Mathematica 在微分几何研究中的交互式应用

一、引言

1.1 研究背景与目的

1.2 方法与工具简介

1.3 论文结构概述

二、曲线的Frenet系统与曲面的基本形式的研究

Mathematica作为强大的数学工业软件，在代数计算与几何交互等领域的功能十分强大。在正式研究曲线和曲面的几何特征之前，我们首先使用Mathematica来进行代数计算，分别计算曲线的Frenet系统参数与曲面的基本形式。

2.1 曲线的Frenet系统的研究

在微分几何中，Frenet系统描述的是质点沿三维 Euclid 空间$\mathbb{R}^3$中的可变曲线运动的运动学性质，或者说是曲线本身的几何性质。更具体地说，这些公式描述了所谓的单位切向量、主法向量和副法向量以及曲线的曲率和挠率。

2.1.1 曲线的Frenet系统的定义

单位切向量、主法向量和副法向量共同构成三维Euclid空间$\mathbb{R}^3$的单位正交基，对于曲线$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，其定义如下

$$\boldsymbol{\alpha}=\dot{\boldsymbol{r}},\qquad \boldsymbol{\beta}=\frac{\dot{\boldsymbol{\alpha}}}{|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|},\qquad \boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta} \tag{1}$$

曲率刻画了曲线的弯曲程度，挠率刻画了曲线的扭转程度，对于曲线$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，其定义如下

$$k=|\dot{\boldsymbol{\alpha}}|,\qquad \tau=\begin{cases}|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|, & \boldsymbol{\gamma}'\text{与}\boldsymbol{\beta}\text{异向}\\ -|\dot{\boldsymbol{\gamma}}|, & \boldsymbol{\gamma}'\text{与}\boldsymbol{\beta}\text{同向}\end{cases} \tag{2}$$

2.1.2 曲线的Frenet系统的计算

在Mathematica中可以使用 `FrenetSerretSystem` 函数计算出曲线的Frenet系统的参数，如下表格展示了圆柱螺线与双曲螺线的Frenet系统的参数。

曲线	参数表示	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\gamma}$	k	τ
圆柱螺线	$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=bt\end{cases}$	$\left(-\frac{\sin(t)}{\sqrt{2}},\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$(-\cos(t),-\sin(t),0)$	$\left(\frac{\sin(t)}{\sqrt{2}},-\frac{\cos(t)}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
双曲螺线	$\begin{cases}x=a\cosh t\\ y=a\sinh t\\ z=at\end{cases}$	$\left(\frac{\sinh(t)}{\sqrt{\cosh(2t)+1}},\frac{\cosh(t)}{\sqrt{\cosh(2t)+1}},\frac{1}{\sqrt{\sinh^2(t)+\cosh^2(t)+1}}\right)$	$(\operatorname{sech}(t),0,-\tanh(t))$	$\left(-\frac{\sinh(t)}{\sqrt{\cosh(2t)+1}},\frac{\cosh(t)}{\sqrt{\cosh(2t)+1}},-\frac{1}{\sqrt{\cosh(2t)+1}}\right)$	$\frac{\operatorname{sech}^2(t)}{2}$	$\frac{\operatorname{sech}^2(t)}{2}$

```
(* 圆柱螺线的 Frenet 系统参数 *)
curve[t_] := {Cos[t], Sin[t], t}
{{kappa, tau}, {alpha, beta, gamma}} =
FrenetSerretSystem[curve[t], t] // Simplify

(* 双曲螺线的 Frenet 系统参数 *)
curve[t_] := {Cosh[t], Sinh[t], t}
{{kappa, tau}, {alpha, beta, gamma}} =
FrenetSerretSystem[curve[t], t] // Simplify
```

2.2 曲面的基本形式的研究

在微分几何中，曲面的第一基本形式刻画了曲面的度量特性，如长度和面积等，通常以Ⅰ表示；曲面的第二基本形式与第一基本形式一起刻画了曲面的外在不变式，如曲面上曲线的曲率，通常以Ⅱ表示。

2.2.1 曲面的基本形式的定义

对于曲面$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，其第一基本形式定义如下

$$\mathrm{I}\ =\mathrm{d}\boldsymbol{r}^2=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2=\begin{pmatrix}\mathrm{d}u & \mathrm{d}v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix} \tag{3}$$

