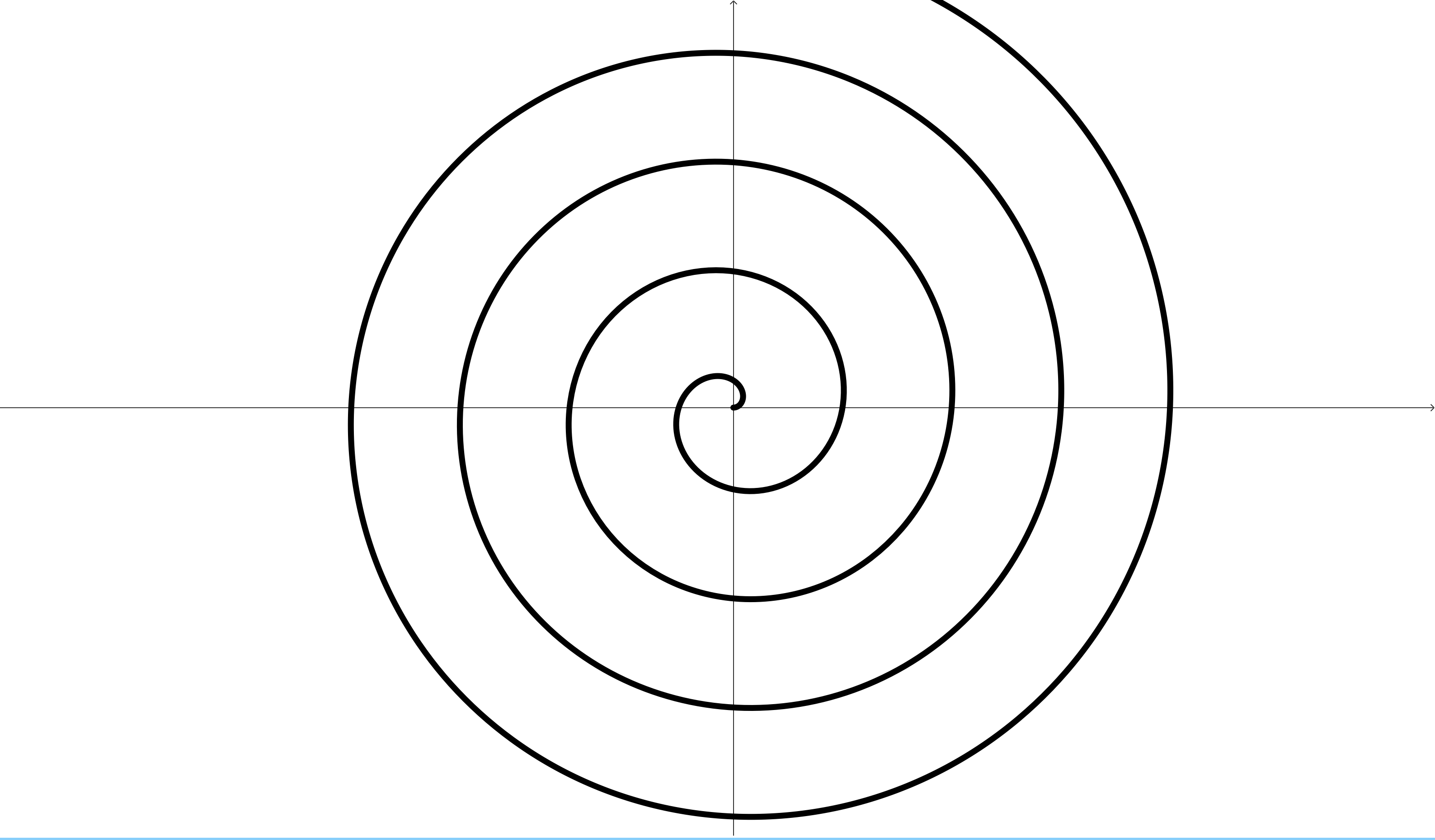

常微分方程 - 丁同仁 - 笔记

作者：若水

邮箱：ethanmxzhou@163.com

主页：helloethanzhou.github.io

时间：July 18, 2024

致谢

感谢 **勇敢的** 自己

目录

第一章 微分方程的解

1.1 初等积分法

1.1.1 恰当方程

定义 1.1.1 (恰当方程)

称一阶微分方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

为恰当方程或全微分方程，如果存在一个可微函数 $\Phi(x,y)$，使得成立

$$\mathrm{d}\Phi(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

♣

定理 1.1.1 (Green 定理)

设函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在区域

$$R: \qquad |x - x_0| < r_x, \qquad |y - y_0| < r_y$$

上连续，且具有连续的一阶偏导数，则一阶微分方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

为恰当方程的充分必要条件为恒等式

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

在 R 内成立。

♡

定理 1.1.2 (恰当方程的通解)

恰当方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

的通解为

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

或

$$\Phi(x,y) = \int_{y_0}^{y} P(x_0,y)\mathrm{d}y + \int_{x_0}^{x} Q(x,y)\mathrm{d}x$$

其中 (x_0,y_0) 为任意取定的一点。

♡

1.1.2 变量分离方程

定理 1.1.3 (变量分离方程的通解)

微分方程

$$P(x)\mathrm{d}x + Q(y)\mathrm{d}y = 0$$

的通解为

$$\int P(x)\mathrm{d}x + \int Q(y)\mathrm{d}y = C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

