第一章

1.1 第一节

1.1.1 第一题

写出集合$X=\{a,b\}$的所有拓扑。

解：

$$\{\varnothing,\{a,b\}\} \qquad \{\varnothing,\{a\},\{a,b\}\} \qquad \{\varnothing,\{b\},\{a,b\}\} \qquad \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\} \tag{1}$$

1.1.2 第二题

写出集合$X=\{a,b,c\}$的所有拓扑。

解：

$$\begin{aligned}
&\{\varnothing,\{a,b,c\}\} && && \quad(2)\\
&\{\varnothing,\{a\},\{a,b,c\}\} && \{\varnothing,\{b\},\{a,b,c\}\} && \{\varnothing,\{c\},c\{a,b,c\}\} \quad(3)\\
&\{\varnothing,\{a,b\},\{a,b,c\}\} && \{\varnothing,\{b,c\},\{a,b,c\}\} && \{\varnothing,\{ca\},\{a,b,c\}\} \quad(4)\\
&\{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\} && \{\varnothing,\{a\},\{b,c\},\{a,b,c\}\} && \{\varnothing,\{a\},\{c,a\},\{a,b,c\}\} \quad(5)\\
&\{\varnothing,\{b\},\{a,b\},\{a,b,c\}\} && \{\varnothing,\{b\},\{b,c\},\{a,b,c\}\} && \{\varnothing,\{b\},\{c,a\},\{a,b,c\}\} \quad(6)\\
&\{\varnothing,\{c\},\{a,b\},\{a,b,c\}\} && \{\varnothing,\{c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\} && \{\varnothing,\{c\},\{c,a\},\{a,b,c\}\} \quad(7)\\
&\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,b,c\}\} && \{\varnothing,\{b\},\{c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\} && \{\varnothing,\{c\},\{a\},\{c,a\},\{a,b,c\}\} \quad(8)\\
&\{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{c,a\},\{a,b,c\}\} && \{\varnothing,\{b\},\{b,c\},\{a,b\},\{a,b,c\}\} && \{\varnothing,\{c\},\{c,a\},\{b,c\},\{a,b,c\}\} \quad(9)\\
& && && \quad(10)\\
&\{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{c,a\},\{a,b,c\}\} && && \quad(11)
\end{aligned}$$

1.1.3 第三题

定义$\mathbb{R}$上的子集族$\tau=\{(-\infty,a):-\infty\le a\le\infty\}$，证明：$\tau$是$\mathbb{R}$上的一个拓扑。

证明：显然$\mathbb{R},\varnothing\in\tau$且$\tau$对于有限并运算封闭。

对于任意非空指标集$\Lambda\subset[-\infty,\infty]$，令$a=\sup\Lambda$。

如果$a=-\infty$，那么$\Lambda=\{-\infty\}$，于是

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(-\infty,\lambda)=\varnothing\in\tau \tag{12}$$

如果$-\infty<a\le\infty$，那么或$a\in\Lambda$，或存在$\{a_n\}\subset\Lambda$，使得成立$a_n<a$且$a_n\to a$。

1.$a\in\Lambda$:

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(-\infty,\lambda)=(-\infty,a)\in\tau \tag{13}$$

2.存在$\{a_n\}\subset\Lambda$，使得成立$a_n<a$且$a_n\to a$。显然$(-\infty,a_n)\subset(-\infty,a)$，同时任取$x\in(-\infty,a)$，存在$n_0$，使得$x\in(-\infty,a_{n_0})$，进而

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(-\infty,\lambda)=(-\infty,a)\in\tau \tag{14}$$

结合1和2，τ对于任意并运算封闭，于是τ为$\mathbb{R}$上的一个拓扑。

1.1.4 第四题

设τ为X上的一个拓扑，$A\subset X$，定义

$$\tau_A=\{A\cup U:U\in\tau\}\cup\{\varnothing\} \tag{15}$$

证明：τ_A为X上的拓扑。

证明：显然!

1.1.5 第五题

设τ_1,τ_2均为X上的拓扑，证明：$\tau_1\cap\tau_2$亦为X上的拓扑。

证明：显然!

1.1.6 第六题

对于欧式拓扑E^2的子集$A=\{(x,\sin 1/x):x\in(0,1)\}$，证明:

$$A'=\{(x,f(x)):x\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,y):y\in[0,1]\} \tag{16}$$

解：任取$(x,y)\in\{(x,f(x)):x\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,y):y\in[0,1]\}$，那么

$$(x,y)=\begin{cases}(0,0) & \\ (x,\sin\frac{1}{x}), & x\neq 0\\ (0,y), & y\in[0,1]\end{cases} \tag{17}$$

如果$(x,y)=(0,0)$，取$(x_n,y_n)=(\frac{1}{n\pi},0)\to(0,0)$，因此$(x,y)\in A'$。

如果$(x,y)=(x,\sin\frac{1}{x})$，由$f$在$x\neq 0$时的连续性，存在$(x_n,y_n)=(x_n,f(x_n))\to(x,\sin\frac{1}{x})$，因此$(x,y)\in E'$。

如果$(x,y)=(0,y)$，其中$y\in[0,1]$，取$x_0>0$使得$\sin\frac{1}{x_0}=y$，令$x_n=\frac{1}{x_0+2n\pi}\to 0$，那么$(x_n,y)\to(0,y)$，因此$(x,y)\in A'$。

于是

$$A'\supset\{(x,f(x)):x\in\mathbb{R}\}\cup\{(0,y):y\in[0,1]\} \tag{18}$$

任取$(x,y)\in E'$，

1.1.7 第七题

定义$\mathbb{R}$上的子集族$\tau=\{(-\infty,a):-\infty\leq a\leq\infty\}$，$A=\{0\}$，证明：$A'=(0,\infty)$

