设是上的向量空间，在中线性无关，且。证明：

其中

证明：首先，=1当然是平凡解，下设。

其次，我们来证明一个引理：对于，

引理的证明：首先将行列式的第列减去第列，其中。操作后行列式变为

接着将行列式的第行加上第行，其中。操作后行列式变为

此时行列式成为上三角形行列式，行列式的值显然为。引理得证！

下面回到原命题。

Ⅰ 当时，设

其中。

下面考察的线性相关性。令

其中。

将(1)代入(2)并整理，得

由于线性无关，因此由(3)得

注意到(4)是关于的元齐次线性方程组，考察其系数行列式

由引理知该行列式值为

(i) 当

由Cramer法则，此时(4)仅有零解，于是(4)

进而线性无关，于是

(ii) 当

这说明(4)有非零解，进而线性相关。由(10)不妨设。

下面考察的线性相关性。令

将(1)代入(12)并整理，得

由于线性无关，因此由(13)得

记

(14)是关于的元齐次线性方程组，考察其系数行列式

由引理知

由Cramer法则，这说明(14)仅有零解。又满足(13)的解一定满足(14)，而(14)显然有零解，于是(14)仅有零解。于是(13)

进而线性无关，于是

Ⅱ 当时，因为设在中线性无关，那么可扩充为称为的基，其中。设

由于，那么不全为，不妨设。

下面考察的线性相关性。令

其中

将(18)代入(19)并整理，得

由于线性无关，因此由(20)得

记

(22)是关于的元齐次线性方程组，考察其系数行列式

由引理知

由Cramer法则，这说明仅有零解。又满足的解一定满足，而显然有零解，于是仅有零解。于是(21)

进而线性无关，于是

综合Ⅰ与Ⅱ，

当且仅当，且，其中，等号成立。

于是，原命题得证！