常微分方程教程

致敬

中国微分方程界的先辈：申又枨先生

本书作者：丁同仁先生 李承志先生

目录

第一章：基本概念

1.1 微分方程及其解的定义

1. 常微分方程：凡是联系自变量x，与该自变量的未知函数$y=y(x)$以及其导数$y^{(k)}=y^{(k)}(x),k=1,\cdots,n$在内的方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{1}$$

称之为常微分方程，其中导数实际出现的最高阶数n称做常微分方程的阶。

2. 线性常微分方程：对于微分方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{2}$$

如果函数F对于$y,y',\cdots,y^{(n)}$的全体而言是一次的，则称之为线性常微分方程；反之称之为非线性常微分方程。

3. Cauchy问题（初值问题）：

$$\begin{cases}F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0\\ y^{(k)}(x_0)=y_k,k=0,\cdots,n-1\end{cases} \tag{3}$$

4. 常微分方程的解：对于微分方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{4}$$

设函数$y=\varphi(x)$在区间J上连续，且存在n阶导数，如果

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0 \tag{5}$$

在J上恒成立，则称$y=\varphi(x)$为微分方程(1)在区间J上的一个解。

5. 常微分方程的通解：设n阶常微分方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{6}$$

的解$y=\varphi(x,C_1,\cdots,C_n)$包含$n$个独立的任意常数$C_1,\cdots,C_n$，则称之为常微分方程的通解。这里$n$个任意常数$C_1,\cdots,C_n$是独立的，蕴含其Jacobi矩阵

$$\frac{D[\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)}]}{D[C_1,\cdots,C_n]}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial C_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial C_n}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{7}$$

其中$\varphi^{(k)}=\frac{\partial\varphi^k}{\partial^k x},k=0,\cdots,n-1$。

6. 常微分方程的特解：如果常微分方程的解不包含任意常数，则称之为特解。即确定了任意常数$C_1,\cdots,C_n$后，通解就变成了特解。实际问题中，任意常数$C_1,\cdots,C_n$通常由初始条件给出。

7. 对n阶常微分方程的通解关于n个任意常数的独立性的思考

    1. 一个n阶常微分方程包含n个独立的任意常数。

2. 反之，设$y=\varphi(x,C_1,\cdots,C_n)$是充分光滑的函数族，其中$x$是自变量，而$C_1,\cdots,C_n$是$n$个独立参数，则存在$n$阶常微分方程$(1)$，其通解为$y=\varphi(x,C_1,\cdots,C_n)$。

1.2 微分方程及其解的几何解释

1. 对于一阶微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$，其中$f(x,y)$是区域$G$内的连续函数。假设$y=\varphi(x),x\in I$是方程的解，则$y=\varphi(x),x\in I$在$(x,y)$平面上表示一条光滑的曲线$\Gamma$，则称其为原方程的积分曲线。
2. 曲线积分Γ在$P_0(x_0,y_0)$点的切向量为$(1,f(x_0,y_0))$，这样曲线Γ在P_0点的变化趋势由P_0本身决定，这揭示了微分方程的几何本质。
3. 线素：在区域G内每一点$P(x,y)$，做斜率为$f(x,y)$的短小线段$l(P)$，称之为微分方程在$P\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$点的线素。倘若以$P(x,y)$为起点作向量$(1,f(x,y))$，则可得到带有方向的线素。线素可以反应该点在积分曲线的变化趋势。
4. 线素场：带有线素的区域。

第二章：初等积分法

2.1 恰当方程

1. 恰当方程：称一阶微分方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{8}$$

为恰当方程或全微分方程，如果存在一个可微函数$\Phi(x,y)$，使得成立

$$\mathrm{d}\Phi(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y \tag{9}$$

2. 通积分：$\Phi(x,y)=C$称为恰当方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{10}$$

的通积分。

3. 设函数$P(x,y)$和$Q(x,y)$在单连通区域上R连续，且具有连续的一阶偏导数，则一阶微分方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{11}$$

为恰当方程的充分必要条件为恒等式

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \tag{12}$$

在R内成立。

4. 恰当方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{13}$$

的通积分为

$$\Phi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y \tag{14}$$

或

$$\Phi(x,y)=\int_{y_0}^{y}P(x_0,y)\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x}Q(x,y)\mathrm{d}x \tag{15}$$

其中(x_0,y_0)为内任R意取定的一点。

5. > 求解恰当方程的关键是构造相应全微分的原函数$\Phi(x,y)$，这实际上就是场论中的位势问题，在单连通区域R上，$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$保证曲线积分$\Phi(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y$与积分路径无关，因此$\Phi(x,y)$为单值函数。对于非单连通区域，一般而言$\Phi(x,y)$也许是多值的，例如对于方程$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0$在非单连通区域的环域$R_0=\big\{(x,y)|0<x^2+y^2<1\big\}$上的原函数$\arctan\frac{y}{x}$为多值函数。

2.2 变量分离的方程

1. 变量分离的方程：

$$P_1(x)P_2(y)\mathrm{d}x+Q_1(x)Q_2(y)\mathrm{d}y=0 \tag{16}$$

2. 特别的，若

$$\begin{cases}P_1(x)P_2(y)=P(x)\\Q_1(x)Q_2(y)=Q(y)\end{cases} \tag{17}$$

则微分方程的通积分为

$$\int P(x)\mathrm{d}x+\int Q(y)\mathrm{d}y=C \tag{18}$$

3. 求解变量分离的方程

$$P_1(x)P_2(y)\mathrm{d}x+Q_1(x)Q_2(y)\mathrm{d}y=0 \tag{19}$$

   1. $Q_1(x)=0:x=x_k,k=1,2,\cdots$
   2. $P_2(y)=0:y=y_k,k=1,2,\cdots$
   3. $Q_1(x)P_2(x)\neq 0:\int\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\mathrm{d}x+\int\frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\mathrm{d}y=C$

2.3 一阶线性方程

1. 一阶齐次线性方程
   1. 方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0 \tag{20}$$

   其中$p(x)$在区间$I=(a,b)$上连续。

   2. 解：

$$y=C\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x},C\in R \tag{21}$$

2. 一阶非齐次线性方程
   1. 方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x) \tag{22}$$

   其中$p(x)$和$q(x)$在区间$I=(a,b)$上连续。

   2. 解：

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}(C+\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x),C\in R \tag{23}$$

3. 一阶非齐次线性方程的解法
   1. 积分因子法：方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x) \tag{24}$$

   改写为对称形式$\mathrm{d}y+p(x)y\mathrm{d}x=q(x)\mathrm{d}x$，两侧与因子$\mu(x)=\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$作积，整理得$\mathrm{d}(y\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x})=\mathrm{d}(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x)$，两侧积分，便可得到解

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}(C+\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x),C\in R \tag{25}$$

2. 常数变易法：设方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=0 \tag{26}$$

的解为 $y=C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$，代入原方程得 $C'(x)=q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$，因此 $C(x)=\int q(x)e^{\int p(x)\mathrm{d}x}+C,C\in R$，进而可得到解

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}(C+\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x),C\in R \tag{27}$$

4. 初值问题的解：初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)\\ y(x_0)=y_0\end{cases} \tag{28}$$

的解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}(y_0+\int_{x_0}^{x}q(s)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{s}p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s) \tag{29}$$

或

$$y=y_0\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}+\int_{x_0}^{x}q(s)\mathrm{e}^{-\int_{s}^{x}p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s \tag{30}$$

5. 线性方程的性质
   1. 齐次线性方程的解或恒等于零，或恒不等于零。
   2. 线性方程的解是整体存在的，即方程的任一解都在$p(x)$和$q(x)$有定义且连续的整个区间I上存在。
   3. 齐次线性方程的任何解的线性组合仍是其解。
   4. 非齐次线性方程的任一解与其对应的齐次线性方程的任一解之和是非线性方程组的解。
   5. 非齐次线性方程的任意两解是其对应的齐次线性方程的解。
   6. 非齐次线性方程的任一解与其对应的齐次线性方程的通解之和构成非齐次线性方程的通解。
   7. 线性方程的处置问题的解存在且存在唯一。

2.4 初等变换法

1. 齐次方程
   1. 对于齐次方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{31}$$

其中$P(x,y)$和$Q(x,y)$均为n次齐次函数，即对于任意$t\in R$，满足$P(tx,ty)=t^nP(x,y)$和$Q(tx,ty)=t^nQ(x,y)$。

1. 记$y=xz$；
2. 方程化为$x^n((P(1,z)+zQ(1,z))\mathrm{d}x+xQ(1,z)\mathrm{d}z)=0$；
3. 记

$$\Phi(z)=\int\frac{Q(1,z)}{P(1,z)+zQ(1,z)}\mathrm{d}z \tag{32}$$

则通解为

$$C-\ln|x|=\Phi(\frac{y}{x}) \tag{33}$$

4. 对于连续可微的齐次函数$f(x,y)$，即存在$n\in R$，成立

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y) \tag{34}$$

则函数满足性质

$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=nf(x,y) \tag{35}$$

5. $x=0$不一定为原齐次方程的特解。

2. 广义齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(\frac{ax+by+c}{mx+ny+l}) \tag{36}$$

1. $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}\neq 0$
   1. 取α,β满足$\begin{cases} a\alpha+b\beta+c=0 \\ m\alpha+n\beta+l=0 \end{cases}$，即$\begin{cases} \alpha=\frac{bl-cn}{an-bm} \\ \beta=\frac{cm-al}{an-bm} \end{cases}$；
   2. 记$\begin{cases} x=z+\alpha \\ y=w+\beta \end{cases}$；
   3. 方程化为$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=f(\frac{az+bw}{mz+nw})$；
   4. 记$\Phi(u)=\int\frac{\mathrm{d}u}{f(\frac{a+bu}{m+nu})-u}$，则通解为$C+\ln|x|=\Phi(\frac{y-\beta}{x-\alpha})$。
2. $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix}=0$
   1. $a=b=c=d=0: y=f(\frac{c}{l})x+C$;
   2. $a=b=0$，m,n不全为0
      1. 记$z=mx+ny$；
      2. 方程化为$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=m+nf(\frac{c}{z+l})$；
      3. 记$\Phi(z)=\int\frac{\mathrm{d}z}{m+nf(\frac{c}{z+l})}$，则通解为$C+x=\Phi(mx+ny)$。
   3. a,b不全为0
      1. 取λ满足$\begin{cases} m=a\lambda \\ n=b\lambda \end{cases}$；
      2. 记$z=ax+by$；
      3. 方程化为$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=a+bf(\frac{z+c}{\lambda z+l})$；
      4. 记$\Phi(z)=\int\frac{\mathrm{d}z}{a+bf(\frac{z+c}{\lambda z+l})}$，则通解为$C+x=\Phi(ax+by)$。

2. Bernoulli方程

1. Bernoulli方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)y^n, n\neq 0,1 \tag{37}$$

2. 方程的解
   1. 记$z=y^{1-n}$；
   2. 方程化为$$；
   3. 通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int(1-n)p(x)\mathrm{d}x}(C+\int(1-n)q(x)\mathrm{e}^{\int(1-n)p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x), C\in R \tag{38}$$

3. Riccati方程

1. Riccati方程：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y^2+q(x)y+r(x) \tag{39}$$

其中函数$p(x),q(x),r(x)$在区间I上连续，且$p(x)$不恒为0。

2. 方程的解：若已知Riccati方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y^2+q(x)y+r(x) \tag{40}$$

