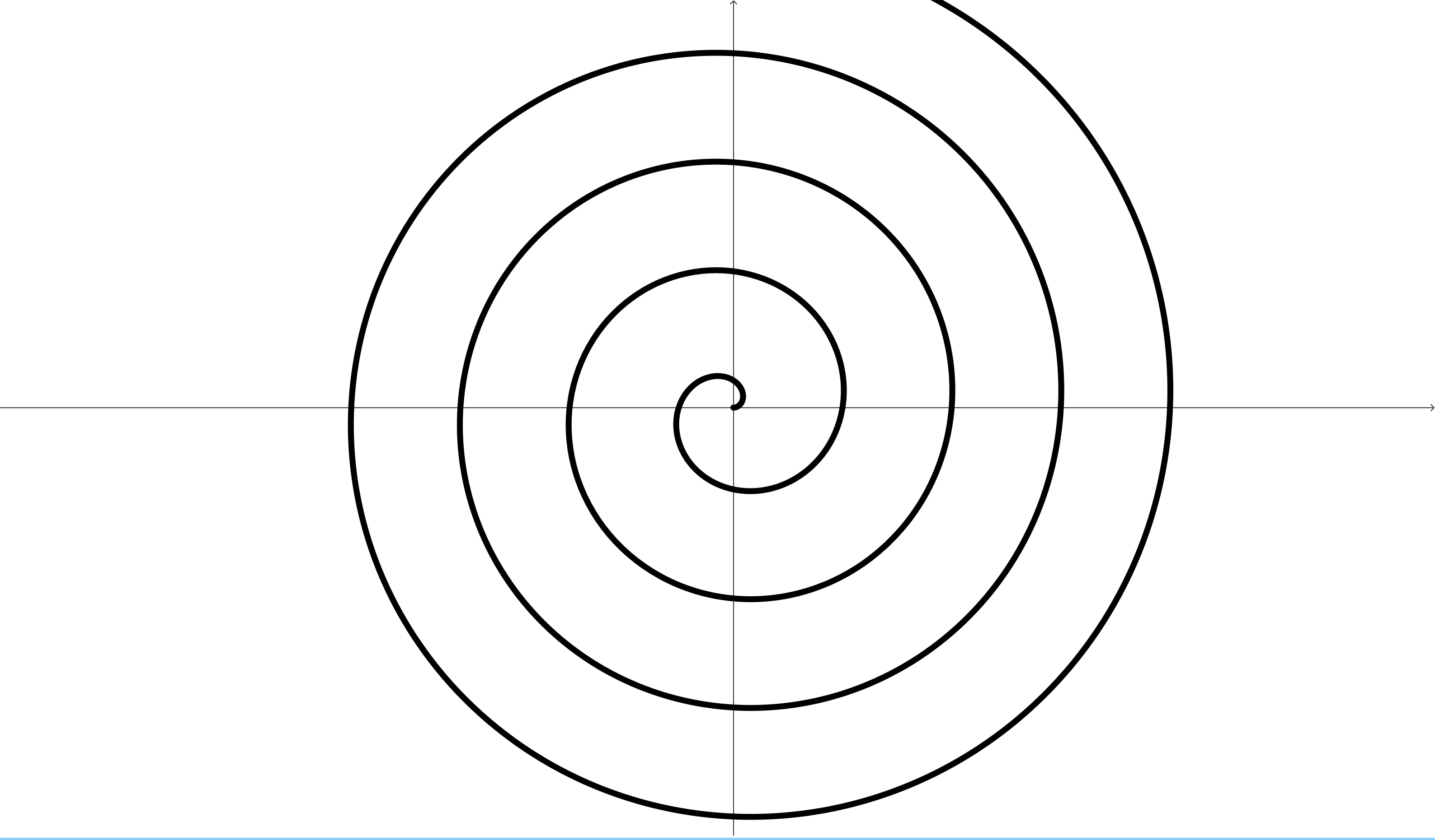

Lectures in Harmonic Analysis-Thomas H. Wolf-Notebook

作者：若水
邮箱：ethanmxzhou@163.com
主页：helloethanzhou.github.io
时间：July 30, 2024

上善若水任方圆

致谢

感谢 **勇敢的** 自己

目录

第一章 L^1 Fourier 变换

定义 1.1 (L^1 Fourier 变换 L^1 Fourier transform)

1. 对于 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，定义其 Fourier 变换为

$$\begin{aligned} \widehat{f}: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \xi &\longmapsto \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

