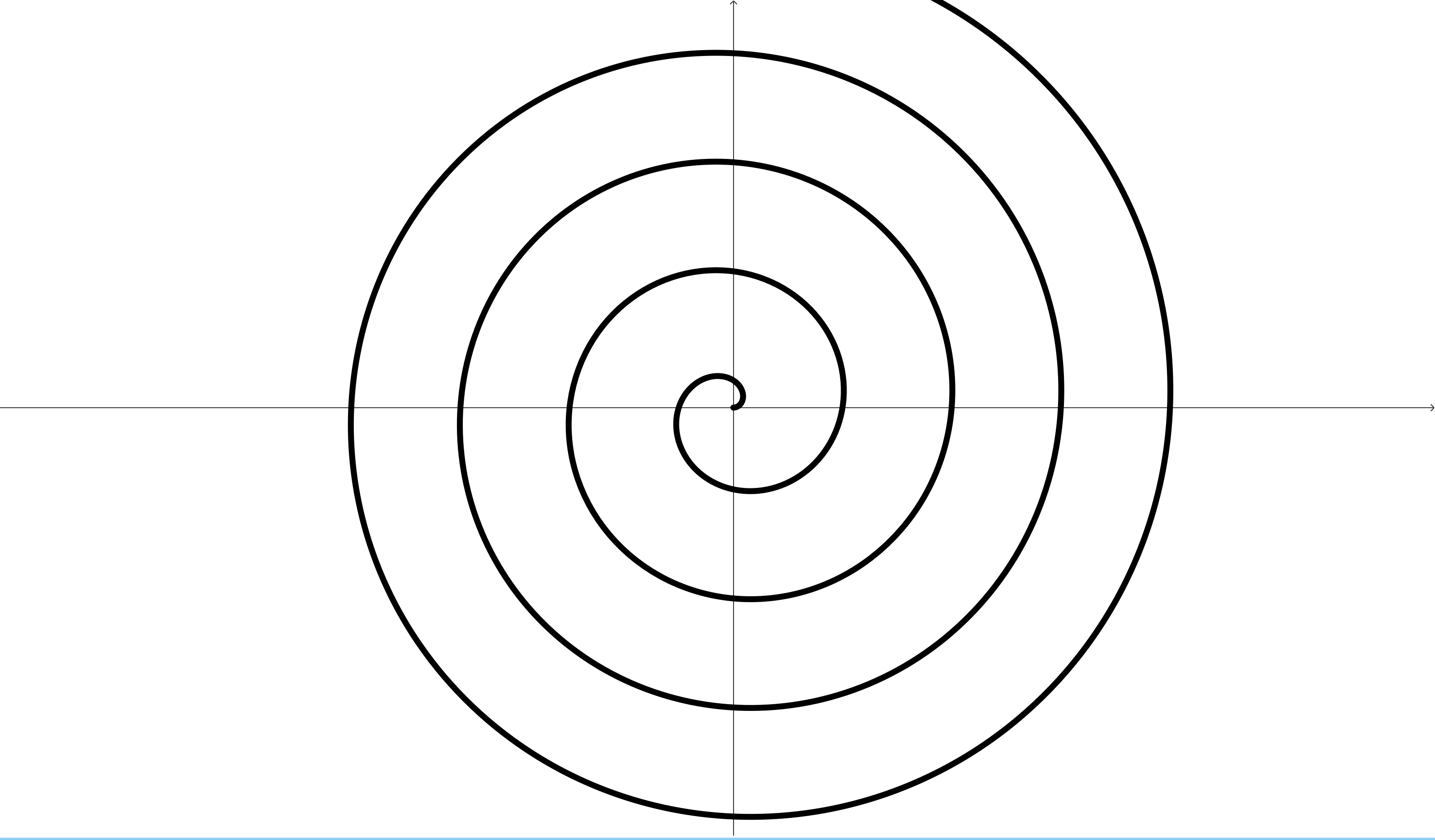

2021 级泛函分析期末试题

作者：若水
邮箱：ethanmxzhou@163.com
主页：helloethanzhou.github.io
时间：July 18, 2024

目录

第一题

试题 1.1

证明：存在且存在唯一 $f \in C[a,b]$，使得对于任意 $a \le x \le b$，成立

$$f(x) = \varphi(x) + \mu \int_a^b K(x,y) f(y) \mathrm{d}y$$

其中 $\varphi \in C[a,b]$ 且 $K \in C[a,b]^2$，同时

$$|\mu||a-b|M < 1, \qquad M = \max_{a \le x, y \le b} |K(x,y)|$$

证明 构造映射

$$\begin{aligned} T : C[a,b] &\longrightarrow C[a,b] \\ f &\longmapsto F, \text{其中} F(x) = \varphi(x) + \mu \int_a^b K(x,y) f(y) \mathrm{d}y \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \|T(f) - T(g)\| = & \sup_{x \in [a,b]} |(T(f))(x) - (T(g))(x)| \\ = & |\mu| \sup_{x \in [a,b]} \left| \int_a^b K(x,y)(f(y) - g(y)) \mathrm{d}y \right| \\ \le & |\mu| \sup_{x \in [a,b]} \int_a^b |K(x,y)||f(y) - g(y)| \mathrm{d}y \\ \le & |\mu||a-b|M \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| \\ = & |\mu||a-b|M \|f - g\| \end{aligned}$$

而 $|\mu||a-b|M < 1$，那么 T 为压缩映射，由压缩映像原理，存在且存在唯一 $f \in C[a,b]$，使得成立 $T(f) = f$，因此成立 Fredholm 积分方程

$$f(x) = \varphi(x) + \mu \int_a^b K(x,y) f(y) \mathrm{d}y$$

第二题

试题 2.1

已知 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $L^2[-\pi,\pi]$ 的正规正交基，定义函数

$$\begin{aligned} f : [-\pi,\pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto |x| \end{aligned}$$

计算

$$\left(f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right), \qquad \left(f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right), \qquad \left(f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right)$$

其中 $n \in \mathbb{N}^*$。

证明

$$\left(f(x), \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{2}$$

$$\left(f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\right) = 0$$

$$\left(f(x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\right) = \begin{cases} -\dfrac{4}{\sqrt{\pi}n^2}, & n \text{ 为奇} \\ 0, & \text{为偶} \end{cases}$$

试题 2.2

证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

证明 由试题2.1

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

取 $x=0$，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

