数理统计

致谢

感谢邢小玉老师对于本课程学习的帮助。

目录

第五章：统计量及其分布

5.1 总体与概率

5.1.1 总体与个体

总体：研究对象的全体

个体：构成总体的每个成员

5.1.2 样本

样本：从总体中随机的抽取n个个体，记其指标值为

$$x_1, \cdots, x_n \tag{1}$$

那么此称为总体的一个样本，n称为**样本容量**，或简称样本量，样本中的个体称为**样品。**

简单随机抽样原则：

- 随机性
- 独立性

联合分布函数：总体X具有分布函数$F(x)$，$x_1, \cdots, x_n$为取自该总体的容量为n的样本，那么样本联合分布函数为

$$F(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} F(x_k) \tag{2}$$

5.2 样本数据的整理与表示

5.2.1 经验分布函数

经验分布函数：对于取自总体分布函数为$F(x)$的样本$x_1, \cdots, x_n$，记其对应的次序统计量为$x_{(1)}, \cdots, x_{(n)}$，定义该样本的经验分布函数为

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{(1)} \\ \frac{k}{n}, & x_{(k)} \le x < x_{(k+1)}, k = 1, \cdots, n-1 \\ 1, & x \ge x_{(n)} \end{cases} \tag{3}$$

- $F_n(x)$非减且右连续。
- $$F_n(-\infty) = 0 \qquad F_n(+\infty) = 1 \tag{4}$$

定理5.2.1 Glivenko定理：对于取自总体分布函数为$F(x)$的样本$x_1, \cdots, x_n$，记其经验分布函数为$F_n(x)$，那么当$n \to +\infty$时，成立

$$P\left(\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \to 0\right) = 1 \tag{5}$$

5.2.2 频数频率分布表

- 对样本进行分组：通常为$5 \sim 20$个。
- 确定每组组距：

$$\text{组距} d = \frac{\text{样本最大观测值} - \text{样本最小观测值}}{\text{组数}} \tag{6}$$

- 确定每组组限：

$$(a_0, a_1], \cdots, (a_{n-1}, a_n] \tag{7}$$

- 统计样本数据落入每个区间的个数——频数

频数频率分布表

分组区间	频数	频率
$(a_0, a_1]$	f_1	$\frac{f_1}{\sum_{k=1}^{n} f_k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(a_{n-1}, a_n]$	f_n	$\frac{f_n}{\sum_{k=1}^{n} f_k}$

5.2.3 样本数据的图形显示

- **直方图**
- **茎叶图**

5.3 统计量及其分布

5.3.1 统计量与抽样分布

定义5.3.1 统计量：对于取自总体的样本$x_1, \cdots, x_n$，若$T = T(x_1, \cdots, x_n)$中不含有任何位置参数，那么称T为统计量。统计量的分布称为**抽样分布**。

5.3.2 样本均值极其抽样分布

定义5.3.2 样本均值：对于取自总体的样本$x_1, \cdots, x_n$，其算术平均值称为样本均值，记为$\overline{x}$，即

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \tag{8}$$

特别的，在分组样本中，样本均值的近似公式为

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} x_k f_k \tag{9}$$

其中m为组数，x_k为第k组的组中值，f_k为第k组的频数，同时

$$n = \sum_{k=1}^{n} f_k \tag{10}$$

性质5.3.1：样本的所有偏差之和为0，即

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x}) = 0 \tag{11}$$

性质5.3.2：对于任意$c \in \mathbb{R}$，成立

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2 \le \sum_{k=1}^{n}(x_k - c)^2 \tag{12}$$

当且仅当$c = \overline{x}$时等号成立。

定理5.3.1：对于取自总体的样本$x_1, \cdots, x_n$，记其样本均值为$\overline{x}$。

- 如果总体分布为$N(\mu, \sigma^2)$，那么$\overline{x}$满足分布$N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$。
- 对于一般的总体的分布，记$E(x) = \mu, \mathrm{Var}(x) = \sigma^2$，那么当$n \to \infty$时，$\overline{x}$满足近似分布$N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$，记作

$$\overline{x} \dot{\sim} N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \tag{13}$$

5.3.3 样本方差与样本标准差

定义5.3.3 样本方差：对于取自总体的样本$x_1, \cdots, x_n$，定义其样本方差为

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - n\overline{x}^2\right) \tag{14}$$

定理5.3.2：对于具有二阶矩的总体X，即$E(X) = \mu$，$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2 < +\infty$，取自总体的样本$x_1, \cdots, x_n$，记$\overline{x}$和$s^2$分别为样本均值和样本方差，那么

$$E(\overline{x}) = \mu, \qquad \mathrm{Var}(\overline{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \tag{15}$$

$$E(s^2) = \sigma^2 \tag{16}$$

5.3.4 样本矩及其函数

定义5.3.4 样本原点矩：对于取自总体的样本$x_1, \cdots, x_n$，定义其样本k阶原点矩为

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k \tag{17}$$

定义5.3.5 样本中心距：对于取自总体的样本$x_1, \cdots, x_n$，定义其样本k阶中心矩为

$$b_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^k \tag{18}$$

定义5.3.6 样本偏差：对于取自总体的样本$x_1, \cdots, x_n$，定义其样本偏差为

$$\hat{\beta}_s = \frac{b_3}{b_2^{\frac{3}{2}}} \tag{19}$$

样本偏差反应总体分布密度曲线的对称性。

- $\hat{\beta}_s = 0$：完全对称
- $\hat{\beta}_s > 0$：存在右长尾
- $\hat{\beta}_s < 0$：存在左长尾

定义5.3.7 样本峰度：对于取自总体的样本$x_1, \cdots, x_n$，定义其样本峰度为

$$\hat{\beta}_k = \frac{b_3}{b_2^{\frac{3}{2}}} - 3 \tag{20}$$

样本峰度反应总体分布密度曲线在其峰值附近的陡峭程度。

- $\hat{\beta}_k > 0$：比正态分布陡峭，称为尖顶型
- $\hat{\beta}_k < 0$：比正态分布平缓，称为平顶型

5.3.5 次序统计量及其分布

定义5.3.8 次序统计量：对于取自总体的样本$x_1, \cdots, x_n$，称其次序统计量为

$$x_{(1)}, \cdots, x_{(n)} \tag{21}$$

其中$x_{(1)} \le \cdots \le x_{(n)}$。

定理5.3.3 单个次序统计量的分布：对于取自总体的样本$x_1, \cdots, x_n$，如果X的密度函数为$p(x)$，分布函数为$F(x)$，那么第k个次序统计量$x_{(k)}$的密度函数为

$$p_k(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(F(x))^{k-1}(1-F(x))^{n-k}p(x) \tag{22}$$

- $x_{(1)}$的密度函数为

  $$p_1(x) = np(x)(1-F(x))^{n-1} \tag{23}$$

  分布函数为

  $$F_1(x) = 1-(1-F(x))^n \tag{24}$$

- $x_{(n)}$的密度函数为

  $$p_n(x) = np(x)(F(x))^{n-1} \tag{25}$$

  分布函数为

  $$F_n(x) = (F(x))^n \tag{26}$$

定理5.3.4 两个次序统计量的联合分布：对于取自总体的样本$x_1, \cdots, x_n$，如果X的密度函数为$p(x)$，分布函数为$F(x)$，那么第i个次序统计量$x_{(i)}$和第j个次序统计量$x_{(j)}$的联合分布密度函数为

$$p_{ij}(x,y)=\frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}(F(x))^{i-1}(F(x)-F(y))^{j-i-1}(1-F(y))^{n-j}p(x)p(y) \tag{27}$$

其中$i<j$。

5.3.6 样本分位数与分位数

定义5.3.9 样本p分位数：对于取自总体的样本$x_1,\cdots,x_n$，定义其样本p分位数为

$$m_p=\begin{cases} x_{([np+1])}, & np\notin\mathbb{Z} \\ \frac{1}{2}\left(x_{(np)}+x_{(np+1)}\right), & np\in\mathbb{Z} \end{cases} \tag{28}$$

其中$p\in(0,1)$。

定义5.3.10 α分位数：对于随机变量X，称x_α为其α分位数，如果

$$P(X\le x_\alpha)=\alpha \tag{29}$$

定理5.3.5：如果总体密度函数为$p(x)$，x_p为其p分位数，$p(x)$在x_p处连续且$p(x_p)>0$，那么当$n\to+\infty$时，样本p分位数m_p的渐进分布为

$$m_p\dot{\sim}N\left(x_p,\frac{p(1-p)}{np^2(x_p)}\right) \tag{30}$$

5.3.7 五数概括与箱线图

定义5.3.111 五数概括：

$$x_{\min},\quad Q_1=m_{0.25},\quad m_{0.5},\quad Q_3=m_{0.75},\quad x_{\max} \tag{31}$$

定义5.3.12 箱线图：

- 画一个箱子，其两侧恰为第一4分位数和第三4分位数，在中位数位置上画一条竖线，其在箱子内，这个箱子包含了样本中50的数据。
- 在箱子左右两侧各引出一条水平线，分别至最小值和最大值为止。每条线段中包含了样本25的数据。

5.4 三大抽样分布

分布名称	表示	统计量的构造	抽样分布密度函数	期望	方差	特征函数
正态分布	$N(\mu,\sigma^2)$		$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},x\in\mathbb{R}$	μ	σ^2	$\mathrm{e}^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$
Γ分布	$\Gamma(\alpha,\lambda)$		$p(x)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x},x>0$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^{-\alpha}$
χ^2分布	$\chi^2(n)$	$\chi^2(n)=\sum_{k=1}^n(N(0,1))^2$	$p(x)=\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})2^{\frac{n}{2}}}x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}},x>0$	n	$2n$	$(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$
F分布	$F(m,n)$	$F(m,n)=\frac{\chi^2(m)/m}{\chi^2(n)/n}$	$p(x)=\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})(\frac{m}{n})^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}},x>0$	$\frac{n}{n-2}$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$	
t分布	$t(n)$	$t(n)=\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2(n)/n}}$	$p(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},x\in\mathbb{R}$	0	$\frac{n}{n-2}$	

Γ函数

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \tag{32}$$

分布间的联系：

- 若$X\sim N(0,1)$，那么

  $$X^2\sim\Gamma\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \tag{33}$$

  因此

  $$\chi^2(n)=\Gamma\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right) \tag{34}$$

- 如果$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，那么

  $$aX+b\sim N(a\mu+b,a^2\sigma^2) \tag{35}$$

- 如果独立分布$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$和$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，那么

  $$X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2) \tag{36}$$

- 如果$X\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$，那么

$$aX \sim \Gamma(\alpha, \frac{\lambda}{a}) \tag{37}$$

- 如果独立分布$X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda)$和$Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$，那么

$$X + Y \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda) \tag{38}$$

5.4.1 χ^2分布

定义5.4.1 χ^2分布：对于独立同分布于标准正态分布的$N(0,1)$的随机变量$X_1, \cdots, X_n$，称随机变量$X = X_1^2 + \cdots + X_n^2$的分布为自由度为$n$的$\chi^2$分布，记作$X \sim \chi^2(n)$，其密度函数为

$$p(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} x^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, \qquad x > 0 \tag{39}$$

定理5.4.1：对于来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本$x_1, \cdots, x_n$，记其样本均值和样本方差分别为$\overline{x}$和s^2，那么

