第一章

1. 共线

    1. 向量$\vec{a}$和$\vec{b}$共线$\Leftrightarrow$存在不全为零的实数λ,μ，使得成立

    $$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\overrightarrow{0} \tag{1}$$

    2. 向量$\vec{a}=(a_1,a_2),\vec{b}=(b_1,b_2)$共线$\Leftrightarrow$

    $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0 \tag{2}$$

    3. 三点A,B,C共线$\Leftrightarrow$存在不全为零的实数λ,μ,ν，使得成立

    $$\begin{cases} \lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0} \\ \lambda+\mu+\nu=0 \end{cases} \tag{3}$$

    其中O为任意取定的点。

    4. 三点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3)$共线$\Leftrightarrow$

    $$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \tag{4}$$

    5. 点P在直线（线段）AB上$\Leftrightarrow$存在（非负）实数λ,μ，使得成立

    $$\begin{cases} \overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB} \\ \lambda+\mu=1 \end{cases} \tag{5}$$

    其中O为任意取定的点。

2. 共面

    1. 向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面$\Leftrightarrow$存在不全为零的实数λ,μ,ν，使得成立

    $$\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\nu\vec{c}=\overrightarrow{0} \tag{6}$$

    2. 向量$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3),\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$共面$\Leftrightarrow$

    $$\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0 \tag{7}$$

    3. 四点A,B,C,D共面$\Leftrightarrow$存在不全为零的实数λ,μ,ν,ω，使得成立

    $$\begin{cases} \lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}+\omega\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0} \\ \lambda+\mu+\nu+\omega=0 \end{cases} \tag{8}$$

    其中O为任意取定的点。

    4. 四点$A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2),C(x_3,y_3,z_3),D(x_4,y_4,z_4)$共面$\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

5. 若A, B, C不共线，则点P在平面ABC上$\Leftrightarrow$存在实数λ, μ, ν，使得成立

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC} \\ \lambda + \mu + \nu = 1 \end{cases} \tag{10}$$

其中O为任意取定的点。

3. 定比分点公式：

$$\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right) \tag{11}$$

4. 二重外积：

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \tag{12}$$

5. Lagrange恒等式：

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix} \tag{13}$$

第二章

1. 点到直线的距离：若直线l经过点P_0，方向向量为$\vec{v}$，则点P到l的距离为

$$d\langle P,l\rangle=\frac{|\overrightarrow{P_0P}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|}\tag{14}$$

2. 异面直线间的距离：若两条异面直线l_1,l_2分别经过点P_1,P_2，方向向量分别为$\vec{v}_1,\vec{v}_2$，则两条直线间的距离为

$$d\langle l_1,l_2\rangle=\frac{|\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\vec{v}_1\times\vec{v}_2|}{|\vec{v}_1\times\vec{v}_2|}\tag{15}$$

3. 异面直线的公垂线：若两条异面直线l_1,l_2分别经过点P_1,P_2，方向向量分别为$\vec{v}_1,\vec{v}_2$，则两条直线的公垂线为平面π_1,π_2的交线，其中π_1过点P_1且法向量为$\vec{v}_1\times(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)$，$\pi_2$过点$P_2$且法向量为$\vec{v}_2\times(\vec{v}_1\times\vec{v}_2)$。
4. 两条直线的相对位置：两条异面直线l_1,l_2分别经过点P_1,P_2，方向向量分别为$\vec{v}_1,\vec{v}_2$，则其相对位置如下

相对位置	条件
重合	$\overrightarrow{P_1P_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2$两两线性相关
平行	$\vec{v}_1,\vec{v}_2$线性相关且$\overrightarrow{P_1P_2}$与$\vec{v}_1,\vec{v}_2$线性无关
相交	$\vec{v}_1,\vec{v}_2$线性无关且$\overrightarrow{P_1P_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2$线性相关
异面	$\overrightarrow{P_1P_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2$线性无关

第三章

旋转面

1. 轴线l过点M且方向向量为$\vec{v}$，母线为$\Gamma(P)=0$，则Γ绕l旋转所得旋转曲面上的点P满足：

$$\begin{cases}\Gamma(N)=0\\ |\overrightarrow{MP}\times\vec{v}|=|\overrightarrow{MN}\times\vec{v}|\\ \overrightarrow{NP}\cdot\vec{v}=0\end{cases} \tag{16}$$

若轴线l为z轴，母线$\Gamma:\begin{cases}f(y,z)=0\\ x=0\end{cases}$，则$\Gamma$绕$l$旋转所得旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0 \tag{17}$$

2. 直线$\frac{x-a}{\alpha}=\frac{y-b}{\beta}=\frac{z-c}{\gamma},(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\neq 0)$绕$z$轴旋转所得曲面

