X$，存在$x_n\in A_n\subset A$，使得成立$d(x,x_n)<1/n$，那么$x_n\to x$，因此A为X的稠密集，进而A为X的可数稠密集，因此X为可分空间，进而X满足C_2公理。

假设X是紧致度量空间，注意到，对于任意$n\in\mathbb{N}^*$，成立$X=\bigcup\limits_{x\in X}B_{\frac{1}{n}}(x)$，因此存在$\{x_1^{(n)},\cdots,x_{m_n}^{(n)}\}\in X$，使得成立$X=\bigcup\limits_{k=1}^{m_n}B_{\frac{1}{n}}(x_k^{(n)})$，记可数集$A=\bigcup\limits_{n=1}^\infty\bigcup\limits_{k=1}^{m_n}\{x_k^{(n)}\}$。任取$x\in X$，以及$\varepsilon>0$，那么对于任意$n\in\mathbb{N}^*$，存在$1\le k_n\le m_n$，使得成立$x\in B_{\frac{1}{n}}(x_{k_n}^{(n)})$，因此$d(x,x_{k_n}^{(n)})<1/n$，取$n_0=[1/\varepsilon]+1$，可得$d(x,x_{k_{n_0}}^{(n_0)})<\varepsilon$，于是$x_{k_{n_0}}^{(n_0)}\in B_\varepsilon(x)$，进而$A$为$X$的可数稠密子集，那么紧致度量空间$X$是可分空间。

紧致性质

第一题

证明：Hausdorff空间的任意紧致子集的交紧致。

证明：取Hausdorff空间X的紧致子集族$\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset\mathscr{P}(X)$，那么$K_\lambda$为$X$的闭子集，因此$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}K_\lambda$为$X$的闭子集。取$\mathscr{C}$为$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}K_\lambda$在$X$中的开覆盖，那么$\left\{C\cup\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}K_\lambda\right)^c:C\in\mathscr{C}\right\}$为$K_{\lambda_0}$的开覆盖，进而存在$\{C_k\}_{k=1}^n\subset\mathscr{C}$，使得成立

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}K_\lambda\subset K_{\lambda_0}\subset\bigcup_{k=1}^n C_n\cup\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}K_\lambda\right)^c \tag{20}$$

因此$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}K_\lambda\subset\bigcup\limits_{k=1}^n C_n$，进而$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}K_\lambda$为$X$的紧致子集。

连通性

第一题

在实数集$\mathbb{R}$上规定拓扑$\tau_1 = \{(-\infty, a) : -\infty \le a \le \infty\}$，$\tau_2 = \overline{\{[a,b) : a < b\}}$。证明：$(\mathbb{R}, \tau_1)$连通，$(\mathbb{R}, \tau_2)$不连通。

证明：取τ_1中既开又闭的非空子集$E \in \tau_1$，于是存在$-\infty \le a, b \le \infty$，使得成立$E = (-\infty, a)$且$E^c = (-\infty, b)$，进而$(-\infty, a) = [b, \infty)$。由于$E$非空，那么$a \neq -\infty$且$b \neq \infty$，因此$a = \infty$，进而$E = \mathbb{R}$，于是$(\mathbb{R}, \tau_1)$连通。

考察开集$[0,1) \in \tau_2$，注意到

$$\mathbb{R} \setminus [0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, 1-n) \cup [n, n+1) \tag{21}$$

因此$[0,1)$为闭集，进而$(\mathbb{R}, \tau_2)$不连通。

道路连通

第一题

证明：S^n道路连通。

证明：任取$x_0, x_1, y \in S^n$，满足$y \neq x_0, x_1$，由于$S^n \setminus \{y\} \cong E^n$，那么$S^n \setminus \{y\}$道路连通，从而存在$S^n \setminus \{y\}$中的道路$\gamma : [0,1] \to S^n \setminus \{y\}$，使得$\gamma(0) = x_0$且$\gamma(1) = x_1$。$\gamma$当然也为$S^n$中的道路，由$x_0, x_1$的任意性，$S^n$道路连通。

第二题

设$A \subset E^2$，证明：如果A^c是可数集，那么A道路连通。

证明：任取$x, y \in A$，那么在E^2中存在不可数个圆周经过x, y，由于A^c为可数集，因此存在在A中的圆周经过x, y，那么x, y间存在道路，进而A道路连通。

