线性代数导论 Gilbert Strange

2022年2月21日　　17:45

目录

2022年2月21日 17:47

矩阵字母表

2022年3月9日 20:09

缩写	英文名称	中文名称
A	Any Matrix	任何矩阵
B	Basis Matrix	基矩阵
C	Cofactor Matrix	余子式矩阵
D	Diagonal Matrix	对角矩阵
E	Elimination Matrix	消元矩阵
F	Fourier Matrix	Fourier矩阵
H	Hadamard Matrix	Hadamard矩阵
I	Identity Matrix	单位矩阵
J	Jordan Matrix	Jordan矩阵
K	Stiffness Matrix	刚体矩阵
L	Lower Triangular Matrix	下三角矩阵
M	Markov Matrix	Markov矩阵
N	Normal Matrix	正规矩阵
N	Nullspace Matrix	零空间矩阵
P	Permutation Matrix	置换矩阵
P	Projection Matrix	投影矩阵
Q	Orthogonal Matrix	正交矩阵
R	Reduced Echelon Matrix	最简行阶梯矩阵
S	Symmetric Matrix	对称矩阵
T	Linear Transformation	线性变换
U	Upper Triangular Matrix	上三角矩阵
U	Left Singular Vectors	左奇异向量

V	Right Singular Vectors	右奇异向量
X	Eigenvector Matrix	特征向量矩阵
Λ	Eigenvalue Matrix	特征值矩阵
Σ	Singular Value Matrix	奇异值矩阵

矩阵分解

2022年3月15日 22:05

1. $A=LU$
   a) 特征：A为任意矩阵，L为对角线元素为1的下三角矩阵，U为主元位于对角线上的上三角矩阵；
   b) 要求：在使得A到U的Gauss消元过程中，没有行交换。
2. $A=LDU$
   a) 特征：A为任意矩阵，L为对角线元素为1的下三角矩阵，U为对角线元素为1的上三角矩阵，D为主元位于对角线上的对角矩阵；
   b) 要求：无行交换。如果A是对角矩阵，那么$A=LDL^T$；
3. $PA=LU$
   a) 特征：A为任意矩阵，L为对角线元素为1的下三角矩阵，U为主元位于对角线上的上三角矩阵，P为置换矩阵；
   b) 要求：A可逆，于是P,L,U可逆。以P来避免主元位置为0；
4. $EA=R$
   a) 特征：E为$m\times m$可逆矩阵，A为任意$m\times n$矩阵，R为最简行阶梯矩阵；
   b) 要求：无！最简行阶梯矩阵R有r个主行与主列，包含一个单位矩阵。E的最后$m-r$行是A的左零空间的基；其与A作积得到R的$m-r$个零行。E^{-1}的前r列是A的列空间的基。
5. $S=C^TC$
   a) 特征：S为正定矩阵，C为上三角矩阵；
   b) 要求：S为正定矩阵，于是A的LDU分解中D的主元为正，令$C^T=L\sqrt[2]{D}$即可。此称为Cholesky分解。
6. $A=QR$
   a) 特征：Q为列标准正交矩阵，R为上三角矩阵；
   b) 要求：A的列线性无关。Q由Gram-Schmidt过程或Householder过程给出。若A为方阵，那么$Q^{-1}=Q^T$。
7. $A=X\Lambda X^{-1}$
   a) 特征：A为$n\times n$矩阵，X为特征向量矩阵，Λ为特征值矩阵；
   b) 要求：A有n个线性无关的特征向量。
8. $S=Q\Lambda Q^T$
   a) 特征：Q为正交矩阵，Λ为实特征值矩阵；
   b) 要求：S为实对称矩阵。此称为谱定理。
9. $A=BJB^{-1}$
   a) 特征：A为任意矩阵，B为广义特征向量矩阵，J为Jordan矩阵；
   b) 要求：无！Jordan矩阵J对于每一个线性无关的特征向量都有一个Jordan块，每一个Jordan块对应唯一一个特征值。
10. $A=U\Sigma V^T$
    a) 特征：U为$m\times m$正交矩阵，V为$n\times n$正交矩阵，Σ为$\sigma_1,\dots,\sigma_r$位于对角线上的$m\times n$矩阵；
    b) 要求：无！U为AA^T的正交特征向量矩阵，V为A^TA的正交特征向量矩阵；$\sigma_1^2,\dots,\sigma_r^2$为$A^TA$的特征值。此称为奇异值分解(SVD)。
11. $A^+=V\Sigma^+U^T$
    a) 特征：V为$n\times n$正交矩阵，U为$m\times m$正交矩阵，Σ^+为$\frac{1}{\sigma_1},\dots,\frac{1}{\sigma_r}$位于对角线上的$n\times m$矩阵；
    b) 要求：无！V为A^TA的正交特征向量矩阵，U为AA^T的正交特征向量矩阵；$\sigma_1^2,\dots,\sigma_r^2$为$A^TA$的特征值。
12. $A=QS$
    a) 特征：Q为正交矩阵，S为正定矩阵；
    b) 要求：A可逆。$S^2=A^TA$（如果A为奇异矩阵，则S为半正定矩阵）。$Q=UV^T$。此称为极分解。
13. $A=KQ$
    a) 特征：K为正定矩阵，Q为正交矩阵；

b) 要求：A可逆。$K^2 = AA^T$（如果A为奇异矩阵，则K为半正定矩阵）。$Q = UV^T$。此称为反向极分解。

14. $A = U\Lambda U^H$
    a) 特征：U为酉矩阵，Λ为特征值矩阵；
    b) 要求：A为正规矩阵，即$A^H A = AA^H$。U的列是A的标准正交特征值向量（可能为复数向量）。A的特征值为复数，除非S为Hermitian矩阵，即$S = S^H$；
15. $A = QTQ^H$
    a) 特征：Q为酉矩阵，T为特征值在其对角线上的三角矩阵；
    b) 要求：无！Q使得$Q^H AQ$三角化。此称为Schur三角化。

思维导图

2022年3月18日　　21:28

- **线性代数导论**
  - **线性方程组**
    - Gauss消元法
    - $A = LDU$
  - **向量空间**
    - 四个基本子空间
      - 列空间
      - 零空间
      - 正交互补
      - 行空间
      - 左零空间
      - 正交互补
    - $Ax = b$ 可解性
      - $r = n$
        - $r = m$ —— 唯一解
        - $r < m$ —— 无解或唯一解
      - $r < n$
        - $r = m$ —— 无穷多个解
        - $r < m$ —— 无解或无穷多个解
  - **正交性**
    - 投影矩阵
      - $P = A(A^TA)^{-1}A^T$
      - 应用：最小二乘法
    - 正交矩阵
      - $Q^TQ = I$
      - Gram-Schmidt过程
  - **行列式**
    - 行列式性质
    - 以代数余子式展开
    - 矩阵的逆
      - 正交逆 —— $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
      - 左逆 —— $A_l = (A^TA)^{-1}A^T$
      - 右逆 —— $A_r = A^T(A^TA)^{-1}$
      - 伪逆
        - $A^+AA^+ = A^+$
        - $AA^+A = A$
    - Cramer法则
  - **特征值与特征向量**
    - $Ax = \lambda x$
    - 对角化
      - $A = X\Lambda X^{-1}$
      - 要求：矩阵有n个线性无关的特征向量
      - 应用：e的幂 —— $e^A = Xe^{\Lambda}X^{-1}$
    - 正规矩阵
      - $N^TN = NN^T$
      - 性质
        - $|Nx| = |N^Tx|$
        - 相应于不同特征值的特征向量是正交的，且存在n个标准正交的特征向量，但特征值可能为复数 —— $N = Q\Lambda Q^T$
      - 对称矩阵
        - $S^T = S$
        - 特征值为实数
        - 半正定矩阵
          - 特征值为非负实数
          - 正定矩阵 —— 特征值为正实数
      - 反对称矩阵
        - $S^T = -S$
        - 特征值为纯虚数
    - 相似矩阵
      - $B = M^{-1}AM$ —— 特征值相等
      - 每一个矩阵都与一个Jordan矩阵相似
    - 奇异值分解
      - $A = U\Sigma V^T$
      - 极分解 —— $A = QS$
      - 反向极分解 —— $A = KQ$
  - **线性变换**
    - 线性映射等价于矩阵
    - 基变换 —— $B = M^{-1}AM$