的一个特解为$y=\varphi(x)$，则可求出通解。

   1. 记$z=y-\varphi$；
   2. 方程化为$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(2p(x)\varphi(x)+q(x))z+p(x)z^2$，此为Bernoulli方程；
   3. 通解为

$$y=\varphi(x)+\frac{\mathrm{e}^{\int(2p(x)\varphi(x)+q(x))\mathrm{d}x}}{C-\int p(x)\mathrm{e}^{\int(2p(x)\varphi(x)+q(x))\mathrm{d}x}\mathrm{d}x},C\in R \tag{41}$$

3. Bernoulli-Liouville定理：对于Riccati方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+ay^2=bx^n \tag{42}$$

其中$a\neq 0,b,n$均为常数且$xy\neq 0$，则该Riccati方程有初等积分解的充分必要条件是$n=0,-2,\frac{-4k}{2k+1}$或$\frac{-4k}{2k-1}$，其中$k\in N$。

   1. $n=0:C+x=\int\frac{\mathrm{d}y}{b-ay^2}$。
   2. $n=-2$
      1. 记$z=xy$；
      2. 方程化为$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{b+z-az^2}{x}$；
      3. 记$\Phi(z)=\int\frac{\mathrm{d}z}{b+z-az^2}$，则通解为$C+\ln|x|=\Phi(xy)$。

4. Riccati方程与二阶线性齐次微分方程
   1. 二阶线性齐次微分方程：

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{43}$$

   2. 二阶线性齐次微分方程化为Riccati方程
      1. 记z满足$y'=yz$；
      2. 方程化为$z'+z^2+p(x)z+q(x)=0$。
   3. 若已知二阶线性微分方程(26)的一个特解为$y=\varphi(x)$，则通解为$y=C_1\varphi(x)(C_2+\int\frac{\mathrm{d}x}{\varphi^2(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}})$。

2.5 积分因子法

1. 积分因子：对于一般的微分方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{44}$$

若存在可微的非零函数$\mu=\mu(x,y)$满足使得$\mu(x,y)P(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\mathrm{d}y=0$成为恰当方程，即

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \tag{45}$$

则称函数$\mu=\mu(x,y)$为恰当方程的积分因子。

2. 求解微分方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{46}$$

就是求解一阶偏微分方程

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \tag{47}$$

虽然理论上该偏微分方程的解是存在的，但是其解要归结于方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{48}$$

的解。

3. 特殊情况

类型	条件	积分因子
$\mu(x)$	$\frac{P_x-Q_y}{Q}=g(x)$	$\mathrm{e}^{\int g(x)\mathrm{d}x}$
$\mu(y)$	$\frac{P_x-Q_y}{-P}=g(y)$	$\mathrm{e}^{\int g(y)\mathrm{d}y}$
$\mu(x^\alpha y^\beta)$	$\frac{P_x-Q_y}{\frac{\alpha Q}{x}-\frac{\beta P}{y}}\frac{1}{x^\alpha y^\beta}=g(x^\alpha y^\beta)$	$\mathrm{e}^{\int g(u)\mathrm{d}u}\big\|_{u=x^\alpha y^\beta}$
$\mu(\varphi(x,y))$	$\frac{P_y-Q_x}{Q\varphi_x-P\varphi_y}=g(\varphi(x,y))$	$\mathrm{e}^{\int g(u)\mathrm{d}u}\big\|_{u=\varphi(x,y)}$

4. 若$\mu=\mu(x,y)$为微分方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{49}$$

的一个积分因子，使得成立

$$\mu(x,y)P(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\mathrm{d}y=\mathrm{d}\Phi(x,y) \tag{50}$$

那么$\mu(x,y)g(\Phi(x,y))$也是该微分方程的一个积分因子，其中g为任意可微非零函数，此时

$$\begin{aligned}&\mu(x,y)g(\Phi(x,y))P(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)g(\Phi(x,y))Q(x,y)\mathrm{d}y\\=&\mathrm{d}(\int g(\Phi(x,y))\mathrm{d}\Phi(x,y))\end{aligned} \tag{51}$$

5. 分组求积分因子法：假设微分方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{52}$$

可写成

$$(P_1(x,y)\mathrm{d}x+Q_1(x,y)\mathrm{d}y)+(P_2(x,y)\mathrm{d}x+Q_2(x,y)\mathrm{d}y)=0 \tag{53}$$

其中存在积分因子$\mu_1=\mu_1(x,y)$和$\mu_2=\mu_2(x,y)$，使得成立$\mu_1(P_1\mathrm{d}x+Q_1\mathrm{d}y)=\mathrm{d}\Phi_1$和$\mu_2(P_2\mathrm{d}x+Q_2\mathrm{d}y)=\mathrm{d}\Phi_2$。若选取合适的可微非零函数$g_1$和$g_2$，使得$\mu_1 g_1(\Phi_1)=\mu_2 g_2(\Phi_2)$，则$\mu=\mu_1 g_1(\Phi_1)=\mu_2 g_2(\Phi_2)$就是该微分方程的一个积分因子。

2.6 应用举例

1. 等角轨线
    1. 平面上由方程$\Phi(x,y,C)=0$给出一个以C为参数的曲线族，求解另一个曲线族$\Psi(x,y,K)=0$，使之满足两者相交成定角θ。
    2. 由方程$\Phi(x,y,C)=0$得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=H(x,y)$，进而曲线族$\Psi(x,y,K)=0$的微分方程如下：

1. $\theta \neq \frac{\pi}{2}$: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{H(x,y)+\tan\theta}{1-H(x,y)\tan\theta}$
2. $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{1-H(x,y)}$

2. 人口总数发展趋势的估计。

3. 捕食者与被捕食者的生态问题。

第三章：存在和唯一性定理

3.1 Picard存在和唯一性定理

1. Lipschitz条件
    1. 若函数$f(x,y)$对于区域D内任意$(x,y_1),(x,y_2)$满足不等式

       $$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2| \tag{54}$$

       其中常数$L>0$，则称函数$f(x,y)$在区域D内对y满足Lipschitz条件。
    2. 设D为凸形有界闭区域，则函数$f(x,y)$在区域D内对y有连续的偏导数$\Rightarrow$函数$f(x,y)$在区域D内对y满足Lipschitz条件。
2. Osgood条件：若函数$f(x,y)$在区域D连续，而且对于区域D内任意$(x,y_1),(x,y_2)$满足不等式

   $$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le F(|y_1-y_2|) \tag{55}$$

   其中$F(r)>0$是$r>0$的连续函数，，且对于常数$r_0>0$，瑕积分$\int_0^{r_0}\frac{\mathrm{d}r}{F(r)}=\infty$，则称函数$f(x,y)$在区域$D$内对$y$满足Osgood条件。
3. 若取$F(r)=Lr$，表明Lipschitz条件是Osgood条件的特例。
4. Picard定理：设初值问题

   $$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases} \tag{56}$$

   其中$f(x,y)$在矩形区域$D:\begin{cases}|x-x_0|\le a\\ |y-y_0|\le b\end{cases}$内连续，而且对$y$满足Lipschitz条件，则该初值问题在区间$I=[x_0-h,x_0+h]$上存在并且存在唯一解，其中常数

   $$h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},M>\max_{(x,y)\in D}|f(x,y)| \tag{57}$$

    1. 该初值问题等价于积分方程

       $$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y)\mathrm{d}x \tag{58}$$

    2. 构造Picard序列

       $$y_{n+1}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y_n(x))\mathrm{d}x \tag{59}$$

       其中$y_0(x)=y_0$。
    3. Picard序列$y=y_n(x)$在区间I上连续 。
    4. Picard序列$y=y_n(x)$在区间I上一致收敛到原积分方程的解。
    5. 原积分方程的解唯一。
5. Lipschitz条件为解的唯一性的充分条件。

6. 若不成立Lipschitz条件，则不能保证Picard序列的收敛性，如Müller给出的反例：
    1. 初值问题$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F(x,y)\\ y(0)=0\end{cases}$，其中函数$F(x,y)=\begin{cases}0,x=0,-\infty<y<+\infty\\ 2x,0<x<1,0\le y<x^2\\ 2x-\frac{4y}{x},0<x\le 1,0\le y<+\infty\\ -2x,0<x\le 1,x^2\le y<+\infty\end{cases}$。
    2. 唯一解为$y=\frac{1}{3}x^2,0\le x\le 1$。
    3. Picard序列为$y_n(x)=(-1)^{n+1}x^2,0\le x\le 1$。
7. Osgood定理：若函数$f(x,y)$在区域D内对y满足Osgood条件，则微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \tag{60}$$

在D内经过每一点的解都是唯一的。

3.2 Peano存在定理

1. Euler折线：对于初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases} \tag{61}$$

其中$f(x,y)$在矩形区域$D:\begin{cases}|x-x_0|\le a\\ |y-y_0|\le b\end{cases}$内连续，记$M$为$|f(x,y)|$在$D$的一个上界，$h=\min(a,\frac{b}{M})$，则把区间$|x-x_0|\le h$分成$2n$等份，则每份的长度为$h_n=\frac{h}{n}$，而$2n+1$个分点为$x_k=x_0+kh_n,k=0,\pm1,\cdots,\pm n$。若当$x_0<x\le x_0+h$，存在整数$0\le s\le n-1$，使得成立$x_s<x\le x_{s+1}$，则Euler折线的表达式为

$$\varphi_n(x)=y_0+\sum_{k=0}^{s-1}f(x_k,y_k)(x_{k+1}-x_k)+f(x_s,y_s)(x-x_s) \tag{62}$$

同理，当$x_0-h\le x<x_0$时，Euler折线的表达式为

$$\varphi_n(x)=y_0+\sum_{k=0}^{-s+1}f(x_k,y_k)(x_{k-1}-x_k)+f(x_{-s},y_{-s})(x-x_{-s}) \tag{63}$$

2. 一致有界：设区间I上给定一个函数序列$f_1(x),\cdots,f_n(x),\cdots$，如果存在常数$M>0$，使得不等式$|f_n(x)|<M,x\in I$对于任意$n\in N^*$成立，则称该函数序列在区间$I$上是一致有界的。
3. 等度连续：设区间I上给定一个函数序列$f_1(x),\cdots,f_n(x),\cdots$，如果对于任意的正数$\varepsilon$，存在正数$\delta=\delta(\varepsilon)$，使得只要$x_1,x_2\in I$且$|x_1-x_2|<\delta$，就有$|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<\varepsilon$，则称该函数序列在区间$I$上是等度连续的。
4. Ascoli引理：设函数序列$f_1(x),\cdots,f_n(x),\cdots$在有限闭区间$I$上是一致有界和等度连续的，则可以选取其子序列$f_{n_1}(x),\cdots,f_{n_k}(x),\cdots$使得其在区间$I$上是一致连续的。
5. Peano存在定理：对于初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases} \tag{64}$$

其中$f(x,y)$在矩形区域D上连续，则在区间$|x-x_0|\le h$上至少有一个解$y=y(x)$。

3.3 解的延伸

1. 设P_0为区域G内任一点，并设Γ为微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$经过$P_0$点的任一条积分曲线，则积分曲线$\Gamma$将在区域$G$内延伸到边界。
2. 若函数$f(x,y)$在条形区域

$$S:\alpha<x<\beta,-\infty<y<+\infty \tag{65}$$

内连续，而且满足不等式

$$|f(x,y)|\leq A(x)|y|+B(x) \tag{66}$$

其中$A(x)\geq 0$和$B(x)\geq 0$在区间$\alpha<x<\beta$上是连续的，则微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \tag{67}$$

的每一个解都以区间$\alpha<x<\beta$为最大存在区间。

3.4 比较定理及其应用

1. 第一比较定理：设函数$f(x,y)$与$F(x,y)$都在平面区域G内连续且满足不等式

$$f(x,y)<F(x,y),(x,y)\in G \tag{68}$$

又设函数$y=\varphi(x)$与$y=\Phi(x)$在区间$a<x<b$上分别是初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases} \tag{69}$$

