群

	原群	半群	幺半群	群	交换群
封闭性	✓	✓	✓	✓	✓
结合律		✓	✓	✓	✓
单位元			✓	✓	✓
逆元				✓	✓
交换律					✓

原群(magma)：称代数系统$(G,*)$为原群，如果$*$为二元运算$*:G\times G\to G$。

半群(semigroup)：称代数系统$(G,*)$为半群，如果二元运算$*:G\times G\to G$成立如下命题。

1. **结合律(associative)**：

$$\forall g,h,k\in G,\quad (g*h)*k=g*(h*k) \tag{1}$$

幺半群(monoid)：称代数系统$(G,*)$为幺半群，如果二元运算$*:G\times G\to G$成立如下命题。

1. **单位元(identity element)**：

$$\exists e\in G,\forall g\in G,\quad e*g=g*e=g \tag{2}$$

2. **结合律(associative)**：

$$\forall g,h,k\in G,\quad (g*h)*k=g*(h*k) \tag{3}$$

群(group)：称代数系统$(G,*)$为群，如果二元运算$*:G\times G\to G$成立如下命题。

1. **单位元(identity element)**：

$$\exists e\in G,\forall g\in G,\quad e*g=g*e=g \tag{4}$$

2. **逆元(inverse)**：

$$\forall g \in G, \exists g^{-1}, \quad g * g^{-1} = g^{-1} * g = e \tag{5}$$

3. **结合律(associative)**：

$$\forall g, h, k \in G, \quad (g * h) * k = g * (h * k) \tag{6}$$

交换群(commutative group)：称代数系统$(G, *)$为交换群，如果二元运算$* : G \times G \to G$成立如下命题。

1. **单位元(identity element)**：

$$\exists e \in G, \forall g \in G, \quad e * g = g * e = g \tag{7}$$

2. **逆元(inverse)**：

$$\forall g \in G, \exists g^{-1}, \quad g * g^{-1} = g^{-1} * g = e \tag{8}$$

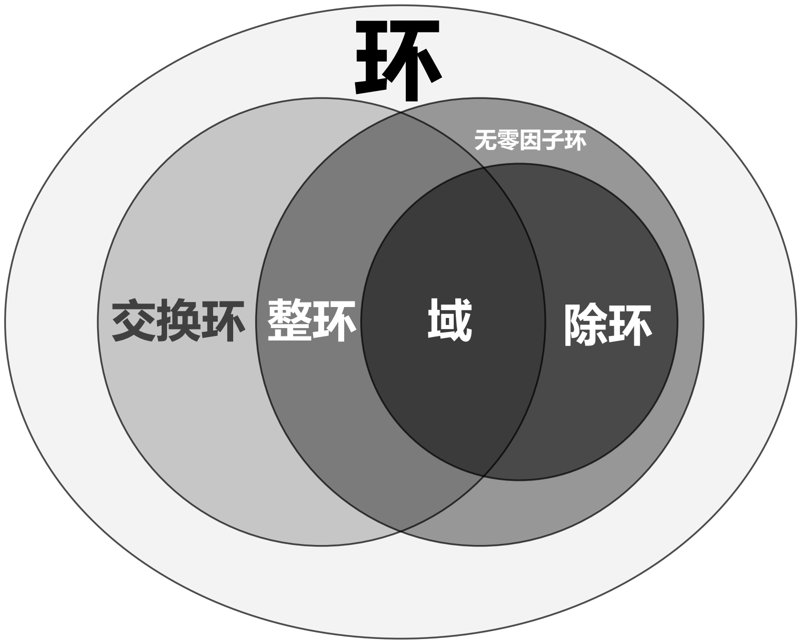
3. **结合律(associative)**：

$$\forall g, h, k \in G, \quad (g * h) * k = g * (h * k) \tag{9}$$

4. **交换律(commutative)**：

$$\forall g, h \in G, \quad g * h = h * g \tag{10}$$

环



	环	交换环	无零因子环	整环	除环	域
加法封闭性	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
乘法封闭性	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
加法单位元	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
乘法单位元	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
加法逆元	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
加法交换律	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
加法结合律	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
乘法结合律	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
分配律	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
非零性			$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
消去律			$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
乘法交换律		$\checkmark$		$\checkmark$		$\checkmark$
乘法逆元					$\checkmark$	$\checkmark$

零环(zero-ring)：$\{0\}$

非零环(non-zero-ring)：称环$(R,+,\cdot)$为非零环，如果$0\neq 1$。

环(ring)：称代数系统$(R,+,\cdot)$为环，如果加法运算$+:R\times R\to R$和乘法运算$\cdot:R\times R\to R$成立如下命题。

