目录

零、引言

本章将阐述Lebesgue微积分体系的产生动机。

1 Fourier级数

对于定义在$[-\pi,\pi]$上的Riemann可积的函数f，其Fourier级数可表示为

(1)

其中a_n为

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x \tag{2}$$

由此产生了两个问题：

1. 当我们完备$\mathcal{R}$时，假定的函数f到底是什么？
2. 我们如何积分这样的函数f？

2 连续函数的性质

对于定义在$[0,1]$上的连续函数序列$\{f_n\}$，对任意$x\in[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x) \tag{3}$$

若f_n一致收敛，那么f将连续。但若放弃“一直连续”的性质，f的性质将发生微妙的变化。例如，我们可以构造满足如下性质的函数序列$\{f_n\}$：

- $0\le f_n(x)\le 1$，对于任意$x\in[0,1]$。
- $f_n(x)$随n而单调递减。
- f_n的极限fRiemann不可积。

对于函数序列$\{f_n\}$，若满足前两个条件，则f_n存在。那么函数序列$\{f_n\}$要满足什么性质使得成立

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

3 曲线的长度

考虑平面上的曲线

$$\Gamma=\{(x(t),y(t))\},a\le t\le b \tag{5}$$

选取

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b \tag{6}$$

则曲线的长度定义为

$$L=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x(t_k)-x(t_{k-1}))^2+(y(t_k)-y(t_{k-1}))^2} \tag{7}$$

若曲线的长度有限，则称曲线是**可求长的(rectifiable)**。若$x(t)$和$y(t)$连续可微，则成立

$$L=\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t \tag{8}$$

于是自然就有了如下问题：

- $x(t)$和$y(t)$保证Γ可求长的条件是什么？
- 当满足此条件时，上式是否成立？

4 微积分

微积分基本定理

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(y)\mathrm{d}y=f(x) \tag{10}$$

- 连续但处处不可微函数的存在性。
- 处处可微但导函数不可积函数的存在性。

5 测度论

为解决上述问题，必须理解的根本问题在于**度量**。

我们需要寻找定义在$E\subset\mathbb{R}$上的非负函数m，满足以下性质：

- 如果$E=[a,b]$，那么

$$m(E)=b-a \tag{11}$$

- 如果

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n \tag{12}$$

  且集合E_n是互不相交的，那么

$$m(E)=\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n) \tag{13}$$

- 对于任意$h\in\mathbb{R}$，成立

$$m(E+h)=m(E) \tag{14}$$

年表

1872年： Weierstrass构造一个无处可微函数。

1881年：Jordan引入了有界变差函数，后来于1887年与可求长性联系起来。

1883年：Cantor的三元集。

1890年：Peano建造了一条充满空间的曲线。

1898 年：Borel的可测集。

1902年：Lebesgue的测度与积分理论。

1905年：Vitali构造了不可测集。

1906年：Fatou将Lebesgue理论应用于复分析。

一、测度论

1 前言

1.1 点

点：$x \in \mathbb{R}^d$

$$x = (x_1, \cdots, x_d), \quad x_k \in \mathbb{R}, i = 1, \cdots, d \tag{15}$$

范数(norm)：

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2} \tag{16}$$

距离(distance)：两点$x, y \in \mathbb{R}^d$的距离

$$|x - y| \tag{17}$$

两集合$E, F \in \mathbb{R}^d$的距离

$$d(E, F) = \inf |x - y|, \quad x \in E, y \in F \tag{18}$$

补集(complementary set)：$E \in \mathbb{R}^d$的补集记作E^c

$$E^c = \{x \in \mathbb{R}^d : x \notin E\} \tag{19}$$

差集(difference set)：$E, F \in \mathbb{R}^d$

$$E - F = \{x \in \mathbb{R}^d : x \in E \text{且} x \notin F\} \tag{20}$$

1.2 开集，闭集和紧集

开球(open ball)：

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| < r\} \tag{21}$$

开集(open set)：称E为开的，如果对于任意$x \in E$，存在$r > 0$使得成立$B_r(x) \subset E$。

闭集(closed set)：称E为闭的，如果其补集为开的。

有界集(bounded set)：称E为有界的，如果其包含于半径有限的开球中。

紧集(compact set)：称E为紧致的，如果E有界且闭。

> Heine-Borel定理：如果E为紧致的，且
>
> $$E \subset \bigcup_{\alpha} \mathcal{O}_\alpha \tag{22}$$
>
> 其中每一个$\mathcal{O}_\alpha$为开的，那么存在有限个开集$\mathcal{O}_{\alpha_1}, \cdots, \mathcal{O}_{\alpha_n}$，使得成立
>
> $$E \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}_{\alpha_k} \tag{23}$$

极限点(limit point)：称$x \in \mathbb{R}^d$为E的极限点，如果对于任意$r > 0$，使得成立

$$B_r(x) \cap E \neq \emptyset \tag{24}$$

孤立点(isolated point)：称$x \in E$为E的孤立点，如果存在$r > 0$，使得成立

$$B_r(x) \cap E = \{x\} \tag{25}$$

内点(interior point)：称$x \in E$为E的内点，如果存在$r > 0$，使得成立

$$B_r(x) \subset E \tag{26}$$

内部(interior)：E的所有内点的集合称为E的内部。

闭包(closure)：E及其极限点构成的集合称为E的闭包，记作$\overline{E}$。

边界(boundary)：在E的闭包中但不在E内部的点的集合称为E的边界，记作∂E。

1.3 矩形和立方体

矩形(rectangl)：

$$R = [a_1, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d] \tag{27}$$

其中$a_k \leq b_k$且$a_k, b_k \in \mathbb{R}$，$k = 1, \cdots, d$。称$b_1 - a_1, \cdots, b_d - a_d$为其**边长(side)。**