与

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases} \tag{70}$$

的解，其中$(x_0,y_0)\in G$，则有

$$\begin{cases}\varphi(x)<\Phi(x),x_0<x<b\\ \varphi(x)>\Phi(x),a<x<x_0\end{cases} \tag{71}$$

2. > 第一比较定理的几何意义是显然的：斜率小的曲线向右不可能从斜率大的曲线的下方穿越到上方。
3. 初值问题的最解：初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases} \tag{72}$$

其中$f(x,y)$在矩形区域$D:\begin{cases}|x-x_0|\leq a\\ |y-y_0|\leq b\end{cases}$内连续，并且令

$$M=\max_{(x,y)\in D}|f(x,y)|,h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\} \tag{73}$$

如果在区间$|x-x_0|\leq h$上该初值问题有两个解$y=Z(x)$和$y=W(x)$，使得该初值问题的任意解$y=y(x)$都满足不等式

$$W(x)\leq y(x)\leq Z(x) \tag{74}$$

则称解$y=Z(x)$和$y=W(x)$为初值问题的最小解和最大解。
4. 存在正数$\sigma<h$，使得在区间$|x-x_0|\leq\sigma$上初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\tag{75}$$

存在最小解和最大解。

5. 第二比较定理：设函数$f(x,y)$与$F(x,y)$都在平面区域G内连续且满足不等式

$$f(x,y)<F(x,y),(x,y)\in G\tag{76}$$

又设函数$y=\varphi(x)$与$y=\Phi(x)$在区间$a<x<b$上分别是初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\tag{77}$$

与

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\tag{78}$$

的解，其中$(x_0,y_0)\in G$，并且$y=\varphi(x)$是初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\tag{79}$$

的右行最小解和左行最大解，或者$y=\Phi(x)$是初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\tag{80}$$

的右行最小解和左行最大解，则有如下比较关系

$$\begin{cases}\varphi(x)\le\Phi(x),x_0\le x<b\\ \varphi(x)\ge\Phi(x),a<x\le x_0\end{cases}\tag{81}$$

第四章：奇解

4.1 一阶隐式微分方程

1. 本节讨论一阶隐式微分方程

$$F(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=0 \tag{82}$$

的特殊解法。

2. 若微分方程

$$F(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=0 \tag{83}$$

可解出

$$y=f(x,p) \tag{84}$$

这里$p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。设$f$连续可微，则对方程$y=f(x,p)$
对x进行微分，可得到

$$(f_x'(x,p)-p)\mathrm{d}x+f_p'(x,p)\mathrm{d}p=0 \tag{85}$$

此为关于x和p的显示方程。

   1. 若得到方程

   $$(f_x'(x,p)-p)\mathrm{d}x+f_p'(x,p)\mathrm{d}p=0 \tag{86}$$

   的通解$p=u(x,C)$，那么方程$y=f(x,p)$的通解为$y=f(x,u(x,C))$。

   2. 若方程

   $$(f_x'(x,p)-p)\mathrm{d}x+f_p'(x,p)\mathrm{d}p=0 \tag{87}$$

   含有特解$p=w(x)$，则方程$y=f(x,p)$含有特解$y=f(x,w(x))$。

   3. 若得到方程

   $$(f_x'(x,p)-p)\mathrm{d}x+f_p'(x,p)\mathrm{d}p=0 \tag{88}$$

   的通解$x=v(p,C)$，那么方程$y=f(x,p)$的通解为$\begin{cases}x=v(p,C)\\y=f(v(p,C),p)\end{cases}$，其中$p$为参数。

   4. 若方程

   $$(f_x'(x,p)-p)\mathrm{d}x+f_p'(x,p)\mathrm{d}p=0 \tag{89}$$

   含有特解$x=z(p)$，则方程$y=f(x,p)$含有特解$\begin{cases}x=z(p)\\y=f(z(p),p)\end{cases}$。

3. 参数化：一般而言，对于一阶隐式微分方程

$$F(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=0 \tag{90}$$

若其参数表达式为

$$x=f(u,v),y=g(u,v),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=h(u,v) \tag{91}$$

其中u和v为参数。因为$\mathrm{d}y=p\mathrm{d}x$，所以有

$$(h(u,v)f_u'(u,v)-g_u'(u,v))\mathrm{d}u+(h(u,v)f_v'(u,v)-g_v'(u,v))\mathrm{d}v=0 \tag{92}$$

若求得方程

$$(h(u,v)f_u'(u,v)-g_u'(u,v))\mathrm{d}u+(h(u,v)f_v'(u,v)-g_v'(u,v))\mathrm{d}v=0 \tag{93}$$

的通解$v=w(u,C)$，则可得到方程

$$F(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=0 \tag{94}$$

的通解

$$\begin{cases}x=f(u,w(u,C))\\ y=g(u,w(u,C))\end{cases} \tag{95}$$

4. > 对于微分方程
>
> $$yy'+py+qx=0 \tag{96}$$
>
> 其特征方程为$t^2+pt+q=0$。若$p^2-4q>0$，记两根分别为α,β，则方程(59)的通解为$C_1(y-\alpha x)^\alpha=C_2(y-\beta x)^\beta$。

4.2 奇解

1. 奇解：对于一阶微分方程

$$F(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=0 \tag{97}$$

若有一特解

$$\Gamma:y=\varphi(x),x\in J \tag{98}$$

如果对于任一点$P\in\Gamma$，在P点的任意邻域内方程

$$F(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=0 \tag{99}$$

都存在一个不同于Γ的解在P点与Γ相切，则称Γ为微分方程的奇解。

2. 奇解存在的必要条件：设函数$F(x,y,p)$对$(x,y,p)\in G$是连续的，而且对y和p有连续的偏微商F_y'和F_p'。若函数$y=\varphi(x),x\in J$是微分方程

$$F(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=0 \tag{100}$$

的一个奇解，并且$(x,\varphi(x),\varphi'(x))\in G$，则奇解$y=\varphi(x)$满足$p-$判别式

$$\begin{cases}F(x,y,p)=0\\ F_p'(x,y,p)=0\end{cases} \tag{101}$$

若从方程组中消去p，可得到方程

$$\Delta(x,y)=0 \tag{102}$$

由此决定的曲线为微分方程

$$F(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=0 \tag{103}$$

的$p-$判别曲线。因此，原微分方程的奇解是一条$p-$判别曲线。

3. 需要注意的是，由$p-$判别式

$$\begin{cases}F(x,y,p)=0\\F'_p(x,y,p)=0\end{cases} \tag{104}$$

所确定的函数$y=\psi(x)$不一定是相应微分方程的解；即使是解，也不一定是奇解。这是因为，在联立方程组时，参数p丧失了与x和y的关系，而成为了一个独立的变量。事实上由$p-$判别式求得的$y=\psi(x)$和$p=p(x)$，一定要满足$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$，只有这样，函数$y=\psi(x)$才是微分方程的解，但未必是奇解。

4. 奇解存在的充分条件：设函数$F(x,y,p)$对$(x,y,p)\in G$是二阶连续可微的，且由微分方程

$$F(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=0 \tag{105}$$

的$p-$判别式

$$\begin{cases}F(x,y,p)=0\\F'_p(x,y,p)=0\end{cases} \tag{106}$$

所确定的函数$y=\psi(x),x\in J$为微分方程的解。若满足条件

$$\begin{cases}F'_y(x,\psi(x),\psi'(x))\neq 0\\F''_{pp}(x,\psi(x),\psi'(x))\neq 0\\F'_p(x,\psi(x),\psi'(x))=0\end{cases} \tag{107}$$

对于任意$x\in J$成立，则$y=\psi(x)$是微分方程的奇解。

5. 奇解存在的充分条件中的

$$\begin{cases}F'_y(x,\psi(x),\psi'(x))\neq 0\\F''_{pp}(x,\psi(x),\psi'(x))\neq 0\\F'_p(x,\psi(x),\psi'(x))=0\end{cases} \tag{108}$$

中的三个条件缺一不可，如$(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2=y^2$，$\sin\left(y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=y$和$y=2x+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{3}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^3$。

4.3 包络

1. 包络：设单参数C的曲线族

$$K(C):V(x,y,C)=0 \tag{109}$$

其中函数$V(x,y,C)$对于$(x,y,C)\in D$是连续可微的。设在平面上有一条连续可微的曲线Γ，如果对于任一点$P\in\Gamma$，在曲线族$K(C):V(x,y,C)=0$

中都有一条曲线$K(C^*)$经过P点并在该点与Γ相切，并且$K(C^*)$在P点的某一邻域内不同于Γ，则称曲线Γ为曲线族$K(C):V(x,y,C)=0$的包络。

2. 我们这里对包络的定义与一般微分几何所给定义不同，那里要求曲线族中的每一条曲线都与包络相切。

3. 奇解是通解的包络：设微分方程

$$F(x,y,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=0 \tag{110}$$

有通积分为

$$U(x,y,C)=0 \tag{111}$$

又设积分曲线族$U(x,y,C)=0$有包络为

$$\Gamma: y=\varphi(x), x\in J \tag{112}$$

则包络$\Gamma: y=\varphi(x), x\in J$是微分方程的奇解。

4. 包络存在的必要条件：设Γ是曲线族

$$K(C): V(x,y,C)=0 \tag{113}$$

的一支包络，则其满足如下的$C-$判别式

$$\begin{cases} V(x,y,C)=0 \\ V'_C(x,y,C)=0 \end{cases} \tag{114}$$

或消去C，得到关系式

$$\Omega(x,y)=0 \tag{115}$$

5. 包络存在的充分条件：设由曲线族

$$K(C): V(x,y,C)=0 \tag{116}$$

的$C-$判别式

$$\begin{cases} V(x,y,C)=0 \\ V'_C(x,y,C)=0 \end{cases} \tag{117}$$

确定一支连续可微且不含于族$K(C): V(x,y,C)=0$的曲线

$$\Lambda: \begin{cases} x=\varphi(C) \\ y=\psi(C) \end{cases}, C\in J \tag{118}$$

且满足非蜕化性条件

$$\begin{gathered} (\phi'(C),\psi'(C))\neq(0,0) \\ (V'_x(\varphi(C),\psi(C),C),V'_y(\varphi(C),\psi(C),C))\neq(0,0) \end{gathered} \tag{119}$$

则曲线Λ是曲线族$K(C): V(x,y,C)=0$的一支包络。

第五章：高阶微分方程

5.1 几个例子

1. 自治微分方程：

$$F(y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}) = 0 \tag{120}$$

2. 自治微分方程的降阶：记$z = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则方程(73)化为

$$G(y, z, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}) = 0 \tag{121}$$

3. 单摆方程
    1. 微分方程：$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin x = 0$
    2. 首次积分：$(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2 = 2\frac{g}{l}\cos x + C$
    3. 近似解：$x = A\sin\sqrt{\frac{g}{l}t + \varphi}$
4. 悬链线方程
    1. 微分方程：$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = a\sqrt{1 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}$
    2. 通解：$y = \frac{1}{a}\cosh(a(x + C_1)) + C_2$
5. 二体问题：$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}$

5.2 n维线性空间中的微分方程

1. n阶标准微分方程

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \\ \cdots \\ \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = f_1(x, y_1, \cdots, y_n) \end{cases} \tag{122}$$

写成向量形式

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = \vec{f}(x, \vec{y}) \tag{123}$$

其中初值条件为

$$\vec{y}(x_0) = \vec{y_0} \tag{124}$$

2. n阶线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = A(x)\vec{y} + \vec{e}(x) \tag{125}$$