第一章：向量与线性方程

2022年3月15日　　19:52

§1 方程组的几何解释

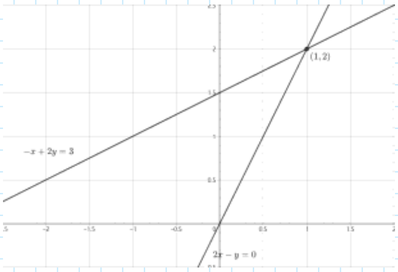
2022年2月21日 17:47

1. 二维空间

   a. 方程：$\begin{cases} 2x-y=0 \\ -x+2y=3 \end{cases}$

   b. 矩阵表示：$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$，即$A\boldsymbol{x}=b$；

   c. 关注行向量，作图，即为平面上两条直线的交点为解：

   d. 

   e. 关注列向量，$x\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$，即向量$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$的线性组合。

2. n维空间

   a. 方程：$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$

   b. 矩阵表示：$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，即$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$；

   c. 关注行向量，即n维空间中n个$n-1$维几何体的交点为解；

   d. 关注列向量，$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，即$n$个向量$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$的线性组合。

§2 矩阵消元

2022年2月21日　17:47

1. 三维空间中线性方程的高斯消元法（Gaussian Elimination）
   a. Gilbert Strange：Gauss thought of it before we did, but only because he was born earlier.It's a natural idea and died earlier, too.
   b. 方程：$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3x+8y+z=12 \\ 0x+4y+z=2 \end{cases}$
   c. 系数矩阵：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$；增广矩阵：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$。
   d. 消元过程：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{21}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{32}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$。
   e. 进而增广矩阵变为$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}$，此时方程成为$\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 2x-2y=6 \\ 5z=-10 \end{cases}$，从上至下，以此得解。
   f. 一般记$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$为$A$，$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$为$U$。
2. 矩阵
   a. 矩阵的变换可以用初等矩阵表示
      i. 初等行变换（左乘矩阵）
         1) 第i行乘以倍数λ，矩阵为单位矩阵做相同操作；
         2) 第i行乘以倍数λ加至第j行，矩阵为单位矩阵做相同操作；
         3) 第i行与第j行互换位置，矩阵为单位矩阵做相同操作。
         4) ※初等行变换其实可分为某一行乘以某非零倍数以及某一行加至另一行两种。
      ii. 初等列变换（由乘矩阵）
         1) 第i列乘以倍数λ，矩阵为单位矩阵做相同操作；
         2) 第i列乘以倍数λ加至第j列，矩阵为单位矩阵做相同操作；
         3) 第i列与第j列互换位置，矩阵为单位矩阵做相同操作。
         4) ※初等列变换其实可分为某一列乘以某非零倍数以及某一列加至另一列两种。

§3 矩阵乘法和逆

2022年2月22日 21:51

1. 矩阵乘法：$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{ms}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{s1} & \cdots & b_{sn}\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{m1} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix}$满足$AB=C$
   a. 行×列：$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$；
   b. 列×行：$\begin{pmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{m1} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{ms}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{s1} & \cdots & b_{sn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}(b_{11}\quad \cdots \quad b_{1n})+$
   $\cdots+\begin{pmatrix}a_{1s}\\ \vdots\\ a_{ms}\end{pmatrix}(b_{s1}\quad \cdots \quad b_{sn})=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11} & \cdots & a_{11}b_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}b_{11} & \cdots & a_{m1}b_{1n}\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}a_{1s}b_{s1} & \cdots & a_{1s}b_{sn}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{ms}b_{s1} & \cdots & a_{ms}b_{sn}\end{pmatrix}$
   c. 列的线性组合：$\begin{pmatrix}c_{1k}\\ \vdots\\ c_{mk}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{ms}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{1k}\\ \vdots\\ b_{sk}\end{pmatrix}=b_{1k}\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}+\cdots+b_{sk}\begin{pmatrix}a_{1s}\\ \vdots\\ a_{ms}\end{pmatrix}$；
   d. 行的线性组合：$(c_{k1}\quad \cdots \quad c_{kn})=(a_{k1}\quad \cdots \quad a_{ks})\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{s1} & \cdots & b_{sn}\end{pmatrix}=a_{k1}(b_{11}\quad \cdots \quad b_{s1})+$
   $\cdots+a_{ks}(b_{s1}\quad \cdots \quad b_{sn})$。
2. 矩阵的逆
   a. 对于方阵A,B，若满足$AB=BA=I$，则称B为A的逆，记作$B=A^{-1}$。
   b. A可逆⇔存在非零列向量x，使得$Ax=0$。（反证法）
   c. A不可逆⇔对于任意非零列向量x，均有$Ax\neq 0$。（反证法）
   d. 高斯-若尔当消元法（Gauss-Jordan Elimination）：对于任意方阵M，若对其进行初等行（列）变换，即左（右）乘矩阵A（B），使得变换为单位矩阵，则对单位矩阵进行同样的初等行（列）变换，即左（右）乘矩阵A（B），则可得到M的逆矩阵，换言之，A（B）就是M的逆矩阵。

§4 A的LU分解与转置

2022年2月24日 7:28

1. 矩阵乘积的逆与转置
   a. 转置
      i. 定义：$A_{ij}^T = A_{ji}$
      ii. 性质
         1) $\left(A^T\right)^T = A$；
         2) $(AB)^T = B^T A^T$；
      iii. 对称矩阵：$A = A^T$
      iv. 逆对称矩阵：$A + A^T = 0$
   b. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；
   c. $(AB)^T = B^T A^T$。
   d. Gilbert Strange: It's just like--you take off your shoes, you take off your socks, then the good way to invert that process is socks back on first, then shoes.
2. A的LU分解
   a. 记号
      i. E：消元矩阵（Elimination matrix）；
      ii. P：转置矩阵（permutation matrix)；
      iii. U：上三角矩阵（upper triangular matrix）；
      iv. L：下三角矩阵（lower triangular matrix）；
      v. D：对角矩阵（diagonal matrix）。
   b. 二阶
      i. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 8 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$；
      ii. $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 8 & 7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$。
   c. 三阶
      i. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -7 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 10\end{pmatrix}$
         $= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
      ii. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 7 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
         $= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ 7 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$
   d. A的LU分解条件
      i. A是方阵；
      ii. 消元过程中主元不为0。
   e. 消元分解速度
      i. n阶方阵和减法（算一次）的次数为$\frac{n^3-n}{3}$；
      ii. n阶方阵的增广矩阵的乘法和减法（算一次）的次数为$\frac{2n^3+3n^2-5n}{6}$。

3. 置换矩阵

   a. n阶方阵的置换矩阵共$n!$种；

   b. $\mathrm{PP}^T = I$；

   c. n阶方阵的转置矩阵对于逆及转置运算构成一个群。

第二章：向量空间与子空间

2022年3月15日　　19:54

§1 向量空间

2022年2月25日 11:58

1. 向量空间就是带有加法和标量乘法的集合V，满足如下性质：
   a. 交换性(commutativity)：$\forall x, y \in V, x+y=y+x$；
   b. 结合性(associativity)：$\forall x, y, z \in V, \forall a, b \in F, (x+y)+z=x+(y+z), (ab)x=a(bx)$；
   c. 分配性(distributive property)：$\forall x, y \in V, \forall a, b \in F, a(x+y)=ax+ay, (a+b)x=ax+bx$；
   d. 加法单位元(additive identity)：$\exists 0 \in V, s.t. \forall x \in V, x+0=0$；
   e. 加法逆元(additive inverse)：$\forall x \in F, \exists y \in F, s.t. x+y=0$；
   f. 乘法单位元（multiplicative identity):$\exists 1 \in V, s.t. \forall x \in V, 1x=x$。
2. 例：R, R^2, R^3, R^n
3. 子空间
   a. 定义：若$U \subset V$，且U为向量空间，则称U为V的子空间。
   b. 子空间的充分必要条件
      i. 加法单位元：$0 \in U$；
      ii. 加法封闭性：$\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{U} \Rightarrow \mathrm{x}+\mathrm{y} \in \mathrm{U}$；
      iii. 标量乘法封闭性：$k \in F, x \in U \Rightarrow kx \in U$。
   c. 子空间的并不一定是子空间，子空间的交还是子空间。
   d. 例：R^3的所有子空间为
      i. 0；
      ii. 过原点的直线；
      iii. 过原点的平面；
      iv. R^3。

§2 列空间与零空间

2022年2月25日　　13:26

1. 列空间（值域）：对于一个矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，其列空间是指$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$张成的向量空间。
2. 零空间
   a. 对于方程$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$，其有解的充分必要条件是$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$在矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$的列空间里。
   b. 满足方程$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$的$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$张成的空间称为矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$的零空间。零空间是向量空间。