解：对于任意$x\in(0,\infty)$，任取x的邻域U，那么存在$a>x>0$，使得成立$x\in(-\infty,a)\subset U$，进而

$$U\cap A\setminus\{x\}\supset(-\infty,a)\cap\{0\}\setminus\{x\}=\{0\}\neq\varnothing\implies(0,\infty)\subset A' \tag{19}$$

对于$x=0$，取x的邻域$U=(-\infty,1)$，那么

$$U\cap A\setminus\{x\}\supset(-\infty,1)\cap\{0\}\setminus\{0\}=\varnothing\implies\{0\}\not\subset A' \tag{20}$$

对于$x<0$，取x的邻域$U=(-\infty,b)\subset(-\infty,0)$，那么

$$U\cap A\setminus\{x\}\supset(-\infty,b)\cap\{0\}\setminus\{x\}=\varnothing\implies(-\infty,0)\not\subset A' \tag{21}$$

综上所述，$A'=(0,\infty)$。

1.1.8 第八题

在度量空间τ_d中，令$B_r(x)=\{y\in X:d(x,y)<r\}$和$B_r[x]=\{y\in X:d(x,y)\le r\}$，证明：$B_r[x]$为闭集。举例说明$\overline{B_r(x)}\neq B_r[x]$。

证明：任取$y\in B_r^c[x]$，令$r_y=(d(x,y)-r)/2$，那么

$$B_r^c[x]=\bigcup_{y\in B_r^c[x]}B_{r_y}(y) \tag{22}$$

于是$B_r^c[x]$为开集，进而$B_r[x]$为闭集。

反例：$\mathbb{Z}$上的欧式距离d诱导的度量拓扑τ_d，$B_1(0)=\{0\}$，$B_1[0]=\{-1,0,1\}$。

1.1.9 第九题

设$A,B\subset X$，且A为开集，证明：$A\cap\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$。

证明：任取$x\in A\cap\overline{B}$，那么$x\in A$且$x\in\overline{B}$，任取开集$G\ni x$，那么$A\cap G\ni x$为开集，于是

$$G\cap(A\cap B)=(A\cap G)\cap B\neq\varnothing \tag{23}$$

即$x\in A\cap B$，进而$A\cap\overline{B}\subset\overline{A\cap B}$。

1.1.10 第十题

设$\{A_k\}_{k=1}^n\subset X$为X的闭覆盖，证明：$B\subset X$为X的闭集，当且仅当$B\cap A_k$为A_k的闭集。

证明：对于必要性，如果$B\subset X$为X的闭集，那么$B\cap A_k$为X的闭集，于是$B\cap A_k$为A_k的闭集。

对于充分性，如果$B\cap A_k$为A_k的闭集，那么又A_k为X的闭集，于是$B\cap A_k$为X的闭集，进而由于

$$B=B\cap X=B\cap\bigcup_{k=1}^n A_k=\bigcup_{k=1}^n B\cap A_k \tag{24}$$

于是B为X的闭集。

综上所述，原命题得证！

1.1.11 第十一题

1.1.12 第十二题

1.1.13 第十三题

对于拓扑空间$(\mathbb{R},\tau_c)$中的序列$\{x_n\}$，证明：$x_n\to x$，当且仅当存在$N\in\mathbb{N}^*$，使得当$n>N$时，成立$x_n=x$。

证明：对于充分性，如果存在$N\in\mathbb{N}^*$，使得当$n>N$时，成立$x_n=x$，那么任取x的邻域U，当$n>N$时，成立$x_n=x\in U$，于是$x_n\to x$。

对于必要性，如果$x_n\to x$，那么令可数集$A=\{x_n\}\setminus\{x\}$，于是$A^c\in\tau_c$为开集，且$x\in A^c=\{x_n\}^c\cup\{x\}$，于是$A^c$为$x$的邻域，那么存在$N>0$，使得对于任意$n>N$，成立$x_n\in A^c$，进而$x_n=x$。

综上所述，原命题得证！

1.1.14 第十四题

1.1.15 第十五题

1.1.16 第十六题

证明：如果A为X的稠密子集，B为A的稠密子集，那么B为X的稠密子集。

证明：注意到$\overline{B}=\overline{\overline{B}}=\overline{A}=X$

1.1.17 第十七题

1.2 第二节

1.2.1 第一题

对于映射$f:X\to Y$，证明如下命题为f连续的等价定义。

- 对于任意$U\subset X$，成立$f(\overline{U})\subset\overline{f(U)}$
- 对于任意$V\subset Y$，成立$\overline{f^{-1}(V)}\subset f^{-1}(\overline{V})$

证明：如果f连续，那么任取$U\subset X$。任取$y\in f(\overline{U})$，存在$x\in\overline{U}$，使得成立$f(x)=y$。任取y的邻域$V\subset Y$，由于f连续，那么$f^{-1}(V)$为x的邻域，于是$f^{-1}(V)\cap U\neq\varnothing$，因此$V\cap f(U)\neq\varnothing$，所以$y\in\overline{f(U)}$。由$y$的任意性，成立$f(\overline{U})\subset\overline{f(U)}$。

如果f连续，那么任取$V\subset Y$。任取$x\in\overline{f^{-1}(V)}$，以及$f(x)$的邻域$V'\subset Y$，那么$f^{-1}(V')$为x的邻域，于是$f^{-1}(V')\cap f^{-1}(V)\neq\varnothing$，因此$V'\cap V\neq\varnothing$，所以$f(x)\in\overline{V}$。由$x$的任意性，成立$\overline{f^{-1}(V)}\subset f^{-1}(\overline{V})$。

1.2.1 第二题

对于$B\subset Y$，以及$f:X\to B$，$\mathbb{1}_B:B\to Y$，证明：f连续，当且仅当$\mathbb{1}_B\circ f$连续。

证明：对于必要性，如果f连续，那么任取Y的开集$G\subset Y$，注意到

$$(\mathbb{1}_B\circ f)^{-1}(G)=f^{-1}(\mathbb{1}_B^{-1}(G))=f^{-1}(G\cap B)\tag{25}$$