其中

$$y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},\vec{e}(x)=\begin{pmatrix}e_1(x)\\ \vdots\\ e_n(x)\end{pmatrix}\tag{126}$$

且

$$A(x)=\begin{pmatrix}a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x)\end{pmatrix}\tag{127}$$

5.3 解对初值和参数的连续依赖性和连续可微性

1. 解对初值和参数的连续依赖性：设n维向量值函数$\vec{f}(x,\vec{y})$在区域

$$R:|x-x_0|\leq a,|\vec{y}-\vec{y_0}|\leq b\tag{128}$$

上连续，而且对$\vec{y}$满足Lipschitz条件，则微分方程初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x}=\vec{f}(x,\vec{y})\\ \vec{y}(x_0)=\vec{\eta}\end{cases}\tag{129}$$

的解$\vec{y}=\vec{\varphi}(x,\vec{\eta})$在区域

$$Q:|x-x_0|\leq\frac{h}{2},|\vec{\eta}-\vec{y_0}|\leq\frac{b}{2}\tag{130}$$

上是连续的，其中

$$h=\min(a,\frac{b}{M})\tag{131}$$

而正数M为$|f(x,\vec{y})|$在区域R上的一个上界。

2. 设n维向量值函数$\vec{f}(x,\vec{y})$在区域$(x,\vec{y})$空间内的某个开区域G上是连续的，而且对$\vec{y}$满足局部Lipschitz条件。假设$\vec{y}=\vec{\xi}(x)$是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x}=\vec{f}(x,\vec{y})\tag{132}$$

的一个解，令其存在区间为J。在区间J内任取一个有界闭区间$a\leq x\leq b$，则存在常数$\delta>0$，使得对任何满足$a\leq x_0\leq b,|\vec{y_0}-\vec{\xi}(x_0)|\leq\delta$的初值$(x_0,\vec{y_0})$，初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x}=\vec{f}(x,\vec{y})\\ \vec{y}(x_0)=\vec{y_0}\end{cases}\tag{133}$$

的解$\vec{y}=\vec{\varphi}(x;x_0,\vec{y_0})$也至少在区间$a\leq x\leq b$上存在，并且在闭区域

$$D_\delta:a\leq x\leq b,a\leq x_0\leq b,|\vec{y_0}-\vec{\xi}(x_0)|\leq\delta\tag{134}$$

上是连续的。

3. 解对初值和参数的连续可微性：设n维向量值函数$\vec{f}(x,\vec{y})$在区域

$$R:|x-x_0|\leq a,|\vec{y}-\vec{y_0}|\leq b\tag{135}$$

上连续，而且对$\vec{y}$有连续的偏微商$\vec{f}'_y(x,\vec{y})$，则初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x}=\vec{f}(x,\vec{y})\\ \vec{y}(x_0)=\vec{\eta}\end{cases}\tag{136}$$

的解$\vec{y}=\vec{\varphi}(x,\vec{\eta})$在区域

$$Q:|x-x_0|\leq\frac{h}{2},|\vec{\eta}-\vec{y_0}|\leq\frac{b}{2} \tag{137}$$

上是连续可微的，其中

$$h=\min(a,\frac{b}{M}) \tag{138}$$

而正数M为$|f(x,\vec{y})|$在区域R上的一个上界。

4. 解对初值和参数的偏导数：对于微分方程

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y,\lambda)\\ y(x_0)=y_0\end{cases} \tag{139}$$

等价于积分方程

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y,\lambda)\mathrm{d}x \tag{140}$$

其有解

$$y=\varphi(x;x_0,y_0,\lambda) \tag{141}$$

1. 解关于x_0的偏导数$z=\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$满足微分方程

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x;x_0,y_0,\lambda),\lambda)z\\ z(x_0)=-f(x_0,y_0,\lambda)\end{cases} \tag{142}$$

2. 解关于y_0的偏导数$z=\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}$满足微分方程

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x;x_0,y_0,\lambda),\lambda)z\\ z(x_0)=1\end{cases} \tag{143}$$

3. 解关于λ的偏导数$z=\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}$满足微分方程

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x;x_0,y_0,\lambda),\lambda)z+\frac{\partial f}{\partial\lambda}(x,\varphi(x;x_0,y_0,\lambda),\lambda)\\ z(x_0)=0\end{cases} \tag{144}$$

第六章：线性微分方程组

6.1 一般理论

1. $$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\vec{y}+\vec{f}(x) \tag{145}$$

   其中

   $$y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},\vec{f}(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ \vdots\\ f_n(x)\end{pmatrix} \tag{146}$$

   且

   $$A(x)=\begin{pmatrix}a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x)\end{pmatrix} \tag{147}$$

   其中，系数矩阵函数$A(x)$和$\vec{f}(x)$在区间$a<x<b$都是连续的。

   1. 当$\vec{f}(x)$不恒为零时，称方程

      $$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\vec{y}+\vec{f}(x) \tag{148}$$

      为非齐次的线性微分方程组。

   2. 当$\vec{f}(x)\equiv 0$时，即

      $$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\vec{y} \tag{149}$$

      称之为齐次的线性微分方程组。

2. 存在和唯一性定理：对于线性微分方程

   $$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\vec{y}+\vec{f}(x) \tag{150}$$

   若系数矩阵函数$A(x)$和$\vec{f}(x)$在区间$a<x<b$都是连续的，则在满足初值条件

   $$\vec{y}(x_0)=\vec{y}_0 \tag{151}$$

   的解$\vec{y}=\vec{y}(x)$在区间$a<x<b$上存在且存在唯一，其中初值$x_0\in(a,b)$和$\vec{y}_0\in\mathbb{R}^n$时任意给定的。

3. > 齐次线性微分方程的解的线性组合仍是方程的解。

4. > n阶齐次线性微分方程的解构成的集合为n维线性空间。

5. 基本解矩阵：n阶线性微分方程

   $$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\vec{y} \tag{152}$$

的n个线性无关的解

$$\vec{y_1}(x)=\begin{pmatrix}y_{11}(x)\\ \vdots\\ y_{n1}(x)\end{pmatrix},\cdots,\vec{y_n}(x)=\begin{pmatrix}y_{1n}(x)\\ \vdots\\ y_{nn}(x)\end{pmatrix} \tag{153}$$

构成微分方程的基本解矩阵

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x)\end{pmatrix} \tag{154}$$

由此得原方程的通解为

$$\vec{y}(x)=\Phi(x)\vec{c} \tag{155}$$

其中$\vec{c}$为n维的任意常数向量。

6. Wronsky行列式

   1. Wronsky行列式：函数$\vec{y_1}(x)=\begin{pmatrix}y_{11}(x)\\ \vdots\\ y_{n1}(x)\end{pmatrix},\cdots,\vec{y_n}(x)=\begin{pmatrix}y_{1n}(x)\\ \vdots\\ y_{nn}(x)\end{pmatrix}$的Wronsky行列式为

$$W(x)=\begin{vmatrix}y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x)\end{vmatrix} \tag{156}$$

   2. 性质

      1. 函数 $\vec{y_1}(x)=\begin{pmatrix}y_{11}(x)\\ \vdots\\ y_{n1}(x)\end{pmatrix},\cdots,\vec{y_n}(x)=\begin{pmatrix}y_{1n}(x)\\ \vdots\\ y_{nn}(x)\end{pmatrix}$ 线性相关 $\Rightarrow W(x)=\begin{vmatrix}y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x)\end{vmatrix}\equiv 0$

      2. 存在 x_0 使得成立 $W(x_0)=\begin{vmatrix}y_{11}(x_0) & \cdots & y_{1n}(x_0)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ y_{n1}(x_0) & \cdots & y_{nn}(x_0)\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow$ 函数 $\vec{y_1}(x)=\begin{pmatrix}y_{11}(x)\\ \vdots\\ y_{n1}(x)\end{pmatrix},\cdots,\vec{y_n}(x)=\begin{pmatrix}y_{1n}(x)\\ \vdots\\ y_{nn}(x)\end{pmatrix}$线性无关

7. Liouville公式：若

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x)\end{pmatrix} \tag{157}$$

为齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\vec{y} \tag{158}$$

的基本解矩阵，则其Wronsky行列式$W(x)=|\Phi(x)|$满足如下性质

$$W(x)=W(x_0)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}\mathrm{tr}(A(x))\mathrm{d}x},a<x<b \tag{159}$$

其中$a<x_0<b$，且$\mathrm{tr}(A(x))$表示矩阵$A(x)$的迹。

若

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix} y_{11}(x) & \cdots & y_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(x) & \cdots & y_{nn}(x) \end{pmatrix} \tag{160}$$

为齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\vec{y} \tag{161}$$

的基本解矩阵，则其Wronsky行列式$W(x)=|\Phi(x)|$满足

$$W(x)\not\equiv 0 \tag{162}$$

8. 若$\Phi(x)$是与线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\vec{y}+\vec{f}(x) \tag{163}$$

相应的齐次线性微分方程的一个基本解矩阵，$\vec{\varphi^*}(x)$是微分方程的一个特解，则微分方程的任一解$y=\vec{\varphi}(x)$可表示为

$$\vec{\varphi}(x)=\Phi(x)\vec{c}+\vec{\varphi^*}(x) \tag{164}$$

其中$\vec{c}$为一个与$\vec{\varphi}(x)$有关的n维常数向量。

9. 常数变易法：若$\Phi(x)$是与线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\vec{y}+\vec{f}(x) \tag{165}$$

相应的齐次线性微分方程的一个基本解矩阵，则微分方程在区间$a<x<b$上的通解可表示为

$$\vec{y}=\Phi(x)(\vec{c}+\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)\mathrm{d}s) \tag{166}$$

其中$\vec{c}$为n维的任意常数向量，且微分方程满足初值条件$\vec{y}(x_0)=\vec{y_0}$的解为

$$\vec{y}=\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\vec{y_0}+\Phi(x)\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)\mathrm{d}s \tag{167}$$

其中$x_0\in(a,b)$。

10. 周期解：线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x}=A(x)\vec{y}+\vec{f}(x) \tag{168}$$

其中系数矩阵函数$A(x)$和$\vec{f}(x)$在区间$a<x<b$都是连续的且以ω为周期的，记与该线性微分方程的相应的齐次线性微分方程的基本解矩阵为$\Phi(x)$。

    1. 若$\vec{y}(x)$为该线性微分方程的解，则$\vec{y}(x+\omega)$亦为该线性方程的解。
    2. 以下三点等价
        1. $\vec{y}(x)$是该线性微分方程的周期解。
        2. 存在$x_0\in(a,b)$，使得成立$x_0+\omega\in(a,b)$且

$$\vec{y}(x_0)=\vec{y}(x_0+\omega) \tag{169}$$

        3. 存在$x_0\in(a,b)$和$\vec{c_0}$，使得成立$x_0+\omega\in(a,b)$且

$$(\Phi(x_0)-\Phi(x_0+\omega))\vec{c_0}=\int_{x_0}^{x_0+\omega}\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)\mathrm{d}s \tag{170}$$

        此时，$\vec{y}(x)=\Phi(x)(\vec{c_0}+\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)\mathrm{d}s)$。
    3. $\vec{y}(x)$是该线性微分方程的唯一周期解⇔存在$x_0\in(a,b)$，使得成立$x_0+\omega\in(a,b)$且

$$\det(\Phi(x_0) - \Phi(x_0 + \omega)) \neq 0 \tag{171}$$

6.2 常系数线性微分方程组

1. 常系数线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = A\vec{y} + \vec{f}(x) \tag{172}$$