情况	条件	方程	类型
重合	$a=b=\alpha=\beta=0$	$x=y=0$	直线
平行	$\begin{cases}\alpha=\beta=0\\ a^2+b^2\neq 0\end{cases}$	$x^2+y^2=a^2+b^2$	圆柱面
相交且垂直	$\begin{cases}a\beta=b\alpha\\ \gamma=0\end{cases}$	$z=c$	平面
相交且不垂直	$\begin{cases}a\beta=b\alpha\\ \alpha^2+\beta^2\neq 0\\ \gamma\neq 0\end{cases}$	$x^2+y^2-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma^2}(z+\frac{a\alpha+b\beta}{\alpha^2+\beta^2}\gamma-c)^2=0$	圆锥面
异面且垂直	$\begin{cases}a\beta\neq b\alpha\\ \gamma=0\end{cases}$	$\begin{cases}z=c\\ x^2+y^2\geq\frac{(a\beta-b\alpha)^2}{\alpha^2+\beta^2}\end{cases}$	挖去圆孔的平面
异面且不垂直	$\begin{cases}a\beta\neq b\alpha\\ \gamma\neq 0\end{cases}$	$x^2+y^2-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\gamma^2}(z+\frac{a\alpha+b\beta}{\alpha^2+\beta^2}\gamma-c)^2=\frac{(a\beta-b\alpha)^2}{\alpha^2+\beta^2}$	单叶双曲面

柱面

1. 准线为$\Gamma(P)=0$，母线方向向量为$\vec{v}$，则母线沿准线Γ移动所得柱面上的点P满足

$$\begin{cases}\Gamma(P_0)=O\\ \overrightarrow{P_0P}\parallel\vec{v}\end{cases} \tag{18}$$

   1. 若准线方程为$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$，母线方向向量为$\vec{v}=(\alpha,\beta,\gamma)$，则母线沿准线$\Gamma$移动所得柱面参数方程为

$$\begin{cases}F(x-t\alpha,y-t\beta,z-t\gamma)=0\\ G(x-t\alpha,y-t\beta,z-t\gamma)=0\end{cases},\quad t\text{为参数} \tag{19}$$

   2. 若准线方程为$\Gamma:\begin{cases}x=f(s)\\ y=g(s)\\ z=h(s)\end{cases},\quad s\text{为参数}$，母线方向向量为$\vec{v}=(\alpha,\beta,\gamma)$，则母线沿准线$\Gamma$移动所得柱面参数方程为

$$\begin{cases}x=f(s)+t\alpha\\ y=g(s)+t\beta\\ z=h(s)+t\gamma\end{cases},\quad s,t\text{为参数} \tag{20}$$

2. 柱面方程的特点：三元方程$F(x,y,z)=0$表示母线平行于z轴的柱面方程⇔三元方程$F(x,y,z)=0$不含变量z。

锥面

1. 准线为$\Gamma(P)=0$，顶点为$M(a,b,c)$，则两者构成的锥面上的点P满足

$$\begin{cases}\Gamma(N)=0\\ P,M,N\text{共线}\end{cases} \tag{21}$$

   1. 若准线方程为$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$，顶点为$M(a,b,c)$，则两者构成的锥面参数方程为

$$\begin{cases}F(a+t(x-a),b+t(y-b),c+t(z-c))=0\\ G(a+t(x-a),b+t(y-b),c+t(z-c))=0\end{cases},\quad t\text{为参数} \tag{22}$$

   2. 若准线方程为$\Gamma:\begin{cases}x=f(s)\\ y=g(s)\\ z=h(s)\end{cases},\quad s$为参数，顶点为$M(a,b,c)$，则两者构成的锥面参数方程为

$$\begin{cases}x=a+t(f(s)-a)\\ y=b+t(g(s)-b)\\ z=c+t(h(s)-c)\end{cases},\quad s,t\text{为参数} \tag{23}$$

   3. 圆锥面：轴l的方向向量为$\vec{v}$，半顶角为θ，顶点为P_0，则圆锥面上的点P满足

$$|\cos\langle\overrightarrow{P_0P},\vec{v}\rangle|=|\cos\theta| \tag{24}$$

2. 锥面方程的特点：三元方程$F(x,y,z)=0$表示顶点为原点的锥面方程$\Leftrightarrow$ $F(x,y,z)$为齐次方程。

二次曲面

类型	方程	图像
椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
虚椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	
点	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	
椭圆抛物面	$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\quad p,q>0$	
双曲抛物面	$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\quad p,q>0$	
二次锥面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	
椭圆柱面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	
虚椭圆柱面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	
直线	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	
双曲柱面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	

类型	方程	图像
相交平面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	
抛物柱面	$x^2=2py$	
平行平面	$x^2=a^2,\quad a\neq 0$	
虚平行平面	$x^2=-a^2,\quad a\neq 0$	
重合平面	$x^2=0$	

