第一章：引论

数值运算的误差估计：对于两个近似值x^*和y^*，误差限分别为$\varepsilon(x^*)$和$\varepsilon(y^*)$，那么

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(x^* \pm y^*) \leq \varepsilon(x^*) + \varepsilon(y^*) &(1)\\
&\varepsilon(x^* y^*) \leq |x^*|\varepsilon(y^*) + |y^*|\varepsilon(x^*) &(2)\\
&\varepsilon(x^*/y^*) \leq \frac{|x^*|\varepsilon(y^*) + |y^*|\varepsilon(x^*)}{|y^*|^2} &(3)\\
&\varepsilon(f(x^*)) \leq |f'(x^*)|\varepsilon(x^*) &(4)\\
&\varepsilon(f(x^*, y^*)) \leq |f_1'(x^*, y^*)|\varepsilon(x^*) + |f_2'(x^*, y^*)|\varepsilon(y^*) &(5)
\end{aligned}$$

稳定性：对于一个数值方法，如果输入数据有误差，且在计算过程中舍入误差不显著增长，那么称此算法为稳定的，否则称为不稳定的。

第二章：插值法

2.1 Lagrange插值

线性插值函数：

$$L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1) \tag{6}$$

抛物线插值函数：

$$L_2(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}f(x_1) + \frac{(x-x_3)(x-x_1)}{(x_2-x_3)(x_2-x_1)}f(x_2) + \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}f(x_3) \tag{7}$$

Lagrange插值基函数：

$$l_i(x) = \frac{\prod\limits_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod\limits_{j\neq i}(x_i-x_j)} \tag{8}$$

Lagrange插值公式：

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{\prod\limits_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod\limits_{j\neq i}(x_i-x_j)}f(x_i) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{\omega'_{n+1}(x_k)}\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)} \tag{9}$$

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \tag{10}$$

其中

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n}(x-x_k) \tag{11}$$

2.2 Newton插值

k阶差商：定义$f[x_0]=f(x_0)$为f在x_0处的0阶差商，递归的，定义如下为f在$x_0,\cdots,x_k$处的k阶均差。

$$f[x_0,\cdots,x_k] = \frac{f[x_1,\cdots,x_k]-f[x_0,\cdots,x_{k-1}]}{x_k-x_0} \tag{12}$$

- $f[x_0,\cdots,x_k]$中任意对换x_i和x_j的位置，差商不变。
- $$f[x_0,\cdots,x_k] = \sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{\omega'_{k+1}(x_i)} \tag{13}$$
- $$f[x_0,\cdots,x_k] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!} \tag{14}$$
- $$f[x_0,\cdots,x_0] = \lim_{x_i\to x_0} f[x_0,\cdots,x_k] = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \tag{15}$$

Newton插值公式：

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} f[x_0, \cdots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \tag{16}$$

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = f[x, x_0, \cdots, x_n]\omega_{n+1}(x) \tag{17}$$

2.3 Hermite插值

Hermite插值公式：如果要求插值函数H具有m阶导数，那么

$$H^{(j)}_{mn+m+n}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \qquad 0 \le i \le n, 0 \le j \le m \tag{18}$$

Taylor插值公式：$P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad 0 \le k \le n$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^n \tag{19}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \tag{20}$$

三点三次Hermite插值：$H(x_i) = f(x_i), i \in \{0, 1, 2\}$且$H'(x_1) = f'(x_1)$

$$H_3(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \tag{21}$$

$$+ \frac{f'(x_1) - f[x_0, x_1] - (x_1 - x_0)f[x_0, x_1, x_2]}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \tag{22}$$

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)(x - x_1)^2(x - x_2) \tag{23}$$

两点三次Hermite插值公式：$H^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad i, j \in \{0, 1\}$

$$H_3(x) = f(x_0)\left(1 + 2\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2 + f(x_1)\left(1 + 2\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2 \tag{24}$$

$$+ f'(x_0)(x - x_0)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2 + f'(x_1)(x - x_1)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2 \tag{25}$$

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2 \tag{26}$$

第三章：函数逼近

3.1 基本概念

Gram矩阵：$\varphi_1,\cdots,\varphi_n$线性无关，当且仅当$\det G\neq 0$，其中

$$G=\begin{pmatrix}(\varphi_1,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_1,\varphi_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix} \tag{27}$$

3.2 正交多项式

3.2.1 正交多项式

正交多项式：给定权函数ρ，构造幂函数系$1,x,x^2,\cdots$的正交多项式序列

$$\varphi_0=1 \tag{28}$$

$$\varphi_n=x^n-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x^n,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}\varphi_k \tag{29}$$

或

$$\varphi_{-1}=0,\qquad \varphi_0=1 \tag{30}$$

$$\varphi_{n+1}=\left(x-\frac{(x\varphi_n,\varphi_n)}{(\varphi_n,\varphi_n)}\right)\varphi_n--\frac{(\varphi_n,\varphi_n)}{(\varphi_{n-1},\varphi_{n-1})}\varphi_{n-1} \tag{31}$$

- $[a,b]$上的n次正交多项式φ_n在(a,b)上存在n个互异零点。

3.2.2 常见正交多项式

Legendre多项式：区间$[-1,1]$上关于权$\rho=1$的正交多项式为Legendre多项式

$$L_n=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n=\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k},\qquad x\in[-1,1],n\in\mathbb{N} \tag{32}$$

