姓名：周梦轩

班级：数学212

学号：212483

习题一

第一题

已知区间$[-1,1]$，Runge函数$f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}$，分别取$n=6$和$n=10$。

用区间n等分产生的等距节点对作Newton插值，要求对每个n，画出插值多项式和函数$f(x)$的曲线。

用$n+1$次Chebyshev多项式的零点为插值节点，作Newton插值，要求对每个n，画出插值多项式和函数$f(x)$的曲线。

解：差商公式为

$$f[x_0,\cdots,x_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{j\neq i}(x_i-x_j)} \tag{1}$$

Newton插值公式为

$$P_n(x)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{n}f[x_0,\cdots,x_i]\prod_{j=0}^{i-1}(x-x_j) \tag{2}$$

Chebyshev多项式C_{n+1}的$n+1$个零点为

$$x_k=\cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi \tag{3}$$

其中$k=0,\cdots,n$。

定义差商函数

```
function result = dividedDifference(fun, points)

    % 名称：差商
    % 输入：
    %       fun:     匿名函数
    %       points：需要求解差商的点
    % 输出：
    %       result：差商值

    %% 函数

    % 初始化结果
    result = 0;

    % 外层循环
    for i = 1: length(points)
        % 初始化积
        product = 1;
        % 内层循环
        for j = 1: length(points)
            if j ~= i
                product = product * (points(i) - points(j));
            end
```

```
        end
        result = result + fun(points(i)) / product;
    end

end

```

Newton插值函数

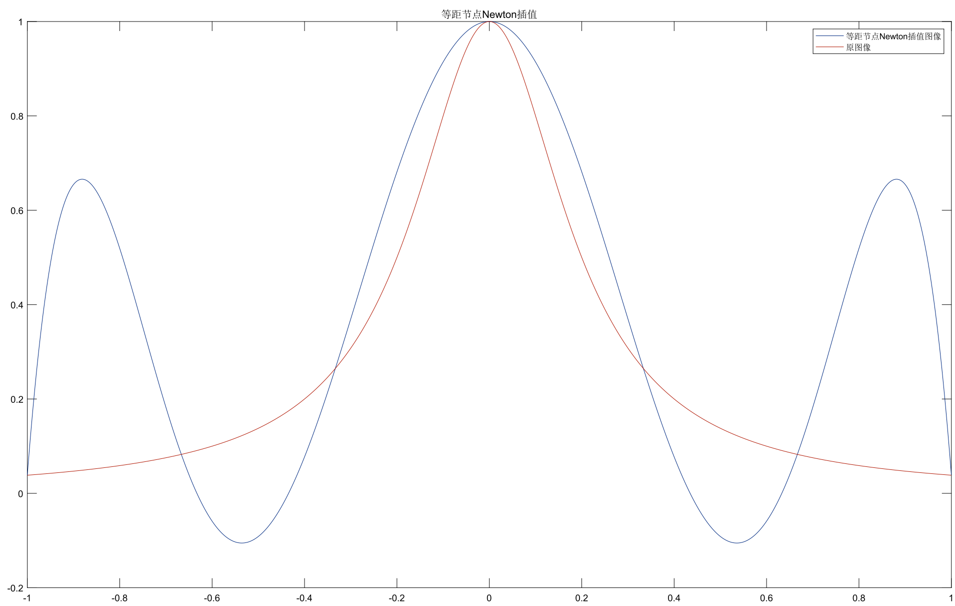
```
function NewtonInterpolationFormula(fun, a, b, points)

    % 名称:          Newton插值公式
    % 输入:
    %       fun:        匿名函数
    %       a:          插值左端点
    %       b:          插值右端点
    %       points:     插值节点
    % 输出:          插值图像

    %% 函数

    % 横坐标
    x = linspace(a, b, 1000);

    % 初始化纵坐标
    y = fun(a);
    % 求和
    for i = 1: length(points) - 1
        % 求解差商
        dividedDif = dividedDifference(fun, points(1: i + 1));
        % 初始化积
        prod = 1;
        % 求积
        for j = 0: i-1
            prod = prod .* (x - points(j + 1));
        end
        y = y + dividedDif .* prod;
    end

    % 绘图
    figure
    plot(x, y, x, fun(x))

end

