解析几何 丘维生

2022年1月7日　　8:50

目录

2022年1月25日 20:42

第一章 几何空间的线性结构和度量空间

2022年1月7日 9:08

§1 向量及其线性运算

2022年1月7日 9:09

1.1 向量的概念

a. 既有大小，又有方向的量称为向量，又称矢量

b. 向量用符号$\boldsymbol{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$,…表示

c. 一个向量$\boldsymbol{a}$可以用一条有向线段$\overrightarrow{AB}$来表示，其中这条线段的长度|AB|表示$\boldsymbol{a}$的大小也可记作$|\boldsymbol{a}|$，用起点A到终点B的指向表示$\boldsymbol{a}$的方向

d. 特别的

  i. 长度为零的向量称为零向量，记作$\mathbf{0}$，零向量的方向不确定

  ii. 长度为1的向量称为单位向量.与$\boldsymbol{a}$同向的单位向量记作$\boldsymbol{a}^0$

  iii. 与$\boldsymbol{a}$长度相等且方向相反的向量称为$\boldsymbol{a}$的反向量，记作$-\boldsymbol{a}$

e. 规定 长度相等且方向相同的有向线段表示同一向量

1.2 向量的加法

a. 定义1.1 对于向量$\boldsymbol{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$，分别做有向线段$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$来表示$\boldsymbol{a}$，$\mathbf{b}$，那么把$\overrightarrow{AC}$表示的向量$\mathbf{c}$称为$\boldsymbol{a}$与$\mathbf{b}$的和，记作$\mathbf{c} = \boldsymbol{a} + \mathbf{b}$，即$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$，此方法称为三角形法则

b. 向量的加法适合一下规律

  i. 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

  ii. 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

  iii. 加法单位元：$\boldsymbol{a}+\mathbf{0}=\boldsymbol{a}$

  iv. 加法逆元：$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}$

c. 定义1.2 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} \coloneqq \boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$

1.3共线及共面的向量讨论

首先记$\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{i} = \mathbf{1, 2, \ldots,} \boldsymbol{n}$是一组向量，$k_i, i = 1,2, \ldots, n$是一组实数，那么称$\sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{a}_i$为向量组$\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{i} = \mathbf{1, 2, \ldots,} \boldsymbol{n}$的一个线性组合

a. 关于共线

   i. 若存在实数λ，使得$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\lambda a}$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线

   ii. 若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，并且$\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$，则存在唯一的实数$\lambda$，使得$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\lambda a}$

   iii. $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线$\Leftrightarrow$存在不全为零的实数λ, μ，使得$\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$

   iv. $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不共线$\Leftrightarrow$若存在实数λ, μ，使得$\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} = \mathbf{0}$，那么一定有$\lambda = \mu = 0$

b. 关于共面

   i. 若存在实数λ, μ，使得$\boldsymbol{c} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$共面

   ii. 若$\boldsymbol{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$共面，并且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不共线，则存在唯一一对实数λ, μ，使得$\boldsymbol{c} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b}$

   iii. $\boldsymbol{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$共面$\Leftrightarrow$存在不全为零的实数λ, μ, ν，使得$\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} + \nu \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$

   iv. $\boldsymbol{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$不共面$\Leftrightarrow$若存在实数λ, μ, ν，使得$\lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{b} + \nu \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$，那么一定有$\lambda = \mu = \nu = 0$

§2 几何空间的线性结构

2022年1月7日 10:18

注意：若本节无特殊说明，所有坐标均以一般的仿射标架 $[0;\boldsymbol{d_1},\boldsymbol{d_2},\cdots,\boldsymbol{d_n}]$ 为基

1. 空间任意给定不共面的向量$\boldsymbol{d_1},\boldsymbol{d_2},\mathbf{d_3}$，那么对于任意一个向量$\boldsymbol{a}$都可表示为
$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d_2}\times\boldsymbol{d_3}}{(\boldsymbol{d_1},\boldsymbol{d_2},\boldsymbol{d_3})}+\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d_3}\times\boldsymbol{d_1}}{(\boldsymbol{d_1},\boldsymbol{d_2},\boldsymbol{d_3})}+\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d_1}\times\boldsymbol{d_2}}{(\boldsymbol{d_1},\boldsymbol{d_2},\boldsymbol{d_3})}$$
2. 平面上两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的坐标为$(a_1,a_2),(b_1,b_2)$，则a与b共线的充分必要条件为
$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1}\\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2}\end{vmatrix}=\mathbf{0}$$
3. 平面中A,B,C的坐标分别为$(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$，则三点共线的充分必要条件为$\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$
4. 两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的坐标为(a_1,a_2,a_3)，(b_1,b_2,b_3)，则a与b共线的充分必要条件是
$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}=0$$
5. 线段的定比分点公式:设A,B的坐标分别为$(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$，若$C$分线段为定比λ，即$\frac{|AC|}{|BC|}=\lambda$,则分点$C$的坐标为$(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda})$
6. Mennelaus定理
设点P,Q,R分别分ΔABC的边AB,BC,CA为定比λ，μ，ν则
$$P,Q,R\text{共线}\Leftrightarrow \lambda\mu\nu=-1$$
7. Ceva定理
设点P,Q,R分别分ΔABC的边AB,BC,CA为定比λ,μ,ν则
$$AQ,BR,CP\text{共点}\Leftrightarrow \lambda\mu\nu=1$$

§3 向量的内积

2022年1月7日 17:07

1. 定义向量内积：$\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{b}\coloneqq|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$
2. 内积的性质
   a. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$
   b. $\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{b}=\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{a}$
   c. $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$
   d. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$
3. 两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的坐标为$(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)$,则$\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

§4 向量的外积

2022年1月7日 17:17

1. 两个向量$\boldsymbol{a},\mathbf{b}$的外积仍为一个向量，记作$\boldsymbol{a}\times\mathbf{b}$，其中$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\coloneqq|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，且当$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\neq\mathbf{0}$时，其方向为与$\boldsymbol{a},\mathbf{b}$均垂直，且$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\mathbf{b})$构成右手坐标系。
2. 向量外积的几何意义：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$的值等于向量$\boldsymbol{a},\mathbf{b}$构成的平行四边形的面积
3. 运算规律
   a. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$
   b. $(\boldsymbol{\lambda a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$
   c. $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$
   d. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$
4. 取一个一般的仿射标架$[0;\boldsymbol{d_1},\boldsymbol{d_2},\cdots,\boldsymbol{d_n}]$，向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的坐标分别为$(\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2},\boldsymbol{a_3}),(\boldsymbol{b_1},\boldsymbol{b_2},\mathbf{b_3})$, 则$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{d_3}\times\boldsymbol{d_1} & \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1}\\ \boldsymbol{d_2}\times\boldsymbol{d_3} & \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2}\\ \boldsymbol{d_1}\times\boldsymbol{d_2} & \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{b_3}\end{vmatrix}$
5. **二重外积：**$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$

§5 向量的混合积

2022年1月7日 17:33

1. 混合积：$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
2. 几何意义：$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{c})$的绝对值表示以$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{c}$向量构成的平行六面体的体积，其正负表示$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{c}$按顺序是否构成右手系
3. 性质
   a. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \mathbf{b} \times \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
   b. $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$
4. 取一个一般的仿射标架$[0; \boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}, \cdots, \boldsymbol{d_n}]$，向量a与b与c的坐标分别为$(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}), (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3}), (\boldsymbol{c_1}, \mathbf{c_2}, \mathbf{c_3})$，则$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{b_3} & \boldsymbol{c_3} \end{vmatrix} (\boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}, \boldsymbol{d_3})$
5. 取一个一般的仿射标架$[0; \boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2}, \cdots, \boldsymbol{d_n}]$，向量a与b与c的坐标分别为$(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}), (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3}), (\boldsymbol{c_1}, \mathbf{c_2}, \mathbf{c_3})$，则$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{c}$共面的充分必要条件是$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{b_1} & \boldsymbol{c_1} \\ \boldsymbol{a_2} & \boldsymbol{b_2} & \boldsymbol{c_2} \\ \boldsymbol{a_3} & \boldsymbol{b_3} & \boldsymbol{c_3} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$
6. Lagrange恒等式：$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} & \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d} \end{vmatrix}$
7. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{c}$为不共面的三个向量，并且记$\boldsymbol{\alpha} = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle, \boldsymbol{\beta} = \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \rangle, \boldsymbol{\gamma} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$，以$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \mathbf{c}$向量构成的平行六面体的体积为$\boldsymbol{V} = |\mathbf{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}| \sqrt[2]{\mathbf{1} - \boldsymbol{cos}^2 \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{cos}^2 \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{cos}^2 \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{2} \boldsymbol{cos\alpha cos\beta cos\gamma}}$

※向量共线及共面

2022年1月7日 21:20

1. 关于共线
   a. 两向量共线
      i. 若存在实数λ，使得$\boldsymbol{b}=\lambda\mathbf{a}$，则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线
      ii. 若$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线，并且$\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$，则存在唯一的实数$\lambda$，使得$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}$
      iii. $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线$\Leftrightarrow$存在不全为零的实数$\lambda,\boldsymbol{\mu}$，使得$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\mathbf{b}=\mathbf{0}$
      iv. $\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不共线$\Leftrightarrow$若存在实数$\lambda,\boldsymbol{\mu}$，使得$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\mathbf{b}=\mathbf{0}$，那么一定有$\lambda=\mu=0$
      v. 两个向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的坐标为$(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)$,则$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线的充分必要条件是$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ \mathrm{a}_1 & \mathrm{b}_1\end{vmatrix}=0$
   b. 三点共线
      i. 平面中A,B,C的坐标分别为$(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,\boldsymbol{y})$,则三点共线的充分必要条件为$\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$
      ii. A,B,M共线的充分必要条件是，$\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},s.t\ \overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},\lambda+\mu=1$
      iii. Mennelaus定理
      设点P,Q,R分别分ΔABC的边AB,BC,CA为定比λ，μ,ν则
      P,Q,R共线$\Leftrightarrow\lambda\mu\nu=-1$
2. 关于共面
   a. 若存在实数λ,μ，使得$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\upmu\mathbf{b}$，则$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面
   b. 若$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\mathbf{c}$共面，并且$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不共线，则存在唯一一对实数$\lambda,\boldsymbol{\mu}$，使得$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\upmu\mathbf{b}$
   c. $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\mathbf{c}$共面$\Leftrightarrow$存在不全为零的实数λ,μ,ν，使得$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\mathbf{c}=\mathbf{0}$
   d. $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\mathbf{c}$不共面$\Leftrightarrow$若存在实数λ,μ,ν，使得$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\mathbf{c}=\mathbf{0}$，那么一定有$\lambda=\mu=\nu=\mathbf{0}$
   e. 取一个一般的仿射标架$[\boldsymbol{O};\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\ldots,\mathbf{d}_\mathbf{n}]$，向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{c}$的坐标分别为$(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3),(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3),(\boldsymbol{c}_1,\mathbf{c}_2,\mathbf{c}_3)$，则$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\mathbf{c}$共面的充分必要条件是$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{c}_1\\ \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{b}_2 & \boldsymbol{c}_2\\ \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{b}_3 & \mathbf{c}_3\end{vmatrix}=\mathbf{0}$
   f. 设A,B,C不共线，则A,B,C,M共面的充分必要条件是，$\exists\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\upmu},\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{R},s.t\ \overrightarrow{\boldsymbol{OM}}=\lambda\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}+\mu\overrightarrow{\boldsymbol{OB}}+\nu\overrightarrow{\mathbf{OC}},\lambda+\mu+\nu=1$

第二章 空间的平面和直线

2022年1月11日 20:42

§1 仿射坐标系中平面的方程，两平面的相关位置

2022年1月11日 20:43

1. 平面的参数方程和普通方程
   a. 取定一个点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，及两个不共线的向量$\boldsymbol{v_1}(X_1,Y_1,Z_1)$，$\boldsymbol{v_2}(X_2,Y_2,Z_2)$，则过$M_0$且由$\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2}$张成的平面$\pi$，其

   参数方程为：$\begin{cases} x = x_0 + \lambda X_1 + \mu X_2 \\ y = y_0 + \lambda Y_1 + \mu Y_2 \\ z = z_0 + \lambda Z_1 + \mu Z_2 \end{cases}$