进而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

试题 2.3

证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

证明 （法一）由试题2.1

$$f(x)=\frac{\pi\sqrt{2\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\sqrt{\pi}(2n-1)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(2n-1)x$$

由 Parseval 公式

$$\|f\|^2=\frac{\pi^3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi(2n-1)^4}$$

而 $\|f\|^2=2\pi^3/3$，因此

$$\frac{\pi^3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi(2n-1)^4}=\frac{2\pi^3}{3}$$

那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

进而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

（法二）定义函数

$$\begin{aligned}g:[-\pi,\pi]&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto|x|^3\end{aligned}$$

将 g 展开为 Fourier 级数

$$g(x)=\frac{\pi^3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\pi}{2n^2}\cos 2nx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6\pi}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{24}{\pi(2n-1)^4}\cos(2n-1)x$$

取 $x=0$，那么

$$\frac{\pi^3}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\pi}{2n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6\pi}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{24}{\pi(2n-1)^4}=0$$

由试题2.2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

代入，可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

进而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$$

第三题

试题 3.1

对于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的线性算子 $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$，如果对于任意 $x,y\in\mathcal{H}$，成立 $(T(x),y)=(x,T(y))$，那么 T 为有界算子。

证明 （法一）对于任意 $y\in\mathcal{H}$，构造线性泛函

$$
\begin{aligned}
f_y:\mathcal{H}&\longrightarrow\mathbb{C}\\
x&\longmapsto(x,T(y))
\end{aligned}
$$

由 Scharz 不等式

$$\|f_y\|=\sup_{\|x\|=1}|f_y(x)|=\sup_{\|x\|=1}|(x,T(y))|\le\sup_{\|x\|=1}\|x\|\|T(y)\|=\|T(y)\|$$

因此 $f_y\in\mathcal{H}^*$。由 Frechet-Riesz 表现定理，成立 $\|f_y\|=\|T(y)\|$。由于对于任意 $x\in\mathcal{H}$，由 Scharz 不等式

$$\sup_{\|y\|=1}|f_y(x)|=\sup_{\|y\|=1}|(x,T(y))|=\sup_{\|y\|=1}|(T(x),y)|\le\sup_{\|y\|=1}\|T(x)\|\|y\|=\|T(x)\|<\infty$$