- $\overline{x}$和s^2相互独立。
- $$\overline{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \tag{40}$$
- $$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) = \Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right) \tag{41}$$

  即

$$s^2 \sim \Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2\sigma^2}\right) \tag{42}$$

5.4.2 F分布

定义5.4.2 F分布：对于独立的随机变量$X \sim \chi^2(m)$和$Y \sim \chi^2(n)$，称随机变量$F = \frac{X/m}{Y/n}$的分布为自由度为m和n的F分布，记作$F \sim F(m, n)$，其密度函数为

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1}\left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}, x > 0 \tag{43}$$

推论5.4.1：对于独立的分别来自$N(\mu_1, \sigma_1^2)$和$N(\mu_2, \sigma_2^2)$的样本$x_1, \cdots, x_m$和$y_1, \cdots, y_m$，那么记其样本方差分别为s_x^2和s_y^2，那么

$$\frac{s_x^2/\sigma_1^2}{s_y^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1) \tag{44}$$

5.4.3 T分布

定义5.4.3 T分布：对于独立的随机变量$X \sim N(0,1)$和$Y \sim \chi^2(n)$，称随机变量$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$的分布为自由度为$n$的$t$分布，记作$t \sim t(n)$，其密度函数为

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, x \in \mathbb{R} \tag{45}$$

推论5.4.2：对于来自正态分布$N(\mu, \sigma^2)$的样本$x_1, \cdots, x_n$，记其样本均值和样本方差分别为$\overline{x}$和s^2，那么

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{x} - \mu)}{s} \sim T(n-1) \tag{46}$$

推论5.4.3：对于独立的分别来自$N(\mu_1, \sigma^2)$和$N(\mu_2, \sigma^2)$的样本$x_1, \cdots, x_m$和$y_1, \cdots, y_m$，那么记其样本方差分别为s_x^2和s_y^2，且

$$s_w^2 = \frac{(m-1)s_x^2 + (n-1)s_y^2}{m+n-2} \tag{47}$$

那么

$$\frac{(\overline{x} - \overline{y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_w\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim T(m+n-2) \tag{48}$$

5.5 充分统计量

5.5.1 充分性的概念

定义5.5.1　充分统计量：对于来自总体分布函数为$F(x;\theta)$的样本$x_1,\cdots,x_n$，称统计量$T=T(x_1,\cdots,x_n)$为θ的充分统计量，如果给定T的取值后，样本$x_1,\cdots,x_n$的条件分布与θ无关。

5.5.2 因子分解定理

定理5.5.1　Fischer-Neyman因子分解定理：对于来自总体概率函数为$f(x;\theta)$的样本$x_1,\cdots,x_n$，那么$T=T(x_1,\cdots,x_n)$为充分统计量的充分必要条件为，存在函数$g(t,\theta)$和$h(x_1,\cdots,x_n)$，使得对于任意的θ和$x_1,\cdots,x_n$，成立

$$f(x_1,\cdots,x_n;\theta)=g(T(x_1,\cdots,x_n);\theta)h(x_1,\cdots,x_n) \tag{49}$$

定理5.5.2：对于充分统计量T，如果存在函数h，使得$T=h(S)$，那么统计量S也为充分统计量。

第六章：参数估计

6.1 点估计的概念

6.1.1 点估计及无偏性

定义6.1.1 点估计：对于来自总体的样本$x_1, \cdots, x_n$，用于估计未知参数θ的统计量$\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$称为$\theta$的点估计。

定义6.1.2 无偏估计：对于θ的点估计$\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$，$\theta$的参数空间为$\Theta$，称$\hat{\theta}$为$\theta$的无偏估计，如果对于任意$\theta \in \Theta$，成立

$$E_\theta(\hat{\theta}) = \theta \tag{50}$$

当参数存在无偏估计时，称其为**可估的**，否则称为**不可估的。**

6.1.2 有效性

定义6.1.3 有效性：对于θ的两个无偏估计$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$，如果对于任意$\theta \in \Theta$，成立

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1) \leq \mathrm{Var}(\hat{\theta}_2) \tag{51}$$

且存在$\theta_0 \in \Theta$，使得成立

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1) < \mathrm{Var}(\hat{\theta}_2) \tag{52}$$

那么称$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效。

6.2 矩估计及相关性

6.2.1 替换原理和矩法估计

替换原理 矩法：

- 用样本矩替换总体矩。
- 用样本矩的函数替换总体矩的函数。

根据替换原理，在总体分布形式未知场合对参数作出估计：

- 用样本均值$\bar{x}$估计总体均值$E(X)$。
- 用样本方差s^2估计总体方差$\mathrm{Var}(X)$。
- 用事件A出现的频率估计事件A发生的概率。
- 用样本p分位数估计总体的p分位数。

Хинчин大数定律：对于独立同分布的随机变量序列$X_1, \cdots, X_n$，如果对于任意$i = 1, \cdots, n$，总体X的k阶原点矩$E(X^k)$存在，那么对于任意$\varepsilon > 0$，成立

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k - E(X^k)\right| \geq \varepsilon\right\} = 0 \tag{53}$$

即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{\mathrm{P}} E(X^k) \tag{54}$$

6.2.2 概率函数已知时未知参数的矩估计

矩估计：对于具有概率函数$p(x; \theta_1, \cdots, \theta_k)$的总体，以及样本$x_1, \cdots, x_n$，其中$(\theta_1, \cdots, \theta_k) \in \Theta$是未知参数或参数向量，如果总体的$i$阶原点矩$\mu_i$存在，而且$\theta_i = \theta_i(\mu_1, \cdots, \mu_k)$，其中$1 \leq i \leq k$，那么$\theta_i$的矩估计为

$$\hat{\theta}_i = \theta_i(a_1, \cdots, a_k), \quad i = 1, \cdots, k \tag{55}$$

其中a_i为样本i阶原点矩

$$a_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^i, \quad i = 1, \cdots, k \tag{56}$$

进一步，对于$\theta_1,\cdots,\theta_k$的函数$\eta=g(\theta_1,\cdots,\theta_k)$的矩估计为

$$\hat{\eta}=g(\hat{\theta}_1,\cdots,\hat{\theta}_k) \tag{57}$$

6.2.3 相合性

定义6.2.1 相合性：对于未知参数θ，以及θ的一个估计量$\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(x_1,\cdots,x_n)$，称$\hat{\theta}_n$为参数$\theta$的相合估计，如果对于任意$\varepsilon>0$，成立

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|\geq\varepsilon\right)=0 \tag{58}$$

定理6.2.1：对于θ的一个估计量$\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(x_1,\cdots,x_n)$，如果

$$\lim_{n\to\infty}E(\hat{\theta}_n)=\theta,\qquad\lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(\hat{\theta}_n)=0 \tag{59}$$

那么$\hat{\theta}_n$为参数θ的相合估计。

定理6.2.2：如果$\hat{\theta}_{n_1},\cdots,\hat{\theta}_{n_k}$分别是$\theta_1,\cdots,\theta_k$的相合估计，$\eta=g(\theta_1,\cdots,\theta_k)$是连续函数，那么$\hat{\eta}=g(\hat{\theta}_{n_1},\cdots,\hat{\theta}_{n_k})$是$\eta$的相合估计。

6.3 最大似然估计与EM算法

6.3.1 最大似然估计

定义6.3.1 最大似然估计：对于概率函数为$p(x;\theta)$的总体，其中$\theta\in\Theta$为一个或多个未知参数组成的参数向量，Θ为参数空间，$x_1,\cdots,x_n$是来自该总体的样本，称样本的联合概率函数

$$L(\theta)=L(\theta;x_1,\cdots,x_n)=\prod_{k=1}^{n}p(x_k;\theta) \tag{60}$$

为样本的**似然函数**。如果某统计量$\hat{\theta}=\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$满足，对于任意$\theta\in\Theta$，成立

$$L(\hat{\theta})\geq L(\theta) \tag{61}$$

那么称$\hat{\theta}$为θ的最大似然估计，简记为MLE。

定理6.3.1 最大似然估计的不变性：如果$\hat{\theta}$为θ的最大似然估计，那么对于任意函数g，$g(\hat{\theta})$是$g(\theta)$的最大似然估计。

正态分布参数的最大似然估计：对于来自正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的样本$x_1,\cdots,x_n$，记样本均值为$\overline{x}$，样本方差为s^2，那么μ和σ^2的最大似然估计分别为

$$\hat{\mu}=\overline{x},\qquad\hat{\sigma}^2=\frac{n-1}{n}s^2 \tag{62}$$

6.3.2 EM算法

6.3.3 渐进正态性

定义6.3.2 渐进正态分布：参数θ的相合估计$\hat{\theta}_n$称为渐进正态的，如果存在趋于0的非负常数序列$\sigma_n(\theta)$，使得成立$\frac{\hat{\theta}_n-\theta}{\sigma_n(\theta)}$依分布收敛于标准正态分布。此时也称$\hat{\theta}_n$服从渐进正态分布$N(\theta,\sigma_n^2(\theta))$，记为$\hat{\theta}_n\sim AN(\theta,\sigma_n^2(\theta))$。$\sigma_n^2(\theta)$称为$\hat{\theta}_n$的渐近方差。

定理6.3.2：对于密度函数为$p(x;\theta)$的总体X，其中$\theta\in\Theta$，如果

- 对于任意x，以及任意$\theta\in\Theta$，偏导数$\frac{\partial\ln p}{\partial\theta}$，$\frac{\partial^2\ln p}{\partial\theta^2}$和$\frac{\partial^3\ln p}{\partial\theta^3}$都存在。
- 对于任意$\theta\in\Theta$，成立

$$\left|\frac{\partial p}{\partial\theta}\right|<F_1(x),\qquad\left|\frac{\partial^2 p}{\partial\theta^2}\right|<F_2(x),\qquad\left|\frac{\partial^3 p}{\partial\theta^3}\right|<F_3(x) \tag{63}$$

其中函数$F_1(x),F_2(x),F_3(x)$满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}F_1(x)\mathrm{d}x<\infty,\qquad\int_{-\infty}^{\infty}F_2(x)\mathrm{d}x<\infty \tag{64}$$

$$\sup_{\theta\in\Theta}\int_{-\infty}^{\infty}F_3(x)p(x;\theta)\mathrm{d}x<\infty \tag{65}$$

- 对于任意$\theta \in \Theta$，成立

$$0 < I(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \theta} \right)^2 p(x;\theta)\mathrm{d}x < \infty \tag{66}$$

那么对于来自该总体的样本$x_1, \cdots, x_n$，存在未知参数θ的最大似然估计$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_n(x_1, \cdots, x_n)$，且$\hat{\theta}_n$具有相合性和渐近正态性，同时

$$\hat{\theta}_n \sim AN\left(\theta, \frac{1}{nI(\theta)}\right) \tag{67}$$

6.4 最小方差无偏估计

6.4.1 均方误差

定义6.4.1 均方误差：对于θ的点估计$\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$，称$E(\hat{\theta} - \theta)^2$为$\hat{\theta}$关于$\theta$的均方误差，记为$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}, \theta)$，或$\mathrm{M}_\theta(\hat{\theta})$。

- 对于θ的任意估计$\hat{\theta}$而言，成立

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}, \theta) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2 \tag{68}$$

- 对于θ的无偏估计$\hat{\theta}$而言，成立

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}, \theta) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}) \tag{69}$$