```

主函数

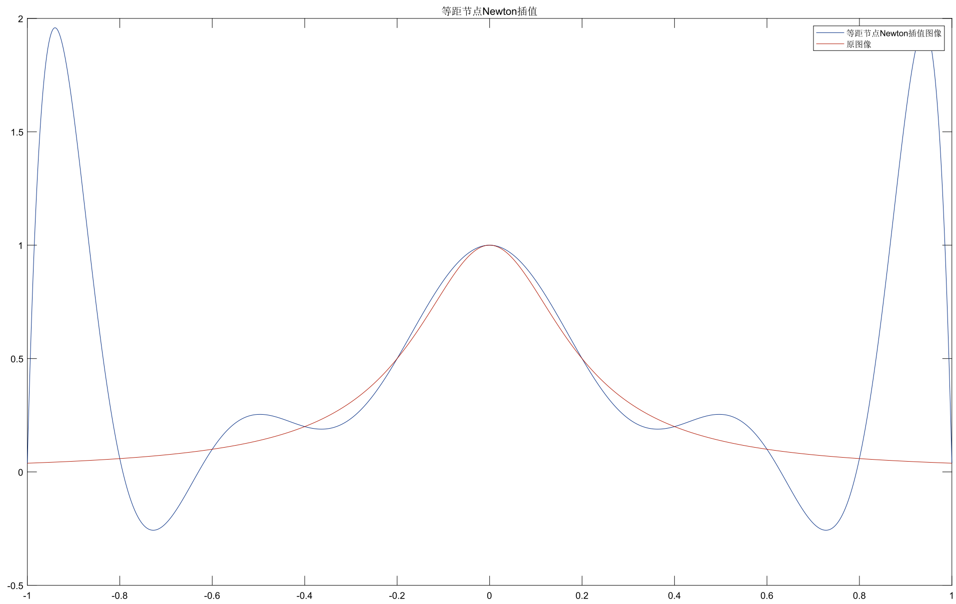
```
clear; clc

% 定义函数
fun = @(x) 1 ./ (1 + 25 .* x .^ 2);
a = -1;
b = 1;
```

```matlab

% n=6时等距节点Newton插值
n = 6;
points = 0: n;
points = a + (b - a) / n .* points;
NewtonInterpolationFormula(fun, a, b, points)
title('等距节点Newton插值')
legend('等距节点Newton插值图像','原图像')

% n=10时等距节点Newton插值
n = 10;
points = 0: n;
points = a + (b - a) / n .* points;
NewtonInterpolationFormula(fun, a, b, points)
title('等距节点Newton插值')
legend('等距节点Newton插值图像','原图像')

% n=6时Chebyshev节点Newton插值
n = 6;
points = 0: n;
points = cos((2 .* points + 1) ./ (2 * (n + 1)) .* pi);
NewtonInterpolationFormula(fun, a, b, points)
title('Chebyshev节点Newton插值')
legend('Chebyshev节点Newton插值图像','原图像')

% n=10时Chebyshev节点Newton插值
n = 10;
points = 0: n;
points = cos((2 .* points + 1) ./ (2 * (n + 1)) .* pi);
NewtonInterpolationFormula(fun, a, b, points)
title('Chebyshev节点Newton插值')
legend('Chebyshev节点Newton插值图像','原图像')