其中系数矩阵A为n阶常数矩阵，$\vec{f}(x)$是在$a < x < b$上连续的向量函数。当$\vec{f}(x) \equiv 0$时，即

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = A\vec{y} \tag{173}$$

称之为齐次的线性微分方程组。

2. 矩阵的模：对于n阶实常数矩阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$，定义其模为

$$||A|| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{174}$$

矩阵的模的性质

   1. $||A|| \geq 0$，当且仅当$A = O$时等号成立。
   2. $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$
   3. $||AB|| \leq ||A|| \cdot ||B||$

3. 矩阵指数函数：

$$\mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^n}{k!} \tag{175}$$

矩阵指数函数的性质

   1. 若矩阵A和B是可交换的，即满足$AB = BA$，则$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B$。
   2. 对于任意矩阵A，指数函数e^A是可逆的，且$\mathrm{e}^{A^{-1}} = \mathrm{e}^{-A}$。
   3. 若P为非奇异n阶矩阵，则$\mathrm{e}^{PAP^{-1}} = P\mathrm{e}^A P^{-1}$。

4. 常系数齐次线性微分方程的基本解矩阵：微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = A\vec{y} \tag{176}$$

的基本解矩阵为

$$\Phi(x) = \mathrm{e}^{Ax} \tag{177}$$

5. 利用Jordan标准型求解基本解矩阵：对于n阶矩阵A，存在n阶非奇异矩阵P，使得

$$A = PJP^{-1} \tag{178}$$

其中

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_n \end{pmatrix} \tag{179}$$

为Jordan标准型。假设Jordan块

$$J_k=\begin{pmatrix}\lambda_k & 1 & & \\ & \lambda_k & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_k\end{pmatrix} \tag{180}$$

为n_k阶的$(k=1,\cdots,m;n_1+\cdots+n_m=n)$，则$J_k$有如下的分解式

$$J_k=\begin{pmatrix}\lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix} \tag{181}$$

由此得到

$$\mathrm{e}^{J_k x}=\mathrm{e}^{\lambda_k x}\begin{pmatrix}1 & x & \frac{x^2}{2!} & \cdots & \cdots & \frac{x^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \\ & 1 & x & \cdots & \cdots & \frac{x^{n_k-2}}{(n_k-2)!} \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & x \\ & & & & & 1\end{pmatrix} \tag{182}$$

其中$k=1,\cdots,m$，进而

$$\mathrm{e}^{Jx}=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{J_1 x} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathrm{e}^{J_m x}\end{pmatrix} \tag{183}$$

由矩阵指数函数的性质，可知

$$\mathrm{e}^{Ax}=P\mathrm{e}^{Jx}P^{-1} \tag{184}$$

而由于e^{Ax}为基本解矩阵且P的非奇异性，可知

$$\mathrm{e}^{Ax}P=P\mathrm{e}^{Jx} \tag{185}$$

亦为基本解矩阵。

6. 利用特征根与特征向量求解基本解矩阵
    1. 若A仅有单的特征根：若n阶矩阵A有特征根$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$，与此对应特征向量$\vec{r_1},\cdots,\vec{r_n}$。记矩阵$A$的特征根矩阵为

    $$\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \tag{186}$$

    特征向量矩阵为

    $$R=\begin{pmatrix}\vec{r_1} & \cdots & \vec{r_n}\end{pmatrix} \tag{187}$$

    则矩阵A可进行对角化分解

    $$A=R\Lambda R^{-1} \tag{188}$$

    从而微分方程

    $$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x}=A\vec{y} \tag{189}$$

的基本解矩阵为

$$\mathrm{e}^{Ax} = R\mathrm{e}^{\Lambda x}R^{-1} \tag{190}$$

由特征向量矩阵R的非奇异性，可知基本解矩阵亦为

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= R\mathrm{e}^{\Lambda x} \\ &= (\mathrm{e}^{\lambda_1 x}\vec{r_1} \quad \cdots \quad \mathrm{e}^{\lambda_n x}\vec{r_n})\end{aligned}$$

2. 若A有重的特征根：若n阶矩阵A在复数域$\mathbb{C}$上有互不相同的特征根$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$，与此相应的重数分别为$n_1, \cdots, n_s$，且满足$(n_1 + \cdots + n_s = n)$，则微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = A\vec{y} \tag{191}$$

的基本解矩阵为

$$\Phi(x) = \left(\mathrm{e}^{\lambda_1 x}P_1^{(1)}(x) \quad \cdots \quad \mathrm{e}^{\lambda_1 x}P_{n_1}^{(1)}(x) \quad \cdots \quad \mathrm{e}^{\lambda_s x}P_1^{(s)}(x) \quad \cdots \quad \mathrm{e}^{\lambda_s x}P_{n_s}^{(s)}(x)\right) \tag{192}$$

其中

$$P_j^{(i)}(x) = \vec{r}_{j0}^{(i)} + \frac{x}{1!}\vec{r}_{j1}^{(i)} + \cdots + \frac{x^{n_i-1}}{(n_i-1)!}\vec{r}_{jn_{i-1}}^{(i)} \tag{193}$$

是与λ_i相应的第j个向量多项式$(i = 1, \cdots, s; j = 1, \cdots, n_i)$，而$\vec{r}_{10}^{(i)}, \cdots, \vec{r}_{n_i 0}^{(i)}$是齐次线性方程

$$(A - \lambda_i E)^{n_i}\vec{r} = 0 \tag{194}$$

的n_i个线性无关的解，且$\vec{r}_{jk}^{(i)}(i = 1, \cdots, s; j = 1, \cdots, n_i; k = 1, \cdots, n_i - 1)$由下面的关系式确定

$$\begin{cases}\vec{r}_{j1}^{(i)} = (A - \lambda_i E)\vec{r}_{j0}^{(i)} \\ \cdots \\ \vec{r}_{jn_i-1}^{(i)} = (A - \lambda_i E)\vec{r}_{jn_i-2}^{(i)}\end{cases} \tag{195}$$

6.3 高阶线性微分方程组

1. 本节讨论n阶线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \tag{196}$$

与此相对应的是齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \tag{197}$$

2. 引入未知函数

$$y_1 = y, y_2 = y', \cdots, y_n = y^{(n-1)} \tag{198}$$

则方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \tag{199}$$

等价于线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = A(x)\vec{y} + \vec{f}(x) \tag{200}$$

其中

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \tag{201}$$

和

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & -a_{n-2}(x) & \cdots & -a_1(x) \end{pmatrix} \tag{202}$$

而相应的齐次线性方程组

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0 \tag{203}$$

也转化为

$$\frac{\mathrm{d}\vec{y}}{\mathrm{d}x} = A(x)\vec{y} \tag{204}$$

3. 设$y = \varphi(x)$是二阶齐次线性方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{205}$$

的一个非零解，其中$p(x)$和$q(x)$是区间$a < x < b$上的连续函数，则微分方程的通解为

$$y = \varphi(x)(C_1 + C_2 \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\varphi^2(x)} \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{s} p(t)\mathrm{d}t} \mathrm{d}s) \tag{206}$$

其中C_1和C_2为任意常数。

4. 设$\varphi_1(x, \cdots, \varphi_n(x))$是齐次线性微分方程(127)在区间$a < x < b$上的一个基本解组，则非齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \tag{207}$$

的通解为

$$y = C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x) + \varphi^*(X) \tag{208}$$

其中$C_1, \cdots, C_n$为任意常数，而

$$\varphi^*(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_k(s)}{W(s)} f(s)\mathrm{d}s \tag{209}$$

为方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \tag{210}$$

的一个特解，其中$W(x)$为$\varphi_1(x, \cdots, \varphi_n(x))$的Wronsky行列式，$W_k(x)$是$W(x)$中第$n$行第$k$列元素的代数余子式。

5. 若已知二阶线性方程组

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{211}$$

的相应齐次方程的两个线性无关的解为$y = \varphi_1(x)$和$y = \varphi_2(x)$则方程(137)的通解为

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(s)}{\varphi_1(s)\varphi_2'(s) - \varphi_2(s)\varphi_1'(s)} f(s)\mathrm{d}s \tag{212}$$

其中$C_1, \cdots, C_n$为任意常数。

6. 设常系数齐次线性方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=0 \tag{213}$$

的特征方程

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{214}$$

在复数域$\mathbb{C}$中共有s个互不相同的根$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$，且对应的重数分别为$n_1,\cdots,n_s$，满足$n_1+\cdots+n_s=n$，则函数组

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{\lambda_1x},x\mathrm{e}^{\lambda_1x},\cdots,x^{n_1-1}\mathrm{e}^{\lambda_1x};\\ \cdots\\ \mathrm{e}^{\lambda_sx},x\mathrm{e}^{\lambda_sx},\cdots,x^{n_s-1}\mathrm{e}^{\lambda_sx};\end{cases} \tag{215}$$

是齐次微分方程的一个基本解组。

7. 对于常系数非齐次线性方程

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=f(x) \tag{216}$$

其特解$\varphi^*(x)$如下

   1. $f(x)=P_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$：

   $$\varphi^*(x)=x^kQ_n(x)\mathrm{e}^{\lambda x} \tag{217}$$

   其中$P_n(x)$和$Q_n(x)$为关于x的n次多项式，$k\in N$为特征方程

   $$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{218}$$

   的特征根中λ的重数。

   2. $f(x)=(A_m(x)\cos(\omega x)+B_n\sin(\omega x))\mathrm{e}^{\lambda x}$：

   $$\varphi^*(x)=x^k(P_l(x)\cos(\omega x)+Q_l\sin(\omega x))\mathrm{e}^{\lambda x} \tag{219}$$

   其中$A_m(x)$和$B_n(x)$分别为关于x的m和n次多项式，$P_l(x)$和$Q_l(x)$为关于x的l次多项式且$l=\max(m,n)$，$k\in N$为特征方程

   $$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{220}$$

   的特征根中$\lambda+i\omega$的重数。

第七章：幂级数解法

7.1 Cauchy定理

1. 解析：称函数$f(x,y)$在区域$G\in\mathbb{R}^2$内为解析的，如果对于G内的任意一点(x_0,y_0)，存在正常数a和b，使得函数$f(x,y)$在邻域

$$|x-x_0|\le a, |y-y_0|\le b \tag{221}$$

内可以展成$(x-x_0)$和$(y-y_0)$的收敛幂级数

$$f(x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j \tag{222}$$

2. 优级数（强级数）：假设有两个幂级数

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j \tag{223}$$

和

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}A_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j \tag{224}$$

其中系数a_{ij}和A_{ij}满足不等式

$$|a_{ij}|\le A_{ij}, i,j=0,1,\cdots \tag{225}$$

则称

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}A_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j \tag{226}$$

为

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j \tag{227}$$

的一个优级数（强级数）。

3. 优函数（强函数）：如果幂级数

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}A_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j \tag{228}$$

在区域$D:|x-x_0|\le\alpha, |y-y_0|\le\beta$内是收敛的，则其和函数$F(x,y)$称为幂级数

$$\sum_{i,j=0}^{\infty}a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j \tag{229}$$

在D的一个优函数（强函数）。

4. Cauchy定理：如果函数$f(x,y)$在矩形区域$R:|x-x_0|\leq\alpha,|y-y_0|\leq\beta$上可以展开成$(x-x_0)$和$(y-y_0)$的收敛幂级数

$$f(x,y)=\sum_{i,j=0}^{\infty}a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j \tag{230}$$

则初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases} \tag{231}$$

在x_0点的邻域$|x-x_0|\leq\rho$内存在且存在唯一解析解$y=y(x)$，其中$\rho=a(1-\mathrm{e}^{-\frac{b}{2aM}})$，而$M\leq|a_{ij}|a^ib^j$。