§3 求解$Ax=0$：主变元与特解

2022年2月25日 15:19

1. 例

   a. $\begin{pmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$；

   b. $\begin{pmatrix}1&2&2&2\\2&4&6&8\\3&6&8&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&0&2&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0&-2\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$；

   c. 记号

      i. 上阶梯矩阵（upper ladder matrix）：$U=\begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&0&2&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}$；

      ii. 简化行阶梯矩阵（reduced row echelon form）：$R=\begin{pmatrix}1&2&0&-2\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$。

   d. 我们称$\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&0&-2\\0&0&\boxed{1}&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$的方框中的数字称为矩阵的主元，注意到该矩阵的主元为2，则我们称该矩阵的秩（rank）为2；进而自由变元为$4-2=2$个。本题中我们令x_1,x_3为主元，x_2,x_4为自由变元。

   e. 回代：分别代入$\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$得$\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$；代入$\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$得$\begin{pmatrix}x_1\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$。于是我们称$\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}2\\0\\-2\\1\end{pmatrix}$称为方程的特解，原方程的解空间为$\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix}2\\0\\-2\\1\end{pmatrix}$张成的线性空间，即$\begin{pmatrix}-2&2\\1&0\\0&-2\\0&1\end{pmatrix}$的列空间。

   f. 调整主元的位置称为$\begin{pmatrix}\boxed{1}&0&2&-2\\0&\boxed{1}&0&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，于是单位矩阵$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，自由变元矩阵为$F=\begin{pmatrix}2&-2\\0&2\end{pmatrix}$，进而$R=\begin{pmatrix}I_2&F\\0&0\end{pmatrix}$，从而解空间为$\begin{pmatrix}-2&2\\0&-2\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$，即$\begin{pmatrix}-F\\I_2\end{pmatrix}$的列空间。

2. 线性方程组的解：$Ax=0$进行初等行变换化至$Rx=0$。若A的秩为r，x为n元一维列向量，则$R=\begin{pmatrix}I_r&F\\0&0\end{pmatrix}$，主变元数为$r$，自由变元数为$n-r$。解空间为$\begin{pmatrix}-F\\I_{n-r}\end{pmatrix}$的列空间。

§4 求解$Ax=b$：可解性和解的结构

2022年2月26日 19:08

1. $r=m=n$（行列满秩）
   a. r个主变元，$n-r=0$个自由变元；
   b. $R=I_r$：$I_r x_r=b_r$；
   c. 可解性：可解；
   d. 解的结构：解唯一，$x_r=b_r$。
2. $r=n<m$（列满秩）
   a. r个主变元，$n-r=0$个自由变元；
   b. $R=\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$：$\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} x_r=\begin{pmatrix} b_r \\ b_0 \end{pmatrix}$；
   c. 可解性：若$b_0=0$则有解，若$b_0\neq 0$则无解；
   d. 解的结构：若$b_0=0$则有解且解唯一$x=b_r$，若$b_0\neq 0$则无解。
3. $r=m<n$（行满秩）
   a. r个主变元，$n-r$个自由变元；
   b. $R=(I_r \quad F)$：$(I_r \quad F)\begin{pmatrix} x_r \\ x_f \end{pmatrix}=b_r$；
   c. 可解性：有解；
   d. 解的结构：
      i. 令$x_f=0$，则$x_r=b_r$，于是一个解为$x_p=\begin{pmatrix} b_r \\ 0 \end{pmatrix}$，此称为方程的特解（particular solution）；
      ii. 方程的零空间为$\begin{pmatrix} -F \\ I_{n-r} \end{pmatrix}$的列空间，记$\begin{pmatrix} -F \\ I_{n-r} \end{pmatrix}=(\eta_1 \quad \cdots \quad \eta_{n-r})$。称$\eta_1,\dots,\eta_{n-r}$为齐次方程的特殊解（special solution），$\eta_1,\dots,\eta_{n-r}$构成基础解系，$\eta_1,\dots,\eta_{n-r}$每一个线性组合x_s都是齐次方程的解；
      iii. 方程解的结构为$x=x_p+x_s$，有无穷个。
4. $r<m$，$r<n$
   a. r个主变元，$n-r$个自由变元；
   b. $R=\begin{pmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$：$\begin{pmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_r \\ x_f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_r \\ b_0 \end{pmatrix}$；
   c. 可解性：若$b_0=0$则有解，若$b_0\neq 0$则无解；
   d. 解的结构
      i. 若$b_0=0$
         1) 令$x_f=0$，则$x_r=b_r$，于是一个解为$x_p=\begin{pmatrix} b_r \\ 0 \end{pmatrix}$，此称为方程的特解（particular solution）；
         2) 方程的零空间为$\begin{pmatrix} -F \\ I_{n-r} \end{pmatrix}$的列空间，记$\begin{pmatrix} -F \\ I_{n-r} \end{pmatrix}=(\eta_1 \quad \cdots \quad \eta_{n-r})$的列空间。称$\eta_1,\dots,\eta_{n-r}$为齐次方程的特殊解（special solution），$\eta_1,\dots,\eta_{n-r}$构成基础解系，即$\eta_1,\dots,\eta_{n-r}$每一个线性组合x_s都是齐次方程的解；
         3) 方程解的结构为$x=x_p+x_s$。
      ii. 若$b_0=0$则有无穷个解且解的结构为$x=x_p+x_s$，若$b_0\neq 0$则无解。
5. 可解性及解的结构与秩的关系
   a. 非齐次线性方程组的解的数目与秩的关系

	$r=m$	$r<m$
$r=n$	1	0或1
$r<n$	∞	0或∞

   b. 齐次线性方程组的解的数目与秩的关系

	$r=m$	$r<m$

$r = n$	零解	零解
$r < n$	无穷	无穷

c. 矩阵的秩决定了方程组解的数目。

§5 线性相关，张成，基，维数，秩

2022年2月26日 22:17

1. 线性相关与线性无关：向量空间中的一组向量$v_1, \dots, v_n$线性无关，如果使得$c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0$的$c_1, \dots, c_n \in R$只有$c_1 = \cdots = c_n = 0$；否则称之为线性相关。
2. 张成：向量$v_1, v_2, \dots, v_n$张成的空间定义为$span(v_1, \dots, v_n) = \{c_1v_1 + \cdots + c_nv_n: c_1, \dots, c_n \in R\}$。
3. 基：向量$v_1, v_2, \dots, v_n$称为向量空间V的基，如果满足
   a. 向量$v_1, v_2, \dots, v_n$线性无关；
   b. 向量$v_1, v_2, \dots, \mathrm{v_n}$张成向量空间$V$。
4. 维数：向量空间V的基的个数称为V的维数，记作$dim\,V$。特别的，零向量空间的维数为0；
5. 秩：矩阵的主元个数。
6. ※关系
   a. 以下叙述等价
      i. 矩阵的列向量线性无关；
      ii. 矩阵的秩等于矩阵的列数；
      iii. 矩阵的列空间维数为列数；
      iv. 矩阵的主变元数等于矩阵的列数；
      v. 矩阵无自由变元；
      vi. 矩阵的零空间维数为0；
      vii. 矩阵的零空间只有0；
      viii. 矩阵可逆（如果为方阵）；
      ix. 矩阵的行列式非零（如果为方阵）。
   b. 矩阵的主变元数等于列空间（值域）的维数；矩阵的自由变元数等于零空间的维数；
   c. 矩阵的列数=主变元数+自由变元数=列空间维数+零空间维数。

§6四个基本子空间

2022年2月27日 19:02

1. 矩阵的列空间

   a. 定义：矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$的各列向量$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$张成的向量空间称为矩阵$A$的列空间，记为$C(A)$；

   b. 维数：$dim\,C(A)=r$；

   c. 基：矩阵A的主变元所在的列向量为$C(A)$的一组基。

2. 矩阵的零空间

   a. 定义：满足方程$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$的$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$的集合称为矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$的零空间，记为$N(A)$；

   b. 维数：$dim\,N(A)=n-r$；

   c. 基：矩阵A经过行初等变换之后得到简化行阶梯矩阵$R=\begin{pmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，则$N(A)$的一组基为$\begin{pmatrix} -F \\ I_{n-r} \end{pmatrix}$的列向量。

3. 矩阵的行空间

   a. 定义：矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$的各行向量$(a_{11} \quad \cdots \quad a_{1n}),\ldots(a_{m1} \quad \cdots \quad a_{mn})$张成的向量空间称为矩阵$A$的列空间，记为$N(A)$；

   b. $N(A)=C(A^T)$；

   c. 维数：$dim\,N(A)=r$；

   d. 基：由于矩阵A的行初等变换并不改变矩阵的行空间，于是$\mathrm{N(A)=N(R)}$，进而$\mathrm{N(R)}$的基，即矩阵$(\mathrm{I_r} \quad \mathrm{F})$的各行向量也是$\mathrm{N(A)}$的基。

