

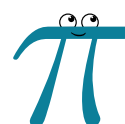
Lectures in Harmonic Analysis-Thomas H. Wolf-Notebook

作者：若水

邮箱：ethanmxzhou@163.com

主页：helloethanzhou.github.io

时间：July 24, 2024



上善若水任方圆

致谢

感谢 勇敢的 自己

目录

| | |
|----------------------|---|
| 第一章 L^1 Fourier 变换 | 1 |
| 第二章 Schwartz 空间 | 5 |

第一章 L^1 Fourier 变换

定义 1.1 (L^1 Fourier 变换 L^1 Fourier transform)

1. 对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 定义其 Fourier 变换为

$$\begin{aligned}\widehat{f}: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi &\longmapsto \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx\end{aligned}$$

其中 $x \cdot \xi$ 表示内积。

2. 更一般的, 对于 \mathbb{R}^n 上的赋有范数

$$\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R}^n)$$

的有限复值测度空间 $M(\mathbb{R}^n)$, 其中 $|\mu|$ 为总变差, 通过 $f \rightarrow \mu, d\mu = f dx$, $L^1(\mathbb{R}^n)$ 包含在 $M(\mathbb{R}^n)$ 中, 此时推广 Fourier 变换为

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu(x)$$



示例 1.1 对于 $a \in \mathbb{R}^n$ 与 $E \subset \mathbb{R}^n$, 定义 Dirac 测度

$$\delta_a(E) = \begin{cases} 1, & a \in E \\ 0, & a \notin E \end{cases}$$

那么

$$\widehat{\delta_a}(\xi) = e^{-2\pi i a \cdot \xi}$$

证明

$$\widehat{\delta_a}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\delta_a(x) = e^{-2\pi i a \cdot \xi}$$

示例 1.2 令 $\Gamma(x) = e^{-\pi|x|^2}$, 则

$$\widehat{\Gamma}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$$

证明 由于

$$\widehat{\Gamma}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} \Gamma(x) dx = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} e^{-\pi|x|^2} dx$$

注意到该积分的变量仅为一维变量, 因此不妨考虑 $n = 1$ 。由 Gauss 积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$, 则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i x \cdot \xi} e^{-\pi|x|^2} dx = e^{-\pi|\xi|^2}$$

L^1 Fourier 变换存在一些基本的估计, 我们罗列如下。

命题 1.1

如果 $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$, 那么 $\widehat{\mu}$ 为有界函数, 且

$$\|\widehat{\mu}\|_{\infty} \leq \|\mu\|_{M(\mathbb{R}^n)} \quad (1.1)$$



证明 对于任意 $\xi \in \mathbb{R}^n$, 由于

$$|\widehat{\mu}(\xi)| = \left| \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu(x) \right| \leq \int |e^{-2\pi i x \cdot \xi}| d|\mu|(x) = \|\mu\|_{M(\mathbb{R}^n)}$$

因此

$$\|\widehat{\mu}\|_{\infty} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\widehat{\mu}(\xi)| \leq \|\mu\|_{M(\mathbb{R}^n)}$$

命题 1.2

如果 $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$, 那么 $\hat{\mu}$ 为连续函数。

证明 固定 $\xi \in \mathbb{R}^n$, 考虑

$$\hat{\mu}(\xi + h) = \int e^{-2\pi i x \cdot (\xi + h)} d\mu(x)$$

由于 $|e^{-2\pi i x \cdot (\xi + h)}| = 1$ 且 $|\mu|(\mathbb{R}^n) < \infty$, 那么由控制收敛定理

$$\lim_{h \rightarrow 0} \hat{\mu}(\xi + h) = \lim_{h \rightarrow 0} \int e^{-2\pi i x \cdot (\xi + h)} d\mu(x) = \int \lim_{h \rightarrow 0} e^{-2\pi i x \cdot (\xi + h)} d\mu(x) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\mu(x) = \hat{\mu}(\xi)$$

现在我们列出 Fourier 变换的一些基本性质, 这些性质并不涉及微分和积分。

命题 1.3 (Fourier 变换的基本性质)

令 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\tau \in \mathbb{R}^n$, 且 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为可逆线性变换。