♡

1.1.3 一阶线性方程

定义 1.1.2 (一阶线性方程)

称微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$$

为一阶线性方程，其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在 (a,b) 上连续。

定理 1.1.4 (一阶线性方程的通解)

一阶线性方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$$

的通解为

$$y=\exp\left(-\int p(x)\mathrm{d}x\right)\left(C+\int q(x)\exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right),\qquad C\in\mathbb{R}$$

特别的，初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x),\qquad y(x_0)=y_0$$

的解为

$$y=\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t\right)\left(y_0+\int_{x_0}^{x}q(s)\exp\left(\int_{x_0}^{s}p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\right)$$

或

$$y=y_0\exp\left(-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t\right)+\int_{x_0}^{x}q(s)\exp\left(-\int_{s}^{x}p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s$$

定理 1.1.5 (积分因子法)

方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$$

改写为对称形式

$$\mathrm{d}y+p(x)y\mathrm{d}x=q(x)\mathrm{d}x$$

两侧与因子 $\exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right)$ 作积，整理得

$$\mathrm{d}\left(y\exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right)\right)=\mathrm{d}\left(\int q(x)\exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right)$$

两侧积分，便可得到解

$$y=\exp\left(-\int p(x)\mathrm{d}x\right)\left(C+\int q(x)\exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right),\qquad C\in\mathbb{R}$$

定理 1.1.6 (常数变易法)

设方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$$

的解为

$$y=C(x)\exp\left(-\int p(x)\mathrm{d}x\right)$$

代入原方程得

$$C'(x) = q(x)\exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right)$$

因此

$$C(x) = \int q(x)\exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

进而可得到解

$$y = \exp\left(-\int p(x)\mathrm{d}x\right)\left(C + \int q(x)\exp\left(\int p(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}x\right), \qquad C \in \mathbb{R}$$

♡

1.1.4 齐次方程

定理 1.1.7

对于齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

令 $z = y/x$，可求得通解。

♡

1.1.5 Bernoulli 方程

定理 1.1.8

对于 Bernoulli 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + p(x)y = q(x)y^n, \qquad n \neq 0, 1$$

令 $z = y^{1-n}$，可求得通解。

♡

1.1.6 Riccati 方程

定理 1.1.9

对于 Riccati 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$$

若已知特解为 $y = \varphi(x)$，则令 $z = y - \varphi$，可求得通解。

♡

1.2 一阶隐式微分方程

1.2.1 微分法

若微分方程

$$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$

可解出

$$y = f(x, p)$$

这里 $p = \mathrm{d}y/\mathrm{d}x$。设 f 连续可微，则方程 $y = f(x,p)$ 对 x 进行微分，可得到

$$(f'_x(x,p) - p)\mathrm{d}x + f'_p(x,p)\mathrm{d}p = 0$$

此为关于 x 和 p 的显式方程。

1. 若得到方程
$$(f'_x(x,p) - p)\mathrm{d}x + f'_p(x,p)\mathrm{d}p = 0$$
的通解 $p = u(x,C)$，那么方程 $y = f(x,p)$ 的通解为 $y = f(x,u(x,C))$。
2. 若方程
$$(f'_x(x,p) - p)\mathrm{d}x + f'_p(x,p)\mathrm{d}p = 0$$
含有特解 $p = w(x)$，则方程 $y = f(x,p)$ 含有特解 $y = f(x,w(x))$。
3. 若得到方程
$$(f'_x(x,p) - p)\mathrm{d}x + f'_p(x,p)\mathrm{d}p = 0$$
的通解 $x = v(p,C)$，那么方程 $y = f(x,p)$ 的通解为
$$\begin{cases} x = v(p,C) \\ y = f(v(p,C),p) \end{cases} \qquad p\text{为参数}$$
4. 若方程
$$(f'_x(x,p) - p)\mathrm{d}x + f'_p(x,p)\mathrm{d}p = 0$$
含有特解 $x = z(p)$，则方程 $y = f(x,p)$ 含有特解
$$\begin{cases} x = z(p) \\ y = f(z(p),p) \end{cases} \qquad p\text{为参数}$$

1.2.2 参数法

对于一阶隐式微分方程

$$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$

若其参数表达式为

$$x = f(u,v), \qquad y = g(u,v), \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = h(u,v)$$

其中 u 和 v 为参数，则有

$$(h(u,v)f'_u(u,v) - g'_u(u,v))\mathrm{d}u + (h(u,v)f'_v(u,v) - g'_v(u,v))\mathrm{d}v = 0$$

若求得方程

$$(h(u,v)f'_u(u,v) - g'_u(u,v))\mathrm{d}u + (h(u,v)f'_v(u,v) - g'_v(u,v))\mathrm{d}v = 0$$

的通解 $v = w(u,C)$，则可得到原方程的通解

$$\begin{cases} x = f(u,w(u,C)) \\ y = g(u,w(u,C)) \end{cases}$$

1.3 线性微分方程

1.3.1 一般理论

定理 1.3.1 (存在唯一性定理)

对于 n 阶线性微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x), \qquad \boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$$

如果 n 阶系数矩阵函数 $\boldsymbol{A}(x)$ 和右端函数 $\boldsymbol{f}(x)$ 在开区间 (a,b) 上连续，那么其解 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(x)$ 在开区间 (a,b) 上存在且存在唯一。