4. 矩阵的左零空间

   a. 定义：满足方程$(x_1 \quad \cdots \quad x_m)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(0 \quad \cdots \quad 0)$的$(x_1 \quad \cdots \quad x_m)$的集合称为矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$的左零空间，记为$N(A^T)$；

   b. 维数：$dim\,N(A^T)=m-r$；

   c. 基：设$EA=R$，且$E=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$，$R=\begin{pmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，满足$\begin{cases} \alpha A=(I_r \quad F) \\ \beta A=0 \end{cases}$，于是$\beta$的各行向量变为$N(A^T)$的基。这里的消元矩阵$E$可用高斯-若尔当消元法思想求出。

§7 矩阵空间，秩1矩阵和小世界图

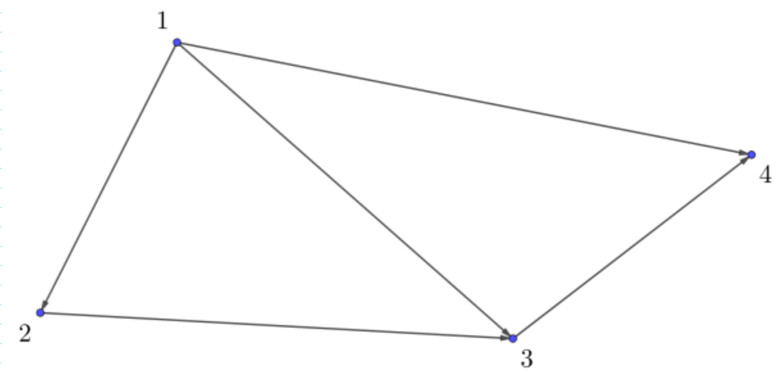
2022年2月28日 21:55

1. 矩阵空间
   a. 定义：将矩阵作为向量，构成向量空间。
   b. 向量空间的和
      i. 定义：对于$U,W\in V$，$U+W=\{u+w:u\in U,w\in W\}$;
      ii. 性质：$dim\,U+dim\,V=dim(U\cap V)+dim(U+V)$。
2. 秩1矩阵
   a. 定义：$r=1$的矩阵称为秩1矩阵；
   b. 对于任意m × n的秩1矩阵M，存在$m\times 1$矩阵A和$1\times n$矩阵B，使得$M=AB$；
   c. $r(A+B)\le r(A)+r(B)$。
3. 小世界图

§8 线性代数与图论

2022年3月1日 13:48

1. 图论

   a. 

   b. 结点：一些给定的点（点1234）；

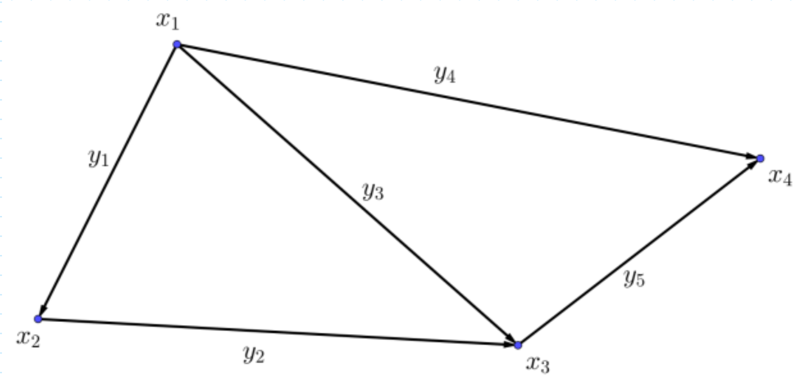
   c. 边：连接两结点的线段（线段1223133414）；

   d. 图：结点与边构成图；

   e. 回路：由结点和边构成的通路（三角形1231341234）；

   f. 树：没有回路的图（折线1234）。

2. 线性代数与图论

   a. 

   b. 结点x类比为电势，边y类比为电势差(正比于电流），图类比为电路；

   c. $A=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$；

   d. $m=$边数，$n=$结点数；

   e. 矩阵的行向量的物理意义为两个结点之间的关系（电势，电流）；行向量的线性相关性的物理意义为构成回路，线性无关性的物理意义为构成树；

   f. 矩阵的列向量的物理意义为某个结点与其余结点的关系（电荷的流入与流出）；

   g. 矩阵A的零空间

      i. $\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\-1&0&1&0\\-1&0&0&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，即$\begin{pmatrix}-x_1+x_2\\-x_2+x_3\\-x_1+x_3\\-x_1+x_4\\-x_3+x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$；

      ii. 物理意义为每两点的电势差为0，意味着如果每点的电势都相等，则每两点的电势差为0，电路不产生电流，状态达到平衡，于是$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$张成了矩阵$A$的零空间；

      iii. $dim\,N(A)=1$，$r=n-dim\,N(A)=3$。

h. 矩阵A^T的零空间

i. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，即$\begin{pmatrix} -y_1 - y_3 - y_4 \\ y_1 - y_2 \\ y_2 + y_3 - y_5 \\ y_4 + y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

ii. 物理意义为对于每一点的电荷和为0，故取回路即可，即$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$张成矩阵$A^T$的零空间;

iii. $dim\, N(A^T) = m - r = 2$。

i. Euler公式

i. $dim\, N(A^T) =$回路数，$m =$边数，$n =$结点数，$dim\, N(A) = 1$;

ii. 结点数−边数+回路数= 1，即$V - E + F = 1$。

3. 应用数学基本公式

a. $\begin{cases} e = Ax \\ y = Ce \\ A^T y = f \end{cases}$，即$A^T CAx = y$;

b. 例：x代表电势，e代表电势差，y代表电流，f代表电源，A代表回路，C代表物理常数。

第三章：正交性

2022年3月15日 19:54

§1 正交向量与子空间

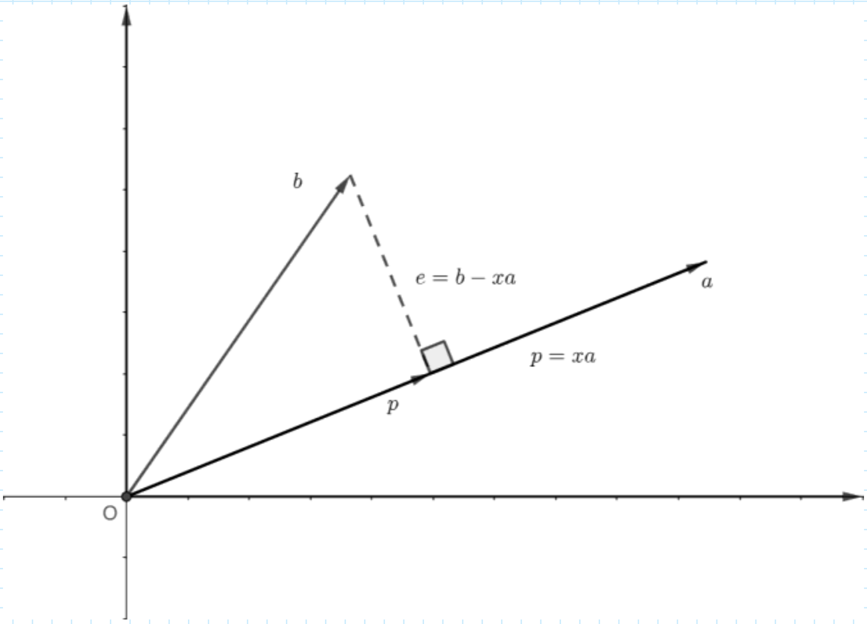
2022年3月3日 20:16

1. 正交向量
   a. 对于向量x,y，如果其内积为0，即$x^Ty=0$，则称向量x,y正交，记为$x\perp y$;
   b. 勾股定理：若$x\perp y$，那么$\|x\|^2+\|y\|^2=\|x+y\|^2$。
2. 正交空间
   a. 称两个空间U,V是正交的，如果对于任意$u\in U,v\in V$，成立$u\cdot v=0$;
   b. 若$U,V\subset W$是正交的，且$W=U+V$，则称U是V的正交补;
   c. 性质
      i. $U\cap V=\{0\}$;
      ii. 对于矩阵A，$R(A)$与$N(A)$正交。

§2 子空间投影

2022年3月4日 7:50

1. 二维投影

   a. 