定义6.4.2 一致最小均方误差估计：对于样本$x_1, \cdots, x_n$，以及待估参数θ的一个估计类，称$\hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$是该估计类中$\theta$中的一致最小均方误差估计，如果对于该估计类中另外任意一个θ的估计$\tilde{\theta}$，在参数空间Θ上均成立

$$\mathrm{MSE}_\theta(\hat{\theta}) \leq \mathrm{MSE}_\theta(\tilde{\theta}) \tag{70}$$

6.4.2 一致最小方差无偏估计

定义6.4.3 一致最小方差无偏估计：对于θ的一个无偏估计$\hat{\theta}$，称$\hat{\theta}$是θ的一致最小方差无偏估计(简记为UMVUE)，如果对于θ的任意无偏估计$\tilde{\theta}$，在参数空间Θ上均成立

$$\mathrm{Var}_\theta(\hat{\theta}) \leq \mathrm{Var}_\theta(\tilde{\theta}) \tag{71}$$

定理6.4.1：对于来自某总体的样本$X = (x_1, \cdots, x_n)$，如果$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X)$是$\theta$的一个无偏估计，$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) < \infty$，那么$\hat{\theta}$是$\theta$的一致最小方差无偏估计的充分必要条件是，对于任意满足$E(\varphi(X)) = 0$和$\mathrm{Var}(\varphi(X)) < \infty$的$\varphi(X)$，以及任意$\theta \in \Theta$，成立

$$\mathrm{Cov}_\theta(\hat{\theta}, \varphi) = 0 \tag{72}$$

即

$$E(\hat{\theta}\varphi) = 0 \tag{73}$$

6.4.3 充分性原则

定理6.4.2：对于来自总体概率密度函数为$p(x;\theta)$的样本$x_1, \cdots, x_n$，如果$T = T(x_1, \cdots, x_n)$是θ的充分统计量，那么对于θ的任意无偏估计$\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, \cdots, x_n)$，成立$\tilde{\theta} = E(\hat{\theta}|T)$是$\theta$的无偏估计，且

$$\mathrm{Var}(\tilde{\theta}) \leq \mathrm{Var}(\hat{\theta}) \tag{74}$$

6.4.4 Cramer-Rao不等式

定义6.4.4 Fisher信息量：对于满足如下条件的概率函数为$p(x;\theta), \theta \in \Theta$的总体

- 参数空间Θ是直线上的一个开区间。
- 支撑$S = \{x : p(x;\theta) > 0\}$与$\theta$无关。
- 导数$\frac{\partial}{\partial \theta} p(x;\theta)$对任意$\theta \in \Theta$均存在。
- 对于$p(x;\theta)$，积分与微分运算可交换次序，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \theta} p(x;\theta)\mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\infty} p(x;\theta)\mathrm{d}x = 0 \tag{75}$$

- 期望$E\big(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln p(x;\theta)\big)^2$存在。

称

$$I(\theta)=E\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln p(x;\theta)\right)^2 \tag{76}$$

为总体分布的Fisher信息量。如果二阶导数$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}p(x;\theta)$对于任意$\theta\in\Theta$存在，那么

$$I(\theta)=-E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(x;\theta)\right) \tag{77}$$

定理6.4.3　Cramer-Rao不等式：对于满足Fisher信息量定义的总体分布$p(x;\theta)$，$X=(x_1,\cdots,x_n)$是来自该总体的样本，如果$T=T(X)$是$g(\theta)$的任意无偏估计，即

$$g(\theta)=\int_{\mathbb{R}^n}T(X)L(X;\theta)\mathrm{d}X \tag{78}$$

其中$L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$为$X=(x_1,\cdots,x_n)$的总体概率密度函数

$$L(X;\theta)=\prod_{k=1}^{n}p(x_k;\theta) \tag{79}$$

并且$g'(\theta)=\frac{\partial g(\theta)}{\partial\theta}$存在，同时对于任意$\theta\in\Theta$，$g(\theta)$的微商可在积分号下进行，即

$$g'(\theta)=\int_{\mathbb{R}^n}T(X)\frac{\partial}{\partial\theta}L(X;\theta)\mathrm{d}X \tag{80}$$

（对于离散总体，将上述积分号改为求和符号）那么

$$\mathrm{Var}(T)\geq\frac{(g'(\theta))^2}{nI(\theta)} \tag{81}$$

其中$I(\theta)$为总体分布的Fisher信息量，$\frac{(g'(\theta))^2}{nI(\theta)}$称为$g(\theta)$的无偏估计的方差的C-R下界。当等号成立时，称$T=T(X)$为$g(\theta)$的**有效估计**，有效估计一定是一致最小方差无偏估计。

6.5 Bayes估计

6.5.1　统计判断的基础

Bayes学派基本观点：任意未知量都可看作随机变量，可用一个概率分布去描述，这个分布称为先验分布。

6.5.2　Bayes公式的密度函数形式

- $p(x\mid\theta)$表示随机变量θ取给定值时总体的条件概率函数。
- 根据参数θ的先验信息确定先验分布$\pi(\theta)$。
- 样本$X=(x_1,\cdots,x_n)$的产生分两步进行，首先设想从先验分布$\pi(\theta)$产生一个个体θ_0，其次从$p(X\mid\theta)$中产生一组样本，此时样本X的联合条件概率函数为

$$P(X\mid\theta_0)=\prod_{k=1}^{n}p(x_k\mid\theta) \tag{82}$$

- 由于θ_0是设想出来的，因此需要考虑$\pi(\theta)$，那么样本X和参数θ的联合分布为

$$h(X,\theta)=P(X\mid\theta)\pi(\theta) \tag{83}$$

- 将$h(X,\theta)$分解为

$$h(X,\theta)=\pi(\theta\mid X)m(X) \tag{84}$$

其中$m(X)$为X的边际概率函数

$$m(X)=\int_{\Theta}h(X,\theta)\mathrm{d}\theta=\int_{\Theta}P(X\mid\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta \tag{85}$$

进而θ的后验分布为

$$\pi(\theta\mid X)=\frac{h(X,\theta)}{m(X)}=\frac{P(X\mid\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta}P(X\mid\theta)\pi(\theta)\mathrm{d}\theta} \tag{86}$$

6.5.3 Bayes估计

由后验分布$\pi(\theta\mid X)$估计θ有三种常用的方法：

- **最大后验估计**：后验分布的密度函数的最大值点。
- **后验中位数估计**：后验分布的中位数。
- **后验期望估计**：后验分布的均值。

称后验期望估计为**Bayes估计**，记为$\hat{\theta}$。

6.5.4 共轭先验分布

定义6.5.1 共轭先验分布：对于总体分布$p(x;\theta)$中的参数θ，$\pi(\theta)$是其先验分布，如果对于任意来自该总体的样本观测值得到的后验分布$\pi(\theta\mid X)$与$\pi(\theta)$属于同一个分布族，那么称该分布族为θ的共轭先验分布（族）。

6.6 区间估计

6.6.1 区间估计的概念

定义6.6.1 置信区间：对于总体的参数$\theta\in\Theta$，以及来自该总体的样本$x_1,\cdots,x_n$，给定$\alpha\in(0,1)$，如果两个统计量$\hat{\theta}_L=\hat{\theta}_L(x_1,\cdots,x_n)$和$\hat{\theta}_U=\hat{\theta}_U(x_1,\cdots,x_n)$，满足对于任意$\theta\in\Theta$，成立

$$P_\theta(\hat{\theta}_L\le\theta\le\hat{\theta}_U)\ge 1-\alpha \tag{87}$$

那么称随机区间$[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间，或简称$[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$为$\theta$的$1-\alpha$置信区间。其中$\hat{\theta}_L$和$\hat{\theta}_U$分别称为$\theta$的（双侧）置信下限和置信上限。

定义6.6.2 同等置信区间：对于总体的参数$\theta\in\Theta$，以及来自该总体的样本$x_1,\cdots,x_n$，给定$\alpha\in(0,1)$，如果两个统计量$\hat{\theta}_L=\hat{\theta}_L(x_1,\cdots,x_n)$和$\hat{\theta}_U=\hat{\theta}_U(x_1,\cdots,x_n)$，满足对于任意$\theta\in\Theta$，成立

$$P_\theta(\hat{\theta}_L\le\theta\le\hat{\theta}_U)= 1-\alpha \tag{88}$$

那么称随机区间$[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的同等置信区间。

定义6.6.3 单侧置信下限：对于总体的参数$\theta\in\Theta$，以及来自该总体的样本$x_1,\cdots,x_n$，给定$\alpha\in(0,1)$，如果统计量$\hat{\theta}_L=\hat{\theta}_L(x_1,\cdots,x_n)$满足对于任意$\theta\in\Theta$，成立

$$P_\theta(\hat{\theta}_L\le\theta)\ge 1-\alpha \tag{89}$$

那么称$\hat{\theta}_L$为θ的（单侧）置信下限。

定义6.6.4 单侧置信上限：对于总体的参数$\theta\in\Theta$，以及来自该总体的样本$x_1,\cdots,x_n$，给定$\alpha\in(0,1)$，如果统计量$\hat{\theta}_U=\hat{\theta}_U(x_1,\cdots,x_n)$满足对于任意$\theta\in\Theta$，成立

$$P_\theta(\hat{\theta}_U\ge\theta)\ge 1-\alpha \tag{90}$$

那么称$\hat{\theta}_U$为θ的（单侧）置信上限。

6.6.2 枢轴量法

构造枢轴量的方法：

- 构造函数$G=G(x_1,\cdots,x_n,\theta)$，使得$G$的分布不依赖于$\theta$，此函数$G$称为**枢轴量**。
- 选择常数a,b，使得对于给定$\alpha\in(0,1)$，使得成立

$$P(a\le G\le b)=1-\alpha \tag{91}$$

- 将不等式$a\le G\le b$等价变形为$\hat{\theta}_L\le\theta\le\hat{\theta}_U$，即

$$P_\theta(\hat{\theta}_L\le\theta\le\hat{\theta}_U)=1-\alpha \tag{92}$$

  那么区间$[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$同等置信区间。

- 其中常数a,b的选择应该使得区间$[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$的长度最短，否则使得成立

$$P(G<a)=P(G>b)=\frac{\alpha}{2} \tag{93}$$

  称这样得到的置信区间$[\hat{\theta}_L,\hat{\theta}_U]$为**等尾置信区间**。

6.6.3 单个正态总体参数的置信区间

目标	条件	枢轴量	分布	置信区间
μ	σ已知	$\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu)}{\sigma}$	$N(0,1)$	$\left[\overline{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}n_{1-\frac{\alpha}{2}},\quad \overline{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}n_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$
μ	σ未知	$\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu)}{s}$	$T(n-1)$	$\left[\overline{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}},\quad \overline{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$
σ^2	μ未知	$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}},\quad \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}\right]$

6.6.4 大样本置信区间

在有些场合，寻找枢轴量及其分布比较困难。在样本量充分大时，可用渐进分布来构造近似的置信区间。以下为二点分布关于比例p的置信区间。

对于来自二点分布$b(1,p)$的样本$x_1,\cdots,x_n$，由中心极限定理

$$N=\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-p)}{\sqrt{p(1-p)}}\dot{\sim}N(0,1) \tag{94}$$