由于$G\cap B$为B的开集，那么$(\mathbb{1}_B\circ f)^{-1}(G)$为$X$的开集，因此$\mathbb{1}_B\circ f$连续。

对于充分性，如果$\mathbb{1}_B\circ f$连续，那么任取B的开集$U\subset B$，存在Y中的开集$V\subset Y$，使得成立$U=B\cap V$，注意到

$$f^{-1}(U)=f^{-1}(\mathbb{1}_B^{-1}(V))=(\mathbb{1}_B\circ f)^{-1}(V)\tag{26}$$

由于V为Y的开集，那么$f^{-1}(V)$为X的开集，因此f连续。

1.2.3 第三题

对于$A\subset X$，以及同胚映射$f:X\to Y$，证明：$f|_A:A\to Y$是嵌入映射。

证明：不妨记$f|_A:A\to f(A)$，$f^{-1}|_{f(A)}:f(A)\to A$。

由于

$$f^{-1}|_{f(A)}\circ f|_A=\mathbb{1}_A,\qquad f|_A\circ f^{-1}|_{f(A)}=\mathbb{1}_{f(A)}\tag{27}$$

因此$f|_A$为双射，且其逆映射为$f^{-1}|_{f(A)}$。

任取$f(A)$的开集$U \subset f(A)$，那么存在Y的开集$V \subset U$，使得成立$U = f(A) \cap V$，注意到

$$f^{-1}|_{f(A)}(U) = f^{-1}(U) \cap A = f^{-1}(f(A) \cap V) \cap A = f^{-1}(V) \cap A \tag{28}$$

由于f连续，那么$f^{-1}(V)$为X的开集，因此$f^{-1}|_{f(A)}(U) = f^{-1}(V) \cap A$为$A$的开集，进而$f|_A$连续。

任取A的开集$E \subset A$，那么存在X的开集$F \subset X$，使得成立$E = X \cap F$，注意到

$$f|_A(E) = f(E) \cap f(A) = f(X \cap F) \cap f(A) = f(F) \cap f(A) \tag{29}$$

由于f^{-1}连续，那么$f(F)$为Y的开集，因此$f|_A(E) = f(F) \cap f(A)$为$f(A)$的开集，进而$f^{-1}|_{f(A)}$连续。

综上所述，$f|_A : A \to f(A)$为同胚映射，于是$f|_A : A \to Y$是嵌入映射。

1.2.4 第四题

证明：如下空间同胚。

$$X_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \tag{30}$$
$$X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\} \tag{31}$$
$$X_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\} \tag{32}$$

证明：构造

$$\varphi_{1,2} : X_1 \to X_2 \tag{33}$$
$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ln\left(x^2 + y^2\right)\right) \tag{34}$$

$$\varphi_{2,3} : X_2 \to X_3 \tag{35}$$
$$(x, y, z) \mapsto (x\sqrt{1 + z^2}, y\sqrt{1 + z^2}, z) \tag{36}$$

1.2.5 第五题

称X的覆盖$\mathscr{C}$为**局部有限**的，如果对于任意$x \in X$，存在x的邻域$U \subset X$，使得U仅与$\mathscr{C}$中有限个元素相交。

证明：如果$\mathscr{C}$为X的局部有限闭覆盖，映射$f : X \to Y$在任意$C \in \mathscr{C}$上的限制均连续，那么f连续。

证明：任取$x \in X$的邻域$U \subset X$，由于U仅与$\mathscr{C}$中有限个元素相交，那么由粘接引理，$f|_U$在x处连续，于是f在x处连续。由x的任意性，f连续。

1.2.6 第六题

证明：如果f在x处连续，且$x_n \to x$，那么$f(x_n) \to f(x)$。

证明：任取$f(x)$的邻域V，由于f连续，那么$U = f^{-1}(V)$为x的邻域，又由于$x_n \to x$，因此存在$N \in \mathbb{N}^*$，使得当$n > N$时，成立$x_n \in U$，于是$f(x_n) \in f(U) = V$，因此$f(x_n) \to f(x)$。

1.2.7 第七题

证明：如果$f : X \to Y$为满的连续映射，且X是可分的，那么Y也是可分的。

证明：由于X是可分的，那么存在X的可数稠密子集$A \subset X$，使得成立$\overline{A} = X$。下面我们证明$\overline{f(A)} = Y$。

由于$f(A)\subset Y$，那么$\overline{f(A)}=\overline{Y}=Y$。

任取$y\in Y$，由于f是满的，那么存在$x\in X$，使得成立$f(x)=y$。由于$\overline{A}=X$，那么存在$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A$，使得成立$x_n\to x$，又$f$是连续的，由1.2.6，那么$f(x_n)\to f(x)$。因此$Y\subset\overline{f(A)}$。

综上所述，$\overline{f(A)}=Y$，而$f(A)$至多可数，那么Y是可分的。

1.2.8 第八题

证明：恒等映射$\mathbb{1}:(\mathbb{R},\tau_c)\to(\mathbb{R},\tau_f)$是连续映射，但不是同胚映射。

证明：

1.2.9 第九题

证明：f为连续映射，但不是同胚映射。

$$f:E^1\setminus[0,1)\to E^1 \tag{37}$$

$$x\mapsto\begin{cases}x, & x<0\\ x-1, & x\geq 1\end{cases} \tag{38}$$

证明：任取E^1的开集$G\subset\mathbb{R}$，记

$$G_1=\{y\in G:y\geq 0\},\qquad G_2=\{y\in G:y<0\} \tag{39}$$

注意到

$$f^{-1}(G)=f^{-1}(G_1\cup G_2)=f^{-1}(G_1)\cup f^{-1}(G_2)=(G_1+1)\cup G_2 \tag{40}$$