首一Legendre多项式

$$\tilde{L}_n=\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}L_n=\frac{n!}{(2n)!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n,\qquad n\in\mathbb{N} \tag{33}$$

- 正交性:

$$\int_{-1}^{1}L_mL_n=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \frac{2}{1+2n}, & m=n\end{cases} \tag{34}$$

- 奇偶性:

$$L_n(-x)=(-1)^nL_n(x) \tag{35}$$

- 递推关系:

$$(n+1)L_{n+1}=(2n+1)xL_n-nL_{n-1} \tag{36}$$

- 对于任意n次首一多项式$\tilde{P}_n$，成立

$$\|\tilde{L}_n\|_2\leq\|\tilde{P}_n\|_2\iff\int_{-1}^{1}\tilde{L}_n^2\leq\int_{-1}^{1}\tilde{P}_n^2 \tag{37}$$

- L_n在$[-1,1]$内存在n个不同实数零点。

Chebyshev多项式：区间$[-1,1]$上关于权$\rho=1/\sqrt{1-x^2}$的正交多项式为Chebyshev多项式

$$C_n=\cos(n\arccos x)=\frac{n}{2}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k},\qquad x\in[-1,1],n\in\mathbb{N} \tag{38}$$

令$x=\cos\theta$

$$C_n=\cos n\theta,\qquad \theta\in[0,\pi] \tag{39}$$

首一Chebyshev多项式

$$\tilde{C}_n=\frac{1}{2^{n-1}}C_n=\frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k},\qquad x\in[-1,1],n\in\mathbb{N} \tag{40}$$

- 递推关系：

$$C_{n+1}=2xC_n-C_{n-1} \tag{41}$$

- 正交性：

$$\int_{-1}^{1}\frac{C_mC_n}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \frac{\pi}{2}, & m=n\neq 0\\ \pi, & m=n=0\end{cases} \tag{42}$$

- C_{2n}仅含x的偶次幂，C_{2n+1}仅含x的奇次幂。

第二类Chebyshev多项式：区间$[-1,1]$上关于权$\rho=\sqrt{1-x^2}$的正交多项式为第二类Chebyshev多项式

$$C_n=\frac{\sin((n+1)\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}} \tag{43}$$

令$x=\sin\theta$

$$C_n=\frac{\sin(n+1)\theta}{\cos\theta},\qquad \theta\in[-\pi/2,\pi/2] \tag{44}$$

- 递推关系：

$$C_{n+1}=2xC_n-C_{n-1} \tag{45}$$

- 正交性：

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}C_mC_n=\begin{cases}0, & m\neq n\\ \frac{\pi}{2}, & m=n\end{cases} \tag{46}$$

Laguerre多项式：区间$[0,\infty)$上关于权$\rho=\mathrm{e}^{-x}$的正交多项式为Laguerre多项式

$$L_n=\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n}x^n\mathrm{e}^{-x} \tag{47}$$

- 递推关系：

$$L_{n+1}=(1+2n-x)L_n-n^2L_{n-1} \tag{48}$$

- 正交性：

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}L_mL_n=\begin{cases}0, & m\neq n\\ (n!)^2, & m=n\end{cases} \tag{49}$$

Hermite多项式：区间$(-\infty,\infty)$上关于权$\rho=\mathrm{e}^{-x^2}$的正交多项式为Hermite多项式

$$H_n = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2} \tag{50}$$

- 递推关系：

$$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1} \tag{51}$$

- 正交性：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} H_m H_n = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & m = n \end{cases} \tag{52}$$

3.2.3 Chebyshev多项式零点插值

Chebyshev多项式零点插值：在$[-1,1]$上，用Chebyshev多项式C_{n+1}的$n+1$个零点$x_k = \cos \frac{2k+1}{2(n+1)}\pi$作为插值结点，其中$k = 0, \cdots, n$，由Lagrange插值公式或Newton插值公式可得插值多项式P_n，插值余项为

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x), \qquad \xi \in (-1,1) \tag{53}$$

因此

$$|R_n| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{[-1,1]} |\omega_{n+1}| = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{[-1,1]} |\tilde{C}_{n+1}| = \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!} \tag{54}$$

3.3 最佳平方逼近

最佳平方逼近：对于函数$f \in C[a,b]$，称函数S为函数f在函数族$\mathrm{span}\{\varphi_k\}_{k=0}^n$中关于权$\rho$的最佳平方逼近，如果成立

$$\|f - S\|_2^2 = \inf_{g \in \mathrm{span}\{\varphi_n\}} \|f - g\|_2^2 \tag{55}$$

记$S = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k$，那么

$$\begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & \cdots & (\varphi_0, \varphi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_0) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, \varphi_0) \\ \vdots \\ (f, \varphi_n) \end{pmatrix} \tag{56}$$

平方偏差/均方误差为

$$\|\delta\|_2^2 = \|f - S\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n a_k (f, \varphi_k) \tag{57}$$

幂多项式系的最佳平方逼近：函数$f \in C[0,1]$在函数族$\mathrm{span}\{x^k\}_{k=0}^n$中关于权$\rho = 1$的$n$次最佳平方逼近多项式$S = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k$满足

