关于二元梯度的一点思考

若水

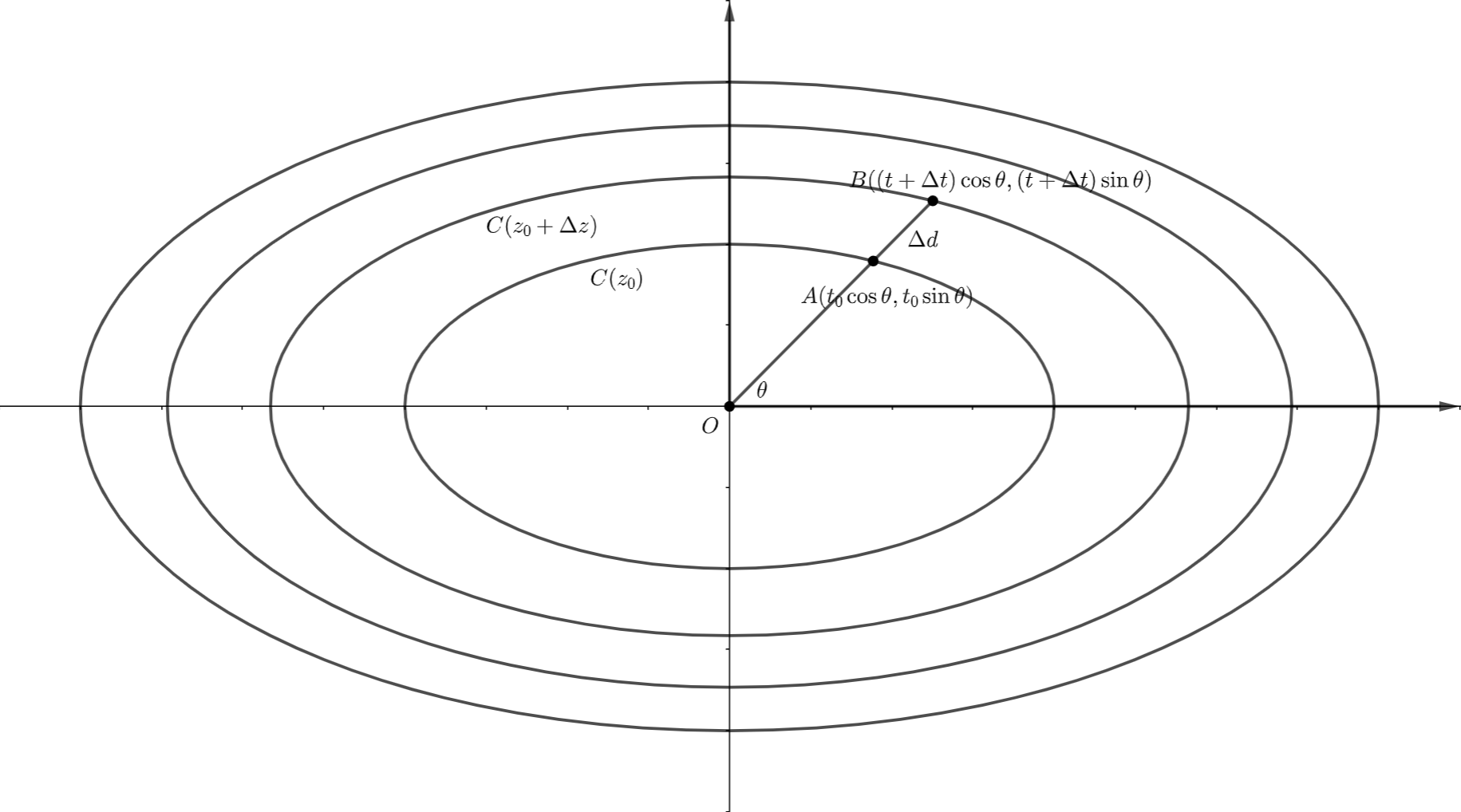
2022.03.02

本文均在二维平面及三维空间中讨论。

在求二元梯度时，时常遇到在原点处梯度为零向量的情况，而我们知道零向量可为任意方向，于是在原点处的到底是沿着哪一方向的变化最快就不可而知。

诚然，对于函数在原点处的梯度为零意味着在零点处对于任意方向的方向导数值。但是如果我们不把眼光拘于某一点，而着眼于该点的一个邻域，便会有新的发现。

方向导数值的模越大，说明在该点向方向的函数值的变化率越大。这如同登山一般，越大的地方意味着山越陡，山越陡的地方等高线越密集，这是精通地理学的朋友都明白的一点。受此启发，我们以“等高线”思想来刻画“变化率”。



如图这是的等高线，我们定义等高线的疏密度：

对于曲面，我们称曲线

为曲面在平面上对的高线，记为。对于给定的方向向量与高线，与的交点记为，与的交点记为，并记。若存在极限

则称极限为曲面关于高线的在方向上的疏密度，记为。若曲面关于任意高线的在任意方向上的都存在疏密度，则称该曲面有疏密度函数。

所谓等高线密集的地方，是求二元函数的最值；而等高线密集的方向，是求二元函数关于的最值。下面探究二元函数关于的最值。

记，,于是建立起与的函数关系

于是有

进而

考察

于是

进而

注意到，若取，则。

因此与的不同在于，前者仅考虑原点向四周的变化率，而是将考虑的范围扩大到原点的邻域中，这样我们就可以依靠求解二元函数关于的最值来解决的困境。