体积(volume)：

$$|R| = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d) \tag{28}$$

方体(cube)：边长相等的矩形。记立方体Q的边长为ℓ，那么其体积为

$$|Q| = \ell^d \tag{29}$$

几乎不相交(almost disjoint)：称矩形是几乎不相交的，如果其内部不相交。

引理1.1：如果

$$R = \bigcup_{k=1}^{n} R_k \tag{30}$$

且$R_1, \cdots, R_n$几乎处处不相交，那么

$$|R| = \sum_{k=1}^{n} |R_k| \tag{31}$$

引理1.2：如果

$$R \subset \bigcup_{k=1}^{n} R_k \tag{32}$$

且$R_1, \cdots, R_n$几乎处处不相交，那么

$$|R| \leq \sum_{k=1}^{n} |R_k| \tag{33}$$

定理1.3：$\mathbb{R}$的任意开子集$\mathcal{O}$都可表示为且唯一表示为可数个不相交的开区间的并。

定理1.4：$\mathbb{R}^d$的任意开子集$\mathcal{O}$都可表示为可数个几乎不相交的闭集的并。

1.4 Cantor集

记

$$
\begin{aligned}
&C_0 = [0,1] && (34)\\
&C_1 = [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1] && (35)\\
&C_2 = [0,\frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9},\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},\frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9},1] && (36)\\
&\cdots && (37)
\end{aligned}
$$

即

$$
C_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}] \tag{38}
$$

其中

$$
\begin{cases}
a_1^{(0)} = 0, \quad b_1^{(0)} = 1\\
b_m^{(n)} - a_m^{(n)} = \frac{1}{3^n}\\
a_{2m-1}^{(n+1)} = a_m^{(n)}\\
b_{2m}^{(n+1)} = b_m^{(n)}
\end{cases} \tag{39}
$$

Cantor集记作

$$
\mathcal{C} = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k = \left\{ x \in [0,1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}, c_n \in \{0,2\} \right\} \tag{40}
$$

- Cantor集的基数为连续基数。
- Cantor集为Lebesgue零测集。
- Cantor集为紧致集。
- Cantor集为**完美(perfect)**集，即其不存在孤立点。
- Cantor集为**无处稠密集(nowhere dense set)**，即对于任意$(x,y)\subset\mathbb{R}$，存在$(a,b)\subset(x,y)$，使得成立$(a,b)\cap\mathcal{C}=\varnothing$。
- Cantor集为**完全不连通(totally disconnected)**的，即对于任意$x<y\in\mathcal{C}$，存在$z\in(x,y)$，使得成立$z\notin\mathcal{C}$。

2 外测度

2.1 外测度的定义

外测度(The exterior measure)：对于$E\subset\mathbb{R}^d$，定义外测度为映射

$$
m_* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty] \tag{41}
$$

满足

$$m_*(E) = \inf \sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| \tag{42}$$

其中

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \tag{43}$$

由此，$0 \leq m_*(E) \leq +\infty$。同时，对于任意$\varepsilon > 0$，存在覆盖$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_*(Q_k) \leq m_*(E) + \varepsilon \tag{44}$$

- 点的外测度为0。
- 闭的立方体的外测度为其体积。
- 开的立方体的外测度为其体积。
- 矩形的外测度为其体积。
- $\mathbb{R}^d$的外测度为$+\infty$。
- Cantor集$\mathcal{C}$的外测度为0。

2.2 外测度的性质

性质1 单调性(monotonicity)：如果$E_1 \subset E_2$，那么$m_*(E_1) \leq m_*(E_2)$。

性质2 次可加性(countable sub-additivity)：如果

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \tag{45}$$

那么

$$m_*(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_*(E_k) \tag{46}$$

性质3：如果$E \subset \mathbb{R}^d$，那么

$$m_*(E) = \inf m_*(\mathcal{O}) \tag{47}$$

其中

$$E \subset \mathcal{O} \tag{48}$$

性质4：如果$E = E_1 \cup E_2$，且$d(E_1, E_2) > 0$，那么

$$m_*(E) = m_*(E_1) + m_*(E_2) \tag{49}$$

性质5：如果E可写成几乎处处不相交的立方体的可数并集

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \tag{50}$$

那么

$$m_*(E)=\sum_{k=1}^{\infty}|Q_k| \tag{51}$$

3 可测集和Lebesgue测度

3.1 可测集和Lebesgue测度

可测集(measurable set)：称$E\subset\mathbb{R}^d$为（Lebesgue）可测的，如果对于任意$\varepsilon>0$，存在开集$\mathcal{O}\supset E$，使得成立

$$m_*(\mathcal{O}-E)\leq\varepsilon \tag{52}$$

$\mathbb{R}^d$上所有可测集构成的集族为$\mathscr{M}$。

Lebesgue测度(Lebesgue measure)：Lebegue测度为映射

$$m=m_*:\mathscr{M}\to[0,\infty] \tag{53}$$

性质1：$\mathbb{R}^d$中任意开集是可测的。

性质2：对于$E\subset\mathbb{R}^d$，如果$m_*(E)=0$，那么E是可测的。特别的，如果F为一个外测度为0的集合的子集，那么F是可测的。

性质3：可测集合的可数并是可测的，即对于$E_1,E_2,\cdots\in\mathscr{M}$，那么

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{M} \tag{54}$$

性质4：$\mathbb{R}^d$中任意闭集是可测的。

引理3.1：如果F为闭集，K为紧集，且$F\cap F=\varnothing$，那么$d(F,K)>0$。

性质5：可测集合的补集是可测的。

性质6：可测集合的可数交是可测的。

定理3.2 可数可加性：如果$E_1,E_2,\cdots$是两两无交的可测集，且

$$E=\bigsqcup_{n=1}^{\infty}E_n \tag{55}$$

那么E是可测的，且

$$m(E)=\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n) \tag{56}$$

推论3.3：对于$\mathbb{R}^d$中的可测集$E_1,E_2,\cdots$，成立

- **第一单调收敛定理(Continuity from below)**：如果对于任意$n\in\mathbb{N}^*$，$E_n\subset E_{n+1}$，且