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, x^0) \\ \vdots \\ (f, x^n) \end{pmatrix} \tag{58}$$

正交函数系的最佳平方逼近：当函数族$\{\varphi_k\}_{k=0}^n$关于权ρ正交时，最佳平方逼近为

$$S=\sum_{k=0}^{n}\frac{(f,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}\varphi_k \tag{59}$$

平方偏差/均方误差为

$$\|\delta\|_2^2=\|f-S\|_2^2=\|f\|_2^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{(f,\varphi_k)^2}{(\varphi_k,\varphi_k)} \tag{60}$$

正交多项式系的最佳平方逼近：当函数族$\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$为关于权$\rho$的正交多项式系，那么$n$次最佳平方逼近

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(f,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}\varphi_k \tag{61}$$

满足

$$\|\delta_n\|_2=\|f-S_n\|_2\to 0 \tag{62}$$

3.4 最小二乘法

最小二乘法：对于函数$f\in C[a,b]$，称函数S为函数f在函数族$\mathrm{span}\{\varphi_k\}_{k=0}^{n}$中关于权$\omega$和点$\{x_k\}_{k=1}^{n}$的最小二乘拟合，如果成立

$$\sum_{k=0}^{n}\omega(x_k)|S(x_k)-f(x_k)|^2=\inf_{g\in\mathrm{span}\{\varphi_k\}}\sum_{k=0}^{n}\omega(x_k)|g(x_k)-f(x_k)|^2 \tag{63}$$

记$S=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\varphi_k$，那么

$$\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (\varphi_n,\varphi_0) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(f,\varphi_0)\\ \vdots\\ (f,\varphi_n)\end{pmatrix} \tag{64}$$

平方偏差/均方误差为

$$\|\delta\|^2=\|f-S\|^2=\|f\|^2-\sum_{k=0}^{n}a_k(f,\varphi_k) \tag{65}$$

正交函数系的最佳平方逼近：当$\{\varphi_k\}_{k=0}^{n}$关于权ω正交时，最小二乘拟合为

$$S=\sum_{k=0}^{n}\frac{(f,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}\varphi_k \tag{66}$$

平方偏差/均方误差为

$$\|\delta\|_2^2=\|f-S\|_2^2=\|f\|_2^2-\sum_{k=0}^{n}\frac{(f,\varphi_k)^2}{(\varphi_k,\varphi_k)} \tag{67}$$

第四章：数值积分与数值微分

4.1 数值积分

左矩形公式：$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)f(a)$

右矩形公式：$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)f(b)$

中矩形公式：$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$，代数精度为$1$，求积余项为$R[f]=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)$，其中$\xi\in(a,b)$。

梯形公式：$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$，代数精度为$1$，求积余项为$R[f]=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$，其中$\xi\in(a,b)$。

数值求积公式：函数f在区间$[a,b]$上关于求积节点$\{x_k\}_{k=0}^n$和权$\{A_k\}_{k=0}^n$的数值求积公式为

$$I=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx I_n=\sum_{k=0}^n A_k f(x_k) \tag{68}$$

代数精度：称求积公式$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$具有$m$次代数精度，如果成立

$$\int_a^b x^k \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^n A_i x_i^k, \qquad k=0,\cdots,m \tag{69}$$

$$\int_a^b x^{m+1}\mathrm{d}x \neq \sum_{i=0}^n A_i x_i^{m+1} \tag{70}$$

机械求积公式：如果求积节点$\{x_k\}_{k=0}^n$和权$\{A_k\}_{k=0}^n$与被积函数$f(x)$无关，那么称函数f在区间$[a,b]$上关于求积节点$\{x_k\}_{k=0}^n$和权$\{A_k\}_{k=0}^n$的数值求积公式$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$为机械求积公式。

插值型数值求积公式：由Lagrange插值公式

$$f(x)=\sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x)+R_n(x) \tag{71}$$

其中

$$l_i(x)=\frac{\prod\limits_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod\limits_{j\neq i}(x_i-x_j)} \tag{72}$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x) \tag{73}$$

那么插值型数值求积公式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^n \int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x\cdot f(x_i) \tag{74}$$

求积余项：如果求积公式$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$具有$m$次代数精度，那么求积余项为

$$R[f]=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)=Kf^{(m+1)}(\xi),\qquad \xi\in(a,b) \tag{75}$$

$$K=\frac{1}{(m+1)!}\left(\frac{b^{m+2}-a^{m+2}}{m+2}-\sum_{k=0}^{n}A_kx_k^{m+1}\right) \tag{76}$$

收敛性：记$h=\max\limits_{1\le k\le n}\{x_k-x_{k-1}\}$，称求积公式$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\sum\limits_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$具有收敛性，如果

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\h\to0}}\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{77}$$

稳定性：称求积公式$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\sum\limits_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$具有稳定性，如果对于任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，成立

$$\sup_{0\le k\le n}|\delta_k|\le\delta\implies\left|\sum_{k=0}^{n}A_k\delta_k\right|<\varepsilon \tag{78}$$