其中 $x \cdot \xi$ 表示内积。

2. 更一般的，对于 $\mathbb{R}^n$ 上的赋有范数

$$\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R}^n)$$

的有限复值测度空间 $M(\mathbb{R}^n)$，其中 $|\mu|$ 为总变差，通过 $f \to \mu, \mathrm{d}\mu = f\mathrm{d}x$，$L^1(\mathbb{R}^n)$ 包含在 $M(\mathbb{R}^n)$ 中，此时推广 Fourier 变换为

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}\mu(x)$$

♣

示例 1.1 对于 $a \in \mathbb{R}^n$ 与 $E \subset \mathbb{R}^n$，定义 Dirac 测度

$$\delta_a(E) = \begin{cases} 1, & a \in E \\ 0, & a \notin E \end{cases}$$

那么

$$\widehat{\delta_a}(\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi i a\cdot\xi}$$

证明

$$\widehat{\delta_a}(\xi) = \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}\delta_a(x) = \mathrm{e}^{-2\pi i a\cdot\xi}$$

示例 1.2 令 $\Gamma(x) = \mathrm{e}^{-\pi|x|^2}$，则

$$\widehat{\Gamma}(\xi) = \mathrm{e}^{-\pi|\xi|^2}$$

证明 由于

$$\widehat{\Gamma}(\xi) = \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\Gamma(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\pi|x|^2}\mathrm{d}x$$

注意到该积分的变量仅为一维变量，因此不妨考虑 $n = 1$。由 Gauss 积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\pi x^2}\mathrm{d}x = 1$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{e}^{-\pi|x|^2}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\pi|\xi|^2}$$

L^1 Fourier 变换存在一些基本的估计，我们罗列如下。

命题 1.1

如果 $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$，那么 $\widehat{\mu}$ 为有界函数，且

$$\|\widehat{\mu}\|_\infty \le \|\mu\|_{M(\mathbb{R}^n)} \tag{1.1}$$

♠

证明 对于任意 $\xi \in \mathbb{R}^n$，由于

$$|\widehat{\mu}(\xi)| = \left|\int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}\mathrm{d}\mu(x)\right| \le \int |\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi}|\mathrm{d}|\mu|(x) = \|\mu\|_{M(\mathbb{R}^n)}$$

因此

$$\|\widehat{\mu}\|_\infty = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\widehat{\mu}(\xi)| \le \|\mu\|_{M(\mathbb{R}^n)}$$

命题 1.2

如果 $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$，那么 $\widehat{\mu}$ 为连续函数。

证明 固定 $\xi \in \mathbb{R}^n$，考虑

$$\widehat{\mu}(\xi + h) = \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot(\xi+h)} \mathrm{d}\mu(x)$$

由于 $|\mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot(\xi+h)}| = 1$ 且 $|\mu|(\mathbb{R}^n) < \infty$，那么由控制收敛定理

$$\lim_{h\to 0} \widehat{\mu}(\xi + h) = \lim_{h\to 0} \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot(\xi+h)} \mathrm{d}\mu(x) = \int \lim_{h\to 0} \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot(\xi+h)} \mathrm{d}\mu(x) = \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} \mathrm{d}\mu(x) = \widehat{\mu}(\xi)$$

现在我们列出 Fourier 变换的一些基本性质，这些性质并不涉及微分和积分。

命题 1.3 (Fourier 变换的基本性质)

令 $f \in L^1(\mathbb{R}^n), \tau \in \mathbb{R}^n$，且 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为可逆线性变换。

1. 令 $f_\tau(x) = f(x - \tau)$，则
$$\widehat{f_\tau}(\xi) = \mathrm{e}^{-2\pi i \tau\cdot\xi} \widehat{f}(\xi)$$
2. 令 $e_\tau(x) = \mathrm{e}^{2\pi i x\cdot\tau}$，则
$$\widehat{e_\tau f}(\xi) = \widehat{f}(\xi - \tau)$$
3. 令 T^{-t} 表示 T 的逆转置，则
$$\widehat{f \circ T} = |\det(T)|^{-1} \widehat{f} \circ T^{-t}$$
4. 令 $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$，则
$$\widehat{\tilde{f}} = \overline{\widehat{f}}$$

