高等代数

目录

致敬

本书没什么好致敬的。

第一章：多项式

1.数域

定义 数域：对于$\mathbb{P} \subset \mathbb{C}$，如果$\{0,1\} \subset \mathbb{P}$，且$\mathbb{P}$对于和、差、积、商是封闭的，那么$\mathbb{P}$成为数域。

定理：任意数域$\mathbb{P}$满足

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{P} \tag{1}$$

即任意数域都包含有理数域，有理数域是最小的数域。

定理：

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C} \tag{2}$$

$\mathbb{Q}$与$\mathbb{R}$之间存在无数的数域,$\mathbb{R}$与$\mathbb{C}$之间不存在的数域。

2.一元多项式

定义 一元多项式：如果$n \in N$，形式表达式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{3}$$

其中$a_k \in \mathbb{P}, k = 0, \cdots, n$且$x$为符号或文字，那么称$f(x)$为数域$\mathbb{P}$中的一元多项式。

- 特别的，0称为零多项式。

定义 一元多项式环：数域$\mathbb{P}$中的所有一元多项式的全体成为数域$\mathbb{P}$中的一元多项式环，记作$\mathbb{P}[x]$，$\mathbb{P}$称为$\mathbb{P}[x]$的系数域。

- 如果以下不做特殊说明，一元多项式均在数域$\mathbb{P}$中讨论。

定义 一元多项式的次数：对于数域$\mathbb{P}$中的一元多项式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{4}$$

其中$a_k \in \mathbb{P}; k = 0, \cdots, n; n \in N$，如果$a_n \neq 0$，那么称一元多项式$f(x)$的系数为$n$，记作$\partial(f(x)) = n$。

- 特别的，零多项式不定义次数。
- 如果$f(x)g(x) \neq 0$，那么
$$\partial(f(x) + g(x)) \leq \max\{\partial(f(x)), \partial(g(x))\} \tag{5}$$
- 如果$f(x)g(x) \neq 0$，那么
$$\partial(f(x)g(x)) = \partial(f(x)) + \partial(g(x)) \tag{6}$$

定义 一元多项式的相等：称一元多项式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \tag{7}$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k \tag{8}$$

相等，当且仅当以下两点之一成立

- $$\partial(f(x)) = \partial(g(x)) \tag{9}$$
  且对于$k = 0, \cdots, \min\{m, n\}$，成立
  $$a_k = b_k \tag{10}$$
- $$f(x) = g(x) = 0 \tag{11}$$

两多项式$f(x)$和$g(x)$相等，记作$f(x) = g(x)$。

3.整除

定义 整除：对于$f(x), g(x) \in \mathbb{P}[x]$，称$g(x)$整除$f(x)$，如果存在$h(x) \in \mathbb{P}[x]$，使得成立

$$f(x) = g(x)h(x) \tag{12}$$

记作$g(x) \mid f(x)$，此时称$g(x)$为$f(x)$的因式。

- 对于任意$f(x) \in \mathbb{P}[x]$，成立$f(x) \mid 0$。
- 对于任意$f(x) \in \mathbb{P}[x]$和任意$c \in \mathbb{R}$且$c \neq 0$，成立$c \mid f(x)$。
- 对于任意$f(x) \in \mathbb{P}[x]$，成立$f(x) \mid f(x)$。
- 如果$f(x) \mid g(x)$且$g(x) \mid f(x)$，那么$f(x) = cg(x)$，其中$c \in \mathbb{R}$且$c \neq 0$。
- 整除的传递性：如果$f(x) \mid g(x)$且$g(x) \mid h(x)$，那么$f(x) \mid h(x)$。
- 如果$f(x) \mid g(x)$且$f(x) \mid h(x)$，那么对于任意$u(x), v(x) \in \mathbb{P}[x]$，成立
  $$f(x) \mid (u(x)g(x) + v(x)h(x)) \tag{13}$$
- 对于任意$n \in N^*$，成立
  $$f^n(x) \mid g^n(x) \Leftrightarrow f(x) \mid g(x) \tag{14}$$
- 两多项式之间的整除关系不因系数域的扩大而改变。

定义 带余除法：对于任意$f(x), g(x) \in \mathbb{P}[x]$，其中$g(x) \neq 0$，存在且存在唯一$q(x), r(x) \in \mathbb{P}[x]$，使得成立

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \tag{15}$$

其中或$\partial(r(x)) < \partial(g(x))$或$r(x) = 0$。

4. 最大公因式

定义 公因式：对于$f(x), g(x), \varphi(x) \in \mathbb{P}[x]$，如果$\varphi(x) \mid f(x)$且$\varphi(x) \mid g(x)$，那么称$\varphi(x)$为$f(x), g(x)$的公因式。

定义 最大公因式：对于$f(x), g(x), d(x) \in \mathbb{P}[x]$，称$d(x)$为$f(x), g(x)$的最大公因式，如果同时成立

- $$d(x) \mid f(x), \quad d(x) \mid g(x) \tag{16}$$
- 对于满足$\varphi(x) \mid f(x)$且$\varphi(x) \mid g(x)$的$\varphi(x) \in \mathbb{P}[x]$，成立
  $$\varphi(x) \mid d(x) \tag{17}$$

定义 首一最大公因式：容易知道，两多项式$f(x), g(x) \in \mathbb{P}[x]$的最大公因式在相差常数倍的意义下是唯一的，如果$f(x)g(x) \neq 0$，那么以$(f(x), g(x))$表示首一最大公因式。

- 特别的，对于任意$f(x) \in \mathbb{P}$，$f(x)$和0的最大公因式为$f(x)$。

- 如果$f(x)g(x) \neq 0$，那么$(f(x), g(x)) \neq 0$。
- 如果

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \tag{18}$$

那么

$$(f(x), g(x)) = (af(x) + bg(x), cf(x) + dg(x)) \tag{19}$$

定理 最大公因式的存在性：对于任意$f(x), g(x) \in \mathbb{P}[x]$，存在$d(x) \in \mathbb{P}[x]$，使得$d(x)$为$f(x), g(x)$的最大公因式，且存在$u(x), v(x) \in \mathbb{P}[x]$，使得成立

$$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x) \tag{20}$$

- 如果$g(x) = 0$，那么$(f(x), g(x)) = f(x)$。
- 如果$f(x) = 0$，那么$(f(x), g(x)) = g(x)$。
- 如果$f(x)g(x) \neq 0$，运用带余除法，由于

$$\partial(g(x)) > \partial(r_1(x)) > \partial(r_2(x)) > \cdots \tag{21}$$

那么成立

$$\begin{gathered} f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x) \\ g(x) = q_2(x)r_1(x) + r_2(x) \\ r_1(x) = q_3(x)r_2(x) + r_3(x) \\ \cdots \\ r_s(x) = q_{s+2}(x)r_{s+1}(x) + r_{s+2}(x) \\ r_{s+1}(x) = q_{s+3}(x)r_{s+2}(x) + 0 \end{gathered} \tag{22}$$

$r_{s+2}(x)$的首项系数为c，记$d(x) = \frac{r_{s+2}(x)}{c}$，于是

$$d(x) = (r_{s+1}(x), r_{s+2}(x)) = \cdots = (r_1(x), r_2(x)) = (g(x), r_1(x)) = (f(x), g(x)) \tag{23}$$

且

$$d(x) = \frac{u_{s+2}(x)}{c}f(x) + \frac{v_{s+2}(x)}{c}g(x) \tag{24}$$

其中$u_n(x), v_n(x)$满足

$$\begin{cases} u_1(x) = 1 \\ v_1(x) = -q_{s+2}(x) \end{cases} \tag{25}$$

且

$$\begin{cases} u_{n+1}(x) = v_n(x) \\ v_{n+1}(x) = u_n(x) - q_{s+2-n}(x)v_n(x) \end{cases}, \quad n = 1, \cdots, s+1 \tag{26}$$

定理：存在等式

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \tag{27}$$

那么$f(x), g(x)$和$g(x), r(x)$有相同的公因式，从而

$$(f(x), g(x)) = (g(x), r(x)) \tag{28}$$

定理：以下说法等价

- $d(x)$为$f(x), g(x)$的最大公因式。

- $$d(x) \mid f(x), \quad d(x) \mid g(x) \tag{29}$$

  且

  $$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}, \frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right) = 1 \tag{30}$$

- $$d(x) \mid f(x), \quad d(x) \mid g(x) \tag{31}$$

  且存在$u(x), v(x)$使得成立

  $$d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x) \tag{32}$$

定义 互素：对于$f(x), g(x) \in \mathbb{P}[x]$，称$f(x), g(x)$是互素的，如果

$$(f(x), g(x)) = 1 \tag{33}$$

定理 互素的充要条件：$f(x)$和$g(x)$互素，当且仅当存在$u(x), v(x)$，使得成立

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1 \tag{34}$$

定理：以下命题等价

- $f(x)$和$g(x)$互素。
- $f(x)$和$f(x) + g(x)$互素。
- 存在$c \neq 0$，使得$f(x)$和$cg(x)$互素。
- 存在$n \in N^*$，使得$f(x)$和$g^n(x)$互素。