4.2 Newton-Cotes公式

Cotes系数：

$$C_k^{(n)}=\frac{(-1)^{n-k}}{nk!(n-k)!}\int_0^n\prod_{\substack{0\le i\le n\\i\ne k}}(x-i)\mathrm{d}x \tag{79}$$

Newton-Cotes公式：等距节点$x_k=a+\frac{b-a}{n}k$的插值型求积公式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx(b-a)\sum_{k=0}^{n}C_k^{(n)}f(x_k) \tag{80}$$

Newton-Cotes公式的代数精度：

- 当n为奇数时，n阶Newton-Cotes公式具有n次代数精度。
- 当n为偶数时，n阶Newton-Cotes公式具有$n+1$次代数精度。

Newton-Cotes公式的稳定性：当且仅当$n\le 8$时，n阶Newton-Cotes公式具有稳定性。

一阶Newton-Cotes公式　梯形公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx T=\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) \tag{81}$$

$$R[f]=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi),\qquad \xi\in(a,b) \tag{82}$$

二阶Newton-Cotes公式　Simpson公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx S=\frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right) \tag{83}$$

$$R[f]=-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi),\qquad \xi\in(a,b) \tag{84}$$

三阶Newton-Cotes公式　四点八分之三Simpson公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\frac{b-a}{8}\left(f(a)+3f\left(\tfrac{2a+b}{3}\right)+3f\left(\tfrac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right) \tag{85}$$

四阶Newton-Cotes公式　Cotes公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx C = \frac{b-a}{90}\left(7f\left(a\right)+32f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+12f\left(\frac{a+b}{2}\right)+32f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+7f\left(b\right)\right) \tag{86}$$

$$R[f] = -\frac{2(b-a)}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^6 f^{(6)}(\xi), \qquad \xi\in(a,b) \tag{87}$$

4.3 复合求积公式

复合梯形公式：等距节点$x_k = a+\frac{b-a}{n}k$的复合梯形公式为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx T_n = \frac{b-a}{2n}\sum_{k=1}^{n}(f(x_{k-1})+f(x_k)) = \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\right) \tag{88}$$

复合梯形公式具有1次代数精度、收敛性、稳定性，积分余项为

$$R[f] = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi), \qquad \xi\in(a,b) \tag{89}$$

复合Simpson公式：等距节点$x_k = a+\frac{b-a}{n}k$的复合Simpson公式为

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx S_n &= \frac{b-a}{6n}\sum_{k=1}^{n}\left(f(x_{k-1})+4f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)+f(x_k)\right) &(90)\\ &= \frac{b-a}{6n}\left(f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+4\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)+f(b)\right) &(91)\end{aligned}$$

复合Simpson公式具有3次代数精度、收敛性、稳定性，积分余项为

$$R[f] = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4}f^{(4)}(\xi), \qquad \xi\in(a,b) \tag{92}$$

4.5 Gauss型求积公式

4.5.1 Gauss型求积公式

Gauss型求积公式：称加权求积公式$\int_a^b\rho(x)f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$为Gauss型求积公式，如果其具有$2n+1$次代数精度。

Gauss点：称Gauss型求积公式$\int_a^b\rho(x)f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$的求积节点$\{x_k\}_{k=0}^n$为Gauss点。

定理：加权求积公式$\int_a^b\rho(x)f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k)$的求积节点$\{x_k\}_{k=0}^n$为Gauss点$\iff$对于任意$\leq n$次多项式$p(x)$，成立

$$\int_a^b\rho(x)p(x)\omega_{n+1}(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{93}$$

其中

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n}(x-x_k) \tag{94}$$

Gauss型求积公式：

$$\int_a^b \rho(x) f(x) \mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \tag{95}$$

其中求积节点$\{x_k\}_{k=0}^n$为关于权ρ的$n+1$次正交多项式的零点，权$\{A_k\}_{k=0}^n$满足

$$\int_a^b \rho(x) x^m \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^m, \qquad 0 \le m \le 2n+1 \tag{96}$$

Gauss型求积公式具有$2n+1$次代数精度、收敛性、稳定性，积分余项为

$$R_n[f] = \frac{1}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi) \int_a^b \rho(x) \omega_{n+1}^2(x) \mathrm{d}x, \qquad \xi \in (a,b) \tag{97}$$

4.5.2 常见Gauss型求积公式

Gauss-Legendre求积公式：区间$[-1,1]$上关于权$\rho=1$的Gauss型求积公式为Gauss-Legendre求积公式

$$\int_{-1}^{1} f(x) \mathrm{d}x \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \tag{98}$$

其中求积节点$\{x_k\}_{k=0}^n$为$n+1$次Legendre多项式$L_{n+1}(x)$的零点，权$\{A_k\}_{k=0}^n$满足

$$\int_{-1}^{1} x^m \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} A_k x_k^m, \qquad 0 \le m \le 2n+1 \tag{99}$$

Gauss-Legendre求积公式具有$2n+1$次代数精度、收敛性、稳定性，积分余项为

$$R_n[f] = \frac{2^{2n+3}((n+1)!)^4}{(2n+3)((2n+2)!)^3} f^{(2n+2)}(\xi), \qquad \xi \in (-1,1) \tag{100}$$