因此由一致有界原理，成立 $\sup\limits_{\|y\|=1}\|f_y\|<\infty$，因此

$$\|T\|=\sup_{\|y\|=1}\|T(y)\|=\sup_{\|y\|=1}\|f_y\|<\infty$$

进而 T 为有界算子。

（法二）任取 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset X$，使得成立

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x,\qquad\lim_{n\to\infty}T(x_n)=y$$

那么对于任意 $z\in\mathcal{H}$ 以及 $n\in\mathbb{N}^*$，成立

$$(T(x_n),z)=(x_n,T(z))$$

由内积的连续性

$$(y,z)=(x,T(z))=(T(x),z)$$

进而 $T(x)=y$，因此 T 为闭算子。由闭图形定理，T 为有界算子。

第四题

定义 4.1

对于有限测度的可测集合 E，定义

$$S(E)=\{\text{几乎处处有限的可测函数} f:E\to\mathbb{R}\},\qquad d(f,g)=\int_E\frac{|f-g|}{1+|f-g|}$$

引理 4.1

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|}\le\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|},\qquad x,y\in\mathbb{C}$$

证明 构造函数

$$f(x)=\frac{x}{1+x},\qquad x\in[0,\infty)$$

由于 f 在 $[0,\infty)$ 上单调递增，那么由三角不等式 $|x+y|\le|x|+|y|$，可得

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|}=f(|x+y|)\le f(|x|+|y|)=\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}\le\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}$$

试题 4.1

$S(E)$ 空间为度量空间。

证明 仅证明三角不等式，由引理4.1

$$\begin{aligned}
d(f,h)&=\int_a^b\frac{|f-h|}{1+|f-h|}\\
&=\int_a^b\frac{|(f-g)+(g-h)|}{1+|(f-g)+(g-h)|}\\
&\le\int_a^b\left(\frac{|f-g|}{1+|f-g|}+\frac{|g-h|}{1+|g-h|}\right)\\
&=\int_a^b\frac{|f-g|}{1+|f-g|}+\int_a^b\frac{|g-h|}{1+|g-h|}\\
&=d(f,g)+d(g,h)
\end{aligned}$$

试题 4.2

在 $S(E)$，成立

$$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\text{依度量}d\text{收敛于}f\iff\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\text{依测度收敛于}f$$

证明 对于必要性，任取 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset S(E)$，使得成立 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 依度量 d 收敛于 $f\in S(E)$。任取 $\varepsilon>0$，记

$$E_n=E[|f_n-f|\ge\varepsilon]$$

由引理4.1

$$
\begin{aligned}
d(f_n,f) &= \int_a^b \frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|} \\
&\geq \int_{E_n} \frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|} \\
&\geq \int_{E_n} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \\
&= m(E_n)\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}
\end{aligned}
$$

从而 $m(E_n)\to 0$，因此 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 依测度收敛于 f。

对于充分性，任取 $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset S(E)$，使得成立 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 依测度收敛于 $f\in S(E)$，那么 $\{f_n-f\}_{n=1}^\infty$ 依测度收敛于 0，而

$$\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|} \leq |f_n-f|$$

那么函数序列

$$\left\{\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}\right\}_{n=1}^\infty$$

依测度收敛于 0。又由于

$$\frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|} \leq 1$$

那么由 Lebesgue 控制收敛定理，成立

$$d(f_n,f) = \int_a^b \frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|} \to 0$$

因此 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 依度量 d 收敛于 f。

第五题

试题 5.1

对于 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 上的有界共轭双线性泛函 $f:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathbb{C}$，存在且存在唯一有界线性算子 $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$，使得成立 $\|T\|=\|f\|$，且对于任意 $x,y\in\mathcal{H}$，成立 $f(x,y)=(T(x),y)$。

证明 由 Frechet-Riesz 表现定理，存在保范共轭线性双射 $\tau:\mathcal{H}^*\to\mathcal{H}$，使得对于任意 $x\in\mathcal{H}$ 与 $\varphi\in\mathcal{H}^*$，成立 $\varphi(x)=(x,\tau(\varphi))$。

