点集拓扑

致谢

感谢 **尤承业** 先生对于本课本的编写。

感谢 **李志国** 老师对于本课程的教授。

作者信息

作者：**若水**

邮箱：ethanmxzhou163@.com

日期：2023年11月

地址：天津市北辰区西平道5340号

目录

第一章：拓扑空间

1.1 拓扑空间

1.1.1 拓扑定义

拓扑：对于非空集合X，称子集族$\tau \subset \mathscr{P}(X)$为$X$的拓扑，如果满足如下性质。

1.$\varnothing, X \in \tau$
2.τ对于任意并运算封闭。
3.τ对于有限交运算封闭。

常见拓扑：

- 平凡拓扑：$\{\varnothing, X\}$
- 离散拓扑：$2^X = \mathscr{P}(X)$
- 余有限拓扑：对于无穷集合X，则称X上的余有限拓扑为

$$\tau_f = \{A : A^c \subset X\text{为有限子集}\} \cup \{\varnothing\} \tag{1}$$

- 余可数拓扑：对于不可数无穷集合X，则称X上的余可数拓扑为

$$\tau_c = \{A : A^c \subset X\text{为可数子集}\} \cup \{\varnothing\} \tag{2}$$

- 欧式拓扑：称$\mathbb{R}^n$上的欧式拓扑为

$$E^n = \{U \subset \mathbb{R}^n : U\text{为开方体的并}\} \tag{3}$$

- 度量拓扑：对于度量空间(X, d)，则称X上由d诱导的拓扑为

$$\tau_d = \{U : U\text{为若干球形邻域的并}\} \tag{4}$$

度量：称映射$d : X \times X \to [0, \infty]$为度量，如果满足正定性，对称性和三角不等式。

集合间的距离：定义度量空间中集合间的距离为

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} \tag{5}$$

球形邻域：对于度量空间(X, d)，定义$x \in X$以r为半径的球形邻域为

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\} \tag{6}$$

引理：度量空间中的任意两个球形邻域的交集是若干球形邻域的并集。

1.1.2 拓扑结构

开集：称非空集合X的子集族$\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(X)$中的元素为开集，如果满足如下开集公理。

1. $\varnothing, X \in \mathscr{G}$
2. 有限交封闭：如果$G_1, G_2 \in \mathscr{G}$，那么$G_1 \cap G_2 \in \mathscr{G}$。
3. 任意并封闭：如果$\{G_\lambda\} \subset \mathscr{G}$，那么$\bigcup G_\lambda \in \mathscr{G}$。

闭集：称非空集合X的子集族$\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$中的元素为闭集，如果满足如下闭集公理。

1. $\varnothing, X \in \mathscr{F}$
2. 有限交封闭：如果$F_1, F_2 \in \mathscr{F}$，那么$F_1 \cap F_2 \in \mathscr{F}$。
3. 任意并封闭：如果$\{F_\lambda\} \subset \mathscr{F}$，那么$\bigcup F_\lambda \in \mathscr{F}$。

开核：对于非空集合X，称算子$\mathcal{O}:\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(X)$为开核算子，$\mathcal{O}(E)$称为$E$的开核，如果满足如下开核公理。

1. 幂等性：$\mathcal{O}^2=\mathcal{O}$
2. 包含的单调性：如果$E\subset F$，那么$\mathcal{O}(E)\subset\mathcal{O}(F)$。
3. 交的分配律：如果$E\subset F$，那么$\mathcal{O}(E\cap F)=\mathcal{O}(E)\cap\mathcal{O}(F)$。

闭包：对于非空集合X，称算子$\mathcal{C}:\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(X)$为闭包算子，$\mathcal{C}(E)$称为$E$的闭包，如果满足如下闭包公理。

1. 幂等性：$\mathcal{C}^2=\mathcal{C}$
2. 包含的单调性：如果$E\subset F$，那么$\mathcal{C}(E)\subset\mathcal{C}(F)$。
3. 并的分配律：如果$E\subset F$，那么$\mathcal{C}(E\cup F)=\mathcal{C}(E)\cup\mathcal{C}(F)$。

邻域：对于非空集合X，称算子$\mathcal{U}:X\to\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$为邻域算子，$\mathcal{U}(x)$称为$x$的邻域系，$\mathcal{U}(x)$中的元素称为$x$的邻域，如果满足如下邻域公理。

1. 如果$U\in\mathcal{U}(x)$，那么$x\in U$。
2. 如果$U,V\in\mathcal{U}(x)$，那么$U\cap V\in\mathcal{U}(x)$。
3. 如果$U\in\mathcal{U}(x)$且$U\subset V$，那么$V\in\mathcal{U}(x)$。
4. 对于任意$U\in\mathcal{U}(x)$，存在$V\in\mathcal{U}(x)$，使得对于任意$v\in V$，成立$U\in\mathcal{U}(v)$。

1.1.3 拓扑概念

开集：称拓扑空间的元素为开集。

- $\varnothing,X$为开集。
- 任意开集的并为开集。
- 有限开集的交为开集。

闭集：称开集的补集为闭集。

- $\varnothing,X$为闭集。
- 任意闭集的交为闭集。
- 有限闭集的并为闭集。
- **分离定理**：在度量空间(X,d)中，如果闭集$E\cap F=\varnothing$，那么$d(E,F)>0$。

内点：对于拓扑空间X，称$x\in U$为$U\subset X$的内点，如果存在开集G，使得成立$x\in G\subset U$。

- x为U的内点 $\iff x\in U^\circ$

聚点：对于拓扑空间X，称$x\in A$为$A\subset X$的聚点，如果对于任意x的邻域U，成立$U\cap A\setminus\{x\}\neq\varnothing$。

- x为A的聚点 $\iff x\in A'$

接触点：对于拓扑空间X，称$x\in A$为$A\subset X$的聚点，如果对于任意x的邻域U，成立$U\cap A\neq\varnothing$。

- x为A的接触点 $\iff x\in\overline{A}$

邻域：对于拓扑空间X，称$U\subset X$为$x\in U$的邻域，如果存在开集G，使得成立$x\in G\subset U$。

- U为x的邻域 $\iff x\in U^\circ$

- U为A的邻域 $\iff A \subset U^\circ$

内部：对于拓扑空间X，$A \subset X$的所有内点的集合称为A的内部，记作A°。事实上，A°是包含于A的最大开集，即

$$A^\circ = \bigcup_{G \subset A\text{为开集}} G \tag{7}$$

- 如果$A \subset B$，那么$A^\circ \subset B^\circ$。
- $A^\circ = A \iff A$为开集。
- $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$
- $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$
  反例：$((-1,0] \cup [0,1))^\circ \supsetneq (-1,0]^\circ \cup [0,1)^\circ$

导集：对于拓扑空间X，$A \subset X$的所有聚点的集合称为A的导集，记作A'。

闭包：对于拓扑空间X，$A \subset X$的所有接触点的集合称为A的导集，记作$\overline{A}$。事实上，$\overline{A}$是包含A的最小闭集，即

$$\overline{A} = \bigcap_{F \supset A\text{为闭集}} F \tag{8}$$

- $x \in \overline{A} \iff$ 对于任意x的邻域U，成立$U \cap A \neq \varnothing$。
- $\overline{A} = A \cup A'$
- $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$
- 如果$A \subset B$，那么$\overline{A} \subset \overline{B}$。
- $\overline{A} = A \iff A$为闭集。
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$
  反例：$\overline{(-1,0) \cap (0,1)} \subsetneq \overline{(-1,0)} \cap \overline{(0,1)}$