特别的

$$\int_{-1}^{1} f(x) \mathrm{d}x \approx 2f(0) \tag{101}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x) \mathrm{d}x \approx f(-1/\sqrt{3}) + f(1/\sqrt{3}) \tag{102}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x) \mathrm{d}x \approx \frac{5}{9} f(-\sqrt{15}/5) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(\sqrt{15}/5) \tag{103}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x) \mathrm{d}x \approx & \frac{1}{36}\left(18+\sqrt{30}\right) f\left(-\sqrt{\frac{1}{35}\left(15-2\sqrt{30}\right)}\right) && (104)\\
& + \frac{1}{36}\left(18+\sqrt{30}\right) f\left(\sqrt{\frac{1}{35}\left(15-2\sqrt{30}\right)}\right) && (105)\\
& + \frac{1}{36}\left(18-\sqrt{30}\right) f\left(-\sqrt{\frac{1}{35}\left(15+2\sqrt{30}\right)}\right) && (106)\\
& + \frac{1}{36}\left(18-\sqrt{30}\right) f\left(\sqrt{\frac{1}{35}\left(15+2\sqrt{30}\right)}\right) && (107)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x) \mathrm{d}x \approx \frac{128}{225} f(0) & + \frac{1}{900}\left(322+13\sqrt{70}\right) f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{7}\left(35-2\sqrt{70}\right)}\right) && (108)\\
& + \frac{1}{900}\left(322+13\sqrt{70}\right) f\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{7}\left(35-2\sqrt{70}\right)}\right) && (109)\\
& + \frac{1}{900}\left(322-13\sqrt{70}\right) f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{7}\left(35+2\sqrt{70}\right)}\right) && (110)\\
& + \frac{1}{900}\left(322-13\sqrt{70}\right) f\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{7}\left(35+2\sqrt{70}\right)}\right) && (111)
\end{aligned}$$

Gauss-Chebyshev求积公式：区间$[-1,1]$上关于权$\rho=1/\sqrt{1-x^2}$的Gauss型求积公式为Gauss-Chebyshev求积公式

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\approx\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n}f(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi) \tag{112}$$

Gauss-Chebyshev求积公式具有$2n-1$次代数精度、收敛性、稳定性，积分余项为

$$R_n[f]=\frac{2\pi}{2^{2n}(2n)!}f^{(2n)}(\xi),\qquad \xi\in(-1,1) \tag{113}$$

Gauss-Laguerre求积公式：区间$[0,\infty)$上关于权$\rho=\mathrm{e}^{-x}$的Gauss型求积公式为Gauss-Laguerre求积公式

$$\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-x}f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k) \tag{114}$$

其中求积节点$\{x_k\}_{k=0}^{n}$为$n+1$次Laguerre多项式$L_{n+1}(x)$的零点，权$A_k=\dfrac{((n+1)!)^2}{x_k(L'_{n+1}(x_k))^2}$。Gauss-Laguerre求积公式具有$2n+1$次代数精度、收敛性、稳定性，积分余项为

$$R_n[f]=\frac{((n+1)!)^2}{2(n+1)!}f^{(2n+2)}(\xi),\qquad \xi\in(0,\infty) \tag{115}$$

Gauss-Hermite求积公式：区间$(-\infty,\infty)$上关于权$\rho=\mathrm{e}^{-x^2}$的Gauss型求积公式为Gauss-Hermite求积公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}f(x)\mathrm{d}x\approx\sum_{k=0}^{n}A_kf(x_k) \tag{116}$$

其中求积节点$\{x_k\}_{k=0}^{n}$为$n+1$次Hermite多项式$H_{n+1}(x)$的零点，权$A_k=\dfrac{2^{n+2}(n+1)!\sqrt{\pi}}{(H'_{n+1}(x_k))^2}$。Gauss-Hermite求积公式具有$2n+1$次代数精度、收敛性、稳定性，积分余项为

$$R_n[f]=\frac{((n+1)!)^2}{2(n+1)!}f^{(2n+2)}(\xi),\qquad \xi\in(-\infty,\infty) \tag{117}$$

第五章：解线性方程的直接法

5.1 矩阵范数

向量范数：称$\|x\|$为向量$x \in \mathbb{C}^n$的范数，如果

- $\|x\| \geq 0$，当且仅当$x = 0$时等号成立。
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

矩阵范数：称$\|A\|$为矩阵$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$的范数，如果

- $\|A\| \geq 0$，当且仅当$A = 0$时等号成立。
- $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

矩阵的算子范数：定义关于向量范数$\|\cdot\|$的矩阵范数为

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \tag{118}$$

常见矩阵范数：

$$\text{矩阵范数}\begin{cases} \text{算子范数} & \begin{cases} \text{行范数} & \|A\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \\ \text{列范数} & \|A\|_1 = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \\ \text{谱范数} & \|A\|_2 = \max\left\{\sqrt{\lambda} : \exists x, A^T A x = \lambda x\right\} \end{cases} \\ \text{非算子范数} & F-\text{范数}: \|A\|_F = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{1/2} \end{cases} \tag{119}$$

谱半径：定义矩阵$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$的谱半径为

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \exists x, Ax = \lambda x\} \tag{120}$$