5. > 非解析的微分方程可能没有形式的幂级数解，如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-x}{x},y(0)=0$。
   >
   > 非解析微分方程的形式解可能不收敛，如$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y-x,y(0)=0$。

7.2 幂级数解法

1. 微分方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{232}$$

中的系数函数$p(x)$和$q(x)$在区间$|x-x_0|<r$可以展成$(x-x_0)$的收敛幂级数，则微分方程在区间$|x-x_0|<r$存在收敛的幂级数解

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-x_0)^n \tag{233}$$

其中C_0和C_1为任意常数，而$C_n,n\geq 2$可以通过递推公式确定。

2. Airy方程：

$$y''=xy \tag{234}$$

解为

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{235}$$

其中a_0和a_1为任意常数，$a_2=0$，且

$$a_{n+3}=\frac{a_n}{(n+3)(n+2)},n=0,1,\cdot \tag{236}$$

7.3 Legendre多项式

1. Legendre方程：

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0 \tag{237}$$

其中n为常数。解为

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{238}$$

其中a_0和a_1为任意常数，且

$$a_{m+2}=-\frac{(n+k+1)(n-k)}{(k+2)(k+1)}a_m, m=0,1,\cdot \tag{239}$$

2. Legendre多项式：

$$L_n(x)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}, n=0,1,\cdots \tag{240}$$

3. $L_n(-x)=(-1)^nL_n(x)$
4. $L_n(1)=1, L_n(-1)=(-1)^n$
5. Rodrigues公式：

$$L_n(x)=\frac{1}{2^nn!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n \tag{241}$$

6. Legendre函数系的正交性：

$$\int_{-1}^{1}L_n(x)L_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & 当m\neq n\\ \frac{2}{2n+1}, & 当m=n\end{cases} \tag{242}$$

7. 广义Fourier级数：若函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上可积，则$f(x)$关于Legendre函数系的广义Fourier级数为

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_nL_n(x) \tag{243}$$

其中广义Fourier系数

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)L_n(x)\mathrm{d}x \tag{244}$$

8. > 广义Fourier级数不一定收敛；即使是收敛，也不一定收敛到$f(x)$。

9. 如果函数$\frac{f(x)}{\sqrt[4]{1-x^2}}$在区间$[-1,1]$上绝对可积，并下列条件之一成立，则广义Fourier级数在$x=x_0\in(-1,1)$处收敛到

$$\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2} \tag{245}$$

   1. Dirichlet条件：$f(x)$在x_0附近的一个区间上分段单调，并且在该区间上不连续点的个数至多是有限的。
   2. Dini条件：对于某一常数$h>0$，积分

   $$\int_{0}^{h}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+)+f(x_0-t)-f(x_0-)}{t}\mathrm{d}t \tag{246}$$

   存在
   3. Holder条件：$f(x)$在x_0点连续，并且对于充分小的$t>0$，成立不等式

   $$|f(x_0\pm t)-f(x_0)|\leq Lt^{\alpha} \tag{247}$$

   其中L和α都为正常数，且$\alpha\leq 1$。

10. Legendre多项式的母函数：

$$G(x,t)=(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{248}$$

这意味着，$G(x,t)$关于t展开的幂函数为

$$G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)t^n \tag{249}$$

7.4 广义幂级数解法

1. 正则奇点：对于微分方程

$$y'' + \frac{p(x)}{x-x_0}y' + \frac{q(x)}{(x-x_0)^2}y = 0 \tag{250}$$

若函数$p(x)$和$q(x)$关于$x=x_0$是解析的，则称x_0为微分方程的正则奇点。

2. Frobenius定理：微分方程在正则奇点x_0的邻域内存在收敛的广义幂级数解

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{n+\rho}, a_0 \neq 0 \tag{251}$$

其中指标ρ满足指标方程

$$\rho(\rho-1) + p(0)\rho + q(0) = 0 \tag{252}$$

7.5 Bessel函数

1. Bessel方程：

$$x^2y'' + xy' + (x^2-n^2)y = 0 \tag{253}$$

其中常数$n \geq 0$。

2. Bessel函数
   1. 第一类Bessel函数：

   $$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(n+k+1)\Gamma(k+1)} (\frac{x}{2})^{2k+n} \tag{254}$$

   其中$n \geq 0$。

   2. 第二类Bessel函数：
      1. $2n \notin N^*$或$n = m + \frac{1}{2}(m \in N^*)$：

      $$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(-n+k+1)\Gamma(k+1)} (\frac{x}{2})^{2k-n} \tag{255}$$

      其中$n \geq 0$，同时$2n \notin N^*$或$n = m + \frac{1}{2}(m \in N^*)$。

      2. $n \in N^*$：（Neumann函数）

      $$Y_n(x) = \lim_{\alpha \to n} \frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi - J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi} \tag{256}$$

3. > 下面假设$n \in N^*$。

4. 当$x \to \infty$时，$J_n(x)$和$Y_n(x)$有如下渐进式

$$J_n(x) = \frac{A_n}{\sqrt{x}}(\sin(x+\alpha_n) + o(1)) \tag{257}$$

和

$$Y_n(x)=\frac{B_n}{\sqrt{x}}(\sin(x+\beta_n)+o(1)) \tag{258}$$

其中$o(1)$表示无穷小量，而$A_n, B_n, \alpha_n, \beta_n$均为只与$n$有关的常数，且$A_n, B_n>0$。

5. $J_n(x)$和$Y_n(x)$均有无穷多简单零点，且相互交错。设$J_n(x)$的零点依次排列为

$$0<\beta_1<\cdots<\beta_k<\cdots(\rightarrow\infty) \tag{259}$$

6. Bessel函数系的加权正交性：

$$\int_0^1 xJ_n(\beta_i x)L_n(\beta_j x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & \text{当}i\neq j\\ \frac{1}{2}(J_n'(\beta_i))^2, & \text{当}i=j\end{cases} \tag{260}$$

7. 广义Fourier级数：若函数$f(x)$在区间$[0,1]$上可积，则$f(x)$关于Bessel函数系的广义Fourier级数为

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}a_kJ_n(\beta_k x) \tag{261}$$

其中广义Fourier系数

$$a_k=\frac{2}{(J_n'(\beta_i))^2}\int_0^1 xf(x)J_n(\beta_k x)\mathrm{d}x \tag{262}$$

8. 如果函数$\sqrt{x}f(x)$在区间$[0,1]$上绝对可积，并下列条件之一成立，则广义Fourier级数在$x=x_0\in(0,1)$处收敛到

$$\frac{f(x_0+)+f(x_0-)}{2} \tag{263}$$

   1. Dirichlet条件：$f(x)$在x_0附近的一个区间上分段单调，并且在该区间上不连续点的个数至多是有限的。
   2. Dini条件：对于某一常数$h>0$，积分

   $$\int_0^h\frac{f(x_0+t)-f(x_0+)+f(x_0-t)-f(x_0-)}{t}\mathrm{d}t \tag{264}$$

   存在

   3. Holder条件：$f(x)$在x_0点连续，并且对于充分小的$t>0$，成立不等式

   $$|f(x_0\pm t)-f(x_0)|\leq Lt^{\alpha} \tag{265}$$

   其中L和α都为正常数，且$\alpha\leq 1$。

第八章：定性理论与分支理论初步

8.1 动力系统，相空间与轨线

1. 动力系统：假设一个运动质点P在时刻t的空间坐标为$\vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，并且已知其在$\vec{x}$点的运动速度为$\vec{v}(\vec{x})=(v_1(\vec{x}),\cdots,v_n(\vec{x}))$，并只与空间坐标$\vec{x}$有关，则质点的运动方程为

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}(\vec{x}) \tag{266}$$

这是一个自治微分方程，称为动力系统。若函数$\vec{v}(\vec{x})$满足微分方程解的存在和唯一性定理的条件，则对于任意初值条件

$$\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0 \tag{267}$$

微分方程存在唯一的满足初值条件的解

$$\vec{x}=\vec{\varphi}(t,t_0,\vec{x}_0) \tag{268}$$

其描述了质点在t_0时刻经过$\vec{x}_0$点的运动。

   1. 相空间：$\vec{x}$取值的空间$\mathbb{R}^2$
   2. 增广相空间：$(t,\vec{x})$取值的空间$\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n$
   3. 向量场：$\vec{v}(\vec{x})=(v_1(\vec{x}),\cdots,v_n(\vec{x}))$
   4. 轨线：相空间中与向量场吻合的光滑曲线。
   5. 闭轨线：存在$T>0$使得

   $$\vec{\varphi}(t+T,t_0,\vec{x}_0)=\vec{\varphi}(t,t_0,\vec{x}_0) \tag{269}$$

   的相空间的轨线。
   6. 相图：轨线族的拓扑结构图。
   7. 平衡点（奇点）：满足

   $$\vec{v}(\vec{x})=\vec{0} \tag{270}$$

   的点$\vec{x}_0$。

2. 曲线积分的平移不变性：系统

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}(\vec{x}) \tag{271}$$

的积分曲线在增广相空间中沿t轴任意平移后还是积分曲线，即若$\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$为系统$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}(\vec{x})$的解，则对于任意常数$C$，$\vec{x}=\vec{\varphi}(t+C)$亦为解。

3. 过相空间每一点轨线的唯一性：过相空间中的任一点，系统

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}(\vec{x}) \tag{272}$$

存在且存在唯一的轨线通过该点。

4. 群的性质：定义

$$\vec{x}=\vec{\varphi}(t,\vec{x}_0)=\vec{x}=\vec{\varphi}(t,0,\vec{x}_0) \tag{273}$$

则系统

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}(\vec{x}) \tag{274}$$

的解$\vec{x}=\vec{\varphi}(t,\vec{x}_0)$满足

$$\vec{x}=\vec{\varphi}(t,\vec{\varphi}(t_0,\vec{x}_0))=\vec{\varphi}(t+t_0,\vec{x}_0) \tag{275}$$

5. 对于参数t，解$\vec{\varphi}(t,\vec{x}_0)$给出了变换

$$\vec{\varphi}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^2 \tag{276}$$

满足性质

    1. $\vec{\varphi}_0$是$\mathbb{R}^n$上的恒同变换。
    2. $\vec{\varphi}_s\circ\vec{\varphi}_t=\vec{\varphi}_{s+t}$
    3. $\vec{\varphi}_t(\vec{x_0})$对$(t,\vec{x})\in\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^n$是连续的。

8.2 解的稳定性

1. Lyapunov稳定性
    1. Lyapunov稳定性：对于一般的方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\vec{f}(t,\vec{x}) \tag{277}$$

其中函数$\vec{f}(t,\vec{x})$对$\vec{x}\in G\subset\mathbb{R}^n$和$t\in(-\infty,+\infty)$连续，并对$\vec{x}$满足Lipschitz条件。若方程$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\vec{f}(t,\vec{x})$存在解$\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$在$t_0\leq t<\infty$存在定义，且对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得只要成立

$$|\vec{x}_0-\vec{\varphi}(t_0)|<\delta \tag{278}$$

方程$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\vec{f}(t,\vec{x})$以$\vec{x}(t_0)=\vec{x}_0$为初值的解$\vec{x}=\vec{\varphi}(t,t_0,\vec{x}_0)$就也在$t\geq t_0$存在定义，并且满足对于任意$t\geq t_0$，成立

$$|\vec{\varphi}(t,t_0,\vec{x}_0)-\vec{\varphi}(t)|<\varepsilon \tag{279}$$

则称方程$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\vec{f}(t,\vec{x})$的解$\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$是在Lyapunov意义下稳定的。

