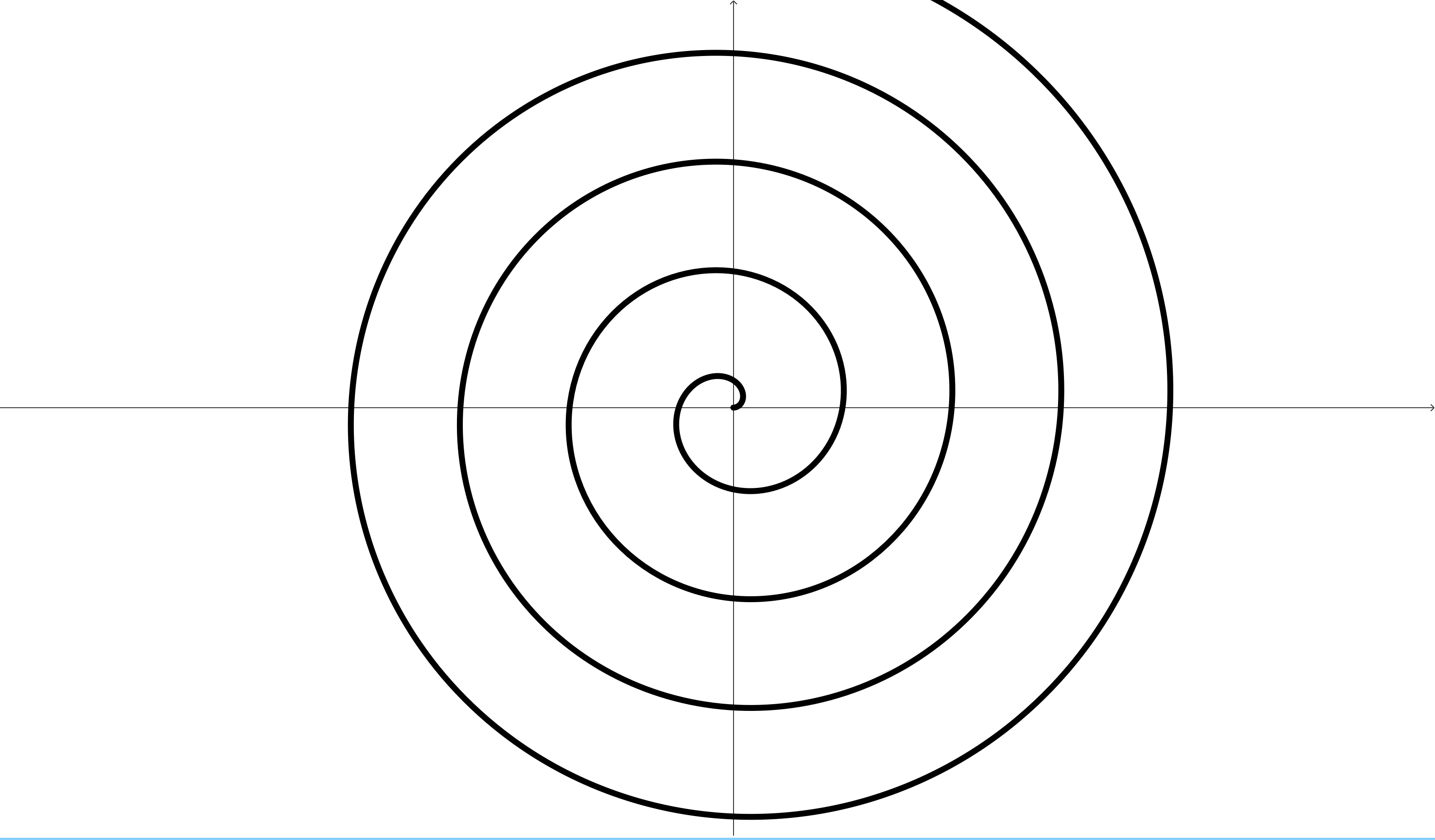

Complex Analysis - Stein - Notebook

作者：若水

邮箱：ethanmxzhou@163.com

主页：helloethanzhou.github.io

时间：July 18, 2024

致谢

感谢 **勇敢的** 自己

目录

第一章 全纯函数

1.1 全纯函数

定义 1.1.1 (全纯函数)

称函数 $f = u + iv$ 在开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上为全纯函数，如果成立如下命题之一。

1. 对于任意 $z \in \Omega$，存在极限
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$
2. 函数 u 和 v 在 Ω 上连续可微，且成立 Cauchy-Riemann 方程
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
3. 函数 f 在 Ω 上连续，且对于任意分段光滑闭曲线 γ，成立
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$$
4. 对于任意 $z_0 \in \Omega$，存在 $r > 0$，使得对于任意 $z \in D_r(z_0)$，成立幂级数展开
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

♣

证明 $1 \implies 2$：由 Cauchy-Riemann 方程1.2.1，命题得证！

$2 \implies 1$：由 Cauchy-Riemann 方程逆定理1.2.2，命题得证！

$1 \implies 3$：由 Cauchy 积分定理2.2.3，命题得证！

$3 \implies 1$：由 Morera 定理2.4.2，命题得证！

$1 \implies 4$：由 Taylor 展开2.3.3，命题得证！

$4 \implies 1$：由定理1.3.2，命题得证！

定义 1.1.2 (整函数)

称在 $\mathbb{C}$ 上全纯的函数为整函数。

♣

1.2 Cauchy-Riemann 方程

定理 1.2.1 (Cauchy-Riemann 方程)

如果函数 $f = u + iv$ 在开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上全纯，那么
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$
即
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

♡

证明 由于存在极限
$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \frac{f(x+h_1, y+h_2) - f(x,y)}{h_1 + ih_2}$$
那么当 h 沿实轴时
$$f'(z) = \lim_{h_1 \to 0} = \frac{f(x+h_1, y) - f(x,y)}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial x}(z)$$

当 h 沿虚轴时

$$f'(z) = \lim_{h_2 \to 0} = \frac{f(x, y+h_2) - f(x,y)}{ih_2} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z)$$

从而

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

定理 1.2.2 (Cauchy-Riemann 方程逆定理)

如果函数 $f = u + iv$ 在开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上成立 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

那么 f 在 Ω 上全纯。 ♡

证明 由于函数 u 和 v 在 Ω 上连续可微，那么

$$\begin{aligned} u(x+h_1, y+h_2) - u(x,y) &= \frac{\partial u}{\partial x}h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}h_2 + h\psi_1(h) \\ v(x+h_1, y+h_2) - v(x,y) &= \frac{\partial v}{\partial x}h_1 + \frac{\partial v}{\partial y}h_2 + h\psi_2(h) \end{aligned}$$

其中

$$\lim_{h\to 0} \psi_1(h) = \lim_{h \to 0} \psi_2(h) = 0$$

令

$$h = h_1 + ih_2, \qquad \psi = \psi_1 + i\psi_2$$

从而由 Cauchy-Riemann 方程

$$f(z+h) - f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)h + h\psi(h)$$

从而 f 为全纯函数，且

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 2\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

定义 1.2.1 (微分算子)

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

♣

命题 1.2.1

如果 $f = u + iv$ 在开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上全纯，那么

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \qquad f' = \frac{\partial f}{\partial z} = 2\frac{\partial u}{\partial z}$$

且其 Jacobian 矩阵成立

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = |f'|^2$$

♠

命题 1.2.2

对于开集 Ω 上的全纯函数 $f=u+iv$，如果 f 成立如下条件之一，那么 f 为常数。

1. $\mathrm{Re}(f)$ 为常数。
2. $\mathrm{Im}(f)$ 为常数。
3. $|f|$ 为常数。
4. $f'=0$
5. $\overline{f}$ 全纯。

证明 对于 1，由于 u 为常数，那么由 Cauchy-Riemann 方程1.2.1

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

因此 v 为常数，进而 f 为常数。

对于 2，由于 v 为常数，那么由 Cauchy-Riemann 方程1.2.1

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

因此 u 为常数，进而 f 为常数。

对于 3，由于 u^2+v^2 为常数，那么分别对 x 和 y 求偏导，并由 Cauchy-Riemann 方程1.2.1得到

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=0$$

注意到

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

如果

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=0$$

那么 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$，因此 u 为常数，由 1，f 为常数。

如果

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\neq 0$$

那么上式存在唯一解 $u=v=0$，因此 f 为常数。

因此，f 为常数。

对于 4，由于

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0$$

同时由于 f 全纯，那么

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0$$

联立两式可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

因此 f 为常数。

对于 5，由于 f 和 $\overline{f}$ 均是全纯的，那么 $u=\frac{1}{2}(f+\overline{f})$ 和 $v=\frac{1}{2i}(f+\overline{f})$ 是全纯的。由 Cauchy-Riemann 方

程1.2.1

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

因此 u,v 均为常数，进而 f 为常数。

1.3 幂级数

定义 1.3.1 (解析函数)

称定义在开集 Ω 上的函数 f 在点 $z_0\in\Omega$ 处是解析的，如果在 z_0 的邻域内存在幂级数展开

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

♣

定理 1.3.1 (Hadamard 公式)

幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

的收敛半径 R 成立

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$$

且

1. 如果 $|z|<R$，那么级数绝对收敛。
2. 如果 $|z|>R$，那么级数发散。

♡

定理 1.3.2 (幂级数可逐项求导)

幂级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

在收敛域内定义了一个全纯函数，其导函数为

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}na_nz^{n-1}$$

且收敛半径不变。

♡

命题 1.3.1

1. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nz^n$ 在单位圆上任意一点均不收敛。
2. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$ 在单位圆上任意一点均收敛。
3. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$ 在单位圆上除 $z=1$ 外任意一点均收敛。

♠

证明 对于 1，注意到

$$\lim_{n\to\infty}|nz^n|=\lim_{n\to\infty}n=\infty$$

因此幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$ 在单位圆上任意一点均不收敛。事实上

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n = \frac{z}{(z-1)^2}$$

对于 2，注意到当 $|z| = 1$ 时，成立

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，于是幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 在单位圆上任意一点均收敛。

对于 3，当 $z = 1$ 时，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 显然不收敛。

当 $|z| = 1$ 且 $z \neq 1$ 时，令 $z = \cos\theta + i\sin\theta$，其中 $\theta \in (0, 2\pi)$，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$$

注意到

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta - \sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta) = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{2n+1}{2}\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

因此

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta)\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}, \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$$

又 $1/n$ 单调趋于 0，那么由 Dirichlet 判别法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ 均收敛，进而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 收敛。

综上所述，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ 在单位圆上除 $z = 1$ 外任意一点均收敛。事实上

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = -\ln(1-z)$$

1.4 曲线积分

定义 1.4.1 (光滑曲线)

称曲线 $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ 为光滑曲线，如果 z 在 $[a, b]$ 上连续可微，且 $z'(t) \neq 0$。 ♣

定义 1.4.2 (封闭曲线)

称曲线 $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ 为封闭曲线，如果 $z(a) = z(b)$。 ♣

定义 1.4.3 (简单曲线)

称曲线 $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ 为简单曲线，如果成立

$$z(t) = z(s) \implies t = s$$

♣

定义 1.4.4 (曲线积分)

定义连续函数 f 在可参数化为 $z(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ 的光滑曲线 γ 上的曲线积分为

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t$$

♣

定理 1.4.1

如果连续函数 f 在开集 Ω 上存在原函数 F，且分段光滑曲线 γ 起于 w_1 终于 w_2，那么

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=F(w_2)-F(w_1)$$

♡

证明 不妨假设 γ 为光滑曲线，参数化曲线 γ 为 $z(t):[a,b]\to\mathbb{C}$，其中 $z(a)=w_1$ 且 $z(b)=w_2$，那么

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z&=\int_a^b f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t\\&=\int_a^b F'(z(t))z'(t)\mathrm{d}t\\&=\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(z(t))\mathrm{d}t\\&=F(z(b))-F(z(b))\\&=F(w_2)-F(w_1)\end{aligned}$$

推论 1.4.1

如果连续函数 f 在开集 Ω 上存在原函数，那么对于分段光滑封闭曲线 γ，成立

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0$$

♡

推论 1.4.2

对于区域 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上的全纯函数 f，如果 $f'=0$，那么 f 为常函数。 ♡

命题 1.4.1

$$\int_\gamma z^n\mathrm{d}z=\begin{cases}2\pi i, & n=-1\\ 0, & n\neq -1\end{cases}$$

其中 γ 为以原点为中心且方向为正的任何圆。

♠

证明 令 γ 的参数方程为 $z(\theta)=\rho\mathrm{e}^{i\theta}$，其中 $\rho>0$ 且 $\theta\in[0,2\pi]$，那么

$$\int_\gamma z^n\mathrm{d}z=i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\mathrm{d}\theta$$

当 $n=-1$ 时

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z=i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi i$$

当 $n\neq -1$ 时

$$\int_\gamma z^n\mathrm{d}z=i\rho^{n+1}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}\mathrm{d}\theta=0$$

因此

$$\int_\gamma z^n \mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$$

第二章 Cauchy 积分定理与应用

2.1 Goursat 定理

定理 2.1.1 (Goursat 定理)