条件数：定义非奇异矩阵A的条件数为

$$\mathrm{cond}_v(A) = \|A^{-1}\|_v \|A\|_v \tag{121}$$

- 谱条件数：$\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\max\left\{\sqrt{\lambda} : \exists x, A^T A x = \lambda x\right\}}{\min\left\{\sqrt{\lambda} : \exists x, A A^T x = \lambda x\right\}}$
- $A^T = A$：$\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\max\{|\lambda| : \exists x, Ax = \lambda x\}}{\min\{|\lambda| : \exists x, Ax = \lambda x\}}$
- $\mathrm{cond}_v(A) \geq 1$
- 如果$\lambda \neq 0$，那么$\mathrm{cond}_v(\lambda A) = \mathrm{cond}_v(A)$。
- 如果$A^T A = A A^T = I$，那么$\mathrm{cond}_2(A) = 1$。
- 如果$Q^T Q = Q Q^T = I$，那么$\mathrm{cond}_2(QA) = \mathrm{cond}_2(AQ) = \mathrm{cond}_2(A)$。

第六章：解线性方程的迭代法

6.1 向量序列与矩阵序列

向量序列的极限：定义向量序列的极限为坐标极限的向量。

矩阵序列的极限：定义矩阵序列的极限为坐标极限的矩阵。

6.2 迭代法

一阶线性定常迭代：对于非奇异矩阵A，将线性方程$Ax=b$等价改写为$x=Bx+f$，对于任意初始向量$x^{(0)}$，构造迭代公式

$$x^{(n+1)}=Bx^{(n)}+f \tag{122}$$

迭代误差：

$$\varepsilon^{(n)}=x^{(n)}-x=B^n(x^{(0)}-x) \tag{123}$$

一阶线性定常迭代的基本定理：对于任意初始向量$x^{(0)}$，一阶线性定常迭代$x^{(n+1)}=Bx^{(n)}+f$收敛的充分必要条件为

$$\lim_{n\to\infty}B^n=O \iff \rho(B)<1 \tag{124}$$

压缩映像原理：如果存在算子范数$\|\cdot\|$，使得成立$\|B\|=q<1$，那么一阶线性定常迭代$x^{(n+1)}=Bx^{(n)}+f$收敛，且成立

$$\left\|x^{(n)}-x\right\|\le q^n\left\|x^{(0)}-x\right\| \tag{125}$$

$$\left\|x^{(n)}-x\right\|\le \frac{q}{1-q}\left\|x^{(n)}-x^{(n-1)}\right\| \tag{126}$$

$$\left\|x^{(n)}-x\right\|\le \frac{q^n}{1-q}\left\|x^{(1)}-x^{(n-1)}\right\| \tag{127}$$

迭代次数：若要求$\left\|x^{(n)}-x\right\|\le\varepsilon$时迭代结束，那么迭代次数为

$$N=\left\lceil\frac{\ln\varepsilon(1-q)-\ln\left\|x^{(n)}-x\right\|}{\ln q}\right\rceil \tag{128}$$

渐进收敛速度：$R(B)=-\ln\rho(B)$，$\rho(B)$越小，收敛速度越快。

6.3 常用一阶定常迭代

对于线性方程$Ax=b$，将$A=\{a_{ij}\}_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}$分裂为$D-L-U$：

$$\begin{pmatrix}a_{11}&&&&\\&a_{22}&&&\\&&\ddots&&\\&&&a_{n-1,n-1}&\\&&&&a_{nn}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&&&&\\-a_{21}&0&&&\\\vdots&\vdots&\ddots&&\\-a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&\cdots&0&\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&-a_{n,n-1}&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-a_{21}&\cdots&-a_{1,n-1}&-a_{1n}\\&0&\cdots&-a_{2,n-1}&-a_{2n}\\&&\ddots&\vdots&\vdots\\&&&0&-a_{n-1,n}\\&&&&0\end{pmatrix} \tag{129}$$

Jacobi迭代：如果$\det D\neq 0$，那么

$$\begin{gathered}Ax=b\iff x=(I-D^{-1}A)x+D^{-1}b\iff x=B_Jx+f_J\\ x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j\neq i}a_{ij}x_j^{(k)}\right),\qquad 1\le i\le n,k\in\mathbb{N}\end{gathered} \tag{130}$$

Gauss-Seidel迭代：如果$\det D\neq 0$，那么

$$
\begin{gathered}
Ax=b \iff x=(I-(D-L)^{-1}A)x+(D-L)^{-1}b \iff x=B_Gx+f_G \\
x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right), \qquad 1\le i\le n, k\in\mathbb{N}
\end{gathered} \tag{131}
$$

逐次超松弛迭代(SOR)迭代：选择松弛因子$w>0$，那么

$$
\begin{gathered}
Ax=b \iff x=(I-w(D-wL)^{-1}A)x+w(D-wL)^{-1}b \iff x=B_wx+f_w \\
x_i^{(k+1)}=x_i^k+\frac{w}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right), \qquad 1\le i\le n, k\in\mathbb{N}
\end{gathered} \tag{132}
$$

$w>1$时称为超松弛法，$w<1$时称为低松弛法，$w=1$即为G-S迭代。

定理：如果线性方程$Ax=b$的系数矩阵A为正定三对角矩阵，那么Jacobi迭代中$\rho(B_J)<1$，SOR迭代中松弛因子的最佳选择为

$$
w_{\text{opt}}=\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho^2(B_J)}} \tag{133}
$$