定义映射

$$\begin{aligned}\pi:\mathcal{H}&\longrightarrow\mathcal{H}^*\\ x&\longmapsto\varphi_x,\ \text{其中}\varphi_x(y)=\overline{f(x,y)}\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}(\pi(x+y))(z)&=\overline{f(x+y,z)}=\overline{f(x,z)}+\overline{f(x,z)}=\varphi_x(z)+\varphi_y(z)=(\pi(x))(z)+(\pi(y))(z)\\(\pi(\lambda x))(y)&=\varphi_{\lambda x}(y)=\overline{f(\lambda x,y)}=\overline{\lambda f(x,y)}=\overline{\lambda}\varphi_x(y)=\overline{\lambda}(\pi(x))(y)\end{aligned}$$

那么

$$\pi(x+y)=\pi(x)+\pi(y),\qquad \pi(\lambda x)=\overline{\lambda}\pi(x)$$

定义映射

$$T=\tau\circ\pi:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$$

那么

$$f(x,y)=\overline{\varphi_x(y)}=\overline{(y,\tau(\varphi_x))}=\overline{(y,(\tau\circ\pi)(x))}=\overline{(y,T(x))}=(T(x),y)$$

由于

$$\begin{aligned}T(x+y)&=(\tau\circ\pi)(x+y)=\tau(\pi(x))+\tau(\pi(y))=(\tau\circ\pi)(x)+(\tau\circ\pi)(y)=T(x)+T(y)\\T(\lambda x)&=(\tau\circ\pi)(\lambda x)=\tau(\pi(\lambda x))=\tau(\overline{\lambda}\pi(x))=\lambda\tau(\pi(x))=\lambda(\tau\circ\pi)(x)=\lambda T(x)\end{aligned}$$

那么 T 为线性算子。

由 Frechet-Riesz 表现定理的推论

$$\begin{aligned}\|T\|&=\sup_{\|x\|\le1}\|T(x)\|\\&=\sup_{\|x\|\le1}\sup_{\|y\|\le1}|(T(x),y)|\\&=\sup_{\|x\|\le1}\sup_{\|y\|\le1}|f(x,y)|\\&=\|f\|\end{aligned}$$

因此 T 为有界线性算子。

如果存在有界线性算子 $S:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$，使得对于任意 $x,y\in\mathcal{H}$，成立 $f(x,y)=(S(x),y)$，那么

$$((T-S)(x),y)=(T(x),y)-(S(x),y)=f(x,y)-f(x,y)=0$$

进而 $T=S$，进而 T 为唯一的。

第六题

试题 6.1

证明：存在保范线性双射

$$\begin{aligned}\tau:(l^p)^* &\longrightarrow l^q\\ f &\longmapsto \{a_n\}_{n=1}^{\infty}\end{aligned}$$

使得成立

$$\begin{aligned}f: \qquad l^p &\longrightarrow \mathbb{C}\\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} &\longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\end{aligned}$$

其中 $1 \le p < \infty$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

证明 任取 $f \in (l^1)^*$。考察 l^1 空间的正规正交基 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中 $e_n=\{0,\cdots,0,\underset{\text{第}n\text{个}}{1},0,0,\cdots\}$，对于任意 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1$，成立

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$$

该级数在 l^1 中收敛，因此

$$f(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})=\sum_{n=1}^{\infty} x_n f(e_n)$$

由于 $\|e_n\|=1$，那么 $|f(e_n)| \le \|f\|$。令

$$a_n=f(e_n), \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

那么 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为由 f 决定的有界数列，进而

$$f(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

当 $p=1$ 时，一方面

$$\|f\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |a_n|$$

另一方面

$$|f(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x_n| \le \sup_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n| \sum_{n=1}^{\infty}|x_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n| \|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\| \implies \|f\| \le \sup_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|$$

综合两方面

$$\|f\| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*}|a_n|$$

当 $1<p<\infty$ 时，令

$$y_k^{(n)}=\begin{cases}|a_k|^{q-1}\mathrm{sgn}(a_k), & k \le n\\ 0, & k>n\end{cases}$$

那么

$$f(\{y_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty})=\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q$$

而

$$f(\{y_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}) \leq \|f\|\|\{y_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}\|_p = \|f\|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k^{(n)}|^p\right)^{1/p} = \|f\|\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\right)^{1/p}$$

因此

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|$$

令 $n \to \infty$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^q\right)^{1/q} \leq \|f\|$$

因此 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^q$，且

$$\|f\| \geq \|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|_q$$

由 Hölder 不等式

$$|f(\{x_n\}_{n=1}^{\infty})| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n||x_n| \leq \|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|_q\|\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\|_p \implies \|f\| \leq \|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|_q$$

从而

$$\|f\| = \|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|_q$$