   普通方程为：$Ax + By + Cz + D = 0$

   其中$A = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 \\ X_1 & X_2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix}, D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_{\mathbf{0}})$

   b. 记$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$，则向量$\boldsymbol{\omega}(r,s,t)$平行于平面$\pi$的充分必要条件是$Ar + Bs + Ct = 0$
   c. 经过不共线的三个点$(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)$的平面方程为：

   $$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2. 两平面的相关位置

   记$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_{\mathbf{2}} = 0$

   a. π_1,π_2相交的充分必要条件是其方程中一次项系数不成比例
   b. $\pi_1 \parallel \pi_2$的充分必要条件是其方程中一次项系数成比例，但常数项不成想等比例
   c. π_1,π_2重合的充分必要条件是其方程中一次项系数及常数项成比例
   d. $\pi_1 \perp \pi_2$的充分必要条件是$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
3. 三平面交于一点的条件

   $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
   $\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
   $\pi_3: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$

   则三平面交于一点的充分必要条件是

   $$\begin{vmatrix} \mathrm{A}_1 & \mathrm{B}_1 & \mathrm{C}_1 \\ \mathrm{A}_2 & \mathrm{B}_2 & \mathrm{C}_2 \\ \mathrm{A}_3 & \mathrm{B}_3 & \mathrm{C}_3 \end{vmatrix} = 0$$

4. 有轴平面束

   记$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$交于直线$l$，则过直线$l$的平面束为

   $$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

§2 直角坐标系中平面的方程，点到平面的距离

2022年1月12日 11:07

1. 直角坐标系中，平面$\pi: Ax+By+Cz+D=0$的法向量为：$n(A,B,C)$
2. 直角坐标系中，点$P(x_0,y_0,z_0)$到平面$\pi: Ax+By+Cz+D=0$的距离为：$d\langle P,\pi\rangle=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt[2]{A^2+B^2+C^2}}$
3. 直角坐标系中，点$P(x_0,y_0,z_0)$到平面$\pi: Ax+By+Cz+D=0$的离差为：$\delta\langle \mathrm{P},\pi\rangle=\frac{\mathrm{A}x_0+\mathrm{B}y_0+\mathrm{C}z_0+\mathrm{D}}{\sqrt[2]{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}}$
4. 直角坐标系中，记$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$的夹角$\theta$满足：$cos\theta=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt[2]{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}}$

§3 直线的方程，直线、平面间的相关位置

2022年1月13日 12:15

1. 直线的方程
   a. 取一个一般的仿射标架$[\boldsymbol{O};\boldsymbol{d_1},\boldsymbol{d_2},\dots,\mathbf{d_n}]$。已知一点$M_0(x_0,y_0,\mathrm{z}_0)$，非零向量$\boldsymbol{v}(X,Y,Z)$，记过$M$且以$\boldsymbol{v}$为方向向量的直线为$l$，$l$过点$M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$，且$l$为平面$\pi_1$: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，π_2: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$的交线
      i. 向量式参数方程：$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r_0}+t\boldsymbol{v}$，其中$t$为参数
      ii. 参数方程：$\begin{cases}x=x_0+tX\\y=y_0+tY\text{，其中}t\text{为参数}\\z=z_0+tZ\end{cases}$
      iii. 标准方程：$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$
      iv. 两点式方程：$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$
      v. 普通方程：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$
   b. 若平面π_1: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\pi_2$: $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$相交，则交线的方向向量为：（$\begin{vmatrix}B_1&C_1\\B_2&C_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}C_1&A_1\\C_2&A_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}A_1&B_1\\A_2&B_2\end{vmatrix}$)
2. 两条直线的相关位置
   $M_1(x_1,y_1,z_1),M(x_2,y_2,z_2),\boldsymbol{v_1}(X_1,Y_1,Z_1),\boldsymbol{v_2}(X_2,Y_2,Z_2)$
   $l_1:\frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z_1},l_2:\frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y-y_2}{Y_2}=\frac{z-z_2}{Z_2}$
   a. 重合：$\exists\lambda,\mu,\nu\in R,s.t.\lambda\overrightarrow{M_1M_2}=\mu\boldsymbol{v_1}=\nu\boldsymbol{v_2}$
   b. 平行：$\exists\lambda\in R,s.t.\boldsymbol{v_1}=\lambda\boldsymbol{v_2};\forall\mu\in R,\overrightarrow{M_1M_2}\neq\lambda\boldsymbol{v_1}$
   c. 垂直：$\boldsymbol{v_1}\cdot\boldsymbol{v_2}=0$
   d. 相交：$\overrightarrow{M_1M_2},\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2}$共面，且$\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2}$不共面
   e. 异面：$\overrightarrow{M_1M_2},\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2}$不共面
3. 直线和平面的相关关系
   已知一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，非零向量$\boldsymbol{v}(X,Y,Z)$，记过M且以$\boldsymbol{v}$为方向向量的直线为l，即$l:\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$,平面$\pi$: $Ax+By+Cz+D=0$
   a. 重合：$AX+BY+CZ=0$ and $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$
   b. 平行：$AX+BY+CZ=0$ and $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq0$
   c. 相交：$AX+BY+CZ\neq0$

§4 点、直线和平面之间的度量关系

2022年1月14日 11:50

※本节内容均在右手直角坐标系中讨论。

1. 点到直线的距离
   a. 已知设直线l过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量为非零向量$\boldsymbol{v}(X,Y,Z)$，则点M到直线l的距离为：$d\langle M,l\rangle=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times\mathbf{v}|}{|\boldsymbol{v}|}$
   b. 定义直线$l=\pi_1\cap\pi_2$，已知一点M，M所对π_1,π_2的夹角为θ，并且记$d_1=d\langle M,l_1\rangle,d_2=d\langle M,l_2\rangle$，则$d\langle M,l\rangle=$
      $\frac{\sqrt[2]{d_1^2+d_2^2+2d_1d_2cos\theta}}{sin\theta}$
2. 两条直线的距离
   a. 若两条直线重合或相交，直线间的距离为0
   b. 若两条直线平行，则直线间的距离等于平行距离
   c. 设两条异面直线l_1,l_2分别经过M_1,M_2，方向向量分别为$\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v}_2$，则直线间的距离为$d\langle l_1,l_2\rangle=\frac{|(\overrightarrow{M_1M_2},\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2})|}{|\boldsymbol{v_1}\times\boldsymbol{v_2}|}$

第三章 常见曲面

2022年1月15日 11:47

§1 球面和旋转面

2022年1月15日 11:48

1. 球面方程
   a. 普通方程：
      i. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$
      ii. 其中，(x_0,y_0,z_0)为球心，R为球面半径。
   b. 参数方程：
      i. $\begin{cases} x=R\cos\theta\cos\varphi \\ y=R\cos\theta\sin\varphi \\ z=R\sin\theta \end{cases}$ $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\varphi\in(-\pi,\pi]$
      ii. 其中，θ称为纬度，φ称为经度。除z轴上的点，球面上的每一个点都对应唯一一对(θ,φ)，因此(θ,φ)称为球面上点的曲纹坐标。
   c. 球面坐标（空间极坐标）
      i. $\begin{cases} x=R\cos\theta\cos\varphi, R\in[0,+\infty] \\ y=R\cos\theta\sin\varphi, \theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ z=R\sin\theta, \varphi\in(-\pi,\pi] \end{cases}$
      ii. 除z轴上的点，空间中的每一个点都对应唯一一对(R,θ,φ)
2. 曲面、曲线的普通方程与参数方程
   a. 曲面
      i. 普通方程：$F(x,y,z)=0$
      ii. 参数方程：$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$ $u\in[a,b],v\in[c,d]$
   b. 曲线
      i. 普通方程：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$
      ii. 参数方程：$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ $t\in[a,b]$
3. 旋转面
   a. 一般旋转面
      i. 轴l，经过M，方向向量为$\boldsymbol{v}$
      ii. 母线Γ:$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$
      iii. 取母线上一点$N(x_0,y_0,z_0)$，记旋转面上点为P。因此
      iv. 旋转面方程：$\begin{cases} F(x_0,y_0,z_0)=0 \\ G(x_0,y_0,z_0)=0 \\ \left|\overrightarrow{MP}\times\boldsymbol{v}\right|=\left|\overrightarrow{NP}\times\boldsymbol{v}\right| \\ \overrightarrow{NP}\cdot v=0 \end{cases}$
   b. 特殊旋转面

i. 母线Γ: $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$

ii. 以z轴旋转

iii. 旋转曲面方程：$f\left(\pm\sqrt[2]{x^2+y^2},z\right)=0$

c. 常见旋转面

i. 旋转抛物面：$x^2+y^2=2pz$

ii. 旋转双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$

iii. 旋转单叶双曲面：$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

iv. 环面：$\left(x^2+y^2+z^2+a^2-r^2\right)^2=4a^2\left(x^2+y^2\right)$

v. 经过$(a,0,0)$，方向向量为$(0,1,b)$的直线绕z轴旋转所得曲面方程为：$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{a^2b^2}=1$

§2 柱面和锥面

2022年1月18日 11:37

1. 柱面
   a. 定义：一条直线l沿着一条空间曲线C平行移动时所形成的曲面称为柱面，其中l称为母线，C称为准线。
   b. 一般方程方程：
      i. l的方向向量为$\boldsymbol{v}$。
      ii. 准线C：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$
      iii. 取母线上一点$M(x_0,y_0,z_0)$，记柱面上点为P。因此
      iv. 柱面方程：$\begin{cases} F(x_0,y_0,z_0)=0 \\ G(x_0,y_0,z_0)=0 \\ \overrightarrow{MP}=k\boldsymbol{v} \end{cases}$
   c. 参数方程
      i. l的方向向量为$\boldsymbol{v}(\alpha,\beta,\gamma)$。
      ii. 准线C：$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \\ z=h(t) \end{cases}$
      iii. 柱面方程：$\begin{cases} x=f(t)+k\alpha \\ y=g(t)+k\beta \\ z=h(t)+k\gamma \end{cases}$
   d. 圆柱面
      i. 定义：圆柱面是曲面上点到轴的距离均相等的柱面。其中此距离称为圆柱面的半径r，圆柱面的准线可取为一个圆C。
      ii. 方程
         1) 取圆柱面的半径为r，母线方向为$\boldsymbol{v}$，对称轴经过M_0，点P在圆柱面上，满足
         2) $\dfrac{\left|\overrightarrow{M_0P}\times v\right|}{|v|}=r$
      iii. 柱面坐标：$\begin{cases} x=rcos\theta \\ y=rsin\theta \quad r\in[0,+\infty),\theta\in[0,2\pi),h\in R \\ z=h \end{cases}$
   e. 柱面方程的特点：若一个柱面的母线平行于x轴，则其方程不含x；反之，若一个三元方程不含x，则其表示一个母线平行于x轴的柱面。
   f. 常见柱面
      i. 椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$
      ii. 双曲柱面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+1=0$
      iii. 抛物柱面：$x^2+2py=0$
2. 锥面
   a. 定义：空间中，由曲面C上的点与不在C上的定点M_0的连线形成的曲面称为锥面。其中M_0称为顶点，C称为准线，C上的点与M_0的连线称为母线。
   b. 一般锥面方程：
      i. 顶点$M_0(x_0,y_0,z_0)$

ii. 准线C:$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$

iii. 准线上存在一点N，P在锥面上，则M_0,N,P共线

iv. 曲面方程：$\begin{cases}F(x_0,y_0,z_0)=0\\G(x_0,y_0,z_0)=0\\\overrightarrow{M_0P}=k\overrightarrow{M_0N}\end{cases}$

c. 圆锥面

i. 定义：母线与轴成相等角的锥面称为圆锥面。其中此角称为半顶角，与轴垂直的平面截圆锥面的交线为圆。

ii. 方程

1) 取顶点为M_0，轴l的方向向量为$\boldsymbol{v}$，半顶角为θ，点P在圆锥面上，满足

2) $\left|cos\left\langle\overrightarrow{M_0P},v\right\rangle\right|=cos\theta$

d. 锥面方程的特点：x,y,z的齐次方程表示的曲面与顶点的交集为顶点为原点的锥面。

§3 椭圆面、双曲面和抛物面

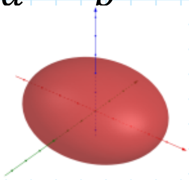
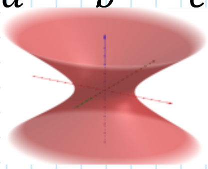
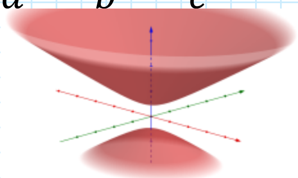
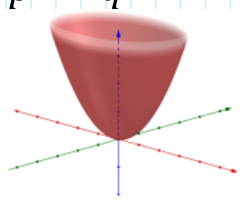
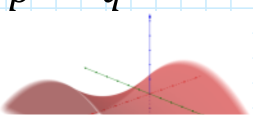
2022年1月19日 11:11