因此置信水平为$1-\alpha$的同等置信区间为

$$\left[\frac{1}{1+\frac{n^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}}\left(\overline{x}+\frac{n^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n}-\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}n^2_{1-\frac{\alpha}{2}}+\left(\frac{n^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n}\right)^2}\right),\qquad \frac{1}{1+\frac{n^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}}\left(\overline{x}+\frac{n^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n}+\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}n^2_{1-\frac{\alpha}{2}}+\left(\frac{n^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2n}\right)^2}\right)\right] \tag{95}$$

其中$n_{1-\frac{\alpha}{2}}$为$N(0,1)$的$1-\frac{\alpha}{2}$分位数。由于n充分大，略去$\frac{n^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}{n}$项，因此置信水平为$1-\alpha$的同等置信区间近似为

$$\left[\overline{x}-n_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}},\quad \overline{x}+n_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\right] \tag{96}$$

6.6.5 样本量的确定

置信水平$1-\alpha$称为**保证概率**。

置信区间的半径（即长度的一半）称为**绝对误差**。

6.6.6 两个正态总体下的置信区间

$x_1,\cdots,x_m$是取自$N(\mu_1,\sigma_1^2)$的样本，$y_1,\cdots,y_n$是取自$N(\mu_2,\sigma_2^2)$的样本，两个样本相互独立，记$\overline{x}$和$\overline{y}$分别记为两者的样本均值，s_x^2和s_y^2分别记为两者的样本方差。

目标	条件	枢轴量	分布	置信区间
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2和σ_2^2已知	$\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}$	$N(0,1)$	$\left[(\overline{x}-\overline{y})-n_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}},\quad (\overline{x}-\overline{y})+n_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\right]$
$\mu_1-\mu_2$	$\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知	$\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$	$T(m+n-2)$	$\left[(\overline{x}-\overline{y})-s_wt_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},\quad (\overline{x}-\overline{y})+s_wt_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right]$
$\mu_1-\mu_2$	$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}=c$已知	$\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{s_{w_c}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{c}{n}}}$	$T(m+n-2)$	$\left[(\overline{x}-\overline{y})-s_{w_c}t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{c}{n}},\quad (\overline{x}-\overline{y})+s_{w_c}t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{c}{n}}\right]$
$\mu_1-\mu_2$	n_1和n_2充分大	$\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n}}}$	$N(0,1)$	$\left[(\overline{x}-\overline{y})-n_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n}},\quad (\overline{x}-\overline{y})+n_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n}}\right]$
$\mu_1-\mu_2$	一般情况	$\frac{(\overline{x}-\overline{y})-(\mu_1-\mu_2)}{s_0}$	$T(l)$	$\left[(\overline{x}-\overline{y})-s_0t_{1-\frac{\alpha}{2}},\quad (\overline{x}-\overline{y})+s_0t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]$
$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$	一般情况	$\frac{s_x^2/\sigma_1^2}{s_y^2/\sigma_2^2}$	$F(m-1,n-1)$	$\left[\frac{s_x^2}{s_y^2}\frac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2}}},\quad \frac{s_x^2}{s_y^2}\frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2}}}\right]$

其中

$$s_w^2=\frac{(m-1)s_x^2+(n-1)s_y^2}{m+n-2} \tag{97}$$

$$s_{w_c}^2=\frac{(m-1)s_x^2+(n-1)\frac{s_y^2}{c}}{m+n-2} \tag{98}$$

$$s_0^2=\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n} \tag{99}$$

$$l=\left[\frac{s_0^4}{\frac{s_x^4}{m^2(m-1)}+\frac{s_y^4}{n^2(n-1)}}\right] \tag{100}$$

$[\cdot]$表示最近整数。

第七章：假设检验

7.1 假设检验的基本思想与概念

7.1.1 假设检验问题

假设检验的**基本思想**：如果试验结果与假设H发生矛盾，那么拒绝原假设H，否则接受原假设H。

假设检验问题：

- **假设**：两个非空不交参数集合。
- **检验**：通过样本对一个假设作出"对"或"不对"的具体判断规则。
- **参数假设检验问题**：假设可用一个参数的集合表示的检验问题。

7.1.2 假设检验的基本步骤

一、建立假设

对于来自参数分布族$\{F(x,\theta):\theta\in\Theta\}$的样本$x_1,\cdots,x_n$，其中$\Theta$为参数空间，如果非空集合$\Theta_0\subset\Theta$，那么命题$H_0:\theta\in\Theta_0$称为**原假设**或**零假设**，命题$H_a:\theta\in\Theta-\Theta_0$称为**对立假设**或**备择假设**，那么$H_0$对$H_a$的假设检验问题记为

$$H_0:\theta\in\Theta_0 \qquad \text{vs} \qquad H_a:\theta\in\Theta-\Theta_0 \tag{101}$$

如果Θ_0仅含有一个点，那么称H_0为**简单原假设**，否则称为**复杂原假设**或**复合原假设。**当H_0为简单假设时，其形式可写为$H_0:\theta=\theta_0$，此时备择假设通常有如下三种可能：

$$H_1:\theta\neq\theta_0, \qquad H_2:\theta<\theta_0, \qquad H_3:\theta>\theta_0 \tag{102}$$

称$H_0\quad \text{vs}\quad H_1$为**双侧假设**或**双边假设**，$H_0\quad \text{vs}\quad H_2$以及$H_0\quad \text{vs}\quad H_3$为**单侧假设**或**单边假设。**

在假设检验中，通常将不宜轻易否定的假设作为原假设。

二、选择检验统计量，给出拒绝域形式

当有了具体的样本后，将样本空间划分为两个互不相交的部分W和$\overline{W}$，当样本属于W时，拒绝H_0，否则接受H_0。称W为该检验的**拒绝域**，$\overline{W}$为该检验的**接受域。**事实上，在拒绝域和接受域外，还有**保留域**，但通常将保留域合并于接受域内。

选择分布已知的**检验统计量**$T(X)$，确定拒绝域W的形式。

三、选择显著性水平

当$\theta\in\Theta_0$时，样本由于随机性却落入了拒绝域W，于是采取了拒绝H_0的错误决策，称之为**第一类错误**或**拒真错误**，记第一类错误概率为

$$\alpha(\theta)=P\{X\in W\mid H_0\}, \quad \theta\in\Theta_0 \tag{103}$$

当$\theta\in\Theta-\Theta_0$时，样本由于随机性却落入了接受域$\overline{W}$，于是采取了接受H_0的错误决策，称之为**第二类错误**或**取伪错误**，记第二类错误概率为

$$\beta(\theta)=P\{X\in\overline{W}\mid H_a\}, \quad \theta\in\Theta-\Theta_0 \tag{104}$$

定义7.1.1　势函数：对于检验问题

$$H_0:\theta\in\Theta_0 \qquad \text{vs} \qquad H_a:\theta\in\Theta-\Theta_0 \tag{105}$$

其拒绝域为W，那么定义势函数为

$$\rho(\theta)=P_\theta(X\in W), \quad \theta\in\Theta \tag{106}$$

即

$$\rho(\theta)=\begin{cases}\alpha(\theta), & \theta\in\Theta_0\\ 1-\beta(\theta), & \theta\in\Theta-\Theta_0\end{cases} \tag{107}$$

定义7.1.2　显著性检验：对于检验问题

$$H_0:\theta\in\Theta_0 \qquad \text{vs} \qquad H_a:\theta\in\Theta-\Theta_0 \tag{108}$$

其势函数为$\rho(\theta)$，如果一个检验满足对于任意$\theta\in\Theta_0$，成立

$$\rho(\theta)\leq\alpha \tag{109}$$

那么称该检验为显著性水平为α的显著性检验，简称水平为α的检验。

四、给出拒绝域

依据显著性水平α以及拒绝域W的形式，确定具体的拒绝域。

五、做出判断

由拒绝域W唯一相互确定的**判断准则**为

- 如果$(x_1,\cdots,x_n)\in W$，那么拒绝H_0。
- 如果$(x_1,\cdots,x_n)\in \overline{W}$，那么接受$H_0$。

7.1.3 检验的p值

定义7.1.3 检验的p值：在假设检验问题中，利用样本观测值能够作出拒绝原假设的最小显著性水平称为检验的p值。

- 如果$p\le\alpha$，那么在显著性水平α下拒绝H_0。
- 如果$p>\alpha$，那么在显著性水平α下接受H_0。

7.2 正态总体参数假设检验

7.2.1 单个正态总体均值的检验

检验	条件	H_0	H_a	统计检验量	分布	拒绝域	p值
		$\mu\le\mu_0$	$\mu>\mu_0$			$\{u\ge u_{1-\alpha}\}$	$1-\Phi(u_0)$
u检验	σ已知	$\mu\ge\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$u=\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu_0)}{\sigma}$	$N(0,1)$	$\{u\le u_\alpha\}$	$\Phi(u_0)$
		$\mu=\mu_0$	$\mu\ne\mu_0$			$\{\lvert u\rvert\ge u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$2(1-\Phi(\lvert u_0\rvert))$
		$\mu\le\mu_0$	$\mu>\mu_0$			$\{t\ge t_{1-\alpha}\}$	$P(T\ge t_0)$
t检验	σ未知	$\mu\ge\mu_0$	$\mu<\mu_0$	$t=\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu_0)}{s}$	$T(n-1)$	$\{t\le t_\alpha\}$	$P(T\le t_0)$
		$\mu=\mu_0$	$\mu\ne\mu_0$			$\{\lvert t\rvert\ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$P(\lvert T\rvert\ge\lvert t_0\rvert)$

7.2.2 假设检验与置信区间的关系

7.2.3 两个正态总体均值差的检验

检验	条件	H_0	H_a	检验统计量	分布	拒绝域	p值
		$\mu_1\le\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$			$\{u\ge u_{1-\alpha}\}$	$1-\Phi(u_0)$
u检验	σ_1,σ_2已知	$\mu_1\ge\mu_2$	$\mu_1<\mu_2$	$u=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}}$	$N(0,1)$	$\{u\le u_\alpha\}$	$\Phi(u_0)$
		$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\ne\mu_2$			$\{\lvert u\rvert\ge u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$2(1-\Phi(\lvert u_0\rvert))$
		$\mu_1\le\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$			$\{t\ge t_{1-\alpha}\}$	$P(T\ge t_0)$
t检验	$\sigma_1=\sigma_2$未知	$\mu_1\ge\mu_2$	$\mu_1<\mu_2$	$t=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$	$T(m+n-2)$	$\{t\le t_\alpha\}$	$P(T\le t_0)$
		$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\ne\mu_2$			$\{\lvert t\rvert\ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$P(\lvert T\rvert\ge\lvert t_0\rvert)$
		$\mu_1\le\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$			$\{u\ge u_{1-\alpha}\}$	$1-\Phi(u_0)$
u检验	m,n充分大	$\mu_1\ge\mu_2$	$\mu_1<\mu_2$	$u=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n}}}$	$N(0,1)$	$\{u\le u_\alpha\}$	$\Phi(u_0)$
		$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\ne\mu_2$			$\{\lvert u\rvert\ge u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$2(1-\Phi(\lvert u_0\rvert))$
		$\mu_1\le\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$			$\{t\ge t_{1-\alpha}\}$	$P(T\ge t_0)$
t检验	一般情况	$\mu_1\ge\mu_2$	$\mu_1<\mu_2$	$t=\frac{\overline{x}-\overline{y}}{\sqrt{\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n}}}$	$T(l)$	$\{t\le t_\alpha\}$	$P(T\le t_0)$
		$\mu_1=\mu_2$	$\mu_1\ne\mu_2$			$\{\lvert t\rvert\ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$P(\lvert T\rvert\ge\lvert t_0\rvert)$