```

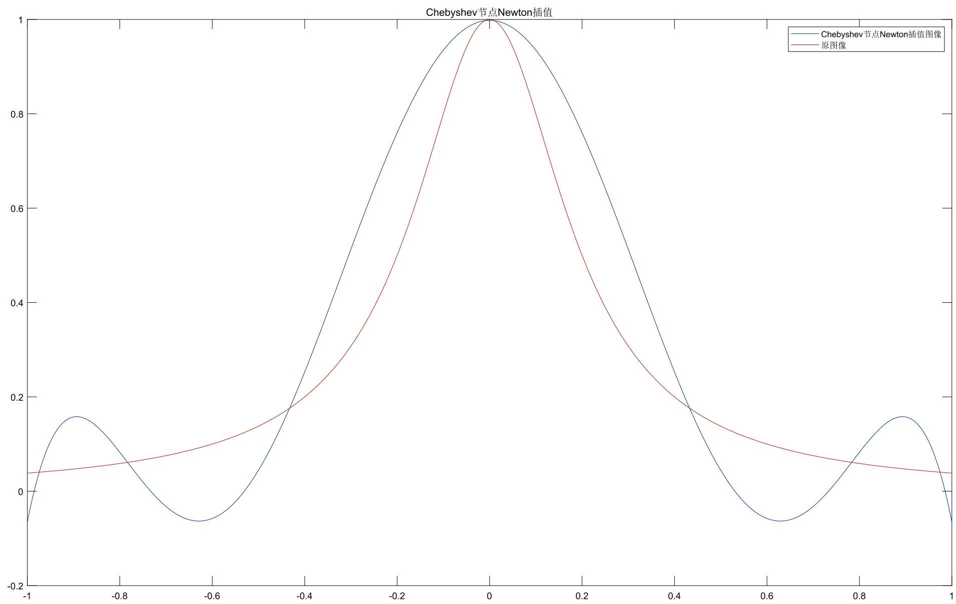
$n = 6$时等距节点Newton插值输出图像



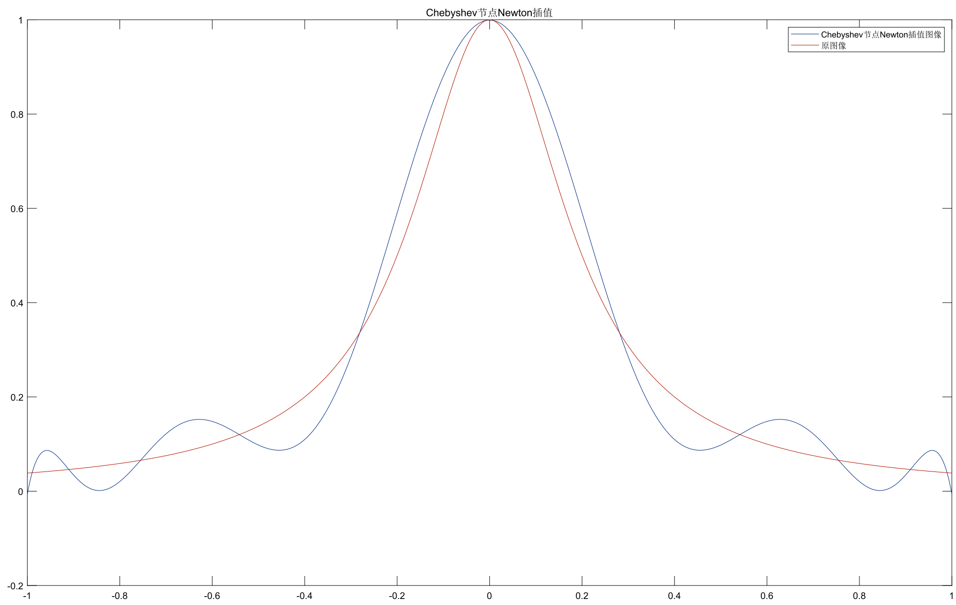
$n = 10$时等距节点Newton插值输出图像



$n = 6$时Chebyshev节点Newton插值输出图像



$n = 10$时等Chebyshev节点Newton插值输出图像



第二题

下列数据点的插值

x_k	0.001	1	8	27	64	125	216
$f(x_k)$	0.1	1	2	3	4	5	6

可以得到立方根函数$f(x)=\sqrt[3]{x}$的近似函数，要求用上述7个点作6次插值多项式$L_6(x)$，画出的曲线$L_6(x)$，并计算$\sqrt[3]{100}$的近似值。

解：定义多项式插值函数

```
function fun = polynomialInterpolationFormula(x0, y0)

    % 名称:            多项式插值公式
    % 输入:
    %       x0:         插值点横坐标
    %       y0:         插值点纵坐标
    % 输出:            多项式插值公式

    %% 函数

    N = length(x0);

    % 初始化系数矩阵
    A = ones(N, N);
    for n = 2: N
        A(n, :) = x0 .^ (n-1);
    end
    A = A';

    % 求解系数
    coefficient = A \ y0';

```

```
    % 输出多项式插值函数
    syms x
    fun = coefficient(1);
    for n = 2: N
        fun = fun + coefficient(n) .* x .^ (n - 1);
    end
    fun = matlabFunction(fun);

end