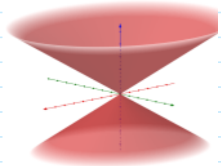
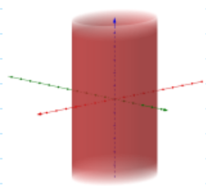
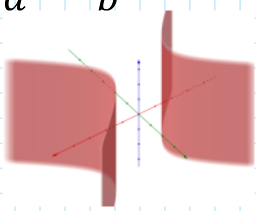
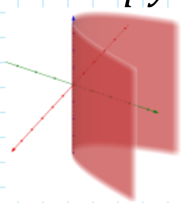
1. 椭圆面
   a. 方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，$a,b,c>0$
   b. 性质
      i. 对称性：对称于三个坐标面与坐标轴及原点
      ii. 自然定义域：$x\in[-a,a],y\in[-b,b],z\in[-c,c]$
      iii. 形状：若与平行于坐标轴的平面相交，则交线为点或椭圆
2. 单叶双曲面
   a. 方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$，$a,b,c>0$
   b. 性质
      i. 对称性：对称于三个坐标面与坐标轴及原点
      ii. 范围：此曲面外切于柱面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
      iii. 形状：平行于Oxy面的平面与其交线为椭圆，平行于Oyz面和Ozx的平面与其交线为双曲线
      iv. 渐近锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
3. 双叶双曲线
   a. 方程：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$，$a,b,c>0$
   b. 性质
      i. 对称性：对称于三个坐标面与坐标轴及原点
      ii. 范围：$|z|\geq 0$
      iii. 形状：若与平行于Oxy面的平面有交点，则交于一点或一椭圆，平行于Oyz面和Ozx的平面与其交线为双曲线
      iv. 渐近锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
4. 椭圆抛物面
   a. 方程：$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$, $p,q>0$
   b. 性质
      i. 对称性：对称于Ozx面、Oyz面及z轴
      ii. 范围：$z\geq 0$
      iii. 形状：与平行于Ozx面、Oyz面的平面交线是抛物线；若与平行于Oxy面的平面有交点，则交于一点或一椭圆
5. 双曲抛物面（马鞍面）
   a. 方程：$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$，$p,q>0$
   b. 性质
      i. 对称性：对称于Ozx面、Oyz面及z轴
      ii. 范围：$x,y,z\in R$
      iii. 形状：当平行移动抛物线$\begin{cases}y^2=-2pz\\x=0\end{cases}$，使其顶点沿抛物线$\begin{cases}x^2=2pz\\y=0\end{cases}$移动便得到马

鞍面$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$

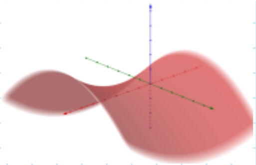
§4 二次曲面

2022年1月19日 11:45

1. 椭球面
   a. 椭球面
      i. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
      ii. 
   b. 虚椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$
   c. 点：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$
2. 双曲面
   a. 单叶双曲面
      i. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
      ii. 
   b. 双叶双曲线
      i. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
      ii. 
3. 抛物面
   a. 椭圆抛物面
      i. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, p, q>0$
      ii. 
   b. 双曲抛物面
      i. $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z, p, q>0$
      ii. 

1. 二次锥面
   1. 二次锥面
      i. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
      ii. 
2. 二次柱面
   a. 椭圆柱面
      i. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
      ii. 
   b. 虚椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$
   c. 直线：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
   d. 双曲柱面
      i. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
      ii. 
   e. 一对相交平面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
   f. 抛物柱面
      i. $x^2=2py$
      ii. 
   g. 一对平行平面：$x^2=a^2$
   h. 一对虚平行平面：$x^2=-a^2$
   i. 一对重合平面：$x^2=0$

i. 对[illegible]平面: $x = 0$

ii. 

§5 直纹面

2022年1月20日 13:19

1. 直纹面
   a. 定义：一曲面S称为直纹面，如果存一族直线，使得这一族中的每一条直线上的每一个点都在S上，并且S上的每一个点都在这一族的某一条直线上。这样一族直线称为S的一族直母线。
   b. 二次曲线中的直纹面有二次柱面，二次锥面，单叶双曲面与双曲抛物面。
2. 单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
   a. 两族直母线为：
      i. $\begin{cases}\mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu\left(1+\frac{y}{b}\right)=0\\ \mu\left(1-\frac{y}{b}\right)+\nu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0\end{cases}$，即$\frac{x+\frac{2\mu\nu}{\mu^2+\nu^2}a}{(\mu^2-\nu^2)a}=\frac{y-\frac{\mu^2-\nu^2}{\mu^2+\nu^2}b}{2\mu\nu b}=\frac{z}{-(\mu^2+\nu^2)c}$
      ii. $\begin{cases}\mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu\left(1-\frac{y}{b}\right)=0\\ \mu\left(1+\frac{y}{b}\right)+\nu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0\end{cases}$，即$\frac{x+\frac{2\mu\nu}{\mu^2+\nu^2}a}{(\mu^2-\nu^2)a}=\frac{y+\frac{\mu^2-\nu^2}{\mu^2+\nu^2}b}{-2\mu\nu b}=\frac{z}{-(\mu^2+\nu^2)c}$
   b. 性质
      i. 同族中任意三条直母线都不平行于同一个平面。
      ii. 同族的任意两条直母线异面。
      iii. 异族的任意两条直母线共面。
      iv. 单叶双曲面上经过任意一点有且仅有两条直母线。$\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}$
3. 双曲抛物面$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$
   a. 两族直母线为：
      i. $\begin{cases}\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)+2\lambda=0\\ z+\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=0\end{cases}$，即$\frac{x+\lambda^2\sqrt{p}}{-^2\sqrt{p}}=\frac{y+\lambda^2\sqrt{q}}{^2\sqrt{q}}=\frac{z}{2\lambda}$
      ii. $\begin{cases}\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)+z=0\\ 2\lambda+\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=0\end{cases}$，即$\frac{x+\lambda^2\sqrt{p}}{^2\sqrt{p}}=\frac{y+\lambda^2\sqrt{q}}{^2\sqrt{q}}=\frac{z}{-2\lambda}$
   b. 性质
      i. 同族的所有直母线都平行于同一平面。
      ii. 同族的任意两条直母线异面。

iii. 异族的任意两条直母线必相交。

第四章 坐标变换

2022年1月21日 11:20

§1 平面的仿射坐标变换

2022年1月21日　11:21

1. 点的仿射坐标变换公式
   a. 给定两个放射坐标系：Ⅰ$[O;d_1,d_2]$，Ⅱ$[\mathrm{O}';\mathrm{d}_1',\mathrm{d}_2']$
   b. O',d_1',d_2'在Ⅰ中的坐标分别为$(x_0,y_0),(a_{11},a_{12}),(a_{21},a_{22})$
   c. 点P在ⅠⅡ中的坐标分别为$(x,y),(x',y')$，则
   d. $\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
   e. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$
   f. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$称为Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵。
2. 向量的仿射坐标变换公式
   a. 给定两个放射坐标系：Ⅰ$[O;d_1,d_2]$，Ⅱ$[O';d_1',d_2']$
   b. O',d_1',d_2'在Ⅰ中的坐标分别为$(x_0,y_0),(a_{11},a_{12}),(a_{21},a_{22})$
   c. 向量$\boldsymbol{w}$在Ⅰ，Ⅱ中的坐标分别为$(u,v),(u',v')$，则
   d. $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$
   e. $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}=\frac{1}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

§2 矩阵及其运算

2022年1月22日 10:58

1. 矩阵的概念以及矩阵的运算
   a. 矩阵的概念
      i. 定义：mn个实数$a_{ij}(i=1,\dots m;j=1,\dots,n)$排成的$m$行$n$列矩形列表$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$称为一个$m\times n$矩阵，记作$A$或者$A_{m\times n}$。其中$a_{ij}$表示位于矩阵第$i$行第$j$列的元素，记作$A(i,j)$。
      ii. 特殊矩阵
         1) n阶矩阵或n阶方阵：$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$
         2) 单位矩阵：$I_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
         3) 零矩阵：$0_{m\times n}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$
      iii. 称两个矩阵矩阵相等当且仅当其行数和列数都相等且对应元素相等。
   b. 矩阵的运算
      i. 矩阵加法与数量乘法
         1) 加法：若$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$，则$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$
         2) 数量乘法：若$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$k\in R$，则$kA=\begin{pmatrix} ka_{11} & \cdots & ka_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$

3) 运算性质

a) 交换律：$A+B=B+A$

b) 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$，$(kl)A=k(lA)$

c) 分配律：$(k+l)A=kA+lA$，$k(A+B)=kA+KB$

d) 加法单位元：$A+0=A$，$A+(-A)=0$

e) 乘法单位元：$1A=A$

ii. 矩阵乘法

1) 定义：设$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & \cdots & b_{m,s} \end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s,1} & \cdots & c_{s,n} \end{pmatrix}$，则$A=BC$，当且仅当$a_{i,j}=\sum_{k=1}^{s} b_{i,k}c_{k,j}$。

2) 性质

a) 结合律：$(AB)C=A(BC)$

b) 分配律：$A(B+C)=AB+AC$，$(A+B)C=AC+BC$

c) 乘法与数乘：$k(AB)=(kA)B=A(kB)$

d) 单位矩阵：$AI=IA=A$

iii. 矩阵的转置

1) 定义：设$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$，称$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}$为$A$的转置，记作$A^T$，即$A(i,j)=A^T(j,i)$。

2) 性质

a) $(A^T)^T=A$

b) $(A+B)^T=A^T+B^T$

c) $(kA)^T=kA^T$

d) $(AB)^T=B^TA^T$

3) 若$A^T=A$，则称A为对称矩阵；若$A+A^T=0$，则称A为逆对称矩阵。

2. 矩阵的分块

3. 方阵的行列式

a. 定义：设$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix}$，则称

$\sum_{k_1,k_2,\dots,k_n}^{\square}\left((-1)^{\tau(k_1,k_2,\dots,k_n)}\prod_{i=1}^{n}a_{ik_i}\right)$为$A$的行列式，记作$det\,A$或$|A|$，其中$k_1,k_2,\dots,k_n$是$1,2,\dots,n$的一个全排列，$\tau$是逆序数函数。

b. 性质
   i. $|AB|=|A||B|$
   ii. $|A^T|=|A|$
   iii. 若$|A|\neq 0$，则称A为非奇异矩阵；否则称为奇异矩阵。

4. 可逆矩阵
   a. 定义：若对于n阶方阵A，存在矩阵B，使得$AB=BA=I$，则称A是可逆矩阵，称B是A的逆矩阵，记作$B=A^{-1}$。
   b. 性质
      i. 矩阵A是可逆矩阵当且仅当$|A|\neq 0$。
      ii. 若对于n阶方阵A，存在矩阵B，使得$AB=I$，则称A是可逆矩阵，并且$B=A^{-1}$。
      iii. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
      iv. $\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$
      v. $|A^{-1}||A|=1$

5. 正交矩阵
   a. 定义：若对于n阶方阵A满足$AA^T=I$，则称A为正交矩阵。
   b. 对于n阶方阵$A=\begin{pmatrix}a_{1,1} & \cdots & a_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n,1} & \cdots & b_{n,n}\end{pmatrix}$，$A$为正交矩阵的充分必要条件是$A$的每一行（列）元素平方和等于1，且每两行（列）对应元素乘积之和为0。即$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}^2=1$，$i=1,2,\dots,n$，$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=0$，$i\neq j$或$\sum_{k=1}^{n}a_{kj}^2=1$，$j=1,2,\dots,n$，$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}a_{kj}=0$，$i\neq j$。

§3 平面直角坐标变换

2022年1月23日　13:20

1. 本节设定：Ⅰ$[O;e_1,e_2]$，Ⅱ$[\mathrm{O}';\mathrm{e}_1',\mathrm{e}_2']$
2. 直角坐标变换公式
   a. 设O′ 的Ⅰ坐标为(x_0,y_0)，e_1',e_2'的Ⅰ坐标分别为$(a_{11},a_{12}),(a_{21},a_{22})$，则坐标系Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵是$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$。
   b. 设Ⅰ和Ⅱ都是直角坐标系，则Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵A是正交矩阵，并且Ⅱ到Ⅰ的过渡矩阵是$\boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$。
3. 直角坐标变换中的过渡矩阵
   设e_1逆时针旋转θ至e_1'方向，则
   a. Ⅰ是右手坐标系，Ⅱ是右手坐标系：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$
   b. Ⅰ是右手坐标系，Ⅱ是左手坐标系：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$
   c. Ⅰ是左手坐标系，Ⅱ是右手坐标系：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ -\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$
   d. Ⅰ是左手坐标系，Ⅱ是左手坐标系：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$
4. 移轴公式与转轴公式
   a. 移轴公式：$\theta=0$，$\begin{cases}x=x'+x_0\\ y=y'+y_0\end{cases}$
   b. 转轴公式：$x_0=y_0=0$，$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$