♡

定义 1.3.1 (基本解矩阵)

n 阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(x)$$

存在 n 个线性无关的解

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix} \qquad \cdots \qquad \boldsymbol{y}_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

构成微分方程的基本解矩阵

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

由此原方程的通解为

$$\boldsymbol{y}(x) = \boldsymbol{\Phi}(x)\boldsymbol{c}, \qquad \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$$

♣

定义 1.3.2 (Wronsky 行列式)

函数

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix} \qquad \cdots \qquad \boldsymbol{y}_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

的 Wronsky 行列式为

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

♣

命题 1.3.1 (Wronsky 行列式的性质)

如果函数

$$\boldsymbol{y}_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix} \qquad \cdots \qquad \boldsymbol{y}_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

线性相关，那么其 Wronsky 行列式恒为 0，即

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{vmatrix} \equiv 0$$

定理 1.3.2 (Liouville 公式)

如果

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\begin{pmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

为齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$$

的基本解矩阵，那么其 Wronsky 行列式 $W(x)=|\boldsymbol{\Phi}(x)|$ 成立

$$W(x)=W(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}(x))\mathrm{d}x\right), \qquad a<x<b$$

其中 $a<x_0<b$。

定理 1.3.3 (常数变易法)

如果 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 是齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}$$

的基本解矩阵，那么微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)$$

在区间 $a<x<b$ 上的通解可表示为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi}(x)\left(\boldsymbol{c}+\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s\right), \qquad \boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$$

且微分方程满足初值条件 $\boldsymbol{y}(x_0)=\boldsymbol{y}_0$ 的解为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\Phi}(x)\Phi^{-1}(x_0)\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{\Phi}(x)\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s$$

1.3.2 常系数线性微分方程

定理 1.3.4 (常系数线性微分方程)

常系数线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

的基本解矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$$

若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}$，则

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=\boldsymbol{Q}\mathrm{e}^{\boldsymbol{\Lambda}x}\boldsymbol{Q}^{-1}$$

定理 1.3.5

如果 $y=\varphi(x)$ 是二阶齐次线性方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的非零解，其中 $p(x)$ 和 $q(x)$ 是区间 $a<x<b$ 上的连续函数，那么微分方程的通解为

$$y=\varphi(x)\left(C_1+C_2\int_{x_0}^{x}\frac{1}{\varphi^2(x)}\exp\left(-\int_{x_0}^{s}p(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s\right),\qquad C_1,C_2\in\mathbb{R}$$

♡

定理 1.3.6 (常系数齐次线性方程)

如果常系数齐次线性方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0$$

的特征方程

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

在复数域 $\mathbb{C}$ 中共有 r 个互不相同的根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$，且对应的重数分别为 $n_1,\cdots,n_r$，满足 $n_1+\cdots+n_r=n$，那么函数组

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{\lambda_1x}, & x\mathrm{e}^{\lambda_1x}, & \cdots, & x^{n_1-1}\mathrm{e}^{\lambda_1x}\\ \cdots & & & \\ \mathrm{e}^{\lambda_rx}, & x\mathrm{e}^{\lambda_rx}, & \cdots, & x^{n_r-1}\mathrm{e}^{\lambda_rx}\end{cases}$$

是齐次微分方程的一个基本解组。

♡

定理 1.3.7 (常系数非齐次线性方程)

对于常系数非齐次线性方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x)$$

其特解 $\varphi^*(x)$ 如下。

1. $f(x)=P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$：

$$\varphi^*(x)=x^kQ_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

其中 $P_n(x)$ 和 $Q_n(x)$ 为 n 次多项式，$k\in\mathbb{N}$ 为特征方程

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

的特征根中 λ 的重数。

2. $f(x)=(A_m(x)\cos(\omega x)+B_n(x)\sin(\omega x))\mathrm{e}^{\lambda x}$：

$$\varphi^*(x)=x^k(P_l(x)\cos(\omega x)+Q_l\sin(\omega x))\mathrm{e}^{\lambda x}$$

其中 $A_m(x)$ 和 $B_n(x)$ 分别为关于 x 的 m 和 n 次多项式，$P_l(x)$ 和 $Q_l(x)$ 为的 l 次多项式且 $l=\max(m,n)$，$k\in\mathbb{N}$ 为特征方程

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

的特征根中 $\lambda+i\omega$ 的重数。

♡

定理 1.3.8 (Euler 方程)

对于 Euler 方程

$$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=f(x)$$

令 $x = \mathrm{e}^t$，那么

$$x^n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - k \right) y$$

1.4 幂级数解法

1.4.1 Cauchy 定理

定义 1.4.1 (解析函数)

称函数 $f(x,y)$ 在区域 $G \in \mathbb{R}^2$ 内为解析的，如果对于 G 内的任意一点 (x_0, y_0)，存在正常数 a 和 b，使得函数 $f(x,y)$ 在区域

$$|x - x_0| \leq a, \qquad |y - y_0| \leq b$$

内可以展成 $(x - x_0)$ 和 $(y - y_0)$ 的收敛幂级数

$$f(x,y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j$$

定理 1.4.1 (Cauchy 定理)