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n \tag{57}$$

那么

$$m(E)=\lim_{n\to\infty}m(E_n) \tag{58}$$

- **第二单调收敛定理(Continuity from above)**：如果对于任意$n\in\mathbb{N}^*$，$E_n\supset E_{n+1}$，且

$$E=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n \tag{59}$$

同时存在$n\in\mathbb{N}^*$使得$m(E_n)<\infty$，那么

$$m(E)=\lim_{n\to\infty}m(E_n) \tag{60}$$

定理3.4：如果$E\subset\mathbb{R}^d$为可测的，那么对于任意$\varepsilon>0$，成立

- 存在开集$\mathcal{O}\supset E$，使得成立

$$m(\mathcal{O}-E)\leq\varepsilon \tag{61}$$

- 存在闭集$F\subset E$，使得成立

$$m(E-F)\leq\varepsilon \tag{62}$$

- 如果$m(E)<\infty$，那么存在紧集$K\subset E$，使得成立

$$m(E-K)\leq\varepsilon \tag{63}$$

- 如果$m(E)<\infty$，那么存在有限并集

$$F=\bigcup_{k=1}^{n}Q_k \tag{64}$$

使得成立

$$m(E\triangle F)\leq\varepsilon \tag{65}$$

其中$E\triangle F$为二者**对称差**，即

$$E\triangle F=(E-F)\cup(F-E) \tag{66}$$

3.2 Lebesgue测度的不变性

平移不变性(translation-invariance)：对于任意$E\in\mathscr{M}$，以及任意$h\in\mathbb{R}^d$，成立

$$m(E+h)=m(E) \tag{67}$$

其中

$$E+h=\{x+h:x\in E\} \tag{68}$$

膨胀不变性(dilation-invariance)：对于任意$E\in\mathscr{M}$，以及任意$\delta>0$，成立

$$m(\delta E)=\delta^d m(E) \tag{69}$$

其中

$$\delta E=\{\delta x:x\in E\} \tag{70}$$

反射不变性(reflection-invariant)：对于任意$E \in \mathscr{M}$，成立

$$m(-E) = m(E) \tag{71}$$

其中

$$-E = \{-x : x \in E\} \tag{72}$$

3.3 σ-代数和Borel集

σ-代数(σ-algebra)：称$\Sigma \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$为$\sigma$-代数，如果满足如下性质：

- **对补集封闭**：如果$A \in \Sigma$，那么$A^c \in \Sigma$。
- **对可数并封闭**：如果$A_1, A_2, \cdots \in \Sigma$，那么

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma \tag{73}$$

最小σ-代数(smallest σ-algebra)：对于$A \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$，存在且存在唯一$\sigma$-代数$\Sigma(A)$，使得成立

- $A \subset \Sigma(A) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$
- 对于任意σ-代数$\Sigma \subset \mathcal{P}(S)$，如果$A \subset \Sigma$，那么$\Sigma(A) \subset \Sigma$。

称$\Sigma(A)$为A的最小σ-代数。事实上

$$\Sigma(A) = \bigcap_{A \subset \Sigma(A) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)} \Sigma \tag{74}$$

Borel σ-代数(Borel σ-algebra)：包含$\mathbb{R}^d$中所有开集的最小σ-代数称为Borel σ-代数，记作$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$。

Borel集(Borel set)：$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$中的元素称为Borel集。

推论3.5：以下命题等价

- 集合$E \subset \mathbb{R}^d$是可测的。
- 对于开集的可数交集G_δ，如果$E = G_\delta - N$，那么$m(N) = 0$。
- 对于闭集的可数并集F_σ，如果$E = F_\sigma \cup N$，那么$m(N) = 0$。

3.4 不可测集的构造

定理3.6：定义等价关系

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q} \tag{75}$$

记所有等价类为$\mathcal{E}_\alpha$，从每个$\mathcal{E}_\alpha$选出一个代表元素x_α，记

$$\mathcal{N} = \{x_\alpha\} \tag{76}$$

那么$\mathcal{N}$是不可测的。

3.5 选择公理

选择公理(axiom of choice)：对于集合E，$\{E_\alpha\}$为其非空子集的集合，那么存在**选择函数**$\alpha \to x_\alpha$，使得对于任意α，成立$x_\alpha \in E_\alpha$。

线性有序的(linearly ordered)：称集合E是线性有序的，如果存在二元关系$\leq$，使得成立：

- 对于任意$x \in E$，成立$x \leq x$。
- 如果$x, y \in E$是不同的，那么$x \leq y$和$y \leq x$成立且仅成立其一。
- 如果$x \leq y$且$y \leq z$，那么$x \leq z$。

良序原则(well-ordering principle)：称集合E是良序的，如果其是线性有序的，且对于任意非空集合$A \subset E$，存在$x_0 \in A$，使得对于任意$x \in A$，成立$x_0 \leq x$。

- 任意集合都是良序的。

4 可测函数

4.1 定义和基本性质

可测函数(measurable function)：称定义在可测集$E \subset \mathbb{R}^d$上的函数f为可测函数，如果对于任意$a \in \mathbb{R}$，集合

$$f^{-1}([-\infty, a)) = \{x \in E : f(x) < a\} \tag{77}$$

是可测集。

给定记号：

$$\{f < a\} = \{x \in E : f(x) < a\} \tag{78}$$

对于定义在可测集$E \subset \mathbb{R}^d$上的函数f，以下命题等价：

- f是可测函数。
- 对于任意$a \in \mathbb{R}$，$\{f < a\}$是可测集。
- 对于任意$a \in \mathbb{R}$，$\{f > a\}$是可测集。
- 对于任意$a \in \mathbb{R}$，$\{f \leq a\}$是可测集。
- 对于任意$a \in \mathbb{R}$，$\{f \geq a\}$是可测集。
- 如果f是有限值函数，那么对于任意$a < b \in \mathbb{R}$，$\{a < f < b\}$是可测集。
- 如果f是有限值函数，那么对于任意$a < b \in \mathbb{R}$，$\{a \leq f < b\}$是可测集。
- 如果f是有限值函数，那么对于任意$a < b \in \mathbb{R}$，$\{a < f \leq b\}$是可测集。
- 如果f是有限值函数，那么对于任意$a < b \in \mathbb{R}$，$\{a \leq f \leq b\}$是可测集。