   b. $a^T(b-xa)=0$；

   c. $x=\frac{a^Tb}{a^Ta}$；

   d. b在a上的投影为$p=\frac{aa^T}{a^Ta}b$；

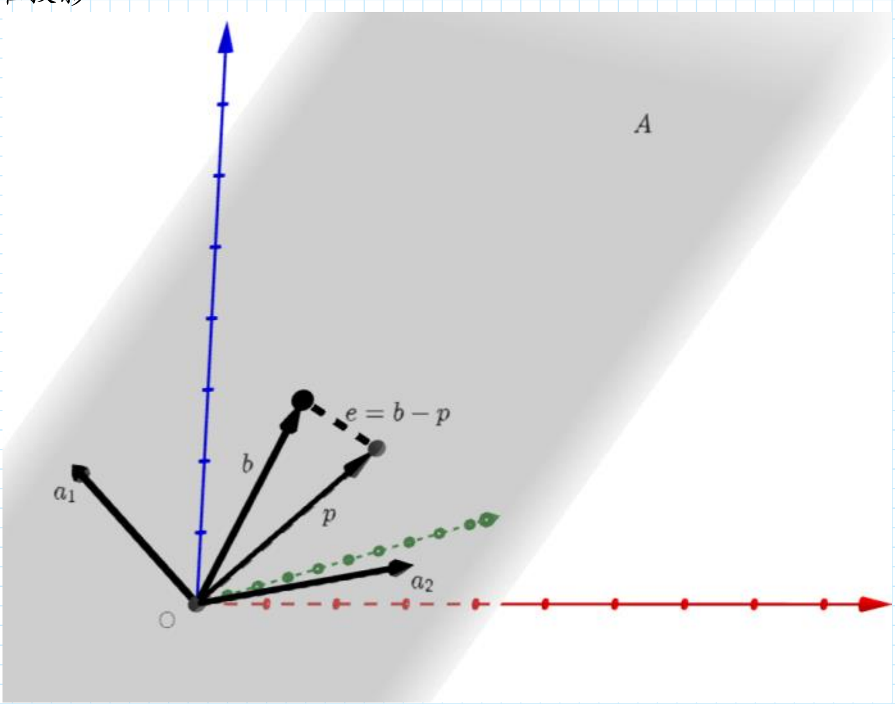
   e. 投影矩阵

      i. $P=\frac{aa^T}{a^Ta}$;

      ii. 性质

         1) P为对称矩阵；
         2) $C(P)=span(a)$；
         3) $rank(P)=1$；
         4) $P^T=P$；
         5) $P^2=P$。

2. 高维投影

   a. 

b. 向量b向平面$N(A)=span(a_1,a_2)$做投影p，于是$p=(a_1 \quad a_2)\begin{pmatrix}\widehat{x_1}\\ \widehat{x_2}\end{pmatrix}=A\hat{x}$；
c. 由于$\begin{pmatrix}a_1^T\\ a_2^T\end{pmatrix}(b-p)=0$，于是$A^T(b-A\hat{x})=0$；
d. $\hat{x}=\left(A^TA\right)^{-1}A^Tb$；
e. $p=A\left(A^TA\right)^{-1}A^Tb$；
f. 投影矩阵
  i. $P=A\left(A^TA\right)^{-1}A^T$；
  ii. 性质
    1) P为对称矩阵；
    2) $C(P)=span(A)$；
    3) $rank(P)=rank(A)$；
    4) $P^T=P$；
    5) $P^2=P$；
    6) 若A是方阵且可逆，则$P=I$。

3. 线性代数的应用
  a. 背景：在求解方程$Ax=b$时，当且仅当$b\in N(A)$时才有解，而这在现实生活中的概率很小。于是我们求解$Ax=b$的近似解，即$A\hat{x}=p$，其中p为b在$N(A)$上的投影；
  b. 应用：求解点集$(1,1),(2,2),(2,3)$的拟合直线（最小二乘法）
    i. 令$y=x_1+x_2x$；
    ii. 于是$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$；
    iii. 令$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$；
    iv. 进而$\hat{x}=\left(A^TA\right)^{-1}A^Tb=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$；
    v. 从而拟合直线为$y=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}x$。

§3 投影矩阵与最小二乘

2022年3月4日 15:36

1. 投影矩阵
   a. $P = A\left(A^TA\right)^{-1}A^T$；
   b. $E = I - P$；
   c. $b = p + e = xa + e$；
2. 最小二乘
   a. 求解点集(1,1), (2,2), (2,3)的拟合直线
      i. 令$y = x_1 + x_2x$；
      ii. 于是$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$；
      iii. 令$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$；
      iv. 进而$\hat{x} = \left(A^TA\right)^{-1}A^Tb = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$；
      v. 从而拟合直线为$y = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}x$。
   b. $P = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$；
   c. $\mathrm{p} = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{13}{6} \end{pmatrix}$，$e = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$；
   d. $e \perp N(A)$。
3. 求证：若A列满秩，则A^TA可逆。
   证明：取向量x，满足$A^TAx = 0$。方程两边做x的内积，于是$x^TA^TAx = 0$，即$(Ax)^T(Ax) = 0$，进而$Ax = 0$。由A列满秩，得$x = 0$，从而A^TA可逆，命题得证！

§4 正交矩阵和Gram-Schmidt正交化

2022年3月4日 17:01

1. 正交矩阵
   a. 正交标准基：称一组向量$q_1,\dots,q_n$为正交标准基，如果满足$q_i^T q_j \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i\neq j \end{cases}$;
   b. 正交矩阵
      i. 矩阵Q称为正交矩阵，如果其列向量为一组正交标准基；
      ii. 性质
         1) $Q^TQ=I$;
         2) 如果Q为方阵，则$Q^{-1}=Q^T$;
         3) $P=Q\left(Q^TQ\right)Q^T=QQ^T$;
         4) $Q^TQx=Q^Tb \Longrightarrow x=Q^Tb \Longrightarrow x_k=q_k^Tb$;
         5) Q的特征值的绝对值为1，即$|\lambda|=1$。
2. Gram-Schmidt正交化
   a. 思想：对于一组线性无关的向量$v_1,\dots,v_n$，Gram-Schmidt正交化就是在$span(v_1,\dots,v_n)$中找到一组标准正交基。正交化的过程可以理解为去非正交化的过程，如对于两个向量a,b，总可以表示为$b=e+p$，其中$p=\frac{aa^T}{a^Ta}b=\frac{a^Tb}{a^Ta}a$，我们知道这其实就是向量$b$在沿着向量$a$和垂直于向量$a$的方向上的分解。之后只要改变向量的模就可以达到正交化过程；
   b. 对于三元线性无关向量v_1,v_2,v_3，下面进行Gram-Schmidt正交化过程
      i. $q_1=\frac{v_1}{\left\|v_1\right\|}$;
      ii. $q_2=\frac{v_2-q_1^Tv_2q_1}{\left\|v_2-q_1^Tv_2q_1\right\|}$;
      iii. $q_3=\frac{v_3-q_1^Tv_3q_1-q_2^Tv_3q_2}{\left\|v_3-q_1^Tv_3q_1-q_2^Tv_3q_2\right\|}$。
   c. 正交化矩阵：对于矩阵A和其正交矩阵Q，则存在上三角形矩阵R使得$A=QR$。

第四章：行列式

2022年3月15日　　19:54

§1 行列式的性质

2022年3月5日 10:17

1. n阶方阵的行列式是一个函数$det: R^n \times R^n \to R$，满足以下性质：
   a. $det\, I = 1$；
   b. 交换矩阵的两行，符号相反；
   c. 首行具有线性性
      i. 首行具有加性：$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$；
      ii. 首行具有数乘性：$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$；
2. 推论
   a. 对于置换矩阵P，其行列式$|\, det\, P\, | = 1$——由性质a和b推出；
   b. 矩阵的每一行都具有线性性——由性质b和c推出；
   c. 如果A具有有相同的两行，则$det\, A = 0$——由性质b推出；
   d. 从行i减去行j的k倍，行列式不变——由性质c和推论c，即性质b和c推出；
   e. 如果A具有零行，则$det\, A = 0$——由性质c推出；
   f. 对于上三角矩阵$A = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$，则$det\, A = d_1 \cdots d_n$——由性质a，b和推论d，即性质a，b和c推出；
   g. $det\, A \neq 0 \Leftrightarrow A$可逆——由推论f，即性质a，b和c推出；
   h. $det(AB) = (det\, A)(det\, B)$；
   i. $det\, A^T = det\, A$——由该推论，立刻推出以上所有性质和推论对于“列”也是成立的，于是行列式中的“行”和“列”是等价的。