如果函数 $f(x,y)$ 在矩形区域 $R: |x - x_0| \leq \alpha, |y - y_0| \leq \beta$ 上可以展开成 $(x - x_0)$ 和 $(y - y_0)$ 的收敛幂级数

$$f(x,y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j$$

则初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

在 x_0 点的邻域 $|x - x_0| \leq \rho$ 内存在且存在唯一解析解 $y = y(x)$，其中

$$\rho = a(1 - \mathrm{e}^{-\frac{b}{2aM}}), \qquad M \leq |a_{ij}| a^i b^j$$

1.4.2 幂级数解法

定理 1.4.2 (幂级数解法)

微分方程

$$y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$$

中的系数函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 在区间 $|x - x_0| < r$ 可以展成 $(x - x_0)$ 的收敛幂级数，则微分方程在区间 $|x - x_0| < r$ 存在收敛的幂级数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n$$

其中 C_0 和 C_1 为任意常数，而当 $n \geq 2$ 时 C_n 可以通过递推公式确定。

第二章 常微分方程四大定理

2.1 存在与存在唯一性定理

2.1.1 Peano 存在定理

定理 2.1.1 (Asscoli 引理)

对于 $[a,b]$ 上的函数族 $\mathscr{F}$，如果 $\mathscr{F}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界且等度连续，那么存在函数序列 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{F}$，使得 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

定理 2.1.2 (Peano 存在定理)

对于初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{*}$$

如果 $f(x,y)$ 在矩形区域

$$R: \qquad |x - x_0| \leq a, \qquad |y - y_0| \leq b$$

内连续，那么原初值问题在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 内存在解，其中

$$h = \min\{a, b/M\}, \qquad M > \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$$

证明

1. 构造 Euler 折线

$$\varphi_n(x) = y_0 + \sum_{k=0}^{-s+1} f(x_k, y_k)(x_{k-1} - x_k) + f(x_{-s}, y_{-s})(x - x_{-s})$$

2. 证明 Euler 序列 $y = \varphi_n(x)$ 存在一致收敛子列，不妨仍记为 $y = \varphi_n(x)$。
3. 证明 Euler 序列 $y = \varphi_n(x)$ 成立

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi_n(x))\mathrm{d}x + \delta_n(x)$$

   其中 $\delta_n(x) \to 0$。
4. Euler 序列 $y = \varphi_n(x)$ 的极限 $y = \varphi(x)$ 为初值问题 (*) 的解。

笔记 不可去掉“$f(x,y)$ 连续”的条件，例如：对于

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \qquad y(0) = 0$$

不存在解。事实上，如果 $y(x)$ 可导，那么其导函数不存在第一类间断点。

2.1.2 Picard 存在唯一性定理

定理 2.1.3 (Picard 存在唯一性定理)

对于初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),\qquad y(x_0)=y_0 \tag{1}$$

如果 $f(x,y)$ 在矩形区域

$$R:\qquad |x-x_0|\le a,\qquad |y-y_0|\le b$$

内连续，且对 y 成立以 L 为 Lipschitz 系数的 Lipschitz 条件，那么初值问题 (1) 在区间 $I=[x_0-h,x_0+h]$ 内存在且存在唯一解，其中

$$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},\qquad M>\max_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$$

♡

证明 **经典证明：**

1. 初值问题 (1) $\Longleftrightarrow$ 积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)\mathrm{d}x \tag{2}$$

事实上，一方面，若 $y=y(x),x\in I$ 为初值问题 (1) 的解，则

$$y'(x)=f(x,y(x)),\qquad y(x_0)=y_0,\qquad x\in I$$

由此积分

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y(x))\mathrm{d}x,\qquad x\in I$$

因此 $y=y(x),x\in I$ 为积分方程 (2) 的解。
另一方面，若 $y=y(x),x\in I$ 为积分方程 (2) 的解，则

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y(x))\mathrm{d}x,\qquad x\in I$$

由此微分

$$y'(x)=f(x,y(x)),\qquad y(x_0)=y_0,\qquad x\in I$$

因此 $y=y(x),x\in I$ 为初值问题 (1) 的解。

2. 迭代构造 Picard 序列

$$y_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y_n(x))\mathrm{d}x,\qquad y_0(x)=y_0,\qquad x\in I \tag{3}$$

由归纳法证明：Picard 序列 $y=y_n(x)$ 在 I 上连续，且成立不等式

$$|y_n(x)-y_0|\le M|x-x_0|$$

(a). 当 $n=0$ 时，由于 $f(x,y_0(x))=f(x,y_0)$ 为 I 上的连续函数，因此

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y_0(x))\mathrm{d}x$$

在 I 上连续可微，且成立

$$|y_1(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x}f(x,y_0(x))\mathrm{d}x\right|\le\int_{x_0}^{x}|f(x,y_0(x))|\mathrm{d}x\le M|x-x_0| \tag{4}$$

从而在 I 上成立 $|y_1(x)-y_0|\le Mh\le b$。

(b). 假设 $y=y_k(x)$ 在 I 上连续，且成立不等式

$$|y_k(x)-y_0|\le M|x-x_0|$$

则

$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_k(x))\mathrm{d}x$$

在 I 上连续可微，且成立

$$|y_{k+1}(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(x, y_k(x))\mathrm{d}x\right| \le \int_{x_0}^{x} |f(x, y_k(x))|\mathrm{d}x \le M|x - x_0|$$