```

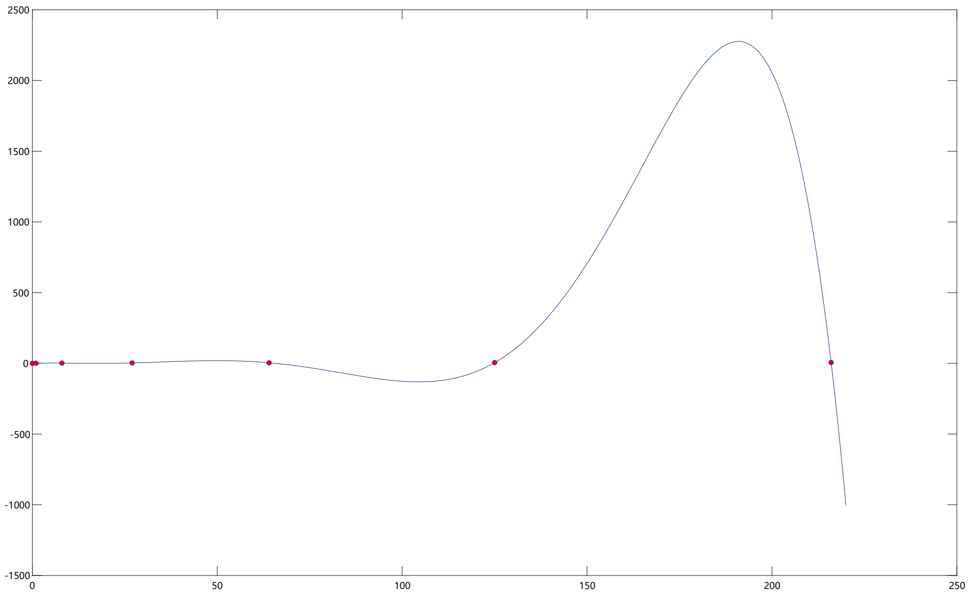
定义主函数

```
clear; clc

% 定义函数
fun = @(x) x .^ (1 / 3);

% 定义插值点
x0 = [0.001, 1, 8, 27, 64, 125, 216];
y0 = fun(x0);

% 求解插值公式
fun = polynomialInterpolationFormula(x0, y0);

% 求解插值
x = linspace(0, 220, 1000);
y = fun(x);

% 求解近似值
fprintf('100^(1/3)的近似值为：%.3f', fun(100 ^ (1 / 3)))

% 绘图
figure
plot(x, y)
hold on
plot(x0, y0, 'bo', 'MarkerSize', 5, 'MarkerFaceColor', 'r')
hold off

```

输出结果

100^(1/3)的近似值为：2.373

输出图像



第三题

已知函数在下列各点的值为

x_i	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_i	0.98	0.92	0.81	0.64	0.39

要求给出在自然边界条件下的三次样条插值多项式$S(x)$的表达式，并由插值多项式分别计算节点$x_k^* = 0.2 + 0.08k$的近似值，其中$k = 1, 3, 7, 9, 11$。

解：MatLab代码如下

```
clear;clc
% 已知数据点
x = [0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0];
y = [0.98, 0.92, 0.81, 0.64, 0.39];

% 计算三次样条插值多项式的系数
cubicSplineInterpolation = spline(x, [0, y, 0]);

% 显示插值多项式的系数
disp(round(cubicSplineInterpolation.coefs, 2))

```

输出结果

```
  2.61          -2.02          0           0.98
  0.92          -0.46         -0.5         0.92
- 7.52           0.09         -0.57        0.81
 26.67          -4.42         -1.43        0.64
```

因此三次样条插值函数为

$$S(x)=\begin{cases}2.61-2.02(x-0.2)+0.98(x-0.2)^3, & x<0.4\\ 0.92-0.46(x-0.4)-0.5(x-0.4)^2+0.92(x-0.4)^3, & 0.4\le x<0.6\\ -7.52+0.09(x-0.6)-0.57(x-0.6)^2+0.81(x-0.6)^3, & 0.6\le x<0.8\\ 26.67-4.42(x-0.8)-1.43(x-0.8)+0.64(x-0.8)^3, & x\ge 0.8\end{cases} \tag{4}$$

代入数据

$$S(x_1^*)=2.45,\qquad S(x_3^*)=0.90,\qquad S(x_7^*)=-7.52,\qquad S(x_9^*)=25.97,\qquad S(x_{11}^*)=25.05 \tag{5}$$

第四题

下列数据点

x_i	0	1	2	3	4	5	6.2832
y_i	1.0000	0.5403	−0.4161	−0.9900	−0.6536	0.2837	1.0000

是根据$y=\cos x$给出的，要求用上述数据在周期边界条件下作三次样条插值，并计算$x=1.5$和$x=1.8$时的近似值。

解：MatLab代码如下

```
clear; clc
% 给定数据点
x0 = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.2832];
y0 = [1.0000, 0.5403, -0.4161, -0.9900, -0.6536, 0.2837, 1.0000];

% 为了满足周期边界条件，将第一个点和最后一个点连接起来
x0 = [x0, x0(1) + 2*pi];
y0 = [y0, y0(1)];

% 进行三次样条插值，使用周期边界条件
cubicSplineInterpolation = csape(x0, y0, 'periodic');

% 计算在x=1.5和x=1.8时的近似值
x = [1.5, 1.8];
y = ppval(cubicSplineInterpolation, x);

% 输出结果
fprintf('cos1.5为：%.3f\n', y(1))
fprintf('cos1.8为：%.3f', y(2))

```

输出结果

cos1.5为：0.071

cos1.8为：-0.228