稠密集：称$A \subset X$为拓扑空间X的稠密集，如果$\overline{A} = X$。

- $(\mathbb{R}, \tau_f)$的任意无穷子集是稠密的。
- $(\mathbb{R}, \tau_c)$的任意可数子集不是稠密的。

可分拓扑空间：称拓扑空间X为可分的，如果X存在可数的稠密子集。

- $(\mathbb{R}, \tau_f)$是可分的。
- $(\mathbb{R}, \tau_c)$不是可分的。

收敛：对于拓扑空间X，称序列$\{x_n\} \subset X$收敛于$x \in X$，记作$x_n \to x$。，如果对于x的任意邻域U，存在$N > 0$，使得对于任意$n > N$，成立$x_n \in U$。

- 极限不唯一：在$(\mathbb{R}, \tau_f)$中，对于两两互异序列$\{x_n\}$，以及任意$x \in \mathbb{R}$，由于x的任意邻域（有限集的补集）包含$\{x_n\}$的几乎所有项，于是$x_n \to x$。
- 聚点存在定理（聚点则存在收敛于其的序列）不成立：在$(\mathbb{R}, \tau_c)$中，由于$x_n \to x \implies$ 对于几乎所有x_n成立$x_n = x$，那么令A不可数，于是$\overline{A} = \mathbb{R}$（包含$A$的闭集且不可数的只有$\mathbb{R}$），取$x \notin A$，那么$x$为$A$的聚点，但是$A$中任意序列不可能收敛于$x$。

1.1.4 拓扑子空间

子空间：对于拓扑空间(X,τ)的非空子集$A\subset X$，称拓扑$\tau_A=\{U\cap A:U\in\tau\}$为由$\tau$诱导的$A$上的子空间拓扑，称$(A,\tau_A)$为$(X,\tau)$的子空间。

- 对于拓扑空间以及$B\subset A\subset X$，成立$(\tau_A)_B=\tau_B$
- 对于度量拓扑空间(X,τ_d)以及$A\subset X$，成立$\tau_{d_A}=\tau_{d|_A}$。
- 开集具有相对性，例如$(0,1)$是$(\mathbb{R},\tau_e)$上的开集，但不是$(\mathbb{R}^2,\tau_e)$上的开集。

开闭集的相对性：对于拓扑空间X以及$B\subset A\subset X$，那么如下命题成立。

- B为A的开/闭集 $\iff$ 存在X的开/闭集$C\subset X$，使得成立$B=A\cap C$。
- 如果B为X的开/闭集，那么B亦为A的开/闭集。
- 如果B为A的开/闭集，且A为X的开/闭集，那么B亦为X的开/闭集。

1.2 连续映射与同胚映射

1.2.1 连续映射

连续：对于拓扑空间X和Y，称映射$f:X\to Y$在$x\in X$处连续，如果对于$f(x)$中的任意邻域$V\subset Y$，$f^{-1}(V)\subset X$为x的邻域。

序列连续：对于拓扑空间X和Y，称映射$f:X\to Y$在$x\in X$处序列连续，如果对于任意序列$x_n\to x$，成立$f(x_n)\to f(x)$。

- 连续则序列连续。

连续映射：对于拓扑空间X和Y，称映射$f:X\to Y$为连续映射，如果满足如下条件之一。

1. 邻域的原像是邻域。
2. 开集的原像是开集。
3. 闭集的原像是闭集。

局部连续与全局连续：对于拓扑空间X和Y，以及映射$f:X\to Y$，定义f在$A\subset X$上的限制为$f|_A:A\to Y$，那么

- 如果f在x处连续，那么$f|_A$在x处连续。
- 如果A为x的邻域，且$f|_A$在x处连续，那么f在x处连续。

连续映射的运算：连续映射对于四则运算与复合运算封闭。

覆盖：称$\mathscr{C}\subset 2^X$为拓扑空间X的覆盖，如果满足$\bigcup\limits_{C\in\mathscr{C}}C=X$。

子集的覆盖：称$\mathscr{C}\subset 2^X$为拓扑空间X的子集$A\subset X$的在X中的覆盖，如果满足$A\subset\bigcup\limits_{C\in\mathscr{C}}C$。

粘接引理：对于拓扑空间X的有限闭覆盖$\{A_k\}_{k=1}^n$，如果每个映射$f|_{A_k}:X\to Y$均为连续映射，那么f为连续映射。

1.2.2 同胚映射

同胚映射：对于拓扑空间X和Y，称双射$f:X\to Y$为同胚映射，如果f和f^{-1}均为连续映射。

嵌入映射：对于拓扑空间X和Y，称连续映射$f:X\to Y$为嵌入映射，如果映射$f:X\to f(X)$为同胚映射。

同胚：称拓扑空间X和Y同胚，并记作$X \cong Y$，如果存在同胚映射$f: X \to Y$。

拓扑概念和拓扑性质：拓扑空间在同胚映射下保持不变的概念称为拓扑概念，在同胚映射下保持不变的性质称为拓扑性质。

$$D^n = \{x \in E^n : \|x\| \leq 1\}, \qquad S^n = \{x \in E^{n+1} : \|x\| = 1\} \tag{9}$$

例1：$(-1,1) \cong \mathbb{R}$

$$(-1,1) \to \mathbb{R} \tag{10}$$
$$x \mapsto \tan \frac{\pi}{2} x \tag{11}$$

例2：$E^n \cong D^n \setminus S^{n-1}$

$$E^n \to D^n \setminus S^{n-1} \tag{12}$$
$$x \mapsto \frac{x}{1 + \|x\|} \tag{13}$$

例3：$E^n \setminus \{O\} \cong E^n \setminus D^n$

$$E^n \setminus \{O\} \to E^n \setminus D^n \tag{14}$$
$$x \mapsto x + \frac{x}{\|x\|} \tag{15}$$

例4 Rimman面：$S^2 \setminus \{\mathcal{N}\} \cong E^2$

$$\mathcal{R} : S^2 \setminus \{N\} \to E^2 \tag{16}$$
$$(x,y,z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) \tag{17}$$

$$\mathcal{R}^{-1} : E^2 \to S^2 \setminus \{N\} \tag{18}$$
$$(x,y) \mapsto \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, 1 - \frac{2}{1+x^2+y^2}\right) \tag{19}$$

例5：凸多边形同胚于E^2。

1.3 乘积空间与拓扑基

生成子集族：对于集合X的子集族$\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$，定义由$\mathscr{B}$生成的子集族为

$$\overline{\mathscr{B}} = \{U \subset X : U\text{为}\mathscr{B}\text{中集合的并}\} \tag{20}$$
$$= \{U \subset X : \forall x \in U, \exists B \in \mathscr{B}, x \in B \subset U\} \tag{21}$$

投影：对于集合X和Y，定义其投影为

$$j_x : X \times Y \to X \tag{22}$$
$$(x,y) \to x \tag{23}$$

$$j_y : X \times Y \to Y \tag{24}$$
$$(x,y) \to y \tag{25}$$

1.3.1 乘积空间

乘积拓扑与乘积空间：对于拓扑空间(X,τ)和(Y,υ)，令$\mathscr{B} = \{U \times V : U \in \tau, V \in \upsilon\}$，称$\overline{\mathscr{B}}$为$X \times Y$上的乘积拓扑，$(X \times Y, \overline{\mathscr{B}})$为$(X,\tau)$和$(Y,\upsilon)$的乘积空间。

- $\overline{\mathscr{B}}$为$X \times Y$上的一个拓扑。
- 映射$f: X \to Y \times Z$连续$\iff$映射$j_y \circ f$和$j_z \circ f$连续。