1. **加法单位元(addition identity element)**：

$$\exists 0 \in R, \forall r \in R, \quad 0 + r = r + 0 = r \tag{11}$$

2. **乘法单位元(multiplication identity element)**：

$$\exists 1 \in R, \forall r \in R, \quad 1 \cdot r = r \cdot 1 = r \tag{12}$$

3. **加法逆元(addition inverse)**：

$$\forall r \in R, \exists -r \in R, \quad r + (-r) = (-r) + r = 0 \tag{13}$$

4. **加法结合律(addition associative)**：

$$\forall r, s, t \in R, \quad (r + s) + t = r + (s + t) \tag{14}$$

5. **乘法结合律(multiplication associative)**：

$$\forall r, s, t \in R, \quad (r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t) \tag{15}$$

6. **加法交换律(addition commutative)**：

$$\forall r, s \in R, \quad r + s = s + r \tag{16}$$

7. **分配律(distributive)**：

$$\forall r, s, t \in R, \quad (r + s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t \tag{17}$$

$$\forall r, s, t \in R, \quad r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t \tag{18}$$

> 环$(R, +, \cdot)$包括交换群$(R, +)$和幺半群$(R, \cdot)$，并且满足分配律。

交换环(commutative ring)：称代数系统$(R, +, \cdot)$为交换环，如果加法运算$+ : R \times R \to R$和乘法运算$\cdot : R \times R \to R$成立如下命题。

1. **加法单位元(addition identity element)**：

$$\exists 0 \in R, \forall r \in R, \quad 0 + r = r + 0 = r \tag{19}$$

2. **乘法单位元(multiplication identity element)**：

$$\exists 1 \in R, \forall r \in R, \quad 1 \cdot r = r \cdot 1 = r \tag{20}$$

3. **加法结合律(addition associative)**：

$$\forall r, s, t \in R, \quad (r + s) + t = r + (s + t) \tag{21}$$

4. **乘法结合律(multiplication associative)**：

$$\forall r, s, t \in R, \quad (r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t) \tag{22}$$

5. **加法逆元(addition inverse)**：

$$\forall r \in R, \exists -r \in R, \quad r + (-r) = (-r) + r = 0 \tag{23}$$

6. **加法交换律(addition commutative)**：

$$\forall r, s \in R, \quad r + s = s + r \tag{24}$$

7. **乘法交换律(multiplication commutative)**：

$$\forall r, s \in R, \quad r \cdot s = s \cdot r \tag{25}$$

8. **分配律(distributive)**：

$$\forall r,s,t \in R, \quad (r+s)\cdot t = r\cdot t + s\cdot t \tag{26}$$
$$\forall r,s,t \in R, \quad r\cdot (s+t) = r\cdot s + r\cdot t \tag{27}$$

无零因子环(without zero-divisor ring)：称代数系统$(R,+,\cdot)$为无零因子环，如果加法运算$+: R\times R\to R$和乘法运算$\cdot: R\times R\to R$成立如下命题。

1. **加法单位元(addition identity element)**：

$$\exists 0\in R, \forall r\in R, \quad 0+r=r+0=r \tag{28}$$

2. **乘法单位元(multiplication identity element)**：

$$\exists 1\in R\setminus\{0\}, \forall r\in R, \quad 1\cdot r = r\cdot 1 = r \tag{29}$$

3. **加法逆元(addition inverse)**：

$$\forall r\in R, \exists -r\in R, \quad r+(-r)=(-r)+r=0 \tag{30}$$

4. **加法结合律(addition associative)**：

$$\forall r,s,t \in R, \quad (r+s)+t = r+(s+t) \tag{31}$$

5. **乘法结合律(multiplication associative)**：

$$\forall r,s,t \in R, \quad (r\cdot s)\cdot t = r\cdot (s\cdot t) \tag{32}$$

6. **加法交换律(addition commutative)**：

$$\forall r,s \in R, \quad r+s=s+r \tag{33}$$

7. **消去律(cancellation)**：

$$\forall r,s \in R, \quad r\cdot s = 0 \implies r=0 \text{ or } s=0 \tag{34}$$

8. **分配律(distributive)**：

$$\forall r,s,t \in R, \quad (r+s)\cdot t = r\cdot t + s\cdot t \tag{35}$$
$$\forall r,s,t \in R, \quad r\cdot (s+t) = r\cdot s + r\cdot t \tag{36}$$

整环(integral domain)：称代数系统$(R,+,\cdot)$为整环，如果加法运算$+: R\times R\to R$和乘法$\cdot: R\times R\to R$成立如下命题。

1. **加法单位元(addition identity element)**：

$$\exists 0\in R, \forall r\in R, \quad 0+r=r+0=r \tag{37}$$

2. **乘法单位元(multiplication identity element)**：

$$\exists 1\in R\setminus\{0\}, \forall r\in R, \quad 1\cdot r = r\cdot 1 = r \tag{38}$$