§2 行列式公式和代数余子式

2022年3月5日　21:14

1. 排列和行列式
   a. 排列
      i. 排列：$(1,\ldots,n)$的一个排列是一个组$(m_1,\ldots,m_n)$，其中$1,\ldots n$中的每个数恰好出现一次。$(1,\ldots,n)$的所有排列组成的集合记为$perm\, n$；
      ii. 排列的符号：如果在组$(m_1,\ldots,m_n)$中使得$1\le i<j\le n$且i出现在j后面的整数对(i,j)的个数是偶数，那么排列$(m_1,\ldots,m_n)$的符号定义为1；如果这种数对的个数是奇数，则定义为-1。也就是说，排列的符号等于1，如果自然顺序被改变了偶数次；等于-1，如果自然顺序被改变了奇数次。
   b. 行列式 (determinant of a matrix)：$n\times n$矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$的行列式定义为$\det \mathrm{A}=$
      $\sum_{(\mathrm{m}_1,\ldots,\mathrm{m}_\mathrm{n})\in \mathrm{perm\ n}} \left(\mathrm{sign}\left(\mathrm{m}_1,\ldots,\mathrm{m}_\mathrm{n}\right)\right) \mathrm{a}_{1\mathrm{m}_1}\cdots \mathrm{a}_{\mathrm{nm}_\mathrm{n}}$。
2. 代数余子式
   a. 对于矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，称其$(i,j)$处的代数余子式为$C_{ij}=$
      $$(-1)^{i+j}\, det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};$$
   b. 对于$n\times n$矩阵A，其行列式又可以定义为
      i. $det\, A=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik}\ (i=1,\ldots,n)$；
      ii. $det\, A=\sum_{k=1}^{n} a_{kj}C_{kj}\ (j=1,\ldots,n)$；

§3 矩阵的逆，Cramer法则，体积

2022年3月7日 10:52

1. 矩阵的逆
   a. 代数余子式
      i. 对于矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，称其$(i,j)$处的代数余子式为$C_{ij} =$
      $$(-1)^{i+j}\, det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};$$
      ii. 性质：对于矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$
         1) $\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} b_k C_{ik} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ b_1 & \cdots & b_n \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix};$
         2) $\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} b_k C_{kj} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$。
   b. 矩阵的逆：$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T$，其中$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$。
2. Cramer法则
   a. 对于$Ax = b$，若$\det A \neq 0$，则$x = A^{-1}b = \frac{C^T b}{\det A}$;
   b. 分量形式：$x_k = \frac{\det B_k}{\det A}$，其中$\mathrm{B_k} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$;
   c. 应用性：中看不中用。
3. 行列式的几何意义：行（列）向量张成的长方体的有向体积。

第五章：特征值与特征向量

2022年3月15日 19:54

§1 特征值和特征向量

2022年3月7日　　22:46

1. 定义
    a. 特征值和特征向量：对于矩阵A，如果存在数λ和非零向量x，使得成立$Ax = \lambda x$，则称λ为特征值，x为特征向量；
    b. 迹：矩阵A的迹定义为其特征值（重复计算）的和，记为$trace\,A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$；
    c. 行列式：矩阵A的行列式定义为其特征值（重复计算）的积，记为$det\,A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$。
    d. ※矩阵的迹等于其对角线元素之和；
2. 特征值和特征向量的求法：特征值λ为特征方程$det(A - \lambda I) = 0$的根。求得λ后代入原方程求出特征向量；
3. ※
    a. 同一个特征值可对应一组线性无关的特征向量；
    b. 两个线性无关的特征向量对应不同的特征值；
    c. 不同特征值对应线性无关的特征向量；
    d. $m \times n$矩阵A的非零特征值数为r，零特征值数为$n - r$。
4. 矩阵的加法，数乘和乘法
    a. 如果λ和x分别为矩阵A的特征值和特征向量，则$\lambda + c$和x分别为$A + cI$的特征值和特征向量；
    b. 如果λ和x分别为矩阵A的特征值和特征向量，则$c\lambda$和x分别为cA的特征值和特征向量；
    c. 如果λ和x分别为矩阵A的特征值和特征向量，则λ^n和x分别为A^n的特征值和特征向量；
    d. 如果λ为矩阵A的特征值，则$\overline{\lambda}$为A^T的特征值；
    e. 如果λ和x分别为矩阵AB的特征值和特征向量，则λ和Bx分别为BA的特征值和特征向量；
    f. 特征值和特征向量不满足矩阵的加法，即如果λ和x分别为矩阵A的特征值和特征向量，μ和y分别为矩阵B的特征值和特征向量，则$\lambda + \mu$和$x + y$不一定分别为$A + B$的特征值和特征向量；
    g. 特征值和特征向量不满足矩阵的乘法，即如果λ和x分别为矩阵A的特征值和特征向量，μ和y分别为矩阵B的特征值和特征向量，则$\lambda\mu$不一定为AB的特征值。
5. 对称矩阵与反对称矩阵的特征值和特征向量
    a. 对称矩阵的特征值为实数；
    b. 对称矩阵的不同特征值对应的特征向量正交。
    c. 反对称矩阵的特征值为纯虚数。
6. 特征方程与特征值和特征向量
    a. n阶方阵的特征方程为$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$；
    b. $trace\,A = -a_{n-1}$；
    c. $det\,A = (-1)^n a_0$。
7. 上（下）三角形矩阵的特征值恰为对角线元素。

§2 对角化与A的幂

2022年3月8日　　11:11

1. 不同特征值对应线性无关的特征向量，因此若n阶方阵A拥有n个不同的特征值$\lambda_1,\dots,\lambda_n$，进而其所对应的是$n$个线性无关的特征向量$x_1,\dots,x_n$；
2. 记$S=\begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}$，称为特征向量矩阵；
3. 记$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$，称为特征值矩阵；
4. 矩阵A满足$S^{-1}AS=\Lambda$，即$A=S\Lambda S^{-1}$，这称为矩阵A的对角化；
5. 矩阵的对角化可应用在求解矩阵的幂，即$A^m=S\Lambda^m S^{-1}$，其中$\Lambda^m=\begin{pmatrix}\lambda_1^m & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n^m\end{pmatrix}$；
6. 数列与差分
   a. 数列$\{u_m\}$为向量数列，已知u_0及$u_{m+1}=Au_m$，其中A为拥有n个不同的特征值$\lambda_1,\dots,\lambda_n$的$n$阶方阵；
   b. n阶方阵A拥有n个不同的特征值$\lambda_1,\dots,\lambda_n$，进而其所对应的是$n$个线性无关的特征向量$x_1,\dots,x_n$，因此对于特征向量矩阵$S=\begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}$，存在$c=\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$，使得成立$u_0=Sc$；
   c. 由递推公式$u_{m+1}=Au_m$易知$u_m=A^m u_0=S\Lambda^m c$；
   d. 数列的稳定性
      i. 若$|\lambda|<1$，则$\mathrm{u_m}\to 0$；
      ii. 若$|\lambda|=1$，则$\mathrm{u_m}\to \mathrm{c}$；
      iii. 若$|\lambda|>1$，则$\mathrm{u_m}\to\infty$。
7. Fibonacci数列
   a. Fibonacci数列$\{F_n\}$满足$F_0=0,F_1=1$及$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$；
   b. 记$u_n=\begin{pmatrix}F_{n+1}\\ F_n\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，因此满足$u_{n+1}=Au_n$，即$\begin{pmatrix}F_{n+2}\\ F_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_{n+1}\\ F_n\end{pmatrix}$；
   c. 由于$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$u_0=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$，因此$S=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2} & \frac{1-\sqrt[2]{5}}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$\Lambda=\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2} & 0\\ 0 & \frac{1-\sqrt[2]{5}}{2}\end{pmatrix}$，$c=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt[2]{5}}\\ -\frac{1}{\sqrt[2]{5}}\end{pmatrix}$。进而$u_n=S\Lambda^n c=\begin{pmatrix}\frac{\left(\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt[2]{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt[2]{5}}\\ \frac{\left(\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt[2]{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt[2]{5}}\end{pmatrix}$，因此$F_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt[2]{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt[2]{5}}$；
   d. F_n是最接近$\frac{1}{\sqrt[2]{5}}\left(\frac{1+\sqrt[2]{5}}{2}\right)^n$的整数。