1.3.2 拓扑基

集合的拓扑基：称集合X的子集族$\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$为集合$X$的拓扑基，如果满足如下性质之一。

1. $\overline{\mathscr{B}}$为X的一个拓扑。
2. $\bigcup\limits_{B \in \mathscr{B}} B = X$，且对于任意$B_1, B_2 \in \mathscr{B}$，成立$B_1 \cap B_2 \in \overline{\mathscr{B}}$。
3. $\bigcup\limits_{B \in \mathscr{B}} B = X$，且对于任意$B_1, B_2 \in \mathscr{B}$，以及任意$x \in B_1 \cap B_2$，存在$B \in \mathscr{B}$，使得成立$x \in B \subset B_1 \cap B_2$。

拓扑空间的拓扑基：称集合X的子集族$\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(X)$为拓扑空间$(X, \tau)$的拓扑基，如果满足如下性质之一。

1. $\overline{\mathscr{B}} = \tau$
2. $\mathscr{B} \subset \tau \subset \overline{\mathscr{B}}$

拓扑基的性质：如果$\mathscr{B}$为拓扑空间(X, τ)的拓扑基，那么成立如下命题。

- $U \subset X$为$x \in U$的邻域 $\Longleftrightarrow$ 存在$B \in \mathscr{B}$，使得成立$x \in B \subset U$。
- $x \in X$为子集$A \subset X$的聚点 $\Longleftrightarrow$ 对于任意$B \in \mathscr{B}$，如果$x \in B$，那么$A \cap B \setminus \{x\} \neq \varnothing$。
- $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow$ 对于任意$B \in \mathscr{B}$，如果$x \in B$，那么$A \cap B \neq \varnothing$。
- 映射$f : Y \to X$连续 $\Longleftrightarrow$ 对于任意$B \in \mathscr{B}$，$f^{-1}(B)$为Y的开集。

欧式空间的拓扑基：$\mathbb{R}$的拓扑基为

$$\mathscr{B} = \{[a, b) : a < b\} \quad \text{or} \quad \mathscr{B} = \{[a, b) : a < b, b \in \mathbb{Q}\} \quad \text{or} \quad \mathscr{B} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}\} \tag{26}$$

$\mathbb{R}^n$的拓扑基为

$$\mathscr{B} = \{B_r(x) : (x, r) \in \mathbb{Q}^{n+1}\} \tag{27}$$

第二章：拓扑性质

2.1 分离公理与可数公理

2.1.1 分离公理

T_0**公理**：称拓扑空间X满足T_0公理，如果对于任意点$x \neq y \in X$，存在开集$U \subset X$，使得成立$x \in U$且$y \notin U$，或$y \in U$且$x \notin U$。

- $T_0 + T_3 \implies T_2$

T_1**公理**：称拓扑空间X满足T_1公理，如果对于任意点$x \neq y \in X$，存在x的邻域$U \subset X$和y的邻域$V \subset Y$，使得成立$x \notin V$且$y \notin U$。

- $T_1 \iff$ 对于任意$x \in X$，集合$\{x\}$为闭集。
- 如果拓扑空间X满足T_1公理，$x \in X$为$A \subset X$的聚点，那么对于x的任意邻域$U \subset X$，$A \cap U$为无穷集。

T_2**公理**：称拓扑空间X满足T_2公理，如果对于任意点$x \neq y \in X$，存在x的邻域$U \subset X$和y的邻域$V \subset Y$，使得成立$U \cap V = \varnothing$。满足T_2公理的拓扑空间称为**Hausdorff空间**。

- $T_2 \implies T_1$
- $T_1 \not\Longrightarrow T_2$：$(\mathbb{R}, \tau_f)$
- 在Hausdorff空间中，收敛点列的极限存在且存在唯一。
- $T_2 \iff \Delta = \{(x, x) : x \in X\}$为$X \times X$的闭集。

T_3**公理**：称拓扑空间X满足T_3公理，如果对于任意满足$x \notin F$的点$x \in X$与闭集$F \subset X$，存在x的邻域$U \subset X$与F的邻域$V \subset X$，使得成立$U \cap V = \varnothing$。

- $T_1 + T_3 \implies T_2$
- $T_3 \iff$ 对于任意$x \in X$以及x的开邻域$U \subset X$，存在x的开邻域$V \subset X$，使得成立$\overline{V} \subset U$。

T_4**公理**：称拓扑空间X满足T_4公理，如果对于任意满足$E \cap F = \varnothing$的闭集$E, F \subset X$，存在E的邻域$U \subset X$与F的邻域$V \subset X$，使得成立$U \cap V = \varnothing$。

- $T_1 + T_4 \implies T_3$
  如果T_1不成立，那么不真。对于拓扑空间$\tau = \{(-\infty, a) : -\infty \leq a \leq \infty\}$，$\tau$满足$T_4$公理，但不满足$T_1, T_2, T_3$公理。
- 度量空间(X, d)满足T_1, T_2, T_3, T_4公理。
- $T_4 \iff$ 对于任意闭集$F \subset X$以及F的开邻域$U \subset X$，存在F的开邻域$V \subset X$，使得成立$\overline{V} \subset U$。
- T_4公理 $\iff$ Urysohn引理 $\iff$ Tietze扩张定理

2.1.2 可数公理

邻域系：对于拓扑空间X，定义$x \in X$的邻域系为$\mathscr{N}(x) = \{x\text{的邻域}\}$。

邻域基：对于拓扑空间X，称$\mathscr{U} \subset \mathscr{N}(x)$为$x \in X$的一个邻域基，如果对于任意$N \in \mathscr{N}(x)$，存在$U \in \mathscr{U}$，使得成立$U \subset N$。

- $\mathscr{N}(x)$为x的邻域基。

- $\{x$的开邻域$\}$为x的邻域基。
- 如果$\mathscr{B}$为拓扑基，那么$\mathscr{U}=\{B\in\mathscr{B}:x\in B\}$为$x$的邻域基。

C_1**公理**：称拓扑空间满足C_1公理，如果其中任意一点存在可数邻域基。

- 度量空间为C_1空间。
- **嵌套定理**：对于拓扑空间X，如果$x\in X$处存在可数邻域基，那么x存在可数邻域基$\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得成立$U_{n+1}\subset U_n$。
- **聚点定理**：如果拓扑空间X为C_1空间，且$x\in\overline{A}\subset X$，那么存在序列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A$，使得成立$x_n\to x$。
- **Heine定理/归结原理**：C_1空间中序列连续与连续等价，即对于C_1空间X以及映射$f:X\to Y$，对于任意序列$x_n\to x$，成立$f(x_n)\to f(x)$，当且仅当f在x处连续。

C_2**公理**：称拓扑空间满足C_2公理，如果其存在可数拓扑基。

- $C_2\implies C_1$：如果$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$为可数拓扑基，那么$\mathscr{U}=\{B_n:x\in B_n,n\in\mathbb{N}^*\}$为$x$的可数邻域基。
- $C_2\implies$可分：如果$\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$为可数拓扑基，那么$\{x_n:x_n\in B_n,n\in\mathbb{N}^*\}$为$X$的可数稠密子集。
- 可分度量空间$\implies C_2$：对于度量空间(X,d)以及其可数稠密子集A，其可数拓扑基为$\{B_{1/n}(x):x\in A,n\in\mathbb{N}^*\}$。
- **Lindelof定理**：$C_2+T_3\implies T_4$