3. **加法逆元(addition inverse)**：

$$\forall r\in R, \exists -r\in R, \quad r+(-r)=(-r)+r=0 \tag{39}$$

4. **加法结合律(addition associative)**：

$$\forall r,s,t \in R, \quad (r+s)+t = r+(s+t) \tag{40}$$

5. **乘法结合律(multiplication associative)**：

$$\forall r,s,t \in R, \quad (r\cdot s)\cdot t = r\cdot (s\cdot t) \tag{41}$$

6. **加法交换律(addition commutative)**：

$$\forall r,s \in R, \quad r+s=s+r \tag{42}$$

7. **乘法交换律(multiplication commutative)**：

$$\forall r, s \in R, \quad r \cdot s = s \cdot r \tag{43}$$

8. **消去律(cancellation)**：

$$\forall r, s \in R, \quad r \cdot s = 0 \implies r = 0 \text{ or } s = 0 \tag{44}$$

9. **分配律(distributive)**：

$$\forall r, s, t \in R, \quad (r+s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t \tag{45}$$

$$\forall r, s, t \in R, \quad r \cdot (s+t) = r \cdot s + r \cdot t \tag{46}$$

除环(division ring)：称代数系统$(R, +, \cdot)$为除环，如果加法运算$+ : R \times R \to R$和乘法$\cdot : R \times R \to R$成立如下命题。

1. **加法单位元(addition identity element)**：

$$\exists 0 \in R, \forall r \in R, \quad 0 + r = r + 0 = r \tag{47}$$

2. **乘法单位元(multiplication identity element)**：

$$\exists 1 \in R \setminus \{0\}, \forall r \in R, \quad 1 \cdot r = r \cdot 1 = r \tag{48}$$

3. **加法逆元(addition inverse)**：

$$\forall r \in R, \exists -r \in R, \quad r + (-r) = (-r) + r = 0 \tag{49}$$

4. **乘法逆元(multiplication inverse)**：

$$\forall r \in R \setminus \{0\}, \exists r^{-1} \in R, \quad r \cdot r^{-1} = r^{-1} \cdot r = 1 \tag{50}$$

5. **加法结合律(addition associative)**：

$$\forall r, s, t \in R, \quad (r+s) + t = r + (s+t) \tag{51}$$

6. **乘法结合律(multiplication associative)**：

$$\forall r, s, t \in R, \quad (r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t) \tag{52}$$

7. **加法交换律(addition commutative)**：

$$\forall r, s \in R, \quad r + s = s + r \tag{53}$$

8. **分配律(distributive)**：

$$\forall r, s, t \in R, \quad (r+s) \cdot t = r \cdot t + s \cdot t \tag{54}$$

$$\forall r, s, t \in R, \quad r \cdot (s+t) = r \cdot s + r \cdot t \tag{55}$$

> 除环$(R, +, \cdot)$包括交换群$(R, +)$和群$(R, \cdot)$，并且满足分配律。

域(field)：称代数系统$(F, +, \cdot)$为域，如果加法运算$+ : F \times F \to F$和乘法运算$\cdot : F \times F \to F$成立如下命题。

1. **加法单位元(addition identity element)**：

$$\exists 0 \in F, \forall f \in F, \quad 0 + f = f + 0 = f \tag{56}$$

2. **乘法单位元(multiplication identity element)**：

$$\exists 1 \in F \setminus \{0\}, \forall f \in F, \quad 1 \cdot f = f \cdot 1 = f \tag{57}$$

3. **加法逆元(addition inverse)**：

$$\forall f \in F, \exists -f \in F, \quad f + (-f) = (-f) + f = 0 \tag{58}$$

4. **乘法逆元(multiplication inverse)**：

$$\forall f \in F \setminus \{0\}, \exists f^{-1} \in F, \quad f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = 1 \tag{59}$$

5. **加法交换律(addition commutative)**：

$$\forall f, g \in F, \quad f + g = g + f \tag{60}$$

6. **乘法交换律(multiplication commutative)**：

$$\forall f, g \in F, \quad f \cdot g = g \cdot f \tag{61}$$

7. **加法结合律(addition associative)**：

$$\forall f, g, h \in F, \quad (f + g) + h = f + (g + h) \tag{62}$$

8. **乘法结合律(multiplication associative)**：

$$\forall f, g, h \in F, \quad (f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h) \tag{63}$$

9. **分配律(distributive)**：

$$\forall f, g, h \in F, \quad (f + g) \cdot h = f \cdot h + g \cdot h \tag{64}$$
$$\forall f, g, h \in F, \quad f \cdot (g + h) = f \cdot g + f \cdot h \tag{65}$$

> 域$(F, +, \cdot)$包括交换群$(F, +)$和交换群$(F, \cdot)$，并且满足分配律。