其中

$$s_w^2=\frac{(m-1)s_x^2+(n-1)s_y^2}{m+n-2} \tag{110}$$

$$l=\left[\frac{\left(\frac{s_x^2}{m}+\frac{s_y^2}{n}\right)^2}{\frac{s_x^4}{m^2(m-1)}+\frac{s_y^4}{n^2(n-1)}}\right] \tag{111}$$

$[\cdot]$表示最近整数。

7.2.4 成对数据检验

H_0	H_a	统计检验量	分布	拒绝域	p值
$\mu \le 0$	$\mu > 0$			$\{t \ge t_{1-\alpha}\}$	$P(T \ge t_0)$
$\mu \ge 0$	$\mu < 0$	$t = \frac{\sqrt{n}\bar{d}}{s_d}$	$T(n-1)$	$\{t \le t_\alpha\}$	$P(T \le t_0)$
$\mu = 0$	$\mu \ne 0$			$\{\lvert t\rvert \ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$P(\lvert T\rvert \ge \lvert t_0\rvert)$

7.2.5 正态总体方差的检验

检验	条件	H_0	H_a	统计检验量	分布	拒绝域	p值
		$\sigma^2 \le \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$			$\{\chi^2 \ge \chi^2_{1-\alpha}\}$	$P(\chi^2 \ge \chi_0^2)$
χ^2检验	一个	$\sigma^2 \ge \sigma_0^2$	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$	$\chi^2(n-1)$	$\{\chi^2 \le \chi^2_\alpha\}$	$P(\chi^2 \le \chi_0^2)$
		$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\sigma^2 \ne \sigma_0^2$			$\{\chi^2 \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{\chi^2 \ge \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$2\min\{P(\chi^2 \le \chi_0^2), P(\chi^2 \ge \chi_0^2)\}$
		$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$			$\{F \ge F_{1-\alpha}\}$	$P(F \ge F_0)$
F检验	两个	$\sigma_1^2 \ge \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F = \frac{s_x^2}{s_y^2}$	$F(m-1, n-1)$	$\{F \le F_\alpha\}$	$P(F \le F_0)$
		$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$			$\{F \le F_{\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{F \ge F_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$2\min\{P(F \le F_0), P(F \ge F_0)\}$

7.3 其他分布参数的假设检验

检验	条件	H_0	H_a	统计检验量	分布	拒绝域	p值
		$\lambda \le \lambda_0$	$\lambda > \lambda_0$			$\{\chi^2 \ge \chi^2_{1-\alpha}\}$	$P(\chi^2 \ge \chi_0^2)$
χ^2分布	$\mathrm{Exp}(\frac{1}{\lambda})$	$\lambda \ge \lambda_0$	$\lambda < \lambda_0$	$\frac{2n\bar{x}}{\lambda_0}$	$\chi^2(2n)$	$\{\chi^2 \le \chi^2_\alpha\}$	$P(\chi^2 \le \chi_0^2)$
		$\lambda = \lambda_0$	$\lambda \ne \lambda_0$			$\{\chi^2 \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{\chi^2 \ge \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$2\min\{P(\chi^2 \le \chi_0^2), P(\chi^2 \ge \chi_0^2)\}$
		$p \le p_0$	$p > p_0$				$P(x \ge x_0)$
B检验	$B(1,p)$	$p \ge p_0$	$p < p_0$	x	$B(n,p)$		$P(x \le x_0)$
		$p = p_0$	$p \ne p_0$				$2\min\{P(x \le x_0), P(x \ge x_0)\}$
		$\theta \le \theta_0$	$\theta > \theta_0$			$\{u \ge u_{1-\alpha}\}$	$1-\Phi(u_0)$
u检验	大样本分布$F(x;\theta)$	$\theta \ge \theta_0$	$\theta < \theta_0$	$\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\theta_0)}{\sqrt{\sigma^2(\hat{\theta})}}$	$N(0,1)$	$\{u \le u_\alpha\}$	$\Phi(u_0)$
		$\theta = \theta_0$	$\theta \ne \theta_0$			$\{\lvert u\rvert \ge u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$	$2(1-\Phi(\lvert u_0\rvert))$

其中分布$F(x;\theta)$的均值为θ，方差为$\sigma(\theta)$，$\hat{\theta}$为θ的最大似然估计。

7.4 似然比检验与分布拟合检验

7.4.1 似然比检验的思想

定义7.4.1 似然比：对于来自密度函数为$p(x;\theta), \theta \in \Theta$的总体的样本$x_1, \cdots, x_n$，对于如下检验问题

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs} \quad H_a: \theta \in \Theta - \Theta_0 \tag{112}$$

定义改假设检验问题的似然比统计量为

$$\Lambda(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta} p(x_1, \cdots, x_n; \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta_0} p(x_1, \cdots, x_n; \theta)} \tag{113}$$

即

$$\Lambda(x_1, \cdots, x_n) = \frac{p(x_1, \cdots, x_n; \hat{\theta})}{p(x_1, \cdots, x_n; \hat{\theta}_0)} \tag{114}$$

其中$\hat{\theta}$和$\hat{\theta}_0$分别为参数空间Θ和Θ_0上的最大似然估计。

定义7.4.2 似然比检验：对于来自密度函数为$p(x;\theta), \theta \in \Theta$的总体的样本$x_1, \cdots, x_n$，对于如下检验问题

$$H_0: \theta \in \Theta_0 \quad \text{vs} \quad H_a: \theta \in \Theta - \Theta_0 \tag{115}$$

其似然比统计量

$$\Lambda(x_1, \cdots, x_n) = \frac{p(x_1, \cdots, x_n; \hat{\theta})}{p(x_1, \cdots, x_n; \hat{\theta}_0)} \tag{116}$$

作为检验问题的检验统计量，且取拒绝域为$W = \{\Lambda(x_1, \cdots, x_n) \ge \lambda_0\}$，其中临界值$\lambda_0$满足对于任意$\theta \in \Theta_0$，成立

$$P_\theta(\Lambda(x_1, \cdots, x_n) \ge \lambda_0) \le \alpha \tag{117}$$

那么称此检验为显著性水平为α的似然比检验，简记为LRT。

7.4.2 分布数据的χ^2拟合优度检验

定理7.4.1：总体被分为r类$A_1, \cdots, A_r$，考虑假设检验

$$H_0: A_k\text{所占的比率为}p_k, \quad k=1,\cdots,r \tag{118}$$

其中p_k已知且$\sum_{k=1}^r p_k=1$。从该总体抽出n个样本，n_k为样本中属于A_k的样本个数，记检验统计量为

$$\chi^2=\sum_{k=1}^r \frac{(n_k-np_k)^2}{np_k} \tag{119}$$

那么当H_0成立时，成立

$$\chi^2 \xrightarrow{\mathrm{L}} \chi^2(r-1) \tag{120}$$

因此对于显著性水平α，拒绝域为$W=\{\chi^2\geq\chi^2_{1-\alpha}\}$，检验的$p$值为$p=P(\chi^2\geq\chi^2_0)$。

如果A_k出现的概率含有s个参数，那么可用最大似然估计方法估计出该s个参数，然后再算出p_k的估计值$\hat{p}_k$，于是统计检验量

$$\chi^2=\sum_{k=1}^r \frac{(n_k-n\hat{p}_k)^2}{n\hat{p}_k} \xrightarrow{\mathrm{L}} \chi^2(r-s-1) \tag{121}$$

7.4.3 分布的χ^2拟合优度检验

对于来自分布函数为$F(x)$的总体的样本$x_1,\cdots,x_n$，考虑假设检验问题

$$H_0: F(x)=F_0(x) \tag{122}$$

其中$F_0(x)$为可含参的理论分布。

一、总体X为离散分布

如果总体X为至多可数个值$a_1,a_2,\cdots$，将其分为r类$A_1,\cdots,A_r$，使得每一个A_k中的样本个数n_k不小于5，记$P(X\in A_k)=p_k$，那么原假设检验转化为

$$H_0: A_k\text{所占的比率为}p_k, \quad k=1,\cdots,r \tag{123}$$

二、总体X为连续分布

如果总体X的分布为F_0，选取$-\infty=a_0<a_1<\cdots<a_{r-1}<a_r=\infty$，记$A_k=(a_{k-1},a_k]$，那么

$$p_k=P(X\in A_k)=F_0(a_k)-F_0(a_{k-1}), \quad k=1,\cdots,r \tag{124}$$

于是原假设转化为

$$H_0: A_k\text{所占的比率为}p_k, \quad k=1,\cdots,r \tag{125}$$

7.4.4 列联表的独立性检验

将总体分为两个属性A和B，其中A有r个类$A_1,\cdots,A_r$，B有s个类$B_1,\cdots,B_s$，从总体中抽取n个样本，设其中有n_{ij}个个体属于A_i和B_j，构造列联表$\{n_{ij}\}_{r\times s}$。

记总体中的个体仅属于A_i和仅属于B_j的概率分别为$p_{i\cdot}$和$p_{\cdot j}$，总体中的个体同时属于A_i和B_j的概率为p_{ij}，那么得到二维离散分布表$\{p_{ij}\}_{r\times s}$，A和B两属性度量的假设可表述为

$$H_0: p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}, \quad i=1,\cdots,r; j=1,\cdots,s \tag{126}$$

H_0成立时p_{ij}的最大似然估计为

$$\hat{p}_{ij}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^r n_{kj}\sum_{k=1}^s n_{ik} \tag{127}$$

那么检验统计量为

$$\chi^2=\sum_{i,j}\frac{(n_{ij}-n\hat{p}_{ij})^2}{n\hat{p}_{ij}} \xrightarrow{\mathrm{L}} \chi^2((r-1)(s-1)) \tag{128}$$

因此对于显著性水平α，拒绝域为$W=\{\chi^2\geq\chi^2_{1-\alpha}\}$，检验的$p$值为$p=P(\chi^2\geq\chi^2_0)$。

7.5 正态性检验

7.5.1 正态概率纸

- 对于给定的样本观测值$x_1, \cdots, x_n$，做点

$$\left(x_{(k)}, \frac{k-0.375}{n+0.25}\right), \quad k=1, \cdots, n \tag{129}$$

- 如果诸点在一条直线附近，那么认为该批数据来自正态总体；否则不认为该批数据来自正态总体。

7.5.2 W检验

对于来自正态分布总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本$x_1, \cdots, x_n$，其中$8 \leq n \leq 50$，定义W统计量为

$$W=\frac{\sum_{k=1}^n (w_k-\overline{w})^2 (x_{(k)}-\overline{x})^2}{\sum_{k=1}^n (w_k-\overline{w})^2 \sum_{k=1}^n (x_{(k)}-\overline{x})^2}=\frac{\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} w_k^2 (x_{(k)}-x_{(n+1-k)})^2}{\sum_{k=1}^n (x_{(k)}-\overline{x})^2} \tag{130}$$