从而在 I 上成立 $|y_{k+1}(x) - y_0| \le Mh \le b$。

3. 证明：Picard 序列 $y = y_n(x)$ 在 I 一致收敛于积分方程 (2) 的解。
注意到，序列 $y_n(x)$ 的收敛性 $\Longleftrightarrow$ 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(y_{n+1}(x) - y_n(x)) \tag{5}$$

的收敛性。下面证明：级数 (5) 在 I 上一致收敛。为此，我们归纳证明不等式：

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \le \frac{M}{L}\frac{(L|x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad x \in I \tag{6}$$

(a). 当 $n = 0$ 时，(4) $\Longrightarrow$ (6)。
(b). 假设当 $n = k$ 时成立 (6)，则先由 (3) 推出

$$|y_{k+2}(x) - y_{k+1}(x)| = \left|\int_{x_0}^{x}(f(x, y_{k+1}(x)) - f(x, y_k(x)))\mathrm{d}x\right|$$

然后利用 Lipschitz 条件与归纳假设，可得

$$\begin{aligned}
|y_{k+2}(x) - y_{k+1}(x)| &\le \left|\int_{x_0}^{x} L|y_{k+1}(x) - y_k(x)|\mathrm{d}x\right| \\
&\le M\left|\int_{x_0}^{x} \frac{(L|x - x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}\mathrm{d}x\right| \\
&= \frac{M}{L}\frac{(L|x - x_0|)^{k+2}}{(k+2)!}
\end{aligned}$$

因此当 $n = k + 1$ 时，成立 (6)。
由归纳假设，成立 (6)。
显然，不等式 (6) 蕴含级数 (5) 在 I 上一致收敛，因此 Picard 序列 $y = y_n(x)$ 在 I 上一致收敛，因此极限函数

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x), \qquad x \in I$$

在区间 I 上连续。由 $f(x, y)$ 的连续性与 Picard 序列 $y = y_n(x)$ 的一致连续性，在 (3) 中令 $n \to \infty$ 可得

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\mathrm{d}x, \qquad x \in I$$

因此 $y = \varphi(x)$ 为积分方程 (2) 在 I 上的解。

4. 最后证明唯一性。假设积分方程 (2) 在 I 上存在两个解 $y = \varphi(x)$ 与 $y = \psi(x)$，则由积分方程 (2)，可得

$$\varphi(x) - \psi(x) = \int_{x_0}^{x}(f(x, \varphi(x)) - f(x, \psi(x)))\mathrm{d}x$$

由 Lipschitz 条件

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le L\int_{x_0}^{x} |u(x) - v(x)|\mathrm{d}x \tag{7}$$

取 $|u(x) - v(x)|$ 在 I 上的上界 K，则由 (7)

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le LK|x - x_0|$$

代入 (7)

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \le K\frac{(L|x - x_0|)^2}{2}$$

由归纳法

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \le K\frac{(L|x-x_0|)^n}{n!}$$

令 $n\to\infty$，则 $\varphi(x)=\psi(x)$。进而说明积分方程 (2) 在 I 上的解唯一。

定理 2.1.4 (Picard 存在唯一性定理)

对于初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),\qquad y(x_0)=y_0 \tag{*}$$

如果 $f(x,y)$ 在带形区域

$$R:\quad |x-x_0|\le\delta,\qquad y\in\mathbb{R}$$

内连续，且对 y 成立以 L 为 Lipschitz 系数的 Lipschitz 条件，那么初值问题 (*) 在区间 $I=[x_0-h,x_0+h]$ 内存在且存在唯一连续解，其中 $0<h<\min\{\delta,1/L\}$。♡

证明 **压缩映像原理：**考虑连续函数空间 $C(I)$，构造算子

$$\begin{aligned}T: C(I)&\longrightarrow C(I)\\ \varphi&\longmapsto T_\varphi,\text{其中}T_\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\varphi(t))\mathrm{d}t\end{aligned}$$

容易知道 $y=\varphi(x)$ 为初值问题 (*) 的连续解 $\Longleftrightarrow$ φ 为 T 的不动点。由于 $f(x,y)$ 对 y 成立以 L 为 Lipschitz 系数的 Lipschitz 条件，那么

$$\begin{aligned}\|T(\varphi)-T(\psi)\| &= \sup_{x\in I}|(T(\varphi)-T(\psi))(x)|\\ &= \sup_{|x-x_0|\le h}\left|\int_{x_0}^{x}(f(t,\varphi(t))-f(t,\psi(t)))\mathrm{d}t\right|\\ &\le \sup_{|x-x_0|\le h}\int_{x_0}^{x}|f(t,\varphi(t))-f(t,\psi(t))|\mathrm{d}t\\ &\le \sup_{|x-x_0|\le h}\int_{x_0}^{x}L|\varphi(t)-\psi(t)|\mathrm{d}t\\ &\le \sup_{|x-x_0|\le h}\int_{x_0}^{x}L\|\varphi-\psi\|\mathrm{d}t\\ &= \sup_{|x-x_0|\le h}(x-x_0)L\|\varphi-\psi\|\\ &= Lh\|\varphi-\psi\|\end{aligned}$$