1. 令 $f_\tau(x) = f(x - \tau)$, 则

$$\widehat{f_\tau}(\xi) = e^{-2\pi i \tau \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$$

2. 令 $e_\tau(x) = e^{2\pi i x \cdot \tau}$, 则

$$\widehat{e_\tau f}(\xi) = \hat{f}(\xi - \tau)$$

3. 令 T^{-t} 表示 T 的逆转置, 则

$$\widehat{f \circ T} = |\det(T)|^{-1} \hat{f} \circ T^{-t}$$

4. 令 $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$, 则

$$\widehat{\tilde{f}} = \overline{\hat{f}}$$

证明

1.

$$\widehat{f_\tau}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} f_\tau(x) dx = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x - \tau) dx = e^{-2\pi i \tau \cdot \xi} \int e^{-2\pi i (x - \tau) \cdot \xi} f(x - \tau) dx = e^{-2\pi i \tau \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$$

2.

$$\widehat{e_\tau f}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} e_\tau(x) f(x) dx = \int e^{-2\pi i x \cdot (\xi + \tau)} f(x) dx = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x - \tau) dx = \hat{f}(\xi - \tau)$$

3.

$$\begin{aligned} \widehat{f \circ T}(\xi) &= \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(Tx) dx \\ &= |\det(T)|^{-1} \int e^{-2\pi i (T^{-1}x) \cdot \xi} f(x) dx \\ &= |\det(T)|^{-1} \int e^{-2\pi i (x \cdot T^{-t}\xi)} f(x) dx \\ &= |\det(T)|^{-1} \hat{f} \circ T^{-t}(\xi) \end{aligned}$$

4.

$$\widehat{\tilde{f}}(\xi) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} \tilde{f}(x) dx = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} \overline{f(-x)} dx = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} \overline{f(x)} dx = \overline{\int e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx} = \overline{\hat{f}(\xi)}$$

进一步考察情况 3。如果 T 为正交变换, 那么 $\widehat{f \circ T} = \hat{f} \circ T$ 。特别的, 如果 f 为径向函数 (radial function), 那么 \hat{f} 亦为径向函数。所谓径向函数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 就是成立如下性质之一的函数:

1. 存在函数 $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 使得对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$, 成立 $f(x) = \varphi(|x|)$ 。

2. 对于任意旋转 $\rho \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$, 成立 $f \circ \rho = f$ 。

如果 T 为膨胀 (dilation), 即存在 $r > 0$, 使得成立 $Tx = rx$, 那么 $f(rx)$ 的 Fourier 变换为 $r^{-n} \hat{f}(r^{-1}\xi)$ 。反之, $r^{-n} f(r^{-1}x)$ 的 Fourier 变换为 $\hat{f}(r\xi)$ 。

Fourier 变换有一个性质：如果 f 在空间中是局域的 (localized)，那么 \hat{f} 是光滑的；如果 f 在空间中是光滑的，那么 \hat{f} 是局域的。下面我们讨论这方面的一些简单表现。

令 $D(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$ 。对于多指标 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ ，定义

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad x^\alpha = \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}$$

α 的长度定义为

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$$

在 $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ 上定义偏序

$$\begin{aligned} \alpha \leq \beta &\iff \alpha_j \leq \beta_j, \forall j \\ \alpha < \beta &\iff \alpha \leq \beta \text{ 且 } \alpha \neq \beta \end{aligned}$$

命题 1.4

对于 $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ ，如果 $\text{supp } \mu$ 为紧集，那么 $\hat{\mu} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ，且

$$D^\alpha(\hat{\mu}) = \widehat{(-2\pi i x)^\alpha \mu} \quad (1.2)$$

进一步，若 $\text{supp } \mu \subset D(0, R)$ ，则

$$\|D^\alpha(\hat{\mu})\|_\infty \leq (2\pi R)^{|\alpha|} \|\mu\| \quad (1.3)$$

证明 注意到 (1.2) \implies (1.3)。事实上，由命题 1.1

$$\|D^\alpha(\hat{\mu})\|_\infty = \|\widehat{(-2\pi i x)^\alpha \mu}\|_\infty \leq \|(-2\pi i x)^\alpha \mu\| \leq (2\pi R)^{|\alpha|} \|\mu\|$$