2.1.3 遗传性与可乘性

遗传性：称拓扑性质P是遗传的，如果拓扑空间X成立P，那么其任意子空间$A\subset X$也成立P。

可乘性：称拓扑性质P是可乘的，如果拓扑空间X和Y成立P，那么其乘积空间$X\times Y$也成立P。

拓扑性质	遗传性	可乘性
可分性	✓	✗
T_1公理	✓	✓
T_2公理	✓	✓
T_3公理	✓	✓
T_4公理	✗	✗
C_1公理	✓	✓
C_2公理	✓	✓
紧致性		
列紧性		
连通性	✗	✓

2.2 Urysohn引理

Urysohn引理：如果拓扑空间X满足T_4公理，那么对于任意不交闭集$A, B \subset X$，存在连续映射$f: X \to E^1$，使得成立$f(A) = \{0\}$且$f(B) = \{1\}$。

Tietze扩张定理：如果拓扑空间X满足T_4公理，那么对于任意闭集$F \subset X$以及连续映射$f: F \to E^1$，存在连续映射$\tilde{f}: X \to E^1$，使得$\tilde{f}|_F = f$。

可度量化：称拓扑空间(X, τ)为可度量化的，如果满足如下命题之一。

- 存在度量$d: X \times X \to X$，使得成立$\tau_d = \tau$。
- 存在度量空间(Y, d)，以及嵌入映射$f: (X, \tau) \to (Y, d)$。

Urysohn度量化定理：如果拓扑空间满足T_1, T_4和C_2公理，那么其可嵌入Hilbert空间中。

2.3 紧致性

2.3.1 紧致空间

δ-网：对于度量空间(X, d)，称子集$A \subset X$为X的δ-网，如果对于任意$x \in X$，存在$a \in A$，使得成立$d(x, a) < \delta$，即$\bigcup\limits_{a \in A} B_\delta(a) = X$。

完全有界性：称度量空间为完全有界的，如果对于任意$\delta > 0$，存在有限δ-网。

Lebesgue数：对于列紧度量空间(X, d)，定义满足$X \notin \mathscr{U}$的X的开覆盖$\mathscr{U}$的Lebesgue数为

$$L_X(\mathscr{U}) = \inf_{x \in X} \sup_{U \in \mathscr{U}} \inf_{u \in U^c} d(x, u) \tag{28}$$

列紧性：称拓扑空间为列紧的，如果其任意序列存在收敛子序列。

- 度量空间：列紧性 $\Longrightarrow$ 完全有界性 $\Longrightarrow$ 有界性
- **最值定理**：定义在列紧空间X上的连续函数$f: X \to E^1$有界，且可取到最值。
- 对于列紧度量空间(X, d)的满足$X \notin \mathscr{U}$的X的开覆盖$\mathscr{U}$，成立$L_X(\mathscr{U}) > 0$，且对于任意$\delta \in (0, L_X(\mathscr{U}))$，以及任意$x \in X$，存在$U \in \mathscr{U}$，成立$B_\delta(x) \subset U$。

紧致性：称拓扑空间为紧致的，如果其任意开覆盖存在有限子覆盖。

- C_1+紧致性 $\Longrightarrow$ 列紧性
- 紧致$+T_2 \implies T_3 + T_4$
- 紧致×紧致=紧致
- 度量空间：紧致性 $\Longleftrightarrow$ 列紧性+闭性
- 欧式空间：紧致性 $\Longleftrightarrow$ 有界性+闭性
- 紧致空间在连续映射下的像是紧致空间。
- 紧致空间的闭子集是紧致子集。
- Hausdorff空间的紧致子集是闭子集。
- Hausdorff空间中$x \notin K$存在与紧致子集K不交的邻域。
- Hausdorff空间中不交紧致子集存在不交邻域。
- 紧致空间X上的连续函数$f: X \to E^1$有界，且可取到最值。
- 对于连续双射$f: X \to Y$，如果X紧致，Y为Hausdorff空间，那么f为同胚映射。

紧致子集：称拓扑空间的子集为紧致的，如果其作为子空间是紧致的。

- $A \subset X$为X的紧致子集 $\iff$ A在X中的任意开覆盖存在有限子覆盖。

2.3.2 局部紧致与仿紧

局部紧致空间：称拓扑空间X为局部紧致空间，如果任意$x \in X$存在紧致邻域。

- 局部紧致$+T_2 \implies T_3$
- 局部紧致$+T_2 + C_2 \implies$仿紧
- 任意$x \in X$的紧致邻域构成邻域基。
- 局部紧致空间的开子集是局部紧致子集。

局部有限覆盖：称拓扑空间X的覆盖$\mathscr{C}$是局部有限的，如果对于任意$x \in X$，存在x的邻域U，使得$\{U \cap C \neq \varnothing : C \in \mathscr{C}\}$有限。

加细覆盖：称拓扑空间X的覆盖$\mathscr{C}$是覆盖$\mathscr{C}_0$的加细覆盖，如果对于任意$C \in \mathscr{C}$，存在$C_0 \in \mathscr{C}_0$，使得成立$C \subset C_0$。

开加细覆盖：称拓扑空间X的覆盖$\mathscr{C}_0$的加细覆盖$\mathscr{C}$是开的，如果$\mathscr{C}$是开覆盖。

仿紧空间：称拓扑空间X为仿紧空间，如果X的开覆盖存在局部有限的开加细覆盖。

- 紧致 $\implies$ 仿紧
- 度量 $\implies$ 仿紧
- 仿紧$+T_2 \implies T_4$

2.4 连通性

连通空间：称拓扑空间X是连通的，如果满足如下命题之一。

1. X不能分解为非空不交开集的并。
2. X不能分解为非空不交闭集的并。
3. X的既开又闭的子集仅为$\varnothing$与X。

连通空间的性质：

- E^1, S^1为连通空间。
- 连通空间在连续映射下的像为连通空间。
- $C \subset E^1$连通 $\iff$ C为区间 $\iff$ $\forall a < b \in C$，成立$[a,b] \subset C$。
- **介值定理**：定义在连通空间X上的连续函数$f: X \to E^1$的像为区间。
- 如果$X_0 \subset X$为X的既开又闭子集，$C \subset X$为X的连通子集，那么或$C \subset X_0$，或$C \cap X_0 = \varnothing$。
- 存在稠密连通子集的拓扑空间为连通空间。
- 如果$C \subset X$为X的连通子集，且$C \subset Y \subset \overline{C}$，那么$Y \subset X$为$X$的连通子集。
- 如果X存在连通覆盖$\mathscr{C}$，以及连续子集$A \subset X$，使得对于任意$C \in \mathscr{C}$，成立$A \cap C \neq \varnothing$，那么$X$为连通空间。
- 连通性具有可乘性。

连通分支：称拓扑空间X的连通子集$C \subset X$为连通分支，如果对于任意X的连通子集$C' \subset X$，成立或$C' \subset C$，或$C \cap C' = \varnothing$。

- 连通分支为极大连通子集。

- 拓扑空间X的非空连通子集$C \subset X$包含于唯一一个连通分支 $\mathscr{C} = \{C' \subset X : C'\text{连通}, C \cap C' \neq \varnothing\}$内。
- 拓扑空间X的连通分支两两不交。
- 连通分支为闭集。
  $\mathbb{Q} \subset E^1$的连通分支为单点集，因而不为开集。

局部连通空间：称拓扑空间X是局部连通的，如果任意$x \in X$的连通邻域构成邻域基。

- 局部连通空间的连通分支为开集。
- 连通 $\not\Longrightarrow$ 局部连通：$\{(x, \sin(1/x)) : 0 < x < 1\} \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$