定理：$f(x)$和$g(x)h(x)$互素 $\Longleftrightarrow$ $f(x)$和$g(x)$互素且$f(x)$和$h(x)$互素。

定理：$f(x)$和$g(x)$互素，且$f(x) \mid g(x)h(x)$，那么

$$f(x) \mid h(x) \tag{35}$$

定理：$f(x)$为首一多项式，且$(g_1(x), g_2(x)) = 1$，那么$(f(x)g_1(x), f(x)g_2(x)) = f(x)$。

定理：$f_1(x) \mid g(x), f_2(x) \mid g(x)$且$f_1(x)$和$f_2(x)$互素，那么

$$f_1(x)f_2(x) \mid g(x) \tag{36}$$

定理：$f(x), g(x)$不全为零，且$u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x))$，那么$u(x)$和$v(x)$互素。

定理：如果$f(x), g(x)$不全为零，$\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}$和$\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$互素。

定理：对于任意$f(x)$，存在$g(x)$，使得$f(x)$和$g(x)$互素。

5.因式分解定理

定义 不可约多项式：称$p(x) \in \mathbb{P}[x]$为数域$\mathbb{P}$上的不可约多项式，当且仅当同时成立以下两点

- $$\partial(p(x)) \geq 1 \tag{37}$$

- 不存在非零多项式$u(x), v(x) \in \mathbb{P}[x]$满足

  $$\partial(u(x)) < \partial(p(x)), \quad \partial(v(x)) < \partial(p(x)) \tag{38}$$

  且

  $$p(x) = u(x)v(x) \tag{39}$$

注：

- 一次多项式不可约。
- 多项式是否可约依赖于系数域。
- 对于任意数域$\mathbb{P}$，存在无穷多个互素的不可约多项式。

定理：对于数域$\mathbb{P}$上次数不小于1的多项式$p(x)$，以下命题等价

- $p(x)$为不可约多项式。
- 不存在非零多项式$u(x), v(x) \in \mathbb{P}[x]$满足

$$\partial(u(x)) < \partial(p(x)), \quad \partial(v(x)) < \partial(p(x)) \tag{40}$$

  且

$$p(x) = u(x)v(x) \tag{41}$$

- $p(x)$仅有形如c与$cp(x)$的因式，其中$c \in \mathbb{P}$且$c \neq 0$。
- 对于任意$f(x) \in \mathbb{P}[x]$，或$p(x) \mid f(x)$，或$(p(x), f(x)) = 1$。
- 对于任意$f(x), g(x) \in \mathbb{P}[x]$，如果$p(x) \mid f(x)g(x)$，那么或$p(x) \mid f(x)$，或$p(x) \mid g(x)$。

定理 因式分解及唯一性定理：对于数域$\mathbb{P}$上次数不小于1的任意多项式$f(x)$，存在数域$\mathbb{P}$上的互素的首一不可约多项式$p_1(x), \cdots, p_n(x)$，使得成立

$$f(x) = cp_1^{r_1}(x) \cdots p_n^{r_n}(x) \tag{42}$$

其中c为$f(x)$的首项系数且$r_1, \cdots, r_n \in N^*$。所谓唯一性，体现在，如果存在数域$\mathbb{P}$上的互素首一不可约多项式$p_1(x), \cdots, p_n(x)$和互素首一不可约多项式$q_1(x), \cdots, q_m(x)$，使得成立

$$\begin{aligned} f(x) &= cp_1^{r_1}(x) \cdots p_n^{r_n}(x) && (43) \\ &= c' q_1^{r'_1}(x) \cdots q_m^{r'_m}(x) && (44) \end{aligned}$$

其中$c, c' \in \mathbb{P}$且$r_1, \cdots, r_n, r'_1, \cdots, r'_m \in N^*$，那么有$c = c', n = m$，同时

$$\{p_1(x), \cdots, p_n(x)\} = \{q_1(x), \cdots, q_m(x)\} \tag{45}$$

且如果$p_i(x) = q_j(x)$，那么$r_i = r'_j$，这里$i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, m$。如此形式的分解式称之为标准分解式。

- 该定理的证明仅依赖于不可约多项式的定义。

定理：对于数域$\mathbb{P}$上次数不小于1的多项式$f(x), g(x)$，记二者的标准分解式为

$$f(x) = ap_1^{r_1}(x) \cdots p_n^{r_n}(x) \tag{46}$$

$$g(x) = bq_1^{s_1}(x) \cdots q_m^{s_m}(x) \tag{47}$$

- 整除性：

$$f(x) \mid g(x) \iff \{p_1(x), \cdots, p_n(x)\} \subset \{q_1(x), \cdots, q_m(x)\} \tag{48}$$

  且如果$p_i(x) = q_j(x)$，那么$r_i \leq s_j$。

- 互素性：

$$(f(x), g(x)) = 1 \iff \{p_1(x), \cdots, p_n(x)\} \cap \{q_1(x), \cdots, q_m(x)\} = \emptyset \tag{49}$$

- 可约性：如果$f(x)$可约，那么或$n = 1$且$r_1 \geq 2$，或$n \geq 2$。

6.重因式

定义 因式称$p(x)\in\mathbb{P}[x]$为多项式$f(x)\in\mathbb{P}$在数域$\mathbb{P}$上的k重因式，当且仅当$p(x)$不可约，且$p^k(x)\mid f(x)$，而$p^{k+1}(x)\nmid f(x)$，其中$k\in N$。

- $k=0$：$p(x)$不为$f(x)$的因式。
- $k=1$：称$p(x)$为$f(x)$的单因式。
- $k\geq 2$：称$p(x)$为$f(x)$的重因式。

定理：对于数域$\mathbb{P}$上的多项式$p(x),f(x)$，以下命题等价

- 称$p(x)$为$f(x)$的k重因式。
- $p(x)$不可约，且$p^k(x)\mid f(x)$，而$p^{k+1}(x)\nmid f(x)$。
- $p(x)$不可约，同时存在$q(x)\in\mathbb{P}[x]$，使得$f(x)=p^k(x)q(x)$，且$(p(x),q(x))=1$。

定理：如果不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的k重因式，其中$n\in N^*$，那么$p(x)$是$f(x)$的微商$f'(x)$的$k-1$重因式。

定理：如果不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的k重因式，其中$n\in N^*$，那么$p(x)$是$f(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$的因式，但不是$f^{(k)}(x)$的因式。

定理：如果$p(x)$为不可约多项式，那么$p(x)$为$f(x)$的重因式$\iff p(x)$为$f(x)$和$f'(x)$的公因式。

定理：$f(x)$不存在重因式当且仅当和$f'(x)$互素。

定理：对于数域$\mathbb{P}$上次数不小于1的多项式$f(x)$，记其标准分解式为

$$f(x)=cp_1^{r_1}(x)\cdots p_n^{r_n}(x) \tag{50}$$

其中c为$f(x)$的首项系数且$r_1,\cdots,r_n\in N^*$，其微商为

$$f'(x)=cp_1^{r_1-1}(x)\cdots p_n^{r_n-1}(x)(r_1p_1'(x)p_2(x)\cdots p_n(x)+\cdots+r_np_1(x)\cdots p_{n-1}(x)p_n'(x)) \tag{51}$$

从而

$$(f(x),f'(x))=p_1^{r_1-1}(x)\cdots p_n^{r_n-1}(x) \tag{52}$$

进而

$$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=p_1(x)\cdots p_n(x) \tag{53}$$

7.多项式函数

定义 多项式函数：如果$f(x)\in\mathbb{P}[x]$，规定$x\in\mathbb{P}$对应$f(x)\in\mathbb{P}$，那么称映射

$$f:\quad \mathbb{P}\mapsto\mathbb{P} \tag{54}$$

为多项式函数，记为$f(x),x\in\mathbb{P}$。

定理 余数定理：对于多项式函数$f(x)$，以$x-x_0$除$f(x)$，所得余式为常数$f(x_0)$。

定义 根：称x_0为多项式函数$f(x)$的根，当且仅当$x-x_0$为$f(x)$的因式。

定义 k重根：称x_0为多项式函数$f(x)$的k重根，当且仅当$x-x_0$为$f(x)$的k重因式，其中$k\in N^*$。

- $k=1$：称x_0为$f(x)$的单根。

- $k \geq 2$：称x_0为$f(x)$的重根。

定理：对于多项式函数$f(x)$，以下命题等价

- x_0为多项式函数$f(x)$的根。
- $f(x_0) = 0$
- $(x - x_0) \mid f(x)$
- 存在多项式函数$g(x)$，使得$f(x) = (x - x_0)g(x)$。

定理：多项式函数$f(x)$存在重根，当且仅当存在x_0使得成立

$$f(x_0) = f'(x_0) = 0 \tag{55}$$

定理：x_0是多项式函数$f(x)$的k重根 $\Longleftrightarrow$

$$f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 \tag{56}$$

且

$$f^{(k)}(x_0) \neq 0 \tag{57}$$

定理：数域$\mathbb{P}$中的n次多项式函数在数域$\mathbb{P}$中的根不多于n个，其中重根依重数计算，且$n \in N$。

定理：对于非零且次数不多于n的多项式函数$f(x), g(x)$，如果存在$n+1$个不同的数$x_1, \cdots, x_{n+1}$使得

$$f(x_k) = g(x_k), k = 1, \cdots, n+1 \tag{58}$$

那么

$$f(x) = g(x) \tag{59}$$

8.复系数与实系数多项式的因式分解

定理 代数基本定理：任一次数不小于1的复系数多项式在复数域$\mathbb{C}$中存在一根。

- 任一次数为$n \in N^*$的复系数多项式在复数域$\mathbb{C}$中存在n个根，其中重根依重数计算。
- 任一次数不小于1的复系数多项式在复数域$\mathbb{C}$中存在一个一次因式。