而 $Lh<1$，从而 T 为压缩映射，由压缩映像原理，T 存在且存在唯一不动点，进而值问题 (*) 在区间 I 内存在且存在唯一连续解。

笔记 “$f(x,y)$ 对 y 成立 Lipschitz 条件”仅为充分条件，例如对于初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{|y|},\qquad y(0)=0$$

函数 $f(x,y)=\sqrt{|y|}$ 在 y 的任意邻域内不成立 Lipschitz 条件，但原初值问题存在且存在唯一解

$$y=\begin{cases}x^2/4, & x\ge 0\\ -x^2/4, & x<0\end{cases}$$

定义 2.1.1 (Osgood 条件)

称连续函数 $f(x)$ 成立 Osgood 条件，如果存在函数 $F(r)$，使得成立

$$F(r)>0,(r>0),\qquad F(0)=0,\qquad \int_0^1\frac{\mathrm{d}r}{F(r)}=+\infty$$

且对于任意 x, y，成立

$$|f(x)-f(y)| \leq F(|x-y|)$$

定理 2.1.5 (Osgood 定理)

对于初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), \qquad y(x_0)=y_0$$

如果 $f(x,y)$ 在矩形区域

$$R: \qquad |x-x_0| \leq a, \qquad |y-y_0| \leq b$$

内连续，且对 y 成立 Osgood 条件，那么原初值问题在区间 $[x_0-h, x_0+h]$ 内存在且存在唯一解，其中

$$h=\min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \qquad M > \max_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$$

2.2 解的延伸定理

2.2.1 解的延伸定理

定理 2.2.1 (解的延伸定理)

如果 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续，那么对于任意 $(x_0,y_0)\in G$，初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), \qquad y(x_0)=y_0$$

的积分曲线 Γ 延伸至 G 的边界。

定理 2.2.2

如果函数 $f(x,y)$ 在连通开集

$$S: \qquad \alpha<x<\beta, \qquad -\infty<y<+\infty$$

内连续，而且满足不等式

$$|f(x,y)| \leq A(x)|y|+B(x)$$

其中 $A(x)\geq 0$ 和 $B(x)\geq 0$ 在区间 $\alpha<x<\beta$ 连续，那么对于任意 $(x_0,y_0)\in S$，初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), \qquad y(x_0)=y_0$$

的解区间 $\alpha<x<\beta$ 为最大存在区间。

2.2.2 比较定理

定理 2.2.3 (第一比较定理)

设函数 $f(x,y)$ 与 $F(x,y)$ 都在连通开集 G 内连续且满足不等式

$$f(x,y)<F(x,y), \qquad (x,y)\in G$$

又设函数 $y=\varphi(x)$ 与 $y=\Phi(x)$ 在区间 $a<x<b$ 上分别是初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y), \qquad y(x_0)=y_0$$

与

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

的解，其中 $(x_0, y_0) \in G$，则有

$$\begin{cases} \varphi(x) < \Phi(x), x_0 < x < b \\ \varphi(x) > \Phi(x), a < x < x_0 \end{cases}$$

♡

定理 2.2.4 (第二比较定理)

设函数 $f(x, y)$ 与 $F(x, y)$ 都在平面区域 G 内连续且满足不等式

$$f(x, y) < F(x, y), \qquad (x, y) \in G$$

又设函数 $y = \varphi(x)$ 与 $y = \Phi(x)$ 在区间 $a < x < b$ 上分别是初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

与

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

的解，其中 $(x_0, y_0) \in G$，并且 $y = \varphi(x)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的右行最小解和左行最大解，或者 $y = \Phi(x)$ 是初值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的右行最小解和左行最大解，则有如下比较关系

$$\begin{cases} \varphi(x) \leq \Phi(x), x_0 \leq x < b \\ \varphi(x) \geq \Phi(x), a < x \leq x_0 \end{cases}$$

♡

2.3 解对初值和参数的连续依赖性

对于一般的微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y, \lambda), \qquad y(x_0) = y_0$$

可作线性变换 $x' = x - x_0$ 与 $y' = y - y_0$，那么上述初值问题化为

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'} = f(x', y', \lambda), \qquad y'(0) = 0$$

因此本节对于探究解对初值和参数的连续依赖性，仅考虑初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y, \lambda), \qquad y(0) = 0$$

定义 2.3.1 (解对初值和参数的连续依赖性)

考虑初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y, \lambda), \qquad y(x_0) = y_0$$

记其解为 $y = \varphi(x, x_0, y_0, \lambda)$。所谓解对初值和参数的连续依赖性，就是 φ 对于 x_0, y_0, λ 的连续性。

♣

定理 2.3.1 (解对初值和参数的连续依赖性)

如果函数 $f(x,y,\lambda)$ 在矩形区域

$$R:\qquad |x|\le a,\qquad |y|\le b,\qquad |\lambda-\lambda_0|\le c$$

上连续，且对于 y 满足 Lipschitz 条件，那么微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y,\lambda),\qquad y(0)=0$$

的解 $y=\varphi(x,\lambda)$ 在矩形区域

$$D:\qquad |x|\le h,\qquad |\lambda-\lambda_0|\le c$$

上是连续的，其中

$$h=\min\{a,b/M\},\qquad M\ge\max_{(x,y,\lambda)\in G}|f(x,y,\lambda)|$$

♡

2.4 解对初值和参数的连续可微性

对于一般的微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y,\lambda),\qquad y(x_0)=y_0$$