证明

1. $$\widehat{f_\tau}(\xi) = \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} f_\tau(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x-\tau)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2\pi i \tau} \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2\pi i \tau\cdot\xi} \widehat{f}(\xi)$$
2. $$\widehat{e_\tau f}(\xi) = \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} e_\tau(x) f(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot(\xi+\tau)} f(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x-\tau)\mathrm{d}x = \widehat{f}(\xi - \tau)$$
3. $$\begin{aligned} \widehat{f \circ T}(\xi) &= \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} f(Tx)\mathrm{d}x \\ &= |\det(T)|^{-1} \int \mathrm{e}^{-2\pi i (T^{-1}x\cdot\xi)} f(x)\mathrm{d}x \\ &= |\det(T)|^{-1} \int \mathrm{e}^{-2\pi i (x\cdot T^{-t}\xi)} f(x)\mathrm{d}x \\ &= |\det(T)|^{-1} \widehat{f} \circ T^{-t}(\xi) \end{aligned}$$
4. $$\widehat{\tilde{f}}(\xi) = \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} \tilde{f}(x)\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} \overline{f(-x)}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} \overline{f(x)}\mathrm{d}x = \overline{\int \mathrm{e}^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\mathrm{d}x} = \overline{\widehat{f}(\xi)}$$

进一步考察情况 3。如果 T 为正交变换，那么 $\widehat{f \circ T} = \widehat{f} \circ T$。特别的，如果 f 为径向函数 (radial function)，那么 $\widehat{f}$ 亦为径向函数。所谓径向函数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，就是成立如下性质之一的函数：

1. 存在函数 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$，使得对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，成立 $f(x) = \varphi(|x|)$。
2. 对于任意旋转 $\rho \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$，成立 $f \circ \rho = f$。

如果 T 为膨胀 (dilation)，即存在 $r > 0$，使得成立 $Tx = rx$，那么 $f(rx)$ 的 Fourier 变换为 $r^{-n}\widehat{f}(r^{-1}\xi)$。反之，$r^{-n}f(r^{-1}x)$ 的 Fourier 变换为 $\widehat{f}(r\xi)$。

Fourier 变换有一个性质：如果 f 在空间中是局域的 (localized)，那么 $\widehat{f}$ 是光滑的；如果 f 在空间中是光滑的，那么 $\widehat{f}$ 是局域的。下面我们讨论这方面的一些简单表现。

令 $D(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^n:|x-x_0|<r\}$。对于多指标 $\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，定义

$$D^\alpha=\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}},\qquad x^\alpha=\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}$$

α 的长度定义为

$$|\alpha|=\sum_{j=1}^n\alpha_j$$

在 $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 上定义偏序

$$\alpha\leq\beta\iff\alpha_j\leq\beta_j,\forall j$$
$$\alpha<\beta\iff\alpha\leq\beta\text{且}\alpha\neq\beta$$

命题 1.4

对于 $\mu\in M(\mathbb{R}^n)$，如果 supp μ 为紧集，那么 $\widehat{\mu}\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$，且

$$D^\alpha(\widehat{\mu})=\widehat{(-2\pi ix)^\alpha\mu}\tag{1.2}$$

进一步，若 supp $\mu\subset D(0,R)$，则

$$\|D^\alpha(\widehat{\mu})\|_\infty\leq(2\pi R)^{|\alpha|}\|\mu\|\tag{1.3}$$

证明 注意到 (1.2) $\implies$ (1.3)。事实上，由命题1.1

$$\|D^\alpha(\widehat{\mu})\|_\infty=\|\widehat{(-2\pi ix)^\alpha\mu}\|_\infty\leq\|(-2\pi ix)^\alpha\mu\|\leq(2\pi R)^{|\alpha|}\|\mu\|$$

进一步，对于任意多指标 $\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，$(2\pi ix)^\alpha\mu$ 为有限测度且具有紧支集，因此如果我们能证明当 $|\alpha|=1$ 时，$\widehat{\mu}\in C^1$ 且成立 (1.2)，那么该命题可由此归纳证明。

固定 $1\leq j\leq n$ 与 $\xi\in\mathbb{R}^n$，令 e_j 为第 j 个标准基向量，考虑差商

$$\Delta(h)=\frac{\widehat{\mu}(\xi+he_j)-\widehat{\mu}(\xi)}{h}=\int\frac{\mathrm{e}^{-2\pi ihx_j}-1}{h}\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot x}\mathrm{d}\mu(x)$$

由于

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-2\pi ihx_j}-1}{h}\right|\leq 2\pi|x_j|$$