进一步，对于任意多指标 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ ， $(2\pi i x)^\alpha \mu$ 为有限测度且具有紧支集，因此如果我们能证明当 $|\alpha| = 1$ 时， $\hat{\mu} \in C^1$ 且成立 (1.2)，那么该命题可由此归纳证明。

固定 $1 \leq j \leq n$ 与 $\xi \in \mathbb{R}^n$ ，令 e_j 为第 j 个标准基向量，考虑差商

$$\Delta(h) = \frac{\hat{\mu}(\xi + h e_j) - \hat{\mu}(\xi)}{h} = \int \frac{e^{-2\pi i h x_j} - 1}{h} e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\mu(x)$$

由于

$$\left| \frac{e^{-2\pi i h x_j} - 1}{h} \right| \leq 2\pi |x_j|$$

因此由控制收敛定理

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta(h) = \int \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-2\pi i h x_j} - 1}{h} e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\mu(x) = \int -2\pi i x_j e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\mu(x) \quad (1.4)$$

当 $|\alpha| = 1$ 时，(1.4) \implies (1.2)，且 (1.2) 与命题 1.2 $\implies \hat{\mu} \in C^1$ 。

估计 1.1 表明如果 μ 在空间中是局域的，那么 $\hat{\mu}$ 是光滑的。现在我们考虑反问题， μ 光滑意味着 $\hat{\mu}$ 局域。

我们首先考虑一个引理。令 $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数，满足如下性质：

1. 若 $|x| \leq 1$ ，则 $\phi(x) = 1$ 。
2. 若 $|x| \geq 2$ ，则 $\phi(x) = 0$ 。
3. $0 \leq \phi \leq 1$
4. ϕ 为径向的。

定义 $\phi_k(x) = \phi(x/k)$ 。假设对于任意多指标 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ ，存在不依赖于 k 的常数 C_α ，使得成立 $|D^\alpha(\phi_k)| \leq C_\alpha/k^{|\alpha|}$ 。进一步假设若 $\alpha \neq 0$ ，则 $\text{supp } D^\alpha(\phi) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : k \leq |x| \leq 2k\}$ 。

引理 1.1

对于 $f \in C^N(\mathbb{R}^n)$, 如果对于任意 $0 \leq |\alpha| \leq N$, 成立 $D^\alpha(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 那么令 $f_k = \phi_k f$, 则当 $0 \leq |\alpha| \leq N$ 时, 成立

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|D^\alpha(f_k) - D^\alpha(f)\|_1 = 0$$

证明 注意到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k D^\alpha(f) - D^\alpha(f)\|_1 = 0$$

因此由 Minkowski 不等式

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|D^\alpha(\phi_k f) - \phi_k D^\alpha(f)\|_1 = 0$$

然而, 由 Leibniz 法则

$$D^\alpha(\phi_k f) - \phi_k D^\alpha(f) = \sum_{0 < \beta \leq \alpha} c_\beta D^{\alpha-\beta}(f) D^\beta(\phi_k)$$

其中 c_β 为常数。因此由 Hölder 不等式

$$\|D^\alpha(\phi_k f) - \phi_k D^\alpha(f)\|_1 \leq C \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \|D^\beta(\phi_k)\|_\infty \|D^{\alpha-\beta}(f)\|_{L^1(\{x: |x| \geq k\})} \leq \frac{C}{k} \sum_{0 < \beta \leq \alpha} \|D^{\alpha-\beta}(f)\|_{L^1(\{x: |x| \geq k\})}$$

从而

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|D^\alpha(f_k) - D^\alpha(f)\|_1 = 0$$

我们回到反问题, 证明的关键在于分部积分。

命题 1.5

对于 $f \in C^N(\mathbb{R}^n)$, 如果对于任意 $0 \leq |\alpha| \leq N$, 成立 $D^\alpha(f) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 那么当 $0 \leq |\alpha| \leq N$ 时, 成立

$$\widehat{D^\alpha(f)}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi) \quad (1.5)$$