如果函数 f 在开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上全纯，那么对于任意三角形 $T \subset \Omega$，成立

$$\int_T f(z)\mathrm{d}z = 0$$

♡

2.2 Cauchy 积分定理

定理 2.2.1

开圆上的全纯函数 f 存在原函数。

♡

定理 2.2.2 (开圆上的 Cauchy 积分定理)

如果函数 f 在开圆 D 上全纯，那么对于封闭曲线 $\gamma \subset D$，成立

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$$

♡

定理 2.2.3 (Cauchy 积分定理)

对于边界分段光滑的区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$，如果函数 f 在 Ω 上全纯且在 $\overline{\Omega}$ 上连续，那么

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

♡

例题 2.1

$$\int_0^\infty \sin x^2 \mathrm{d}x = \int_0^\infty \cos x^2 \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

证明 记曲线为

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 : z = t, && t : 0 \to R \\
&\gamma_2 : z = Re^{it}, && t : 0 \to \frac{\pi}{4} \\
&\gamma_3 : z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}t, && t : R \to 0
\end{aligned}$$

考虑函数 e^{-z^2} 在 $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ 上的积分，由 Cauchy 积分定理2.2.3

$$\int_{\gamma_1} \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z = 0$$

考察各项积分，对于第一项

$$\int_{\gamma_1} \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z = \int_0^R \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

因此

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} \mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

对于第二项，注意到当 $t\in[0,\pi]$ 时，成立 $\cos 2t\geq 1-\frac{4}{\pi}t$，于是

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_2}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z\right|\leq&\int_{\gamma_2}\left|\mathrm{e}^{-z^2}\right||\mathrm{d}z|\\ =&R\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-R^2\cos 2t}\mathrm{d}t\\ \leq&R\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{-R^2(1-\frac{4}{\pi}t)}\mathrm{d}t\\ =&\frac{\pi}{4R}(1-\mathrm{e}^{-R^2})\end{aligned}$$

进而

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z=0$$

对于第三项

$$\int_{\gamma_3}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^R\mathrm{e}^{-it^2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\int_0^R(\cos t^2+\sin t^2)\mathrm{d}t+i\int_0^R(\cos t^2-\sin t^2)\mathrm{d}t\right)$$

于是当 $R\to\infty$ 时，成立

$$\int_0^\infty(\cos t^2+\sin t^2)\mathrm{d}t+i\int_0^\infty(\cos t^2-\sin t^2)\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

因此

$$\int_0^\infty(\cos t^2+\sin t^2)\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2\pi}}{2},\qquad\int_0^\infty(\cos t^2-\sin t^2)\mathrm{d}t=0$$

所以

$$\int_0^\infty\sin x^2\mathrm{d}x=\int_0^\infty\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

例题 2.2

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

证明 记曲线

$$\begin{aligned}&\gamma_1:z=t, && t:\varepsilon\to R\\ &\gamma_2:z=t, && t:-R\to-\varepsilon\\ &C_r:z=R\mathrm{e}^{it}, && t:0\to\pi\\ &C_\varepsilon:z=\varepsilon\mathrm{e}^{it}, && t:\pi\to 0\end{aligned}$$

考虑函数 e^{iz}/z 在 $\gamma_1+\gamma_2+C_R+C_\varepsilon$ 上的积分，由 Cauchy 积分定理2.2.3

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z+\int_{C_\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z=0$$

考察各项积分，对于第一项

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\int_{\gamma_1+\gamma_2}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^\infty\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z=2i\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

对于第二项，注意到当 $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，成立 $\sin t\geq\frac{2}{\pi}t$，因此

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z\right|\leq&\int_{C_R}\left|\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\right||\mathrm{d}z|\\=&2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-R\sin t}\mathrm{d}t\\\leq&2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{2R}{\pi}t}\mathrm{d}t\\=&\frac{\pi}{R}(1-\mathrm{e}^{-R})\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z=0$$

对于第三项，注意到

$$\int_{C_\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z=-i\int_0^\pi\mathrm{e}^{i\varepsilon\mathrm{e}^{it}}\mathrm{d}t$$

于是

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z}\mathrm{d}z=-i\int_0^\pi\mathrm{d}t=-i\pi$$

因此当 $R\to\infty$ 且 $\varepsilon\to0$ 时，成立

$$2i\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=i\pi$$

进而

$$\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$$

例题 2.3

$$\int_0^\infty\mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x=\frac{a}{a^2+b^2},\qquad\int_0^\infty\mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x=\frac{b}{a^2+b^2},\qquad a>0$$

证明 法一：当 $b\neq0$ 时，记曲线

$$\begin{aligned}&\gamma_1:z=t, &&t:0\to R\\&\gamma_2:z=R\mathrm{e}^{it}, &&t:0\to\theta\\&\gamma_3:z=t\mathrm{e}^{i\theta}, &&t:R\to0\end{aligned}$$

其中

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad\sin\theta=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad\theta\in(-\pi/2,\pi/2)$$

考虑函数 e^{-rz} 在曲线 $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$ 上的积分，其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$，由 Cauchy 积分定理2.2.3

$$\int_{\gamma_1}\mathrm{e}^{-rz}\mathrm{d}z+\int_{\gamma_2}\mathrm{e}^{-rz}\mathrm{d}z+\int_{\gamma_3}\mathrm{e}^{-rz}\mathrm{d}z=0$$

考察各项积分，对于第一项

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1}\mathrm{e}^{-rz}\mathrm{d}z=\int_0^\infty\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t=\frac{1}{r}$$

对于第二项

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_2} \mathrm{e}^{-rz}\mathrm{d}z\right| \leq& \int_{\gamma_2} \left|\mathrm{e}^{-rz}\right| |\mathrm{d}z| \\ =&R\int_0^{\theta} \mathrm{e}^{-rR\cos t}\mathrm{d}t \\ \leq&\frac{R}{\mathrm{e}^{rR\cos\theta}}\int_0^{\theta}\mathrm{d}t \\ =&\frac{\theta R}{\mathrm{e}^{rR\cos\theta}}\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} \mathrm{e}^{-rz}\mathrm{d}z = 0$$

对于第三项

$$\int_{\gamma_3} \mathrm{e}^{-rz}\mathrm{d}z = -\mathrm{e}^{i\theta}\int_0^R \mathrm{e}^{-r\mathrm{e}^{i\theta}t}\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{i\theta}\left(\int_0^R \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x + i\int_0^R \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x\right)$$

于是当 $R\to\infty$ 时，成立

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x + i\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{1}{r\mathrm{e}^{i\theta}} = \frac{a+ib}{a^2+b^2}$$

因此

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+b^2},\qquad \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{b}{a^2+b^2}$$

当 $b=0$ 时，显然有

$$\begin{aligned}&\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\\ &\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$

综上所述

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+b^2},\qquad \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{b}{a^2+b^2}$$

法二：注意到

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{(-a+ib)x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{(-a+ib)x}}{-a+ib}\bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{a-ib} = \frac{a+ib}{a^2+b^2}$$

因此

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+b^2},\qquad \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax}\sin bx\mathrm{d}x = \frac{b}{a^2+b^2}$$

2.3 Cauchy 积分公式

2.3.1 Cauchy 积分公式

定理 2.3.1 (开圆上的 Cauchy 积分公式)

对于开集 $\Omega\subset\mathbb{C}$，闭圆 $\overline{D}\subset\Omega$，如果 f 在 Ω 上全纯，那么对于任意 $z\in D$，成立

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

♡

定理 2.3.2 (Cauchy 积分公式)

对于边界分段光滑的区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$，如果函数 f 在 Ω 上全纯且在 $\overline{\Omega}$ 上连续，那么对于任意 $z \in \Omega$，成立

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

同时 f 在 Ω 上无穷阶可导，且对于任意 $z \in \Omega$，成立

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

推论 2.3.1 (平均值性质)

对于在开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上全纯的函数 f，如果 $z_0 \in \Omega$ 且 $D_r(z_0) \subset \Omega$，那么

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

证明 由 Cauchy 积分公式2.3.2，这几乎是显然的！

推论 2.3.2 (Cauchy 不等式)

对于开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的全函数 f，如果 $\overline{D}_r(z_0) \subset \Omega$，那么

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n}\sup_{|z-z_0|=r}|f(z)|$$

证明 由 Cauchy 积分公式2.3.2

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(z_0)| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right| \\
&= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{(re^{i\theta})^{n+1}}rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right| \\
&\leq \frac{n!}{r^n}\sup_{|z-z_0|=r}|f(z)|
\end{aligned}$$

命题 2.3.1

对于整函数 f，如果对于任意 $R > 0$，存在 $k \in \mathbb{N}$，和 $A, B > 0$，成立

$$\sup_{|z|=R}|f(z)| \leq AR^k + B$$

那么 f 是次数不多于 k 的多项式。

证明 由 Cauchy 不等式2.3.2

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{R^n}\sup_{|z|=R}|f(z)| \leq \frac{n!}{R^n}(AR^k + B)$$

当 $n > k$ 时，令 $R \to \infty$，可知 $f^{(n)}(0) = 0$，那么由 f 在 $z = 0$ 处的 Taylor 展开式，f 在 $z = 0$ 的邻域内为次数不多于 k 的多项式，由唯一性定理2.3.4，f 在 $\mathbb{C}$ 上为次数不多于 k 的多项式。

命题 2.3.2

如果 f 是在区域 $z \in \mathbb{R} \times (-1, 1)$ 上全纯函数，且存在 $A > 0$ 与 $\eta > 0$，使得对于任意 $z \in \mathbb{R} \times (-1, 1)$，成立

$$|f(z)| \leq A(1 + |z|)^\eta$$

那么对于任意 $n \in \mathbb{N}$，存在 $A_n \geq 0$，使得对于任意 $x \in \mathbb{R}$，成立

$$|f^{(n)}(x)| \leq A_n(1 + |x|)^\eta$$

证明 任取 $x\in\mathbb{R}$，作边界方向为正的圆 $D=D_{\frac{1}{2}}(x)$，注意到当 $z\in\partial D$ 时，成立

$$1+|z|\le\frac{3}{2}+|x|\le 2(1+|x|)$$

从而由 Cauchy 积分公式2.3.2

$$\begin{aligned}|f^{(n)}(x)|&=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-x)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right|\\&\le\frac{n!}{2\pi}\int_{\partial D}\frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-x|^{n+1}}|\mathrm{d}\zeta|\\&\le\frac{n!}{2\pi}\int_{\partial D}\frac{A(1+|\xi|)^{\eta}}{|\zeta-x|^{n+1}}|\mathrm{d}\zeta|\\&\le\frac{n!}{2\pi}\int_{\partial D}\frac{A2^{\eta}(1+|x|)^{\eta}}{|\zeta-x|^{n+1}}|\mathrm{d}\zeta|\\&=2^{\eta+n}n!A(1+|x|)^{\eta}\end{aligned}$$

取 $A_n=2^{\eta+n}n!A$ 即可。

命题 2.3.3

对于 $\mathbb{C}$ 上的整函数 f，如果

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{f(z)}{z^m}\right|=0$$

那么 f 至多为 $m-1$ 次多项式。

证明 法一：由于

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{f(z)}{z^m}\right|=0$$

所以存在 $R>0$，使得当 $|z|\ge R$ 时，成立

$$|f(z)|<|z|^m$$

将 f 展开为多项式级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

取 $z=R\mathrm{e}^{i\theta}$，那么

$$f(R\mathrm{e}^{i\theta})=\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\mathrm{e}^{in\theta}$$

注意到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(R\mathrm{e}^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\mathrm{e}^{in\theta}\right|^2\mathrm{d}\theta\\=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nR^n\mathrm{e}^{in\theta}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a_n}R^n\mathrm{e}^{-in\theta}\right)\mathrm{d}\theta\\=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{m,n=0}^{\infty}a_m\overline{a_n}R^{m+n}\mathrm{e}^{i(m-n)\theta}\right)\mathrm{d}\theta\\=&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_nR^n|^2\right)\mathrm{d}\theta\\=&\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2R^{2n}\end{aligned}$$

因此
$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2R^{2n}<R^{2m}$$
进而对于任意 $n>m$，$a_n=0$，因此 f 至多为 m 次多项式，而显然 f 不为 m 次多项式，于是 f 至多为 $m-1$ 次多项式。

法二：任取 $z\in\mathbb{C}$，由 Cauchy 积分公式2.3.2
$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=R}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta=\frac{n!}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi}\frac{f(z+R\mathrm{e}^{i\theta})}{\mathrm{e}^{in\theta}}\mathrm{d}\theta$$
而由于
$$\lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{f(z)}{z^m}\right|=0$$
所以存在 $A>0$，使得当 $|z|>A$ 时，成立
$$|f(z)|<|z|^m$$
因此当 $R>A-|z|$ 时，成立
$$\left|f^{(n)}(z)\right|\leq\frac{n!}{2\pi R^n}\int_0^{2\pi}|f(z+R\mathrm{e}^{i\theta})|\mathrm{d}\theta\leq\frac{n!}{R^n}|z+R\mathrm{e}^{i\theta}|^m\leq\frac{n!}{R^n}(|z|^m+R^m)$$
于是当 $n>m$ 且 $R\to\infty$ 时，成立
$$f^{(n)}(z)=0$$
这说明 f 在 $\mathbb{C}$ 上的任意一点的 Taylor 展式均不超过 m 次，因此 f 至多为 m 次多项式，而显然 f 不为 m 次多项式，于是 f 至多为 $m-1$ 次多项式。