§3 微分方程与矩阵指数

2022年3月8日　　14:09

1. 矩阵指数
   a. 指数级数：$e^x=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$；
   b. 对于n阶方阵A，定义$e^A=I+A+\frac{A^2}{2}+\cdots+\frac{A^n}{n!}+\cdots$；可见$e^A$是一个和$A$同样大小的矩阵；
   c. 若A可对角化，即$A=S\Lambda S^{-1}$，那么$e^A=S\left(I+\Lambda+\frac{\Lambda^2}{2}+\cdots+\frac{\Lambda^n}{n!}+\cdots\right)S^{-1}=Se^{\Lambda}S^{-1}$，其中$e^{\Lambda}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}$。
2. 微分方程
   a. 记u是关于x的向量值函数，即$u(x)=\begin{pmatrix}u_1(x)\\ \vdots\\ u_n(x)\end{pmatrix}$，满足$\frac{d}{dx}u=Au$，其中$A$为拥有$n$个不同的特征值$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$的$n$阶方阵，进而其所对应的是$n$个线性无关的特征向量$v_1,\ldots,v_n$；
   b. 记特征向量矩阵为$S=(v_1\quad\cdots\quad v_n)=\begin{pmatrix}s_{11} & \cdots & s_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ s_{n1} & \cdots & s_{nn}\end{pmatrix}$，特征值矩阵为$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$；
   c. 存在$c=\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$，使得成立$u(0)=Sc$
   d. 由$\frac{d}{dx}u=Au$得$u(x)=e^{Ax}u(0)=Se^{\Lambda x}c=c_1v_1e^{\lambda_1x}+\cdots+c_nv_ne^{\lambda_nx}$；
   e. 分量形式$\begin{pmatrix}u_1(x)\\ \vdots\\ u_n(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1s_{11}e^{\lambda_1x}+\cdots+c_ns_{1n}e^{\lambda_nx}\\ \vdots\\ c_1s_{n1}e^{\lambda_1x}+\cdots+c_ns_{nn}e^{\lambda_nx}\end{pmatrix}$，即$u_k(x)=c_1s_{k1}e^{\lambda_1x}+\cdots+c_ns_{kn}e^{\lambda_nx}$；
   f. 稳定性
      i. 若$Re\,\lambda<0$，则$u\to 0$，称为稳定性；
      ii. 若$Re\,\lambda\le 0$，则$u_m\to c$，称为稳态；
      iii. 若$Re\,\lambda>0$，则$u_m\to\infty$，称为发散。

§4 Markov矩阵和Fourier级数

2022年3月8日　　18:56

1. Markov矩阵
    a. 列向量元素和为1且元素非负的矩阵称为Markov矩阵，即对于Markov矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，满足$a_{ij}\geq 0\ (i,j=1,\dots,n)$，$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}=1\ (i=1,\dots,n)$；
    b. 性质
        i. $\lambda_{max}=1$，其所对应的特征向量的元素均非负；
        ii. $|\lambda|\leq 1$。
    c. 应用：由于其列向量元素和为1且元素非负的性质可知Markov矩阵在现实生活中具有广泛的实际意义，例如刻画人口迁徙。而$|\lambda|\leq 1$的性质描述了Markov矩阵变换会趋于稳态。
2. Fourier级数
    a. 函数的内积：定义在区间$[-1,1]$上的实值连续函数构成的向量空间上可定义内积如下：$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$；
    b. 一组标准正交基$q_1,\dots,q_n$张成空间$span(q_1,\dots,q_n)$，对于$\forall v\in span(q_1,\dots,q_n)$，$\exists x_1,\dots,x_n$，使得成立$v=x_1q_1+\cdots+x_nq_n=Qx$，于是$x=Q^{-1}v=Q^Tv$，进而$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_1^Tv \\ \vdots \\ q_n^Tv \end{pmatrix}$。
    c. 对于定义在$[0,2\pi]$上的连续函数$f(x)$，定义内积为$\langle f,g\rangle=\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$，于是函数可以表示为$f(x)=a_0+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots$，其中$a_0=\frac{\int_0^{2\pi} f(x)dx}{2\pi}$，$a_n=\frac{\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx}{\pi}(n=1,2,\dots)$，$b_n=\frac{\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx}{\pi}(n=1,2,\dots)$。

§5 特殊矩阵

2022年3月8日 19:39

1. 正规矩阵
   a. 矩阵N称为正规矩阵，如果$N^TN = NN^T$；
   b. 性质
      i. 对于任意向量x，成立$|Nx| = \left|N^Tx\right|$；
      ii. 若v是N的相应于本征值λ的本征向量，则v也是N^T的相应于本征值$\bar{\lambda}$的本征向量；
      iii. N的相应于不同本征值的本征向量是正交的；
      iv. N必定存在n个标准正交特征向量。
2. 对称矩阵
   a. 矩阵S称为对称矩阵，如果$S^T = S$；
   b. 性质
      i. 对称矩阵S的特征值$\lambda_1, \dots, \lambda_n$均为实数；
      ii. 对称矩阵S存在一组标准正交的特征向量$q_1, \dots, q_n$；
      iii. 对称矩阵S可分解为$S = Q\Lambda Q^T = \lambda_1 q_1 q_1^T + \cdots + \lambda_n q_n q_n^T$；不难发现，$q_k q_k^T$是向量$q_k$方向上的投影矩阵；
      iv. ※$r(A) = r\left(A^T\right) = r\left(A^TA\right) = r\left(AA^T\right)$；
      v. ※对称矩阵AA^T和A^TA拥有相同的特征值。
3. 半正定矩阵：对于n阶实对称矩阵A，以下条件等价——
   a. A为半正定矩阵；
   b. A的任意主元非负；
   c. A的任意主子式非负；
   d. A的任意特征值非负；
   e. 存在实矩阵B，使得成立$A = B^TB$；
   f. 对于任意非零向量x，使得成立$x^TAx \geq 0$。
4. 正定矩阵：对于n阶实对称矩阵A，以下条件等价——
   a. A为正定矩阵；
   b. A的任意主元为正；
   c. A的任意顺序主子式为正；
   d. A的任意主子式为正；
   e. A的任意特征值为正；
   f. 存在列满秩实矩阵B，使得成立$A = B^TB$；
   g. 存在实可逆矩阵C，使得成立$A = C^TC$；
   h. 对于任意非零向量x，使得成立$x^TAx > 0$。

§6 复数矩阵与快速Fourier矩阵

2022年3月9日　　19:31

1. 未有特殊说明，本书仅在本节使用复数域C；
2. 转置与共轭转置

   a. 转置：对于复数矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，其转置为$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$；

   b. 共轭转置：对于复数矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，其共轭转置为$\overline{A^T}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，记为$A^H$；
3. 复数向量的内积：$\langle x,y\rangle=x^Hy$；
4. 复数向量的模：$|x|=\sqrt[2]{x^Hx}$；
5. Hermitian矩阵：若$A^H=A$，则称矩阵A为Hermitian矩阵；
6. 酉矩阵（unitary matrix）：若$Q^TQ=I$，则称矩阵Q为酉矩阵。
7. Fourier矩阵：$F_n=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_n & \cdots & w_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & w_n^{n-1} & \cdots & w_n^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$，其中$w_n=e^{i\frac{2\pi}{n}}$。

§7 正定矩阵与最小值

2022年3月11日 10:14

1. 正定矩阵：对于n阶实对称矩阵A，以下条件等价——
   a. A为正定矩阵；
   b. A的任意主元为正；
   c. A的任意顺序主子式为正；
   d. A的任意主子式为正；
   e. A的任意特征值为正；
   f. 存在列满秩实矩阵B，使得成立$A = B^T B$；
   g. 存在实可逆矩阵C，使得成立$A = C^T C$；
   h. 对于任意非零向量x，使得成立$x^T A x > 0$。
2. 性质
   a. 若A与B均为正定矩阵，则$A + B$为正定矩阵；
   b. 若A与B均为正定矩阵，则AB为正定矩阵。
3. 2×2正定矩阵$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$
   a. 主元：a，$\frac{ac-b^2}{a}$；
   b. 顺序主子式：a，$\mathrm{ac} - \mathrm{b}^2$；
   c. 特征值：$\lambda_1 = \frac{a+c+\sqrt[2]{(a-c)^2+b^2}}{2}$，$\lambda_2 = \frac{a+c-\sqrt[2]{(a-c)^2+b^2}}{2}$；
   d. 对于非零向量$\mathrm{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$v^T A v = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(x + \frac{a}{b}y\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a}y^2$。

第六章：奇异值分解(SVD)

2022年3月15日　　19:59

§1 相似矩阵与Jardon标准型

2022年3月11日 16:30

1. 相似矩阵
   a. 定义：称矩阵A与B是相似的，如果存在可逆矩阵M，使得成立$B=M^{-1}AM$；
   b. 性质
      i. 若λ为A的特征值，则λ亦为B的特征值；
      ii. 若x为A的特征向量，则$M^{-1}x$为B的特征向量；
      iii. n阶矩阵A与对角矩阵相似当且仅当A有n个不同特征值。
2. Jordan定理
   a. Jordan块：$J_k=\begin{pmatrix}\lambda_k & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_k & \ddots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k\end{pmatrix}_{n_k\times n_k}$；
   b. Jordan矩阵
      i. $J=\begin{pmatrix}J_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & J_d\end{pmatrix}$，其中$J_1,\ldots,J_d$均为Jordan块；
      ii. Jordan块J_k的大小n_k表示Jordan矩阵J的特征值λ_k的重数；
      iii. Jordan块数d代表Jordan矩阵J的特征向量数。
   c. Jordan定理：每一个矩阵都与一个Jordan矩阵相似；特别的，如果$d=n$，则该矩阵可对角化。