此时$\rho(B_{w_{\text{opt}}})=w_{\text{opt}}-1$。

定理：对于非齐次线性方程$Ax=b$，其中$\det A\neq 0$，如果$A^T=A$，且A的对角线元素$a_{ii}>0$，那么

- Jacobi迭代收敛 $\iff$ $A, 2D-A$为正定矩阵。
- A为正定矩阵 $\Longrightarrow$ G-S迭代收敛。
- A为正定矩阵，且$0<w<2$ $\Longrightarrow$ SOR迭代收敛。

严格对角占优矩阵：称矩阵A为严格对角占优矩阵，如果对于任意i，成立

$$
|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}| \tag{134}
$$

弱对角占优矩阵：称矩阵A为弱对角占优矩阵，如果对于任意i，成立

$$
|a_{ii}|\geq\sum_{j\neq i}|a_{ij}| \tag{135}
$$

且存在i_0，使得成立

$$
|a_{i_0i_0}|>\sum_{j\neq i_0}|a_{i_0j}| \tag{136}
$$

可约矩阵：称矩阵A为可约矩阵，如果存在置换矩阵P，使得成立

$$
P^TAP=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} \tag{137}
$$

定理：对于非齐次线性方程$Ax=b$，如果A为严格对角占优矩阵，或弱对角占优不可约矩阵，那么

- Jacobi迭代收敛，G-S迭代收敛。
- $0<w\le 1$ $\Longrightarrow$ SOR迭代收敛。

第七章：非线性方程的数值解

7.1 二分法

二分法：

$$|x^* - x_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \tag{138}$$

7.2 不动点迭代

不动点迭代：对于方程$x = \varphi(x)$，如果$\varphi([a,b]) \subset [a,b]$，且存在$L < 1$，使得对于任意$x, y \in [a,b]$，成立

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < L|x - y| \tag{139}$$

那么方程$x = \varphi(x)$在$[a,b]$内存在且存在唯一解x^*。

$$|x_n - x^*| < \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|, \qquad |x_n - x^*| < \frac{L}{1-L}|x_{n+1} - x_n| \tag{140}$$

收敛阶：对于不动点迭代$x_{n+1} = \varphi(x_n)$，如果

$$(x_{n+1} - x^*)/(x_n - x^*)^p \to C \neq 0 \tag{141}$$

那么称该迭代为p阶收敛的。

- 如果$p = 1, |C| < 1$，那么称该迭代为线性收敛。
- 如果$p > 1$，那么称该迭代为超线性迭代。
- 如果$p = 2$，那么称该迭代为平方收敛。

定理：对于不动点迭代$x_{n+1} = \varphi(x_n)$，以及$p \in \mathbb{N}^*$，如果$\varphi^{(p)}$在x^*邻域内连续，且

$$\varphi^{(k)}(x^*) = 0, \quad 1 \leq k \leq p-1, \qquad \varphi^{(p)}(x^*) \neq 0 \tag{142}$$

那么该迭代为p阶收敛，且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^p} = \frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!} \tag{143}$$

7.4 Newton法

Newton法：方程$f(x) = 0$的迭代

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \qquad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{144}$$

如果$f(x^*) = 0$且$f'(x^*) \neq 0$，那么Newton迭代在x^*附近为平方收敛，且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \tag{145}$$

简化Newton法/平行弦法：方程$f(x) = 0$的迭代

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \tag{146}$$

Newton下山法：方程$f(x) = 0$的迭代

$$x_{n+1} = x_n - \lambda_n \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{147}$$

其中下山因子

$$\lambda_n = \max \left\{ \frac{1}{2^r} : \left| f\left(x_n - \frac{f(x_n)}{2^r f'(x_n)} \right) \right| < |f(x_n)|, r \in \mathbb{N}^* \right\} \tag{148}$$

重根Newton法：如果x^*为方程$f(x) = 0$的m重根，那么迭代

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \qquad \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{149}$$

此时

$$\varphi'(x^*) = 1 - \frac{1}{m} \tag{150}$$

因此该迭代为线性收敛。

含参m的Newton迭代法：如果x^*为方程$f(x) = 0$的m重根，那么迭代

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \qquad \varphi(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)} \tag{151}$$

此时

$$\varphi'(x) = 1 - m + m\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}, \qquad \varphi'(x^*) = 0 \tag{152}$$

因此该迭代为平方收敛。

改进Newton迭代法：如果x^*为方程$f(x) = 0$的m重根，那么迭代

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \qquad \varphi(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)}, \qquad \mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{153}$$

此时x^*为方程$\mu(x) = 0$的单根，因此该迭代为平方收敛。

第九章：常微分方程初值问题的数值解

9.1 简单的数值方法

初值问题：初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\tag{154}$$

9.1.1 Euler方法

Euler公式：

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n),\qquad x_n=x_0+nh\tag{155}$$

后退Euler公式：

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1}),\qquad x_n=x_0+nh\tag{156}$$

中心Euler公式：

$$y_{n+1}=y_{n-1}+hf(x_n,y_n),\qquad x_n=x_0+nh\tag{157}$$

改进Euler法：

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(f(x_n,y_n)+f(x_n+h,y_n+hf(x_n,y_n)))\tag{158}$$