2.3.2 Taylor 展开

定理 2.3.3 (Taylor 展开)

对于开集 Ω 上的全纯函数 f，如果 $D_r(z_0)\subset\Omega$，那么 f 存在幂级数展开
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad z\in D_r(z_0)$$
其中
$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\quad n\in\mathbb{N}$$

证明 任取 $z\in D_r(z_0)$，由 Cauchy 积分公式2.3.2
$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$
对于 $\zeta\in\partial D$，考虑几何级数
$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$$
从而由 Cauchy 积分公式2.3.2
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right)(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

推论 2.3.3 (Liouville 定理)

1. 如果 f 是 $\mathbb{C}$ 上的有界整函数，那么 f 是常函数。
2. 如果 f 是 $\mathbb{C}$ 上的下有界整函数，那么 f 是常函数。

3. 对于 $\mathbb{C}$ 上的整函数 $f = u + iv$，如果 u 存在上界，那么 f 是常函数。
4. 对于 $\mathbb{C}$ 上的整函数 $f = u + iv$，如果 u 存在下界，那么 f 是常函数。
5. 对于 $\mathbb{C}$ 上的整函数 $f = u + iv$，如果 v 存在上界，那么 f 是常函数。
6. 对于 $\mathbb{C}$ 上的整函数 $f = u + iv$，如果 v 存在下界，那么 f 是常函数。

♡

证明 对于 1，由于 f 在 $\mathbb{C}$ 上有界，那么存在 $M \in \mathbb{R}$，使得对于任意 $z \in \mathbb{C}$，成立 $|f(z)| \leq M$。由 Cauchy 不等式2.3.2，对于任意 $z_0 \in \mathbb{C}$ 与 $r > 0$，成立

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{r} \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)| \leq \frac{M}{r} \to 0 \qquad (r \to \infty)$$

从而 $f' = 0$。由推论1.4.2，f 为常函数。

对于 2，如果 f 下有界，那么 $1/f$ 为有界整函数，因此由 1，$1/f$ 为常函数，进而 f 为常函数。

对于 3，如果 u 上有界，那么考虑 e^f。由于

$$|\mathrm{e}^f| = |\mathrm{e}^{u+iv}| = \mathrm{e}^u$$

因此 e^f 有界。由 1，e^f 为常函数，进而 f 为常函数。

对于 4，如果 u 下有界，那么由 $|f| \geq |u|$，可知 f 下有界。由 2，f 为常函数。

对于 5，如果 u 上有界，那么考虑 e^{v+iu}。由于

$$|\mathrm{e}^{v+iu}| = \mathrm{e}^v$$

因此 e^{v+iu} 有界。由 1，e^{v+iu} 为常函数，进而 u 与 v 为常函数，即 f 为常函数。

对于 6，如果 v 下有界，那么由 $|f| \geq |v|$，可知 f 下有界。由 2，f 为常函数。

推论 2.3.4 (代数基本定理)

$\mathbb{C}$ 上的非常数多项式在 $\mathbb{C}$ 中存在根。

♡

证明 考虑 n 次多项式

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

假设 $P(z)$ 无根。由于

$$\frac{P(z)}{z^n} = a_n + \left(\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right) \to a_n \qquad (|z| \to \infty)$$

那么存在 $r > 0$，使得成立

$$|P(z)| \geq \frac{|a_n|}{2}|z|^n, \qquad |z| > r$$

从而 $P(z)$ 在 $|z| > r$ 时存在下界。由于 $P(z)$ 为连续函数且无零点，那么 $P(z)$ 在紧集 $|z| \leq r$ 上有界，因此 $P(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上存在下界，进而 $1/P(z)$ 为有界整函数。由 Liouville 定理2.3.3，$1/P(z)$ 为常函数，即 $P(z)$ 为常函数，矛盾！进而 $P(z)$ 存在根。

推论 2.3.5 (代数基本定理)

$\mathbb{C}$ 上的 n 次多项式

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

在 $\mathbb{C}$ 上存在 n 个根，并可作因式分解

$$P(z) = a_n (z - w_1) \cdots (z - w_n)$$

♡

证明 由代数基本定理2.3.4，$P(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 中存在根 w_1，于是

$$P(z) = b_n (z - w_1)^n + \cdots + b_1 (z - w_1) + b_0$$

其中 $b_n = a_n$。由于 $P(w_1) = 0$，因此 $b_0 = 0$，从而

$$P(z) = (z - w_1)(b_n(z - w_1)^{n-1} + \cdots + b_1) = (z - w_1)Q(z)$$

其中 $Q(z)$ 为 $n-1$ 次多项式。由归纳法，原命题得证！

命题 2.3.4

令 $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$，对于在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上连续无零点且在 $\mathbb{D}$ 上全纯的函数 f，如果对于任意 $z \in \partial\mathbb{D}$，成立 $|f(z)| = 1$，那么 f 为常函数。

证明 法一：延拓 f 为

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & |z| \le 1 \\ \frac{1}{\overline{f(\frac{1}{\overline{z}})}}, & |z| > 1 \end{cases}$$

考察 F 的连续性。显然 F 在 $|z| \neq 1$ 上是连续的，且 F 在 $|z| = 1$ 上是内连续的。对于 F 在 $|z| = 1$ 上的外连续性，任取 $|z| = 1$，对于 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $|z_n| > 1$ 且 $z_n \to z$，注意到

$$\frac{1}{\overline{z_n}} \to \frac{1}{\overline{z}} = z$$

于是

$$F(z_n) = \frac{1}{\overline{f(\frac{1}{\overline{z_n}})}} \to \frac{1}{\overline{f(z)}} = f(z) = F(z)$$

因此 F 在 $\mathbb{C}$ 上是连续的。

考察 F 的全纯性。显然 F 在 $|z| < 1$ 是全纯的。对于 $|z| > 1$，任取闭曲线 $\gamma \subset \{z : |z| > 1\}$，令 γ' 为 γ 在映射 $z \mapsto \frac{1}{z}$ 下的像，那么 $\gamma' \subset \{z : |z| < 1\}$，于是

$$\int_\gamma F(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{1}{\overline{f(\frac{1}{\overline{z}})}}\mathrm{d}z = -\int_{\gamma'} \frac{1}{\overline{f(\overline{z})}}\frac{\mathrm{d}z}{z^2} = 0$$

因此 F 在 $|z| > 1$ 上是全纯的。对于 $|z| = 1$，任取三角形 $T \subset \mathbb{C}$。如果 $T \cap \partial\mathbb{D}$ 为空，那么

$$\int_T F(z)\mathrm{d}z = 0$$

如果 $T \cap \partial\mathbb{D}$ 为一个点，那么可在 T 内沿内边界作非常接近 T 的三角形 T_ε，于是

$$\int_T F(z)\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{T_\varepsilon} F(z)\mathrm{d}z = 0$$

如果 $T \cap \partial\mathbb{D}$ 至少为两个点，说明 T 被 $\partial\mathbb{D}$ 分为若干部分 $T_1, \cdots, T_n$，在每一个 T_k 内沿内边界作非常接近 T_k 的三角形 $T_\varepsilon^{(k)}$，于是

$$\int_T F(z)\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{k=1}^{n} \int_{T_\varepsilon^{(k)}} F(z)\mathrm{d}z = 0$$

于是，对于任意三角形 $T \subset \mathbb{C}$，成立

$$\int_T F(z)\mathrm{d}z = 0$$

由 Morera 定理2.4.2，F 在 $\mathbb{C}$ 上全纯。又 F 在 $\overline{\mathbb{D}}$ 上有界，且连续无零点，那么存在 $\delta > 0$，使得对于任意 $|z| \le 1$，成立 $|f(z)| > \delta$，进而 $\left|\frac{1}{\overline{f(\frac{1}{\overline{z}})}}\right| < \frac{1}{\delta}$，所以 F 在 $\mathbb{C}$ 上有界。由 Liouville 定理2.3.3，F 为常函数，进而 f 为常函数。原命题得证！

法二：令 $\pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$, 定义映射

$$\begin{aligned} \varphi : \quad & \mathbb{D} \longrightarrow \pi^+ \\ & arg4 \longmapsto z \end{aligned}$$

其逆映射为 $\varphi^{-1}(w)=\frac{w-i}{w+i}$，定义

$$F(z)=\begin{cases} f(\varphi^{-1}(z)), & z\in\pi^+\cup\mathbb{R} \\ \overline{f(\varphi^{-1}(\overline{z}))}, & z\in\pi^- \end{cases}$$

由反射定理2.4.7，F 在 $\mathbb{C}$ 上全纯。又 F 在 $\pi^+\cup\mathbb{R}$ 上有界，所以 F 在 $\mathbb{C}$ 上有界。由 Liouville 定理2.3.3，F 为常函数，进而 f 为常函数。原命题得证！

2.3.3 零点定理

定理 2.3.4 (唯一性定理)

对于在区域 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上的全纯函数 f，如果存在 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\Omega$，使得对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$，成立 $f(z_n)=0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n\in\Omega$，那么在 Ω 上成立 $f=0$。

证明 记 $z_0=\lim\limits_{n\to\infty}z_n$，由于 Ω 为开集，因此存在 $r>0$，使得 $D_r(z_0)\subset\Omega$。考虑幂级数展开2.3.3

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\qquad z\in D_r(z_0)$$

如果 f 在 $D_r(z_0)$ 上不为 0，那么存在最小的 $m\in\mathbb{N}$，使得成立 $a_m\neq0$，此时存在多项式 $g(z)$，使得成立

$$f(z)=a_m(z-z_0)^m(1+g(z-z_0))$$

其中当 $z\to z_0$ 时 $g(z-z_0)\to0$。由于 $z_n\to z_0$，那么存在 $z_{n_0}\neq z_0$，使得成立 $|g(z_{n_0}-z_0)|<1/2$，从而

$$a_m(z_{n_0}-z_0)^m\neq0,\qquad 1+g(z_{n_0}-z_0)\neq0$$

但是 $f(z_{n_0})=0$，因此产生矛盾！进而 f 在 $D_r(z_0)$ 恒为 0。

记

$$U=\{z\in\Omega:f(z)=0\},\qquad V=U^{\circ}$$

那么 V 为非空开集。断言 V 为闭集，事实上，对于任意 $w\in\overline{V}$，存在 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}\subset V$，使得成立 $w_n\to w$。由上述论证，$w\in V$，进而 V 为闭集。令 $W=\Omega\setminus V$ 为开集，那么 Ω 表示可为开集的不交并

$$\Omega=V\sqcup W$$

由于 Ω 为连通集，从而 $W=\varnothing$，进而 $\Omega=V$，因此在 Ω 上成立 $f=0$。

推论 2.3.6 (零点孤立性定理)

对于区域 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上的非零全纯函数 f，如果 $z_0\in\Omega$ 为 f 的零点，那么存在 $r>0$，使得 f 在 $\mathring{D}_r(z_0)$ 内无零点。

证明 由唯一性定理2.3.4，命题得证！

推论 2.3.7

对于区域 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上的全纯函数 f，如果存在 $z_0\in\Omega$，使得对于任意 $n\in\mathbb{N}^*$，成立 $f^{(n)}(z_0)=0$，那么在 Ω 上成立 $f=0$。

证明 由于 Ω 为开集，因此存在 $r>0$，使得 $D_r(z_0)\subset\Omega$。考虑幂级数展开2.3.3

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=0,\qquad z\in D_r(z_0)$$

由零点孤立性定理2.3.6，在 Ω 上成立 $f=0$。

推论 2.3.8

对于在区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的全纯函数 f 与 g,如果存在 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$,使得对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$,成立 $f(z_n) = g(z_n)$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \in \Omega$,那么在 Ω 上成立 $f = g$。

证明 由唯一性定理2.3.4,命题得证!

推论 2.3.9

对于在区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的全纯函数 f,如果存在 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$,使得对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$,成立 $f(z_n) = 0$,且 $z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$,那么或 Ω 上成立 $f = 0$,或 $z_0 \in \partial\Omega$。

证明 由唯一性定理2.3.4,命题得证!

推论 2.3.10

对于 $\mathbb{C}$ 上的整函数 f,如果存在 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$,使得对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$,成立 $f(z_n) = 0$,且 $z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$,那么或 Ω 上成立 $f = 0$,或 $|z| \to \infty$。

证明 由唯一性定理的推论2.3.9,命题得证!