性质1：对于有限值函数f，以下命题等价。

- f是可测函数。
- 对于任意开集$\mathcal{O}$，集合$f^{-1}(\mathcal{O})$是可测集。
- 对于任意闭集F，集合$f^{-1}(F)$是可测集。

性质2：如果f是连续函数，那么f是可测函数。

性质3：如果f是连续有限值函数，并且Φ是连续函数，那么$\Phi \circ f$是可测函数。

性质4：如果$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$为可测函数列，那么

$$\sup_n f_n,\quad \inf_n f_n,\quad \limsup_{n\to\infty} f_n,\quad \liminf_{n\to\infty} f_n \tag{79}$$

都是可测函数。

性质5：如果$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$为可测函数列，且

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \tag{80}$$

那么f是可测函数。

性质6：如果f和g是可测函数，那么对于任意$n \in \mathbb{N}^*$，f^n是可测函数。

性质7：如果f和g是有限值可测函数，那么$f+g$和fg都是可测函数。

几乎处处(almost everywhere)：称命题$P(x)$几乎处处成立，当且仅当

$$m(\{x : P(x)\text{不成立}\}) = 0 \tag{81}$$

性质8：对于可测函数f，如果$f=g$几乎处处成立，那么g是可测函数。

4.2 由简单函数或阶跃函数逼近

示性函数(indicator function)：对于$E \subset \mathbb{R}^d$，定义E上的示性函数为

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in \mathbb{R}^d - E \end{cases} \tag{82}$$

- χ_E是可测函数，当且仅当E是可测集合。
- 如果$A \cap B = \varnothing$，那么

$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B \tag{83}$$

- $$\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B \tag{84}$$

简单函数(simple function)：称f是$\mathbb{R}^d$上的简单函数，如果f可表示为如下形式

$$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k} \tag{85}$$

其中$a_1,\cdots,a_n \in \mathbb{R}$，$E_1,\cdots,E_n \in \mathscr{M}$，且对于任意$k=1,\cdots,n$，成立

$$m(E_k) < \infty \tag{86}$$

> 简单函数的**标准表示(canonical form)**：简单函数f可表示为
>
> $$f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k} \tag{87}$$
>
> 其中$a_1,\cdots,a_n \in \mathbb{R}$，$E_1,\cdots,E_n \in \mathscr{M}$两两无交，且对于任意$k=1,\cdots,n$，成立
>
> $$m(E_k) < \infty \tag{88}$$

阶跃函数(step function)：称f是$\mathbb{R}^d$上的阶跃函数，如果f可表示为如下形式

$$f=\sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{R_k} \tag{89}$$

其中$a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$，$R_1,\cdots,R_n$为矩形，且对于任意$k=1,\cdots,n$，成立

$$m(E_k)<\infty \tag{90}$$

定理4.1：如果$f:\mathbb{R}^d\to[0,\infty]$是可测函数，那么存在逐点收敛于$f$的递增的非负简单函数序列$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$，即

$$0\le\varphi_1\le\varphi_2\le\cdots\le f \tag{91}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n=f \tag{92}$$

同时，如果f是有界函数，那么φ_n一致收敛于f。

定理4.2：如果$f:\mathbb{R}^d\to[-\infty,\infty]$是可测函数，那么存在简单函数序列$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$，满足

$$0\le|\varphi_1|\le|\varphi_2|\le\cdots\le|f| \tag{93}$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n=f \tag{94}$$

定理4.3：如果$f:\mathbb{R}^d\to[-\infty,\infty]$是可测函数，那么存在阶跃函数数序列$\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$，满足$\psi_n$几乎处处收敛于$f$。

4.3 Littlewood三原则

Littlewood三原则：

- 任意可测集合几乎是有限区间的并。
- 任意可测函数几乎是连续的。
- 任意收敛可测函数序列几乎是一致收敛的。

定理4.4 Egorov定理：对于定义在可测集合E且$m(E)<\infty$的可测函数序列$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$，如果$f_n$在$E$上几乎处处收敛于$f$，那么对于任意$\varepsilon>0$，存在闭集$A_\varepsilon\subset E$，使得成立

$$m(E-A_\varepsilon)\le\varepsilon \tag{95}$$

且f_n在A_ϵ上一致收敛于f。

定理4.5 Lusin定理：如果f是定义在可测集合E上的有限值可测函数，其中$m(E)<\infty$，那么对于任意$\varepsilon>0$，存在闭集$F_\varepsilon\subset E$，使得成立

$$m(E-F_\varepsilon)\le\varepsilon \tag{96}$$

且f在F_ε上是连续的。

5 Brunn-Minkowski不等式

可测集合的加法(the sum of two measurable sets)：对于可测集合A和B，定义其加法为

$$A+B=\{x'+x'':x'\in A,x''\in B\} \tag{97}$$

定理5.1 Brunn-Minkowski不等式(the Brunn-Minkowski inequality)：对于$\mathbb{R}^d$中的可测集合A和B，如果$A+B$是可测的，那么成立

$$m(A+B)^{\frac{1}{d}}\geq m(A)^{\frac{1}{d}}+m(B)^{\frac{1}{d}} \tag{98}$$

二、积分理论

1 Lebesgue积分：基本性质和收敛定理

1.1 第一步：简单函数

简单函数的Lebesgue积分(Lebesgue integral of the simple function)：对于标准形式的简单函数

$$f=\sum_{k=1}^{n}a_k\chi_{E_k}\tag{99}$$

其中$a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$，$E_1,\cdots,E_n\in\mathscr{M}$两两无交，且对于任意$k=1,\cdots,n$，成立

$$m(E_k)<\infty\tag{100}$$

定义Lebesgue积分为

$$\int\varphi=\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}a_km(E_k)\tag{101}$$

特别的，如果E为可测集合，定义

$$\int_E\varphi=\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\chi_E(x)\mathrm{d}x\tag{102}$$