    2. Lyapunov渐进稳定性：对于方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\vec{f}(t,\vec{x}) \tag{280}$$

若其解$\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$是稳定的，而且存在$\delta_0\in(0,\delta]$，使得只要成立

$$|\vec{x}_0-\vec{\varphi}(t_0)|<\delta_0 \tag{281}$$

就有

$$\lim_{t\to+\infty}(\vec{\varphi}(t,t_0,\vec{x}_0)-\vec{\varphi}(t))=0 \tag{282}$$

则称解$\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$是在Lyapunov意义下渐进稳定的。

    3. 渐进稳定域（吸引域）：若把条件$|\vec{x}_0-\vec{\varphi}(t_0)|<\delta_0$改为"当$\vec{x}_0$在区域$D$"时，就有

$$\lim_{t\to+\infty}(\vec{\varphi}(t,t_0,\vec{x}_0)-\vec{\varphi}(t))=0 \tag{283}$$

成立"，则称D为解$\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$的渐进稳定域。

4. 全局渐进稳定性：如果吸引域为全空间，则称解$\vec{x}=\vec{\varphi}(t)$是全局渐进稳定的。

2. 线性近似判断稳定性
   1. 对于方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\vec{f}(t,\vec{x}) \tag{284}$$

右端的函数$\vec{f}(t,\vec{x})$（注意，$\vec{f}(0,\vec{0})\equiv\vec{0}$）展开称$\vec{x}$的先行部分$A(t)\vec{x}$和非线性部分$N(t,\vec{x})$（$\vec{x}$的高次项）之和，即考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=A(t)\vec{x}+N(t,\vec{x}) \tag{285}$$

其中$A(t)\vec{x}$为n阶对$t\geq t_0$连续的矩阵函数，$N(t,\vec{x})$对t和$\vec{x}$在区域

$$G: t\geq t_0, |\vec{x}|\leq M \tag{286}$$

上连续，并对$\vec{x}$满足Lipschitz条件，且对于任意$t\geq t_0$满足$N(t,\vec{0})\equiv\vec{0}$和

$$\lim_{|\vec{x}|\to 0}\frac{|N(t,\vec{x})|}{|\vec{x}|}=0 \tag{287}$$

   2. 对于线性方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=A\vec{x} \tag{288}$$

当A为常数矩阵时

      1. 零解是渐进稳定的，当且仅当A的全部特征根都有负的实部。
      2. 零解是稳定的，当且仅当A的全部特征根都有非正的实部且实部为零的特征根所对应的Jordan块是一阶的。
      3. 零解是不稳定的，当且仅当A的存在实部为正的特征根，或存在实部为零且对应的Jordan块是高于一阶的特征根。

   3. 对于微分方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=A(t)\vec{x}+N(t,\vec{x}) \tag{289}$$

当$A(t)=A$为常数矩阵时

      1. 若A的全部特征根都有负的实部，则零解是渐进稳定的。
      2. 若A存在实部为正的特征根，则零解是不稳定的。

3. Lyapunov第二方法：对于自治系统

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\vec{f}(\vec{x}) \tag{290}$$

其中$\vec{x}\in\mathbb{R}^n$，而函数$\vec{f}(\vec{x})=(f_1(\vec{x},\cdots,f_n(\vec{x}))$满足初值问题解的存在和唯一性条件。若存在在区域$|\vec{x}|\geq M$上有定义且有连续的偏导数的标量函数$V(\vec{x})$，对$V$提出如下的条件

   1. 条件Ⅰ：$V(\vec{x})\geq 0$，当且仅当$\vec{x}=\vec{0}$时等号成立。
   2. 条件Ⅱ：$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial x_1}f_1+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x_n}f_n<0$，当$\vec{x}\neq\vec{0}$。
   3. 条件Ⅱ*：$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial x_1}f_1+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x_n}f_n\leq 0$
   4. 条件Ⅲ：$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial V}{\partial x_1}f_1+\cdots+\frac{\partial V}{\partial x_n}f_n>0$，当$\vec{x}\neq\vec{0}$。

Lyapunov稳定性判据：

   1. 若Ⅰ和Ⅱ成立，则方程$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\vec{f}(\vec{x})$的零解是渐近稳定的。
   2. 若Ⅰ和Ⅱ*成立，则方程$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\vec{f}(\vec{x})$的零解是稳定的。
   3. 若Ⅰ和Ⅲ成立，则方程$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\vec{f}(\vec{x})$的零解是不稳定的。

8.3 平面上的动力系统,奇点与极限环

1. 平面上的动力系统:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=X(x,y),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Y(x,y) \tag{291}$$

其中$X(x,y)$和$Y(x,y)$在(x,y)平面上连续，且满足初值问题解的存在和唯一性条件。

2. 线性动力系统:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \tag{292}$$

其中矩阵$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$为非退化的（即不以零为特征根），则称$(0,0)$为初等奇点，否则称为高阶奇点。

$\mathrm{tr}A=a+d$	$\det A=ad-bc$	$\Delta=(\mathrm{tr}A)^2-4\det A$	**稳定性**	**零点类型**
正或负或0	负	正	不稳定	鞍点
负	正	正	渐近稳定	两向结点
正	正	正	不稳定	两向结点
负	正	0	渐近稳定	单向结点或星形结点
正	正	0	不稳定	单向结点或星形结点
负	正	负	渐近稳定	焦点
正	正	负	不稳定	焦点
0	正	负	稳定	中心点

3. 非线性动力系统:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varphi(x,y)\\\psi(x,y)\end{pmatrix} \tag{293}$$

其中$\varphi(x,y)$和$\psi(x,y)$是x,y的高于一次的项。对于该动力系统，提出如下的条件

1. 条件 I： $\varphi(x,y),\psi(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2})(\sqrt{x^2+y^2}\to 0)$
2. 条件 I *： $\varphi(x,y),\psi(x,y)=o((\sqrt{x^2+y^2})^{1+\varepsilon})(\sqrt{x^2+y^2}\to 0)$，其中$\varepsilon$为任意正数。
3. 条件 II： $\varphi(x,y)$和$\psi(x,y)$在$(0,0)$的邻域内对x和y连续可微。

若系统

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \tag{294}$$

以$(0,0)$为初等奇点，则下述结论成立

1. 如果$(0,0)$是系统的焦点且条件 I 成立，则$(0,0)$也是系统(205)的焦点，且其稳定性相同。
2. 如果$(0,0)$是系统的鞍点或两向结点且条件 I 和 II 成立，则$(0,0)$也是系统(205)的鞍点或两向结点，且其稳定性相同。

3. 如果$(0,0)$是系统的单向结点且条件Ⅰ*成立，则$(0,0)$也是系统(205)的单向结点，且其稳定性相同。
4. 如果$(0,0)$是系统的星形结点且条件Ⅰ*和Ⅱ成立，则$(0,0)$也是系统(205)的星形结点，且其稳定性相同。

在上述条件下，我们称系统

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varphi(x,y) \\ \psi(x,y) \end{pmatrix} \tag{295}$$

与其线性化系统

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{296}$$

在奇点$(0,0)$附近有相同的定性结构。

4. 极限环：若动力系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(x,y), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Y(x,y) \tag{297}$$

在闭轨Γ的某个（环形）邻域内仅存在且存在唯一闭轨（即Γ），则称Γ为该动力系统的极限环。

5. Poincare-Bendixson环域定理：设区域D是由两条简单闭曲线L_1和L_2所围成的环域，并且在$\overline{D} = L_1 \cup D \cup L_2$上动力系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(x,y), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Y(x,y) \tag{298}$$

无奇点；从L_1和L_2上除法的轨线都不能离开或都不能进入$\overline{D}$。若L_1和L_2均不为闭轨线，则该系统在D内存在闭轨线Γ，使得Γ在D内不能收缩至一点。

第九章：边值问题

9.1 Sturm比较定理

1. 二阶线性微分方程：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{299}$$

其中系数函数$p(x)$和$q(x)$在区间J上是连续的。

2. 齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{300}$$

的任何非零解在区间J内的零点都是孤立的。

3. 设$y = \varphi_1(x)$与$y = \varphi_2(x)$是齐次线性方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{301}$$

的两个非零解，则成立

    1. $y = \varphi_1(x)$与$y = \varphi_2(x)$是线性无关的，当且仅当其有相同的零点；
    2. $y = \varphi_1(x)$与$y = \varphi_2(x)$是线性无关的，当且仅当其零点是相互交错的。

4. Sturm比较定理：设有两个齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{302}$$

和

$$y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{303}$$

其中系数函数$p(x), q(x)$和$Q(x)$在区间J上是连续的，而且成立不等式

$$Q(x) \geq q(x), x \in J \tag{304}$$

若$y = \varphi(x)$是方程$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$的一个非零解，且x_1和x_2是其两个相邻的零点，则方程$y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0$的任何非零解在区间$[x_1, x_2]$之间存在零点。同时，若条件$Q(x) \geq q(x), x \in J$改为

$$Q(x) > q(x), x \in J \tag{305}$$

则结论改为方程$y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0$的任何非零解在区间(x_1, x_2)之间存在零点。

5. 若齐次线性方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{306}$$

中的系数函数

$$q(x) \leq 0, x \in J \tag{307}$$

则其一切非零解在区间J上至多存在一个零点。

6. 若微分方程

$$y'' + q(x)y = 0 \tag{308}$$

其中系数函数$q(x)$在区间$a \le x < \infty$上是连续的，且满足不等式

$$q(x) \ge m > 0 \tag{309}$$

这里m为常数，则该微分方程的任何非零解在区间$[a, \infty)$上存在无限多个零点，且任意两个相邻的零点的间距不大于常数$\frac{\pi}{\sqrt{m}}$。

7. 若微分方程

$$y'' + q(x)y = 0 \tag{310}$$

其中系数函数$q(x)$在区间$a \le x < \infty$上是连续的，且满足不等式

$$q(x) \ge M \tag{311}$$

这里M为正的常数，则该微分方程的任何非零解在区间$[a, \infty)$上存在无限多个零点，且任意两个相邻的零点的间距不小于常数$\frac{\pi}{\sqrt{M}}$。

9.2 S-L边值问题的特征值

1. 对于一般的二阶线性微分方程：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{312}$$

其中系数函数$p(x)$和$q(x)$在区间J上是连续的。则作变换

$$y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int p(x)\mathrm{d}x} z \tag{313}$$

则微分方程化为

$$z'' + (q(x) - \frac{p^2(x) + 2p'(x)}{4})z = 0 \tag{314}$$

2. Sturm-Liouville边值问题：对于一般的二阶线性微分方程

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda r(x))y = 0 \tag{315}$$

其中λ为参数，系数函数$p(x), q(x)$和$r(x)$在区间$a \le x \le b$上是连续的，$p(x)$是可微的，且$p(x) > 0$和$r(x) > 0$。此外，设边值条件

$$Ky(a) + Ly'(a) = 0, My(b) + Ny'(b) = 0 \tag{316}$$

其中常数K, L, M和N满足条件

$$K^2 + L^2 > 0, M^2 + N^2 > 0 \tag{317}$$

边值问题

$$\begin{cases} (p(x)y')' + (q(x) + \lambda r(x))y = 0 \\ Ky(a) + Ly'(a) = 0 \\ My(b) + Ny'(b) = 0 \end{cases} \tag{318}$$

称为Sturm-Liouville边值问题，简称S-L初值问题。

3. 特征值和特征函数：若当$\lambda = \lambda_0$时边值问题

$$\begin{cases} (p(x)y')' + (q(x) + \lambda r(x))y = 0 \\ Ky(a) + Ly'(a) = 0 \\ My(b) + Ny'(b) = 0 \end{cases} \tag{319}$$