因此由控制收敛定理

$$\lim_{h\to 0}\Delta(h)=\int\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-2\pi ihx_j}-1}{h}\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot x}\mathrm{d}\mu(x)=\int -2\pi ix_j\mathrm{e}^{-2\pi i\xi\cdot x}\mathrm{d}\mu(x)\tag{1.4}$$

当 $|\alpha|=1$ 时，(1.4) $\implies$ (1.2)，且 (1.2) 与命题1.2 $\implies$ $\widehat{\mu}\in C^1$。

估计 1.1 表明如果 μ 在空间中是局域的，那么 $\widehat{\mu}$ 是光滑的。现在我们考虑反问题，μ 光滑意味着 $\widehat{\mu}$ 局域。

我们首先考虑一个引理。令 $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为 C^∞ 函数，满足如下性质：

1. 若 $|x|\leq 1$，则 $\phi(x)=1$。
2. 若 $|x|\geq 2$，则 $\phi(x)=0$。
3. $0\leq\phi\leq 1$
4. ϕ 为径向的。

定义 $\phi_k(x)=\phi(x/k)$。假设对于任意多指标 $\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，存在不依赖于 k 的常数 C_α，使得成立 $|D^\alpha(\phi_k)|\leq C_\alpha/k^{|\alpha|}$。进一步假设若 $\alpha\neq 0$，则 supp $D^\alpha(\phi)\subset\{x\in\mathbb{R}^n:k\leq|x|\leq 2k\}$。

引理 1.1

对于 $f\in C^N(\mathbb{R}^n)$，如果对于任意 $0\le|\alpha|\le N$，成立 $D^\alpha(f)\in L^1(\mathbb{R}^n)$，那么令 $f_k=\phi_k f$，则当 $0\le|\alpha|\le N$ 时，成立

$$\lim_{k\to\infty}\|D^\alpha(f_k)-D^\alpha(f)\|_1=0$$

证明 注意到

$$\lim_{k\to\infty}\|\phi_k D^\alpha(f)-D^\alpha(f)\|_1=0$$

因此由 Minkowski 不等式

$$\lim_{k\to\infty}\|D^\alpha(\phi_k f)-\phi_k D^\alpha(f)\|_1=0$$

然而，由 Leibniz 法则

$$D^\alpha(\phi_k f)-\phi_k D^\alpha(f)=\sum_{0<\beta\le\alpha}c_\beta D^{\alpha-\beta}(f)D^\beta(\phi_k)$$

其中 c_β 为常数。因此由 Hölder 不等式

$$\|D^\alpha(\phi_k f)-\phi_k D^\alpha(f)\|_1\le C\sum_{0<\beta\le\alpha}\|D^\beta(\phi_k)\|_\infty\|D^{\alpha-\beta}(f)\|_{L^1(\{x:|x|\ge k\})}\le\frac{C}{k}\sum_{0<\beta\le\alpha}\|D^{\alpha-\beta}(f)\|_{L^1(\{x:|x|\ge k\})}$$

从而

$$\lim_{k\to\infty}\|D^\alpha(f_k)-D^\alpha(f)\|_1=0$$

我们回到反问题，证明的关键在于分部积分。

命题 1.5

对于 $f\in C^N$，如果对于任意 $0\le|\alpha|\le N$，成立 $D^\alpha(f)\in L^1$，那么当 $0\le|\alpha|\le N$ 时，成立

$$\widehat{D^\alpha(f)}(\xi)=(2\pi i\xi)^\alpha\widehat{f}(\xi)\tag{1.5}$$

且存在常数 C，使得对于任意 $\xi\in\mathbb{R}^n$，成立

$$|\widehat{f}(\xi)|\le C(1+|\xi|)^{-N}\tag{1.6}$$

证明 如果 $f\in C^1$ 且具有紧支集，那么由分部积分

$$\int\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}\mathrm{e}^{-2\pi ix\cdot\xi}\mathrm{d}x=2\pi i\xi_j\int\mathrm{e}^{-2\pi ix\cdot\xi}f(x)\mathrm{d}x$$

当 $|\alpha|=1$ 时，成立 (1.5)。由数学归纳，只要 $f\in C^N(\mathbb{R}^n)$ 且具有紧支集，那么对于任意 $0\le|\alpha|\le N$，成立 (1.5)。