可作线性变换 $x'=x-x_0$ 与 $y'=y-y_0$，那么上述初值问题化为

$$\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x'}=f(x',y',\lambda),\qquad y'(0)=0$$

因此本节对于探究解对初值和参数的连续可微性，仅考虑初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y,\lambda),\qquad y(0)=0$$

定义 2.4.1 (解对初值和参数的连续可微性)

考虑初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y,\lambda),\qquad y(x_0)=y_0$$

记其解为 $y=\varphi(x,x_0,y_0,\lambda)$。所谓解对初值和参数的连续可微性，就是 φ 对于 x_0,y_0,λ 的连续可微性。♣

定理 2.4.1 (解对初值和参数的连续可微性)

如果函数 $f(x,y,\lambda)$ 在矩形区域

$$R:\qquad |x|\le a,\qquad |y|\le b,\qquad |\lambda-\lambda_0|\le c$$

上连续，且对于 y 与 λ 存在连续偏微商，那么微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y,\lambda),\qquad y(0)=0$$

的解 $y=\varphi(x,\lambda)$ 在矩形区域

$$D:\qquad |x|\le h,\qquad |\lambda-\lambda_0|\le c$$

上是连续可微的，其中

$$h=\min\{a,b/M\},\qquad M\ge\max_{(x,y,\lambda)\in G}|f(x,y,\lambda)|$$

♡

2.5 四大定理总结

定理 2.5.1 (Picard 存在唯一性定理)

对于初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

如果 $f(x,y)$ 在矩形区域

$$R: \qquad |x - x_0| \leq a, \qquad |y - y_0| \leq b$$

内连续，且对 y 成立 Lipschitz 条件，那么原初值问题在区间 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 内存在且存在唯一解，其中

$$h = \min\{a, b/M\}, \qquad M > \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$$

♡

定理 2.5.2 (解的延伸定理)

如果 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续，那么对于任意 $(x_0, y_0) \in G$，初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

的积分曲线 Γ 延伸至 G 的边界。

♡

定理 2.5.3 (解对初值和参数的连续依赖性)

如果函数 $f(x,y,\lambda)$ 在矩形区域

$$R: \qquad |x| \leq a, \qquad |y| \leq b, \qquad |\lambda - \lambda_0| \leq c$$

上连续，且对于 y 满足 Lipschitz 条件，那么微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y,\lambda), \qquad y(0) = 0$$

的解 $y = \varphi(x,\lambda)$ 在矩形区域

$$D: \qquad |x| \leq h, \qquad |\lambda - \lambda_0| \leq c$$

上是连续的，其中

$$h = \min\{a, b/M\}, \qquad M \geq \max_{(x,y,\lambda)\in G} |f(x,y,\lambda)|$$

♡

定理 2.5.4 (解对初值和参数的连续可微性)

如果函数 $f(x,y,\lambda)$ 在矩形区域

$$R: \qquad |x| \leq a, \qquad |y| \leq b, \qquad |\lambda - \lambda_0| \leq c$$

上连续，且对于 y 与 λ 存在连续偏微商，那么微分方程初值问题

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y,\lambda), \qquad y(0) = 0$$

的解 $y = \varphi(x,\lambda)$ 在矩形区域

$$D: \qquad |x| \leq h, \qquad |\lambda - \lambda_0| \leq c$$

上是连续可微的，其中

$$h = \min\{a, b/M\}, \qquad M \geq \max_{(x,y,\lambda)\in G} |f(x,y,\lambda)|$$

♡

条件	结论
连续性	存在解
连续性	解延伸至边界
连续性 +Lipschitz 条件	存在且存在唯一解
连续性 +Lipschitz 条件	解对初值与参数连续
连续性 + 连续可偏微商	解对初值与参数连续可微

2.6 Lyapunov 稳定性

定义 2.6.1 (Lyapunov 稳定性)

对于微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = f(\boldsymbol{x}, t)$$

其中 $f(\boldsymbol{x}, t)$ 对于 $\boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ 与 $t \in \mathbb{R}$ 连续，且对于 $\boldsymbol{x}$ 成立 Lipschitz 条件，称其在 $[t_0, \infty)$ 上存在定义的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 成立 Lyapunov 稳定性，如果对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得对于任意成立

$$|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{\varphi}(t_0)| < \delta$$

的 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$，原微分方程以 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 为初值的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 在 $[t_0, \infty)$ 上存在定义，且对于任意 $t \geq t_0$，成立

$$|\boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{\varphi}(t)| < \varepsilon$$

♣

定义 2.6.2 (Lyapunov 渐进稳定性)

对于微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = f(\boldsymbol{x}, t)$$

其中 $f(\boldsymbol{x}, t)$ 对于 $\boldsymbol{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ 与 $t \in \mathbb{R}$ 连续，且对于 $\boldsymbol{x}$ 成立 Lipschitz 条件，称其存在 Lyapunov 稳定性的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ 成立 Lyapunov 渐进稳定性，如果存在 $\delta > 0$，使得对于任意成立

$$|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{\varphi}(t_0)| < \delta$$

的 $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$，原微分方程以 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ 为初值的解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0)$ 在 $[t_0, \infty)$ 上存在定义，且成立

$$\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{\varphi}(t)| = 0$$

♣

2.7 奇解与包络

2.7.1 奇解

定义 2.7.1 (奇解)