命题 2.3.5

对于在 $\mathbb{C}$ 上的整函数 f,如果对于任意 $z \in \mathbb{C}$,存在 $n_z \in \mathbb{N}$,使得成立 $f^{(n_z)}(z) = 0$,那么 f 为多项式。

证明 对于单位开圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,定义

$$A_n = \{z \in \overline{\mathbb{D}} : f^{(n)}(z) = 0\}$$

于是

$$\overline{\mathbb{D}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

由于 $\overline{\mathbb{D}}$ 为不可数集,那么存在 $k \in \mathbb{N}$,使得 A_k 为不可数集,因此 A_k 中存在收敛的点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ 且 $z_n \to z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$,进而

$$f^{(k)}(z_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

由唯一性定理2.3.4,在 $\mathbb{C}$ 上成立 $f^{(k)} = 0$,因此 f 为次数不大于 k 的多项式函数。

2.4 应用

2.4.1 Morera 定理

定理 2.4.1 (开圆上的 Morera 定理)

对于在开圆 $D \subset \mathbb{C}$ 上的连续函数 f,如果对于任意三角形 $T \subset D$,成立

$$\int_T f(z)\mathrm{d}z = 0$$

那么 f 在 D 上全纯。

定理 2.4.2 (Morera 定理)

对于在开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的连续函数 f,如果对于任意分段光滑封闭曲线 $\gamma \subset \Omega$,成立

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$$

那么 f 在 Ω 上全纯。

2.4.2 全纯函数序列

定理 2.4.3

对于开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$，如果 Ω 上的全纯函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 Ω 的任意紧致子集均一致收敛于函数 f，那么 f 在 Ω 中是全纯的。

证明 任取分段光滑封闭曲线 $\gamma \subset \Omega$，由 Cauchy 积分定理2.2.3

$$\int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z = 0$$

由于 f_n 在 Ω 的任意紧致子集均一致收敛于函数 f，那么

$$\int_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z \to \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$$

因此

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$$

从而由 Morera 定理2.4.2，f 在 Ω 中是全纯的。

定理 2.4.4

对于开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$，如果 Ω 上的全纯函数序列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 Ω 的任意紧致子集均一致收敛于函数 f，那么其导函数序列 $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 在 Ω 的任意紧致子集都一致收敛于函数 f'。

2.4.3 由积分定义的全纯函数

定理 2.4.5

对于定义在 $(z, s) \in \Omega \times [0, 1]$ 上的连续函数 $F(z, s)$，其中 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 为开集，如果 $F(z, s)$ 对于 z 为全纯的，那么函数

$$f(z) = \int_0^1 F(z, s)\mathrm{d}s$$

在 Ω 上全纯。

2.4.4 Schwarz 反射定理

对于对称的开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$，即

$$z \in \Omega \iff \overline{z} \in \Omega$$

令

$$\Omega^+ = \{z : z \in \Omega, \mathrm{Im}(z) > 0\}$$
$$\Omega^- = \{z : z \in \Omega, \mathrm{Im}(z) < 0\}$$

同时令

$$I = \Omega \cap \mathbb{R}$$

定理 2.4.6 (对称原理)

对于全纯函数 f^+ 和 f^-，如果满足

$$f^+(x) = f^-(x), \quad x \in I$$

那么函数

$$f(z) = \begin{cases} f^+(z) & z \in \Omega^+ \\ f^+(z) & z \in I \\ f^-(z) & z \in \Omega^- \end{cases}$$

在 Ω 上全纯。♡

定理 2.4.7 (反射定理)

如果函数 f 在 $\Omega^+ \cup I$ 上为全纯的，且

$$f(x) \in \mathbb{R}, \quad x \in I$$

那么存在在 Ω 上全纯的函数 F，使得成立

$$F(z) = f(z), \quad z \in \Omega^+$$

事实上

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & z \in \Omega^+ \cup I \\ \overline{f(\overline{z})} & z \in \Omega^- \end{cases}$$

♡

2.4.5 Runge 近似定理

定理 2.4.8 (Runge 近似定理)

如果函数 f 在开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上是全纯的，且 $K \subset \Omega$ 为紧集，那么 f 可由奇点在 $\Omega - K$ 上的有理函数在 K 上一致近似。而且如果 $\Omega \setminus K$ 是连通的，那么 f 可由多项式函数在 K 上一致近似。♡

第三章 Laurent 展式

3.1 Laurent 展式

定义 3.1.1 (双边幂级数)

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

♣

定义 3.1.2

收敛圆环为

$$H:\qquad 0\le r<|z-z_0|<R\le\infty$$

的双边幂级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

成立如下命题。

1. $f(z)$ 内闭一致收敛于 H。
2. $f(z)$ 在 H 内解析。
3. $f(z)$ 在 H 内可逐项求导。
4. $f(z)$ 可沿曲线 $\gamma\subset H$ 逐项积分。

♣

定理 3.1.1 (Laurent 定理)

在圆环

$$H:\qquad 0\le r<|z-z_0|<R\le\infty$$

内的全纯函数 $f(z)$ 存在且存在唯一 Laurent 展式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta,\quad \gamma:|\zeta-z_0|=\rho\in(r,R)$$

♡

定义 3.1.3 (正则部分与主要部分)

定义函数 f 在 z_0 处的 Laurent 级数

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

的正则部分为

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$$

主要部分为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

♣

3.2 孤立奇点

定义 3.2.1 (零点)

称 $z_0 \in \mathbb{C}$ 为函数 f 的 n 阶零点，如果存在函数 g，使得成立

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z), \qquad g(z_0) \neq 0$$

♣

定义 3.2.2 (奇点)

称 $z_0 \in \mathbb{C}$ 为函数 f 的奇点，如果 f 在 z_0 处不全纯，且对于任意 $r > 0$，存在 $z_r \in D_r(z_0)$，使得 f 在 z_r 处全纯。♣

定义 3.2.3 (孤立奇点)

称 $z_0 \in \mathbb{C}$ 为函数 f 的孤立奇点，如果 f 在 z_0 处不全纯，且存在 $r > 0$，使得 f 在 $D_r^\circ(z_0)$ 内全纯。♣

定义 3.2.4 (可去奇点)

称函数 f 的孤立奇点 $z_0 \in \mathbb{C}$ 为可去奇点，如果成立如下命题之一。

1. 存在极限 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$。
2. f 在 z_0 处的主要部分为 0。
3. f 在 z_0 的某去心邻域内有界。

♣

定义 3.2.5 (极点)

称函数 f 的孤立奇点 $z_0 \in \mathbb{C}$ 为极点，如果 $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$。称函数 f 的孤立奇点 $z_0 \in \mathbb{C}$ 为 n 阶极点，如果成立如下命题之一。

1. z_0 为 $1/f$ 的 n 阶零点。
2. $0 < \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) < \infty$
3. f 在 z_0 处的主要部分为
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$$
4. f 在 z_0 的某去心邻域内可表示为
$$f(z) = \frac{\lambda(z)}{(z - z_0)^n}$$
其中 $\lambda(z)$ 在 z_0 点的邻域内全纯，且 $\lambda(z_0) \neq 0$。

♣

定义 3.2.6 (本质奇点)

称函数 f 的孤立奇点 $z_0 \in \mathbb{C}$ 为本质奇点，如果成立如下命题之一。

1. 不存在极限 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$。
2. f 在 z_0 处的主要部分为
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

♣

定义 3.2.7 (无穷远处的孤立奇点)

1. 称 ∞ 为 f 的孤立奇点，如果存在 $r \geq 0$，使得 f 在 $|z| > r$ 内全纯。
2. 称 ∞ 为 $f(z)$ 的可去奇点，如果 0 为 $f(1/z)$ 的可去奇点。

3. 称 ∞ 为 $f(z)$ 的 n 阶极点，如果 0 为 $f(1/z)$ 的 n 阶极点。
4. 称 ∞ 为 $f(z)$ 的本质奇点，如果 0 为 $f(1/z)$ 的本质奇点。

例题 3.1 判断如下函数的奇点及类型。

$$\frac{\tan z}{z}$$

解 由于

$$\frac{\tan z}{z}=\frac{\mathrm{e}^{iz}-\mathrm{e}^{-iz}}{iz}\frac{1}{\mathrm{e}^{iz}+\mathrm{e}^{-iz}}$$

那么奇点有 $z=0$ 和 $z_n=(n-\frac{1}{2})\pi$ 以及 $z=\infty$，其中 $n\in\mathbb{Z}$。

对于 $z=0$，由于

$$\lim_{z\to 0}\frac{\tan z}{z}=1$$

那么 $z=0$ 为可去奇点。

对于 $z=z_n$，由于

$$\lim_{z\to z_n}\left|\frac{\tan z}{z}\right|=\infty,\qquad \lim_{z\to z_n}(z-z_n)\frac{\tan z}{z}=-\frac{1}{z_n}$$

那么 $z=z_n$ 为一阶极点。

对于 $z=\infty$，由于 $|z_n|\to\infty$，那么 ∞ 为非孤立奇点。

例题 3.2 判断如下函数的奇点及类型。

$$\frac{z}{\mathrm{e}^z-1}$$

解 容易知道 $z_n=2n\pi i$ 和 $z=\infty$ 为奇点，其中 $n\in\mathbb{Z}$。

对于 $z=z_0=0$，由于

$$\lim_{z\to 0}\frac{z}{\mathrm{e}^z-1}=1$$

那么 $z=0$ 为可去奇点。

对于 $z_n=2n\pi i$，其中 $n\neq 0$，由于

$$\lim_{z\to z_n}\left|\frac{z}{\mathrm{e}^z-1}\right|=\infty,\qquad \lim_{z\to z_n}(z-z_n)\frac{z}{\mathrm{e}^z-1}=2n\pi i$$

那么 $z_n=2n\pi i$ 为一阶极点，其中 $n\neq 0$。

对于 $z=\infty$，由于 $|z_n|\to\infty$，那么 ∞ 为非孤立奇点。

命题 3.2.1

对于在去心开圆 $D_r^\circ(z_0)$ 内全纯的函数 f，证明：如果存在 $A>0$ 和 $\varepsilon>0$，使得在 z_0 附近，成立 $|f(z)|\leq A|z-z_0|^{\varepsilon-1}$，那么 z_0 是 f 的可去奇点。

证明 注意到

$$\lim_{z\to z_0}|(z-z_0)f(z)|\leq\lim_{z\to z_0}A|z-z_0|^{\varepsilon}=0$$

于是

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$$

于是 z_0 为 $g(z)=(z-z_0)f(z)$ 在 $D_r(z_0)$ 内的可去奇点，从而 g 在 $D_r(z_0)$ 内全纯，将 g 在 z_0 处展开

$$g(z)=g(z_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

注意到

$$g(z_0)=\lim_{z\to z_0}g(z)=0$$

于是

$$g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

进而

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n-1}$$

那么

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=g'(z_0)$$

从而 z_0 为 f 的可去奇点。

命题 3.2.2

单调整函数为一次多项式。

证明 记单调整函数为 $f(z)$，定义 $g(z)=f(1/z)$，那么 g 在 $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 上全纯。下面考察 $z=0$ 的奇点类型。

如果 $z=0$ 为 g 的可去奇点，那么 g 在 $z=0$ 的邻域 $\{|z|<r\}$ 内有界，从而 f 在 $\{|z|>1/r\}$ 内有界。而 f 连续，则 f 在紧集 $\{|z|\le 1/r\}$ 内有界，从而 f 在 $\mathbb{C}$ 上有界，由 Liouville 定理2.3.3，f 为常函数，这与单调性矛盾！

如果 $z=0$ 为 g 的本质奇点，由 Casorati-Weierstrass 定理3.2.1，$g(\{0<|z|<r\})$ 为稠密的，从而 $f(\{|z|>1/r\})$ 是稠密的。而由 f 为整函数，那么 $f(\{|z|<1/r\})$ 为开集，从而 $f(\{|z|<1/r\})\cap f(\{|z|>1/r\})\neq\varnothing$，这与单调性矛盾！

那么 $z=0$ 为 g 的极点，由 Laurent 展式的唯一性，g 的主要部分为有限项，于是 f 的正则项为有限项。又由 f 的单调性，f 至多存在一个零点，于是 f 的次数不多于 1，而常函数并不单调，于是 f 为一次多项式。

综上所述，原命题得证！

定理 3.2.1 (Casorati-Weierstrass 定理)

如果 z_0 为函数 f 的本质奇点，那么对于任意 $z\in\overline{\mathbb{C}}$，存在 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$，使得成立

$$\lim_{n\to\infty}z_n=z_0,\qquad \lim_{n\to\infty}f(z_n)=z$$

定理 3.2.2 (Picard 定理)

如果 z_0 为函数 f 的本质奇点，那么对于除可能的一个值 z' 外任意 $z\in\mathbb{C}$，存在 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$，使得成立

$$\lim_{n\to\infty}z_n=z_0,\qquad f(z_n)=z,\qquad n\in\mathbb{N}^*$$

3.3 留数公式

定义 3.3.1 (留数)

如果 $z_0\in\mathbb{C}$ 为函数 f 的孤立奇点，那么作 Laurent 展式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

称 f 在 z_0 处的留数为 c_{-1}。

定理 3.3.1 (留数计算公式)