其中

$$E=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_u,\qquad F=\boldsymbol{r}_u\cdot\boldsymbol{r}_v,\qquad G=\boldsymbol{r}_v\cdot\boldsymbol{r}_v \tag{4}$$

称为曲面的第一类基本量。

对于曲面$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$，其第二基本形式定义如下

$$\mathrm{II}\ =\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}=L\mathrm{d}u^2+2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v+N\mathrm{d}v^2=\begin{pmatrix}\mathrm{d}u & \mathrm{d}v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L & M\\ M & N\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}u\\ \mathrm{d}v\end{pmatrix} \tag{5}$$

其中

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{(\boldsymbol{r}_{uu},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}},\quad M=\boldsymbol{r}_{uv}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{(\boldsymbol{r}_{uv},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}},\quad N=\boldsymbol{r}_{vv}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{(\boldsymbol{r}_{vv},\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}} \tag{6}$$

称为曲面的第二类基本量。

2.2.2 曲面的基本形式的计算

在Mathematica没有直接计算曲面的基本形式的函数，因此我们需要自行定义。如下表格展示了球面、正螺面与马鞍面的基本形式。

曲面	参数表示	第一基本形式	第二基本形式
球面	$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\cos\varphi\\ y=\rho\cos\theta\sin\varphi\\ z=\rho\sin\theta\end{cases}$	$\rho^2\cos^2\theta\mathrm{d}\varphi^2+\rho^2\mathrm{d}\theta^2$	$-\rho(\cos^2\theta\mathrm{d}\varphi^2+\mathrm{d}\theta^2)$
正螺面	$\begin{cases}x=u\cos v\\ y=u\sin v\\ z=av\end{cases}$	$\mathrm{d}u^2+(u^2+a^2)\mathrm{d}v^2$	$-\frac{2a}{\sqrt{u^2+a^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

```
(* 定义曲面的第一类基本量 *)
FirstFundamentalFormCoefficients[r_, {u_, v_}] := Module[{
   du = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(u\)]r\),
   dv = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(v\)]r\)},
  {du . du, du . dv, dv . dv}]

(* 定义曲面的第二类基本量 *)
SecondFundamentalFormCoefficients[r_List, {u_, v_}] := Module[{
   du = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(u\)]r\),
   dv = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(v\)]r\),
   dudu, dudv, dvdv},
  dudu = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(u\)]du\);
  dudv = \!\(
```

```
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(v\)]du\);
  dvdv = \!\(
\*SubscriptBox[\(\[PartialD]\), \(v\)]dv\);
  {Det[{dudu, du, dv}], Det[{dudv, du, dv}], Det[{dvdv, du, dv}]}/
   Sqrt[du . du dv . dv - (du . dv)^2]]

(* 求解球面的基本形式 *)
r[\[CurlyPhi]_, \[Theta]_] := {\[Rho] Cos[\[Theta]] Cos[\[CurlyPhi]], \[Rho] Cos[\[Theta]] Sin[\[CurlyPhi]], \[Rho] Sin[\[Theta]]}
(* 计算球面的第一类基本量 *)
FirstFundamentalFormCoefficients[
  r[\[CurlyPhi], \[Theta]], {\[CurlyPhi], \[Theta]}] // Simplify
(* 计算球面的第二类基本量 *)
SecondFundamentalFormCoefficients[
  r[\[CurlyPhi], \[Theta]], {\[CurlyPhi], \[Theta]}] // Simplify

(* 求解正螺面的基本形式 *)
r[u_, v_] := {u Cos[v], u Sin[v], a v}
(* 计算正螺面的第一类基本量 *)
FirstFundamentalFormCoefficients[r[u, v], {u, v}] // Simplify
(* 计算正螺面的第二类基本量 *)
SecondFundamentalFormCoefficients[r[u, v], {u, v}] // Simplify
```

三、经典曲线与曲面研究的交互式应用

3.1 圆柱螺线与马鞍面的交互式绘图

为后文便于研究曲线和曲面的几何特征，我们在这里首先给出圆柱螺线与马鞍面的定义，并作交互式绘图。

3.1.1　圆柱螺线与马鞍面的定义

圆柱螺线定义如下

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases} \qquad t\text{为参数} \tag{7}$$