定理 复系数多项式因式分解定理：对于任一次数不小于1的复系数多项式在复数域$\mathbb{C}$中可以唯一的分解为一次因式的乘积，即对于$f(x) \in \mathbb{C}[x]$，存在标准分解式

$$f(x) = a_n(x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_r)^{k_r} \tag{60}$$

其中$x_1, \cdots, x_r$为不同的复数，$k_1, \cdots, k_r$为正整数，且$k_1 + \cdots + k_r = n$

定理 虚根成对定理：如果x_0为多项式$f(x)$的根，那么$\overline{x}_0$亦为多项式$f(x)$的根。

定理 实系数多项式因式分解定律：对于任一次数不小于1的复系数多项式在实数域$\mathbb{R}$中可以唯一的分解为一次因式与不可约二次因式的乘积，即对于$f(x) \in \mathbb{R}[x]$，存在标准分解式

$$f(x) = a_n(x - c_1)^{k_1} \cdots (x - c_s)^{k_s}(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \cdots (x^2 + p_rx + q_r)^{l_r} \tag{61}$$

其中$c_1, \cdots, c_s, p_1, \cdots, p_r, q_1, \cdots, q_r$均为实数，$k_1, \cdots, k_s, l_1, \cdots, l_r$均为正整数，并且$p_i^2 < 4q_i, i = 1, \cdots, r$。

9.有理系数多项式

本节以$f(x) \in \mathbb{Z}[x]$表示$f(x)$为整系数多项式。

定义 本原多项式：称非零整系数多项式$f(x) \in \mathbb{Z}[x]$

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \tag{62}$$

为本原多项式，当且仅当

$$(a_n, \cdots, a_0) = 1 \tag{63}$$

定理：对于任一有理系数多项式$f_{\mathbb{Q}}(x) \in \mathbb{Q}[x]$，存在有理数$q \in \mathbb{Q}$和本原多项式多项式$f_{\mathbb{Z}}(x) \in \mathbb{Z}[x]$，使得成立

$$f_{\mathbb{Q}}(x) = q f_{\mathbb{Z}}(x) \tag{64}$$

定理 Gauss引理：两个本原多项式的乘积亦为本原多项式。

定理：非零整系数多项式能分解为两个次数较低的有理系数多项式的乘积，当且仅当其能分解为两个次数较低的整系数多项式的乘积。

定理：对于多项式$f(x), g(x) \in \mathbb{Z}[x], h(x) \in \mathbb{Q}[x]$，如果$g(x)$为本原多项式，且$f(x) = g(x)h(x)$，那么$h(x) \in \mathbb{Z}[x]$。

定理：对于$f(x) \in \mathbb{Z}[x]$

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \tag{65}$$

其中$a_n \neq 0$，如果存在即约的有理根$\frac{q}{p}$，那么成立

$$q \mid a_0, \quad p \mid a_n \tag{66}$$

特别的，如果$a_n = 1$，且$f(x)$存在有理根，那么其均为正数根，且为a_0的因子。

定理 Eisenstein判别法：对于$f(x) \in \mathbb{Z}[x]$

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \tag{67}$$

其中$a_n \neq 0$，如果存在素数p，使得成立

- $$p \nmid a_n \tag{68}$$
- $$p \mid a_k, k = 0, \cdots, n-1 \tag{69}$$
- $$p^2 \nmid a_0 \tag{70}$$

那么$f(x)$在有理数域$\mathbb{Q}$上不可约。

定理：有理数域$\mathbb{Q}$上存在任意次数的不可约多项式，如$x^n + 2$。

定理：对于二次或三次有理系数多项式$f(x)$，以下说法等价

- $f(x)$无有理根。
- $f(x)$在$\mathbb{Q}$上不可约。

定理：在数域$\mathbb{P}$上，$f(x)$与$f(x+p)$有相同的可约性，其$p \in \mathbb{P}$。

第二章：行列式

1.排列

定义 n阶排列：由$1,\cdots,n$构成的有序数组称为n阶排列。

- $12\cdots n$为自然顺序。

定义 逆序：对于排列$a_1\cdots a_n$如果$i<j$但$a_i>a_j$，那么称a_1,a_j为逆序。

定义 逆序数：排列中逆序的总数称为该排列的逆序数，记作$\tau(a_1\cdots a_n)$。

定义 偶排列：逆序数为偶的排列。

定义 奇排列：逆序数为奇的排列。

定义 对换：由排列$a_1\cdots a_i\cdots a_j\cdots a_n$交换$a_1$与$a_j$未知得到排列$a_1\cdots a_j\cdots a_i\cdots a_n$的变换称为对换。

- 对换具有可逆性。
- 对换该边排列的奇偶性。
- n阶排列共$n!$个，其中奇排列和偶数排列各$\frac{1}{2}n!$个。
- 任意n阶排列都可以经过有限次对换得到自然排列$1\cdots n$，且对换次数与该排列保持相同的奇偶性。

2.行列式及性质

定义 n阶行列式：

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} && (71)\\
&=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n} && (72)\\
&=\sum_{i_1\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}a_{i_11}\cdots a_{i_nn} && (73)\\
&=\sum_{\substack{i_1\cdots i_n\\ j_1\cdots j_n}}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_n)}a_{i_1j_1}\cdots a_{i_nj_n} && (74)
\end{aligned}$$

性质

- 行列互换，行列式不变，即$|A|=|A^T|$。
- 对换行列式中的两行，行列式反号。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{75}$$

- 和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_1 & \cdots & c_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{76}$$

- 数乘

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{77}$$

- 把一行的倍数加至另一行，行列式不变。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{78}$$

- 如果存在相同的两行，那么行列式为零。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{79}$$

- 如果存在成比例的两行，那么行列式为零。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ ka_1 & \cdots & ka_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{80}$$

特殊矩阵的行列式

- 上三角矩阵：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\cdots a_{nn} \tag{81}$$

- 下三角矩阵：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}\cdots a_{n1} \tag{82}$$

- 反称矩阵行列式为零，即如果$A+A^T=0$，那么$|A|=0$。
- ab行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1} \tag{83}$$

- Vandermonde行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j) \tag{84}$$

- 分块行列式：

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B| \tag{85}$$

3.行列式按一行（列）展开

定义 余子式：定义行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{86}$$

中元素a_{ij}的余子式为

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,ij-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{87}$$

定义 代数余子式：行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{88}$$

中元素a_{ij}的代数余子式为

$$(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,ij-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{89}$$

记作A_{ij}，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} \tag{90}$$

定理 行列式按行（列）展开：

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} && (91) \\ =&a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in} && (92) \\ =&a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} && (93) \end{aligned}$$

定理：对于行列式

$$d = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{94}$$

成立

$$\begin{aligned} a_{k1}A_{i1} + \cdots + a_{kn}A_{in} = \begin{cases} d, & k = i \\ 0, & k \neq i \end{cases} \\ a_{1k}A_{1j} + \cdots + a_{nk}A_{nj} = \begin{cases} d, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \end{aligned} \tag{95}$$

4.Cramer法则与Laplace展开

定理 Cramer法则：对于齐次方程

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{96}$$

如果其系数行列式

$$d=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{97}$$

那么线性方程存在且存在唯一解

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{d_1}{d}\\ \vdots\\ \frac{d_n}{d}\end{pmatrix} \tag{98}$$

其中

$$d_k=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,k-1}&b_1&a_{1,k+1}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{n,k-1}&b_n&a_{n,k+1}&\cdots&a_{mn}\end{vmatrix},\quad k=1,\cdots,n \tag{99}$$

定义 k阶子式：对于n阶矩阵(a_{ij})，任意选取k行$i_1,\cdots,i_k$和k列$j_1,\cdots,j_k$，那么称行列式

$$M\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{i_1,j_1}&\cdots&a_{i_1,j_k}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{i_k,j_1}&\cdots&a_{i_k,j_k}\end{vmatrix} \tag{100}$$

为原行列式的k阶子式，其中

$$i_1<\cdots<i_k,\quad j_1<\cdots<j_k \tag{101}$$

定义 k阶余子式：对于n阶矩阵(a_{ij})，称行列式

$$M'\begin{pmatrix}i'_1,\cdots,i'_{n-k}\\ j'_1,\cdots,j'_{n-k}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}a_{i'_1,j'_1}&\cdots&a_{i'_1,j'_{n-k}}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{i'_{n-k},j'_1}&\cdots&a_{i'_{n-k},j'_{n-k}}\end{vmatrix} \tag{102}$$

为k阶子式$M\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}$的余子式，其中$1\le k\le n-1$，同时

$$i'_1<\cdots<i_{n-k},\quad j'_1<\cdots<j_{n-k} \tag{103}$$

且

$$\begin{aligned}\{i_1,\cdots,i_k\}\cup\{i'_1,\cdots,i_{n-k}\}=\{1,\cdots,n\}\\ \{j_1,\cdots,j_k\}\cup\{j'_1,\cdots,j_{n-k}\}=\{1,\cdots,n\}\end{aligned} \tag{104}$$

定义 k阶代数余子式：对于n阶矩阵(a_{ij})的k阶子式$M\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}$，其余子式为$M'\begin{pmatrix}i'_1,\cdots,i'_{n-k}\\ j'_1,\cdots,j'_{n-k}\end{pmatrix}$，称

$$A\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}=(-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)}M'\begin{pmatrix}i'_1,\cdots,i'_{n-k}\\ j'_1,\cdots,j'_{n-k}\end{pmatrix} \tag{105}$$

定理 Laplace展开：对于n阶矩阵(a_{ij})，其行列式为D，任意按次序选定k行$i_1,\cdots,i_k$，那么成立

$$D=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}M\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix} \tag{106}$$