命题1.1：

- **唯一性(independence of the representation)**：对于简单函数的任意表示

  $$f=\sum_{k=1}^{n}a_k\chi_{E_k}\tag{103}$$

  成立

  $$\int\varphi=\sum_{k=1}^{n}a_km(E_k)\tag{104}$$

- **线性(linearity)**：对于简单函数φ和ψ，及任意$a,b\in\mathbb{R}$，成立

  $$\int(a\varphi+b\psi)=a\int\varphi+b\int\psi\tag{105}$$

- **可加性(additivity)**：对于简单函数φ和有限测度无交集合E和F，成立

  $$\int_{E\cup F}\varphi=\int_E\varphi+\int_F\varphi\tag{106}$$

- **单调性(monotonicity)**：对于简单函数φ和ψ，如果

  $$\varphi\le\psi\tag{107}$$

  那么

$$\int \varphi \leq \int \psi \tag{108}$$

- **三角不等式(triangle inequality)**：如果φ为简单函数，那么$|\varphi|$为简单函数，且

$$\left|\int \varphi\right| \leq \int |\varphi| \tag{109}$$

- 如果$\varphi = \psi$几乎处处成立，那么

$$\int \varphi = \int \psi \tag{110}$$

1.2 第二步：受有限测度集合上支持的有界函数

支集(support)：对于可测函数f，定义其支集为

$$\operatorname{supp}(f) = \{x : f(x) \neq 0\} \tag{111}$$

称f受E支持，如果对于任意$x \notin E$，成立$f(x) = 0$。

引理1.2：对于受E支持的有限测度有界函数，如果$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$是任意在$E$上被支持的一致有界简单函数序列并且几乎处处成立$\varphi_n \to f$，那么

- 极限

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \tag{112}$$

  存在。

- 如果几乎处处成立$f = 0$，那么

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n = 0 \tag{113}$$

受有限测度集合上支持的有界函数的Lebesgue积分(Lebesgue integral of the bounded functions that are supported on sets of finite measure)：对于受有限测度集合上支持的有界函数f，定义其Lebesgue积分为

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n \tag{114}$$

其中$\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$是一致绝对有界且任意$\varphi_n$受$f$支集支持的任意简单函数序列，并且当$n \to \infty$时几乎处处成立$\varphi_n \to f$。

对于$\mathbb{R}^d$上的有限测度集合E，以及f是有界且支集的测度有限的函数，定义

$$\int_E f = \int f\chi_E \tag{115}$$

命题1.3：对于受有限测度集合支持的有界函数f和g，成立以下命题。

- **线性(linearity)**：对于任意$a, b \in \mathbb{R}$，成立

$$\int (af + bg) = a\int f + b\int g \tag{116}$$

- **可加性(additivity)**：对于无交集合E和F，成立

$$\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f \tag{117}$$

- **单调性(monotonicity)**：如果$f \leq g$，那么

$$\int f \leq \int g \tag{118}$$

- **三角不等式(triangle inequality)**：如果$|f|$也是受有限测度集合支持的有界函数，那么

$$\left|\int f\right| \leq \int |f| \tag{119}$$

定理1.4 有界收敛定理(bounded convergence theorem)：对于一致有界且受有限测度集合E支持的可测函数序列$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$，如果当$n \to \infty$时，几乎处处成立$f_n \to f$，那么$f$几乎处处是受$E$支持的有界可测函数，并且当$n \to \infty$时，成立

$$\int |f_n - f| \to 0 \tag{120}$$

因此当$n \to \infty$时，成立

$$\int f_n \to \int f \tag{121}$$

1.3 回至Riemann可积函数

定理1.5：如果f在闭区间$[a,b]$是Riemann可积的，那么f是可测的，且

$$\int_{[a,b]}^{\mathcal{R}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{[a,b]}^{\mathcal{L}} f(x)\mathrm{d}x \tag{122}$$

其中左边是标准Riemann积分，右边是Lebesgue积分。

1.4 第三步：非负函数

如果f发散至∞，称其收敛于∞。

非负函数的Lebesgue积分(Lebesgue integral of the non-negative function)：对于可测非负函数f，定义其Lebesgue积分为

$$\int f = \sup_g \int g \tag{123}$$

其中g是满足$0 \leq g \leq f$的受有限测度集合支持的有界函数。

对于$\mathbb{R}^d$上的任意可测集合E，并且$f \geq 0$，定义

$$\int_E f = \int f\chi_E \tag{124}$$

命题1.6：

- **线性(linearity)**：如果$f, g \geq 0$，那么对于任意$a, b \in \mathbb{R}^+$，成立

$$\int (af+bg) = a\int f + b\int g \tag{125}$$

- **可加性(additivity)**：对于无交集合E和F，以及非负函数f，成立

$$\int_{E\cup F} f = \int_E f + \int_F f \tag{126}$$

- **单调性(monotonicity)**：如果$0 \leq f \leq g$，那么

$$\int f \leq \int g \tag{127}$$

- 如果g是可积的且$0 \leq f \leq g$，那么f是可积的。
- 如果f是可积的，那么对于几乎任意的x，成立$f(x) < \infty$。
- 如果$\int f = 0$，那么对于几乎任意的x，成立$f(x) = 0$。

引理1.7 Fatou引理：对于非负可测函数序列$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$，如果几乎处处成立

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \tag{128}$$

那么

$$\int f \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \tag{129}$$

推论1.8：对于非负可测函数f，以及非负可测函数序列$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$，如果对于任意$n\in\mathbb{N}^*$，成立$f_n \leq f$，且当$n\to\infty$时，几乎处处成立

$$f_n \to f \tag{130}$$

那么

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = f \tag{131}$$

推论1.9 单调收敛定理(monotone convergence theorem)：对于非负可测函数序列$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$，如果$f_n \nearrow f$，那么