§4 几何空间的坐标转换

2022年1月24日 16:11

1. 仿射坐标变换
   a. 设Ⅰ$[O;d_1,d_2,d_3]$和Ⅱ$[\mathrm{O}';\mathrm{d}_1',\mathrm{d}_2',\mathrm{d}_3']$*都是空间*中的仿射坐标系，O′在Ⅰ中的坐标为$(x_0,y_0,z_0)$，$d_i'$在Ⅰ中的坐标为$(a_{1i},a_{2i},a_{3i})$，其中$i=1,2,3$。则
      i. Ⅰ到Ⅱ的点的仿射坐标变换公式为：$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$。
      ii. Ⅰ到Ⅱ的向量的仿射坐标变换公式为：$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1'\\{u_2}'\\{u_3}'\end{pmatrix}$。
      iii. 其中$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$称为Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵。
   b. 设仿射坐标系Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵A非奇异且Ⅰ与Ⅱ同定向的充分必要条件是$|A|>0$。
2. 直角坐标变换
   设Ⅰ$[O;e_1,e_2,e_3]$和Ⅱ$[O';e_1',e_2',e_3']$都是直角坐标系，则Ⅰ到Ⅱ的过渡矩阵A是正交矩阵。
3. 代数曲面（线）及其次数
   若图形S在某一个仿射坐标系中的方程$F(x,y,z)=0$的左边是关于x,y,z的n次多项式，则S在任意仿射坐标系中的方程$G(x',y',z')=0$左边的是关于x',y',z'的n次多项式。

第五章 二次曲线方程的化简及其类型和性质

2022年1月25日 11:38

§1 二次曲线方程的化简及其类型

2022年1月25日 11:38

1. 二次曲线方程的一般曲线
   a. 平面上二次曲线的一般方程为：$\Gamma: Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$。
   b. 矩阵表示
      i. 记$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}A & C\\ C & B\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\delta}=\begin{pmatrix}D\\ E\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}A & C & D\\ C & B & E\\ D & E & F\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
      ii. $F(x,y)=Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ex+F=\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & C & D\\ C & B & E\\ D & E & F\end{pmatrix}(x\quad y\quad 1)$
      $=(\boldsymbol{\alpha}^T\quad 1)\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\delta}^T & F\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ 1\end{pmatrix}$
      iii. $\varphi(x,y)=Ax^2+By^2+2Cxy=(x,y)\begin{pmatrix}A & C\\ C & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$
2. 做转轴消去交叉项
   a. 问题：对于一般的二次曲线$Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ex+F=0$，当$C\neq 0$时存在转角$\theta\in[0,2\pi)$，使得原曲线方程做转轴后使得交叉项$xy$的系数为0。
   b. 证明
      i. 假设存在这样的$\theta\in[0,2\pi)$，则点的坐标转换公式为$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cos\theta & -sin\,\theta\\ sin\,\theta & cos\,\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$。
      ii. 记$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}cos\,\theta & -sin\,\theta\\ sin\,\theta & cos\,\theta\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}'=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$，则转轴公式写成$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\alpha}'$，即$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{T} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}'\\ 1\end{pmatrix}$，$(\boldsymbol{\alpha}^T\quad 1)=(\boldsymbol{\alpha}'^T\quad 1)\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}^T & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$。
      iii. 将$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{T} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}'\\ 1\end{pmatrix}$，$(\boldsymbol{\alpha}^T\quad 1)=(\boldsymbol{\alpha}'^T\quad 1)\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}^T & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$代入$F(x,y)=(\boldsymbol{\alpha}^T\quad 1)\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\delta}^T & F\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ 1\end{pmatrix}=0$中整理得$(\boldsymbol{\alpha}'^T\quad 1)\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{T} & F\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}'\\ 1\end{pmatrix}=0$。
      iv. 转轴后的曲线方程不含交叉项xy当且仅当$\exists\lambda_1,\lambda_2\in R$使得$\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$，记$\mathbf{T}=(\boldsymbol{\eta_1}\quad \boldsymbol{\eta_2})$，则由于$\mathrm{TT}^\mathrm{T}=\mathrm{I}$，于是由$\mathrm{T}^\mathrm{T}\mathrm{AT}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$得$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta_1}\quad \boldsymbol{\eta_2})=(\boldsymbol{\eta_1}\quad \boldsymbol{\eta_2})\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$，即$(\boldsymbol{A}\eta_1\quad \boldsymbol{A}\eta_2)=(\lambda_1\boldsymbol{\eta_1}\quad \lambda_2\boldsymbol{\eta_2})$，于是$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta_1}=\lambda_1\boldsymbol{\eta_1}\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta_2}=\lambda_2\boldsymbol{\eta_2}\end{cases}$。
      v. 我们来解方程$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}=\lambda\boldsymbol{\eta}$。$\boldsymbol{\eta}$与$\lambda$是$\boldsymbol{A}$的特征向量与特征值，从而$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=0$，整理得$\lambda^2-(A+B)\lambda+(AB-C^2)=0$，考察其判别式$\Delta=(A-B)^2+4C^2>0$，从而$\begin{cases}\lambda_1=\frac{(A+B)+\sqrt[2]{\Delta}}{2}\\ \lambda_2=\frac{(A+B)-\sqrt[2]{\Delta}}{2}\end{cases}$。设$\eta=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$，代入$\begin{cases}A\eta=\lambda\eta\\ a^2+b^2=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a^2=\frac{1\pm\frac{A-B}{\sqrt[2]{\Delta}}}{2}\\ b^2=\frac{1\mp\frac{A-B}{\sqrt[2]{\Delta}}}{2}\end{cases}$，且$absign(C)>0$。
      vi. P.S.从另一种角度，利用$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cos\theta & -sin\,\theta\\ sin\,\theta & cos\,\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$代换后交叉项系数成为$(B-A)\,sin\,2\theta+2C\,cos\,2\theta$，于是$\theta$满足$cot\,2\theta=\frac{A-B}{2C}$。
3. 二次曲线转轴与移轴的矩阵表示

a. 转轴公式：设原二次曲线方程为$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}^T & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\delta}^T & F\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ 1\end{pmatrix}=0$，做转轴运动$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\alpha}'$，即$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{T} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}'\\ 1\end{pmatrix}$，进而方程成为$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}'^T & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}^T & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\delta}^T & F\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{T} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}'\\ 1\end{pmatrix}=0$，即$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}'^T & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{T}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{T}^T\boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{T} & F\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}'\\ 1\end{pmatrix}=0$。

b. 移轴公式：设原二次曲线方程为$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}^T & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\delta}^T & F\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ 1\end{pmatrix}=0$，做移轴运动$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}'+\boldsymbol{\alpha_0}$，即$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{\alpha_0}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}'\\ 1\end{pmatrix}$，进而方程成为$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}'^T & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I} & 0\\ \boldsymbol{\alpha}_0^T & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A} & \boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\delta}^T & \mathrm{F}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{I} & \boldsymbol{\alpha}_0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}'\\ 1\end{pmatrix}=0$，即$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}'^T & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha_0}+\boldsymbol{\delta}\\ \boldsymbol{\alpha}_0^T\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\delta}^T & \boldsymbol{\alpha}_0^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha_0}+2\boldsymbol{\delta}^T\boldsymbol{\alpha_0}+F\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}'\\ 1\end{pmatrix}$。

4. 转轴后利用移轴进一步化简方程

转轴后方程化简为：$Ax^2+By^2+2Dx+2Ex+F=0$

a. $AB>0$：$A\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+B\left(y+\frac{E}{B}\right)^2=\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{B}-F$

i. $\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{B}-F=0$：$\Gamma$表示点$\left(-\frac{D}{A},-\frac{E}{B}\right)$。

ii. $A\left(\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{B}-F\right)>0$或$B\left(\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{B}-F\right)>0$：$\Gamma$表示椭圆。

iii. $A\left(\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{B}-F\right)<0$或$B\left(\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{B}-F\right)<0$：$\Gamma$表示虚椭圆。

b. $AB<0$：$A\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+B\left(y+\frac{E}{B}\right)^2=\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{B}-F$

i. $\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{B}-F=0$：$\Gamma$表示一对相交直线$|A|\left(x+\frac{D}{A}\right)\pm|B|\left(y+\frac{E}{B}\right)=0$。

ii. $A\left(\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{B}-F\right)>0$或$B\left(\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{B}-F\right)<0$：$\Gamma$表示焦点在x轴上的双曲线。

iii. $A\left(\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{B}-F\right)<0$或$B\left(\frac{D^2}{A}+\frac{E^2}{B}-F\right)>0$：$\Gamma$表示焦点在y轴上的双曲线。

c. $AB=0$

i. $A=0$，$B\neq0$：$B\left(y+\frac{E}{B}\right)^2+2Dx=\frac{E^2}{B}-F$

1) $D=0$：$B\left(y+\frac{E}{B}\right)^2=\frac{E^2}{B}-F$

a) $\frac{E^2}{B}-F=0$：Γ表示一条直线$y+\frac{E}{B}=0$。

b) $B\left(\frac{E^2}{B}-F\right)>0$：$\Gamma$表示一对平行直线$y+\frac{E}{B}\pm\sqrt[2]{\frac{E^2}{B^2}-\frac{F}{B}}=0$。

c) $\mathrm{B}\left(\frac{\mathrm{E}^2}{\mathrm{B}}-\mathrm{F}\right)<0$：$\Gamma$表示一对虚平行直线。

2) $D\neq0$：$B\left(y+\frac{E}{B}\right)^2+2D\left(x-\frac{E^2}{2BD}+\frac{F}{2D}\right)=0$

a) $BD>0$：Γ表示焦点在x负半轴的抛物线。

b) $BD<0$：Γ表示焦点在x正半轴的抛物线。

ii. $A\neq0$，$B=0$：$A\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+2Ey=\frac{D^2}{A}-F$

1) $E=0$：$A\left(x+\frac{D}{A}\right)^2=\frac{D^2}{A}-F$

a) $\frac{D^2}{A}-F=0$：Γ表示一条直线$x+\frac{D}{A}=0$。

b) $A\left(\frac{D^2}{A}-F\right)>0$：$\Gamma$表示一对平行直线$x+\frac{D}{A}\pm\sqrt[2]{\frac{D^2}{A^2}-\frac{F}{A}}=0$。

c) $A\left(\frac{D^2}{A}-F\right)<0$：$\Gamma$表示一对虚平行直线。

2) $E\neq0$：$A\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+2E\left(y-\frac{D^2}{2AE}+\frac{F}{2E}\right)=0$

a) $AE > 0$：Γ表示焦点在y负半轴的抛物线。

b) $AE < 0$：Γ表示焦点在y正半轴的抛物线。

§2 二次曲线的不变量

2022年1月27日 20:00

1. 迹
   a. 定义：对于n方阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，其主对角线上的所有元素直和称为$\boldsymbol{A}$的迹，记作$tr(\boldsymbol{A})$，即$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$。
   b. 性质
      i. $tr(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=tr(\boldsymbol{A})+tr(\boldsymbol{B})$
      ii. $tr(\lambda\boldsymbol{A})=\lambda tr(\boldsymbol{A})$
      iii. $tr(\boldsymbol{AB})=tr(\boldsymbol{BA})$
2. 二次曲线的不变量与半不变量
   a. 记一个一般的二次曲线$\Gamma: Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$
   b. 则曲线在转轴及移轴运动前后方程拥有不变量与半不变量。
      i. 不变量
         1) $I_1=A+B$
         2) $I_2=\begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix}$
         3) $I_3=\begin{vmatrix} A & C & D \\ C & B & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$
      ii. 半不变量
         1) $K=\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} B & E \\ E & F \end{vmatrix}$在移轴运动中保持不变。
         2) $K_1=\begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix}$，$K_2=\begin{vmatrix} B & E \\ E & F \end{vmatrix}$在$I_2=I_3=0(\Leftrightarrow A:C=C:B=D:E)$及转轴运动中保持不变。
3. 利用不变量确定二次曲线的类型
   a. $I_2>0$：$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$，其中$\lambda_1,\lambda_2$为方程$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$的两个实根
      i. $I_1I_3>0$：椭圆
      ii. $I_1I_3<0$：虚椭圆
      iii. $I_3=0$：一个点
   b. $I_2<0$：$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$，其中$\lambda_1,\lambda_2$为方程$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$的两个实根
      i. $I_3\neq 0$：双曲线
      ii. $I_3=0$：一对相交直线
   c. $I_2=0$
      i. $I_3\neq 0$：抛物线，$I_1x^2\pm 2\sqrt[2]{-\frac{I_3}{I_1}}y=0$或$I_1y^2\pm 2\sqrt[2]{-\frac{I_3}{I_1}}x=0$
      ii. $I_3=0$：$I_1x^2+\frac{K}{I_1}=0$或$I_1y^2+\frac{K}{I_1}=0$
         1) $K=0$：一对重合直线

