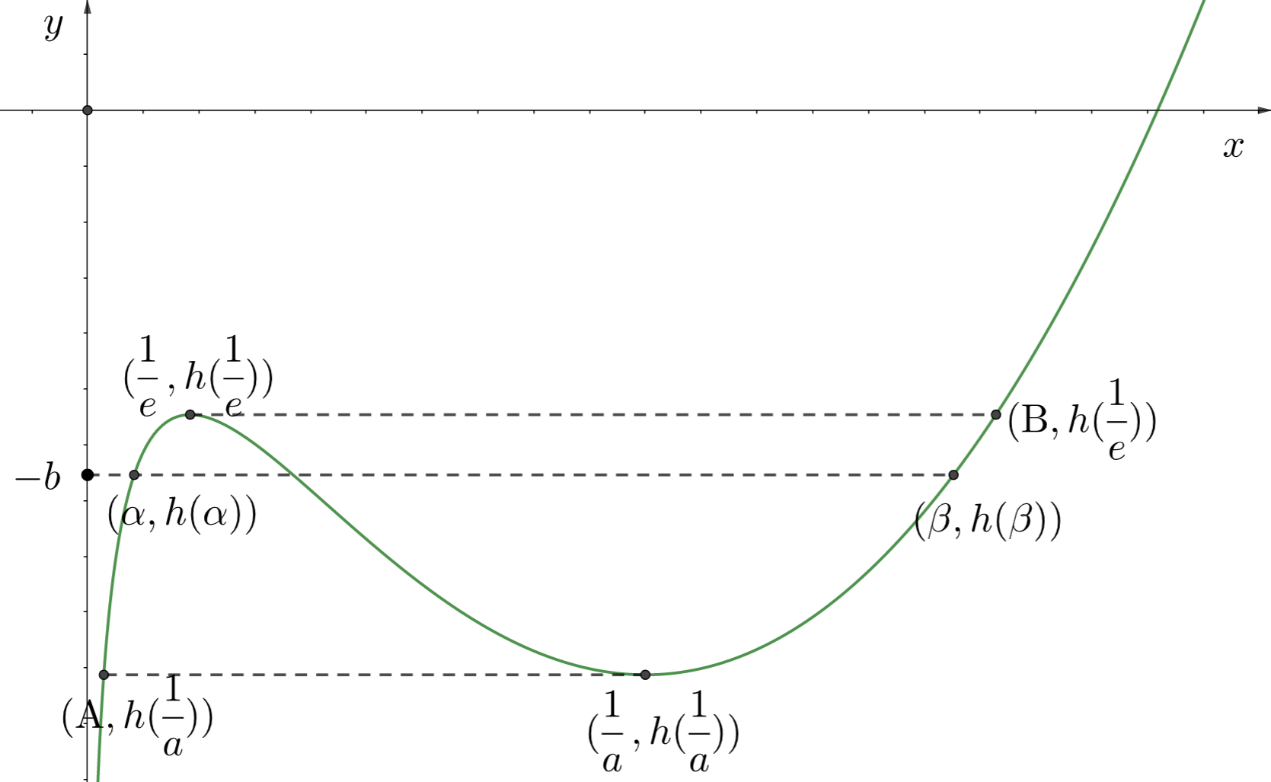
记函数，曲线上存在三点，且其切线共点。若且，证明：

证明：曲线的过的切线的相对应切点的横坐标满足  
即  
记函数  
则容易得到曲线上存在三点其切线共点的充分必要条件是关于的方程  
在内有三个互异实根。记函数，即  
那么曲线上存在三点其切线共点的充分必要条件是关于的方程  
在内有三个互异实根。注意到，此时的三个根分别为，记，则需要证明

考察函数，其图像如下图所示  
  
容易知道，函数在区间和内分别严格单调递增；在区间内严格单调递减。因此其极小值为，极大值为。记直线与曲线另一交点为；直线与曲线另一交点为。因此成立  
进而成立  
若要证明，只需证明

(i)对于证明，当时，这是显然的。下面证明，当  
时，成立。

注意到，若要证明，等价于证明  
代入可得到

构造函数  
这里定义域为且。考察函数，对求导函数  
进而在定义域内严格单调递增，因此代入，得到，这样便证明了，进而证明了。

(ii)对于证明，同理，等价于证明  
代入可得到

构造函数这里定义域为。考察函数，对求导函数  
进而在定义域内严格单调递减，因此  
代入，得到，这样便证明了，进而证明了。

综合(i)和(ii)，已证明和，因此得证，进而原命题得证！