其中

$$\boldsymbol{e}=\begin{pmatrix} E\left(\frac{x_{(1)}-\mu}{\sigma}\right) \\ \vdots \\ E\left(\frac{x_{(n)}-\mu}{\sigma}\right) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} \operatorname{Cov}\left(\frac{x_{(1)}-\mu}{\sigma}, \frac{x_{(1)}-\mu}{\sigma}\right) & \cdots & \operatorname{Cov}\left(\frac{x_{(1)}-\mu}{\sigma}, \frac{x_{(n)}-\mu}{\sigma}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{Cov}\left(\frac{x_{(n)}-\mu}{\sigma}, \frac{x_{(1)}-\mu}{\sigma}\right) & \cdots & \operatorname{Cov}\left(\frac{x_{(n)}-\mu}{\sigma}, \frac{x_{(n)}-\mu}{\sigma}\right) \end{pmatrix} \tag{131}$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}=\frac{\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{e}}{\sqrt{\boldsymbol{e}^T(\boldsymbol{C}^{-1})^2\boldsymbol{e}}} \tag{132}$$

拒绝域为$\{W \leq W_\alpha\}$，其中W_α为α分位数。

7.5.3 EP检验

对于来自正态分布总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本$x_1, \cdots, x_n$，其中$n \geq 8$，定义EP检验统计量为

$$T_{\mathrm{EP}}=1+\frac{n}{\sqrt{3}}+\frac{2}{n}\sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{e}^{-\frac{(x_j-x_i)^2}{2\frac{n-1}{n}s^2}}-\sqrt{2}\sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{-\frac{(x_k-\overline{x})^2}{4\frac{n-1}{n}s^2}} \tag{133}$$

拒绝域为$\{T_{\mathrm{EP}} \geq T_{\mathrm{EP}_{1-\alpha}}\}$，其中$T_{\mathrm{EP}_{1-\alpha}}$为$1-\alpha$分位数。

7.6 非参数检验

7.6.1 游程检验

游程：对于依时间顺序连续得到的样本观测值$x_1, \cdots, x_n$，记样本中位数为m_e，对于$k=1, \cdots, n$，记

$$y_k=\begin{cases} 1, & x_k \geq m_e \\ 0, & x_k < m_e \end{cases} \tag{134}$$

$y_1, \cdots, y_n$构成$0-1$序列。

记$0-1$序列中0和1的个数分别为n_1和n_2，游程总数为R，那么$1 < n_1, n_2 < n$且$2 \leq R \leq n$。同时$|n_1-n_2|$为0或1。原假设为

$$H_0: \text{样本序列符合随机抽取的原则} \tag{135}$$

R的分布如下

$$P(R=2k)=\frac{2\binom{n_1-1}{k-1}\binom{n_2-1}{k-1}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}, \quad k=1, \cdots, \left[\frac{n_1+n_2}{2}\right] \tag{136}$$

$$P(R=2k+1)=\frac{\binom{n_1-1}{k-1}\binom{n_2-1}{k}+\binom{n_1-1}{k}\binom{n_2-1}{k-1}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}, \quad k=1, \cdots, \left[\frac{n_1+n_2-1}{2}\right] \tag{137}$$

拒绝域为$\{R \leq R_{\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{R \geq R_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$，检验的$p$值为$2\min\{P(R \leq R_0), P(R \geq R_0)\}$。

7.6.2 符号检验

H_0	H_a	拒绝域	检验的p值
$x_p \leq x_0$	$x_p > x_0$	$\{S^+ \geq c\}$	$\sum_{k=S_0^+}^{n} \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}$
$x_p \geq x_0$	$x_p < x_0$	$\{S^+ \leq c\}$	$\sum_{k=0}^{S_0^+} \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}$
$x_p = x_0$	$x_p \neq x_0$	$\{S^+ \leq c_1\} \cup \{S^+ \geq c_2\}$	$2\min\left\{\sum_{k=0}^{S_0^+} \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}, \sum_{k=S_0^+}^{n} \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k}\right\}$

其中S^+为$x_1 - x_0, \cdots, x_n - x_0$中正数的个数，即

$$S^+ = \sum_{k=1}^{n} I_{x_k > x_0} \tag{138}$$

7.6.3 秩和检验

定义7.6.1 秩：对于来自连续分布$F(x)$的简单随机样本$x_1, \cdots, x_n$，次序样本为$x_{(1)}, \cdots, x_{(n)}$，称x_k秩为r_k，如果$x_k = x_{(r_k)}$，记作$R_k = r_k$。

定义7.6.2 秩统计量：对于来自连续分布$F(x)$的简单随机样本$x_1, \cdots, x_n$，R_k为x_k的秩，那么称$R = (R_1, \cdots, R_n)$为$x_1, \cdots, x_n$的秩统计量。

定义7.6.3 符号秩和统计量：对于来自连续分布$F(x-\theta)$的简单随机样本$x_1, \cdots, x_n$，其中θ为总体的中位数，记R_k为$|x_k|$在$|x_1|, \cdots, |x_n|$中的秩，定义符号秩和统计量为

$$W^+ = \sum_{k=1}^{n} R_k I_{x_k > 0} \sim W^+(n) \tag{139}$$

H_0	H_a	拒绝域
$\theta \leq 0$	$\theta > 0$	$\{W^+ \leq W_\alpha^+\}$
$\theta \geq 0$	$\theta < 0$	$\{W^+ \geq W_\alpha^+\}$
$\theta = 0$	$\theta \neq 0$	$\{W^+ \leq W_{\frac{\alpha}{2}}^+\} \cup \{W^+ \geq W_{1-\frac{\alpha}{2}}^+\}$

其中$W_\alpha^+ + W_{1-\alpha}^+ = \frac{1}{2}n(n-1)$。

对于来自连续分布$F(x-\theta_1)$的简单随机样本$x_1, \cdots, x_m$和对于来自连续分布$F(x-\theta_2)$的简单随机样本$y_1, \cdots, y_n$，产生的秩为

$$R = (Q_1, \cdots, Q_m, R_1, \cdots, R_n) \tag{140}$$

那么秩和统计量为

$$W = \sum_{k=1}^{n} R_k \sim W(m, n) \tag{141}$$

H_0	H_a	拒绝域
$\theta_1 \leq \theta_2$	$\theta_1 > \theta_2$	$\{W \leq W_\alpha\}$
$\theta_1 \geq \theta_2$	$\theta_1 < \theta_2$	$\{W \geq W_\alpha\}$
$\theta_1 = \theta_2$	$\theta_1 \neq \theta_2$	$\{W \leq W_{\frac{\alpha}{2}}\} \cup \{W \geq W_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$

其中$W_\alpha + W_{1-\alpha} = n(m+n-1)$。

第八章：方差分析与回归分析

8.1 方差分析

8.1.1 问题的提出

因子：A

水平：$A_1, \cdots, A_r$

结果：y_{ij}，其中$i = 1, \cdots, r$

8.1.2 单因子方差分析的统计模型

在单因子试验中，记因子为A，设其由r个水平，记为$A_1, \cdots, A_r$，在每一个水平下考察的指标可以看成一个总体，现有r个水平，故有r个总体，假定：

- 每一个总体均为正态分布，记为$N(\mu_k, \sigma_k^2)$，其中$k = 1, \cdots, r$。
- 各总体的方差相同，记为$\sigma_1^2 = \cdots = \sigma_r^2 = \sigma^2$。
- 从每一总体中抽取的样本是互相独立的，即所有的试验结果y_{ij}都相互独立。

作假设检验：

$$H_0 : \mu_1 = \cdots = \mu_r \quad \text{vs} \quad H_a : \mu_1, \cdots, \mu_r \text{不全相等} \tag{142}$$

如果H_0成立，称因子A的r个水平没有显著差异，简称因此A不显著。

对r个总体每个作m次重复实现，得到试验结果$\{y_{ij}\}_{r \times m}$，定义随机误差为

$$\varepsilon_{ij} = y_{ij} - \mu_i \tag{143}$$

那么试验结果y_{ij}的数据结构式为

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \tag{144}$$

单因子方差分析的统计模型为

$$\begin{cases} y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{ij} \text{相互独立} \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \end{cases} \tag{145}$$

总均值

$$\mu = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r} \mu_k \tag{146}$$

因子A的第k个水平的主效应

$$a_i = \mu_i - \mu \tag{147}$$

容易知道

$$\sum_{k=1}^{r} a_k = 0 \tag{148}$$

$$\mu_k = \mu + a_k \tag{149}$$

于是统计模型改写为

$$\begin{cases} y_{ij} = \mu + a_i + \varepsilon_{ij} \\ \sum_{i=1}^{r} a_i = 0 \\ \varepsilon_{ij} \text{相互独立} \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \end{cases} \tag{150}$$

统计假设改写为

$$H_0 : a_1 = \cdots = a_r = 0 \quad \text{vs} \quad H_a : a_1, \cdots, a_r \text{不全为0} \tag{151}$$

8.1.3 平方和分解

一、实验数据

因子水平	试验数据	和	均值
A_1	$y_{11},\cdots,y_{1m}$	$T_1=\sum_{j=1}^m y_{1j}$	$\overline{y}_1=\frac{T_1}{m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	$y_{r1},\cdots,y_{rm}$	$T_r=\sum_{j=1}^m y_{rj}$	$\overline{y}_r=\frac{T_r}{m}$
		$T=\sum_{i=1}^r T_i$	$\overline{y}=\frac{T}{rm}=\frac{T}{n}$

二、组内偏差与组间方差

记

$$y_{ij}-\overline{y}=(y_{ij}-\overline{y}_i)+(\overline{y}_i-\overline{y}) \tag{152}$$

$$\overline{\varepsilon}_i=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m\varepsilon_{ij} \tag{153}$$

$$\overline{\varepsilon}=\frac{1}{r}\sum_{j=1}^m\overline{\varepsilon_i}=\frac{1}{n}\sum_{i,j}\varepsilon_{ij} \tag{154}$$

组内偏差为

$$y_{ij}-\overline{y}_i=\varepsilon_{ij}-\overline{\varepsilon}_i \tag{155}$$

组间偏差为

$$\overline{y}_i-\overline{y}=a_i+\overline{\varepsilon}_i-\overline{\varepsilon} \tag{156}$$

三、偏差平方和及其自由度

偏差平方和

$$Q=\sum_{k=1}^n(y_k-\overline{y})^2 \tag{157}$$

自由度

$$f_Q=n-1 \tag{158}$$

四、总平方和分解公式

总偏差平方和

$$S_T=\sum_{i,j}(y_{ij}-\overline{y})^2=\sum_{i,j}y_{ij}^2-\frac{T^2}{n},\quad f_T=n-1 \tag{159}$$

组内偏差平方和（因子A的偏差平方和）

$$S_A=m\sum_{i=1}^r(\overline{y}_i-\overline{y})^2=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^r T_i^2-\frac{T^2}{n},\quad f_A=r-1 \tag{160}$$

组内偏差平方和（误差偏差平方和）

$$S_e=\sum_{i,j}(y_{ij}-\overline{y}_i)^2=\sum_{i,j}y_{ij}^2-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^r T_i^2,\quad f_e=n-r \tag{161}$$

定理8.1.1 总平方和分解式:

$$S_T=S_A+S_e \tag{162}$$

8.1.4 检验方法

均方

$$\mathrm{MS} = \frac{Q}{f_Q} \tag{163}$$

因子均方和误差均方

$$\mathrm{MS}_A = \frac{S_A}{f_A}, \qquad \mathrm{MS}_e = \frac{S_e}{f_e} \tag{164}$$

定理8.1.2：

- $$\frac{S_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-r), \quad E(S_e) = (n-r)\sigma^2 \tag{165}$$
- $$E(S_A) = (r-1)\sigma^2 + m\sum_{i=1}^{r} a_i^2 \tag{166}$$