如果 $z_0 \in \Omega$ 为函数 f 的 n 阶极点，那么

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} (z-z_0)^n f(z)$$

♡

定理 3.3.2 (留数公式)

对于边界分段光滑的区域 Ω 上的函数 f，如果 $z_1, \cdots, z_n \in \Omega_\gamma$ 为 f 的极点，同时 f 在 $\Omega \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$ 上全纯，在 $\overline{\Omega} \setminus \{z_1, \cdots, z_n\}$ 上连续，那么

$$\int_{\partial \Omega} f(z) \mathrm{d}z = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z_k} f$$

♡

例题 3.3 求如下函数的留数。

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-1)^2}$$

解 容易知道 $z=-1$ 为一阶极点，$z=1$ 为二阶极点。由留数计算公式

$$\operatorname{res}_{-1} f = \lim_{z \to -1} (z+1) f(z) = \lim_{z \to -1} \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$\operatorname{res}_{1} f = \lim_{z \to 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (z-1)^2 f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{1}{z+1} = -\frac{1}{4}$$

例题 3.4 求如下函数的留数。

$$f(z) = \frac{1-\mathrm{e}^{2z}}{z^4}$$

解 容易知道 $z=0$ 为三阶极点。由留数计算公式

$$\operatorname{res}_0 f = \lim_{z \to 0} \frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} z^3 f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} \frac{1-\mathrm{e}^{2z}}{2z} = -\frac{4}{3}$$

例题 3.5 计算积分

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z \sin z}$$

解 令 $f(z) = \frac{1}{z \sin z}$，那么 f 在 $|z|<1$ 内存在二阶极点 $z=0$，其留数为

$$\operatorname{res}_0 f = \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} z^2 f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{z}{\sin z} = 0$$

那么

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z \sin z} = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_0 f = 0$$

例题 3.6 计算积分

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)}$$

其中 $C : x^2 + y^2 = 2(x+y)$。

解 记 $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$，那么 f 在 $x^2+y^2 < 2(x+y)$ 内存在二阶极点 $z=1$ 和一阶极点 $z=i$，其留数分别为

$$\operatorname{res}_1 f = \lim_{z \to 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} (z-1)^2 f(z) = \lim_{z \to 1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{1}{z^2+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{res}_i f = \lim_{z \to i} (z-i) f(z) = \lim_{z \to i} \frac{1}{(z-1)^2(z+i)} = \frac{1}{4}$$

那么

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)} = 2\pi i (\operatorname{res}_1 f + \operatorname{res}_i f) = -\frac{\pi}{2} i$$

例题 3.7 计算积分

$$\int_{|z|=1}\frac{z\sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}\mathrm{d}z$$

解 记 $f(z)=\frac{z\sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}$，容易知道 $z=0$ 为一阶极点，其留数为

$$\mathrm{res}_0 f=\lim_{z\to0}zf(z)=\lim_{z\to0}\frac{z^2\sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}=-1$$

那么

$$\int_{|z|=1}\frac{z\sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}\mathrm{d}z=-2\pi i$$

例题 3.8

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

证明 容易知道 $z_n=\mathrm{e}^{i\frac{2n-1}{4}\pi}$ 为 $f(z)=\frac{1}{1+z^4}$ 的一阶极点，其留数为

$$\mathrm{res}_{z_n}f=\lim_{z\to z_n}(z-z_n)f(z)=\frac{1}{4z_n^3}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{i\frac{3(1-2n)}{4}\pi}$$

而 z_n 为以 4 为周期，且 $z_0=\frac{1-i}{\sqrt{2}},z_1=\frac{1+i}{\sqrt{2}},z_2=\frac{-1+i}{\sqrt{2}},z_3=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$，因此其留数分别为

$$\mathrm{res}_{z_0}f=\frac{-1+i}{4\sqrt{2}},\quad \mathrm{res}_{z_1}f=\frac{-1-i}{4\sqrt{2}},\quad \mathrm{res}_{z_2}f=\frac{1-i}{4\sqrt{2}},\quad \mathrm{res}_{z_3}f=\frac{1+i}{4\sqrt{2}}$$

选取积分路径

$$\begin{aligned}&\gamma_0:z=t, && t:-R\to R\\ &\gamma:z=R\mathrm{e}^{it}, && t:0\to\pi\end{aligned}$$

当 $R>1$ 时，γ_0 和 γ 围成的区域内含有 z_1 和 z_2，且由留数公式

$$\int_{\gamma_0}f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z=2\pi i(\mathrm{res}_{z_1}f+\mathrm{res}_{z_2}f)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

注意到

$$\left|\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_{\gamma}|f(z)||\mathrm{d}z|=\int_{\gamma}\frac{|\mathrm{d}z|}{|1+z^4|}\le\int_{\gamma}\frac{|\mathrm{d}z|}{|z^4|-1}=\frac{\pi R}{R^4-1}\to0$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_0}f(z)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

例题 3.9

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{a\mathrm{e}^a},\qquad a>0$$

证明 记 $f(z)=\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z^2+a^2}$，积分路径为

$$\begin{aligned}&\gamma_0:z=t, && t:-R\to R\\ &\gamma:z=R\mathrm{e}^{it}, && t:0\to\pi\end{aligned}$$

当 $R>a$ 时，由 γ_0 和 γ 围成的区域内含有 f 的一阶极点 $z=ai$，其留数为

$$\mathrm{res}_{ai}f=\lim_{z\to ai}(z-ai)f(z)=\lim_{z\to ai}\frac{\mathrm{e}^{iz}}{z+ai}=\frac{1}{2ai\mathrm{e}^a}$$

从而

$$\int_{\gamma_0}f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma}f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\,\mathrm{res}_{ai}f=\frac{\pi}{a\mathrm{e}^a}$$

注意到，当 $0\le x\le \frac{\pi}{2}$ 时，成立 $\sin x\ge \frac{2}{\pi}x$，那么

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| &\le \int_\gamma |f(z)||\mathrm{d}z|\\ &\le \int_0^\pi \frac{R\mathrm{e}^{-R\sin t}}{R^2-a^2}\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R\mathrm{e}^{-R\sin t}}{R^2-a^2}\mathrm{d}t\\ &\le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R\mathrm{e}^{-R\frac{2}{\pi}t}}{R^2-a^2}\mathrm{d}t\\ &= \frac{\pi}{R^2-a^2}(1-\mathrm{e}^{-R})\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{R\to\infty}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0$$

进而

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\mathrm{Re}\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_0}f(z)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{a\mathrm{e}^a}$$

例题 3.10

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\mathrm{e}^a},\qquad a>0$$

证明 记 $f(z)=\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{z^2+a^2}$，积分路径为

$$\begin{aligned}&\gamma_0: z=t, && t:-R\to R\\ &\gamma: z=R\mathrm{e}^{it}, && t:0\to\pi\end{aligned}$$

当 $R>a$ 时，由 γ_0 和 γ 围成的区域内含有 f 的一阶极点 $z=ai$，其留数为

$$\mathrm{res}_{ai}f=\lim_{z\to ai}(z-ai)f(z)=\lim_{z\to ai}\frac{z\mathrm{e}^{iz}}{z+ai}=\frac{1}{2\mathrm{e}^a}$$

从而

$$\int_{\gamma_0}f(z)\mathrm{d}z+\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\mathrm{res}_{ai}f=\frac{\pi}{\mathrm{e}^a}i$$

注意到，当 $0\le x\le \frac{\pi}{2}$ 时，成立 $\sin x\ge \frac{2}{\pi}x$，那么

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| &\le \int_\gamma |f(z)||\mathrm{d}z| \le \int_0^\pi \frac{R^2\mathrm{e}^{-R\sin t}}{R^2-a^2}\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2\mathrm{e}^{-R\sin t}}{R^2-a^2}\mathrm{d}t\\ &\le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^2\mathrm{e}^{-R\frac{2}{\pi}t}}{R^2-a^2}\mathrm{d}t\\ &= \frac{\pi R}{R^2-a^2}(1-\mathrm{e}^{-R})\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{R\to\infty}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0$$

进而

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=\mathrm{Im}\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_0}f(z)\mathrm{d}z=\frac{\pi}{\mathrm{e}^a}$$

例题 3.11

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2}=\frac{2\pi a}{(a^2-1)^{\frac{3}{2}}},\qquad a>1$$

证明 记 $f(z)=\frac{4z}{(z^2+2az+1)^2}$，积分路径为 $\gamma: z=\mathrm{e}^{i\theta},\theta\in[0,2\pi]$，在此积分路径内 f 含有二阶极点 $z=\sqrt{a^2-1}-a$，其留数为

$$\mathrm{res}_{\sqrt{a^2-1}-a}f=\lim_{z\to\sqrt{a^2-1}-a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z-(\sqrt{a^2-1}-a))^2f(z)=\frac{a}{(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

因此

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\mathrm{res}_{\sqrt{a^2-1}-a}f=\frac{2\pi ai}{(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

而

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{i\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2}$$

从而

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2}=\frac{2\pi a}{(a^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

例题 3.12

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+b\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}},\qquad a>|b|,a,b\in\mathbb{R}$$

证明 记 $f(z)=\frac{2}{bz^2+2az+b}$，积分路径为 $\gamma: z=\mathrm{e}^{i\theta},\theta\in[0,2\pi]$。

若 $b=0$，显然成立

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a}=\frac{2\pi}{a}$$

若 $b\neq 0$，在此积分路径内 f 含有一阶极点 $z_0=\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$，其留数为

$$\mathrm{res}_{z_0}f=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

因此

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\mathrm{res}_{z_0}f=\frac{2\pi i}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

而

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\frac{i\mathrm{d}\theta}{a+b\cos\theta}$$

从而

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+b\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

3.4 亚纯函数

定义 3.4.1 (扩充复平面)

$\overline{\mathbb{C}}$ 为 $\mathbb{C}$ 的一点紧致化。

$$\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$$

♣

定义 3.4.2 (Riemann 球)

定义 Riemann 球

$$\mathbb{S}=\left\{(X,Y,Z):X^2+Y^2+\left(Z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\right\}$$

与复平面

$$\mathbb{C}=\{(x,y):(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$$

Riemann 球的北极记作 $\mathcal{N}=(0,0,1)$，那么存在双射

$$\begin{aligned}\mathcal{R}:\mathbb{S}\setminus\{\mathcal{N}\}&\longrightarrow\mathbb{C}\\(x,y,z)&\longmapsto\left(\frac{x}{1-z},\frac{y}{1-z}\right)\end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{-1}:\quad\mathbb{C}&\longrightarrow\mathbb{S}\setminus\{\mathcal{N}\}\\(x,y)&\longmapsto\left(\frac{2x}{1+x^2+y^2},\frac{2y}{1+x^2+y^2},1-\frac{2}{1+x^2+y^2}\right)\end{aligned}$$

于是定义 $\infty=\mathcal{R}(\mathcal{N})$，此时

$$\mathbb{S}\simeq\overline{\mathbb{C}}$$

♣

定义 3.4.3 (亚纯函数)

1. 称 f 在开集 Ω 上是亚纯的，如果对于至多可数序列 $\{z_n\}$，f 在 $\Omega-\{z_n\}$ 全纯，每一个 z_n 为 f 的极点，且若序列 $\{z_n\}$ 收敛，则收敛于 $\partial\Omega$。
2. 称 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数 f 是在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上的亚纯函数，如果 f 在 ∞ 处全纯，或者 ∞ 为 f 的极点。

♣

定理 3.4.1

$\overline{\mathbb{C}}$ 上的亚纯函数为有理函数。

♡

3.5 辐角原理

定理 3.5.1 (辐角原理)

对于开集 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上的亚纯函数 f，如果开圆 $D\subset\Omega$，且 f 在 ∂D 上无极点和零点，那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z=n_z-n_p$$

其中 n_z 和 n_p 分别为 f 在 C 的零点数和极点数。

♡

定理 3.5.2 (Rouché 定理)

对于开集 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上的全纯函数 f 和 g，如果开圆 $D\subset\Omega$，且对于任意 $z\in\partial D$，成立

$$|f(z)|>|g(z)|$$

那么 f 和 $f+g$ 在 D 上存在相同数目的零点。

♡

例题 3.13 方程 $z^6+6z+10=0$ 在 $|z|<1$ 内有几个根？

解 注意到，当 $|z|<1$ 时，成立

$$|z^6+6z+10|\geq 10-|z|^6-6|z|>10-1-6=3>0$$

因此方程 $z^6+6z+10=0$ 在 $|z|<1$ 内无根。

例题 3.14 方程 $z^6+60z+10=0$ 在 $|z|<1$ 内有几个根？

解 注意到，当 $|z|=1$ 时，成立

$$|z^6+60z|\geq 60|z|-|z|^6=59>10$$

因此由 Rouché 定理3.5.2，方程 $z^6+60z+10=0$ 和 $z^6+60z=0$ 在 $|z|<1$ 内存在相同数目的根。而 $z^6+60z=0$ 的根为 $z=0$ 和 $z=\sqrt[5]{60}\mathrm{e}^{i\frac{2n-1}{5}\pi}$，那么方程 $z^6+60z+10=0$ 在 $|z|<1$ 内有且仅有一个根。