第三章：线性方程组

1.向量空间

定义 向量：称矩阵

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{107}$$

为数域$\mathbb{P}$上的向量，其中

$$x_k \in \mathbb{P}, \quad k = 1, \cdots n \tag{108}$$

定义 向量的相等：对于数域$\mathbb{P}$上的向量

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{109}$$

称向量α与β相等，当且仅当

$$m = n \tag{110}$$

同时

$$a_k = b_k, \quad k = 1, \cdots, n \tag{111}$$

记为

$$\alpha = \beta \tag{112}$$

- 相等为等价关系，具有反身性、对称性和传递性。

定义 向量的加法：对于数域$\mathbb{P}$上的两个向量

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{113}$$

可做加法，当且仅当

$$m = n \tag{114}$$

称向量

$$\gamma = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} \tag{115}$$

为向量α和β的和，记作

$$\gamma = \alpha + \beta \tag{116}$$

- 加法单位元：对于任意向量α，存在加法单位元0满足

$$\alpha + 0 = \alpha \tag{117}$$

- 加法逆元：对于任意向量α，存在且存在唯一向量$-\alpha$满足

$$\alpha+(-\alpha)=0 \tag{118}$$

- 交换律：

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha \tag{119}$$

- 结合律：

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma \tag{120}$$

定义 向量的数乘：对于数域$\mathbb{P}$上的向量

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} \tag{121}$$

及$k\in\mathbb{P}$，称向量

$$\begin{pmatrix}ka_1\\ \vdots\\ ka_n\end{pmatrix} \tag{122}$$

为向量α与数k的数量乘积，记作

$$k\alpha=\begin{pmatrix}ka_1\\ \vdots\\ ka_n\end{pmatrix} \tag{123}$$

- 乘法单位元：对于任意向量α，存在数1满足

$$1\alpha=\alpha \tag{124}$$

- 结合律：

$$k(l\alpha)=(kl)\alpha \tag{125}$$

- 分配律：

$$\begin{aligned}k(\alpha+\beta)&=k\alpha+k\beta\\ (k+l)\alpha&=k\alpha+l\beta\end{aligned} \tag{126}$$

定义 向量空间：数域$\mathbb{P}$上的向量空间为三元关系$(\Omega,+,\times)$，其中Ω为数域$\mathbb{P}$上的向量构成的集合，$+$为向量加法，$\times$为向量的数乘。

2.线性相关性

定义 线性组合：称向量α为向量组$\beta_1,\cdots,\beta_n$的线性组合，如果存在$k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{P}$使得成立

$$\alpha=k_1\beta_1+\cdots+k_n\beta_n \tag{127}$$

定义 向量组的等价：称两向量组等价，如果其可以相互线性表出。

- 等价性具有自反性、对称性和传递性。

定义 线性相关：称向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性相关，当且仅当存在不全为零的$k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{P}$使得成立

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0 \tag{128}$$

定理：对于两向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$和$\beta_1,\cdots,\beta_n$，如果向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$可由$\beta_1,\cdots,\beta_n$线性表出，且$m>n$，那么向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性相关。

定义 极大无关组：称向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$的部分$\alpha_{n_1},\cdots,\alpha_{n_r}$为极大无关组，如果向量$\alpha_{n_1},\cdots,\alpha_{n_r}$线性无关，且对于任意$k=1,\cdots,n$，向量$\alpha_k$可由$\alpha_{n_1},\cdots,\alpha_{n_r}$线性表出。

定义 秩：向量组的极大无关组的向量含有相同的个数，称为该向量组的秩。

3.矩阵的秩

定义 矩阵的秩：$\text{rank}(A)=r$

- 矩阵的行向量组的秩。
- 矩阵的列向量组的秩。
- 对于$m\times n$矩阵A，如果存在r阶子式不为零，且当$r<\min(m,n)$时，任意$r+1$阶子式均为0，从而称矩阵A的秩为r。
- 矩阵在行初等变换下的行阶梯形矩阵的非零行的个数。
- 矩阵在列初等变换下的列阶梯形矩阵的非零列的个数。
- 特别的，零矩阵的秩为0。

矩阵的秩的性质

- 对于$m\times n$矩阵A，$0\le\text{rank}(A)\le\min(m,n)$。
- 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩。
- 对于n阶矩阵A

$$\text{rank}(A)=n\Leftrightarrow\det(A)\neq0 \tag{129}$$

4.线性方程组

定义 矩阵的初等变换

- 交换两行（列）的位置。
- 把一行（列）加至另一行（列）。
- 以非零的数乘某一行（列）。

定义 Gauss消元法：以初等行变换将系数矩阵化为最简行阶梯矩阵。

定理 非齐次线性方程组解的判定与结构：对于线性方程组

$$Ax=\beta \tag{130}$$

其中A为$m\times n$矩阵。记$\text{rank}(A)=r$，$\text{rank}(A,\beta)=\bar{r}$。

秩	最简方程	可解性	主变元	自由变元
$r=\bar{r}=n$	$\begin{pmatrix}I_r\\0\end{pmatrix}x=\begin{pmatrix}\beta_r\\0\end{pmatrix}$	唯一解	r	$n-r=0$
$r=\bar{r}<n$	$\begin{pmatrix}I_r&F\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_r\\x_f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_r\\0\end{pmatrix}$	无穷多解	r	$n-r$
$r<\bar{r}$	$\begin{pmatrix}I_r&F\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_r\\x_f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_r\\I_{m-r}\end{pmatrix}$	无解		

1. $r = \bar{r} = n$：解唯一，$x = \beta_r$。
2. $r = \bar{r} = n$：特解为

$$x_p = \begin{pmatrix} \beta_r \\ 0 \end{pmatrix} \tag{131}$$

基础解系为矩阵

$$\begin{pmatrix} -F \\ I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 & \cdots & \eta_{n-r} \end{pmatrix} \tag{132}$$

的列向量$\eta_1, \cdots, \eta_{n-r}$，因此方程的解为

$$x = x_p + k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} \tag{133}$$

定理 齐次线性方程组解的判定与结构：对于线性方程组

$$Ax = 0 \tag{134}$$

其中A为$m \times n$矩阵。记$\mathrm{rank}(A) = r$。

秩	最简方程	可解性	主变元	自由变元
$r = n$	$\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} x = 0$	零解	r	$n - r = 0$
$r < n$	$\begin{pmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ x_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_r \\ 0 \end{pmatrix}$	无穷多解	r	$n - r$

1. 解唯一，$x = 0$。
2. 基础解系为矩阵

$$\begin{pmatrix} -F \\ I_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_1 & \cdots & \eta_{n-r} \end{pmatrix} \tag{135}$$

的列向量$\eta_1, \cdots, \eta_{n-r}$，因此方程的解为

$$x = k_1\eta_1 + \cdots + k_{n-r}\eta_{n-r} \tag{136}$$

第四章：矩阵

1.矩阵运算

定义 特殊矩阵

- 零矩阵：

$$O_{m\times n}=\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0\end{pmatrix}\tag{137}$$

- 单位矩阵：

$$I_n=\begin{pmatrix}1&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&1\end{pmatrix}\tag{138}$$

定义 加法：对于矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\b_{m1}&\cdots&b_{mn}\end{pmatrix}\tag{139}$$

称矩阵

$$C=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&\cdots&a_{1n}+b_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}+b_{m1}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}\tag{140}$$

为A与B的和，记作

$$C=A+B\tag{141}$$

定义 数乘：对于数$k\in\mathbb{P}$和矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\tag{142}$$

称矩阵

$$B=\begin{pmatrix}ka_{11}&\cdots&ka_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\ka_{m1}&\cdots&ka_{mn}\end{pmatrix}\tag{143}$$

为k与A的数乘，记作

$$B=kA\tag{144}$$

定义 乘法：对于矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{ms}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{s1} & \cdots & b_{sn}\end{pmatrix} \tag{145}$$

称矩阵

$$C=\begin{pmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ c_{m1} & \cdots & c_{mn}\end{pmatrix} \tag{146}$$

为A与B的乘积，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj} \tag{147}$$

记作

$$C=AB \tag{148}$$

定义 转置：对于矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \tag{149}$$

称其转置为

$$A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{m1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \tag{150}$$

- $A+(B+C)=(A+B)+C$
- $A+B=B+A$
- $A(BC)=(AB)C$
- $A(B+C)=AB+AC$
- $(A+B)C=AC+BC$
- $(A^T)^T=A$
- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(AB)^T=B^TA^T$

2.行列式和秩

定理：对于n阶矩阵A和B，成立

$$|AB|=|A||B| \tag{151}$$

定理：对于矩阵A，成立

$$\mathrm{rank}(A^TA)=\mathrm{rank}(A) \tag{152}$$

定理 矩阵和的秩：对于矩阵A和B，成立

$$\mathrm{rank}(A+B)\le\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B) \tag{153}$$

定理 矩阵积的秩：对于矩阵$A_{m\times s}$和$B_{s\times n}$，成立

$$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)-s\le\operatorname{rank}(AB)\le\min(\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)) \tag{154}$$

定理：对于矩阵A，如果P和Q均为非退化方阵，那么

$$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}PA=\operatorname{rank}AQ \tag{155}$$

3.矩阵的逆

定义 可逆：称n阶矩阵A为可逆的，当且仅当存在n阶矩阵B使得成立

$$AB=BA=I_n \tag{156}$$

记作

$$B=A^{-1} \tag{157}$$

定理 可逆的充要条件：矩阵A为可逆的，当且仅当A为非退化的，即

$$|A|\ne 0 \tag{158}$$

定理 矩阵的逆的计算：对于n阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix} \tag{159}$$

称矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{n1}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ A_{1n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix} \tag{160}$$

为矩阵A的伴随矩阵，其中

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,ij-1}&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{i-1,1}&\cdots&a_{i-1,j-1}&a_{i-1,j+1}&\cdots&a_{i-1,n}\\ a_{i+1,1}&\cdots&a_{i+1,j-1}&a_{i+1,j+1}&\cdots&a_{i+1,n}\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix} \tag{161}$$

为矩阵A中元素a_{ij}的代数余子式，那么矩阵A的逆为

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^* \tag{162}$$

- $|A||A^{-1}|=1$
- $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$

4.矩阵的分块

定义 分块矩阵：对于$m\times n$矩阵A，可将其进行分块

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{r1} & \cdots & A_{rs}\end{pmatrix} \tag{163}$$

其中A_{ij}为$m_i\times n_j$矩阵，满足

$$m_1+\cdots+m_r=m \tag{164}$$
$$n_1+\cdots+n_s=n \tag{165}$$

定义 分块矩阵的乘法：对于矩阵A和B，将其进行分块

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1s}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{m1} & \cdots & A_{ms}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ B_{s1} & \cdots & B_{sn}\end{pmatrix} \tag{166}$$

其中A_{ij}为$m_i\times s_j$矩阵，B_{ij}为$s_i\times n_j$矩阵，那么其积为

$$C=AB=\begin{pmatrix}C_{11} & \cdots & C_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ C_{m1} & \cdots & C_{mn}\end{pmatrix} \tag{167}$$

其中

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{s}A_{ik}B_{kj} \tag{168}$$

定理：对于m阶矩阵A，n阶矩阵B和$n\times n$矩阵C，如果A和B均非退化，那么成立

$$\begin{pmatrix}A & O\\ C & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A^{-1} & O\\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1}\end{pmatrix} \tag{169}$$

6.初等矩阵

定义 初等行矩阵：

- 交换i行和j行：

$$P(i,j=j,i)=\begin{pmatrix}1 &&&&&&&&&&\\ & \ddots &&&&&&&&&\\ && 1 &&&&&&&&\\ &&& 0 && \cdots && 1 &&&\\ &&&& 1 &&&&&&\\ &&& \vdots && \ddots && \vdots &&&\\ &&&&&& 1 &&&&\\ &&& 1 && \cdots && 0 &&&\\ &&&&&&&& 1 &&\\ &&&&&&&&& \ddots &\\ &&&&&&&&&& 1\end{pmatrix} \tag{170}$$

- 将第j行加至第i行：

$$
P(i=i+j)=\begin{pmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 & \cdots & 1 && \\
&&& \ddots & \vdots && \\
&&&& 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix} \tag{171}
$$

- 以数$k \neq 0$乘第i行:

$$
P(i=ki)=\begin{pmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&& \\
&&& k &&& \\
&&&& 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix} \tag{172}
$$

定义 初等列矩阵:

- 交换i列和j列:

$$
Q(i,j=j,i)=\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 && \cdots && 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 && \cdots && 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix} \tag{173}
$$

- 将第j列加至第i列:

$$
Q(i=i+j)=\begin{pmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&& \\
&& \vdots & \ddots &&& \\
&& 1 & \cdots & 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix} \tag{174}
$$

- 以数k乘第i列:

$$Q(i=ki)=\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix} \tag{175}$$

定理 初等矩阵的逆：

- 初等行矩阵的逆

$$P(i,j=j,i)P(i,j=j,i)=I \tag{176}$$
$$P(i=i+j)P(i=i-j)=I \tag{177}$$
$$P(i=ki)P(i=\frac{1}{k}i)=I \tag{178}$$

- 初等列矩阵的逆

$$Q(i,j=j,i)Q(i,j=j,i)=I \tag{179}$$
$$Q(i=i+j)Q(i=i-j)=I \tag{180}$$
$$Q(i=ki)Q(i=\frac{1}{k}i)=I \tag{181}$$

定理：矩阵的初等行变换等价于左乘初等行矩阵，矩阵的初等列变换等价于右乘初等列矩阵。

定义 等价矩阵：称矩阵A和B为等价的，当且仅当存在非退化矩阵P和Q，使得成立

$$B=PAQ \tag{182}$$

定理：任意矩阵A都与矩阵

$$\begin{pmatrix}I_r & O \\ O & O\end{pmatrix} \tag{183}$$

等价，其中$r=\mathrm{rank}(A)$。

定理：以下说法等价

- 矩阵A可逆（非退化）。
- $|A|\neq 0$
- 存在非退化矩阵P，使得成立

$$PA=I \tag{184}$$

- 存在非退化矩阵Q，使得成立

$$AQ=I \tag{185}$$

- 存在初等行变换矩阵$P_1,\cdots,P_n$，使得成立

$$P_1\cdots P_nA=I \tag{186}$$

- 存在初等行变换矩阵$P_1,\cdots,P_n$，使得成立

$$A=P_1\cdots P_n \tag{187}$$

- 存在初等列变换矩阵$Q_1, \cdots, Q_n$，使得成立

$$AQ_1 \cdots Q_n = I \tag{188}$$

- 存在初等列变换矩阵$Q_1, \cdots, Q_n$，使得成立

$$A = Q_1 \cdots Q_n \tag{189}$$

第五章：二次型

1.二次型及其矩阵表示

定义 二次型：对于文字$x_1,\cdots,x_n$，称系数在数域$\mathbb{P}$中的表达式

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{190}$$

为二次型，其中A为对称矩阵。简写为

$$X^TAX \tag{191}$$

定义 线性替换：对于两组文字$x_1,\cdots,x_n$和$y_1,\cdots,y_n$，系数在数域$\mathbb{P}$中的一组关系式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{192}$$

称为由$x_1,\cdots,x_n$到$y_1,\cdots,y_n$的一个线性替换。简写为

$$X = CY \tag{193}$$

称线性替换为非退化的，如果$|C| \neq 0$。

定义 合同矩阵：称数域$\mathbb{P}$上的n阶矩阵A和B是合同的，如果存在可逆n阶矩阵C，使得成立

$$B = C^TAC \tag{194}$$

合同是矩阵间的等价关系。

定理：经过非退化的线性替换，新二次型的矩阵与原二次型的矩阵是合同的。

2.标准形

定义 标准形：对于文字$x_1,\cdots,x_n$，称系数在数域$\mathbb{P}$中的表达式

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{195}$$

为标准型，简写为

$$X^TDX \tag{196}$$

定理：数域$\mathbb{P}$上任意一个二次型都可以经过非退化的线性替换变成标准形。

定理：数域$\mathbb{P}$上任意一个对称矩阵合同与一个对角矩阵。

定理：对称矩阵的性质

- n阶对称矩阵S存在n个实特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，并且非零特征值的个数为矩阵的秩$r$。
- n阶对称矩阵S存在一组标准正交的特征向量$q_1,\cdots,q_n$。
- n阶对称矩阵S可对角化为

$$S = Q\Lambda Q^T \tag{197}$$

其中

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{198}$$

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & \cdots & q_n \end{pmatrix} \tag{199}$$

那么

$$S = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k q_k q_k^T \tag{200}$$

3.唯一性

定义 复规范形：对于文字$x_1, \cdots, x_n$，称系数在数域$\mathbb{P}$中的表达式

$$x_1^2 + \cdots + x_r^2 \tag{201}$$

为标准型。

定义 实规范形：对于文字$x_1, \cdots, x_n$，称系数在数域$\mathbb{P}$中的表达式

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1} - \cdots - x_r^2 \tag{202}$$

为标准型。

定理 复惯性定理：任意一个复系数的二次型，经过一个适当的非退化线性替换可以变成复规范形，并且规范形是唯一的。

定理 实惯性定理：任意一个实系数的二次型，经过一个适当的非退化线性替换可以变成实规范形，并且规范形是唯一的。

定义 惯性系数：在实规范形中，正平方项的个数p称为正惯性指数；负平方项的个数$r-p$称为正惯性指数；其差$2p-r$称为符号差。

定理：任意复对称矩阵A合同与如下对角矩阵

$$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{203}$$

其中r为矩阵A的秩。

定理：任意实对称矩阵A合同与如下对角矩阵

$$\begin{pmatrix} I_p & O & O \\ O & -I_{r-p} & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \tag{204}$$

其中r为矩阵A的秩，p为正惯性指数，$r-p$为正惯性指数。

4.正定二次型

定义 正定二次型：称二次型X^TAX为正定的，如果对于任意非零向量C，成立

$$C^TAC > 0 \tag{205}$$

定义 正定矩阵：称实对称矩阵A为正定矩阵，如果对于任意非零向量X，成立

$$X^TAX > 0 \tag{206}$$

定义 半正定矩阵：称实对称矩阵A为正定矩阵，如果对于任意非零向量X，成立

$$X^TAX \geq 0 \tag{207}$$

定义 顺序主子式：对于矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{208}$$

称子式

$$H_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \tag{209}$$

为矩阵A的顺序主子式。

定义 主子式：对于矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{210}$$

称子式

$$P(i_1, \cdots, i_k) = \begin{vmatrix} a_{i_1,i_1} & \cdots & a_{i_1,i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k,i_1} & \cdots & a_{i_k,i_k} \end{vmatrix} \tag{211}$$