  若H_0成立，那么

  $$\frac{S_A}{\sigma^2} \sim \chi^2(r-1), \quad E(S_e) = (r-1)\sigma^2 \tag{167}$$
- S_A与S_e相互独立。

检验统计量

$$F = \frac{\mathrm{MS}_A}{\mathrm{MS}_e} \sim F(r-1, n-r) \tag{168}$$

拒绝域

$$W = \{F \geq F_{1-\alpha}\} \tag{169}$$

- $F \geq F_{1-\alpha}$：拒绝原假设，认为因子A显著。
- $F \leq F_{1-\alpha}$：接受原假设，认为因子A不显著。

检验的p值为

$$p = P(F \geq F_0) \tag{170}$$

单因子方差分析表

来源	平方和	自由度	均方	F比	p值
因子A	S_A	$f_A = r-1$	$\mathrm{MS}_A = \frac{S_A}{f_A}$	$F = \frac{\mathrm{MS}_A}{\mathrm{MS}_e}$	$p = P(F \geq F_0)$
误差e	S_e	$f_e = n-r$	$\mathrm{MS}_e = \frac{S_e}{f_e}$		
总和T	S_T	$f_T = n-1$			

8.1.5 参数估计

一、点估计

- $$y_{ij} \sim N(\mu + a_i, \sigma^2) \tag{171}$$
- μ的最大似然估计为

  $$\hat{\mu} = \overline{y} \tag{172}$$
- a_i的最大似然估计为

  $$\hat{a}_i = \overline{y}_i - \overline{y} \tag{173}$$
- σ^2的最大似然估计为

  $$\hat{\sigma}^2 = \mathrm{MS}_e \tag{174}$$

二、置信区间

由于

$$\bar{y}_i \sim N(\mu_i, \frac{\sigma^2}{m}), \qquad \frac{S_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-r) \tag{175}$$

因此

$$\frac{\sqrt{m}(\bar{y}_i - \mu_i)}{\sqrt{\hat{\sigma}^2}} \sim T(f_e) \tag{176}$$

进而μ_i的$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[\bar{y}_i - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{m}}, \quad \bar{y}_i + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{m}}\right] \tag{177}$$

8.1.6 重复数不等情形

一、数据

记从第i个水平下的总体获得m_i个试验结果，记为$y_{i1}, \cdots, y_{im_i}$，其中$i = 1, \cdots, r$，实验总次数为$n = m_1 + \cdots + m_r$，统计模型为

$$\begin{cases} y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{ij}\text{相互独立} \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \end{cases} \tag{178}$$

二、总均值

加权均值:

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} m_i \mu_i \tag{179}$$

水平效应:

$$a_i = \mu_i - \mu \tag{180}$$

统计模型为

$$\begin{cases} y_{ij} = \mu + a_i + \varepsilon_{ij} \\ \sum_{i=1}^{r} m_i a_i = 0 \\ \varepsilon_{ij}\text{相互独立} \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \end{cases} \tag{181}$$

四、各平方和的计算

$$T_i = \sum_{j=1}^{m_i} y_{ij}, \qquad \bar{y}_i = \frac{T_i}{m_i} \tag{182}$$

$$T = \sum_{i,j} y_{ij} = \sum_{i=1}^{r} T_i, \qquad \bar{y} = \frac{T}{n} \tag{183}$$

$$S_T = \sum_{i,j} (y_{ij} - \bar{y})^2 = \sum_{i,j} y_{ij}^2 - \frac{T^2}{n}, \qquad\qquad f_T = n - 1 \tag{184}$$

$$S_A = \sum_{i=1}^{r} m_i (\bar{y}_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{T_i^2}{m_i} - \frac{T^2}{n}, \qquad\qquad f_A = r - 1 \tag{185}$$

$$S_e = \sum_{i,j} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i,j} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{r} \frac{T_i^2}{m_i}, \qquad\qquad f_e = n - r \tag{186}$$

8.2 多重比较

8.2.1 水平均值差的置信区间

检验问题

$$H_0 : \mu_i - \mu_j = 0 \quad \text{vs} \quad H_a : \mu_i - \mu_j \neq 0 \tag{187}$$

由于

$$\overline{y}_i-\overline{y}_j \sim N\left(\mu_i-\mu_j,\left(\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_j}\right)\sigma^2\right) \tag{188}$$

而$\frac{S_e}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-r)$，因此

$$\frac{(\overline{y}_i-\overline{y}_j)-(\mu_i-\mu_j)}{\sqrt{\left(\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_j}\right)\hat{\sigma}^2}}\sim T(n-r) \tag{189}$$

那么置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[\overline{y}_i-\overline{y}_j-t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_j}\right)\hat{\sigma}^2},\quad \overline{y}_i-\overline{y}_j+t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_j}\right)\hat{\sigma}^2}\right] \tag{190}$$

这也是检验问题的接受域$\overline{W}$。如果包含0，那么接受原假设，认为μ_i和μ_j无显著差异；反之拒绝原假设，，认为μ_i和μ_j存在显著差异。

8.2.2 多重比较问题

首先经过方差检验，表明因子A是显著的，即r个水平均值不全相等，那么考虑如下多重比较问题检验

$$H_0^{ij}:\mu_i=\mu_j,\quad 1\le i<j\le r \tag{191}$$

拒绝域

$$W=\bigcup_{1\le i<j\le r}\{|\overline{y}_i-\overline{y}_j|\ge c_{ij}\} \tag{192}$$

8.2.3 重复数相等的T法

当$m_1=\cdots=m_r=m$时，记$c_{ij}=c$，于是检验统计量为

$$\frac{\sqrt{m}(\overline{y}_i-\mu_i)}{\hat{\sigma}}\sim T(n-r) \tag{193}$$

当原假设成立时，$\mu_1=\cdots=\mu_r=\mu$，此时

$$P(W)=P\left(q(r,n-r)\ge\frac{c\sqrt{m}}{\hat{\sigma}}\right) \tag{194}$$

其中t化极差统计量为

$$q(r,n-r)=\max_{1\le i\le r}\frac{\sqrt{m}(\overline{y}_i-\mu_i)}{\hat{\sigma}}-\min_{1\le j\le r}\frac{\sqrt{m}(\overline{y}_j-\mu_j)}{\hat{\sigma}} \tag{195}$$

仅与n和r有关。由$P(W)=\alpha$，可知

$$c=q_{1-\alpha}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{m}} \tag{196}$$

因此，如果

$$|\overline{y}_i-\overline{y}_j|\ge q_{1-\alpha}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{m}} \tag{197}$$

那么认为水平A_i和A_j存在显著差异；反之认为水平A_i和A_j无显著差异。

8.2.4 重复数不等场合的S法

由于

$$\frac{(\overline{y}_i-\overline{y}_j)-(\mu_i-\mu_j)}{\sqrt{\left(\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_j}\right)\hat{\sigma}^2}}\sim T(n-r) \tag{198}$$

当原假设成立时，$\mu_1=\cdots=\mu_r=\mu$，此时

$$\frac{(\overline{y}_i-\overline{y}_j)^2}{\left(\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_j}\right)\hat{\sigma}^2}\sim F(1,n-r) \tag{199}$$

令$c_{ij}=c\sqrt{\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_j}}$，那么

$$P(W)=P\left(\max_{1\le i<j\le r}\frac{(\overline{y}_i-\overline{y}_j)^2}{\left(\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_j}\right)\hat{\sigma}^2}\ge\frac{c^2}{\hat{\sigma}^2}\right) \tag{200}$$

其中

$$\frac{\max_{1\le i<j\le r}\frac{(\overline{y}_i-\overline{y}_j)^2}{\left(\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_j}\right)\hat{\sigma}^2}}{r-1}\sim F(r-1,n-r) \tag{201}$$

由$P(W)=\alpha$，可知

$$\frac{c^2}{\hat{\sigma}^2}=(r-1)f_{1-\alpha} \tag{202}$$

即

$$c_{ij}=\sqrt{(r-1)f_{1-\alpha}\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_j}\right)} \tag{203}$$

其中$f_{1-\alpha}$为$F(r-1,n-r)$的$1-\alpha$分位数。因此，如果

$$|\overline{y}_i-\overline{y}_j|\ge\sqrt{(r-1)f_{1-\alpha}\hat{\sigma}^2\left(\frac{1}{m_i}+\frac{1}{m_j}\right)} \tag{204}$$

那么认为水平A_i和A_j存在显著差异；反之认为水平A_i和A_j无显著差异。

8.3 方差齐性检验

方差齐性检验：

$$H_0:\sigma_1^2=\cdots=\sigma_r^2 \tag{205}$$

8.3.1 Hartley检验

对于单因子方差分析中含有r个样本，当$m_1=\cdots=m_r=m$时，设第i个样本方差为

$$s_i^2=\frac{1}{m-1}\sum_{k=1}^{m}(y_{ij}-\overline{y}_i)^2 \tag{206}$$

检验统计量为

$$H=\frac{\max\{s_i^2\}}{\min\{s_i^2\}}\sim H(r,m-1) \tag{207}$$

拒绝域为

$$W=\{H\ge H_{1-\alpha}\} \tag{208}$$

8.3.2 Bartlett检验

对于单因子方差分析中含有r个样本，设第i个样本方差为

$$s_i^2=\frac{1}{m_i-1}\sum_{k=1}^{m_i}(y_{ij}-\overline{y}_i)^2=\frac{Q_i}{f_i} \tag{209}$$

其中m_i为第i个样本的容量且$m_i\ge 5$，$Q_i=\sum_{k=1}^{m_i}(y_{ij}-\overline{y}_i)^2$和$f_i=m_i-1$为该样本的偏差平方和自由度。$s_i^2$的算术加权平均即为均方误差

$$\mathrm{MS}_e=\frac{1}{f_e}\sum_{i=1}^{r}Q_i=\sum_{i=1}^{r}\frac{f_i}{f_e}s_i^2 \tag{210}$$

其加权几何平均为

$$\mathrm{GMS}_e=\left(\prod_{i=1}^{r}(s_i^2)^{f_i}\right)^{\frac{1}{f_e}} \tag{211}$$

其中$f_e=\sum_{i=1}^r f_i=n-r$。由算术-几何平均不等式

$$\mathrm{MS}_e \geq \mathrm{GMS}_e \tag{212}$$

当且仅当$s_1^2=\cdots=s_r^2$时等号成立。而

$$B=\frac{f_e}{C}\ln\frac{\mathrm{MS}_e}{\mathrm{GMS}_e}\dot{\sim}\chi^2(r-1) \tag{213}$$

其中

$$C=1+\frac{1}{3(r-1)}\left(\sum_{i=1}^r\frac{1}{f_i}-\frac{1}{f_e}\right) \tag{214}$$

因此拒绝域为

$$W=\left\{B\geq\chi_{1-\alpha}^2\right\} \tag{215}$$

8.3.3 修正的Bartlett检验

修正的检验统计量

$$B'=\frac{f_2BC}{f_1(A-BC)}\dot{\sim}F(f_1,f_2) \tag{216}$$

其中

$$f_1=r-1,\qquad f_2=\frac{r+1}{(C-1)^2},\qquad A=\frac{f_2}{2-C+\frac{2}{f_20}} \tag{217}$$