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f \tag{132}$$

其中$f_n \nearrow f$表示对于任意$n\in\mathbb{N}^*$，几乎处处成立

$$f_n \leq f_{n+1} \tag{133}$$

以及几乎处处成立

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \tag{134}$$

推论1.10：对于级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$，如果对于任意$n\in\mathbb{N}^*$，f_n为非负可测函数，那么

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n \tag{135}$$

并且如果$\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n$收敛，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$几乎处处收敛。

1.5 第四步：一般情况

Lebesgue可积(Lebesgue integrable)：对于定义在$\mathbb{R}^d$上的实值函数f，称f是Lebesgue可积的，如果非负函数$|f|$是Lebesgue可积的。

Lebesgue积分(Lebesgue integral)：对于定义在$\mathbb{R}^d$上的实值函数f，定义其Lebesgue积分为

$$\int f = \int f^+ - \int f^- \tag{136}$$

其中

$$f^+ = \max(f, 0), \qquad f^- = \max(-f, 0) \tag{137}$$

命题1.11：Lebesgue积分满足**线性(linear)**，**可加性(additive)**，**单调性(monotonicity)**和**三角不等式(triangle inequality)**。

命题1.12：如果f是$\mathbb{R}^d$上的可积函数，那么对于任意$\varepsilon > 0$，成立

- 存在有限测度集合B，使得成立

$$\int_{B^c} |f| < \varepsilon \tag{138}$$

- **绝对连续性(absolute continuity)**：存在$\delta > 0$，使得当$m(E) < \delta$时，成立

$$\int_E |f| < \varepsilon \tag{139}$$

定理1.13 控制收敛定理(dominated convergence theorem)：对于可测函数序列$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$，如果当$n \to \infty$时，几乎处处成立$f_n \to f$，且存在非负可积函数$g$，使得对于任意$n \in \mathbb{N}^*$，成立$|f_n| \le g$，那么当$n \to \infty$时，成立

$$\int |f_n - f| \to 0 \tag{140}$$

因此当$n \to \infty$时，成立

$$\int f_n \to \int f \tag{141}$$

1.6 复值函数

定义在$\mathbb{R}^d$上的复值函数可以写成

$$f = u + iv \tag{142}$$

Lebesgue可积(Lebesgue integrable)：对于定义在$\mathbb{R}^d$上的复值函数$f = u + iv$，称f是Lebesgue可积的，如果实值函数$|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$是Lebesgue可积的。

Lebesgue积分(Lebesgue integral)：对于定义在$\mathbb{R}^d$上的复值值函数$f = u + iv$，定义其Lebesgue积分为

$$\int f = \int u + i \int v \tag{143}$$

2 可积函数的L^1空间

2.1 L^1空间

范数(norm)：对于定义在$\mathbb{R}^d$上的可积函数f，定义其范数为

$$\|f\| = \int |f| \tag{144}$$

L^1**空间** L^1 **Space**：记等价类$f \sim g$为几乎处处成立$f = g$，那么称具有上述范数的所有可积函数的等价类为L^1空间，记作$L^1(\mathbb{R}^d)$。

命题2.1：对于$f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$

- 对于任意$z \in \mathbb{C}$，成立$\|zf\| = |z|\|f\|$。
- $$\|f+g\| \le \|f\| + \|g\| \tag{145}$$
- $\|f\| = 0$当且仅当几乎处处成立$f = 0$。
- $d(f, g) = \|f - g\|$定义了$L^1(\mathbb{R}^d)$上的度量。

定理2.2 Riesz-Fischer定理：向量空间L^1关于度量d是完备的，即对于Cauchy序列封闭。

推论2.3：如果函数序列$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$在$L^1$中收敛于$f$，那么存在子序列$\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}^*}$，使得几乎处处成立

$$f_{n_k} \to f \tag{146}$$

稠密(dense)：称可积函数族$\mathcal{G}$为稠密的，如果对于任意$f \in L^1$和任意$\varepsilon > 0$，存在$g \in \mathcal{G}$，使得成立

$$\|f - g\| < \varepsilon \tag{147}$$

定理2.4：下列函数族在$L^1(\mathbb{R}^d)$中是稠密的。

- 简单函数族
- 阶跃函数族
- 受紧集支持的连续函数

2.2 不变性

平移不变性(translation-invariance)：对于定义在$\mathbb{R}^d$上的函数$f(x)$，如果$f(x)$是可积的，那么对于任意$h \in \mathbb{R}^d$，$f_h(x) = f(x-h)$也是可积的，并且

$$\int f(x-h) = \int f(x) \tag{148}$$

膨胀不变性(dilation-invariance)：对于定义在$\mathbb{R}^d$上的函数$f(x)$，如果$f(x)$是可积的，那么对于任意$\delta \in \mathbb{R}^+$，$f(\delta x)$也是可积的，并且

$$\delta^d \int f(\delta x) = \int f(x) \tag{149}$$

反射不变性(reflection-invariant)：对于定义在$\mathbb{R}^d$上的函数$f(x)$，如果$f(x)$是可积的，那么$f(-x)$也是可积的，并且

$$\int f(-x) = \int f(x) \tag{150}$$

2.3 平移与连续性

命题2.5：对于$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$，那么当$h \to 0$时，成立

$$\|f_h - f\| \to 0 \tag{151}$$

3 Fubini定理

切片(slices)：对于$x \in \mathbb{R}^{d_1}, y \in \mathbb{R}^{d_2}$，称如下为定义在$\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$上的函数$f$的分别关于$y$和$x$的切片

$$f^y(x) = f(x,y), \qquad f_x(y) = f(x,y) \tag{152}$$

同样对于$E \subset \mathbb{R}^{d_2} \times \mathbb{R}^{d_2}$，定义其切片为

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^{d_1} : (x,y) \in E\}, \qquad E_x = \{y \in \mathbb{R}^{d_2} : (x,y) \in E\} \tag{153}$$

3.1 定理的陈述和证明

定理3.1 Fubini定理：如果$f(x,y)$在$\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$上是可积的，那么对于几乎任意的$y \in \mathbb{R}^{d_2}$，成立