直纹面

1. 单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$的两族直母线为

$$\begin{cases}\mu(\frac{x}{a}+\frac{z}{c})+\nu(1+\frac{y}{b})=0\\ \mu(1-\frac{y}{b})+\nu(\frac{x}{a}-\frac{z}{c})=0\end{cases}, \quad \mu,\nu\text{为参数且不全为0} \tag{25}$$

   和

$$\begin{cases}\mu(\frac{x}{a}+\frac{z}{c})+\nu(1-\frac{y}{b})=0\\ \mu(1+\frac{y}{b})+\nu(\frac{x}{a}-\frac{z}{c})=0\end{cases}, \quad \mu,\nu\text{为参数且不全为0} \tag{26}$$

2. 双曲抛物面$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z,\quad p,q>0$的两族直母线为

$$\begin{cases}(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}})+2\lambda=0\\ z+\lambda(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}})=0\end{cases}, \quad \lambda\text{为参数} \tag{27}$$

   和

$$\begin{cases}\lambda(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}})+z=0\\ 2\lambda+(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}})=0\end{cases}, \quad \lambda\text{为参数} \tag{28}$$

第四章

1. 仿射坐标变换

    1. 点：平面上两仿射坐标系 $\mathrm{I}\,[O;\vec{d}_1,\vec{d}_2]$和 $\mathrm{II}\,[O';\vec{d}'_1,\vec{d}'_2]$，若

    $$\overrightarrow{OO'}=\begin{pmatrix}\vec{d}_1 & \vec{d}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\tag{29}$$

    且

    $$\begin{pmatrix}\vec{d}'_1 & \vec{d}'_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{d}_1 & \vec{d}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\tag{30}$$

    则对于点P

    $$\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}\vec{d}_1 & \vec{d}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{O'P}=\begin{pmatrix}\vec{d}'_1 & \vec{d}'_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\tag{31}$$

    成立

    $$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\tag{32}$$

    与

    $$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\frac{\begin{pmatrix}a_{22} & -a_{12}\\-a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}\tag{33}$$

    2. 向量：平面上两仿射坐标系 $\mathrm{I}\,[O;\vec{d}_1,\vec{d}_2]$和 $\mathrm{II}\,[O';\vec{d}'_1,\vec{d}'_2]$，若

    $$\begin{pmatrix}\vec{d}'_1 & \vec{d}'_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{d}_1 & \vec{d}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\tag{34}$$

    则对于向量$\vec{v}$

    $$\vec{v}=\begin{pmatrix}\vec{d}_1 & \vec{d}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{d}'_1 & \vec{d}'_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\tag{35}$$

    成立

    $$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\tag{36}$$

    与

    $$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\frac{\begin{pmatrix}a_{22} & -a_{12}\\-a_{21} & a_{11}\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\tag{37}$$

2. 直角坐标变换：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

第五章

二次曲线

1. 平面上一般的二次曲面：

$$Ax^2+2Cxy+By^2+2Dx+2Ey+F=0 \tag{40}$$

记函数

$$\begin{aligned} F(x,y) &= Ax^2+2Cxy+By^2+2Dx+2Ey+F \qquad (41)\\ \varphi(x,y) &= Ax^2+2Cxy+By^2 \qquad (42) \end{aligned}$$

矩阵

$$\begin{aligned} S=\begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix} \quad P=\begin{pmatrix} A & C & D \\ C & B & E \\ D & E & F \end{pmatrix} \qquad (43)\\ \alpha=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \delta=\begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix} \qquad (44) \end{aligned}$$

则成立

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \begin{pmatrix} \alpha^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & \delta \\ \delta^T & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (45)\\ \varphi(x,y) &= \alpha^T S\alpha \qquad (46)\\ P &= \begin{pmatrix} S & \delta \\ \delta^T & F \end{pmatrix} \qquad (47) \end{aligned}$$

2.

原曲线	转轴	移轴
$\alpha=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\alpha=Q\alpha'$	$\alpha=\alpha'+\alpha_0$
$S=\begin{pmatrix} A & C \\ C & B \end{pmatrix}$	Q^TSQ	S
$\delta=\begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}$	$Q^T\delta$	$S\alpha_0+\delta$
F	F	$\begin{pmatrix} \alpha_0^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S & \delta \\ \delta^T & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ 1 \end{pmatrix}$

其中

$$Q=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{48}$$

为矩阵S的标准正交特征矩阵，且$\det(Q)=1$；

$$Q^TSQ=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{49}$$

为矩阵S的特征根矩阵；λ_1与λ_2为矩阵A的特征根，即为特征方程

$$\lambda^2-(A+B)\lambda+(AB-C^2)=0 \tag{50}$$

的两根。

3. 不变量

1. 不变量
    1. $I_1=\mathrm{tr}(S)=\lambda_1+\lambda_2$
    2. $I_2=\det(S)=\lambda_1\lambda_2$
    3. $I_3=\det\begin{pmatrix}S & \delta\\ \delta^T & F\end{pmatrix}$
2. 半不变量
    1. 转轴：$K=\det\begin{pmatrix}A & D\\ D & F\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}B & E\\ E & F\end{pmatrix}$
    2. 移轴：若$I_2=I_3=0$，即

$$\begin{cases}AB=C^2\\ AE=CD\\ BD=CE\end{cases}\tag{51}$$

则$K_1=\det\begin{pmatrix}A & D\\ D & F\end{pmatrix}$，$K_2=\det\begin{pmatrix}B & E\\ E & F\end{pmatrix}$。

4.