那么$f^{-1}(G)$为开集，因此f为连续映射。

容易知道f为双射，且其逆映射为

$$f^{-1}:E^1\to E^1\setminus[0,1) \tag{41}$$

$$y\mapsto\begin{cases}y, & y<0\\ y+1, & y\geq 0\end{cases} \tag{42}$$

取$E_1\setminus[0,1)$的开集$G=[1,2)\subset\mathbb{R}\setminus[0,1)$，那么

$$f(G)=f([1,2))=[0,1) \tag{43}$$

注意到$f(G)$为E^1的非开非闭集，于是f^{-1}不为连续映射，进而f不为同胚映射。

1.2.10 第十题

称映射$f:X\to Y$为开/闭映射，如果f将X的开/闭集映为T的开/闭集。

举例说明：开映射不一定为闭映射，闭映射不一定为开映射。

解：在E^1中，$f:\mathbb{R}\to\{0\}$为闭映射，但不为开映射。

1.2.11 第十一题

如果$f:X\to Y$为双射，那么f为开映射 $\iff$ f为闭映射 $\iff$ f^{-1}连续。

证明：显然！

1.2.12 第十二题

对于度量空间(X,d)，$A\subset X$为X的非空闭集，定义

$$f(x)=d(x,A)=\inf\{d(x,a):a\in A\} \tag{44}$$

证明：f连续，并且$f(x)=0 \iff x\in A$。

1.2.13 第十三题

对于拓扑空间$(\mathbb{R},\tau)$，其中$\tau=\{(-\infty,a):-\infty\le a\le\infty\}$，证明：如果$f:(\mathbb{R},\tau)\to E^1$为连续映射，那么$f$为常值映射。

1.3 第三节

1.3.1 第一题

设A,B分别是X,Y的闭集，证明：$A\times B$是乘积空间$X\times Y$的闭集。

1.3.2 第二题

设$A\subset X,B\subset Y$，证明：在乘积空间$X\times Y$中成立

$$\overline{A\times B}=\overline{A}\times\overline{B},\qquad (A\times B)^\circ=A^\circ\times B^\circ \tag{45}$$

证明：

1.3.3 第三题

证明：投射$j_x:X\times Y\to X,j_y:X\times Y\to Y$为开映射。

1.3.4 第四题

设$f:X\to Y$是连续映射，定义$F:X\to X\times Y$为$F(x)=(x,f(x))$，证明F为嵌入映射。

1.3.5 第五题

设X和Y都是可分空间，证明：$X\times Y$为可分空间。

1.3.6 第六题

设$A\subset X,B\subset Y$，证明：$A\times B$作为$X\times Y$子空间的拓扑就是A与B乘积空间的拓扑。

1.3.7 第七题

称映射$X\to E^1$为函数，设f和g都是X上的连续函数，证明：$af+bg$和fg均为连续函数。

1.3.8 第八题

证明：$\mathscr{B}=\{(-\infty,a):a\in\mathbb{Q}\}$为$\mathbb{R}$上的拓扑基。写出$\mathscr{B}$生成的拓扑。

1.3.9 第九题

记$\mathscr{B}=\{[a,b):a<b\in\mathbb{R}\}$，证明：在$(\mathbb{R},\overline{\mathscr{B}})$中，$[a,b)$既是开集，又是闭集。

1.3.10 第十题

设$\mathscr{B}_k$是拓扑空间(X_k,τ_k)的拓扑基，其中$k=1,2$，证明：
$\mathscr{B}=\{B_1\times B_2:B_k\in\mathscr{B}_k,k=1,2\}$是乘积空间$X_1\times X_2$的拓扑基。

1.3.11 第十一题

设$\mathscr{C}$是X的一个覆盖，定义X的子集族$\mathscr{B}=\{B:B\text{是}\mathscr{C}\text{中有限个集合的交}\}$。证明：$\mathscr{B}$是集合$X$的一个拓扑基。

第二章

2.1 第一节

2.1.1 第一题

列举满足T_0公理但不满足T_1公理的拓扑空间的例子。

证明：

$$\tau = \{(-\infty, a) : -\infty \leq a \leq \infty\} \tag{46}$$

2.1.2 第二题

证明：$T_0 + T_3 \implies T_2$

证明：任取$x \neq y$，由T_0公理，不妨设x存在邻域U_0，使得$y \notin U_0$，记$F = (U_0^\circ)^c$，则$x \notin F$且$y \in F$，且F为闭集，由T_3公理，存在x的邻域U和F的邻域V，使得成立$U \cap V = \varnothing$。注意到$y \in V$，命题得证。

2.1.3 第三题

证明：如果X满足T_1公理，那么X中任意子集的导集为闭集。

证明：任取$A \subset X$，对于任意$x \in (A')^c$，存在x的开邻域U，使得成立$U \cap A \setminus \{x\} = \varnothing$。由$T_1$公理，$U \setminus \{x\}$为开集，从而$U \setminus \{x\} \subset (A')^c$，于是$U \subset (A')^c$，因此$x$为$(A')^c$的内点，进而$(A')^c$为开集，$A'$为闭集。

2.1.4 第四题

证明：如果X为Hausdorff空间，那么连续映射$f : X \to X$的不动点集$\mathrm{Fix} f = \{x \in X : f(x) = x\}$为$X$的闭子集。

证明：任取$x \in (\mathrm{Fix} f)^c$，则$f(x) \neq x$，从而存在x的开邻域U和$f(x)$的开邻域V，使得成立$U \cap V = \varnothing$，令$W = f^{-1}(V) \cap U$，则W是x的开邻域，且$W \subset (\mathrm{Fix} f)^c$，即对于任意$y \in f^{-1}(V) \cap U$，成立$f(y) \neq y$。若不然，存在$y \in f^{-1}(V) \cap U$，使得成立$f(y) = y$，那么$\{y\} \in U \cap V$矛盾！因此$x$为$(\mathrm{Fix} f)^c$的内点，$(\mathrm{Fix} f)^c$为开集，于是$\mathrm{Fix} f$为闭集。