9.1.2 梯形方法

梯形公式：

$$y_{n+1}=y_n+\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x,y)\mathrm{d}x,\qquad x_n=x_0+nh\tag{159}$$

积分利用左矩形公式：

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n),\qquad x_n=x_0+nh\tag{160}$$

积分利用右矩形公式：

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1}),\qquad x_n=x_0+nh\tag{161}$$

积分利用梯形公式：

$$\begin{cases}y_p=y_n+hf(x_n,y_n)\\ y_c=y_n+hf(x_{n+1},y_p)\\ y_{n+1}=\frac{1}{2}(y_p+y_c)\end{cases}\tag{162}$$

9.1.3 单步法的局部阶段误差与阶

显示单步法：

$$y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,h)\tag{163}$$

隐式单步法：

$$y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,y_{n+1},h)\tag{164}$$

局部截断误差：设$y(x)$为初值问题的精确解，那么定义显示单步法在x_{n+1}处的局部阶段误差为

$$T_{n+1}=y(x_{n+1})-y(x_n)-h\varphi(x_n,y(x_n),h) \tag{165}$$

精度：设$y(x)$为初值问题的精确解，如果存在最大整数p使得单步法的局部阶段误差满足

$$T_{n+1}=O(h^{p+1}) \tag{166}$$

那么称该方法为p阶精度。

9.2 Runge-Kutta方法

r级Runge-Kutta方法：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,h) \\ \varphi(x_n,y_n,h)=\sum_{i=1}^{r}c_iK_i \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_i=f\left(x_n+\lambda_ih,y_n+h\sum_{j=1}^{i-1}\mu_{ij}K_j\right), \qquad 2\le i\le r \end{cases} \tag{167}$$

一级Runge-Kutta方法：

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \tag{168}$$

一级Runge-Kutta方法为1阶精度。

二级Runge-Kutta方法：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+h((1-a)K_1+aK_2) \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_n+h/(2a),y_n+hK_1/(2a)) \end{cases} \tag{169}$$

二级Runge-Kutta方法为2阶精度。

$a=1/2$为**改进Euler法**：

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(f(x_n,y_n)+f(x_n+h,y_n+hf(x_n,y_n))) \tag{170}$$

$a=1$为**中点公式**：

$$y_{n+1}=y_n+hf\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}f(x_n,y_n)\right) \tag{171}$$

经典三阶Runge-Kutta方法：

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+4K_2+K_3) \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f\left(x_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}K_1\right) \\ K_3=f\left(x_n+h,y_n-hK_1+2hK_2\right) \end{cases} \tag{172}$$

经典四阶Runge-Kutta方法：

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\
K_1 = f(x_n, y_n) \\
K_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right) \\
K_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2\right) \\
K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3)
\end{cases} \tag{173}
$$

9.3 单步法的收敛性与稳定性

收敛性：称数值方法为收敛的，如果对于$x_n = x_0 + nh$，成立

$$\lim_{h \to 0} y_n = y(x_n) \tag{174}$$

收敛性定理：如果单步法

$$y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h) \tag{175}$$

具有$p \geq 1$阶精度，且增量函数φ关于y满足Lipschitz条件

$$|\varphi(x, y_1, h) - \varphi(x, y_2, h)| \leq L|y_1 - y_2| \tag{176}$$

同时$y_0 = y(x_0)$，那么

$$y(x_n) - y_n = O(h^p) \tag{177}$$

Euler方法：如果$f(x, y)$关于y满足Lipschitz条件，那么Euler方法收敛。

改进Euler法：如果$f(x, y)$关于y满足Lipschitz条件，那么改进Euler方法收敛。

相容性：称单步法与初值问题相容，如果

$$\varphi(x, y, 0) = f(x, y) \tag{178}$$

相容性定理：p阶方法与初值问题相容$\iff p \geq 1$。

稳定性：称数值方法为稳定的，如果在节点值y_n上有大小为δ的扰动，而以后各节点y_m上产生的偏差不超过δ，其中$m > n$。

绝对稳定性：称单步法为绝对稳定的，如果解微分方程$y' = \lambda y$得到的解$y_{n+1} = E(\lambda h)y_n$满足$|E(\lambda h)| < 1$。

- Euler方法：$E(\lambda h) = 1 + \lambda h$
- 二阶Runge-Kutta方法：$E(\lambda h) = 1 + \lambda h + (\lambda h)^2/2$
- 三阶Runge-Kutta方法：$E(\lambda h) = 1 + \lambda h + (\lambda h)^2/2 + (\lambda h)^3/3!$

绝对稳定域：定义绝对稳定的单步法的绝对稳定域为

$$\{(\lambda, h) \in \mathbb{C}^2 : |E(\lambda h)| < 1\} \tag{179}$$

绝对稳定区间：定义绝对稳定的单步法的绝对稳定区间为

$$\{(\lambda, h) \in \mathbb{R}^2 : |E(\lambda h)| < 1\} \tag{180}$$

A-稳定性：称单步法为A-稳定的，如果

$$|E(\lambda h)| < 1 \implies \mathrm{Re}(\lambda h) < 0 \tag{181}$$