考虑如下递推公式的通项：

$$x_{n+2} = px_{n+1} - qx_n \tag{1}$$

其特征方程为

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0 \tag{2}$$

判别式为

$$\Delta = p^2 - 4q \tag{3}$$

首先，当$\Delta = p^2 - 4q > 0$时，容易知道通项为

$$x_n = A\left(\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^n + B\left(\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^n \tag{4}$$

其次，当$\Delta = p^2 - 4q = 0$时，容易知道通项为

$$x_n = (An+B)\left(\frac{p}{2}\right)^2 \tag{5}$$

最后，当$\Delta = p^2 - 4q < 0$时，记

$$\rho = \left|\frac{p+i\sqrt{4q-p^2}}{2}\right| = \sqrt{q} \tag{6}$$

$$\theta = \arg\frac{p+i\sqrt{4q-p^2}}{2} = \begin{cases} \arctan \operatorname{sgn}(p)\sqrt{\frac{4q}{p^2}-1}, & p \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & p = 0 \end{cases} \tag{7}$$

其中$\theta \in (0, \pi)$。那么容易知道通项为

$$x_n = \rho^n (A\cos n\theta + B\sin n\theta) \tag{8}$$

为了探究$x_n$的周期性，注意到

$$\cos\theta = \frac{p}{2\sqrt{q}} \tag{9}$$

我们想要找到$r \in \mathbb{Q}$，使得$\theta = r\pi$。事实上，这大概率是不存在的。

我们使用mathematica求解$q = 4, p = 1$的情况：

```
(* 求解通项公式 *)
RSolve[{a[2 + n] == a[n + 1] - 4*a[n]}, a[n], n];

(* 定义函数，令A=B=1，注意此处将rho^n已除掉，以消除半径扩大的影响 *)
f[n_] = Re[(1/4 - (I Sqrt[15])/4)^n + (1/4 + (I Sqrt[15])/4)^n];

(* 输出该数列的前1000项 *)
result = Table[f[n], {n, 1, 1000}];

(* 判定该数列的前1000项是否存在相同元素 *)
DuplicateFreeQ[result]
```

返回

```
True
```

表明该数列的前1000项不存在相同元素。

```
(* 判断arccos(1/4)/pi是否为有理数 *)
Element[ArcCos[1/4]/Pi, Rationals]
```

返回属于有理数域，但是

```
(* 判断e/pi是否为有理数 *)
Element[E/Pi, Rationals]
```

同样返回属于有理数域，所以我怀疑mathematica算错了。