且存在常数 C , 使得对于任意 $\xi \in \mathbb{R}^n$, 成立

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-N} \quad (1.6)$$

证明 如果 $f \in C^1$ 且具有紧支集, 那么由分部积分

$$\int \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = 2\pi i \xi_j \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx$$

当 $|\alpha| = 1$ 时, 成立 (1.5)。由数学归纳, 只要 $f \in C^N(\mathbb{R}^n)$ 且具有紧支集, 那么对于任意 $0 \leq |\alpha| \leq N$, 成立 (1.5)。

为了去掉紧支集的条件, 由引理 1.1, f_k 成立 (1.5)。由引理 1.1 与命题 1.1, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\widehat{D^\alpha(f_k)} \rightrightarrows D^\alpha(f)$, $(2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f_k}(\xi) \rightrightarrows (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$, 因此成立 (1.5)。

为了证明 (1.6), (1.5) 与命题 1.1 $\implies \xi^\alpha \widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 。另一方面很容易估计

$$C_N^{-1}(1 + |\xi|)^N \leq \sum_{|\alpha| \leq N} |\xi^\alpha| \leq C_N(1 + |\xi|)^N \quad (1.7)$$

因此成立 (1.6)。

第二章 Schwartz 空间

定义 2.1 (Schwartz 空间)

记 Schwartz 空间为 \mathcal{S} , 称 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{S}$, 如果 $f \in C^\infty$ 且成立如下命题之一。

1. 对于任意 α, β , 成立 $x^\alpha D^\beta(f) \in L^\infty$ 。
2. 对于任意 N, β , 成立 $(1 + |x|)^N D^\beta(f) \in L^\infty$ 。
3. 对于任意 α, β , 成立 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha D^\beta(f) = 0$ 。

引入范数

$$\|f\|_{\alpha\beta} = \|x^\alpha D^\beta(f)\|_\infty$$



证明 $1 \implies 2$: 由 (1.7) 可得。

定义 2.2 (收敛)

称序列 $\{f_k\} \subset \mathcal{S}$ 在 \mathcal{S} 中收敛于 $f \in \mathcal{S}$, 并记作 $f_k \rightarrow f$, 如果对于任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, 成立

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_{\alpha\beta} = 0$$



示例 2.1 令 C_0^∞ 表示 C^∞ 中具有紧支集的函数全体, 则 $C_0^\infty \subset \mathcal{S}$ 。

证明 等价于证明 $x^\alpha D^\beta(f)$ 为有界函数。事实上, 如果 $f \in C_0^\infty$, 那么 $D^\beta(f)$ 为具有紧支集的连续函数, 因此为有界函数。而 x^α 在 $D^\beta(f)$ 的支集上为有界的, 进而 $x^\alpha D^\beta(f)$ 为有界函数。

示例 2.2 令 $f(x) = e^{-\pi|x|^2}$, 则 $f \in \mathcal{S}$ 。

 **笔记** 我们先在 \mathbb{R}^1 中感受一下。当 $f(x) = e^{-\pi x^2}$ 时

$$x^n f(x) = \frac{x^n}{e^{\pi x^2}}, \quad x^n f'(x) = \frac{-2\pi x^{n+1}}{e^{\pi x^2}}, \quad x^n f''(x) = \frac{(4\pi^2 x^2 - 2\pi)x^n}{e^{\pi x^2}}, \quad x^n f'''(x) = \frac{(12\pi^2 x - 8\pi^3 x^3)x^n}{e^{\pi x^2}}$$

因此存在多项式 $p_m(x)$, 使得成立

$$x^n f^{(m)}(x) = \frac{p_m(x)}{e^{\pi x^2}}$$

这样 $x^n f^{(m)}(x)$ 就有界了。

下面回到 \mathbb{R}^n 中。

证明 注意到对于多项式 $p(x)$, 任意偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p(x)f(x))$$

均为 $q(x)f(x)$ 的形式, 其中 $q(x)$ 为多项式。由归纳, 对于任意 β , $D^\beta(f)$ 为多项式与 f 的积的形式, 进而对于任意 α, β , $x^\alpha D^\beta(f)$ 为多项式与 f 的积的形式。由 L'Hospital 法则, $x^\alpha D^\beta(f)$ 为有界函数。