例题 3.15 方程 $z^4-8z+10=0$ 在 $|z|<1$ 和 $1<|z|<3$ 内有几个根？

解 注意到，当 $|z|\le 1$ 时，成立

$$|z^4-8z+10|\ge 10-|z|^4-8|z|\ge 10-1-8>0$$

因此方程 $z^4-8z+10=0$ 在 $|z|\le 1$ 内无根。

注意到，当 $|z|=3$ 时，成立

$$|z^4-8z|\ge |z|^4-8|z|=57>10$$

因此由 Rouché 定理3.5.2，方程 $z^4-8z+10=0$ 和 $z^4-8z=0$ 在 $|z|<3$ 内存在相同数目的根。而 $z^4-8z=0$ 的根为 $z_1=0$，$z_2=2$，$z_3=2\omega$，$z_4=2\omega^2$，其中 ω 为三次单位根，因此 $z^4-8z=0$ 在 $|z|<3$ 内存在 4 个根，于是方程 $z^4-8z+10=0$ 在 $|z|<3$ 内存在 4 个根，进而方程 $z^4-8z+10=0$ 在 $1<|z|<3$ 内存在 4 个根。

引理 3.5.1

对于 $\mathbb{C}$ 上的多项式

$$P(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$$

令

$$M=\max\{|a_{n-1}|,\cdots,|a_0|\}$$

那么当 $|z|\ge 1+M/|a_n|$ 时，成立 $|P(z)|>0$。

证明 如果 $M=0$，那么 $P(z)=a_nz^n$，因此显然当 $|z|\ge 1$ 时，$|P(z)|>0$。

如果 $M>0$，由于当 $|z|\ge 1+M/|a_n|$ 时，成立

$$\frac{M|z|^n}{|z|-1}\le |a_n||z|^n$$

那么

$$\begin{aligned}|P(z)|&=|a_nz^n+\cdots+a_1x+a_0|\\&\ge |a_nz^n|-|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0|\\&\ge |a_nz^n|-(|a_{n-1}z^{n-1}|+\cdots+|a_1z|+|a_0|)\\&\ge |a_nz^n|-M(|z|^{n-1}+\cdots+|z|+1)\\&=|a_nz^n|-M\frac{1-|z|^n}{1-|z|}\\&>|a_nz^n|-\frac{M|z|^n}{|z|-1}\\&\ge 0\end{aligned}$$

推论 3.5.1 (代数基本定理)

$\mathbb{C}$ 上的 n 次多项式在 $\mathbb{C}$ 上存在 n 个根。

证明 不妨记 $\mathbb{C}$ 上的 n 次多项式为

$$P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$$

由引理3.5.1，多项式 $a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ 的根在某个圆 D 内。由于 z^n 存在且存在 n 个零根，那么当 D 的半径充分大时，对于任意 $z\in\partial D$，成立

$$\frac{|a_1z^{n-1}+\cdots+a_n|}{|z^n|}<\frac{1}{2}$$

那么由 Rouché 定理3.5.2，$P(z)$ 存在 n 个根。

定理 3.5.3 (开映射定理)

如果 f 为开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的全纯函数，那么或 f 为开映射，或 f 为常函数。

证明 假设 f 不为常函数，取开集 $G \subset \Omega$，任取 $w_0 \in f(G)$，那么存在 $z_0 \in G$，使得成立 $w_0 = f(z_0)$。由唯一性定理2.3.4，结合 f 不为常函数，那么存在 $r > 0$，使得对于任意 $z \in D_r(z_0) \subset G$，成立若 $f(z) = f(z_0)$，则 $z = z_0$。取 $\delta = \min\limits_{z \in \partial D_r(z_0)} |f(z) - w_0|$，对于任意 $w \in D_\delta(w_0)$，考虑

$$f(z) - w = (f(z) - w_0) + (w_0 - w)$$

由于在 $\partial D_r(z_0)$ 上成立

$$|f(z) - w_0| \geq \delta, \qquad |w_0 - w| < \delta$$

那么由 Rouché 定理3.5.2，$f(z) - w$ 与 $f(z) - w_0$ 在 $D_r(z_0)$ 中的零点个数相同。由于 $f(z) - w_0$ 在 $D_r(z_0)$ 中存在零点 z_0，那么 $f(z) - w$ 在在 $D_r(z_0)$ 中存在零点 z_w，因此

$$w = f(z_w) \in f(D_r(z_0))$$

由 w 的任意性，$D_\delta(w_0) \subset f(D_r(z_0)) \subset f(G)$，从而 $f(G)$ 为开集，进而 f 为开映射。

定理 3.5.4 (最大模原理)

如果 f 为区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的全纯函数，那么或 $|f|$ 不在 Ω 内取到最大值，或 f 为常函数。

证明 如果 f 不为常函数，且在 $z_0 \in \Omega$ 处 $|f|$ 取最大值，那么存在 $r > 0$，使得成立 $D_r(z_0) \subset \Omega$。由开映射定理3.5.3，$f(D_r(z_0))$ 为开集，因此存在 $w \in D_r(z_0)$，使得 $|f(w)| = |f(z_0)| + r/2 > |f(z_0)|$，矛盾！

命题 3.5.1

对于开圆盘 $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$，如果 f 在 $\overline{D}_r$ 上全纯，且存在 $A > 0$，使得当 $|z| = r$ 时，$|f(z)| > A$，同时 $|f(0)| < A$，证明：f 在 D_r 内存在零点。

证明 假设 f 在 D_r 内无零点，那么定义 $g = 1/f$，于是当 $|z| = r$ 时，$|g(z)| = \frac{1}{|f(z)|} < \frac{1}{A}$，而 $|g(0)| = \frac{1}{|f(0)|} > \frac{1}{A}$，这与最大模原理3.5.4矛盾！因此 f 在 D_r 内无零点。

命题 3.5.2

对于单位开圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$，如果 $\{w_k\}_{k=1}^n \subset \partial\mathbb{D}$，那么存在 $z \in \partial\mathbb{D}$，使得成立

$$\prod_{k=1}^n |z - w_k| \geq 1$$

进而存在 $w \in \partial\mathbb{D}$，使得成立

$$\prod_{k=1}^n |w - w_k| = 1$$

证明 定义函数

$$f(z) = \prod_{k=1}^n (z - w_k), \quad z \in \mathbb{C}$$

注意到

$$|f(0)| = \prod_{k=1}^n |w_k| = 1$$

那么由最大模原理3.5.4

$$\sup_{z \in \partial\mathbb{D}} |f(z)| \geq |f(0)| = 1$$

又 $\partial\mathbb{D}$ 为紧集，所以存在 $z \in \partial\mathbb{D}$，使得 $|f(z)| \geq 1$。

又由于 f 的连续性，且 $f(w_1)=0$，那么存在 w 使得成立 $|f(w)|=1$。

定理 3.5.5 (Schwartz 引理)

对于单位开圆盘 $\mathbb{D}$，如果 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 为全纯函数，且 $f(0)=0$，那么

$$|f'(0)|\le 1,\qquad |f(z)|\le |z|,\qquad z\in\mathbb{D}$$

当且仅当存在 $\theta\in\mathbb{R}$，使得 $f(z)=\mathrm{e}^{i\theta}z$ 时等号成立。♡

证明 构造

$$g(z)=\begin{cases} f(z)/z, & z\in\mathbb{D}\setminus\{0\} \\ f'(0), & z=0\end{cases}$$

那么 $g(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 内全纯。由最大模原理3.5.4，对于任意 $0<r<1$，成立

$$\max_{|z|<r}|g(z)|\le\max_{\theta\in\mathbb{R}}|g(re^{i\theta})|=\max_{\theta\in\mathbb{R}}\frac{|f(re^{i\theta})|}{r}\le\frac{1}{r}$$

令 $r\to 1$，那么 $|g(z)|\le 1$，于是

$$|f'(0)|\le 1,\qquad |f(z)|\le |z|,\qquad z\in\mathbb{D}$$

若存在 $z\ne 0$，使得成立 $|f(z)|=|z|$ 或 $|f'(0)|=1$，则由最大模原理3.5.4，g 为常函数，因此存在 $\theta\in\mathbb{R}$，使得 $f(z)=\mathrm{e}^{i\theta}z$。

定理 3.5.6 (Schwartz-Pick 引理)

对于单位开圆盘 $\mathbb{D}$，如果 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 为全纯函数，那么

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(z)}f(w)}\right|\le\left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right|,\qquad z,w\in\mathbb{D}$$

♡

证明 首先容易证明对于 $z,w\in\overline{\mathbb{D}}$，当 $\overline{w}z\ne 1$ 时，成立

$$\left|\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\right|\le 1$$

当且仅当 $|z|=1$ 或 $|w|=1$ 时等号成立。

对于 $w\in\mathbb{D}$，定义映射

$$\begin{aligned}\varphi_w:\mathbb{D}&\longrightarrow\mathbb{D}\\ z&\longmapsto\frac{w-z}{1-\overline{w}z}\end{aligned}$$

我们来证明 φ_w 为全纯双射。注意到

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi_w(z+h)-\varphi_w(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|w|^2-1}{(1-\overline{w}(z+h))(1-\overline{w}z)}=\frac{|w|^2-1}{(1-\overline{w}z)^2}$$

因此 φ_w 为全纯映射。同时注意到

$$(\varphi_w\circ\varphi_w)(z)=z$$

因此 φ_w 为双射。

由于 $\varphi_w(w)=0$，那么 $\varphi_w^{-1}(0)=w$。考察映射

$$\psi_w=\varphi_{f(w)}\circ f\circ\varphi_w^{-1}$$

由于 φ_w 和 f 均为 $\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 上的全纯函数，那么 ψ_w 为为 $\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 上的全纯函数，且

$$\psi_w(0)=(\varphi_{f(w)}\circ f\circ\varphi_w^{-1})(0)=0$$

于是由 Schwartz 引理3.5.5，对于任意 $z\in\mathbb{D}$，成立

$$|\psi_w(z)|\le|z|$$

即

$$|(\varphi_{f(w)} \circ f \circ \varphi_w^{-1})(z)| \le |z|$$

而 φ_w 为双射，因此存在 $z' \in \mathbb{D}$，使得成立 $z = \varphi_w(z')$，因此

$$|(\varphi_{f(w)} \circ f)(z')| \le |\varphi_w(z')|$$

进而

$$\left|\frac{f(w) - f(z')}{1 - \overline{f(w)}f(z')}\right| \le \left|\frac{w - z'}{1 - \overline{w}z'}\right|$$

由 z' 与 w 的任意性，原命题得证！

3.6 同伦与单连通区域

定义 3.6.1 (同伦)

称曲线 $\alpha, \beta : [a, b] \to \Omega$ 在开集 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 中同伦，如果存在连续函数 $\gamma : [0, 1] \times [a, b] \to \Omega$，使得成立

$$\begin{aligned} &\gamma(s, 0) = \alpha(s), && \gamma(s, 1) = \beta(s), && \forall s \in [0, 1] \\ &\gamma(0, t) = \alpha(0) = \beta(0), && \gamma(1, t) = \alpha(1) = \beta(1), && \forall t \in [a, b] \end{aligned}$$

♣

定义 3.6.2 (单连通区域)

称区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是单连通的，如果对于 Ω 中任意两条具有相同的始点和终点的曲线都是同伦的。

♣

定理 3.6.1

如果 f 在开集 Ω 上是全纯的，那么对于任意 Ω 中的同伦曲线 γ_0 和 γ_1，成立

$$\int_{\gamma_0} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z$$

♡

定理 3.6.2

单连通区域中任何全纯函数都存在原函数。

♡

3.7 复对数

定理 3.7.1

如果 Ω 为单连通区域，且 $1 \in \Omega, 0 \notin \Omega$，那么在 Ω 中存在对数的分支 $F(z) = \log_\Omega(z)$，使得成立

1. F 在 Ω 中是全纯的。
2. 对于任意 $z \in \Omega$，成立 $\mathrm{e}^{F(z)} = z$。
3. 对于任意 $r \in \mathbb{R}^+ \cap \Omega$，成立 $F(r) = \ln r$。

♡

定理 3.7.2

对于裂隙平面 $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$，存在对数的主分支

$$\log z = \ln r + i\theta$$

其中 $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ 且 $r \in \mathbb{R}^+, \theta \in (-\pi, \pi)$。

♡

注

$$\log(z_1z_2) \neq \log z_1 + \log z_2$$

定理 3.7.3

对于 $|z|<1$，成立

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$$

♡

定义 3.7.1 (幂)