2) $K < 0$：一对平行直线

3) $K > 0$：一对虚平行直线

§3 二次曲线的对称中心

2022年1月28日 15:19

1. 直线与二次曲线的相关位置
   a. 曲线方程及函数
      i. 二次曲线$\Gamma: Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$
      ii. 直线$l: \begin{cases} x=x_0+\mu t \\ y=y_0+\nu t \end{cases}, t\in R$
      iii. 函数
         1) $\varphi(\mu,\nu)=A\mu^2+B\nu^2+2C\mu\nu$
         2) $F(x,y)=Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F$
         3) $F_1(x,y)=Ax+Cy+D$
         4) $F_2(x,y)=Cx+By+E$
   b. Γ与l方程联立：$\varphi(\mu,\nu)t^2+2(F_1(x,y)\mu+F_2(x,y)\nu)t+F(x_0,y_0)=0$
      i. $\varphi(\mu,\nu)\neq 0$
         1) $\Delta>0$：Γ与l有两个不同的交点；
         2) $\Delta=0$：Γ与l有两个重合的交点；
         3) $\Delta<0$：Γ与l有两个不同的虚交点；
      ii. $\varphi(\mu,\nu)=0$
         1) $F_1(x,y)\mu+F_2(x,y)\nu\neq 0$：$\Gamma$与$l$有一个交点；
         2) $F_1(x,y)\mu+F_2(x,y)\nu=0$
            a) $F(x_0,y_0)=0$：$l\subset\Gamma$
            b) $F(x_0,y_0)\neq 0$：$l\cap\Gamma=\emptyset$
2. 二次曲线的渐近线
   a. 定义：设二次曲线$\Gamma: Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$，非零向量$\boldsymbol{v}=(\mu,\nu)$，称$\boldsymbol{v}$是$\Gamma$的渐进方向，如果$\varphi(\mu,\nu)=0$。
   b. 注意到$\varphi(\mu,\nu)=0\Leftrightarrow A\mu^2+B\nu^2+2C\mu\nu=0$，此方程为关于$\mu,\nu$的齐二次方程，则$\Delta=4(C^2-AB)=-4I_2$。
   c. 于是自然地，椭圆型曲线没有渐近线，双曲线型曲线有两条渐近线，抛物线型曲线有一条渐近线。
3. 二次曲线的对称中心
   a. 定义：称点O为曲线Γ的对称中心，如果对于曲线Γ上任意一点P，P关于O的对称点Q仍在曲线Γ上。
   b. 点$O(x,y)$是二次曲线$\Gamma: Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$的对称中心的充分必要条件是$(x,y)$是方程组$\begin{cases} Ax+Cy+D=0 \\ Cx+By+E=0 \end{cases}$的解。
   c. 方程组$\begin{cases} Ax+Cy+D=0 \\ Cx+By+E=0 \end{cases}$有解的充分必要条件是系数矩阵的行列式$\begin{vmatrix} A & C \\ C & B \end{vmatrix}\neq 0$，即$I_2\neq 0$。
   d. 于是自然地，椭圆型曲线和双曲线型曲线有一个对称中心，抛物线型曲线没有对称中心。

§4 二次曲线的直径和对称轴

2022年1月29日 17:17

1. 二次曲线的共轭直径
   a. 定义：对于二次曲线$\varGamma: Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$，取曲线$\varGamma$的沿非渐进方向的非零向量$(\mu,\nu)$，则平行于$(\mu,\nu)$的弦的中点所在直线称为曲线$\varGamma$的共轭于方向$(\mu,\nu)$的直径。
   b. 曲线$\varGamma$的共轭于方向(μ,ν)的直径方程为$\mu\left(Ax+Cy+D\right)+\nu\left(Cx+By+E\right)=0$，即$(A\mu+C\nu)x+(B\nu+C\mu)y+(\mu D+\nu E)=0$。
   c. 曲线$\varGamma$的共轭于方向(μ,ν)的直径方向(μ',ν')满足$\begin{pmatrix}\mu'\\ \nu'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-C & -B\\ A & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu\\ \nu\end{pmatrix}$，且$A\mu'^2+B\nu'^2+2C\mu\nu=(AB-C^2)(A\mu^2+B\nu^2+2C\mu\nu)$。
   d. 称分别共轭于方向(μ,ν)和(μ',ν')的直径为一对共轭直径。
   e. 圆锥曲线的共轭直径
      i. 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$：$\begin{cases} l_1: \frac{\mu}{a^2}x+\frac{\nu}{b^2}y=0 \\ l_2: \nu x-\mu y=0 \end{cases}$
      ii. 双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$：$\begin{cases} l_1: \frac{\mu}{a^2}x-\frac{\nu}{b^2}y=0 \\ l_2: \nu x+\mu y=0 \end{cases}$
2. 二次曲线的对称轴
   a. 定义：直线l称为曲线$\varGamma$的对称轴，如果对于曲线$\varGamma$上任意一点P，其关于直线l的对称点Q也在曲线$\varGamma$上。
   b. 对于二次曲线$\varGamma: Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$，取曲线$\varGamma$的沿非渐进方向的非零向量$(\mu,\nu)$，则共轭于方向$(\mu,\nu)$的直径$l$为对称轴当且仅当$A\mu\nu+C\nu^2=B\mu\nu+C\mu^2$。
   c. 取$(A\mu+C\nu):\mu=(B\nu+C\mu):\nu=\xi$，则有$\xi^2-(A+B)\xi+\left(AB-C^2\right)=0$，即$\xi^2-I_1\xi+I_2=0$，于是$\xi$为矩阵$\begin{vmatrix}A & C\\ C & B\end{vmatrix}$的特征根。

§5 二次曲线的切线，双曲线的渐近线

2022年1月31日　18:58

1. 二次曲线的切线和法线
    a. 定义：如果直线l与二次曲线Γ有两个重合的交点或l在Γ上，则称l为Γ的切线，l与Γ的交点为切点。
    b. 过曲线上一点做曲线的切线
        i. 二次曲线$\Gamma: Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$，过曲线上一点$P(x_0,y_0)$做曲线的切线
        ii. 若Ax_0+Cy_0+D与Cx_0+By_0+E不全为0，则切线方程为$Ax_0x+By_0y+C(x+x_0)(y+y_0)+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0$
        iii. 若$Ax_0+Cy_0+D=Cx_0+By_0+E=0$，经过$P$点的每一条直线都为曲线的切线，此时称$P$为曲线$\Gamma$的奇（异）点。
    c. 过曲线外一点做曲线的切线
        i. 二次曲线$\Gamma: Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$，过曲线上一点$P(x_0,y_0)$做曲线的切线。
        ii. 切线为$\frac{x-x_0}{\mu}=\frac{y-y_0}{\nu}$，其中$x_0,y_0,\mu,\nu$满足$\left(\mu\left(Ax_0+Cy_0+D\right)+\nu\left(Cx_0+By_0+E\right)\right)^2=(A\mu^2+B\nu^2+2C\mu\nu)(Ax_0^2+By_0^2+2Cx_0y_0+2Dx_0+2Ey_0+F)$。
        iii. 或者切线满足$\left((\mathrm{x}-\mathrm{x}_0)\left(Ax_0+Cy_0+D\right)+(y-y_0)\left(Cx_0+By_0+E\right)\right)^2=(A\left(x-x_0\right)^2+B\left(y-y_0\right)^2+2C(x-x_0)(y-y_0))(Ax_0^2+By_0^2+2Cx_0y_0+2Dx_0+2Ey_0+F)$。
2. 双曲线的渐近线
    a. 定义：沿渐进方向且经过双曲线对称中心的直线称为双曲线的渐近线。
    b. 双曲线$\Gamma: Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ex+F=0$的渐近线为$\frac{x-x_0}{\mu}=\frac{y-y_0}{\nu}$，其中$x_0,y_0,\mu,\nu$满足$\begin{cases}Ax_0+Cy_0+D=0\\Cx_0+By_0+E=0\\A\mu^2+B\nu^2+2C\mu\nu=0\end{cases}$。

※二次曲线的特殊点、特殊直线

2022年1月31日 19:23

1. 二次曲线的分类
   a. 零次：点；
   b. 一次：一条直线，一对相交直线，一对平行直线，一对虚平行直线；
   c. 二次：椭圆，虚椭圆，双曲线，抛物线。
2. 二次曲线的特殊点——对称中心
   a. 二次曲线$\Gamma: Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$
   b. 对称中心(x_0, y_0)满足$\begin{cases} Ax_0+Cy_0+D=0 \\ Cx_0+By_0+E=0 \end{cases}$。
3. 二次曲线的特殊直线
   a. 渐近方向
      i. 二次曲线$\Gamma: Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$
      ii. 非零的渐进方向量(μ, ν)满足$A\mu^2+B\nu^2+2C\mu\nu=0$。
   b. 共轭直径
      i. 二次曲线$\Gamma: Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$的共轭于方向$(\mu, \nu)$的直径方程为$\mu(Ax+Cy+D)+\nu(Cx+By+E)=0$，即$(A\mu+C\nu)x+(B\nu+C\mu)y+(\mu D+\nu E)=0$。
      ii. 二次曲线$\Gamma: Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$的共轭于方向$(\mu, \nu)$的直径方向$(\mu', \nu')$满足$\begin{pmatrix} \mu' \\ \nu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C & -B \\ A & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix}$，且$A\mu'^2+B\nu'^2+2C\mu\nu=(AB-C^2)(A\mu^2+B\nu^2+2C\mu\nu)$。
      iii. 称分别共轭于方向(μ, ν)和(μ', ν')的直径为一对共轭直径。
   c. 对称轴
      i. 对于二次曲线$\Gamma: Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$，取曲线$\Gamma$的沿非渐进方向的非零向量$(\mu, \nu)$，则共轭于方向$(\mu, \nu)$的直径为对称轴当且仅当$A\mu\nu+C\nu^2=B\mu\nu+C\mu^2$。
      ii. 取$(A\mu+C\nu):\mu=(B\nu+C\mu):\nu=\xi$，则有$\xi^2-(A+B)\xi+(AB-C^2)=0$，即$\xi^2-I_1\xi+I_2=0$，于是$\xi$为矩阵$\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{C} \\ \mathrm{C} & \mathrm{B} \end{vmatrix}$的特征根。
   d. 切线
      i. 二次曲线$\Gamma: Ax^2+By^2+2Cxy+2Dx+2Ey+F=0$，过曲线上一点$P(x_0, y_0)$做曲线的切线。
      ii. 切线为$\frac{x-x_0}{\mu}=\frac{y-y_0}{\nu}$，其中$x_0, y_0, \mu, \nu$满足$\left(\mu(Ax_0+Cy_0+D)+\nu(Cx_0+By_0+E)\right)^2=(A\mu^2+B\nu^2+2C\mu\nu)(Ax_0^2+By_0^2+2Cx_0y_0+2Dx_0+2Ey_0+F)$。
      iii. 或者切线满足$\left((x-x_0)(Ax_0+Cy_0+D)+(y-y_0)(Cx_0+By_0+E)\right)^2=(A(x-x_0)^2+B(y-y_0)^2+2C(x-x_0)(y-y_0))(Ax_0^2+By_0^2+2Cx_0y_0+2Dx_0+2Ey_0+F)$。