2.5 道路连通性

道路：定义拓扑空间X上的道路为连续映射$a : I \to X$，其中$a(0)$和$a(1)$分别称为a的起点和终点，统称为端点。

点道路：称道路$a : I \to \{x\}$为点道路，记作e_x。

闭路：称拓扑空间X上的道路$a : I \to X$为闭路，如果$a(0) = a(1)$。

道路的逆：定义拓扑空间X上的道路$a : I \to X$的逆$\overline{a} : I \to X$为$\overline{a}(t) = a(1-t)$。

道路的积：如果$a(1) = b(0)$，那么定义拓扑空间X上的道路$a : I \to X$和$b : I \to X$的积为

$$\begin{aligned} ab : & I \longrightarrow X \\ & t \longmapsto \begin{cases} a(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ b(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{29}$$

道路连通空间：称拓扑空间X是道路连通的，如果对于任意$x, y \in X$，存在道路$a : I \to X$，使得成立$a(0) = x$且$a(1) = y$。

- 道路连通 $\Longrightarrow$ 连通
- 连通 $\not\Longrightarrow$ 道路连通：$\{(x, \sin(1/x)) : 0 < x < 1\} \cup \{(0, y) : -1 \leq y \leq 1\}$
- 道路连通空间在连续映射下的像为道路连通空间。
- 道路连通性具有可乘性。

道路连通等价关系：定义拓扑空间X上的道路连通等价关系$x \sim y \iff$ 存在道路$a : I \to X$，使得成立$a(0) = x$且$a(1) = y$。

道路连通分支：定义拓扑空间X关于道路连通等价关系$\sim$的等价类为道路连通分支。

- 道路连通分支为极大道路连通子集。
- 道路连通分支为连通子集。

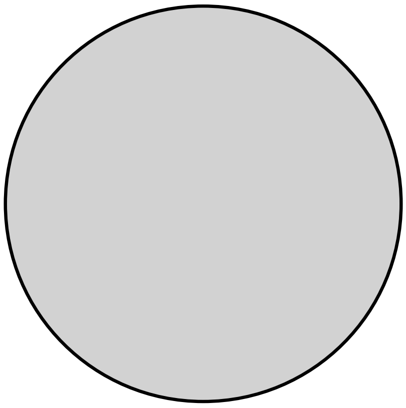
局部道路连通空间：称拓扑空间X是局部道路连通的，如果任意$x \in X$的道路连通邻域构成邻域基。

- 道路连通 $\not\Longrightarrow$ 局部道路连通：$\{(x, y) : x \in \mathbb{Q} \text{ or } y = 0\}$
- 局部道路连通空间的道路分支为既开又闭的连通分支。
- 连通$+$局部道路连通 $\Longrightarrow$ 道路连通

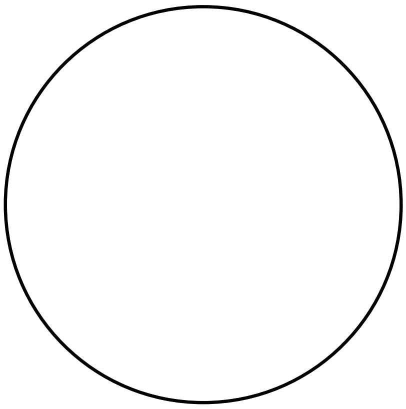
第三章：商空间

3.1 常见曲面

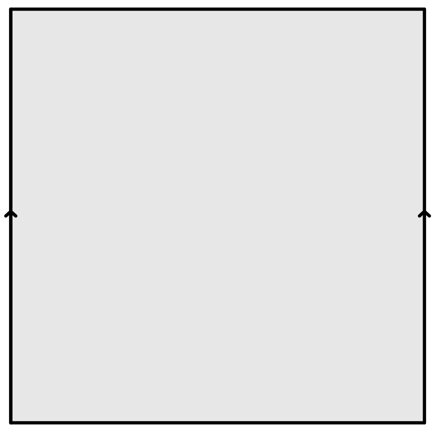
圆：D^2



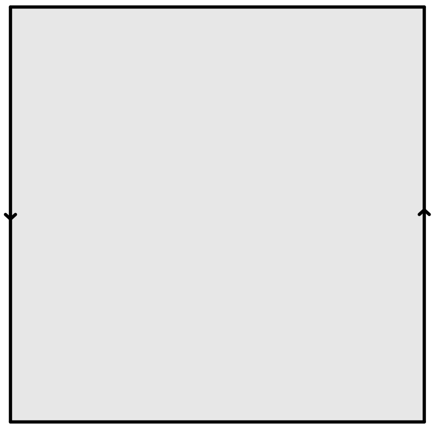
圆周：S^1



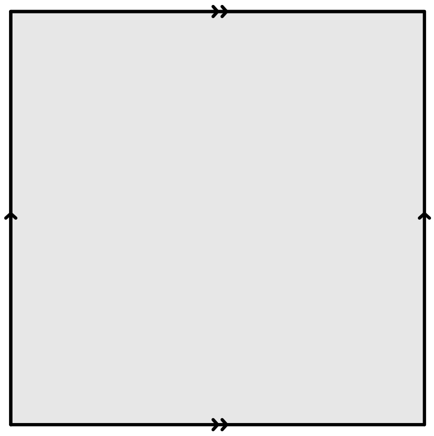
平环：



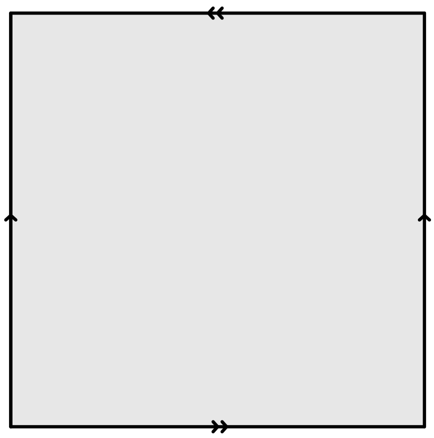
Möbius带：



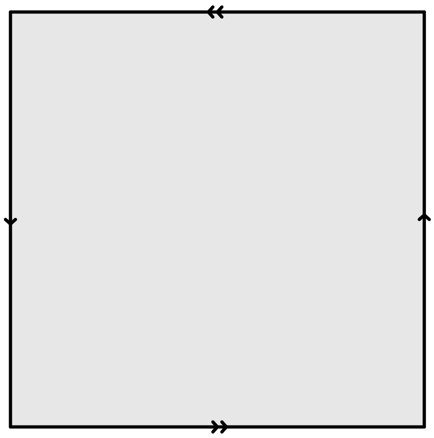
环面：T^2



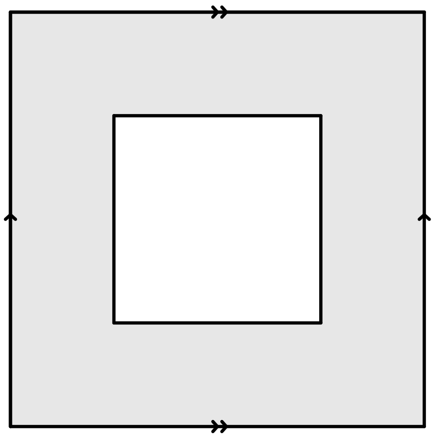
Klein瓶：$2P^2$



射影平面：P^2



环柄：



3.2 商空间与商映射

商集：定义集合X关于等价关系$\sim$的商集为$X/\sim$。特别的，定义集合X关于子集$A\subset X$的商集为$X/A=X/\overset{A}{\sim}$，其中$x_1\overset{A}{\sim}x_2\iff x_1=x_2\text{ or }x_1,x_2\in A$。