§2 奇异值分解

2022年3月11日 19:47

1. 对于$m \times n$矩阵A，存在标准正交矩阵U, V^T以及对角矩阵Σ，使得成立$A = U\Sigma V^T$；
2. 想法
   a. 选取矩阵A的列空间的一组标准正交基$v_1, \dots, v_r$，找到与之对应的矩阵A的行空间的一组标准正交基$u_1, \dots, u_r$，并存在非零伸缩因子$\sigma_1, \dots, \sigma_r$，使得成立$Av_1 = \sigma_1 u_1, \dots, Av_r = \sigma_r u_r$；
   b. 继续选取矩阵A的零空间的一组标准正交基$v_{r+1}, \dots, v_n$，找到与之对应的矩阵A^T的零空间的一组标准正交基$u_{r+1}, \dots, u_m$，那么这样的伸缩因子均为0；
   c. 于是我们找到了一组矩阵A的列向量的标准正交基$V = (v_1 \quad \cdots \quad v_n)$和一组矩阵$A$的行向量的标准正交基$U = (u_1 \quad \cdots \quad u_n)$，以及伸缩矩阵$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$；
   d. 至此，我们完成了矩阵A的奇异值分解（Singular Value Decomposition），即$A = U\Sigma V^T$。
3. 求解V, U, Σ
   a. 由于$A = U\Sigma V^T, A^T = V\Sigma^T U^T$，于是$A^T A = V\Sigma^T \Sigma V^T = V(\Sigma^T \Sigma)V^T$，可以看到这便是$A^T A$的$Q\Lambda Q^T$对角化分解，于是$V$便是$A^T A$的标准正交特征向量矩阵，$\Sigma^T \Sigma$为$A^T A$的特征值矩阵，这里我们取$\sigma_1 = \sqrt[2]{\lambda_1}, \dots, \sigma_r = \sqrt[2]{\lambda_r}$；
   b. 同理，由于$A = U\Sigma V^T, A^T = V\Sigma^T U^T$，于是$AA^T = U\Sigma\Sigma^T U^T = U(\Sigma\Sigma^T)U^T$，可以看到这便是$AA^T$的$Q\Lambda Q^T$对角化分解，于是$U$便是$AA^T$的标准正交特征向量矩阵，$\Sigma\Sigma^T$为$A^T A$的特征值矩阵，注意到$AA^T$和$A^T A$拥有相同的特征值，于是这里依然取$\sigma_1 = \sqrt[2]{\lambda_1}, \dots, \sigma_r = \sqrt[2]{\lambda_r}$；
   c. 这样我们就完成了矩阵A的奇异值分解$A = U\Sigma V^T$，V, U, Σ由以上过程给出。

第七章：线性变换

2022年3月15日 20:00

§1 线性变换与矩阵

2022年3月12日 10:30

1. 线性变换：映射$T: V\to W$称为线性映射，如果对于任意$v,w\in V,\lambda\in R$，使得成立
   a. $T(v+w)=T(v)+T(w)$；
   b. $T(\lambda v)=\lambda T(v)$。
2. ※在选定了基之后，一个线性映射T对应一个矩阵A，因此线性映射等价于矩阵。$T(v)=Av$。那么矩阵A如何确定的呢？
3. 对于映射$T: V\to W$，选取V的基$v_1,\dots,v_n$，W的基$w_1,\dots,w_m$，因此有
   $\begin{cases} T(v_1)=a_{11}w_1+\cdots+a_{m1}w_n \\ \vdots \\ T(v_m)=a_{1n}w_1+\cdots+a_{mn}w_n \end{cases}$，因此$T\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，因此矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$；
4. 对于映射$T: V\to W$，若$\mathrm{v}\in \mathrm{V}$，设$\mathrm{v}=\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$，于是$\mathrm{TT(v)}=\left(\mathrm{T}\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$，于是$\mathrm{T}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$；
5. 单射性，满射性与秩
   a. T单射$\Leftrightarrow A$列满秩$\Leftrightarrow C(A)=R^m$；
   b. T满射$\Leftrightarrow A$行满秩$\Leftrightarrow R(A)=R^n$；
   c. T双射$\Leftrightarrow A$满秩。

§2 基变换

2022年3月12日　　17:53

1. 坐标变换
   a. 对于同一个向量x，面对不同的基v_1, v_2与w_1, w_2，我们有不同的坐标表示，即$x = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$，然后我们有$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$，于是$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$;
   b. 给定同一空间的不同基$v_1, \dots, v_n$与$w_1, \dots, w_n$，满足$\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_m \end{pmatrix} M$，于是同一向量对于基矩阵$V$的坐标$x$与基矩阵$W$的坐标$y$，满足$Mx = y$。
2. 基变换：线性变换不依赖于基的选取，但是对应矩阵依赖于基的选取。也就是说，对于同一线性变换T，在基$v_1, \dots, v_n$下的矩阵为A，即$T\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} A$；在基$w_1, \dots, w_n$下的矩阵为$B$，即$T\begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_n \end{pmatrix} B$。而$\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & \cdots & w_m \end{pmatrix} M$，于是满足$B = M^{-1}AM$，这说明$A$与$B$是相似矩阵。

§3 左逆，右逆与伪逆

2022年3月12日 20:34

1. 想法：矩阵A存在逆，当且仅当$r=m=n$。那么对于$r=n<m$，$r=m<n$与$r<m,r<n$的大多数情况，矩阵A的“逆”又是如何呢？
2. 左逆与右逆
   a. 对于$m\times n$的矩阵A，如果存在矩阵A_l,A_r，使得成立$A_lA=I$，$AA_r=I$，那么称A_l为A的左逆，称A_r为A的右逆；
   b. 左逆
      i. 左逆存在当且仅当A列满秩，即$r=n<m$；
      ii. 若$r=n<m$，那么A的左逆为$A_l=\left(A^TA\right)^{-1}A^T$，这样$A_lA=\left(A^TA\right)^{-1}A^TA=I$；
      iii. 注意到，若右乘左逆，可得$AA_l=A\left(A^TA\right)^{-1}A^T$，此为$A$的列空间的投影矩阵。
   c. 右逆
      i. 右逆存在当且仅当A行满秩，即$r=m<n$；
      ii. 若$r=m<n$，那么A的右逆为$A_r=A^T\left(AA^T\right)^{-1}$，这样$AA_r=AA^T\left(AA^T\right)^{-1}=I$；
      iii. 注意到，若左乘右逆，可得$A_rA=A^T\left(AA^T\right)^{-1}A$，此为$A$的行空间的投影矩阵。
3. 伪逆
   a. 想法：我们试着从映射的角度理解矩阵的逆。矩阵A对应于映射$T:R^n\to C(A)$，其“逆矩阵”A^+对应于“逆映射”$T^+:R^m\to R(A)$。存在“逆”的矩阵所对应的映射一定是“双射”，但是不存在“逆”的原因是A的零空间和A^T的零空间破坏了这种“双射”的平衡性。但是我们依旧可以建立类似的“双射”$R(A)\leftrightarrow C(A)$。这是可行的，因为$R(A)$和$C(A)$的维度都是r；
   b. 定义：对于$m\times n$的矩阵A，如果存在矩阵A^+，使得成立$A^+AA^+=A^+$及$AA^+A=A$，那么称A^+为A的伪逆；
   c. 伪逆的求解
      i. 对矩阵A进行奇异值分解$A=U\Sigma V^T$，其中$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_1&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\sigma_r&0&\cdots&0\\0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{m\times n}$，于是$\Sigma^+=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1}&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\frac{1}{\sigma_r}&0&\cdots&0\\0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{n\times m}$，这样$\Sigma^+\Sigma=\begin{pmatrix}1&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&1&0&\cdots&0\\0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{n\times n}$，$\Sigma\Sigma^+=\begin{pmatrix}1&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&1&0&\cdots&0\\0&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{m\times m}$；
      ii. 进而$A^+=V\Sigma^+U^T$，这样便满足$A^+A=v_1v_1^T+\cdots+v_rv_r^T$，$AA^+=u_1u_1^T+\cdots+u_ru_r^T$。