为了去掉紧支集的条件，由引理1.1，f_k 成立 (1.5)。由引理1.1与命题1.1，当 $k\to\infty$ 时，$\widehat{D^\alpha(f_k)}\rightrightarrows D^\alpha(f)$，$(2\pi i\xi)^\alpha\widehat{f}_k(\xi)\rightrightarrows(2\pi i\xi)^\alpha\widehat{f}(\xi)$，因此成立 (1.5)。

为了证明 (1.6)，(1.5) 与命题1.1 $\Longrightarrow$ $\xi^\alpha\widehat{f}\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$。另一方面很容易估计

$$C_N^{-1}(1+|\xi|)^N\le\sum_{|\alpha|\le N}|\xi^\alpha|\le C_N(1+|\xi|)^N\tag{1.7}$$

因此成立 (1.6)。

第二章 Schwartz 空间

定义 2.1 (Schwartz 空间)

记 Schwartz 空间为 $\mathcal{S}$，称 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}\in\mathcal{S}$，如果 $f\in C^\infty$ 且成立如下命题之一。

1. 对于任意 α,β，成立 $x^\alpha D^\beta(f)\in L^\infty$。
2. 对于任意 N,β，成立 $(1+|x|)^N D^\beta(f)\in L^\infty$。
3. 对于任意 α,β，成立 $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha D^\beta(f)=0$。

引入范数

$$\|f\|_{\alpha\beta}=\|x^\alpha D^\beta(f)\|_\infty$$

♣

证明 1 $\iff$ 3：由 (1.7) 可得。

1 $\iff$ 4：平凡！

定义 2.2 (收敛)

称序列 $\{f_k\}\subset\mathcal{S}$ 在 $\mathcal{S}$ 中收敛于 $f\in\mathcal{S}$，并记作 $f_k\to f$，如果对于任意 α,β，成立

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{\alpha\beta}=0$$

♣

示例 2.1 令 C_0^∞ 表示 C^∞ 中具有紧支集的函数全体，则 $C_0^\infty\subset\mathcal{S}$。

证明 等价于证明 $x^\alpha D^\beta(f)$ 为有界函数。事实上，如果 $f\in C_0^\infty$，那么 $D^\beta(f)$ 为具有紧支集的连续函数，因此为有界函数。而 x^α 在 $D^\beta(f)$ 的支集上为有界的，进而 $x^\alpha D^\beta(f)$ 为有界函数。

示例 2.2 令 $f(x)=\mathrm{e}^{-\pi|x|^2}$，则 $f\in\mathcal{S}$。

笔记 我们先在 $\mathbb{R}^1$ 中感受一下。当 $f(x)=\mathrm{e}^{-\pi x^2}$ 时

$$x^n f(x)=\frac{x^n}{\mathrm{e}^{\pi x^2}},\qquad x^n f'(x)=\frac{-2\pi x^{n+1}}{\mathrm{e}^{\pi x^2}},\qquad x^n f''(x)=\frac{(4\pi^2x^2-2\pi)x^n}{\mathrm{e}^{\pi x^2}},\qquad x^n f'''(x)=\frac{(12\pi^2x-8\pi^3x^3)x^n}{\mathrm{e}^{\pi x^2}}$$

因此存在多项式 $p_m(x)$，使得成立

$$x^n f^{(m)}(x)=\frac{p_m(x)}{\mathrm{e}^{\pi x^2}}$$

这样 $x^n f^{(m)}(x)$ 就有界了。

下面回到 $\mathbb{R}^n$ 中。

证明 注意到对于多项式 $p(x)$，任意偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(p(x)f(x))$$

均为 $q(x)f(x)$ 的形式，其中 $q(x)$ 为多项式。由归纳，对于任意 β，$D^\beta(f)$ 为多项式与 f 的积的形式，进而对于任意 α,β，$x^\alpha D^\beta(f)$ 为多项式与 f 的积的形式。由 L'Hospital 法则，$x^\alpha D^\beta(f)$ 为有界函数。

示例 2.3

1. $f_N(x)=(1+|x|^2)^{-N}\notin\mathcal{S}$
2. $g(x)=\mathrm{e}^{-\pi|x|^2}\sin\left(\mathrm{e}^{\pi|x|^2}\right)\notin\mathcal{S}$

