3.1 Newton-Cotes 公式

将积分区间$[a,b]$划分为n等份，步长为$h=\frac{b-a}{n}$，选取等距结点$x_k=a+kh$构造出的插值型求积公式

$$I_n=(b-a)\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}f(x_k)$$

称为 Newton-Cotes 公式。$n=1$时即为梯形公式，$n=2$时为 Simpson 公式，$n=4$时特别称为 Cotes 公式。式中$C_k^{(n)}$为 Cotes 系数，当$n\geq 8$时，Cotes 系数出现负值，计算过程可能会不稳定，所以$n\geq 8$时的 Newton-Cotes 公式是不用的。

Matlab 代码如下：

```
function I = NewtonCotes(f,a,b,type)
%
syms t;
t=findsym(sym(f));
I=0;
switch type
    case 1,
        I=((b-a)/2)*(subs(sym(f),t,a)+subs(sym(f),t,b));

    case 2,
        I=((b-a)/6)*(subs(sym(f),t,a)+4*subs(sym(f),t,(a+b)/2)+...
            subs(sym(f),t,b));

    case 3,
        I=((b-a)/8)*(subs(sym(f),t,a)+3*subs(sym(f),t,(2*a+b)/3)+...
            3*subs(sym(f),t,(a+2*b)/3)+subs(sym(f),t,b));

   case 4,
        I=((b-a)/90)*(7*subs(sym(f),t,a)+...
            32*subs(sym(f),t,(3*a+b)/4)+...
            12*subs(sym(f),t,(a+b)/2)+...
            32*subs(sym(f),t,(a+3*b)/4)+7*subs(sym(f),t,b));

    case 5,
        I=((b-a)/288)*(19*subs(sym(f),t,a)+...
            75*subs(sym(f),t,(4*a+b)/5)+...
            50*subs(sym(f),t,(3*a+2*b)/5)+...
            50*subs(sym(f),t,(2*a+3*b)/5)+...
            75*subs(sym(f),t,(a+4*b)/5)+19*subs(sym(f),t,b));
```

```
    case 6,
        I=((b-a)/840)*(41*subs(sym(f),t,a)+...
            216*subs(sym(f),t,(5*a+b)/6)+...
            27*subs(sym(f),t,(2*a+b)/3)+...
            272*subs(sym(f),t,(a+b)/2)+...
            27*subs(sym(f),t,(a+2*b)/3)+...
            216*subs(sym(f),t,(a+5*b)/6)+...
            41*subs(sym(f),t,b));

    case 7,
        I=((b-a)/17280)*(751*subs(sym(f),t,a)+...
            3577*subs(sym(f),t,(6*a+b)/7)+...
            1323*subs(sym(f),t,(5*a+2*b)/7)+...
            2989*subs(sym(f),t,(4*a+3*b)/7)+...
            2989*subs(sym(f),t,(3*a+4*b)/7)+...
            1323*subs(sym(f),t,(2*a+5*b)/7)+...
            3577*subs(sym(f),t,(a+6*b)/7)+751*subs(sym(f),t,b));
end
```

3.2 复合求积公式

将积分区间$[a,b]$划分为n等份，步长为$h=\dfrac{b-a}{n}$，取等距结点$x_k=a+kh$，在每个小区间$[x_k,x_{k+1}](k=0,1,\cdots,n-1)$上应用梯形公式，得

$$I=\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx=\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+f(x_{k+1})]+R_n(f)$$

记$T_n=\dfrac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+f(x_{k+1})]=\dfrac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$，称为复合梯形公式。

Matlab 代码如下：

```
function I = CombineTraprl(f,a,b,h)
%用复合梯形公式计算积分
syms t;
t= findsym(sym(f));
n=(b-a)/h;
I1= subs(sym(f),t,a);
for k=1:n-1
     xk=a+h*k;
     l=l+2*subs(sym(f),t,xk);
end
I=(h/2)*(l+subs(sym(f),t,b));
```

将积分区间$[a,b]$划分为n等份，步长为$h=\frac{b-a}{n}$，取等距结点$x_k=a+kh$，在每个小区间$[x_k,x_{k+1}](k=0,1,\cdots,n-1)$上应用 Simpson 公式，得

$$I=\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx=\frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+4f(x_{k+1/2})+f(x_{k+1})]+R_n(f)$$

记
$$S_n=\frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+4f(x_{k+1/2})+f(x_{k+1})]$$
$$=\frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+1/2})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right]$$

称为复合 Simpson 公式。

3.3 Gauss 型求积公式

若插值型机械求积公式$\int_a^b \rho(x)f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$具有$2n+1$阶代数精度，则称为 Gauss 型求积公式，在$[a,b]$上关于权函数$\rho(x)$的$n+1$次正交多项式的零点就是 Gauss 型求积公式的求积节点，即 Gauss 点。

在 Gauss 型求积公式中，若求积区间为$[-1,1]$，权函数$\rho(x)=1$，公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx\approx\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$$