2.1.5 第五题

证明：如果X为Hausdorff空间，那么连续映射$f : X \to X$的图像集$G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$为$X \times Y$的闭子集。

证明：任取$(x, y) \in (G_f)^c$，那么$f(x) \neq y$，于是存在$f(x)$的开邻域U和y的开邻域V，使得成立$U \cap V = \varnothing$，于是$f^{-1}(U) \times V$是(x, y)的开邻域，且$f^{-1}(U) \times V \subset (G_f)^c$。那么$(x, y)$为$(G_f)^c$的内点，$(G_f)^c$为开集，于是$G_f$为闭集。

2.1.6 第六题

对于拓扑空间X，记$X \times X$的对角子集$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$，证明：$\Delta$为$X \times X$的闭集$\iff X$是Hausdorff空间。

证明：

$$
\begin{aligned}
& \Delta\text{为}X \times X\text{的闭集} && (47)\\
\Longleftrightarrow\ & X \times X \setminus \Delta\text{为}X \times X\text{的开集} && (48)\\
\Longleftrightarrow\ & \forall (x,y) \in X \times X \setminus \Delta\text{为}X \times X \setminus \Delta\text{的内点} && (49)\\
\Longleftrightarrow\ & \forall x \neq y \in X, (x,y)\text{为}X \times X \setminus \Delta\text{的内点} && (50)\\
\Longleftrightarrow\ & \forall x \neq y \in X, \exists x\text{的开邻域}U \subset X\text{和}y\text{的开邻域}V \subset X, \text{s.t.} U \times V \subset X \times X \setminus \Delta && (51)\\
\Longleftrightarrow\ & \forall x \neq y \in X, \exists x\text{的开邻域}U \subset X\text{和}y\text{的开邻域}V \subset X, \text{s.t.} U \cap V = \varnothing && (52)\\
\Longleftrightarrow\ & X\text{为Hausdorff空间} && (53)
\end{aligned}
$$

2.1.7 第七题

证明：Hausdorff空间的子空间为Hausdorff空间。

证明：设X是Hausdorff空间，任取$A \subset X$，$x \neq y \in A$，由于X是Hausdorff空间，那么存在x的关于X的开邻域U和y的关于X的开邻域V，使得成立$U \cap V = \varnothing$，令$U' = U \cap A, V' = V \cap A$，于是$U' \cap V' = \varnothing$，且$U'$是$x$的关于$A$的开邻域，$V'$是$y$的关于$A$的开邻域，于是$A$是Hausdorff空间。

2.1.8 第八题

证明：Hausdorff空间的乘积空间为Hausdorff空间。

证明：设X和Y是Hausdorff空间，$(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in X \times Y$，于是不妨$x_1 \neq x_2 \in X$且$y_1, y_2 \in Y$，那么在$X$中存在$x_1, x_2$的不交开邻域$U_1$和$U_2$，那么$U_1 \times Y$和$U_2 \times Y$是$X \times Y$中$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$的不交开邻域，于是$X \times Y$是为Hausdorff空间。

2.1.9 第九题

证明：如果X满足T_3公理，$F \subset X$为X的闭集，$x \notin F$，那么存在F和x的开邻域U和V，使得成立$\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$。

证明：由T_3公理，存在x与F的不交开邻域W和U，于是$\overline{U} \subset W^c$。由T_3公理的等价条件，存在x的开邻域V，使得成立$\overline{V} \subset W$，于是U, V是F和x的开邻域，且$\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$。

2.1.10 第十题

证明：对于满的闭连续映射$f : X \to Y$，如果X满足T_4公理，那么Y满足T_4公理。

证明：任取Y的不交闭集$B_1, B_2 \subset Y$，记$A_1 = f^{-1}(B_1), A_2 = f^{-1}(B_2)$，由于$f$是连续映射，所以$A_1, A_2$是$X$的不交闭集，由$T_4$公理，存在不交开邻域$U_1, U_2$。记$W_1 = (f(U_1^c))^c, W_2 = (f(U_2^c))^c$。由于$f$是闭的，于是$W_1, W_2$是$Y$的开集，且$B_1 \subset W_1, B_2 \subset W_2$，又$W_1 \cap W_2 = \varnothing$，于是$Y$满足$T_4$公理。

2.1.11 第十一题

证明：对于映射$f : X \to Y$，$x \in X$，$\mathscr{V}$是$f(x)$的一个邻域基，如果对于任意$V \in \mathscr{V}$，$f^{-1}(V)$是x的邻域，那么f在x处连续。

证明：任取$f(x)$的邻域U，存在$V \in \mathscr{V}$，使得成立$V \subset U$，于是$f^{-1}(V) \subset f^{-1}(U)$，又$f^{-1}(V)$是$x$的邻域，所以$f^{-1}(U)$是$x$的邻域，证毕。

2.1.12 第十二题

证明：如果X是C_1空间，且其序列至多仅能收敛至一点，那么X是Hausdorff空间。

证明：反证，假设存在$x \neq y \in X$，使得对于任意x的邻域U和y的邻域V，成立$U \cap V \neq \varnothing$，那么取$x, y$的单调递减可数邻域基$\{U_n\}, \{V_n\}$，那么对于任意$n \in \mathbb{N}^*$，$U_n \cap V_n \neq \varnothing$。取$z_n \in U_n \cap V_n$，那么$z_n \to x$且$z_n \to y$，矛盾！

2.1.13 第十三题

证明：T_3公理具有可乘性和遗传性。

2.1.14 第十四题

证明：C_2公理具有可乘性和遗传性。

2.1.15 第十五题

证明：可分度量空间的子空间是可分空间。

2.1.16 第十六题

定义$\mathscr{B} = \{[a, b) : a < b\}$，证明：拓扑空间$(\mathbb{R}, \overline{\mathscr{B}})$不为$C_2$空间。