- 切片f^y在$\mathbb{R}^{d_1}$上是可积的。
- 函数$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\mathrm{d}x$在$\mathbb{R}^{d_2}$上是可积的。
- $$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} f \tag{154}$$

3.2 Fubini定理的应用

定理3.2 Tonelli定理：如果$f(x,y)$在$\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$上是非负可测的，那么对于几乎任意的$y \in \mathbb{R}^{d_2}$，成立

- 切片f^y在$\mathbb{R}^{d_1}$上是可测的。
- 函数$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\mathrm{d}x$在$\mathbb{R}^{d_2}$上是可测的。
- 在广义实数域$\overline{\mathbb{R}}$上成立

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{155}$$

推论3.3：如果$E \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$是可测的，那么对于几乎任意的$y \in \mathbb{R}^{d_2}$，切片

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^{d_1} : (x,y) \in E\} \tag{156}$$

是$\mathbb{R}^{d_1}$上的可测集合，同时$m(E^y)$是关于y的可测函数，并且

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} m(E^y)\mathrm{d}y \tag{157}$$

命题3.4：如果$E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^d$是可测的，且$m_*(E_2) > 0$，那么$E_1$是可测的。

推论3.5：如果$E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$且$E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$，那么

$$m_*(E_1 \times E_2) \le m_*(E_1)m_*(E_2) \tag{158}$$

命题3.6：如果$E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$和$E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$是可测的，那么$E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^d$是可测的，并且

$$m(E_1 \times E_2) = m(E_1)m(E_2) \tag{159}$$

推论3.7：如果函数f在$\mathbb{R}^{d_1}$上是可测的，那么函数$\tilde{f}(x,y) = f(x)$在$\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$上是可测的。

推论3.8：如果函数f在$\mathbb{R}^d$上是非负的，且

$$\mathcal{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^d : 0 \le y \le f(x)\} \tag{160}$$

那么

- f在$\mathbb{R}^d$上是可测的，当且仅当$\mathcal{A}$在$\mathbb{R}^{d+1}$是可测的。
- 如果f在$\mathbb{R}^d$上是可测的，那么

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{d}x = m(\mathcal{A}) \tag{161}$$

命题3.9：如果函数f在$\mathbb{R}^d$上是可测的，那么函数$\tilde{f}(x,y) = f(x-y)$在$\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$上是可测的。

4 Fourier反演公式

Fourier反演公式(Fourier inversion formula)：

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi i\xi x}\mathrm{d}x \tag{162}$$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-2\pi ix\xi}\mathrm{d}\xi \tag{163}$$

命题4.1：如果$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$，那么$\hat{f}$在$\mathbb{R}^d$是连续且有界的。

定理4.2：如果$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$且$\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$，那么对于任意的$x$，成立

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-2\pi ix\xi}\mathrm{d}\xi \tag{164}$$

推论4.3：如果对于任意$\xi \in \mathbb{R}^d$，成立$\hat{f}(\xi) = 0$，那么几乎处处成立$f = 0$。

引理4.4：如果$f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$，那么

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)\mathrm{d}x \tag{165}$$

三、微分和积分

1 积分的微分

1.1 Hardy-Littlewood极大函数

极大函数(maximal function)：对于定义在$\mathbb{R}^d$上的可积函数f，定义其在可测集B上的极大函数为

$$f^*(x)=\sup_{x\in B}\frac{1}{m(B)}\int_B|f(y)|\mathrm{d}y \tag{166}$$

定理1.1：对于定义在$\mathbb{R}^d$上的可积函数f，那么

- f^*为可积的。
- 对于几乎任意的$x\in\mathbb{R}^d$，成立$f^*(x)<\infty$。
- **弱不等式(weak-type inequality)**：对于任意$\alpha>0$，成立

$$m(\{x\in\mathbb{R}^d:f^*(x)>\alpha\})\leq\frac{3^d}{\alpha}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \tag{167}$$

  其中

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}=\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\mathrm{d}x \tag{168}$$

引理1.2 Vitali覆盖论证(Vitali covering argument)：如果$\mathcal{B}=\{B_1,\cdots,B_n\}$为$\mathbb{R}^d$中的有限开集族，那么存在不相交的子开集$B_{i_1},\cdots,B_{i_k}$，使得成立

$$m\left(\bigcup_{j=1}^n B_j\right)\leq 3^d\sum_{j=1}^k m(B_{i_j}) \tag{169}$$

1.2 Lebesgue微分定理

定理1.3 Lebesgue微分定理(The Lebesgue differentiation theorem)：如果$f\in L^1(\mathbb{R}^d)$，那么对于几乎任意的$x\in\mathbb{R}^d$，成立

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}}\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\mathrm{d}y=f(x) \tag{170}$$

局部可积(locally integrable)：定义在$\mathbb{R}^d$上的函数f，称f是局部可积的，如果对于任意球$B\in\mathbb{R}^d$，函数$f\chi_B$是可积的。

定理1.4：如果$f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$，那么对于几乎任意的$x\in\mathbb{R}^d$，成立

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}}\frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\mathrm{d}y=f(x) \tag{171}$$

Lebesgue密度点(a point of Lebesgue density)：对于可测集E，称$x\in\mathbb{R}^d$为E的Lebesgue密度点，如果成立

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{m(B\cap E)}{m(B)} = 1 \tag{172}$$

推论1.5：如果$E\subset\mathbb{R}^d$为可测集，那么

- 对于几乎任意$x\in E$，x都是E的密度点。
- 对于几乎任意$x\notin E$，x都不是E的密度点。

Lebesgue集(Lebesgue set)：对于$f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$，$f$的Lebesgue集定义为

$$\left\{x\in\mathbb{R}^d : \lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\mathrm{d}y = 0\right\} \tag{173}$$

- 如果f在x点处连续，那么x在其Lebesgue集中。
- 如果x在f的Lebesgue集中，那么

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\mathrm{d}y = f(x) \tag{174}$$

推论1.6：如果$f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$，那么对于几乎任意的$x\in\mathbb{R}^d$，$x$都在$f$的Lebesgue集中。