称为 Gauss-Legendre 公式。下表列出 Gauss-Legendre 公式的结点和系数。

n	x_k	A_k	n	x_k	A_k
0	0.0000000	2.0000000	3	±0.8611361 ±0.3399810	0.3478548 0.6521452
1	±0.5773503	1.000000	4	±0.9061798 ±0.5384693 0.000000	0.2369269 0.4786287 0.5688889

2	±0.7745967 0.000000	0.5555556 0.8888889	5	±0.9324695 ±0.6612094 ±0.2386192	0.1713245 0.3607618 0.4679139

当积分区间是一般的$[a,b]$区间时，只要做变换

$$x=\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}$$

可将公式转换为

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}\right)dt$$

对等式右端积分使用 Gauss-Legendre 公式即可。

Matlab 代码如下：

```
function I = IntGaussLegen(f,a,b,n,AK,XK)
%Gauss-Legendre公式计算一般的[a,b]区间的积分
syms t;
t= findsym(sym(f));
if(n<5 && nargin == 4)
    AK = 0;
    XK = 0;
else
    XK1=((b-a)/2)*XK+((a+b)/2);
    I=((b-a)/2)*sum(AK.*subs(sym(f),findsym(f),XK1));
end

ta = (b-a)/2;
tb = (a+b)/2;
switch n
    case 0,
        I=2*ta*subs(sym(f),t,tb);

    case 1,
        I=ta*(subs(sym(f),t,ta*0.5773503+tb)+...
            subs(sym(f),t,-ta*0.5773503+tb));

    case 2,
        I=ta*(0.55555556*subs(sym(f),t,ta*0.7745967+tb)+...
            0.55555556*subs(sym(f),t,-ta*0.7745967+tb)+...
            0.88888889*subs(sym(f),t,tb));

    case 3,
        I=ta*(0.3478548*subs(sym(f),t,ta*0.8611363+tb)+...
            0.3478548*subs(sym(f),t,-ta*0.8611363+tb)+...
```

```
        0.6521452*subs(sym(f),t,ta*0.3398810+tb) +...
        0.6521452*subs(sym(f),t,-ta*0.3398810+tb));

  case 4,
      I=ta*(0.2369269*subs(sym(f),t,ta*0.9061793+tb)+...
        0.2369269*subs(sym(f),t,-ta*0.9061793+tb)+...
        0.4786287*subs(sym(f),t,ta*0.5384693+tb) +...
        0.4786287*subs(sym(f),t,-ta*0.5384693+tb)+...
        0.5688889*subs(sym(f),t,tb));
 case 5,
      I=ta*(0.1713245*subs(sym(f),t,ta*0.9324695+tb)+...
        0.1713245*subs(sym(f),t,-ta*0.9324695+tb)+...
        0.3607616*subs(sym(f),t,ta*0.6612094+tb)+...
        0.3607616*subs(sym(f),t,-ta*0.6612094+tb)+...
        0.4679139*subs(sym(f),t,ta*0.2386292+tb)+...
        0.4679139*subs(sym(f),t,-*0.2386292+tb));
end
```

若求积区间为$[-1,1]$，权函数为$\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，所建立的Gauss型求积公式为

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

称为Gauss-Chebyshev公式。其中结点为n次Chebyshev多项式的零点，公式可记为

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \qquad x_k=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi$$

若求积区间为$[0,+\infty)$，权函数为$\rho(x)=e^{-x}$，则所建立的Gauss型求积公式为

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

称为 Gauss-Lagurre 公式。其中结点为$n+1$次 Lagurre 多项式的零点，下表列出 Gauss-Lagurre 公式的结点和系数。

n	x_k	A_k	n	x_k	A_k
0	1.0000000	1.0000000	4	0.2635603 1.4134031	0.52175556 0.3986668
1	0.5857864 3.4142135	0.8535533 0.1464466		3.5964258 7.0858100 12.6408008	0.0759425 0.00361176 0.00002337

2	0.4157746	0.7110930	5	0.2228466	0.4589647
	2.2942804	0.2785177		1.1889321	0.4170008
	6.2899451	0.0103893		2.9927363	0.1133734
3	0.3225477	0.6031541		5.7751436	0.1039920
	1.7457611	0.3574187		9.8374674	0.000261017
	4.5366203	0.0388879		15.9828740	0.0000008985
	9.3950710	0.0005393			

3.4 数值微分

数值为分就是用函数值的线性组合近似函数在某点的导数值，可以简单的用差商近似导数，最常用的是中点公式

$$G(h)=\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

计算导数 $f^{'}(a)$ 的近似值，其中 h 为步长。

Matlab 代码如下：

```
function df=MidPoint(func,a,h)
if (nargin == 3 && h == 0.0)
    disp('h不能为0');
   return;
 end
y1 = subs(sym(func), findsym(sym(func)),a+h);
y2 = subs(sym(func), findsym(sym(func)),a-h);
df = (y1-y2)/(2*h);
```