为矩阵A的主子式。

定理 正定矩阵的等价条件：对于实对称矩阵A，以下命题等价

- A为正定矩阵。
- A的任意顺序主子式为正。
- A的任意主子式为正。
- A的任意特征值为正。
- 存在列满秩实矩阵B，使得成立

$$A = B^TB \tag{212}$$

- 存在实可逆矩阵C，使得成立

$$A = C^TC \tag{213}$$

- 对于任意非零向量x，成立

$$x^TAx > 0 \tag{214}$$

定理 半正定矩阵的等价条件：对于实对称矩阵A，以下命题等价

- A为半正定矩阵。
- A的任意主子式非负。

- A的任意特征值非负。
- 存在实矩阵B，使得成立

$$A = B^T B \tag{215}$$

- 存在实可逆矩阵C，使得成立

$$A = C^T \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} C \tag{216}$$

- 对于任意非零向量x，成立

$$x^T A x \geq 0 \tag{217}$$

第六章：线性空间

1.集合与映射

2.线性空间的定义与简单性质

定义 线性空间：称四元组$(V,\mathbb{P},+,\times)$为线性空间，如果满足

- 加法交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$
- 加法结合律：$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$、
- 加法单位元：存在$0\in V$，使得对于任意$\alpha\in V$，成立$0+\alpha=\alpha$。
- 加法逆元：对于任意$\alpha\in V$，存在$-\alpha$，使得成立$\alpha+(-\alpha)=0$。
- 数乘单位元：存在$1\in\mathbb{P}$，使得对于任意$\alpha\in V$，成立$1\alpha=\alpha$。
- 数乘结合律：$k(l\alpha)=(kl)\alpha$
- 数乘左分配律：$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$
- 数乘右分配律：$k(\alpha+\beta)=k\alpha+l\alpha$

线性空间的性质：

- 加法单位元是唯一的。
- 加法逆元是唯一的。
- $$0\alpha=0,\quad k0=0,\quad (-1)\alpha=-\alpha \tag{218}$$
- 如果$k\alpha=0$，那么或$k=0$，或$\alpha=0$。

3.维数，基和坐标

定义 线性组合：对于数域$\mathbb{P}$上的线性空间V，称向量α为向量组$\beta_1,\cdots,\beta_n$的线性组合，如果存在$k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{P}$使得成立

$$\alpha=k_1\beta_1+\cdots+k_n\beta_n \tag{219}$$

定义 等价：对于数域$\mathbb{P}$上的线性空间V，称向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$和$\beta_1,\cdots,\beta_n$是等价的，如果其可以相互线性表出。

定义 线性相关：对于数域$\mathbb{P}$上的线性空间V，称向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性相关，如果存在不全为零的数$k_1,\cdots,k_n$，使得成立

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0 \tag{220}$$

定义 维数：对于数域$\mathbb{P}$上的线性空间V，如果存在n个线性无关的向量，并且对于任意$n+1$个向量，其都是线性相关的，那么称V的维数为n，记作

$$\dim(V)=n \tag{221}$$

定义 基：对于数域$\mathbb{P}$上的n维线性空间V，称$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$为基，如果$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$是线性无关的。

定义 坐标：对于数域$\mathbb{P}$上的n维线性空间V，记V的一组基为$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，那么对于任意$\alpha\in V$，成立

$$\alpha=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} \tag{222}$$

称$(a_1,\cdots,a_n)$为向量α的坐标。

定理：对于数域$\mathbb{P}$上的线性空间V，向量组$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$线性无关，并且$V$中的任意向量都可以由其线性表出，那么$\dim(V)=n$，并且$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$为基。

4.基变换与坐标变换

定义 过渡矩阵：对于数域$\mathbb{P}$上的n维线性空间V，称矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \tag{223}$$

为基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$到$\eta_1,\cdots,\eta_n$的过渡矩阵，如果

$$\begin{pmatrix}\eta_1 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \tag{224}$$

定理 坐标变换：对于数域$\mathbb{P}$上的n维线性空间V，矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \tag{225}$$

为基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$到$\eta_1,\cdots,\eta_n$的过渡矩阵，那么对于向量$\xi\in V$，如果

$$\xi=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\eta_1 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \tag{226}$$

那么

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \tag{227}$$

5.线性子空间

定义 线性子空间：对于数域$\mathbb{P}$上的线性空间V，称非空子集$W\subset V$为V的线性子空间，如果W对加法和数乘运算封闭。

定义 生成子空间：对于数域$\mathbb{P}$上的线性空间V，称$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$为向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$的生成子空间，其中

$$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\{k_1\alpha+\cdots+k_n\alpha_n:k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{P}\} \tag{228}$$

定理：对于数域$\mathbb{P}$上的有限维线性空间V，如果$W\subset V$为V的线性子空间，那么

$$\dim(W)\le\dim(V) \tag{229}$$

定理：对于数域$\mathbb{P}$上的线性空间V，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta_1,\cdots,\beta_m\in V$，那么$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=L(\beta_1,\cdots,\beta_m)$，当且仅当向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$和$\beta_1,\cdots,\beta_m$等价。

定理：

$$\dim(L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))=\operatorname{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n) \tag{230}$$

定理：对于数域$\mathbb{P}$上的n维线性空间V，如果$W\subset V$为V的m维线性子空间，且$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$为W的一组基，那么存在$\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n\in V$，使得$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$为$V$的一组基。

6.子空间的交与和

定义 集合的和：对于集合A和B，定义其和为

$$A+B=\{\alpha+\beta:(\alpha,\beta)\in A\times B\} \tag{231}$$

定理：对于数域$\mathbb{P}$上的线性空间V，如果$V_1,V_2\subset V$为V的线性子空间，那么$V_1\cap V_2$为V的线性子空间。

定理：对于数域$\mathbb{P}$上的线性空间V，如果$V_1,V_2\subset V$为V的线性子空间，那么V_1+V_2为V的线性子空间。

定理：对于数域$\mathbb{P}$上的线性空间V，且$V_1,V_2,W\subset V$为V的线性子空间。

- 如果$W\subset V_1$且$W\subset V_2$，那么$W\subset V_1\cap V_2$。
- 如果$V_1\subset W$且$V_1\subset W$，那么$W\subset V_1+V_2$。

定理：对于数域$\mathbb{P}$上的线性空间V，如果$V_1,V_2\subset V$为V的线性子空间，那么以下命题等价。

- $V_1\subset V_2$
- $V_1\cap V_2=V_2$
- $V_1+V_2=V_2$

定理 维数定理：对于数域$\mathbb{P}$上的线性空间V，如果$V_1,V_2\subset V$为V的线性子空间，那么

$$\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2) \tag{232}$$

推论：对于数域$\mathbb{P}$上的n维线性空间V，且$V_1,V_2\subset V$为V的线性子空间，如果$\dim(V_1)+dim(V_2)>0$，那么$V_1\cap V_2-\{0\}\neq\emptyset$。

定理 子空间的交：对于数域$\mathbb{P}$上的线性空间V，如果$\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_n\in V$，记

$$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \cdots & \alpha_m\end{pmatrix},\qquad \beta=\begin{pmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_n\end{pmatrix} \tag{233}$$

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix},\qquad y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \tag{234}$$

那么

$$L(\alpha)\cap L(\beta)=\left\{\alpha x:\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0\right\}=\left\{\beta y:\begin{pmatrix}\alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0\right\} \tag{235}$$

7.子空间的直和

定义 直和：对于数域$\mathbb{P}$上的线性空间V，$V_1,V_2\subset V$为V的线性子空间，称V_1+V_2为直和，如果对于任意$\alpha\in V_1+V_2$，存在且存在唯一$(\alpha_1,\alpha_2)\in V_1\times V_2$，使得成立$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$。直和记作

$$V_1\oplus V_2 \tag{236}$$

定理 直和的等价定义：对于数域$\mathbb{P}$上的线性空间V，如果$V_1, V_2 \subset V$为V的线性子空间，那么以下命题等价

- $V_1 + V_2$为直和。
- 对于任意$\alpha \in V_1 + V_2$，存在且存在唯一$(\alpha_1, \alpha_2) \in V_1 \times V_2$，使得成立$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$。
- 如果$(\alpha_1, \alpha_2) \in V_1 \times V_2$，且$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$，那么$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$。
- $V_1 \cap V_2 = \{0\}$
- $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$

定理：对于数域$\mathbb{P}$上的线性空间V，如果$W \subset V$为V的线性子空间，那么存在$U \subset V$为V的线性子空间，使得成立$V = W \oplus U$。

8.线性空间的同构

定义 同构：称数域$\mathbb{P}$上的线性空间V和W是同构的，如果存在双射$\sigma : V \to W$，使得对于任意$\alpha, \beta \in V$，$k \in \mathbb{P}$，成立

- $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$
- $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$

同构的性质：

- $\sigma(0) = 0$
- $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$线性相关，当且仅当$\sigma(\alpha_1), \cdots, \sigma(\alpha_n)$线性相关。
- 如果$U \subset V$为V的线性子空间，那么$\dim(U) = \dim(\sigma(U))$。

定理：数域$\mathbb{P}$上的线性空间V和W是同构的，当且仅当$\dim(V) = \dim(W)$。

第七章：线性变换

1.线性变换的定义

定义 线性变换：对于数域$\mathbb{P}$上的线性空间V，称变换$\mathscr{A}:V\to V$为线性变换，如果对于任意$\alpha,\beta\in V$和任意$k\in\mathbb{P}$，成立

$$\mathscr{A}(\alpha+\beta)=\mathscr{A}(\alpha)+\mathscr{A}(\beta) \tag{237}$$

$$\mathscr{A}(k\alpha)=k\mathscr{A}(\alpha) \tag{238}$$

线性空间V上的线性变换构成的集合记作$\mathcal{L}(V)$。

2.线性变换的运算

定义 加法：

$$(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\alpha)=\mathscr{A}(\alpha)+\mathscr{B}(\alpha) \tag{239}$$