存在非零解$y = \varphi_0(x)$，则称λ_0为该初值问题的特征值，$y = \varphi_0(x)$为相应的特征函数。

4. S-L初值问题存在无限多个（简单的）特征值，且可排列如下

$$\lambda_0 < \cdots < \lambda_n < \cdots \tag{320}$$

其中

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty \tag{321}$$

9.3 特征函数系的正交系

1. 对于每个特征值，S-L边值问题存在且存在唯一线性无关的特征函数。
2. 将S-L边值问题的特征值λ_n对应的特征函数记为$y = \varphi_n(x)$，则特征函数系在区间$[a, b]$上构成正交系，即

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \delta_i, & i = j \end{cases} \tag{322}$$

3. 若函数$f(x)$在区间$[a, b]$上是Rimman可积的，且满足

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = 0, n = 0, 1, \cdots \tag{323}$$

那么$f(x)$除在少数点处外恒为零。

> 几何意义：与线性空间的基都正交的向量只能为零向量。

4. 广义Fourier级数：若函数$f(x)$在区间$[a, b]$上可积，则$f(x)$关于特征函数系的广义Fourier级数为

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{324}$$

其中广义Fourier系数

$$a_n = \frac{1}{\delta_n} \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x \tag{325}$$

其中

$$\delta_n = \int_a^b \varphi_n^2(x)\mathrm{d}x \tag{326}$$

5. 若函数$f(x)$在区间$[a, b]$上满足Dirichlet条件，即$f(x)$在x_0附近的一个区间上分段单调，并且在该区间上不连续点的个数至多是有限的，则则广义Fourier级数在$x = x_0 \in (a, b)$处收敛到$f(x_0)$。

9.4 周期边值问题

1. 二阶的微分方程

$$x'' + \omega_0^2 x = p(t) + \lambda f(t, x, x') \tag{327}$$

其中$\omega_0 > 0$为常数，λ为小参数，$p(t)$为连续的且以2π为周期的函数，$f(t, x, x')$是关于t, x, x'的连续函数，且对于t是以2π为周期的，而对于x和x'是连续可微的。

2. $x = x(t)$是方程

$$x'' + \omega_0^2 x = p(t) + \lambda f(t, x, x') \tag{328}$$

的以2π为周期的解，当且仅当满足周期边值条件

$$x(0) = x(2\pi), x'(0) = x'(2\pi) \tag{329}$$

3. 设ω_0不为正整数，则当λ为小参数时微分方程

$$x'' + \omega_0^2 x = p(t) + \lambda f(t, x, x') \tag{330}$$

存在且存在唯一的以2π为周期的解。

第十章：首次积分

10.1 首次积分的定义与性质

1. 首次积分：对于一般的n阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x}=f_k(x,y_1,\cdots,y_n),k=1,\cdots,n \tag{331}$$

其中函数$f_1,\cdots,f_n$在区域$D\subset\mathbb{R}^{n+1}$内对$(x,y_1,\cdots,y_n)$是连续的，且对$y_1,\cdots,y_n$是连续可微的。若函数$V=V(x,y_1,\cdots,y_n)$在区域$G\subset D$内连续，且对于$x,y_1,\cdots,y_n$是连续可微的，且$V(x,y_1,\cdots,y_n)$不为常函数，但沿着该微分方程在区域G内的任一积分曲线

$$\Gamma:y_1=y_1(x),\cdots,y_n=y_n(x),x\in J \tag{332}$$

函数V取常数值，即

$$V(x,y_1(x),\cdots,y_n(x))=\text{常数},x\in J \tag{333}$$

或当$(x,y_1,\cdots,y_n)\in\Gamma$时，有

$$V(x,y_1,\cdots,y_n)=\text{常数},x\in J \tag{334}$$

其中常数由积分曲线Γ而定。则称

$$V(x,y_1,\cdots,y_n)=C \tag{335}$$

为该微分方程在区域G内的首次积分，其中C为任意常数。

2. 若函数$\Phi(x,y_1,\cdots,y_n)$在区域G内是连续可微的，且不为常函数，则

$$\Phi(x,y_1,\cdots,y_n)=C \tag{336}$$

是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x}=f_k(x,y_1,\cdots,y_n),k=1,\cdots,n \tag{337}$$

在区域G内的首次积分的充分必要条件为对于$(x,y_1,\cdots,y_n)\in G$恒成立

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}f_1+\cdots+\frac{\partial\Phi}{\partial y_n}f_n=0 \tag{338}$$

3. 微分方程的一个首次积分可将微分方程降低一阶。

4. 设微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x}=f_k(x,y_1,\cdots,y_n),k=1,\cdots,n \tag{339}$$

存在n个的首次积分

$$\Phi_k(x,y_1,\cdots,y_n)=C_k \tag{340}$$

其中$k=1,\cdots,n$，且在区域G内为互相独立的，即对于$(x,y_1,\cdots,y_n)\in G$，其Jacobi行列式

$$\frac{\Phi_1,\cdots,\Phi_n}{y_1,\cdots,y_n}\neq 0 \tag{341}$$

则由首次积分$\Phi_k(x,y_1,\cdots,y_n)=C_k$及其独立性，可得到原微分方程在区域$G$内的通解

$$y_1=\varphi_1(x,C_1,\cdots,C_n),\cdots,y_n=\varphi_n(x,C_1,\cdots,C_n) \tag{342}$$

10.2 首次积分的存在性

1. 若$P_0=(x,y_{1_0},\cdots,y_{n_0})\in G$，则存在$P_0$的邻域$G_0\in G$，使得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x}=f_k(x,y_1,\cdots,y_n),k=1,\cdots,n \tag{343}$$

在区域G_0内存在n个相互独立的首次积分。

2. 微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x}=f_k(x,y_1,\cdots,y_n),k=1,\cdots,n \tag{344}$$

至多存在n个相互独立的首次积分。

3. 若

$$\Phi_k(x,y_1,\cdots,y_n)=C_k \tag{345}$$

是微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x}=f_k(x,y_1,\cdots,y_n),k=1,\cdots,n \tag{346}$$

在区域G_0内的n个相互独立的首次积分，则在区域G_0内该微分方程的任何首次积分

$$V(x,y_1,\cdots,y_n)=C \tag{347}$$

可以用$\Phi_k(x,y_1,\cdots,y_n)=C_k$来表达，即存在连续可微的函数$f$，使得

$$V(x,y_1,\cdots,y_n)=f(\Phi_1(x,y_1,\cdots,y_n),\cdots,\Phi_n(x,y_1,\cdots,y_n)) \tag{348}$$

第十一章：一阶偏微分方程

11.1 一阶齐次线性偏微分方程

1. 一阶齐次线性偏微分方程：

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial y}{\partial x_k}=0 \tag{349}$$

其中$y=y(x_1,\cdots,x_n), n\geq 2$是未知函数，且系数函数$A_1,\cdots,A_n$对$(x_1,\cdots,x_n)\in D$是连续可微的，并不同时为零。

2. 特征方程：一阶齐次线性偏微分方程

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial y}{\partial x_k}=0 \tag{350}$$

的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1(x_1,\cdots,x_n)}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{A_n(x_1,\cdots,x_n)} \tag{351}$$

其存在$n-1$个独立的首次积分

$$\varphi_k(x_1,,\cdots,x_n)=C_k, k=1,\cdots,n-1 \tag{352}$$

3. 若一阶偏微分方程

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial y}{\partial x_k}=0 \tag{353}$$

的$n-1$个独立的首次积分为

$$\varphi_k(x_1,,\cdots,x_n)=C_k, k=1,\cdots,n-1 \tag{354}$$

，则微分方程(243)的通解为

$$y=\psi(\varphi_1(x_1,,\cdots,x_n),\cdots,\varphi_{n-1}(x_1,,\cdots,x_n)) \tag{355}$$

其中ψ为任意连续可微函数。

11.2 一阶拟线性偏微分方程

1. 一阶拟线性偏微分方程

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(x_1,\cdots,x_n,y)\frac{\partial y}{\partial x_k}=B(x_1,\cdots,x_n,y) \tag{356}$$

其中系数函数$A_1,\cdots,A_n$和B对$(x_1,\cdots,x_n,\ y)\in G$是连续可微的。

2. 特征方程：一阶拟线性偏微分方程

$$\sum_{k=1}^{n}A_k(x_1,\cdots,x_n,y)\frac{\partial y}{\partial x_k}=B(x_1,\cdots,x_n,y) \tag{357}$$

的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1(x_1,\cdots,x_n,y)}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{A_n(x_1,\cdots,x_n,y)}=\frac{\mathrm{d}y}{B(x_1,\cdots,x_n,y)} \tag{358}$$

3. 若一阶拟线性偏微分方程

$$\sum_{k=1}^{n}A_k(x_1,\cdots,x_n,y)\frac{\partial y}{\partial x_k}=B(x_1,\cdots,x_n,y) \tag{359}$$

的特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{A_1(x_1,\cdots,x_n,y)}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{A_n(x_1,\cdots,x_n,y)}=\frac{\mathrm{d}y}{B(x_1,\cdots,x_n,y)} \tag{360}$$

的n个首次积分为

$$\varphi_k(x_1,\cdots,x_n,y)=C_k,k=1,\cdots,n \tag{361}$$

则该微分方程的（隐式）通解为

$$\psi(\varphi_1(x_1,,\cdots,x_n,y),\cdots,\varphi_n(x_1,,\cdots,x_n,y))=0 \tag{362}$$

其中ψ为任意连续可微函数。

11.3 几何解释

1. 一阶拟线性微分方程

$$X(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Y(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=Z(x,y,z) \tag{363}$$

其特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{X(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}y}{Y(x,y,z)}\frac{\mathrm{d}z}{Z(x,y,z)} \tag{364}$$

2. 特征向量：$\vec{v}=(X(x,y,z),Y(x,y,z),Z(x,y,z))$
特征曲线：特征方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{X(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}y}{Y(x,y,z)}\frac{\mathrm{d}z}{Z(x,y,z)} \tag{365}$$

的积分曲线Γ
积分曲面：偏微分方程

$$X(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Y(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=Z(x,y,z) \tag{366}$$

的解所构成的平面$\mathcal{S}$

3. 通过积分曲面$\mathcal{S}$上的任意一点P存在且存在唯一一条特征曲线Γ，且两者在P点相切，同时$\Gamma\subset\mathcal{S}$。
4. 由特征曲线生成的光滑曲面是偏微分方程的积分曲面。

5. 给定一条光滑初始曲线

$$\Gamma: x=x(t), y=y(t), z=z(t), t \in I \tag{367}$$

其中t为曲线的参数坐标。求解偏微分方程

$$X(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Y(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=Z(x,y,z) \tag{368}$$

的通过曲线Γ的积分曲面$\mathcal{S}$。
求解：若偏微分方程

$$X(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}+Y(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}=Z(x,y,z) \tag{369}$$

的特征方程的积分曲线为

$$\varphi(x,y,z)=C_1, \psi(x,y,z)=C_2 \tag{370}$$

在Γ上任取一点$P(x(t),y(t),z(t))$，则通过P点的特征曲线为

$$\Gamma_P: \varphi(x,y,z)=\overline{C_1}, \psi(x,y,z)=\overline{C_2} \tag{371}$$

其中常数

$$\overline{C_1}=\varphi(x(t),y(t),z(t)), \overline{C_2}=\psi(x(t),y(t),z(t)) \tag{372}$$

消去参数t，得到$\overline{C_1}$与$\overline{C_2}$之间的关系式

$$E(\overline{C_1},\overline{C_2})=0 \tag{373}$$

其表示与初始曲面Γ相交的特征曲线所满足的关系式。因此，关系式

$$E(\varphi(x,y,z),\psi(x,y,z))=0 \tag{374}$$

确定了所求解的积分曲面$\mathcal{S}$。