示例 2.3

1. $f_N(x) = (1 + |x|^2)^{-N} \notin \mathcal{S}$
2. $g(x) = e^{-\pi|x|^2} \sin(e^{\pi|x|^2}) \notin \mathcal{S}$

证明

1. 不妨在 \mathbb{R}^1 与 $N = 1$ 中考虑, 此时

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

那么

$$x^3 f(x) = \frac{x^3}{1 + x^2}$$

无界。


2. 不妨在 \mathbb{R}^1 与 $N = 1$ 中考虑, 此时

$$g(x) = e^{-\pi x^2} \sin(e^{\pi x^2})$$

那么

$$g'(x) = 2\pi x \cos(e^{\pi x^2}) - 2\pi e^{-\pi x^2} x \sin(e^{\pi x^2})$$

无界。

 **笔记** 通过这些例子, 我们大概能感受到 \mathcal{S} 中的函数长什么样子, 即其任意阶导数的衰减速度比任意阶多项式的增长速度快。

我们现在来讨论 \mathcal{S} 的一些简单性质, 然后是一些稍微不那么简单的性质。

命题 2.1

\mathcal{S} 对于微分与多项式乘法封闭, 且该运算连续。同时 \mathcal{S} 对于乘法封闭。

1. 如果 $f \in \mathcal{S}$, 那么对于任意多指标 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, 成立 $D^\alpha(f) \in \mathcal{S}$ 。
2. 如果 $f \in \mathcal{S}$, 那么对于任意多指标 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, 成立 $x^\alpha f \in \mathcal{S}$ 。
3. 如果 $\{f_k, f\} \subset \mathcal{S}$, 且 $f_k \rightarrow f$, 那么对于任意多指标 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, 成立 $D^\alpha(f_k) \rightarrow D^\alpha(f)$ 。
4. 如果 $\{f_k, f\} \subset \mathcal{S}$, 且 $f_k \rightarrow f$, 那么对于任意多指标 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, 成立 $x^\alpha f_k \rightarrow x^\alpha f$ 。
5. 如果 $f, g \in \mathcal{S}$, 那么 $fg \in \mathcal{S}$ 。



证明

1. 注意到 $x^\alpha D^\beta(D^\gamma(f)) = x^\alpha D^{\beta+\gamma}(f)$, 则 $D^\gamma(f) \in \mathcal{S}$ 。
2. 由 Leibniz 法则

$$x^\alpha D^\beta(x^\gamma f) = \sum_{0 \leq \delta \leq \beta} c_\delta x^\alpha D^\delta(x^\gamma) D^{\beta-\delta}(f)$$

因此 $x^\alpha D^\beta(x^\gamma f)$ 为 x 的单项式与 f 的导数的线性组合, 因此为有界的, 进而 $x^\gamma f \in \mathcal{S}$ 。

3. 由于 $f_n \rightarrow f$, 那么

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^\alpha D^{\beta+\gamma}(f_k - f)\|_\infty = 0$$

等价于

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^\alpha D^\beta(D^\gamma(f_k) - D^\gamma(f))\|_\infty = 0$$

因此 $D^\gamma(f_k) \rightarrow D^\gamma(f)$ 。

4. 由 Leibniz 法则与 Minkowski 不等式

$$\begin{aligned} \|x^\alpha D^\beta(x^\gamma f_k - x^\gamma f)\|_\infty &= \left\| \sum_{0 \leq \delta \leq \beta} c_\delta x^\alpha D^\delta(x^\gamma) D^{\beta-\delta}(f_k - f) \right\|_\infty \\ &= \left\| \sum_{\delta} c'_\delta x^{\alpha+\gamma_\delta} D^{\beta_\delta}(f_k - f) \right\|_\infty \\ &\leq \sum_{\delta} \|c'_\delta x^{\alpha+\gamma_\delta} D^{\beta_\delta}(f_k - f)\|_\infty \end{aligned}$$

而 $f_k \rightarrow f$, 则 $x^\gamma f_k \rightarrow x^\gamma f$ 。

5. 显然 \mathcal{S} 对于乘法封闭。