商拓扑：定义拓扑空间(X,τ)关于等价关系$\sim$的商拓扑为

$$\tilde{\tau}=\{V\subset X/\sim:\pi^{-1}(V)\in\tau\} \tag{30}$$

其中$\pi:X\to X/\sim$为自然映射。

商空间：定义拓扑空间(X,τ)关于等价关系$\sim$的商空间为$(X/\sim,\tilde{\tau})$。

商映射：对于拓扑空间X和Y，称满映射$f:X\to Y$为商映射，如果成立$B\subset Y$为Y的开集$\iff f^{-1}(B)\subset X$为X的开集。

- 自然映射$\pi:X\to X/\sim$为商映射。
- 对于拓扑空间X,Y,Z，如果$f:X\to Y$为商映射，那么映射$g:Y\to Z$连续$\iff$映射$g\circ f:X\to Z$连续。
- 如果$f:X\to Y$为商映射，那么$X/\overset{f}{\sim}\cong Y$，其中$x_1\overset{f}{\sim}x_2\iff f(x_1)=f(x_2)$。
- 连续且满的开映射为商映射；连续且满的闭映射为商映射。
- 如果X为紧致空间，Y为Hausdorff空间，那么连续满映射$f:X\to Y$为商映射。
- 商映射的复合为商映射。

例子：$D^2/S^1\cong S^2$

$$
\begin{aligned}
f : & D^2 \to S^2 && (31)\\
& x \mapsto \left(2\sqrt{|x|(1-x)}\cos\arg x, 2\sqrt{|x|(1-x)}\sin\arg x, 2|x|-1\right) && (32)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
& x_1 \overset{f}{\sim} x_1 && (33)\\
\iff & f(x_1) = f(x_2) && (34)\\
\iff & x_1 = x_2 \text{ or } |x_1| = |x_2| = 1 && (35)\\
\iff & x_1 = x_2 \text{ or } x_1, x_2 \in S_1 && (36)\\
\iff & x_1 \overset{S_1}{\sim} x_2 && (37)
\end{aligned}
$$

3.3 拓扑流形与闭曲面

3.3.1 拓扑流形

拓扑流形：称Hausdorff空间X为n维拓扑流形，如果对于任意$x \in X$，存在x的邻域U，使得成立或$U \cong E^n$，或$U \cong E_+^n$，其中$E_+^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in E^n : x_n \geq 0\}$。

- $E^n \ncong E_+^n$
- $E^m \cong E^n \iff m = n$
- 拓扑流形为局部道路连通且局部紧致的C_1空间。

内点：对于n维拓扑流形X，称$x \in X$为内点，如果存在x的开邻域U，使得成立$U \cong E^n$。

边界点：对于n维拓扑流形X，称$x \in X$为边界点，如果对于任意x的开邻域U，成立$U \ncong E^n$。

内部：称拓扑流形X的全体内点为X的内部，记作X°。

边界：称拓扑流形X的全体边界点为X的边界，记作∂X。

- n维拓扑流形的边界为无边界点的$n-1$维拓扑流形。

3.3.2 闭曲面

曲面：称二维流形为曲面。

- E^2, D^2, S^2, T^2, P^2以及平环、Möbius带、Klein瓶为曲面。

闭曲面：称无边界点的紧致连通曲面为闭曲面。

- S^2, T^2, P^2以及Klein瓶为闭曲面。
- E^2, D^2以及平环、Möbius带不为闭曲面。
- 如果Γ为偶数边多边形，那么成对粘接边，可得闭曲面。

安环柄的球面：称安n个环柄的球面为亏格为n的可定向闭曲面，记作nT^2。

安交叉帽的球面：称安n个Möbius带的球面为亏格为n的不可定向闭曲面，记作nP^2。

闭曲面的标准表示：

$$
\begin{aligned}
& nT^2 : a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} && (38)\\
& mP^2 : a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_m a_m && (39)
\end{aligned}
$$

闭曲面分类定理：$\{nT^2 : n \in \mathbb{N}\}$与$\{mP^2 : m \in \mathbb{N}^*\}$

- 闭曲面或为nT^2，或为mP^2。

- $\{nT^2 : n \in \mathbb{N}\} \cap \{mP^2 : m \in \mathbb{N}^*\} = \varnothing$
- $m = n \iff mT^2 = nT^2 = \iff mP^2 = nP^2$
- 如果闭曲面的多边形表示存在同向边时，该闭曲面为$(l/2 - k + 1)P^2$；否则为$((l/2 - k + 1)/2)T^2$。其中l为边数，k为顶点类数。

连通和：将两个闭曲面挖去一个圆，然后将洞口对接，所得闭曲面称为原来两个闭曲面的连通和，记作$M\#N$。

- $mT^2\#nT^2 = (m+n)T^2$
- $mP^2\#nP^2 = (m+n)P^2$
- $mT^2\#nP^2 = (2m+n)P^2$

第四章：基本群

4.1 同伦映射

同伦：对于拓扑空间X和Y，称连续映射$f,g:X\to Y$是同伦的，并记做$f\overset{H}{\simeq}g$，或$H:f\simeq g$，如果存在连续映射$H:X\times I\to Y$，使得对于任意$x\in X$，成立$H(x,0)=f(x)$，且$H(x,1)=g(x)$。

- **直线同伦**：对于拓扑空间X，以及凸集$Y\subset E^n$，定义连续映射$f,g:X\to Y$的直线同伦为$H:X\times I\to Y,\quad (x,t)\mapsto(1-t)f(x)+tg(x)$。
- 对于拓扑空间X，如果连续映射$f,g:X\to S^n$满足对于任意$x\in X$，成立$f(x)+g(x)\neq 0$，那么f与g间的同伦为$H:X\times I\to S^n,\quad (x,t)\mapsto\frac{(1-t)f(x)+tg(x)}{\|(1-t)f(x)+tg(x)\|}$。
- 对于拓扑空间X，如果连续映射$f,g:X\to S^1$满足对于任意$x\in X$，成立$f(x)+g(x)=0$，那么f与g间的同伦为$H:X\times I\to S^1,\quad (x,t)\mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\pi}f(x)$。
- 同伦关系为等价关系，因此将$X\to Y$上的连续映射在同伦关系下的等价类记为$[X,Y]$。
- 如果$f_0\simeq f_1:X\to Y$，且$g_0\simeq g_1:Y\to Z$，那么$g_0\circ f_0\simeq g_1\circ f_1:X\to Z$。

相对同伦：对于拓扑空间X和Y，称连续映射$f,g:X\to Y$相对于$A\subset X$同伦，并记做$f\overset{H}{\simeq}g\operatorname{rel}A$，或$H:f\simeq g\operatorname{rel}A$，如果$H:f\simeq g$，且对于任意$(a,t)\in A\times I$，成立$H(a,t)=f(a)=g(a)$。

- 相对于A同伦关系为等价关系。
- 如果$f_0\simeq f_1\operatorname{rel}A$，且$g_0\simeq g_1\operatorname{rel}A$，那么$g_0\circ f_0\simeq g_1\circ f_1\operatorname{rel}A$。

定端同伦：称道路$a,b:I\to X$为定端同伦的，并记做$a\underset{\cdot}{\simeq}b$，如果$a\simeq b\operatorname{rel}\{0,1\}$。

- $a\underset{\cdot}{\simeq}b\iff$存在连续映射$H:I\times I\to X$，使得成立

$$
\begin{align}
H(s,0)&=a(s), & H(s,1)&=b(s), & \forall s\in I \tag{40}\\
H(0,t)&=a(0)=b(0), & H(1,t)&=a(1)=b(1), & \forall t\in I \tag{41}
\end{align}
$$