证明

1. 不妨在 $\mathbb{R}^1$ 与 $N=1$ 中考虑，此时

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

那么

$$x^3 f(x)=\frac{x^3}{1+x^2}$$

无界。

2. 不妨在 $\mathbb{R}^1$ 与 $N=1$ 中考虑，此时

$$g(x)=\mathrm{e}^{-\pi x^2}\sin\left(\mathrm{e}^{\pi x^2}\right)$$

那么

$$g'(x)=2\pi x\cos\left(e^{\pi x^2}\right)-2\pi e^{-\pi x^2}x\sin\left(e^{\pi x^2}\right)$$

无界。

笔记 通过这些例子，我们大概能感受到 $\mathcal{S}$ 中的函数长什么样子，即其任意阶导数的衰减速度比任意阶多项式的增长速度快。

我们现在来讨论 $\mathcal{S}$ 的一些简单性质，然后是一些稍微不那么简单的性质。

命题 2.1

$\mathcal{S}$ 对于微分与多项式乘法封闭，且该运算连续。同时 $\mathcal{S}$ 对于乘法封闭。

1. 如果 $f\in\mathcal{S}$，那么对于任意多指标 $\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，成立 $D^\alpha(f)\in\mathcal{S}$。
2. 如果 $f\in\mathcal{S}$，那么对于任意多指标 $\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，成立 $x^\alpha f\in\mathcal{S}$。
3. 如果 $\{f_k,f\}\subset\mathcal{S}$，且 $f_k\to f$，那么对于任意多指标 $\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，成立 $D^\alpha(f_k)\to D^\alpha(f)$。
4. 如果 $\{f_k,f\}\subset\mathcal{S}$，且 $f_k\to f$，那么对于任意多指标 $\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，成立 $x^\alpha f_k\to x^\alpha f$。
5. 如果 $f,g\in\mathcal{S}$，那么 $fg\in\mathcal{S}$。

♠

证明

1. 注意到 $x^\alpha D^\beta(D^\gamma(f))=x^\alpha D^{\beta+\gamma}(f)$，则 $D^\gamma(f)\in\mathcal{S}$。
2. 由 Leibniz 法则

$$x^\alpha D^\beta(x^\gamma f)=\sum_{0\leq\delta\leq\beta}c_\delta x^\alpha D^\delta(x^\gamma)D^{\beta-\delta}(f)$$

因此 $x^\alpha D^\beta(x^\gamma f)$ 为 x 的单项式与 f 的导数的线性组合，因此为有界的，进而 $x^\gamma f\in\mathcal{S}$。

3. 由于 $f_n\to f$，那么

$$\lim_{k\to\infty}\|x^\alpha D^{\beta+\gamma}(f_k-f)\|_\infty=0$$

等价于

$$\lim_{k\to\infty}\|x^\alpha D^\beta(D^\gamma(f_k)-D^\gamma(f))\|_\infty=0$$

因此 $D^\gamma(f_k)\to D^\gamma(f)$。

4. 由 Leibniz 法则与 Minkowski 不等式

$$\begin{aligned}\|x^\alpha D^\beta(x^\gamma f_k-x^\gamma f)\|_\infty&=\left\|\sum_{0\leq\delta\leq\beta}c_\delta x^\alpha D^\delta(x^\gamma)D^{\beta-\delta}(f_k-f)\right\|_\infty\\&=\left\|\sum_\delta c'_\delta x^{\alpha+\gamma_\delta}D^{\beta_\delta}(f_k-f)\right\|_\infty\\&\leq\sum_\delta\left\|c'_\delta x^{\alpha+\gamma_\delta}D^{\beta_\delta}(f_k-f)\right\|_\infty\end{aligned}$$

而 $f_k\to f$，则 $x^\gamma f_k\to x^\gamma f$。

5. 显然 $\mathcal{S}$ 对于乘法封闭。

命题 2.2

C_0^∞ 在 $\mathcal{S}$ 中稠密；换言之，对于任意 $f\in\mathcal{S}$，存在 $\{f_k\}\subset C_0^\infty$，使得成立 $f_k\to f$。

♠

证明 这和引理1.1的证明是类似的。令 $f_k=\phi_k f$，显然 $f_k\in C_0^\infty$。若要证明 $f_k\to f$，即要证明

$$\|x^\alpha D^\beta(\phi_k f)-x^\alpha D^\beta(f)\|_\infty\to 0$$

由 Minkowski 不等式

$$\|x^\alpha D^\beta(\phi_k f)-x^\alpha D^\beta(f)\|_\infty\le\|\phi_k x^\alpha D^\beta(f)-x^\alpha D^\beta(f)\|_\infty+\|x^\alpha(D^\beta(\phi_k f)-\phi_k D^\beta(f))\|_\infty$$