证明：反证，假设拓扑空间$(\mathbb{R}, \overline{\mathscr{B}})$为$C_2$空间，那么存在可数拓扑基$\mathscr{A} = \{A_n\}$，使得成立$\overline{\mathscr{A}} = \overline{\mathscr{B}}$，注意到

$$\overline{\mathscr{A}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} A_{k_i} : k_i \in \mathbb{N}^* \right\} \tag{54}$$

那么$\overline{\mathscr{A}}$为可数集合，而$\mathscr{B}$为不可数集合，于是$\overline{\mathscr{B}}$为不可数集合，矛盾！因此拓扑空间$(\mathbb{R}, \overline{\mathscr{B}})$不为$C_2$空间。

2.1.17 第十七题

定义$\mathbb{R}$上的拓扑$\tau = \{(-\infty, a) : -\infty \leq a \leq \infty\}$，证明：$(\mathbb{R}, \tau)$为$C_2$空间，并写出其一个可数拓扑基。

证明：定义

$$\mathscr{B} = \{(-\infty, r) : r \in \mathbb{Q}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\} \tag{55}$$

显然$\mathscr{B} \subset \tau$，且$\varnothing, \mathbb{R} \in \mathscr{B}$。任取$a \in \mathbb{R}$，注意到

$$(-\infty, a) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, a)} (-\infty, r) \tag{56}$$

事实上，由于$r \in (-\infty, a)$，那么$(-\infty, r) \subset (-\infty, a)$，因此

$$(-\infty, a) \supset \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, a)} (-\infty, r) \tag{57}$$

而任取$x \in (-\infty, a)$，存在$r \in \mathbb{Q}$，使得成立$x < r < a$，于是$x \in (-\infty, r)$，因此

$$(-\infty, a) \subset \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, a)} (-\infty, r) \tag{58}$$

那么

$$(-\infty, a) = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, a)} (-\infty, r) \tag{59}$$

进而$\mathscr{B}$为拓扑空间$(\mathbb{R}, \tau)$的一个可数拓扑基，$(\mathbb{R}, \tau)$为C_2空间。

2.1.18 第十八题

定义

$$\tau = \{U \setminus A : U\text{是}E^1\text{的开集}, A \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \tag{60}$$

2.1.18.1 第一问

证明：τ是$\mathbb{R}$上的拓扑。

证明：显然！

2.1.18.2 第二问

证明：$(\mathbb{R}, \tau)$满足T_2公理，但不满足T_3公理。

证明：任取$x < y \in \mathbb{R}$，那么$(x-1, \frac{x+y}{2})$为x的邻域，$(\frac{x+y}{2}, y+1)$为y的邻域，于是$(\mathbb{R}, \tau)$满足T_2公理。

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$为闭集，且$a \in \mathbb{Q}$。任取$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$的开邻域$W$，那么$W$是$E_1$的开集，从而$W$是$E^1$的稠密开集，于是$W \cap \mathbb{Q}$在$E^1$中稠密。任取$a$在$(\mathbb{R}, \tau)$的开邻域$U \setminus A$，那么

$$W \cap (U \setminus A) \supset (W \cap \mathbb{Q}) \cap U \neq \varnothing \tag{61}$$

于是$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$和$a$不存在不交开邻域，即$(\mathbb{R}, \tau)$不满足$T_3$公理。

2.1.18.3 第三问

证明：$(\mathbb{R}, \tau)$是满足C_1公理的可分空间。

证明：任取$x \in \mathbb{R}$，令$U_n = \{x\} \cup ((x - 1/n, x + 1/n) \cap \mathbb{Q})$，那么容易知道$\{U_n\}$是$x$的可数邻域基，于是$(\mathbb{R}, \tau)$满足$C_1$公理。而$\mathbb{Q}$是$(\mathbb{R}, \tau)$的可数稠密子集，于是$(\mathbb{R}, \tau)$可分。

2.1.18.4 第四问

证明：τ在$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$上诱导的子空间拓扑$\tau_0$是离散拓扑，从而$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \tau_0)$是不可分的。

证明：任取$A \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$，由于$\mathbb{R} \setminus ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \setminus A)$是$(\mathbb{R}, \tau)$的开集，那么
$\mathbb{R} \setminus ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \setminus A) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = A$为$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \tau_0)$中的开集，因此$\tau_0 = 2^{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$。

2.1.18.5 第五问

证明：$(\mathbb{R}, \tau)$不满足C_2公理。

证明：反证，如果$(\mathbb{R}, \tau)$满足C_2公理，那么$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \tau_0)$满足$C_2$公理，于是$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \tau_0)$可分，矛盾！

2.2 第二节

2.2.1 第一题

证明：Urysohn引理证明中定义的函数f满足

$$f(x)=\sup\{r\in\mathbb{Q}_I : x\notin\overline{U_r}\}=\inf\{r\in\mathbb{Q}_I : x\in\overline{U_r}\} \tag{62}$$

2.2.2 第二题

证明：如果拓扑空间X满足T_4公理，$A\subset X$为闭集，那么连续映射$f:A\to E^n$可扩张到X上。

证明：定义$f=(f_1,\cdots,f_n)$，那么对于每一个$f_k:A\to E^1$，可扩张为$\tilde{f}_k:X\to E^1$，于是定义$\tilde{f}=(\tilde{f}_1,\cdot,\tilde{f}_n)$，因此$\tilde{f}:X\to E^n$为连续函数，且$\tilde{f}|_A=f$。

