关于二元梯度的一点思考

若水

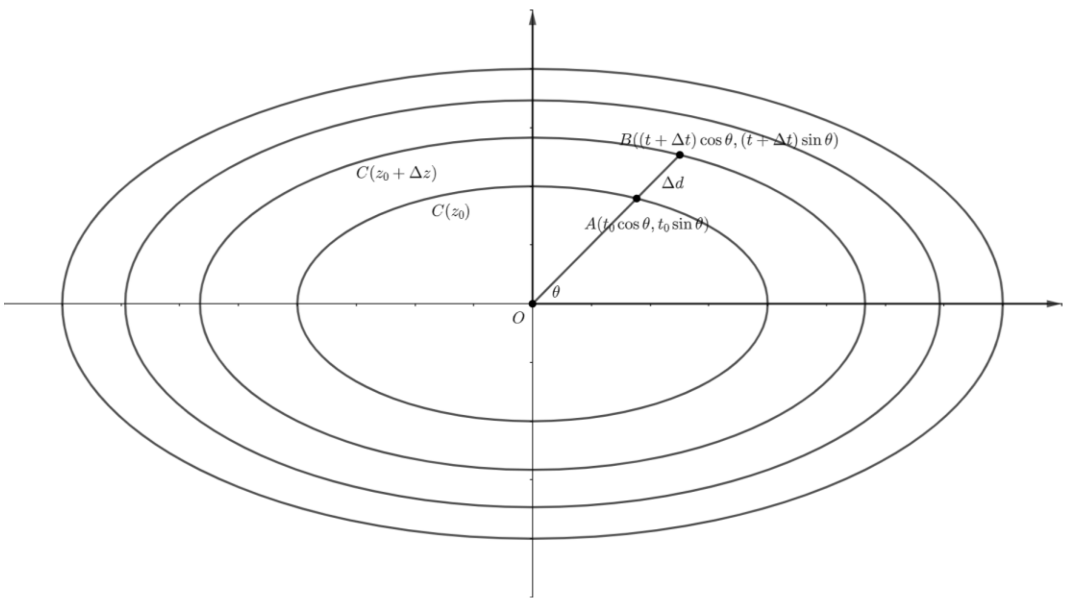
2022.03.02

本文均在二维平面及三维空间中讨论。

在求二元梯度时，时常遇到在原点(0,0)处梯度为零向量的情况，而我们知道零向量可为任意方向，于是在原点处的到底是沿着哪一方向的变化最快就不可而知。

诚然，对于函数$z=f(x,y),(x,y)\in\mathbb{R}^2$在原点处的梯度为零意味着在零点处对于任意方向$\boldsymbol{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$的方向导数值$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{v}}=0$。但是如果我们不把眼光拘于某一点，而着眼于该点的一个邻域，便会有新的发现。

方向导数值的模$\left|\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{v}}\right|$越大，说明在该点向方向$\boldsymbol{v}$的函数值的变化率越大。这如同登山一般，$\left|\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{v}}\right|$越大的地方意味着山越陡，山越陡的地方等高线越密集，这是精通地理学的朋友都明白的一点。受此启发，我们以“等高线”思想来刻画“变化率”。



如图这是$z=\frac{x^2}{4}+y^2$的等高线，我们定义等高线的疏密度：

对于曲面$z=f(x,y),(x,y)\in\mathbb{R}^2$，我们称曲线

$$\begin{cases} f(x,y)=z_0 \\ z=0 \end{cases}$$

为曲面在平面xOy上对$z=z_0$的高线，记为$C(z_0)$。对于给定的方向向量$\boldsymbol{v_0}=(\cos\theta_0,\sin\theta_0)$与高线$C(z_0)$，$\boldsymbol{v_0}$与$C(z_0)$的交点记为$A$，与$C(z_0+\Delta z)$的交点记为$B$，并记$\Delta d=|AB|$。若存在极限

$$\lim_{\Delta z\to 0^+}\frac{\Delta z}{\Delta d}$$

则称极限为曲面关于高线$C(z_0)$的在方向$\boldsymbol{v_0}$上的疏密度，记为$\rho(z_0,\theta_0)$。若曲面关于任意高线$C(z)$的在任意方向$\boldsymbol{v}$上的都存在疏密度，则称该曲面有疏密度函数$\rho(z,\theta)$。

所谓等高线密集的地方，是求二元函数$\rho(z,\theta)$的最值$\rho(z_0,\theta_0)$；而等高线密集的方向，是求二元函数$\rho(z,\theta)$关于θ的最值$\rho(z,\theta_0)$。下面探究二元函数$\rho(z,\theta)$关于θ的最值。

记$A(t\cos\theta,t\sin\theta)$，$B((t+\Delta t)\cos\theta,(t+\Delta t)\sin\theta)$，于是建立起$z$与$t$的函数关系

$$z=f(t\cos\theta,t\sin\theta)$$

于是有

$$z=f(t\cos\theta,t\sin\theta)$$

$$z+\Delta z=f\big((t+\Delta t)\cos\theta,(t+\Delta t)\sin\theta\big)$$

进而

$$\Delta z=f\big((t+\Delta t)\cos\theta,(t+\Delta t)\sin\theta\big)-f(t\cos\theta,t\sin\theta)$$

考察Δd

$$d_A = |OA| = t$$

$$d_B = |OB| = t + \Delta t$$

于是

$$\Delta d = \Delta t$$

进而

$$\rho(z,\theta) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \frac{f\big((t+\Delta t)\cos\theta, (t+\Delta t)\sin\theta\big) - f(t\cos\theta, t\sin\theta)}{\Delta t}$$

注意到，若取$t = 0$，则$\rho(z,\theta) = \frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{v}}$。

因此$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{v}}$与$\rho(z,\theta)$的不同在于，前者仅考虑原点向四周的变化率，而$\rho(z,\theta)$是将考虑的范围扩大到原点的邻域$O((0,0),t)$中，这样我们就可以依靠求解二元函数$\rho(z,\theta)$关于$\theta$的最值来解决$\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{v}} = 0$的困境。