对于第一项

$$\lim_{k\to\infty}\phi_k x^\alpha D^\beta(f)-x^\alpha D^\beta(f)=0$$

对于第二项，由 Leibniz 法则

$$\|x^\alpha(D^\beta(\phi_k f)-\phi_k D^\beta(f))\|_\infty\le C\sum_{\gamma<\beta}\|x^\alpha D^\gamma(f)\|_\infty\|D^{\beta-\gamma}(\phi_k)\|_\infty$$

由于 $f\in\mathcal{S}$ 且 $\|D^{\beta-\gamma}(\phi_k)\|_\infty\le C/k$，则第二项 $\infty 0$。

我们可以加强命题2.2。定义 C_0^∞ 张量函数

$$\begin{aligned}f:\mathbb{R}^n&\longrightarrow\mathbb{C}\\x&\longmapsto\prod_j\phi_j(x_j)\end{aligned}$$

其中 $\phi_j\in C_0^\infty(\mathbb{R})$。

命题 2.3

C_0^∞ 的张量函数的线性组合在 $\mathcal{S}$ 中稠密。

证明 由命题2.2，可说明如果 $f\in C_0^\infty$，那么存在序列 $\{g_k\}$，使得成立

1. 每个 g_k 为 C_0^∞ 张量函数。
2. g_k 的支集包含在一个不依赖于 k 的固定的紧集 E 中。
3. 对于任意 α，$D^\alpha(g_k)\rightrightarrows D^\alpha(f)$。

为了构造 $\{g_k\}$，我们使用一个关于 Fourier 级数的基本事实：对于以 2π 为周期的 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数 f，其可展开为

$$f(\theta)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}a_\nu\mathrm{e}^{i\nu\cdot\theta}$$

其中 $\{a_\nu\}$ 成立

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n}(1+|\nu|)^N|a_\nu|<\infty,\qquad\forall N\in\mathbb{N}^*$$

考虑 Fourier 级数的部分和，我们因此得到一个三角函数多项式序列 p_k，使得对于任意 α，$D^\alpha(p_k)\rightrightarrows D^\alpha(f)$。

在构造 $\{g_k\}$ 时，我们可以不妨假设 $x\in\operatorname{supp}f$ 意味着 $|x_j|\le 1$，例如我们可以使用 $f(Rx)$ 来替换 $f(x)$。令 C_0^∞ 为 C_0^∞ 单变量函数，其中在 $[-1,1]$ 上为 1，在 $[-2,2]^c$ 上为 0。令 $\tilde f$ 为在 $[-\pi,\pi]^n$ 上等于 f 的 2π 周期的函数。然后我们有一个三角函数多项式序列 p_k，使得对于任意 α，$D^\alpha(p_k)\rightrightarrows D^\alpha(\tilde f)$。令 $g_k(x)=\prod_j\phi(x_j)p_k(x)$，则 g_k 满足 1 和 2。由引理1.1与命题2.2，3 成立。

在本章的最后，我们证明可以修改 $\mathcal{S}$ 的定义为：称 $f\in\mathcal{S}$，如果对于任意 α,β，成立 $x^\alpha D^\beta(f)\in L^1$，此时依 L^∞ 收敛 $\iff$ 依 L^1 收敛。证明的必要性比较容易，为证明充分性，我们引入新的记号，并不加证明的引入一个引理。

如果 $f:\mathbb{R}^n\to\infty$ 为 C^k 函数且若 $x\in\mathbb{R}^n$，则定义

$$\Delta_k^f(x)=\sum_{|\alpha|=k}|D^\alpha(f(x))|$$

引入记号 $D(x_0,r)=\{x:|x-x_0|\le r\}$。同时记 $x\lesssim y\iff\exists C,x\le Cy$。

引理 2.1

假设 f 为 C^∞ 函数，则对于任意 x，成立

$$|f(x)| \lesssim \sum_{0\le j\le n+1} \|\Delta_j^f\|_{L^1(D(x,1))}$$

定理 2.1

称 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}\in\mathcal{S}$，如果 $f\in C^\infty$ 且成立如下命题之一。

1. 对于任意 α,β，成立 $x^\alpha D^\beta(f)\in L^\infty$。
2. 对于任意 α,β，成立 $x^\alpha D^\beta(f)\in L^1$。

