第一章　集合论和逻辑

1　基本概念

2　函数

3　关系

4　整数与实数

5　Cartesian积

6　有限集合

7　可数集合与不可数集合

8　递归定义原理

9　无限集合与选择公理

10　良序集合

11　极大原理

第二章　拓扑空间与连续函数

12　拓扑空间

拓扑空间(topology space)：称(X,τ)为拓扑空间，如果拓扑$\tau\subset\mathscr{P}(X)$满足如下性质。

1. $\varnothing,X\in\tau$
2. τ对于任意并封闭。
3. τ对于可数交封闭。

开集(open set)：对于拓扑空间(X,τ)，称集合$U\in\tau$为开集。

拓扑的例子：

- **离散拓扑(discrete topology)**：$\tau=\mathscr{P}(X)$
- **平凡拓扑(trivial topology)**：$\tau=\{\varnothing,X\}$
- **有限补拓扑(finite complement topology)**：
  $\tau_f=\{U\subset X:X\setminus U\text{ is finite }\}\cup\{\varnothing,X\}$
- **可数补拓扑(countable complement topology)**：
  $\tau_c=\{U\subset X:X\setminus U\text{ is countable }\}\cup\{\varnothing,X\}$

精细(finer)、粗糙(coarser)与可比较(comparable)：对于集合X上的拓扑τ和τ'，称τ'比τ精细，τ比τ'粗糙，如果$\tau'\supset\tau$；称τ'比τ严格精细，τ比τ'严格粗糙，如果$\tau'\supsetneq\tau$；称τ和τ'可比较，如果$\tau'\supset\tau$且$\tau\supset\tau'$。

13　拓扑基

生成子集族(generated subset family)：定义子集族$\mathscr{B}\subset\mathscr{P}(X)$的生成子集族为

$$\begin{aligned}\overline{\mathscr{B}}&=\{U\subset X:U\text{ is a union of elements of }\mathscr{B}\} &(1)\\ &=\{U\subset X:\forall x\in U,\exists B\in\mathscr{B},\text{ s.t. }x\in B\subset U\} &(2)\end{aligned}$$

基(basis)：称子集族$\mathscr{B}\subset\mathscr{P}(X)$为$X$的拓扑基，如果满足如下性质之一。

1. $\overline{\mathscr{B}}$构成X的拓扑。
2. $\bigcup\limits_{B\in\mathscr{B}}B=X$，且对于任意$B_1,B_2\in\mathscr{B}$，成立$B_1\cap B_2\in\overline{\mathscr{B}}$。
3. $\bigcup\limits_{B\in\mathscr{B}}B=X$，且对于任意$x\in X$，以及$B_1,B_2\in\mathscr{B}$，如果$x\in B_1\cap B_2$，那么存在$B\in\mathscr{B}$，使得成立$x\in B\subset B_1\cap B_2$。

生成拓扑(generated topology)：称τ为由X的拓扑基$\mathscr{B}\subset\mathscr{P}(X)$生成的拓扑，或称$\mathscr{B}\subset\mathscr{P}(X)$为拓扑空间$(X,\tau)$的拓扑基，如果满足如下性质之一。

1. $\tau=\overline{\mathscr{B}}$
2. $\mathscr{B}\subset\tau\subset\overline{\mathscr{B}}$
3. 对于任意$U\in\tau$，以及$x\in U$，存在$B\in\mathscr{B}$，使得成立$x\in B\subset U$。

引理13.1：对于拓扑空间(X,τ)的拓扑基$\mathscr{B}$和拓扑(X,τ')的拓扑基$\mathscr{B}'$，τ'比τ精细$\iff$对于任意$x\in X$，以及$B\in\mathscr{B}$，如果$x\in B$，那么存在$B'\in\mathscr{B}'$，使得成立$x\in B'\subset B$。

标准拓扑(standard topology)：称$(\mathbb{R},\tau)$为标准拓扑，如果τ为由拓扑基$\{(a,b):a<b\in\mathbb{R}\}$生成的拓扑。

下限拓扑(lower limit topology)：称$(\mathbb{R},\tau)$为下限拓扑，并记做$\mathbb{R}_\ell$，如果τ为由拓扑基$\{[a,b):a<b\in\mathbb{R}\}$生成的拓扑。

K-拓扑(K-topology)：称$(\mathbb{R},\tau)$为K-拓扑，并记做K-拓扑，如果τ为由拓扑基$\{(a,b):a<b\in\mathbb{R}\}\cup\{(a,b)\setminus K:a<b\in\mathbb{R}\}$生成的拓扑，其中$K=\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}^*\}$。

引理13.2：下限拓扑$\mathbb{R}_\ell$和K-拓扑$\mathbb{R}_K$比标准拓扑精细，但不可比较。

子基(subbasis)：