第六章 正交变换和仿射变换

2022年2月4日 16:31

§1 映射

2022年2月4日 16:31

1. 映射
   a. 定义
      i. 设A和B是两个非空集合，如果A到B有一个对应的法则f，使得对A的每一个元素a，都在B中有唯一确定的元素b与其对于，那么称f是集合A到集合B的一个映射，记作$f: A \to B$，$a \mapsto b$。
      ii. b称为a在f下的像，记作$f(a)$；a称为b在f下的一个原像。
      iii. A称做f的定义域，B称做f的陪域；f的值域记作$f(A) = \{f(a): a \in A\}$。显然$f(A) \subseteq B$。
   b. 满射，单射与双射
      i. 若$f(A) = B$，则称f为满射。
      ii. 若对于$\forall a_1, a_2 \in A$，$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$，则称$f$为单射。
      iii. 若f既是单射又是满射，则称f为双射。
2. 平面中的平移、旋转和反射
   a. 平移：给定平面π以及向量$\boldsymbol{v}$，定义映射$\sigma: \pi \to \pi$，对于π中任意一点P，记$Q = \sigma(P)$，则Q为一点且$\overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{v}$，则称映射$\sigma$为平移映射。
   b. 旋转：给定平面π，其上一点O以及角度θ，定义映射$\sigma: \pi \to \pi$，对于π中任意一点P，记$Q = \sigma(P)$，则Q为一点且若$P = O$，则$\mathrm{Q} = \mathrm{O}$；反之则$|OP| = |OP'|$，$\measuredangle POP' = \theta$，称映射$\sigma$为旋转映射。
   c. 反射：给定平面π以及其上一条直线l，定义映射$\sigma: \pi \to \pi$，对于π中任意一点P，记$Q = \sigma(P)$，则Q为一点，若$P \in l$，则$P = Q$；反之，则线段PP'被l垂直平分，称映射σ为旋转映射。
3. 映射的乘法与可逆映射
   a. 映射的乘法
      i. 定义：设映射$f: A \to B$，$g: B \to C$，则映射f与g的乘积记作$gf: A \to C$，对于$\forall a \in A$，$(gf)(a) = g(f(a))$。
      ii. 性质
         1) 映射的乘法满足结合律：在有意义的情况下$h(gf) = (hg)f$。
         2) 恒等映射：
            a) 定义：$I_A: A \to A$，对于$\forall a \in A$，$I(a) = a$。
            b) 性质：在有意义的情况下，对于任意一个映射f，有$fI = f$，$If = f$。
   b. 可逆映射
      i. 定义：对于映射$f: A \to B$，若存在映射$g: B \to A$，使使得$gf = I_A$且$fg = I_B$，则称f为可逆映射，g为f的一个逆映射，记作$g = f^{-1}$。
      ii. 性质
         1) 唯一性：可逆映射的逆映射是唯一的。
         2) 映射$f: A \to B$为可逆映射的充分必要条件是f是双射。

§2 平面的正交变换

2022年2月4日　16:31

1. 正交变换的定义
   a. 平面上一个点的变换，如果保持任意两点的距离不变，则称其为正交（点）变换（保距变换）。
   b. 当正交点变换σ作用到向量时，定义为$\sigma\left(\overrightarrow{PQ}\right)=\overrightarrow{P'Q'}$，其中$\sigma(P)=P'$，$\sigma(Q)=Q'$，称为正交向量变换。
2. 性质
   a. 正交点变换的性质
      i. 正交变换的乘积是正交变换；
      ii. 恒等变换是正交变换；
      iii. 正交变换把共线的三点映成共线的三点，并且保持顺序不变；正交变换把不共线的三点映成不共线的三点；
      iv. 正交变换把直线映成直线，把线段映成线段，并且保持线段的分比不变；
      v. 正交变换是可逆的，并且其逆变换也是正交变换；
      vi. 正交变换把平行直线映成平行直线。
   b. 正交向量变换的性质
      i. $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$；
      ii. $\sigma(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda\sigma(\boldsymbol{\alpha})$；
      iii. 保持向量的长度不变；
      iv. 保持向量的夹角不变；
      v. 保持向量的内积不变。
   c. 正交变换基本定理
      i. 第一基本定理：平面上的点变换σ是正交变换的充分必要条件是σ把任意一个正交标架Ⅰ变为一个直角标架Ⅱ，并且使得任意一点P的Ⅰ坐标等于其像P'的Ⅱ坐标；
      ii. 第二基本定理：平面上正交变换或者是平移，或者是旋转，或者是反射，或者是其之间的乘积。其中平移、旋转以及其之间的乘积称为刚体运动。
3. 正交变换的代数化（以右手坐标系为基础）
   a. 平移：将坐标系原点平移到(x_0,y_0)——$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$；
   b. 旋转：将坐标系绕原点顺时针旋转θ——$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cos\,\theta & -sin\,\theta\\ sin\,\theta & cos\,\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$；
   c. 反射：将右手坐标系变为左手坐标系——$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$；
   d. 对称：关于直线$Ax+By+C=0$对称的点变换——$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{A^2-B^2}{A^2+B^2} & -\frac{2AB}{A^2+B^2}\\ -\frac{2AB}{A^2+B^2} & \frac{A^2-B^2}{A^2+B^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+2C\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$

§3 平面的仿射变换

2022年2月6日 23:12

1. 仿射变换的定义：平面上一个点的变换，如果把任意共线的三点映成共线的三点，则称其为仿射（点）变换。
2. 仿射变换的分类
   a. 正交变换
      i. 平移
      ii. 旋转
      iii. 反射
   b. 位似
      i. 定义：平面上取定一点O，把平面上任意一点P对应到点P'，使得$\overrightarrow{OP'}=k\overrightarrow{OP}$，其中$k$是一个非零常数，平面上这种点变换称为位似变换，其中O称为位似中心，k称为位似比。特别的，位似变换保持位似中心不变。
      ii. 性质
         1) 位似比为k的位似变换把线段映成线段，且线段比为$|k|$；
         2) 位似变换是可逆的。互逆的位似变换的位似比成倒数，位似中心不变。
   c. 压缩
      i. 定义：平面上给定一条直线l和一个非零向量$\boldsymbol{v}$，其中$\boldsymbol{v}$不是l的方向向量。如果平面上的一个点变换把平面上任意一点P对应到点P'，使得$\overrightarrow{PP'}\parallel\boldsymbol{v}$且$\overrightarrow{OP'}=k\overrightarrow{OP}$，其中$O$是直线$PP'$与$l$的交点，$k$是一个非零常数，那么称这种点变换为压缩，其中$l$称为压缩轴，$\boldsymbol{v}$称为压缩方向，$k$称为压缩系数。特别的，当$\boldsymbol{v}\perp l$时称为正压缩。
      ii. 性质
         1) 在以y轴为压缩轴且压缩系数为k的正压缩下，平面上曲线$F(x,y)=0$的像是曲线$F(k^{-1}x,y)=0$；
         2) 压缩把共线的三点映成共线的三点，把不共线的三点映成不共线的三点；
         3) 压缩变换是可逆的。互逆的压缩变换的压缩轴不变，压缩方向相反，压缩系数成倒数。
   d. 错切
      i. 定义：平面上给定一条直线l和一个l的方向向量$\boldsymbol{v}$，如果平面上的一个点变换把平面上任意一点P对应到点P'，使得$\overrightarrow{PP'}\parallel\boldsymbol{v}$，$|OP'|=k|OP|$，其中$O$是点$P$到$l$的垂足，$k$是一个非零常数，并且对于$l$一侧的点$P$有$\overrightarrow{PP'}$与$\boldsymbol{v}$同向，对于$l$另一侧的点$P$有$\overrightarrow{PP'}$与$\boldsymbol{v}$异向，那么称这种点变换为压缩，其中$l$称为错切轴，$k$称为错切系数。特别的，错切变换保持错切轴不变。
      ii. 性质
         1) 错切把共线的三点映成共线的三点，把不共线的三点映成不共线的三点；
         2) 错切变换是可逆的。互逆的错切变换的错切轴不变，压缩系数成倒数。
3. 仿射变换的性质
   a. 仿射变换是线性变换加平移；
   b. 仿射变换保持线段的分比不变；
   c. 仿射变换把不共线的三点映成不共线的三点；
   d. 仿射变换把直线映成直线；
   e. 仿射变换把平行直线映成平行直线；
   f. 仿射变换是可逆的，且逆变换也是仿射变换；
   g. 仿射变换的乘积还是仿射变换；
   h. 仿射变换基本定理：设σ是平面上的一个变换，Ⅰ$[O;d_1,d_2]$是仿射坐标系$\sigma(O)=O'$，$\sigma(d_1)=d_1'$，$\sigma(d_2)=d_2'$，则σ是仿射变换的充分必要条件是Ⅱ$[O';d_1',d_2']$也是仿射坐标系并且使得任意一点P的Ⅰ坐标等于其像P'的Ⅱ坐标；
   i. 把Ⅰ仿射坐标系映成Ⅱ仿射坐标系的仿射变换存在且存在唯一；

j. 设σ是平面上的一个变换，Ⅰ$[O;d_1,d_2]$是仿射坐标系$\sigma(O)=O'$，$\sigma(d_1)=d_1'$，$\sigma(d_2)=d_2'$，O'，d_1'，d_2'，任意一点P及其像点P'的Ⅰ坐标分别为(x_0,y_0)，(a_{11},a_{12})，(a_{21},a_{22})，(x,y)，(x',y')，则σ是仿射变换的充分必要条件是$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$，其中$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$为可逆矩阵，并称之为仿射变换$\sigma$在Ⅰ仿射坐标系中的系数矩阵。

4. 仿射变换的变积系数
   a. 仿射变换σ的系数矩阵的行列式称为σ的行列式，记作d_σ。
   b. 如果$d_\sigma>0$，则称σ为第一类的；反之，称σ为第二类的。
   c. 若平面上任意有面积的区域D经过仿射变换σ映成区域D'，则有$\frac{S_{D'}}{S_D}=d_\sigma$，其中$S_{D'}$，$S_D$分别表示$D$，$D'$的有向面积。
5. 仿射变换的代数化
   a. 平移：将坐标系原点平移到(x_0,y_0)——$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$;
   b. 旋转：将坐标系绕原点顺时针旋转θ——$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$;
   c. 反射：将右手坐标系变为左手坐标系——$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$;
   d. 位似：以(x_0,y_0)为位似中心，以k为位似比——$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+(1-k)\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$;
   e. 压缩：以$Ax+By+C=0$为压缩轴，以(μ,ν)为压缩方向，以k为压缩系数——$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{kA\mu+B\nu}{A\mu+B\nu}&\frac{(k-1)B\mu}{A\mu+B\nu}\\\frac{(k-1)A\nu}{A\mu+B\nu}&\frac{A\mu+kB\nu}{A\mu+B\nu}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\frac{(k-1)C}{A\mu+B\nu}\begin{pmatrix}\mu\\\nu\end{pmatrix}$，其中$det\begin{pmatrix}\frac{kA\mu+B\nu}{A\mu+B\nu}&\frac{(k-1)B\mu}{A\mu+B\nu}\\\frac{(k-1)A\nu}{A\mu+B\nu}&\frac{A\mu+kB\nu}{A\mu+B\nu}\end{pmatrix}=k$;
   f. 错切：以$Ax+By+C=0$为错切轴，以k为错切系数——$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{A^2+B^2+kAB}{A^2+B^2}&\frac{kB^2}{A^2+B^2}\\\frac{kA^2}{A^2+B^2}&\frac{A^2+B^2+kAB}{A^2+B^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\frac{kC}{A^2+B^2}\begin{pmatrix}B\\A\end{pmatrix}$，其中$det\begin{pmatrix}\frac{A^2+B^2+kAB}{A^2+B^2}&\frac{kB^2}{A^2+B^2}\\\frac{kA^2}{A^2+B^2}&\frac{A^2+B^2+kAB}{A^2+B^2}\end{pmatrix}=\frac{A^2+B^2+2ABk}{A^2+B^2}$。

§4 图形的度量性质和仿射性质

2022年2月7日 23:51

1. 度量性质和仿射性质
   a. 定义：在任意正交变换下不变的几何性质、几何量或几何概念称为度量性质、正交不变量或度量概念；在任意仿射变换下不变的几何性质、几何量或几何概念称为仿射性质、仿射不变量或仿射概念。
   b. 分类
      i. 正交变换
         1) 度量性质
            a) 垂直；
            b) 轴对称。
         2) 正交不变量
            a) 点之间的距离；
            b) 向量的长度；
            c) 两向量的夹角；
            d) 图形的面积；
            e) 二次曲线的I_1, I_2, I_3。
         3) 度量概念
            a) 距离；
            b) 角度；
            c) 面积；
            d) 对称轴；
            e) 角平分线。
      ii. 仿射变换
         1) 仿射性质
            a) 共线；
            b) 平行；
            c) 相交；
            d) 共线点的顺序；
            e) 中心对称；
            f) 一点是三角形内部的点。
         2) 仿射不变量
            a) 线段的分比；
            b) 代数曲线的次数；
         3) 仿射概念
            a) 直线；
            b) 线段及其中点；
            c) 中线；
            d) 重心；
            e) 对称中心；
            f) 代数曲线；
            g) 二次曲线的渐进方向、非渐进方向；
            h) 二次曲线的直径；
            i) 中心型二次曲线的共轭直径；
            j) 二次曲线的切线。