如果 Ω 为单连通区域，且 $1\in\Omega, 0\notin\Omega$，选择对数的分支，对于任意 $\alpha\in\mathbb{C}$，定义幂

$$z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\log z}$$

♣

定理 3.7.4

如果函数 f 在单连通区域 Ω 上是全纯非零函数，那么在 Ω 上存在全纯函数 g，使得成立

$$f(z) = \mathrm{e}^{g(z)}$$

其中 $g(z)$ 可以表示为 $\log f(z)$，并确定了该对数的一个分支。

♡

命题 3.7.1

如果 $a>0$，那么

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2a}\log a$$

♠

证明 记 $f(z)=\frac{\log z}{z^2+a^2}$，积分路径为

$$\begin{aligned}
&\gamma_1 : z = t, && t:\varepsilon\to R\\
&\gamma_2 : z = -t, && t: R\to\varepsilon\\
&C_\varepsilon : z = \varepsilon\mathrm{e}^{it}, && t:\pi\to 0\\
&C_R : z = R\mathrm{e}^{it}, && t: 0\to\pi
\end{aligned}$$

注意到当 $\varepsilon<a<R$ 时，f 在积分路径围成的区域内存在一阶极点 $z=ai$，其留数为

$$\mathrm{res}_{ai}f = \lim_{z\to ai}(z-ai)f(z) = \frac{\log a + i\frac{\pi}{2}}{2ai}$$

因此由留数公式

$$\int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi i\mathrm{res}_{ai}f = \frac{\pi\log a}{a} + i\frac{\pi^2}{2a}$$

考察各项积分。对于 C_ε 项

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = \varepsilon\int_0^\pi \frac{t\mathrm{e}^{it}}{\varepsilon^2\mathrm{e}^{i2t}+a^2}\mathrm{d}t - i\varepsilon\ln\varepsilon\int_0^\pi \frac{\mathrm{e}^{it}}{\varepsilon^2\mathrm{e}^{i2t}+a^2}\mathrm{d}t \to 0 \qquad (\varepsilon\to 0^+)$$

对于 C_R 项

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z\right| &= R\left|\int_0^{\pi}\frac{(i\ln R - t)\mathrm{e}^{it}}{R^2\mathrm{e}^{i2t}+a^2}\mathrm{d}t\right|\\ &\le R\int_0^{\pi}\frac{|i\ln R - t|}{|R^2\mathrm{e}^{i2t}+a^2|}\mathrm{d}t\\ &\le R\int_0^{\pi}\frac{\pi+\ln R}{R^2-a^2}\mathrm{d}t\\ &= \pi R\frac{\pi+\ln R}{R^2-a^2}\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

对于 γ_2 项

$$\int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\varepsilon}^{R}\frac{\log t + i\pi}{t^2+a^2}\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon}^{R}\frac{\log t}{t^2+a^2}\mathrm{d}t + i\pi\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}$$

而

$$\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}$$

因此当 $\varepsilon\to 0$ 且 $R\to\infty$ 时，成立

$$2\int_0^{\infty}\frac{\log x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x + i\frac{\pi^2}{2a} = \frac{\pi\log a}{a} + i\frac{\pi^2}{2a}$$

因此

$$\int_0^{\infty}\frac{\log x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2a}\log a$$

命题 3.7.2

如果 $|a|<1$，那么

$$\int_0^{2\pi}\log|1-a\mathrm{e}^{i\theta}|\mathrm{d}\theta = 0$$

事实上，$|a|\le 1$ 时，上式仍然成立。

证明 记 $f(z) = \frac{\log(1-az)}{iz}, |z|\le 1$，由于 $1-az\in\{x+iy : x>0, y\in\mathbb{R}\}$，因此 $\log(1-az)$ 在 $|z|\le 1$ 时全纯。注意到 $z=0$ 为 $f(z)$ 的可去奇点，因此 $f(z)$ 在 $|z|\le 1$ 全纯，那么

$$\int_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

进而

$$\int_0^{2\pi}\log|1-a\mathrm{e}^{i\theta}|\mathrm{d}\theta = \mathrm{Re}\int_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

而当 $|a|=1$ 时，记 $a=\mathrm{e}^{i\alpha}$，注意到

$$\int_0^{2\pi}\log|1-a\mathrm{e}^{i\theta}|\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\log|1-\mathrm{e}^{i(\theta+\alpha)}|\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\log|1-\mathrm{e}^{i\theta}|\mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(2\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 0$$

最后的积分是因为

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin 2x)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 + \ln(\sin x) + \ln(\cos x))\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I \end{aligned}$$

因此

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$

附录 A 单复变函数定理扩展

定理 A.0.1 (Bieberbach 定理)

对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的单的全纯函数 f，如果 $f(0)=0$，且 $f'(0)=1$，那么作 Taylor 展式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

成立

$$|a_n|\leq n,\qquad n\in\mathbb{N}$$

♡

定理 A.0.2 (Koebe 定理 1/4 掩盖定理)

对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的单的全纯函数 f，如果 $f(0)=0$，且 $f'(0)=1$，那么 $f(\mathbb{D})\supset\mathbb{D}/4$。

♡

证明 作 Taylor 展式

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$$

任取 $w\notin f(\mathbb{D})$，令

$$g(z)=\frac{wf(z)}{w-f(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^n=z+\left(a_2+\frac{1}{w}\right)z^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

由 Bieberbach 定理A.0.1，$|a_2|$ 且 $|a_2+1/w|\leq 2$，因此

$$\frac{1}{|w|}\leq\left|a_2+\frac{1}{w}\right|+|a_2|\leq 4$$

从而 $|w|\geq 1/4$，进而 $f(\mathbb{D})\supset\mathbb{D}/4$。

引理 A.0.1

对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数 f，如果 $f(\mathbb{D})\subset M\mathbb{D}$，$|f(0)|\neq 0$，那么当 $|z|=r<|f(0)|<M$ 时，成立

$$|f(z)|\geq\frac{M(|f(0)|-Mr)}{M-r|f(0)|}$$

♡

证明 当 $M=1$ 时，由 Schwartz-Pick 引理3.5.6

$$|z|\geq\left|\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(z)}f(0)}\right|,\qquad z\in\mathbb{D}$$

从而

$$1-|z|^2\leq 1-\left|\frac{f(z)-f(0)}{1-\overline{f(z)}f(0)}\right|^2=\frac{(1-|f(z)|^2)(1-|f(0)|^2)}{|1-\overline{f(z)}f(0)|^2}\leq\frac{(1-|f(z)|^2)(1-|f(0)|^2)}{(1-|f(z)||f(0)|)^2}$$

因此

$$|z|^2\geq 1-\frac{(1-|f(z)|^2)(1-|f(0)|^2)}{(1-|f(z)||f(0)|)^2}=\frac{(|f(z)|-|f(0)|)^2}{(1-|f(z)||f(0)|)^2}$$

进而

$$|z|\geq\frac{||f(z)|-|f(0)||}{1-|f(z)||f(0)|}$$

解之

$$|f(z)|\geq\frac{|f(0)|-|z|}{1-|z||f(0)|}=\frac{|f(0)|-r}{1-r|f(0)|}$$

当 $M \neq 1$ 时，令 $g = f/M$，从而由

$$|g(z)| \geq \frac{|g(0)| - |z|}{1 - |z||g(0)|} = \frac{|g(0)| - r}{1 - r|g(0)|}$$

可得

$$\frac{|f(z)|}{M} \geq \frac{\frac{|f(0)|}{M} - |z|}{1 - |z|\frac{|f(0)|}{M}} = \frac{\frac{|f(0)|}{M} - r}{1 - r\frac{|f(0)|}{M}} \iff |f(z)| \geq \frac{M(|f(0)| - Mr)}{M - r|f(0)|}$$

引理 A.0.2

对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数 f，如果 $f(\mathbb{D}) \subset M\mathbb{D}$，且 $f(0) = 0$，$f'(0) = 1$，那么 $M \geq 1$，且 f 在 $\eta\mathbb{D}$ 中为单射，其中 $\eta = 1/(M + \sqrt{M^2 - 1})$。♡

证明 作 Taylor 展式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

由 Cauchy 不等式

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{|z|=r} |f(z)| < \frac{n!}{r^n} M, \qquad r < 1$$

从而

$$|a_n| = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{M}{r^n}, \qquad n \in \mathbb{N}, r < 1$$

令 $r \to 1^-$，从而

$$|a_n| \leq M, \qquad n \in \mathbb{N}$$

而 $|a_1| = |f'(0)| = 1$，从而 $M \geq 1$。

若 f 在 $\eta\mathbb{D}$ 中不为单射，则存在 $z_1 \neq z_2 \in \mathbb{D}$，使得成立 $f(z_1) = f(z_2) = \beta$。不妨 $|z_1| \leq |z_2| = \rho < 1/M$。令

$$g(z) = \frac{\frac{\beta}{M} - \frac{f(z)}{M}}{1 - \frac{\rho}{M}\frac{f(z)}{M}} = \frac{M(\beta - f(z))}{M^2 - \beta f(z)}$$

则 $|g| < M$，且 $g(z_1) = g(z_2) = 0$。再令

$$h(z) = \frac{g(z)(1 - \overline{z}_1 z)(1 - \overline{z}_2 z)}{(z - z_1)(z - z_2)}$$

则 h 在 $\mathbb{D}$ 内全纯。断言：$|h| < M$。事实上，由最大模原理3.5.4，$|h|$ 在 $\partial\mathbb{D}$ 上取到；而 $z \to \partial\mathbb{D}$，$|g(z)| < M$，从而 $|h| < M$。因此

$$|h(0)| = \frac{|g(0)|}{|z_1 z_2|} < M$$

而 $|g(0)| \leq \beta$，则 $\beta < M|z_1 z_2| < M\rho^2$。令

$$\varphi(z) = \begin{cases} f(z)/z, & z \neq 0 \\ f'(0) = 1, & z = 0 \end{cases}$$

则 φ 在 $\mathbb{D}$ 内全纯，且 $|\varphi| < M$。由引理A.0.1，当 $|z| = \rho < 1/M$ 时

$$|\varphi(z)| \geq \frac{M(\varphi(0) - M\rho)}{M - \varphi(0)\rho} = \frac{M(1 - M\rho)}{M - \rho} \implies |f(z)| \geq \frac{M(1 - M\rho)}{M - \rho}|z|$$

结合

$$\beta = |f(z_2)| \geq \frac{M(1 - M\rho)}{M - \rho}|z_2| = \frac{M(1 - M\rho)}{M - \rho}\rho \implies M\rho^2 \geq \frac{M(1 - M\rho)}{M - \rho}\rho \implies \rho \geq \frac{1}{M + \sqrt{M^2 - 1}}$$

可得要使得 f 在 $\rho\mathbb{D}$ 中不为单射，从而当 $\rho < 1/(M + \sqrt{M^2 - 1})$ 时，f 在 $\rho\mathbb{D}$ 中为单射。

定理 A.0.3 (Landou 引理)

对于单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数 f，如果 $f(0)=0$，$f(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}$，$0<f'(0)=\alpha\leq 1$，那么 f 在 $\eta\mathbb{D}$ 上为单射，且 $\eta^2\mathbb{D}\subset f(\eta\mathbb{D})$，其中 $\eta=\alpha/(1+\sqrt{1-\alpha^2})$。

证明 令 $F(z)=f(z)/\alpha$，则 $F(0)=0$，$F'(0)=1$，且 $F(\mathbb{D})\subset\mathbb{D}/\alpha$。由引理A.0.2，则 F 在 $\eta\mathbb{D}$ 中为单射，其中

$$\eta=\frac{1}{M+\sqrt{M^2-1}}=\frac{1}{\frac{1}{\alpha}+\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-1}}=\frac{\alpha}{1+\sqrt{1-\alpha^2}}$$

当 $|z|=\eta$ 时，由引理A.0.2

$$|F(z)|\geq\frac{M(1-M\eta)}{M-\eta}|z|$$

从而

$$|f(z)|\geq\frac{1-\frac{1}{\alpha}\eta}{\frac{1}{\alpha}-\eta}\eta=\frac{\alpha-\eta}{1-\alpha\eta}\eta\geq\eta^2$$

由 Rouché 定理3.5.2，$\eta^2\mathbb{D}\subset f(\eta\mathbb{D})$。

附录 B 单复变经典定理

定义 B.0.1 (全纯函数)

称函数 $f=u+iv$ 在开集 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上为全纯函数，如果成立如下命题之一。

1. 对于任意 $z\in\Omega$，存在极限
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$
2. 函数 u 和 v 在 Ω 上连续可微，且成立 Cauchy-Riemann 方程
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$
3. 函数 f 在 Ω 上连续，且对于任意分段光滑闭曲线 γ，成立
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0$$
4. 对于任意 $z_0\in\Omega$，存在 $r>0$，使得对于任意 $z\in D_r(z_0)$，成立幂级数展开
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

♣

定理 B.0.1 (Cauchy-Riemann 方程)

如果函数 $f=u+iv$ 在开集 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上全纯，那么
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$
即
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

♡

证明 由于存在极限
$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}=\frac{f(x+h_1,y+h_2)-f(x,y)}{h_1+ih_2}$$
那么当 h 沿实轴时
$$f'(z)=\lim_{h_1\to 0}=\frac{f(x+h_1,y)-f(x,y)}{h_1}=\frac{\partial f}{\partial x}(z)$$
当 h 沿虚轴时
$$f'(z)=\lim_{h_2\to 0}=\frac{f(x,y+h_2)-f(x,y)}{ih_2}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z)$$
从而
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$$
即
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