2.2.3 第三题

收缩映射：对于拓扑空间X的子集$A\subset X$，称连续映射$r:X\to A$为收缩映射，如果对于任意$a\in A$，成立$r(a)=a$。

收缩核：称拓扑空间X的子集$A\subset X$为X的收缩核，如果存在收缩映射$r:X\to A$。

设$D\subset E^n$是E^n的收缩核，X满足T_4公理，A是X的闭集，证明：连续映射$f:A\to D$可扩张到X上。

证明：由于$D\subset E^n$是E^n的收缩核，那么存在收缩映射$r:E^n\to D$，记包含函数$i:D\to E^n$，那么$r\circ i=\mathbb{1}$。由2.2.2，连续映射$i\circ f:A\to E^n$可扩张到为连续映射$g:X\to E^n$，于是$r\circ g:X\to D$为连续映射。

2.2.4 第四题

设$S^n=\{x\in E^{n+1}:\|x\|_2=1\}$，$X$满足$T_4$公理，$A$是$X$的闭子集，证明：连续映射$f:A\to S^n$可扩张到$A$的一个开邻域上。

证明：记包含映射$i:S^n\to E^{n+1}$，定义$r:E^{n+1}\setminus\{O\}\to S^n$为$r(x)=x/\|x\|$。将$i\circ f:A\to E^{n+1}$扩张为$g:X\to E^{n+1}$，记$g^{-1}(E^{n+1}\setminus\{O\})$，于是$U$是$A$的开邻域，且$r\circ g|_U:U\to S^n$为$f$的扩张。

2.5 第五节

2.5.1 第一题

证明：S^n道路连通。

证明：任取$x_0,x_1,y\in S^n$，满足$y\neq x_0,x_1$，由于$S^n\setminus\{y\}\cong E^n$，那么$S^n\setminus\{y\}$道路连通，从而存在$S^n\setminus\{y\}$中的道路$\gamma:[0,1]\to S^n\setminus\{y\}$，使得$\gamma(0)=x_0$且$\gamma(1)=x_1$。$\gamma$当然也为$S^n$中的道路，由$x_0,x_1$的任意性，$S^n$道路连通。

2.5.2 第二题

设$A\subset E^2$，证明：如果A^c是可数集，那么A道路连通。

证明：任取$x,y\in A$，那么在E^2中存在不可数个圆周经过x,y，由于A^c为可数集，因此存在在A中的圆周，那么x,y间存在道路，进而A道路连通。

2.5.3 第三题

证明：道路连通性具有可乘性。

证明：假设X和Y为道路连通空间，那么考虑乘积空间$X\times Y$，任取$(x_0,y_0),(x_1,y_1)\in X\times Y$，存在连续映射$\gamma_x:[0,1]\to X$和$\gamma_y:[0,1]\to Y$，使得成立$\gamma_x(0)=x_0,\gamma_x(1)=x_1,\gamma_y(0)=y_0,\gamma_y(1)=y_1$。考虑映射$\gamma:[0,1]\to X\times Y,\quad t\mapsto(\gamma_x(t),\gamma_y(t))$，那么$\gamma$为连续映射。又因为$\gamma(0)=(x_0,y_0),\gamma(1)=(x_1,y_1)$，因此$\gamma$为$(x_0,y_0),(x_1,y_1)$间的道路，进而$X\times Y$道路连通。

2.5.4 第四题

对于X中的非空开集U和V，道路$\gamma:[0,1]\to X$，证明：如果$U\cup V=X$，且$\gamma(0)\in U,\gamma(1)\in V$，那么$\gamma^{-1}(U\cap V)$非空。

证明：记$t_0=\sup\{t\in[0,1]:\gamma([0,t])\subset U\}$。

如果$\gamma(t_0)\in U$，那么存在U的开集E，使得成立$t_0\in E\subset U$。由于γ为连续映射，因此$\gamma^{-1}(E)$为$[0,1]$的开集，于是存在$r_1>0$，使得成立$(t_0-r_1,t_0+r_1)\subset\gamma^{-1}(E)$，因此$\gamma(t_0+r_1/2)\in E\subset U$，与$t_0$定义矛盾，因此$\gamma(t_0)\notin U$。

进而$\gamma(t_0)\in X\setminus U\subset V$，那么存在$V$的开集$F$，使得成立$t_0\in F\subset V$。由于$\gamma$为连续映射，因此$\gamma^{-1}(F)$为$[0,1]$的开集，于是存在$r_2>0$，使得成立$(t_0-r_2,t_0+r_2)\subset\gamma^{-1}(F)$，因此$\gamma(t_0-r_2/2)\in F\subset V$，又$\gamma(t_0-r_2/2)\in U$，那么$t_0-r_2/2\in\gamma^{-1}(U\cap V)$。

2.5.5 第五题

对于X中的非空开集U和V，满足$X=U\cup V$，证明：如果X和$U\cap V$均道路连通，那么U和V均道路连通。

证明：任取$x\in U\setminus V$，$y\in V\setminus U$，由于X道路连通，那么存在道路$\gamma:[0,1]\to X$，使得成立$\gamma(0)=x$且$\gamma(1)=y$。由2.5.4，存在$t\in[0,1]$，使得成立$t\in\gamma^{-1}(U\cap V)$，因此x与$\gamma(t)\in U\cap V$在U中属于同一连通道路分支，y与$\gamma(t)\in U\cap V$在V中属于同一连通道路分支。又因为$U\cap V$道路连通，从而x与$U\cap V$在U中属于同一连通道路分支，y与$U\cap V$在V中属于同一连通道路分支。由x和y的任意性，$U\setminus V$与$U\cap V$在U中属于同一连通道路分支，$V\setminus U$与$U\cap V$在V中属于同一连通道路分支，进而U和V均道路连通。

2.5.6 第六题

对于X中的非空闭集U和V，道路$\gamma:[0,1]\to X$，证明：如果$U\cup V=X$，且$\gamma(0)\in U,\gamma(1)\in V$，那么$\gamma^{-1}(U\cap V)$非空。