2. 定义 变换群：集合S到自身的一些双射组成的集合G，如果满足以下性质则称G是集合S的一个变换群。
   a. 对于$\forall \sigma, \tau \in G$，都有$\sigma\tau \in G$；
   b. $1_S \in G$；
   c. 对于$\forall \sigma \in G$，都存在σ^{-1}且$\sigma^{-1} \in G$。
3. 图形的正交等价和仿射等价
   1. 等价
      i. 定义：若关系R在集合S中是自反、对称和传递的，则称R为S上的等价关系。所谓关系R就是笛卡尔积(Cartesian product)$S \times S$中的一个子集。
      ii. S中的两个元素x, y有关系R，如果$(x, y) \in R \times R$。我们常简记为 xRy。x, y具有等价关系R，则称x, y R等价，有时亦简称等价。
      iii. 自反：对于$\forall x \in S$，则x与自己具有关系R，即xRx；
      iv. 对称：对于$\forall x, y \in S$，如果x与y具有关系R，即xRy，则y与x也具有关系R，即yRx；
      v. 传递：对于$\forall x, y, z \in S$，如果xRy且yRz，则xRz。
   2. 正交等价与放射等价
      i. 正交等价
         1) 定义：称平面上的图形S_1, S_2正交等价，如果存在一个正交变换σ把S_1映成S_2，记作$S_1 \sim S_2$。对于平面上的每个图形S，所有与S正交等价的图形组成的集合记作$[S]$，称$[S]$是平面上图形的一个正交等价类。
         2) 性质
            a) 若$S \sim T$，则$[S] = [T]$；
            b) 平面上每个图形属于且只属于一个正交等价类；
            c) 同一正交等价类里的任意两个图形必正交等价；
            d) 不同正交等价类里的两个图形不正交等价。
      ii. 仿射等价
         1) 定义：称平面上的图形S_1, S_2仿射等价，如果存在一个仿射变换σ把S_1映成S_2，记作$S_1 \sim S_2$。对于平面上的每个图形S，所有与S仿射等价的图形组成的集合记作$[S]$，称$[S]$是平面上图形的一个仿射等价类。
         2) 性质
            a) 若$S \sim T$，则$[S] = [T]$；
            b) 平面上每个图形属于且只属于一个仿射等价类；
            c) 同一仿射等价类里的任意两个图形必仿射等价；
            d) 不同仿射等价类里的两个图形不仿射等价。
      iii. 举例
         1) 平面上所有平行四边形构成一个仿射类；
         2) 平面上所有三角形构成一个仿射类；
         3) 平面上所有梯形构成无穷多个仿射类，从而平面上的四边形有无穷多个仿射类。

§5 二次曲线的正交分类和仿射分类

2022年2月8日 11:54

1. 二次曲线有9个仿射类
   a. 椭圆型
      i. $x^2 + y^2 = 1$
      ii. $x^2 + y^2 = -1$
      iii. $x^2 + y^2 = 0$
   b. 双曲线型
      i. $x^2 - y^2 = 1$
      ii. $x^2 - y^2 = 0$
   c. 抛物线型
      i. $y^2 = x$
      ii. $y^2 = 1$
      iii. $y^2 = -1$
      iv. $y^2 = 0$
2. 二次曲线有9个正交类
   a. 椭圆型
      i. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
      ii. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
      iii. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
   b. 双曲线型
      i. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
      ii. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
   c. 抛物线型
      i. $y^2 = 2px$

ii. $y^2 = a^2$

iii. $y^2 = -a^2$

iv. $y^2 = 0$

其中a, b, p可以取任意正实数，在椭圆型曲线中$a \geq b$。

§6 几何空间的正交变换和仿射变换

2022年2月8日 16:01

1. 正交变换
   a. 定义
      i. 几何空间的一个点变换，如果保持任意两点距离不变，那么称其为正交（点）变换（或保距变换）。
      ii. 当正交点变换σ作用到向量时，定义为$\sigma\left(\overrightarrow{PQ}\right)=\overrightarrow{P'Q'}$，其中$\sigma(P)=P'$，$\sigma(Q)=Q'$，称为正交向量变换。
   b. 分类
      i. 平移；
      ii. 绕一条定直线的旋转；
      iii. 关于平面的镜面反射。
   c. 性质
      i. 正交点变换的性质
         1) 正交变换的乘积是正交变换；
         2) 恒等变换是正交变换；
         3) 正交变换是双射；
         4) 正交变换是可逆的，并且其逆变换也是正交变换；
         5) 正交变换把共线的三点映成共线的三点，并且保持顺序不变；正交变换把不共线的三点映成不共线的三点；
         6) 正交变换把直线映成直线，把线段映成线段，并且保持线段的分比不变；
         7) 正交变换把平面映成平面；
         8) 正交变换把平行直线映成平行直线，把平行平面映成平行平面；
         9) 正交变换把相交直线映成相交直线，把相交平面映成相交平面。
      ii. 正交向量变换的性质
         1) $\sigma\left(\alpha+\beta\right)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$；
         2) $\sigma(\lambda\alpha)=\lambda\sigma(\alpha)$；
         3) 保持向量的长度不变；
         4) 保持向量的夹角不变；
         5) 保持向量的内积不变。
      iii. 正交变换基本定理
         1) 第一基本定理：平面上的点变换σ是正交变换的充分必要条件是σ把任意一个正交标架Ⅰ变为一个直角标架Ⅱ，并且使得任意一点P的Ⅰ坐标等于其像P'的Ⅱ坐标；
         2) 第二基本定理：几何空间的正交变换或者是平移，或者是绕一条定直线旋转，或者是镜面反射，或者是其之间的乘积；
         3) 把Ⅰ直角坐标系映成Ⅱ直角坐标系的正交变换存在且存在唯一。
2. 仿射变换
   a. 定义：几何空间的一个点变换，如果其在一个仿射坐标系中的公式为$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{pmatrix}$，其中$det\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\neq 0$，则称该点变换为几何空间的仿射（点）变换。
   b. 性质

i. 仿射变换是线性变换加平移；
ii. 仿射变换的乘积仍是仿射变换；
iii. 恒等变换是仿射变换；
iv. 仿射变换是双射；
v. 仿射变换是可逆的，并且其逆变换也是仿射变换；
vi. 仿射变换把共线的三点映成共线的三点，并且保持顺序不变；仿射变换把不共线的三点映成不共线的三点；
vii. 仿射变换把直线映成直线，把线段映成线段，并且保持线段的分比不变；
viii. 仿射变换把平面映成平面；
ix. 仿射变换把平行直线映成平行直线，把平行平面映成平行平面；
x. 仿射变换把相交直线映成相交直线，把相交平面映成相交平面；
xi. 平面上的点变换σ是正交变换的充分必要条件是σ把任意一个正交标架 I 变为一个直角标架 II，并且使得任意一点P的 I 坐标等于其像P'的 II 坐标；
xii. 把 I 仿射坐标系映成 II 仿射坐标系的仿射变换存在且存在唯一；
xiii. 几何空间中任给两组不共面的四点P_1, P_2, P_3, P_4和$P_1', P_2', P_3', P_4{}'$，必然存在唯一的仿射变换把P_i映成$P_i'(i = 1,2,3,4)$。

c. 仿射变换的变积系数
   a. 仿射变换σ的系数矩阵的行列式称为σ的行列式，记作d_σ。
   b. 如果$d_\sigma > 0$，则称σ为第一类的；反之，称σ为第二类的。
   c. 若平面上任意有体积的区域D经过仿射变换σ映成区域D'，则有$\frac{V_{D'}}{V_D} = d_\sigma$，其中$V_{D'}$，$V_D$分别表示$D$，$D'$的有向体积。

第七章 射影平面和其射影变换

2022年2月10日 12:41

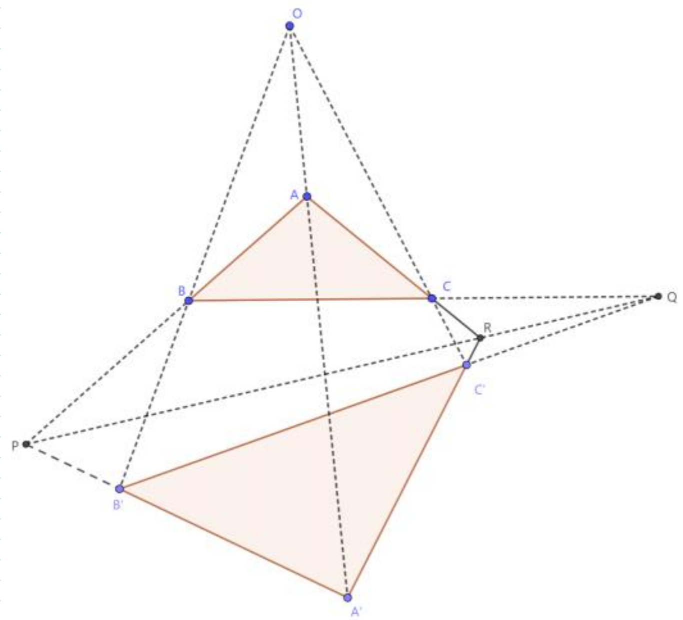
§1 射影平面，齐次坐标

2022年2月10日 12:42

1. 中心为O的把，扩大的欧几里得平面，射影平面
   a. 关联：点P在直线l上，称之为点P与直线l关联；直线l经过点P，称之为直线l与点P关联。
   b. 中心为O的把：将一个点关联的所有平面和直线构成的集合称之为中心为O的把。
   c. 扩大的欧几里得平面：欧几里得平面π加上无穷远点以及无穷远直线构成扩大的欧几里得平面，记作$\bar{\pi}$。
   d. 无穷远点与无穷远直线
      i. 平行直线交于无穷远点；
      ii. 无穷远点均在无穷远直线上。
   e. 称一个关联结构是一个射影平面，如果
      i. 任给两个不同的点恰好在一条直线上；
      ii. 任给两条不同的线相交于唯一的一个点；
      iii. 存在四个不同的点，其中任意三点都不在一条线上。
   f. 点，线，面的对应
      i. 点与线：取扩大的欧几里得平面$\bar{\pi}$外一点O，则$\bar{\pi}$上的平常点P与直线OP所对应；$\bar{\pi}$上的无穷远点Q，在$\bar{\pi}$上取经过Q的一条直线l'，过O做$l \parallel l'$，则Q与l所对应。
      ii. 线与面：扩大的欧几里得平面$\bar{\pi}$外一点O，则$\bar{\pi}$上的平常直线l与过点O和直线l的平面所对应；$\bar{\pi}$上的无穷远直线与过点O且平行于π的直线相对应。
2. 点的齐次坐标
   a. 定义：在扩大的欧几里得平面$\bar{\pi}$上，取欧几里得平面π的一组仿射基底$[O';d_1,d_2]$，$\bar{\pi}$外一点O，令$d_3=\overrightarrow{OO'}$，则得到一组仿射基底$[O;d_1,d_2,d_3]$。对于扩大的欧几里得平面$\bar{\pi}$上一点P的坐标定义为点P所对应的直线的方向向量。
   b. 齐次性：(x_1,x_2,x_3)与$\lambda(x_1,x_2,x_3)$表示同一点。
3. 直线的齐次坐标
   a. 直线方程
      i. 一般方程：在扩大的欧几里得平面$\bar{\pi}$上，取欧几里得平面π的一组仿射基底$[O';d_1,d_2]$，$\bar{\pi}$外一点O，令$d_3=\overrightarrow{OO'}$，则得到一组仿射基底$[O;d_1,d_2,d_3]$。设点$A(a_1,a_2,a_3)$和点$B(b_1,b_2,b_3)$，则直线AB的方程为$\eta_1x_1+\eta_2x_2+\eta_3x_3=0$，其中$\eta_1=\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}$，$\eta_2=\begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_1 & b_1\end{vmatrix}$，$\eta_3=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$。
      ii. 参数方程：在扩大的欧几里得平面$\bar{\pi}$上，取欧几里得平面π的一组仿射基底$[O';d_1,d_2]$，$\bar{\pi}$外一点O，令$d_3=\overrightarrow{OO'}$，则得到一组仿射基底$[\mathrm{O};\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2,\mathrm{d}_3]$。设点$A(a_1,a_2,a_3)$和点$B(b_1,b_2,b_3)$，则直线AB的方程为$\begin{cases}x_1=\mu a_1+\nu b_1\\ x_2=\mu a_2+\nu b_2\\ x_3=\mu a_3+\nu b_3\end{cases}$。
   b. 直线的齐次坐标
      i. 定义：在扩大的欧几里得平面$\bar{\pi}$上，取欧几里得平面π的一组仿射基底$[O';d_1,d_2]$，$\bar{\pi}$外一点O，令$d_3=\overrightarrow{OO'}$，则得到一组仿射基底$[O;d_1,d_2,d_3]$。则直线l可表示为l:$\eta_1x_1+\eta_2x_2+\eta_3x_3=0$，称$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$为直线$l$的齐次坐标，$\eta_1x_1+\eta_2x_2+\eta_3x_3=0$为直线$l$的点方程。
      ii. 齐次性：(η_1,η_2,η_3)与$\lambda(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$表示同一条直线。