拓扑性质与同胚

第一题

证明：如果$f:S^1\to E^1$连续，那么f既不单又不满。

证明：由于S^1为紧致连通集，那么$f(S^1)\subset E^1$为E^1的紧致连通子集，因此$f(S^1)=[a,b]$，其中$a\le b$，进而f不满。如果$a=b$，那么显然f不为单射。下面假设$a<b$。

（法一）若f为单射，由于S^1为紧致空间，$[a,b]$为Hausdorff空间，那么$f:S^1\to[a,b]$为单的商映射，因此$S^1\cong[a,b]$。而S^1去掉一个点与E^2同胚，为连通空间，但是$[a,b]$去掉一个点不连通，由此产生矛盾！

（法二）若f为单射，取$x_0\in S^1$，使得$y_0=f(x_0)\in(a,b)$，那么$f(S^1\setminus\{x_0\})=[a,y_0)\cup(y_0,b]$。考虑到$S^1\setminus\{x_0\}\cong E^1$，因此存在同胚映射$\varphi:E^1\to S^1\setminus\{x_0\}$，因此$f\circ\varphi:E^1\to[a,y_0)\cup(y_0,b]$为连续满映射。而$E^1$连通，但是$[a,y_0)\cup(y_0,b]$不连通，因此产生矛盾！

第二题

证明：如果$f:S^2\to E^1$连续，那么存在$t\in f(S^2)$，使得$f^{-1}(t)$为不可数集，并且至多存在两点$s\in f(S^2)$，使得$f^{-1}(s)$为可数集。

证明：由于S^2为紧致连通集，那么$f(S^2)\subset E^1$为紧致连通集，而E^1中的紧致连通集为闭区间，那么设$f(S^1)=[a,b]$，其中$a\le b$。

如果$a=b$，那么$f^{-1}(a)=S^2$为不可数集。

如果$a<b$，那么任取$t\in(a,b)$，由于$f(S^2\setminus f^{-1}(t))=[a,t)\cup(t,b]$不连通，因此$S^2\setminus f^{-1}(t)$不连通。如果$f^{-1}(t)$为可数集，那么任取$x,y\in S^2\setminus f^{-1}(t)$，由于$x,y$间在$S^2$中存在不可数个道路，那么$x,y$间在$S^2\setminus f^{-1}(t)$中存在道路，于是$S^2\setminus f^{-1}(t)$道路连通，进而$S^2\setminus f^{-1}(t)$连通，矛盾！因此$f^{-1}(t)$为不可数集，进而至多$a,b$使得$f^{-1}(a)$和$f^{-1}(b)$为可数集。

商空间

第一题

设A为环面T^2上一经圆与一纬圆的并集，证明：$T^2/A\cong S^2$。

证明：将环面T^2沿此经圆与纬圆剪开，得到矩形R^2，注意到

$$T^2/A\cong R^2/\partial R^2\cong D^2/\partial D^2\cong S^2 \tag{22}$$

闭曲面

第一题

写出下列多边形表示的闭曲面类型。

$$abcda^{-1}bc^{-1}d : 3P^2 \tag{23}$$
$$abacb^{-1}dcd : 4P^2 \tag{24}$$
$$abcb^{-1}dc^{-1}a^{-1}d^{-1} : 2T^2 \tag{25}$$
$$abca^{-1}cdeb^{-1}fedf : 6P^2 \tag{26}$$

第二题

如果在Klein瓶上挖掉一个圆盘的内部，再把其边界的对径点粘合，得到什么样的曲面?

解：Klein瓶为在一个球面上挖掉2个圆，然后把其边界的对径点粘合得到的闭曲面。现在再挖掉1个圆，然后把其边界的对径点粘合得到的闭曲面，因此可得到$3P^2$。

基本群

第一题

计算E^2中去掉三个点后的空间的基本群。

解：E^2中去掉三个点后的空间同构于三个圆束的一点并，于是E^2中去掉三个点后的空间的基本群为$\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$。

第二题

计算S^2中去掉三个点后的空间的基本群。

解：S^2中去掉三个点后的空间同胚于E^2中去掉两个点，进而同构于两个圆束的一点并，于是S^2中去掉三个点后的空间的基本群为$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$。

第三题

计算T^2中去掉三个点后的空间的基本群。

解：T^2中去掉三个点后的空间同构于四个圆束的一点并，于是T^2中去掉三个点后的空间的基本群为$\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$。