证明：记$t_0=\sup\{t\in[0,1]:\gamma([0,t])\subset U\}$。

如果$\gamma(t_0)\notin U$，那么$\gamma(t_0)\in X\setminus U$，而$X\setminus U$为开集，因此存在$X\setminus U$的开集$E$，使得成立$t_0\in E\subset X\setminus U$。由于$\gamma$为连续映射，因此$\gamma^{-1}(E)$为$[0,1]$的开集，于是存在$r_1>0$，使得成立$(t_0-r_1,t_0+r_1)\subset\gamma^{-1}(E)$，因此$\gamma(t_0-r_1/2)\in E\subset X\setminus U$，与$t_0$定义矛盾，因此$\gamma(t_0)\in U$。

如果$\gamma(t_0)\notin V$，那么$\gamma(t_0)\in X\setminus V$，而$X\setminus V$为开集，那么存在$X\setminus V$的开集$F$，使得成立$t_0\in F\subset X\setminus V$。由于$\gamma$为连续映射，因此$\gamma^{-1}(F)$为$[0,1]$的开集，于是存在$r_2>0$，使得成立$(t_0-r_2,t_0+r_2)\subset\gamma^{-1}(F)$，因此$\gamma(t_0+r_2/2)\in F\subset X\setminus V\subset U$，与$t_0$定义矛盾，因此$\gamma(t_0)\in V$。

进而$t_0\in\gamma^{-1}(U\cap V)$。

2.5.7 第七题

对于X中的非空闭集U和V，满足$X = U \cup V$，证明：如果X和$U \cap V$均道路连通，那么U和V均道路连通。

证明：任取$x \in U \setminus V$，$y \in V \setminus U$，由于X道路连通，那么存在道路$\gamma : [0, 1] \to X$，使得成立$\gamma(0) = x$且$\gamma(1) = y$。由2.5.6，存在$t \in [0, 1]$，使得成立$t \in \gamma^{-1}(U \cap V)$，因此$x$与$\gamma(t) \in U \cap V$在$U$中属于同一连通道路分支，$y$与$\gamma(t) \in U \cap V$在$V$中属于同一连通道路分支。又因为$U \cap V$道路连通，从而$x$与$U \cap V$在$U$中属于同一连通道路分支，$y$与$U \cap V$在$V$中属于同一连通道路分支。由$x$和$y$的任意性，$U \setminus V$与$U \cap V$在$U$中属于同一连通道路分支，$V \setminus U$与$U \cap V$在$V$中属于同一连通道路分支，进而$U$和$V$均道路连通。

2.6 第六节

2.6.1 第一题

证明：如果$n \geq 2$，那么$E^1 \ncong E^n$。

2.6.2 第二题

证明：$[0, 1] \ncong S^1$

证明：如果$[0, 1] \cong S^1$，那么存在连续双射$f : S^1 \to [0, 1]$。取$x_0 \in S^1$，使得$y_0 = f(x_0) \in (0, 1)$。考虑到$S^1 \setminus \{x_0\} \cong E^1$，因此存在同胚映射$\varphi : E^1 \to S^1 \setminus \{x_0\}$，因此$f \circ \varphi : E^1 \to [0, y_0) \cup (y_0, 1]$为连续双射。而$E^1$连通，但是$[0, y_0) \cup (y_0, 1]$不连通，因此产生矛盾！进而$[0, 1] \ncong S^1$。

2.6.3 第三题

证明：如果$f : S^1 \to E^1$连续，那么f既不单又不满。

证明：由于S^1为紧致连通集，那么$f(S^1) \subset E^1$为紧致连通集，而E^1不紧致，因此$f(S^1) \neq E^1$，即f不为满射。而E^1中的紧致连通集为闭区间，那么设$f(S^1) = [a, b]$，其中$a \leq b$。如果$a = b$，那么显然f不为单射；如果$a < b$，假设$f : S^1 \to [a, b]$为连续双射，那么取$x_0 \in S^1$，使得$y_0 = f(x_0) \in (a, b)$。考虑到$S^1 \setminus \{x_0\} \cong E^1$，因此存在同胚映射$\varphi : E^1 \to S^1 \setminus \{x_0\}$，因此$f \circ \varphi : E^1 \to [a, y_0) \cup (y_0, b]$为连续双射。而$E^1$连通，但是$[a, y_0) \cup (y_0, b]$不连通，因此产生矛盾！进而$f$不为单射。

2.6.4 第四题

证明：如果$f : S^2 \to E^1$连续，那么存在$t \in f(S^2)$，使得$f^{-1}(t)$为不可数集，并且至多存在两点$s \in f(S^2)$，使得$f^{-1}(s)$为可数集。

证明：由于S^2为紧致连通集，那么$f(S^2) \subset E^1$为紧致连通集，而E^1中的紧致连通集为闭区间，那么设$f(S^1) = [a, b]$，其中$a \leq b$。如果$a = b$，那么$f^{-1}(a) = S^2$为不可数集。如果$a < b$，那么任取$t \in (a, b)$，由于$f(S^2 \setminus f^{-1}(t)) = [a, t) \cup (t, b]$不连通，因此$S^2 \setminus f^{-1}(t)$不连通。如果$f^{-1}(t)$为可数集，那么任取$x, y \in S^2 \setminus f^{-1}(t)$，由于$x, y$间在$S^2$中存在不可数个道路，那么$x, y$间在$S^2 \setminus f^{-1}(t)$中存在道路，于是$S^2 \setminus f^{-1}(t)$道路连通，进而$S^2 \setminus f^{-1}(t)$连通，矛盾！因此$f^{-1}(t)$为不可数集，进而至多$a, b$使得$f^{-1}(a)$和$f^{-1}(b)$为可数集。

2.6.5 第五题

证明：

$$S_1 \ncong S^2 \tag{63}$$

2.6.6 第六题

证明：

$$\{(x,y) : xy = 0\} \ncong E^1 \tag{64}$$

第四章

4.1 第一节

4.1.1 第一题

4.1.2 第二题

4.1.3 第三题

4.1.4 第四题

4.1.5 第五题

4.1.6 第六题

4.1.7 第七题

4.1.8 第八题