称一阶微分方程

$$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$

的特解

$$\Gamma: \qquad y = \varphi(x), \qquad x \in I$$

为奇解，如果对于任意 $(x_0, y_0) \in \Gamma$，以及 (x_0, y_0) 的任意邻域内微分方程

$$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$

存在不同于 Γ 的解，使得其在 (x_0, y_0) 处与 Γ 相切。

定理 2.7.1 (奇解存在的必要条件)

设函数 $F(x,y,p)$ 对 $(x,y,p) \in G$ 是连续的，而且对 y 和 p 有连续的偏微商 F'_y 和 F'_p。若函数 $y = \varphi(x), x \in J$ 是微分方程

$$F(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}) = 0$$

的一个奇解，并且 $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in G$，则奇解 $y = \varphi(x)$ 满足 p-判别式

$$\begin{cases} F(x,y,p) = 0 \\ F'_p(x,y,p) = 0 \end{cases}$$

若从方程组中消去 p，可得到方程

$$\Delta(x, y) = 0$$

由此决定的曲线为微分方程

$$F(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}) = 0$$

的 p-判别曲线。因此，原微分方程的奇解是一条 p-判别曲线。

笔记 需要注意的是，由 p-判别式

$$\begin{cases} F(x,y,p) = 0 \\ F'_p(x,y,p) = 0 \end{cases}$$

所确定的函数 $y = \psi(x)$ 不一定是相应微分方程的解；即使是解，也不一定是奇解。这是因为，在联立方程组时，参数 p 丧失了与 x 和 y 的关系，而成为了一个独立的变量。事实上由 p-判别式求得的 $y = \psi(x)$ 和 $p = p(x)$，一定要满足 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p$，只有这样，函数 $y = \psi(x)$ 才是微分方程的解，但未必是奇解。

定理 2.7.2 (奇解存在的充分条件)

设函数 $F(x,y,p)$ 对 $(x,y,p) \in G$ 是二阶连续可微的，且由微分方程

$$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$

的 p-判别式

$$\begin{cases} F(x,y,p) = 0 \\ F'_p(x,y,p) = 0 \end{cases}$$

所确定的函数 $y = \psi(x), x \in J$ 为微分方程的解。若满足条件

$$\begin{cases} F'_y(x, \psi(x), \psi'(x)) \neq 0 \\ F''_{pp}(x, \psi(x), \psi'(x)) \neq 0 \\ F'_p(x, \psi(x), \psi'(x)) = 0 \end{cases}$$

对于任意 $x \in J$ 成立，则 $y = \psi(x)$ 是微分方程的奇解。

笔记 奇解存在的充分条件中的

$$\begin{cases} F'_y(x,\psi(x),\psi'(x)) \neq 0 \\ F''_{pp}(x,\psi(x),\psi'(x)) \neq 0 \\ F'_p(x,\psi(x),\psi'(x)) = 0 \end{cases}$$

中的三个条件缺一不可，如

$$(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2 = y^2, \qquad \sin(y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}) = y, \qquad y = 2x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{3}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^3$$

2.7.2 包络

定义 2.7.2 (包络)

对于单参数 C 的曲线族

$$K(C): \qquad V(x,y,C) = 0$$

其中函数 $V(x,y,C)$ 对于 $(x,y,C)\in D$ 是连续可微的。称连续可微的曲线 Γ 为曲线族 $K(C): V(x,y,C) = 0$ 的包络，如果对于任一点 $P\in\Gamma$，在曲线族 $K(C): V(x,y,C) = 0$ 中存在曲线 $K(C_0)$ 经过 P 点并在该点与 Γ 相切，同时 $K(C_0)$ 在 P 点的某一邻域内不同于 Γ。

定理 2.7.3 (奇解是通解的包络)

设微分方程

$$F(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}) = 0$$

有通积分为

$$U(x,y,C) = 0$$

又设积分曲线族 $U(x,y,C) = 0$ 有包络为

$$\Gamma: y = \varphi(x), x\in J$$

则包络 $\Gamma: y = \varphi(x), x\in J$ 是微分方程的奇解。

定理 2.7.4 (包络存在的必要条件)

设 Γ 是曲线族

$$K(C): V(x,y,C) = 0$$

的一支包络，则其满足如下的 $C-$ 判别式

$$\begin{cases} V(x,y,C) = 0 \\ V'_C(x,y,C) = 0 \end{cases}$$

或消去 C，得到关系式

$$\Omega(x,y) = 0$$

定理 2.7.5 (包络存在的充分条件)

设由曲线族

$$K(C): V(x,y,C) = 0$$

的 $C-$ 判别式

$$\begin{cases} V(x,y,C)=0 \\ V_C'(x,y,C)=0 \end{cases}$$

确定一支连续可微且不含于族 $K(C):V(x,y,C)=0$ 的曲线

$$\Lambda:\begin{cases} x=\varphi(C) \\ y=\psi(C) \end{cases},C\in J$$

且满足非蜕化性条件

$$(\phi'(C),\psi'(C))\neq(0,0)(V_x'(\varphi(C),\psi(C),C),V_y'(\varphi(C),\psi(C),C))\neq(0,0)$$

则曲线 Λ 是曲线族 $K(C):V(x,y,C)=0$ 的一支包络。

♡