马鞍面定义如下

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \tag{8}$$

3.1.2　圆柱螺线与马鞍面的交互式绘图

圆柱螺线的交互式绘图如下

其中我们可以自由调整参数a, b, t的大小。通过调整参数a, b, t的大小，我们可以发现

```
(* 使用Manipulate创建交互式绘图 *)
Manipulate[ParametricPlot3D[
  {a Cos[t], a Sin[t], b t}, {t, 0.01, tMax},
  PlotStyle -> Red,
  PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {"x", "y", "z"}],
 {{a, 0}, -1, 1}, {{b, 0}, -1, 1}, {{tMax, 5}, 0, 10}]
```

马鞍面的交互式绘图如下

其中我们可以自由调整参数a, b的大小。通过调整参数a, b的大小，我们可以发现

```
(* 使用Manipulate创建交互式绘图 *)
Manipulate[ParametricPlot3D[
  {x, y, x^2/a^2 - y^2/b^2}, {x, -max, max}, {y, -max, max},
  PlotStyle -> Orange,
  PlotRange -> All,
  AxesLabel -> {"x", "y", "z"}],
 {{a, 3}, 1, 5}, {{b, 3}, 1, 5}, {{max, 5}, 0, 10}]
```

3.2 旋轮线的交互式绘图

在正式开始研究曲线与曲面的几何特征之前，我们稍作放松，来研究一个有意思的平面曲线。

3.2.1 旋轮线的定义

考虑数轴

$$0 \le x \le 6\pi \tag{9}$$

上切于$(0,0)$的单位圆

$$x = \cos t, \qquad y = 1 + \sin t \tag{10}$$

令φ表示圆周转过的角度，那么此时圆周的方程为

$$x = \varphi + \cos t, \qquad y = 1 + \sin t \tag{11}$$

记初始圆上切于数轴的点为P，当圆周沿数轴运动时，点P也在运动，其参数表示为

$$P(\varphi - \sin\varphi, 1 - \cos\varphi) \tag{12}$$

那么P的轨迹方程为

$$\begin{cases} x = \varphi - \sin\varphi \\ y = 1 - \cos\varphi \end{cases}, \qquad \varphi \text{ 为参数} \tag{13}$$

称之为旋轮线。

3.2.2 旋轮线的交互式绘图

我们使用Mathematica将上述运动过程展示出来，通过调整圆周转过的角度φ，来显示圆周与点P不同的位置，以及点P的运动轨迹，如下图所示。

```
(*使用Manipulate创建交互式绘图*)
Manipulate[
 Module[
  {line, circle, point, pointCurve},
  (* 绘制数轴 *)
  line = Graphics[{
     Line[{{0, 0}, {6 Pi, 0}}],
     Table[Text[ToString[i] <> "\[Pi]", {i Pi, -0.5}], {i, 0, 6}]}];
  (* 绘制圆周 *)
  circle = ParametricPlot[
    {Cos[t] + \[CurlyPhi], 1 + Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi},
    PlotStyle -> Blue];
  (* 绘制动点 *)
  point = Graphics[{
     PointSize[Large],
     Red,
     Point[{\[CurlyPhi] - Sin[\[CurlyPhi]], 1 - Cos[\[CurlyPhi]]}]}];
  (* 绘制动点轨迹 *)
  pointCurve = ParametricPlot[
    {t - Sin[t], 1 - Cos[t]}, {t, 0, \[CurlyPhi]},
    PlotStyle -> Red
    ];
  Show[line, circle, point, pointCurve,
   PlotRange -> {{-2, 6 Pi + 2}, {-2, 3}}]],
 {\[CurlyPhi], 0.001, 6 Pi}]
```

四、曲线的几何特征研究的交互式应用

4.1 曲线的切线的交互式绘图

4.1.1 曲线的切线的定义

4.1.2 圆柱螺线的切线的交互式绘图

4.2 曲线的基本三棱形的交互式绘图

4.2.1 曲线的基本三棱形的定义

4.2.2 圆柱螺线的基本三棱形的交互式绘图

五、曲面的几何特征研究的交互式应用

5.1 曲面的切线的交互式绘图

5.1.1 曲面的法线的定义

5.1.2 马鞍面的法线的交互式绘图

5.2 曲面的切平面的交互式绘图

5.2.1 曲面的切平面的定义

5.2.2 马鞍面的切平面的交互式绘图

六、总结

6.1 主要研究成果

6.2 未来研究方向