定义 数乘：

$$(k\mathscr{A})(\alpha)=k\mathscr{A}(\alpha) \tag{240}$$

定义 乘法：

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})(\alpha)=\mathscr{A}(\mathscr{B}(\alpha)) \tag{241}$$

定义 逆：

$$\mathscr{A}\mathscr{A}^{-1}=\mathscr{A}^{-1}\mathscr{A}=\mathscr{E} \tag{242}$$

定理：

- $\mathcal{L}(V)$为线性空间。
- $\mathscr{A}\mathscr{B}\in\mathcal{L}(V)$
- $\mathscr{A}^{-1}\in\mathcal{L}(V)$

3.线性变换的矩阵

定理：对于数域$\mathbb{P}$上的n维线性空间V，如果$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$为一组基，那么对于任意$n$个向量$\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in V$，存在且存在唯一线性变换$\mathscr{A}$，使得对于任意$k=1,\cdots,n$，成立

$$\mathscr{A}(\varepsilon_k)=\alpha_k \tag{243}$$

定义 线性变换的矩阵：对于数域$\mathbb{P}$上的n维线性空间V，如果$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$为一组基，那么对于线性变换$\mathscr{A}$，称矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix} \tag{244}$$

为线性变换$\mathscr{A}$关于基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$的矩阵，如果成立

$$\mathscr{A}\begin{pmatrix}\varepsilon_1&\cdots&\varepsilon_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1&\cdots&\varepsilon_n\end{pmatrix}A \tag{245}$$

定理：对于数域$\mathbb{P}$上的n维线性空间V，如果$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$为一组基，那么

- 线性变换的和对应矩阵的和。

- 线性变换的数乘对应矩阵的数乘。
- 线性变换的乘积对应矩阵的乘积。
- 线性变换的逆对应矩阵的逆。
- $\mathcal{L}(V)$与$\mathbb{P}^{n\times n}$构成同构。

定理：对于数域$\mathbb{P}$上的n维线性空间V，如果$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$为一组基，那么对于线性变换$\mathscr{A}$，以及其关于基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$的矩阵$A$，如果向量$\xi\in V$关于基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$的坐标为$(x_1,\cdots,x_n)$，那么$\mathscr{A}\xi$的坐标$(y_1,\cdots,y_n)$为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{246}$$

定理：对于数域$\mathbb{P}$上的n维线性空间V，如果$\mathscr{A}$关于两组基

$$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n \tag{247}$$

$$\eta_1,\cdots,\eta_n \tag{248}$$

的矩阵分别为A和B，且从基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$到基$\eta_1,\cdots,\eta_n$的过渡矩阵为$X$，那么

$$B = X^{-1}AX \tag{249}$$

定义 相似矩阵：称数域$\mathbb{P}$上的n阶矩阵A和B是相似的，如果存在可逆n阶矩阵C，使得成立

$$B = C^{-1}AC \tag{250}$$

相似是矩阵间的等价关系。

定理：线性变换在不同基下所对应的矩阵是相似的；反之，如果两个矩阵是相似的，那么其可以看作是同一个线性变换在两组基下所对应的矩阵。

4.特征值与特征向量

定义 特征值与特征向量：对于数域$\mathbb{P}$上的线性空间V，称$\lambda\in\mathbb{P}$为$\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V)$的特征值，如果存在非零向量$\xi\in V$，使得成立

$$\mathscr{A}\xi = \lambda\xi \tag{251}$$

此时称ξ为$\mathscr{A}$关于特征值λ的特征向量。

定义 特征多项式：对于数域$\mathbb{P}$上的n阶矩阵A，称矩阵$\lambda I_n - A$的行列式为A的行列式，记作

$$f(\lambda) = |\lambda I_n - A| \tag{252}$$

定理：相似矩阵具有相同的特征多项式，因此线性变换的矩阵的特征多项式与基的选择无关。

定理 Hamilton-Cayley定理：对于数域$\mathbb{P}$上的n阶矩阵A，如果$f(\lambda)$为A的特征多项式，那么

$$f(A) = 0 \tag{253}$$

同样的，对于数域$\mathbb{P}$上的n维线性空间V，如果$f(\lambda)$维线性变换$\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V)$的特征多项式，那么

$$f(\mathscr{A}) = 0 \tag{254}$$

5.对角矩阵

定义 特征子空间：矩阵A的特征值λ所对应的特征子空间为其对应的特征向量所张成的空间，记作V_λ。

定理：多个特征值对应的特征向量组是线性无关的。

定理 矩阵对角化的充要条件：以下命题等价。

- 数域$\mathbb{P}$上的n阶矩阵A相似于对角矩阵。
- 矩阵A含有n个线性无关的特征向量。
- 矩阵A的特征子空间$V_{\lambda_1},\cdots,V_{\lambda_k}$的维度和为$n$。

定理 矩阵对角化的充分条件：如果数域$\mathbb{P}$上的n阶矩阵A含有n个特征根，那么A相似于对角矩阵。

6.线性变换的值域与核

定义 值域与核：对于$\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V)$，定义值域为

$$\mathscr{A}(V)=\{\mathscr{A}(\alpha):\alpha\in V\} \tag{255}$$

核为

$$\mathscr{A}^{-1}(0)=\{\alpha:\mathscr{A}(\alpha)=0\} \tag{256}$$

定义 秩和零度：定义$\mathscr{A}(V)$的维度为$\mathscr{A}$的秩，记作$\mathrm{rank}(\mathscr{A})$。定义$\mathscr{A}^{-1}(0)$的维度为$\mathscr{A}$的零度。

定理：对于数域$\mathbb{P}$上的n维线性空间V，$\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V)$，$A$为$\mathscr{A}$关于基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$的矩阵，那么

- `$$`
  `\mathscr{A}(V)=L(\mathscr{A}(\varepsilon_1),\cdots,\mathscr{A}(\varepsilon_n))`

$$-\$\$\,\mathrm{rank}(\mathscr{A})=\mathrm{rank}(A) \tag{257}$$

定理 维度公式：对于数域$\mathbb{P}$上的n维线性空间V，$\mathscr{A}(V)$的任一组基和$\mathscr{A}^{-1}(0)$合起来构成V的一组基，因此

$$\dim(\mathscr{A}(V))+\dim(\mathscr{A}^{-1}(0))=\dim(V) \tag{258}$$

定理：对于数域$\mathbb{P}$上的有限维线性空间V，$\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V)$是单射当且仅当其是满射。

7.不变子空间

定义 不变子空间：对于$\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V)$，$W\subset V$为子空间，称$W$为$\mathscr{A}$的不变子空间，简称$\mathscr{A}$-子空间，如果

$$\mathscr{A}(W)\subset W \tag{259}$$

特别的，定义

$$\mathscr{A}|W(\alpha)=\mathscr{A}(\alpha),\quad \alpha\in W \tag{260}$$

定理：对于数域$\mathbb{P}$上的有限维线性空间V，将V分解为

$$V=\bigoplus_{k=1}^{n}V_k \tag{261}$$

在每一个V_k中去一组基$\varepsilon_{i_1},\cdots,\varepsilon_{i_k}$，将该$n$组基构成$V$的一组基，那么$\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V)$关于该组基的矩阵为准对角矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix} \tag{262}$$

其中每一个A_k为$\mathscr{A}|V_k$关于基$\varepsilon_{i_1},\cdots,\varepsilon_{i_k}$的矩阵。

定理：对于$\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V)$，其特征多项式分解为

$$f(\lambda)=\prod_{k=1}^{n}(\lambda-\lambda_k)^{n_k} \tag{263}$$

那么V可分解为

$$V=\bigoplus_{k=1}^{n}V_k \tag{264}$$

其中

$$V_k=\{\xi\in V:(\mathscr{A}-\lambda_k\mathscr{E})^{n_k}=0\} \tag{265}$$

称V_k为$\mathscr{A}$关于特征根λ_k的根子空间，记为V^{λ_k}。

8.Jordan标准形介绍

定义 Jordan块：

$$J(\lambda,n)=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda\end{pmatrix}_{k\times n} \tag{266}$$

定义 Jordan标准形：

$$J=\begin{pmatrix}J(\lambda_1,n_1) & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & J(\lambda_k,n_k)\end{pmatrix} \tag{267}$$

定理：对于数域$\mathbb{C}$上的有限维线性空间V，$\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V)$，存在一组基使得$\mathscr{A}$的矩阵为Jordan标准形，且除Jordan块的排列顺序外，由$\mathscr{A}$唯一决定。

定理：数域$\mathbb{C}$上的矩阵A与一个Jordan标准形相似，且除Jordan块的排列顺序外，由A唯一决定。

9.最小多项式

定义 最小多项式：对于数域$\mathbb{P}$上的n阶矩阵A，称$f(x)$为A的最小多项式，如果$f(x)$是以A为根的多项式中次数最低的首一多项式。

定理：最小多项式唯一。

定理：如果$g(x)$为矩阵A的最小多项式，那么

$$g(A)=0\iff g(x)\mid f(x) \tag{268}$$

定理：对于准对角矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix} \tag{269}$$

如果$f_1(x)$为A_1的最小多项式，$f_2(x)$为A_2的最小多项式，那么A的最小多项式为$f_1(x)$和$f_2(x)$的最小公倍数$[f_1(x), f_2(x)]$。