拒绝域为

$$W=\{B'\geq F_{1-\alpha}\} \tag{218}$$

8.4 一元线性回归

8.4.1 变量间的两类关系

确定性关系

相关关系

8.4.2 一元线性回归模型

第一类回归问题

$$f(x)=E(Y\mid x)=\int_{-\infty}^{\infty}yp(y\mid x)\mathrm{d}x \tag{219}$$

第二类回归问题

$$y=f(x)+\varepsilon \tag{220}$$

其中$\varepsilon\sim N(0,\sigma^2)$。

一元回归模型：

$$\begin{cases}y_i=\beta_0+\beta x_i+\varepsilon_i\\ \varepsilon_i\text{相互独立}\\ \varepsilon_i\sim N(0,\sigma^2)\end{cases} \tag{221}$$

由数据(x_i,y_i)得到的β_0和β的估计$\hat{\beta}_0$和$\hat{\beta}$，称

$$\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}x \tag{222}$$

为y关于x的回归函数。给定$x=x_0$，称$\hat{y}_0=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}x_0$为回归值。

8.4.3 回归系数的最小二乘估计

$$l_{xy}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y-\overline{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y} \tag{223}$$

$$l_{xx}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2 \tag{224}$$

$$l_{yy}=\sum_{i=1}^{n}(y-\overline{y})^2=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\overline{y}^2 \tag{225}$$

β_0和β的最小二乘估计（LSE）$\hat{\beta}_0$和$\hat{\beta}$为

$$\hat{\beta}=\frac{l_{xy}}{l_{xx}} \tag{226}$$

$$\hat{\beta}_0=\overline{y}-\hat{\beta}\overline{x} \tag{227}$$

定理8.4.1：在如下模型下，成立

$$\begin{cases}y_i=\beta_0+\beta x_i+\varepsilon_i\\ \varepsilon_i\text{相互独立}\\ \varepsilon_i\sim N(0,\sigma^2)\end{cases} \tag{228}$$

- $$\hat{\beta}_0\sim N\left(\beta_0,\left(\frac{1}{n}+\frac{\overline{x}^2}{l_{xx}}\right)\sigma^2\right),\qquad \hat{\beta}\sim N\left(\beta,\frac{\sigma^2}{l_{xx}}\right) \tag{229}$$
- $$\mathrm{Cov}(\hat{\beta}_0,\hat{\beta})=-\frac{\overline{x}}{l_{xx}}\sigma^2 \tag{230}$$
- 给定x_0

$$\hat{y}_0=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}x_0\sim N\left(\beta_0+\beta x_0,\left(\frac{1}{n}+\frac{(\overline{x}-x_0)^2}{l_{xx}}\right)\sigma^2\right) \tag{231}$$

8.4.4 回归模型的显著性检验

显著性：$\beta\neq 0$称为显著，否则称为不显著。

显著性假设检验：

$$H_0:\beta=0\quad \text{vs}\quad H_a:\beta\neq 0 \tag{232}$$

方差分析表

来源	平方和	自由度	均方	F比
回归	S_R	$f_R=1$	$\mathrm{MS}_R=\frac{S_R}{f_R}$	$F=\frac{\mathrm{MS}_A}{\mathrm{MS}_e}$
残差	S_e	$f_e=n-2$	$\mathrm{MS}_e=\frac{S_e}{f_e}$	
总和	S_T	$f_T=n-1$		

一、F检验

总偏差平方和：

$$S_T=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2=l_{yy} \tag{233}$$

回归平方和：

$$S_R=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\overline{y})^2=\frac{l_{xy}^2}{l_{xx}} \tag{234}$$

残差平方和：

$$S_e=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2 \tag{235}$$

平方和分解：

$$S_T = S_R + S_e \tag{236}$$

定理8.4.2：在如下模型下，成立

$$\begin{cases} y_i = \beta_0 + \beta x_i + \varepsilon_i \\ \varepsilon_i \text{相互独立} \\ \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \end{cases} \tag{237}$$

- $$E(S_R) = \sigma^2 + \hat{\beta} l_{xx}, \qquad E(S_e) = (n-2)\sigma^2 \tag{238}$$
- $$\frac{S_e}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2) \tag{239}$$
- 如果H_0成立，那么
$$\frac{S_R}{\sigma^2} \sim \chi^2(1) \tag{240}$$
- S_R与S_e、$\overline{y}$独立。

统计检验量：

$$F = \frac{(n-2)S_R}{S_e} \sim F(1, n-2) \tag{241}$$

拒绝域为$W = \{F \geq F_{1-\alpha}\}$。

二、T检验

检验统计量：

$$T = \frac{\sqrt{(n-2)l_{xx}}\hat{\beta}}{\sqrt{S_e}} \sim T(n-2) \tag{242}$$

拒绝域为$W = \{|t| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$。

三、相关系数检验

相关系数假设检验：

$$H_0: \rho = 0 \quad \text{vs} \quad H_a: \rho \neq 0 \tag{243}$$

检验统计量：相关系数

$$r = \frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}l_{yy}}} = \sqrt{\frac{F}{F + (n-2)}} \sim r(n-2) = \sqrt{\frac{F(1, n-2)}{F(1, n-2) + (n-2)}} \tag{244}$$

- $|r| = 1$：(x_i, y_i)共线。
- $r > 0$：(x_i, y_i)正相关。
- $r < 0$：(x_i, y_i)负相关。
- $r = 0$：(x_i, y_i)不相关。

拒绝域为$W = \{|r| \geq r_{1-\alpha}\}$，其中

$$r_{1-\alpha} = \sqrt{\frac{F_{1-\alpha}}{F_{1-\alpha} + (n-2)}} \tag{245}$$

8.4.5 估计与预测

一、$E(y_0)$的置信区间

枢轴量为

$$\frac{\hat{y}_0 - E(y_0)}{\sqrt{\frac{S_e}{n-2}}\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \overline{x})^2}{l_{xx}}}} \sim T(n-2) \tag{246}$$

$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[\hat{y}_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_e}{n-2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{l_{xx}}},\quad \hat{y}_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_e}{n-2}}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{l_{xx}}}\right] \tag{247}$$

二、y_0的预测区间

枢轴量为

$$\frac{y_0-\hat{y}_0}{\sqrt{\frac{S_e}{n-2}}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{l_{xx}}}} \sim T(n-2) \tag{248}$$

预测区间为

$$\left[\hat{y}_0 - t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_e}{n-2}}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{l_{xx}}},\quad \hat{y}_0 + t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{S_e}{n-2}}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\overline{x})^2}{l_{xx}}}\right] \tag{249}$$

8.5 一元非线性回归

8.5.1 确定可能的函数形式

8.5.2 参数估计

8.5.3 曲线回归方程的比较

决定系数：越大说明残差越小，回归曲线拟合越好。

$$R^2 = 1-\frac{\sum(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum(y_i-\overline{y})^2} \tag{250}$$

剩余标准差：越小，回归曲线拟合越好。

$$s=\sqrt{\frac{\sum(y_i-\hat{y}_i)^2}{n-2}} \tag{251}$$

附录：概率模型

概率模型	概率分布$p(x)$	数学期望$E\xi$	方差$D\xi$	特征函数$f(t)$
退化分布$I_c(x)$	$p(x)=\begin{cases}1, & x=c\\ 0, & x\neq c\end{cases}$	c	0	e^{ict}
Bernoulli分布	$p(x)=\begin{cases}1-p, & x=0\\ p, & x=1\end{cases}$ $0<p<1$	p	$p(1-p)$	$p\mathrm{e}^{it}+1-p$
二项分布$B(n,p)$	$b(k;n,p)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,\cdots,n;0<p<1$	np	$np(1-p)$	$(p\mathrm{e}^{it}+1-p)^n$
Poisson分布$P(\lambda)$	$p(k;\lambda)=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$ $k=0,1,\cdots;\lambda>0$	λ	λ	$\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{it}-1)}$
几何分布	$g(k;p)=p(1-p)^{k-1}$ $k=1,2,\cdots;0<p<1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{p\mathrm{e}^{it}}{1-(1-p)\mathrm{e}^{it}}$
超几何分布	$p_k=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ $M,n\le N;M,N,n\in N^*$ $k=0,\cdots,\min(M,n)$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$	$\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}\mathrm{e}^{ikt}$
Pascal分布	$p_k=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r}$ $k=r,r+1,\cdots;0<p<1;r\in N^*$	$\frac{r}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	$(\frac{(1-p)\mathrm{e}^{it}}{1-(1-p)\mathrm{e}^{it}})^r$
负二项分布	$p_k=\binom{-r}{k}p^r(p-1)^k$ $k=0,1,\cdots;0<p<1;r>0$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	$(\frac{p}{1-(1-p)\mathrm{e}^{it}})^r$
正态分布$N(\mu,\sigma^2)$	$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty<x<\infty$	μ	σ^2	$\mathrm{e}^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$
均匀分布$U[a,b]$	$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $a<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{\mathrm{e}^{ibt}-\mathrm{e}^{iat}}{i(b-a)t}$
指数分布$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$p(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ $\lambda>0$	λ^{-1}	λ^{-2}	$(1-\frac{it}{\lambda})^{-1}$
χ^2分布	$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}x^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ $n\in N^*$	n	$2n$	$(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$
Γ分布$\Gamma(r,\lambda)$（$r\in N^*$时为Erlang分布）	$p(x)=\begin{cases}\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)}x^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ $r,\lambda>0$	$\frac{r}{\lambda}$	$\frac{r}{\lambda^2}$	$(1-\frac{it}{\lambda})^{-r}$
Cauchy分布	$p(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\lambda}{\lambda^2+(x-\mu)^2}$ $-\infty<x,\mu<\infty;\lambda>0$	不存在	不存在	$\mathrm{e}^{i\mu t-\lambda\vert t\vert}$
t分布	$p(x)=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi}\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$ $-\infty<x<\infty;n\in N^*$	$0(n>1)$	$\frac{n}{n-2}(n>2)$	
Pareto分布	$p(x)=\begin{cases}rA^r\frac{1}{x^{r+1}}, & x\ge A\\ 0, & x<A\end{cases}$ $r,A>0$	（$r>1$时存在）	（$r>2$时存在）	
F分布	$p(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(n+mx)^{\frac{m+n}{2}}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ $m,n\in N^*$	$\frac{n}{n-2}(n>2)$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}(n>4)$	
β分布	$p(x)=\begin{cases}\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}x^{p-1}(1-x)^{q-1}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $p,q>0$	$\frac{p}{p+q}$	$\frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$	$\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(p+k)(it)^k}{\Gamma(p+q+k)\Gamma(k+1)}$
对数正态分布	$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\mathrm{e}^{\frac{(\ln x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $\alpha,\sigma>0$	$\mathrm{e}^{\alpha+\frac{\sigma^2}{2}}$	$\mathrm{e}^{2\alpha+\sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1)$	
Weibull分布	$p(x)=\begin{cases}\alpha\lambda x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $\lambda,\alpha>0$	$\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1)\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}$	$\lambda^{-\frac{2}{\alpha}}(\Gamma(\frac{2}{\alpha}+1)-(\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1))^2)$	
Rayleigh分布	$p(x)=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$2-\frac{\pi}{2}$	
Laplace分布	$p(x)=\frac{1}{2\alpha}\mathrm{e}^{-\frac{\vert x\vert}{\alpha}}$ $-\infty<x<\infty,\alpha>0$	0	$2\alpha^2$	$\frac{i\alpha t}{1+\alpha^2t^2}$