- 定端同伦$\underset{\cdot}{\simeq}$为等价关系。
- 称拓扑空间X上的道路a在定端同伦$\underset{\cdot}{\simeq}$下的等价类为道路类，记作$[a]$，并记$[X]=\{[a]\}$。
- 称拓扑空间X上的闭路a在定端同伦$\underset{\cdot}{\simeq}$下的等价类为闭路类。

4.2 基本群

4.2.1 道路类

定端同伦：称道路$a,b:I\to X$为定端同伦的，并记做$a\underset{\cdot}{\simeq}b$，如果$a\simeq b\operatorname{rel}\{0,1\}$。

- $a\underset{\cdot}{\simeq}b\iff$存在连续映射$H:I\times I\to X$，使得成立

$$
\begin{align}
H(s,0)&=a(s), & H(s,1)&=b(s), & \forall s\in I \tag{42}\\
H(0,t)&=a(0)=b(0), & H(1,t)&=a(1)=b(1), & \forall t\in I \tag{43}
\end{align}
$$

- 定端同伦$\underset{\cdot}{\simeq}$为等价关系。
- 如果$a\underset{\cdot}{\simeq}b$，那么$\overline{a}\underset{\cdot}{\simeq}\overline{b}$。

- 如果$a_1 \dot{\simeq} b_1$，且$a_2 \dot{\simeq} b_2$，同时$a_1(1) = a_2(0)$，那么$b_1(1) = b_2(0)$，且$a_1 a_2 \dot{\simeq} b_1 b_2$。
- 如果$a(1) = b(0)$，且$b(1) = c(0)$，那么$(ab)c \dot{\simeq} a(bc)$。
- 对于连续映射$f : X \to Y$，道路$a, b : I \to X$，如果$a \dot{\simeq} b$，那么$f \circ a \dot{\simeq} f \circ b$。
- 对于连续映射$f : X \to Y$，道路$a, b : I \to X$，如果$a(1) = b(0)$，那么$(f \circ a)(1) = (f \circ b)(0)$，且$(f \circ a)(f \circ b) = f \circ (ab)$。
- 对于连续映射$f : X \to Y$，道路$a : I \to X$，成立$\overline{f \circ a} = f \circ \overline{a}$。

道路类：称道路$a : I \to X$在定端同伦$\dot{\simeq}$下的等价类为道路类，记作$[a]$。

道路类的逆：定义拓扑空间X上的道路类α的逆为$\alpha^{-1} = [\overline{a}]$，其中$a \in \alpha$。

- $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$

道路类的积：如果$\alpha(1) = \beta(0)$，那么定义拓扑空间X上的道路类α与β的积为$\alpha\beta = [ab]$，其中$a \in \alpha, b \in \beta$，且$a(1) = b(0)$。

- $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$
- $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
- 记$e_0 = [e_{\alpha(0)}], e_1 = [e_{\alpha(1)}]$，那么成立

$$\alpha\alpha^{-1} = e_0, \quad \alpha^{-1}\alpha = e_1, \quad e_0\alpha = \alpha e_1 = \alpha \tag{44}$$

4.2.2 基本群

基本群：定义拓扑空间X的基本群为
$\pi_1(X, x_0) = \{[a] \in [X] \mid a : I \to X \text{为道路}, a[0] = a[1] = x_0\}$。

- 单位元：$e = [e_{x_0}]$
- 逆元：α^{-1}
- 结合律：$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$

连续函数诱导的基本群同态映射：对于连续映射$f : X \to Y$，如果$x_0 \in X$且$y_0 = f(x_0) \in Y$，那么定义由f诱导的基本群同态映射为

$$f_\pi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \tag{45}$$
$$[a] \longmapsto [f \circ a] \tag{46}$$

- 对于连续映射$f : X \to Y$与$g : Y \to Z$，如果$x_0 \in X, y_0 = f(x_0) \in Y, z_0 = g(y_0) \in Z$，那么

$$(g \circ f)_\pi = g_\pi \circ f_\pi : \pi_1(X, x_0) \to \pi_2(Z, z_0) \tag{47}$$

- 对于同胚映射$f : X \to Y$，如果$x_0 \in X$且$y_0 = f(x_0) \in Y$，那么由f诱导的基本群同态映射$f_\pi : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$为群同构映射。
- **基本群与基点的关系**：对于拓扑空间X，如果x_0与x_1道路连通，那么取ω为从x_0到x_1的道路类，可定义群同构映射

$$\omega_\# : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_1) \tag{48}$$
$$\alpha \longmapsto \omega^{-1}\alpha\omega \tag{49}$$

因此$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$。

- **基本群与道路连通分支的关系**：对于拓扑空间X的道路连通分支A，如果$x_0 \in A$，那么由包含映射$i: A \to X$诱导的基本群同态映射$i_\pi: \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$为群同构映射，因此$\pi_1(A, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$。
- x_0与x_1非道路连通：取$x_0 \in S^2 \setminus \{N\}$，$x_1 \in S^1$，那么$\pi_1(S^2 \setminus \{N\}, x_0) = \{e\}$，$\pi_1(S^1, x_1) = \mathbb{Z}$。

单连通空间：称具有平凡基本群的道路连通空间为单连通空间。

- E^n为单连通空间。
- S^n为单连通空间。

S^n**的基本群**：

$$\pi_1(S^n) = \mathbb{Z} \tag{50}$$

T^n**的基本群**：

$$T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ times}}, \qquad \pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n \tag{51}$$

4.3 基本群的同伦不变性

4.3.1 同伦等价

同伦映射诱导的基本群同态间的关系：对于同伦$f \overset{H}{\simeq} g: X \to Y$，取$x_0 \in X$，记$y_0 = f(x_0), y_1 = g(x_0)$，那么$w(t) = H(x_0, t)$为$y_0$到$y_1$的道路。记$\omega = [w]$，那么$\omega_\#: \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(Y, y_1)$为群同构映射。由如上假设，成立$g_\pi = \omega_\# \circ f_\pi$，即成立如下交换图。

$$\begin{tikzcd} & \pi_1(Y,y_0) \arrow[dd, "\omega_\#"] \\ \pi_1(X,x_0) \arrow[ur, "f_\pi"] \arrow[dr, "g_\pi"'] & \\ & \pi_1(Y,y_1) \end{tikzcd} \tag{52}$$

同伦等价：称拓扑空间X与Y同伦等价，并记做$X \simeq Y$，如果存在连续映射$f: X \to Y$与$g: Y \to X$，使得成立$g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$，且$f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$。

- $E^1 \simeq E^2$：构造

$$\begin{aligned} f: E^1 &\longrightarrow E^2 \\ x &\longmapsto (x, 0) \end{aligned} \tag{53}$$

$$\begin{aligned} g: \quad E^2 &\longrightarrow E^1 \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned} \tag{54}$$

从而$g \circ f = \mathbb{1}_{E^1}$，且

$$\begin{aligned} f \circ g: \quad E^2 &\longrightarrow E^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, 0) \end{aligned} \tag{55}$$

构造

$$\begin{aligned} H: E^2 \times I &\longrightarrow E^2 \\ (x, y, t) &\longmapsto (x, ty) \end{aligned} \tag{56}$$