定理：Jordan块$J(\lambda, n)$的最小多项式为$(x-\lambda)^n$。

定理：数域$\mathbb{P}$上的n阶矩阵A相似于对角矩阵，当且仅当A的最小多项式没有重根。

第九章：Euclid空间

1.定义与基本性质

定义 内积：对于实数域$\mathbb{R}$上的线性空间V，定义内积为满足如下性质的映射$(\cdot,\cdot):V\times V\to\mathbb{R}$。

- $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$
- $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$
- $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$
- $(\alpha,\alpha)\geq 0$，当且仅当$\alpha=0$时等号成立。

定义 Euclid空间：称具有内积的线性空间为Euclid空间，简称欧氏空间。

定义 长度：对于Euclid空间V中的内积$(\cdot,\cdot)$，定义向量$\alpha\in V$的长度为$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}$。

定义 夹角：非零向量α,β的夹角定义为

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}\in[0,\pi] \tag{270}$$

定义 正交或相互垂直：如果

$$(\alpha,\beta)=0 \tag{271}$$

那么称向量α,β是正交或相互垂直的，记作$\alpha\perp\beta$。

定理 Cauchy不等式：

$$|(\alpha,\beta)|\leq|\alpha||\beta| \tag{272}$$

当且仅当α,β线性相关时等号成立。

定理 三角不等式：

$$|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta| \tag{273}$$

定理 勾股定理：如果向量α,β正交，那么

$$|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2 \tag{274}$$

定义 度量矩阵：对于n维Euclid空间V，选取一组基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，那么对于$V$中任意两个向量

$$\alpha=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\qquad \beta=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \tag{275}$$

成立

$$(\alpha,\beta)=X^TAY \tag{276}$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & \cdots & (\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (\varepsilon_n,\varepsilon_1) & \cdots & (\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{pmatrix} \tag{277}$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\qquad Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \tag{278}$$

那么称矩阵A为基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$的度量矩阵。

- 度量矩阵为对称矩阵。
- 度量矩阵为正定矩阵。
- 度量矩阵唯一确定内积。
- 不同基的度量矩阵是合同的。

2.标准正交基

定义 正交向量组：对于欧氏空间V中的一组非零向量，如果其两两正交，那么称之为正交向量组。正交向量组显然是线性无关的。

定义 正交基：对于n维欧氏空间，由n个向量组成的正交向量组称为正交基。

定义 标准正交基：对于n维欧氏空间，由n个单位向量组成的正交向量组称为正交基，即称基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$为标准正交基，如果

$$(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{279}$$

定义 正交矩阵：称n阶实数矩阵A为正交矩阵，如果$A^TA=I_n$。

定理：标准正交基的度量矩阵为单位矩阵。

定理 标准正交基的存在性：由于度量矩阵为正定矩阵，所以一定存在标准正交基。

定理 标准正交基下的坐标：对于n维欧氏空间V中的标准正交基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，那么对于任意$\alpha\in V$，成立

$$\alpha=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\varepsilon_1,\alpha)\\ \vdots\\ (\varepsilon_n,\alpha)\end{pmatrix} \tag{280}$$

定理：n维欧氏空间V中任意正交向量组都能扩充成一组正交基，事实上，对于正交向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，由于$m<n$，所以存在$\beta\in V-L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$，令

$$\alpha_{m+1}=\beta-\sum_{k=1}^{m}\frac{(\beta,\alpha_k)}{(\alpha_k,\alpha_k)}\alpha_k \tag{281}$$

于是正交向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$扩充为正交向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_{m+1}$。

定理 Schmidt正交化过程：对于n维欧氏空间中的任意一组基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，都可以正交化为一组标准正交基$\eta_1,\cdots,\eta_n$，且对于任意$k=1,\cdots,n$，成立

$$L(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k)=L(\eta_1,\cdots,\eta_k) \tag{282}$$

- 取$\eta_1=\frac{1}{|\varepsilon_1|}\varepsilon_1$。
- 假设已经求出单位正交向量组$\eta_1,\cdots,\eta_m$，令

$$\eta_{m+1}=\frac{\varepsilon_{m+1}-\sum_{k=1}^{m}(\varepsilon_{m+1},\eta_k)\eta_k}{|\varepsilon_{m+1}-\sum_{k=1}^{m}(\varepsilon_{m+1},\eta_k)\eta_k|} \tag{283}$$

定理：两组标准正交基之间的过渡矩阵为正交矩阵。

3.同构

定义 同构：实数域$\mathbb{R}$上的欧氏空间V和W称为同构的，如果存在双射$\sigma : V \to W$，满足

- $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$
- $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$
- $(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=(\alpha,\beta)$
  此时称σ为从V到W的同构映射。

定理：两个有限维欧氏空间同构的充分必要条件为其维数相同。

4.正交变换

定义 正交变换：称欧氏空间V中的线性变换$\mathscr{A}$为正交变换，如果对于任意$\alpha,\beta\in V$，成立

$$(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\beta))=(\alpha,\beta) \tag{284}$$

定理 正交变换的等价命题：对于n维欧氏空间V中的线性变换$\mathscr{A}$，以下命题等价。

- 对于任意$\alpha,\beta\in V$，成立
$$(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\beta))=(\alpha,\beta) \tag{285}$$
- 对于任意$\alpha,\beta\in V$，成立
$$|\mathscr{A}(\alpha)-\mathscr{A}(\beta)|=|\alpha-\beta| \tag{286}$$
- 对于任意$\alpha\in V$，成立
$$|\mathscr{A}(\alpha)|=|\alpha| \tag{287}$$
- 对于任意标准正交基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，$\mathscr{A}(\varepsilon_1),\cdots,\mathscr{A}(\varepsilon_n)$也是标准正交基。
- $\mathscr{A}$在任意一组标准正交基下的矩阵为正交矩阵。

定理：对于欧氏空间V中的正交变换$\mathscr{A}$，W为$\mathscr{A}$-子空间，那么$W^\perp$也为$\mathscr{A}$-子空间。

5.子空间

定义 正交子空间：对于欧氏空间V的两个子空间U和W，称U和W是正交的，记作$U\perp W$，如果对于任意$\alpha\in U$和任意$\beta\in W$，成立

$$(\alpha,\beta)=0 \tag{288}$$

特别的，称α和W是正交的，记作$U\perp W$，如果对于任意$\beta\in W$，成立

$$(\alpha,\beta)=0 \tag{289}$$

定义 正交补：对于欧氏空间V的两个子空间U和W，称W是U的正交补，如果$U\perp W$且$V=U+W$，记作$W=U^\perp$。

定理：对于欧氏空间V的两个子空间U和W，如果U和W是正交的，那么$U+W$是直和。

定理：有限维欧氏空间的任意子空间都存在且存在唯一正交补。

6.实对称矩阵的标准形

定义 对称变换：称欧氏空间V中的线性变换$\mathscr{A}$为对称变换，如果对于任意$\alpha,\beta\in V$，成立

$$(\mathscr{A}(\alpha),\beta)=(\alpha,\mathscr{A}(\beta)) \tag{290}$$

定理：实对称矩阵的特征值为实数。

定理：对于n阶实对称矩阵，那么对于任意$\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$，成立

$$\alpha^T A\beta=\beta^T A\alpha \tag{291}$$

定理：对于欧氏空间V中的对称变换$\mathscr{A}$，W为$\mathscr{A}$-子空间，那么$W^\perp$也为$\mathscr{A}$-子空间。

定理：实对称矩阵不同特征值对应的特征向量正交。

定理：实对称矩阵可对角化。对于n阶实对称矩阵A，存在n个实特征根，n个标准正交特征向量$q_1,\cdots,q_n$，记

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{292}$$

$$Q=\begin{pmatrix}q_1 & \cdots & q_n\end{pmatrix} \tag{293}$$

因此

$$A=Q\Lambda Q^T \tag{294}$$

7.向量到子空间的距离与最小二乘法

定义 距离：称$|\alpha-\beta|$为向量α和β的距离，记作$d(\alpha,\beta)$。

- 自反性：$d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)$
- 非负性：$d(\alpha,\beta)\geq 0$，当且仅当$\alpha=\beta$时等号成立。
- $d(\alpha,\beta)\geq(\alpha,\gamma)+d(\beta,\gamma)$

定义 向量在子空间的投影：对于有限维欧氏空间V，$W\subset V$为V的子空间，W的一组基构成矩阵$A=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_r\end{pmatrix}$，那么向量$\alpha\in V$在子空间$W$的投影定义为$A(A^TA)^{-1}A^T\alpha$。

定义 向量到子空间的距离：对于有限维欧氏空间V，$W\subset V$为V的子空间，W的一组基构成矩阵$A=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_r\end{pmatrix}$，那么向量$\alpha\in V$到子空间$W$的距离定义为$|(I-A(A^TA)^{-1}A^T)\alpha|$。

定理：对于欧氏空间V，$W\subset V$为V的子空间，给定$\alpha\in V$，如果对于$\beta\in W$，成立$\alpha-\beta\perp W$，那么对于任意$\gamma\in W$，成立

$$|\alpha-\beta|\leq|\alpha-\gamma| \tag{295}$$

最小二乘法：对于线性方程组$Ax=b$，当$A^TAx=A^Tb$时，即$x=(A^TA)^{-1}A^Tb$时，距离$|b-Ax|^2$最小。