型别	识别标志	类别	识别标志	方程
椭圆型	$I_2>0$	椭圆	$I_1I_3<0$	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$
椭圆型	$I_2>0$	虚椭圆	$I_1I_3>0$	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$
椭圆型	$I_2>0$	点	$I_3=0$	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2=0$
双曲型	$I_2<0$	双曲线	$I_3\neq 0$	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$
双曲型	$I_2<0$	相交直线	$I_3=0$	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2=0$
抛物型	$I_2=0$	抛物线	$I_3\neq 0$	$I_1y^2\pm 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}x=0$
抛物型	$I_2=0$	平行直线	$I_3=0$ $K<0$	$I_1y^2+\frac{K}{I_1}=0$
抛物型	$I_2=0$	虚平行直线	$I_3=0$ $K>0$	$I_1y^2+\frac{K}{I_1}=0$
抛物型	$I_2=0$	重合直线	$I_3=0$ $K=0$	$I_1y^2=0$

直线与二次曲线的关系

1. 直线与二次曲线的关系：对于直线

$$l:\begin{cases}x=x_0+\alpha t\\ y=y_0+\beta t\end{cases}\tag{52}$$

与二次曲线

$$\Gamma: Ax^2+2Cxy+By^2+2Dx+2Ey+F=0\tag{53}$$

记

$$\varphi(x,y)=Ax^2+2Cxy+By^2\tag{54}$$
$$F(x,y)=Ax^2+2Cxy+By^2+2Dx+2Ey+F\tag{55}$$
$$F_1(x,y)=Ax+Cy+D\tag{56}$$
$$F_2(x,y)=Cx+By+E\tag{57}$$
$$\Delta=4((\alpha F_1(x_0,y_0)+\beta F_2(x_0,y_0))^2-\varphi(\alpha,\beta)F(x_0,y_0))\tag{58}$$

将l代入Γ得到

$$\varphi(\alpha,\beta)t^2+2(\alpha F_1(x_0,y_0)+\beta F_2(x_0,y_0))t+F(x_0,y_0)=0 \tag{59}$$

1. $\varphi(\alpha,\beta)\neq 0$
    1. $\Delta>0$：l与Γ存在两个不同的交点。
    2. $\Delta=0$：l与Γ存在两个重合的交点。
    3. $\Delta<0$：l与Γ存在两个虚交点。
2. $\varphi(\alpha,\beta)=0$
    1. $\alpha F_1(x_0,y_0)+\beta F_2(x_0,y_0)$：$l$与$\Gamma$存在一个交点。
    2. $\alpha F_1(x_0,y_0)+\beta F_2(x_0,y_0)$
        1. $F(x_0,y_0)\neq 0$：l与Γ不存在交点。
        2. $F(x_0,y_0)=0$：$l\subset\Gamma$

2.

	表达	条件	备注	理解
渐进方向	$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$	$\varphi(\alpha,\beta)=0$		二次项系数为零
对称中心	(x,y)	$\begin{cases}F_1(x,y)=0\\ F_2(x,y)=0\end{cases}$		
直径	$\alpha F_1(x,y)+\beta F_2(x,y)=0$	$\varphi(\alpha,\beta)\neq 0$	共轭于方向$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$	
对称轴	$\alpha F_1(x,y)+\beta F_2(x,y)=0$	$\begin{cases}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-C & -B\\ A & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=0\\ \varphi(\alpha,\beta)\neq 0\end{cases}$		垂直于共轭方向的直径
切线	$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}$	$\alpha F_1(x_0,y_0)+\beta F_2(x_0,y_0)=0$	过曲线上一点(x_0,y_0)	判别式为零
切线	$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}$	$(\alpha F_1(x_0,y_0)+\beta F_2(x_0,y_0))^2=\varphi(\alpha,\beta)F(x_0,y_0)$	过曲线外一点(x_0,y_0)	判别式为零
法线	$\frac{x-x_0}{F_1(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{F_2(x_0,y_0)}$			垂直于切线
渐近线	$\alpha F_1(x,y)+\beta F_2(x,y)=0$	$\varphi(\alpha,\beta)=0$		经过对称中心且沿渐进方向