那么

$$H(x,y,0)=(f\circ g)(x,y),\qquad H(x,y,1)=\mathbb{1}_{E^2}(x,y) \tag{57}$$

- $X\times I\simeq X$：构造

$$\begin{aligned} f: &X\times I\longrightarrow X \\ &(x,t)\longmapsto x \end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned} g: &X\longrightarrow X\times I \\ &x\longmapsto (x,0) \end{aligned} \tag{59}$$

从而$f\circ g=\mathbb{1}_X$，且

$$\begin{aligned} g\circ f: &X\times I\longrightarrow X\times I \\ &(x,t)\longmapsto (x,0) \end{aligned} \tag{60}$$

构造

$$\begin{aligned} H: &X\times I\times I\longrightarrow X\times I \\ &(x,t,s)\longmapsto (x,ts) \end{aligned} \tag{61}$$

那么

$$H(x,t,0)=(g\circ f)(x,y),\qquad H(x,t,1)=\mathbb{1}_{X\times I}(x,y) \tag{62}$$

- 如果$f:X\to Y$为同伦等价，$x_0\in X$，$y_0=f(x_0)\in Y$，那么$f_\pi:\pi_1(X,x_0)\to\pi_2(Y,y_0)$为群同构映射。
- 如果$X\simeq Y$，且X,Y道路连通，那么$\pi_1(X)\simeq\pi_1(Y)$。

4.3.2 形变收缩

形变收缩核：称拓扑空间X的子空间$A\subset X$为X的形变收缩核，如果存在连续映射$r:X\to A$，使得成立$r\circ i=\mathbb{1}_A$，且$i\circ r\simeq\mathbb{1}_X$，其中$i:A\to X$为包含映射。

形变收缩：对于拓扑空间X的子空间$A\subset X$，称连续映射$H:X\times I\to X$为$X\to A$的形变收缩，如果

$$H(x,0)=x,\qquad \forall x\in X \tag{63}$$
$$H(x,1)\in A,\qquad \forall x\in X \tag{64}$$
$$H(a,1)=a,\qquad \forall a\in A \tag{65}$$

形变收缩核 $\Longleftrightarrow$ **形变收缩**：

- 如果A为X的形变收缩核，那么存在映射$r:X\to A$，使得成立$r\circ i=\mathbb{1}_A$，且$i\circ r=\mathbb{1}_X$，其中$i:A\to X$为包含映射。考虑同伦$H:\mathbb{1}_X\simeq i\circ r$，成立

$$H(x,0)=x,\qquad \forall x\in X \tag{66}$$
$$H(x,1)\in A,\qquad \forall x\in X \tag{67}$$
$$H(a,1)=a,\qquad \forall a\in A \tag{68}$$

因此$H:X\times I\to X$为$X\to A$的形变收缩。

- 如果$H:X\times I\to X$为$X\to A$的形变收缩，那么定义映射$r:X\to A,\quad x\mapsto H(x,1)$，那么$r\circ i=\mathbb{1}_A$，且$i\circ r=\mathbb{1}_X$，其中$i:A\to X$为包含映射，因此$A$为$X$的形变收缩核。

强形变收缩与强形变收缩核：对于拓扑空间X的子空间$A\subset X$，称连续映射$H:X\times I\to X$为$X\to A$的强形变收缩，A为X的强收缩核，如果

$$
\begin{aligned}
H(x,0) &= x, \qquad \forall x \in X \quad (69)\\
H(x,1) &\in A, \qquad \forall x \in X \quad (70)\\
H(a,t) &= a, \qquad \forall a \in A, \forall t \in I \quad (71)
\end{aligned}
$$

- **r-切片**：对于$r \in I$，r-切片$X \times \{r\}$为乘积空间$X \times I$的强形变收缩核，强形变收缩为

$$
\begin{aligned}
H : & X \times I \times I \longrightarrow X \times I \\
& (x,s,t) \longmapsto (x,(1-t)s+rt)
\end{aligned} \tag{72}
$$

- S^{n-1}为$E^n \setminus \{0\}$的强形变收缩核，强形变收缩为

$$
\begin{aligned}
H : & E^n \setminus \{0\} \times I \longrightarrow E^n \setminus \{0\} \\
& (x,t) \longmapsto (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|}
\end{aligned} \tag{73}
$$

- 拓扑锥$X \times I / X \times \{1\}$以锥顶为强形变收缩核。
- Möbius带以腰圆为强形变收缩核。
- 环面T^2去掉一点后，以一个经圆和一个纬圆的并集为强形变收缩核。
- 任意闭曲面去掉一点后，可强形变收缩为一族圆周的一点并$\bigvee_{k=1}^{N} S^1$，其中

$$
N = \begin{cases} 2n, & nT^2 \\ m, & mP^2 \end{cases} \tag{74}
$$

4.3.3 可缩空间

可缩空间：称与单点空间同伦等价的拓扑空间为可缩空间。

- E^n中的凸集为可缩空间。
- 如果X为可缩空间，那么对于任意$x \in X$，x为X的形变收缩核。

4.4 基本群的计算与应用

Van-Kampen定理：如果拓扑空间X可分解为开集并$X = X_1 \cup X_2$，并且非空交$X_0 = X_1 \cap X_2$为道路连通空间，记包含映射$i_1 : X_0 \to X_1$以及$i_2 : X_0 \to X_2$，那么对于任意$x_0 \in X$，成立

$$
\pi_1(X,x_0) \cong \frac{\pi_1(X_1,x_0) * \pi_1(X_2,x_0)}{[\{i_{1_\pi}(\alpha) i_{2_\pi}(\alpha^{-1}) : \alpha \in \pi_1(X_0,x_0)\}]} \tag{75}
$$

- 如果拓扑空间X可分解为闭集并$X = X_1 \cup X_2$，并且非空交$X_0 = X_1 \cap X_2$为X_1与X_2的开邻域的强形变收缩核，记包含映射$i_1 : X_0 \to X_1$以及$i_2 : X_0 \to X_2$，那么对于任意$x_0 \in X$，成立

$$
\pi_1(X,x_0) \cong \frac{\pi_1(X_1,x_0) * \pi_1(X_2,x_0)}{[\{i_{1_\pi}(\alpha) i_{2_\pi}(\alpha^{-1}) : \alpha \in \pi_1(X_0,x_0)\}]} \tag{76}
$$

- 如果拓扑空间X可分解为开集并$X = X_1 \cup X_2$，并且非空交$X_0 = X_1 \cap X_2$为单连通空间，那么对于任意$x_0 \in X$，成立

$$
\pi_1(X,x_0) \cong \pi_1(X_1,x_0) * \pi_1(X_2,x_0) \tag{77}
$$

- 如果拓扑空间X可分解为开集并$X = X_1 \cup X_2$，并且非空交$X_0 = X_1 \cap X_2$为道路连通空间，同时X_2为单连通空间，记包含映射$i_1 : X_0 \to X_1$，那么对于任意$x_0 \in X$，成立

$$\pi_1(X,x_0) \cong \frac{\pi_1(X_1,x_0)}{\mathrm{Im}\ i_{1_\pi}} \tag{78}$$

基本群的应用：

- 圆束的基本群：

$$\pi\left(\bigvee_{k=1}^{n} S^1\right) = \underbrace{\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}}_{n\ \text{times}} \tag{79}$$

- **Brouwer不动点定理**：如果$f: D^n \to D^n$为连续映射，那么存在$x \in D^n$，使得成立$f(x) = x$。
- **代数基本定理**：$\mathbb{C}$上的非零次一元多项式存在根。
- **Jordan曲线定理**：如果J为E^2上的Jordan曲线，即$J \cong S^1$，那么$E^2 \setminus J$存在且仅存在两个连通分支，且其均以J为边界。