§2 射影平面上的对偶原理

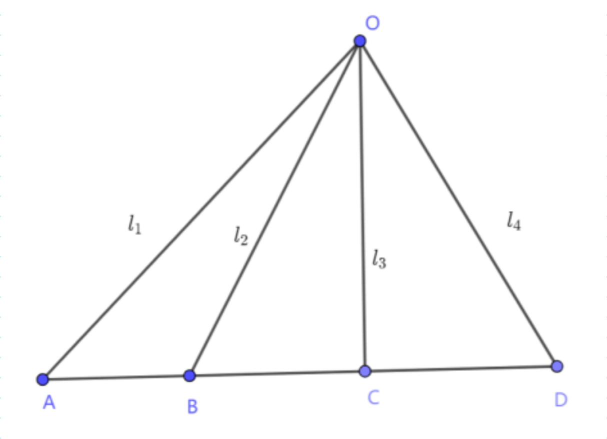
2022年2月11日 15:33

1. 对偶原理：射影平面上，如果一个命题φ(点，线)成立，则其对偶命题φ(线，点)亦成立。
2. 例
   a. 命题1
      i. 原命题：射影平面上三点共线的充分必要条件是其齐次坐标构成的三阶行列式等于零。
      ii. 对偶命题：射影平面上三线共点的充分必要条件是其齐次坐标构成的三阶行列式等于零。
   b. 命题2
      i. 原命题：射影平面上，若三点不共线，则由该三点连成的三线不共点。
      ii. 对偶命题：射影平面上，若三线不供电，则由该三线交成的三点不共线。
   c. 命题3
      i. 原命题：直线（看成点列）的点方程是三元一次齐次方程。
      ii. 对偶命题：点（看成线束）的线方程是三元一次齐次方程。
3. 德沙格定理 (Desargue's Theorem)
   a. 原命题：射影平面上，若两个三角形的对应顶点连线共点，则其对应边的交点共线。
   b. 对偶命题：射影平面上，若两个三角形的对应边的交点共线，则其对应顶点连线共点。
   c. 

§3 交比

2022年2月11日　　15:33

1. 有向值
   a. 有向线段：在一维空间上，选取单位正方向向量$\boldsymbol{e}$，设两点P,Q，则定义有向线段$\overline{PQ}=\lambda$，其中$\overrightarrow{PQ}=\lambda e$。
   b. 有向角度：空间中，设一对相交直线u,v，有交点O，则定义有向角度$\langle u,v\rangle$为直线u绕点O转至直线v所需的角度。
2. 交比的定义和性质
   a. 设共线的三点A,B,C，则规定$(A,B,C)=\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$。
   b. 设共点的三线l_1,l_2,l_3，则规定$\left(l_1,l_2,l_3\right)=\frac{sin\langle l_1,l_3\rangle}{sin\langle l_3,l_2\rangle}$。
   c. 交比
      i. 点的交比：设A,B,C,D为射影平面上共线的四点，A,B为平凡点，且仅点C,D可为同一点，将(A,B,C)与(A,B,D)的比值称为A,B,C,D的交比，记作$(A,B;C,D)$，即$(A,B;C,D)=\frac{(A,B,C)}{(A,B,D)}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}\Big/\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}\cdot\frac{\overline{DB}}{\overline{AD}}$。
      ii. 线的交比：设l_1,l_2,l_3,l_4为射影平面上共点的四线，$l_1\neq l_2$，则(l_1,l_2,l_3)与(l_1,l_2,l_4)的比值称为l_1,l_2,l_3,l_4的交比，记作$(l_1,l_2;l_3,l_4)$，即$\left(l_1,l_2;l_3,l_4\right)=\frac{(l_1,l_2,l_3)}{(l_1,l_2,l_4)}=\frac{sin\langle l_1,l_3\rangle}{sin\langle l_3,l_2\rangle}\Big/\frac{sin\langle l_1,l_4\rangle}{sin\langle l_4,l_2\rangle}=\frac{sin\langle l_1,l_3\rangle}{sin\langle l_3,l_2\rangle}\cdot\frac{sin\langle l_4,l_2\rangle}{sin\langle l_1,l_4\rangle}$。
      iii. 关系如下图



$(A,B;C,D)=(l_1,l_2;l_3,l_4)$

   d. 性质
      i. 设A,B,C,D为射影平面上共线的四点，A,B,C各不相同，$D\neq A$。A,B,C,D的齐次坐标分别为$\left(a_1,a_2,a_3\right),\left(b_1,b_2,b_3\right),\left(c_1,c_2,c_3\right),\left(d_1,d_2,d_3\right)$，且满足$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\mu_1\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}=\lambda_2\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\mu_2\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$，则$(A,B;C,D)=\frac{\lambda_2}{\mu_2}\Big/\frac{\lambda_1}{\mu_1}$。
      ii. 设A_1,A_2,A_3,A_4为射影平面上共线的四点，A_1,A_2,A_3各不相同，$A_1\neq A_4$，A_i的齐次坐标为(x_{i1},x_{i2},x_{i3})。$P(p_1,p_2,p_3)$和$Q(q_1,q_2,q_3)$为该直线上两点。设$\begin{pmatrix}x_{i1}\\x_{i2}\\x_{i3}\end{pmatrix}=\lambda_i\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}+$

iii. $(A,B;C,D)=(C,D;A,B)=(B,A;D,C)$；
iv. $(A,B;C,D)\cdot(B,A;C,D)=1$；
v. $(A,B;C,D)+(A,C;B,D)=1$。

3. 调和点列和调和线束
   a. 交比为-1的四点称为调和点列。
   b. 交比为-1的四线称为调和线束。

§4 射影坐标和射影坐标变换

2022年2月11日 17:55

1. 射影坐标
   a. 点的射影坐标：取把O的三条不共面的直线，各取其方向向量d_1, d_2, d_3，则扩大的欧几里得平面π上任意一点P的坐标定义为点P所对应的直线在仿射标架$[O; d_1, d_2, d_3]$下的方向向量。
   b. 直线的射影坐标：取把O的三条不共面的直线，各取其方向向量$\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \mathrm{d}_3$，则扩大的欧几里得平面π上任意一条直线l的坐标定义为直线l所对应的平面的法向量。
2. 射影坐标变换公式：$\lambda\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$。

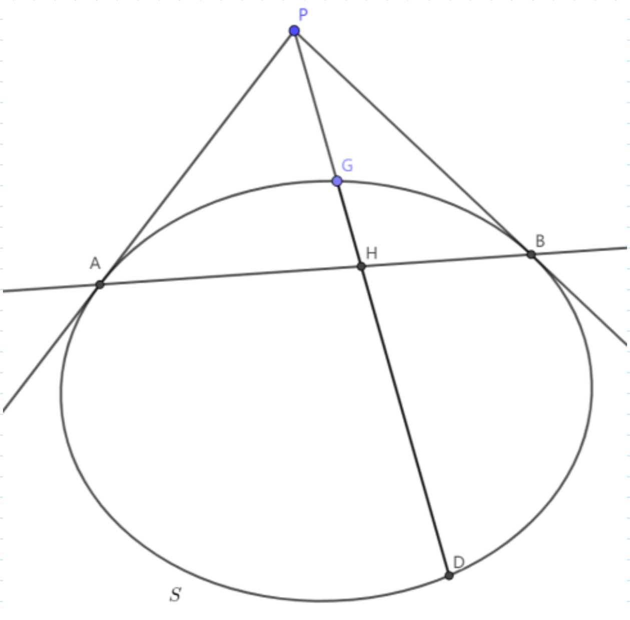
§5 射影映射和射影变换

2022年2月11日 17:55

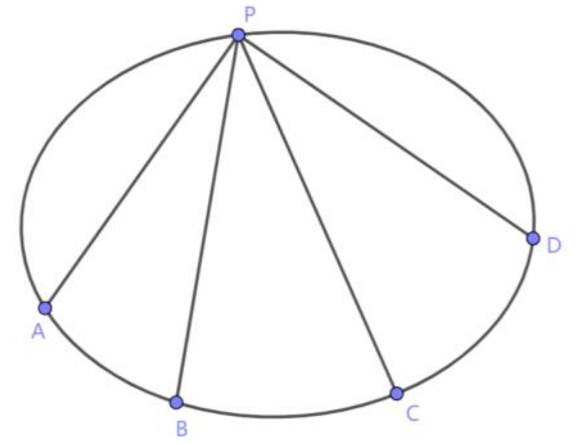
1. 射影映射射影平面的点集到射影平面的点集的双射，如果把共线的三点映成共线的三点，则称之为射影映射。
2. 性质
   i. 射影映射为线性映射；
   ii. 射影映射的乘积为射影映射；
   iii. 射影映射把不共线的三点映成不共线的三点；
   iv. 射影映射是可逆的，其逆映射也是射影映射；
   v. 射影映射把直线映成直线；
   vi. 射影映射把一般位置的四点映成一般位置的四点；
   vii. 射影映射保持共线四点交比不变；
   viii. 射影映射保持共点四线交比不变
3. 射影映射坐标公式：$\lambda\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$。
4. 射影平面到自身的射影映射称为射影变换。

§6 配极，二次曲线的射影分类

2022年2月11日 17:55

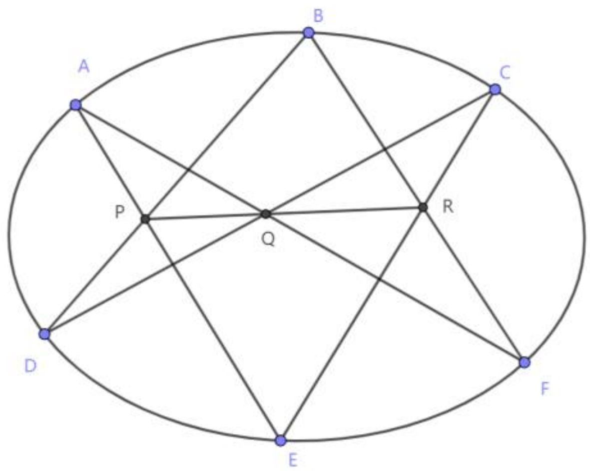
1. 射影平面上的二次曲线
   a. 方程：$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fzx=0$。
   b. 矩阵：$F(x,y,z)=(x\quad y\quad z)\begin{pmatrix}A & D & E\\ D & B & F\\ E & F & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$。
   c. 分类
      i. 欧氏平面上9种及渐进方向上的无穷远点；
      ii. 一条射影直线$Ax^2+2Dxy+2Fzx=0$和一条无穷远直线；
      iii. 一对重合的无穷远直线。
2. 极点和极线
   a. 射影平面上，取点P不在二次曲线S上，过点P做直线l交S于点G, H两点，则做调和点列G, H, P, Q，则点Q的轨迹称做点P关于曲线S的配极，配极也成为极线，点P关于配极而言称为极点。
   b. 

   c. 点$P(x_0,y_0,z_0)$关于二次曲线$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fzx=0$的极线方程为$Ax_0x+By_0y+Cz_0z+Dy_0x+Dx_0y+Ez_0y+Ey_0z+Fx_0z+Fz_0x=0$。
   d. 性质
      i. 点P的极线上任意一点Q的极线经过点P；
      ii. 点P的极线经过点P的充分必要条件是点P在二次曲线S上。
3. 二次曲线的射影分类
   a. $x^2+y^2+z^2=0$；
   b. $x^2+y^2-z^2=0$；
   c. $x^2+y^2=0$；
   d. $x^2-y^2=0$；
   e. $x^2=0$。
4. 定理
   a. 斯坦纳定理（Steiner Theory）
      i. 给定一个非退化的二次曲线S，取其上任意五点P, A, B, C, D，做弦PA, PB, PC, PD，则四线PA, PB, PC, PD的交比为一常数。

ii. 

b. 帕斯卡定理（Pascal Theory）

i. 非退化二次曲线的内接六边形的三对对边的交点共线。

ii. 

c. 布里昂香定理（Brianchon Theory）

i. 非退化二次曲线外切六边形的对顶点所连直线共点。

ii.