证明 $1 \implies 2$：假设 f 对于任意 α,β，成立 $x^\alpha D^\beta(f)\in L^\infty$。令 $N=|\alpha|+n+1$，则由 $(1+|x|)^{-n-1}$ 的可积性，结合 Hölder 不等式

$$\|x^\alpha D^\beta(f)\|_1 \le \|(1+|x|)^N D^\beta(f)\|_\infty \|x^\alpha(1+|x|)^{-N}\|_1 < \infty$$

$2 \implies 1$：假设 f 对于任意 α,β，成立 $x^\alpha D^\beta(f)\in L^1$。由引理2.1

$$|D^\beta(f(x))| \lesssim \sum_{0\le j\le|\beta|+n+1} \int_{D(x,1)} |D^\gamma(f(y))|\mathrm{d}y$$

因此

$$\begin{aligned}(1+|x|)^N|D^\beta(f(x))| &\lesssim (1+|x|)^N \sum_{0\le j\le|\beta|+n+1} \int_{D(x,1)} |D^\gamma(f(y))|\mathrm{d}y \\ &\lesssim \sum_{0\le j\le|\beta|+n+1} \int_{D(x,1)} (1+|y|)^N|D^\gamma(f(y))|\mathrm{d}y\end{aligned}$$

进而

$$\|(1+|x|)^N D^\beta(f)\|_\infty \lesssim \sum_{0\le j\le|\beta|+n+1} \|(1+|x|)^N D^\gamma(f)\|_1$$

下面我们给出 Fourier 变换实际上是 $\mathcal{S}$ 上的连续变换。

定理 2.2

若 $f\in\mathcal{S}$，则 $\widehat{f}\in\mathcal{S}$。进一步，映射 $f\mapsto\widehat{f}$ 为 $\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ 的光滑映射。

证明 我们仅给出第一个证明。

如果 $f\in\mathcal{S}$，那么由定理2.1，$f\in L^1$，进而 $\widehat{f}\in L^\infty$。因此，若 $f\in\mathcal{S}$，则 $\widehat{D^\alpha(x^\beta f)}\in L^\infty$。然而，由命题1.4与1.5

$$\widehat{D^\alpha(x^\beta f)}(\xi) = (2\pi i)^{|\alpha|}(-2\pi i)^{-|\beta|}\xi^\alpha D^\beta \widehat{f}(\xi)$$

因此 $\xi^\alpha D^\beta(f)\in L^\infty$，这说明 $\widehat{f}\in S$。

第三章 Fourier 逆变换与 Plancherel 定理

定义 3.1 (卷积 convolution)

定义 ϕ 与 f 的卷积为

$$\phi * f(x) = \int \phi(y) f(x-y) \mathrm{d}y \tag{3.1}$$

♣

卷积有一些良好的性质，我们一并回顾，但并不给出证明。

命题 3.1

1. 如果 $\phi \in L^1$ 且 $f \in L^p$，其中 $1 \leq p \leq \infty$，那么积分 (3.1) 几乎处处绝对收敛，且
$$\|\phi * f\|_p \leq \|\phi\|_1 \|f\|_p$$
2. 如果 ϕ 为具有紧支集的连续函数，且 $f \in L^1_{\text{loc}}$，那么积分 (3.1) 处处绝对收敛，且 $\phi * f$ 为连续函数。
3. 如果 $\phi \in L^p$，且 $f \in L^q$，其中 $1/p + 1/q = 1$，那么积分 (3.1) 处处绝对收敛，且 $\phi * f$ 为连续函数，同时
$$\|\phi * f\|_\infty \leq \|\phi\|_p \|f\|_q$$

♠

除此之外，我们还应注意到卷积是可交换的：$f * \phi = \phi * f$。同时注意到

$$\text{supp}\,(\phi * f) \subset \text{supp}\,(\phi) + \text{supp}\,(f)$$

其中 $E + F = \{x + y : x \in E, y \in F\}$ 为集合的加法。

更多时候 ϕ 是固定的，并且为性质非常好的函数。卷积更多作为一种算子

$$f \longmapsto \phi * f$$

引理 3.1

如果 $\phi \in C_0^\infty$ 且 $f \in L^1_{\text{loc}}$，那么 $\phi * f \in C^\infty$ 且

$$D^\alpha(\phi * f) = (D^\alpha(\phi)) * f$$

♡