定理 B.0.2 (Cauchy-Riemann 方程逆定理)

如果函数 $f=u+iv$ 在开集 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上成立 Cauchy-Riemann 方程
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$
那么 f 在 Ω 上全纯。

♡

证明 由于函数 u 和 v 在 Ω 上连续可微，那么

$$u(x+h_1,y+h_2)-u(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}h_1+\frac{\partial u}{\partial y}h_2+h\psi_1(h)$$
$$v(x+h_1,y+h_2)-v(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}h_1+\frac{\partial v}{\partial y}h_2+h\psi_2(h)$$

其中

$$\lim_{h\to 0}\psi_1(h)=\lim_{h\to 0}\psi_2(h)=0$$

令

$$h=h_1+ih_2,\qquad \psi=\psi_1+i\psi_2$$

从而由 Cauchy-Riemann 方程

$$f(z+h)-f(z)=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\right)h+h\psi(h)$$

从而 f 为全纯函数，且

$$f'=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=2\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z}$$

定理 B.0.3 (Goursat 定理)

如果函数 f 在开集 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上全纯，那么对于任意三角形 $T\subset\Omega$，成立

$$\int_T f(z)\mathrm{d}z=0$$

♡

定理 B.0.4 (Cauchy 积分定理)

对于边界分段光滑的区域 $\Omega\subset\mathbb{C}$，如果函数 f 在 Ω 上全纯且在 $\overline{\Omega}$ 上连续，那么

$$\int_{\partial\Omega} f(z)\mathrm{d}z=0$$

♡

定理 B.0.5 (Cauchy 积分公式)

对于边界分段光滑的区域 $\Omega\subset\mathbb{C}$，如果函数 f 在 Ω 上全纯且在 $\overline{\Omega}$ 上连续，那么对于任意 $z\in\Omega$，成立

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

同时 f 在 Ω 上无穷阶可导，且对于任意 $z\in\Omega$，成立

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

♡

推论 B.0.1 (平均值性质)

对于在开集 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上全纯的函数 f，如果 $z_0\in\Omega$ 且 $D_r(z_0)\subset\Omega$，那么

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z_0+re^{i\theta})\mathrm{d}\theta$$

♡

证明 由 Cauchy 积分公式2.3.2，这几乎是显然的！

推论 B.0.2 (Cauchy 不等式)

对于开集 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上的全函数 f，如果 $\overline{D}_r(z_0)\subset\Omega$，那么

$$|f^{(n)}(z_0)|\le\frac{n!}{r^n}\sup_{|z-z_0|=r}|f(z)|$$

♡

证明 由 Cauchy 积分公式2.3.2

$$\begin{aligned}|f^{(n)}(z_0)| &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right| \\ &= \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+r\mathrm{e}^{i\theta})}{(r\mathrm{e}^{i\theta})^{n+1}}ri\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right| \\ &\le \frac{n!}{r^n}\sup_{|z-z_0|=r}|f(z)|\end{aligned}$$

定理 B.0.6 (Taylor 展开)

对于开集 Ω 上的全纯函数 f，如果 $D_r(z_0)\subset\Omega$，那么 f 存在幂级数展开

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad z\in D_r(z_0)$$

其中

$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\quad n\in\mathbb{N}$$

证明 任取 $z\in D_r(z_0)$，由 Cauchy 积分公式2.3.2

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$

对于 $\zeta\in\partial D$，考虑几何级数

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}=\frac{1}{\zeta-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$$

从而由 Cauchy 积分公式2.3.2

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta\right)(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

推论 B.0.3 (Liouville 定理)

1. 如果 f 是 $\mathbb{C}$ 上的有界整函数，那么 f 是常函数。
2. 如果 f 是 $\mathbb{C}$ 上的下有界整函数，那么 f 是常函数。
3. 对于 $\mathbb{C}$ 上的整函数 $f=u+iv$，如果 u 存在上界，那么 f 是常函数。
4. 对于 $\mathbb{C}$ 上的整函数 $f=u+iv$，如果 u 存在下界，那么 f 是常函数。
5. 对于 $\mathbb{C}$ 上的整函数 $f=u+iv$，如果 v 存在上界，那么 f 是常函数。
6. 对于 $\mathbb{C}$ 上的整函数 $f=u+iv$，如果 v 存在下界，那么 f 是常函数。

证明 对于 1，由于 f 在 $\mathbb{C}$ 上有界，那么存在 $M\in\mathbb{R}$，使得对于任意 $z\in\mathbb{C}$，成立 $|f(z)|\le M$。由 Cauchy 不等式2.3.2，对于任意 $z_0\in\mathbb{C}$ 与 $r>0$，成立

$$|f'(z_0)|\le\frac{1}{r}\sup_{|z-z_0|=r}|f(z)|\le\frac{M}{r}\to 0\qquad(r\to\infty)$$

从而 $f'=0$。由推论1.4.2，f 为常函数。

对于 2，如果 f 下有界，那么 $1/f$ 为有界整函数，因此由 1，$1/f$ 为常函数，进而 f 为常函数。

对于 3，如果 u 上有界，那么考虑 e^f。由于

$$|\mathrm{e}^f|=|\mathrm{e}^{u+iv}|=\mathrm{e}^u$$

因此 e^f 有界。由 1，e^f 为常函数，进而 f 为常函数。

对于 4，如果 u 下有界，那么由 $|f|\ge|u|$，可知 f 下有界。由 2，f 为常函数。

对于 5，如果 u 上有界，那么考虑 e^{v+iu}。由于

$$|\mathrm{e}^{v+iu}|=\mathrm{e}^v$$

因此 e^{v+iu} 有界。由 1，e^{v+iu} 为常函数，进而 u 与 v 为常函数，即 f 为常函数。

对于 6，如果 v 下有界，那么由 $|f| \geq |v|$，可知 f 下有界。由 2，f 为常函数。

推论 B.0.4 (代数基本定理)

$\mathbb{C}$ 上的非常数多项式在 $\mathbb{C}$ 中存在根。

♡

证明 考虑 n 次多项式

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

假设 $P(z)$ 无根。由于

$$\frac{P(z)}{z^n} = a_n + \left(\frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right) \to a_n \qquad (|z| \to \infty)$$

那么存在 $r > 0$，使得成立

$$|P(z)| \geq \frac{|a_n|}{2}|z|^n, \qquad |z| > r$$

从而 $P(z)$ 在 $|z| > r$ 时存在下界。由于 $P(z)$ 为连续函数且无零点，那么 $P(z)$ 在紧集 $|z| \leq r$ 上有界，因此 $P(z)$ 在 $\mathbb{C}$ 上存在下界，进而 $1/P(z)$ 为有界整函数。由 Liouville 定理2.3.3，$1/P(z)$ 为常函数，即 $P(z)$ 为常函数，矛盾！进而 $P(z)$ 存在根。

定理 B.0.7 (唯一性定理)

对于在区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的全纯函数 f，如果存在 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Omega$，使得对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$，成立 $f(z_n) = 0$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n \in \Omega$，那么在 Ω 上成立 $f = 0$。

♡

证明 记 $z_0 = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$，由于 Ω 为开集，因此存在 $r > 0$，使得 $D_r(z_0) \subset \Omega$。考虑幂级数展开2.3.3

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad z \in D_r(z_0)$$

如果 f 在 $D_r(z_0)$ 上不为 0，那么存在最小的 $m \in \mathbb{N}$，使得成立 $a_m \neq 0$，此时存在多项式 $g(z)$，使得成立

$$f(z) = a_m (z - z_0)^m (1 + g(z - z_0))$$

其中当 $z \to z_0$ 时 $g(z - z_0) \to 0$。由于 $z_n \to z_0$，那么存在 $z_{n_0} \neq z_0$，使得成立 $|g(z_{n_0} - z_0)| < 1/2$，从而

$$a_m (z_{n_0} - z_0)^m \neq 0, \qquad 1 + g(z_{n_0} - z_0) \neq 0$$

但是 $f(z_{n_0}) = 0$，因此产生矛盾！进而 f 在 $D_r(z_0)$ 恒为 0。

记

$$U = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}, \qquad V = U^\circ$$

那么 V 为非空开集。断言 V 为闭集，事实上，对于任意 $w \in \overline{V}$，存在 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty} \subset V$，使得成立 $w_n \to w$。由上述论证，$w \in V$，进而 V 为闭集。令 $W = \Omega \setminus V$ 为开集，那么 Ω 表示可为开集的不交并

$$\Omega = V \sqcup W$$

由于 Ω 为连通集，从而 $W = \varnothing$，进而 $\Omega = V$，因此在 Ω 上成立 $f = 0$。

推论 B.0.5 (零点孤立性定理)

对于区域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上的非零全纯函数 f，如果 $z_0 \in \Omega$ 为 f 的零点，那么存在 $r > 0$，使得 f 在 $\mathring{D}_r(z_0)$ 内无零点。

♡

证明 由唯一性定理2.3.4，命题得证！

定理 B.0.8 (Morera 定理)

对于在开集 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上的连续函数 f，如果对于任意分段光滑封闭曲线 $\gamma\subset\Omega$，成立

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=0$$

那么 f 在 Ω 上全纯。

定理 B.0.9 (留数计算公式)

如果 $z_0\in\Omega$ 为函数 f 的 n 阶极点，那么

$$\mathrm{res}_{z_0}f=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}(z-z_0)^nf(z)$$

定理 B.0.10 (留数公式)

对于边界分段光滑的区域 Ω 上的函数 f，如果 $z_1,\cdots,z_n\in\Omega_\gamma$ 为 f 的极点，同时 f 在 $\Omega\setminus\{z_1,\cdots,z_n\}$ 上全纯，在 $\overline{\Omega}\setminus\{z_1,\cdots,z_n\}$ 上连续，那么

$$\int_{\partial\Omega}f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{k=1}^n\mathrm{res}_{z_k}f$$

定理 B.0.11 (Rouché 定理)

对于开集 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上的全纯函数 f 和 g，如果开圆 $D\subset\Omega$，且对于任意 $z\in\partial D$，成立

$$|f(z)|>|g(z)|$$

那么 f 和 $f+g$ 在 D 上存在相同数目的零点。

推论 B.0.6 (代数基本定理)

$\mathbb{C}$ 上的 n 次多项式在 $\mathbb{C}$ 上存在 n 个根。

证明 不妨记 $\mathbb{C}$ 上的 n 次多项式为

$$P(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$$

由引理3.5.1，多项式 $a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ 的根在某个圆 D 内。由于 z^n 存在且存在 n 个零根，那么当 D 的半径充分大时，对于任意 $z\in\partial D$，成立

$$\frac{|a_1z^{n-1}+\cdots+a_n|}{|z^n|}<\frac{1}{2}$$

那么由 Rouché 定理3.5.2，$P(z)$ 存在 n 个根。

定理 B.0.12 (开映射定理)

如果 f 为开集 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上的全纯函数，那么或 f 为开映射，或 f 为常函数。

证明 假设 f 不为常函数，取开集 $G\subset\Omega$，任取 $w_0\in f(G)$，那么存在 $z_0\in G$，使得成立 $w_0=f(z_0)$。由唯一性定理2.3.4，结合 f 不为常函数，那么存在 $r>0$，使得对于任意 $z\in D_r(z_0)\subset G$，成立若 $f(z)=f(z_0)$，则 $z=z_0$。取 $\delta=\min\limits_{z\in\partial D_r(z_0)}|f(z)-w_0|$，对于任意 $w\in D_\delta(w_0)$，考虑

$$f(z)-w=(f(z)-w_0)+(w_0-w)$$

由于在 $\partial D_r(z_0)$ 上成立

$$|f(z)-w_0|\geq\delta,\qquad |w_0-w|<\delta$$

那么由 Rouché 定理3.5.2，$f(z)-w$ 与 $f(z)-w_0$ 在 $D_r(z_0)$ 中的零点个数相同。由于 $f(z)-w_0$ 在 $D_r(z_0)$ 中存

在零点 z_0，那么 $f(z)-w$ 在在 $D_r(z_0)$ 中存在零点 z_w，因此

$$w=f(z_w)\in f(D_r(z_0))$$

由 w 的任意性，$D_\delta(w_0)\subset f(D_r(z_0))\subset f(G)$，从而 $f(G)$ 为开集，进而 f 为开映射。

定理 B.0.13 (最大模原理)

如果 f 为区域 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上的全纯函数，那么或 $|f|$ 不在 Ω 内取到最大值，或 f 为常函数。

证明 如果 f 不为常函数，且在 $z_0\in\Omega$ 处 $|f|$ 取最大值，那么存在 $r>0$，使得成立 $D_r(z_0)\subset\Omega$。由开映射定理3.5.3，$f(D_r(z_0))$ 为开集，因此存在 $w\in D_r(z_0)$，使得 $|f(w)|=|f(z_0)|+r/2>|f(z_0)|$，矛盾！