规律收缩(shrink regularly)/有限偏心(bounded eccentricity)：称集族$\{U_\alpha\}$为规律收缩至x点或在x点处为有限偏心的，如果存在常数$c>0$，使得对于任意U_α，存在球B，成立

$$x\in B,\qquad U_\alpha\subset B,\qquad m(U_\alpha)\geq cm(B) \tag{175}$$

推论1.7：如果$f\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$，并且对于几乎任意的$f$的Lebesgue集中的点$x$，集族$\{U_\alpha\}$规律收缩至$x$，那么

$$\lim_{\substack{m(U_\alpha)\to 0\\ x\in U_\alpha}} \frac{1}{m(U_\alpha)}\int_{U_\alpha} f(y)\mathrm{d}y = f(x) \tag{176}$$

2 良核和恒等近似

核函数(kernel)及其与函数的卷积：对于核K_δ，记其与可积函数f的**卷积(convolution)**为

$$(f*K_\delta)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)K_\delta(y)\mathrm{d}y \tag{177}$$

良核(good kernel)：称核K_δ为良核，如果其可积，并且对于$\delta>0$，成立

- $$\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{178}$$
- 存在与δ有关的常数$A>0$，使得成立

$$\int_{\mathbb{R}^d} |K_\delta(x)|\mathrm{d}x \leq A \tag{179}$$

- 对于任意$\eta>0$，成立

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{|x|\geq\eta}|K_\delta(x)|\mathrm{d}x=0 \tag{180}$$

良核的性质：对于有界函数f的任意连续点x处，成立

$$\lim_{\delta\to 0}(f*K_\delta)(x)=f(x) \tag{181}$$

良核定义的**加强**：称核K_δ为良核，如果其可积，且$\delta>0$，同时成立

- $$\int_{\mathbb{R}^d}K_\delta(x)\mathrm{d}x=1 \tag{182}$$
- 存在$A>0$，使得成立
$$|K_\delta(x)|\leq A\delta^{-d} \tag{183}$$
- 对于任意$x\in\mathbb{R}^d$，存在$A>0$，使得成立
$$|K_\delta(x)|\leq\frac{A\delta}{|x|^{d+1}} \tag{184}$$

恒等近似(approximation to the identity)：称K_δ为f的恒等近似，如果当当$\delta\to 0$时，成立

$$f*K_\delta\to f \tag{185}$$

此定义来自如下事实：当$\delta\to 0$时，映射$f\mapsto f*K_\delta$趋于恒等映射$f\mapsto f$。

Dirac δ函数：对于$\delta>0$，定义函数

$$K_\delta(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\delta}, & x\in[-\delta,\delta]\\ 0, & x\in(-\infty,-\delta)\cup(\delta,\infty)\end{cases} \tag{186}$$

那么（不严格的）定义Dirac δ函数为

$$\mathcal{D}=\lim_{\delta\to 0^+}K_\delta \tag{187}$$

事实上，Dirac δ函数为

$$\mathcal{D}(x)=\begin{cases}\infty, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases},\qquad\int_{\mathbb{R}}\mathcal{D}(x)\mathrm{d}x=1 \tag{188}$$

Dirac δ函数的卷积恒等性(the identity for convolutions)：

$$f*\mathcal{D}=f \tag{189}$$

定理2.1：如果$\{K_\delta\}_{\delta>0}$是恒等函数的近似，且f在$\mathbb{R}^d$上可积，那么当$\delta\to 0$时，对于f的Lebesgue集中的点（特别的，几乎任意的$\mathbb{R}^d$中的点）处，成立

$$f*K_\delta\to f \tag{190}$$

引理2.2：如果f在$\mathbb{R}^d$上可积，如果对于f的Lebesgue集中的点x处，令

$$\mathcal{A}(r)=\frac{1}{r^d}\int_{|y|\leq r}|f(x-y)-f(x)|\mathrm{d}y,\quad r>0 \tag{191}$$

那么$\mathcal{A}$连续且有界，同时

$$\lim_{r\to 0}\mathcal{A}(r)=0 \tag{192}$$

定理2.3：如果$\{K_\delta\}_{\delta>0}$是恒等函数的近似，且f在$\mathbb{R}^d$上可积，那么卷积$f*K_\delta$是可积的，并且当$\delta\to 0$时，成立

$$\|f*K_\delta-f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\to 0 \tag{193}$$

3 函数的微分

3.1 有界变差函数

划分(partitions)：对于区间$[a,b]$，称其一个划分为

$$a=t_0<\cdots<t_n=b,\quad \forall n\in\mathbb{N}^* \tag{194}$$

区间$[a,b]$的所有划分记为集合$\mathcal{P}[a,b]$。

可求长的(rectifiable)：对于$\mathbb{R}^2$上的曲线$\gamma:z(t)=(x(t),y(t))$，其中$t\in[a,b]$且$x(t)$和$y(t)$为在$[a,b]$上的连续实值函数，称曲线γ为可求长的，如果对于$[a,b]$的任意划分$\mathcal{P}\in\mathcal{P}[a,b]$，存在$M<\infty$，使得成立

$$\sum_{k=1}^{n}|z(t_k)-z(t_{k-1})|\le M \tag{195}$$

其中对于任意$k\in\{1,\cdots,n\}$，$|z(t_k)-z(t_{k-1})|$定义为两点$z(t_k)$和$z(t_{k-1})$的距离。

曲线长(length)：如果曲线$\gamma:z(t)=(x(t),y(t))$为可求长的，其中$t\in[a,b]$，定义其曲线长为

$$\ell(\gamma)=\sup_{\mathcal{P}[a,b]}\sum_{k=1}^{n}|z(t_k)-z(t_{k-1})| \tag{196}$$

对于$a\le A\le B\le b$，定义

$$\ell(A,B)=\sup_{\mathcal{P}[A,B]}\sum_{k=1}^{n}|z(t_k)-z(t_{k-1})| \tag{197}$$

容易知道$\ell(A,B)$是连续函数，且关于A单调递减，关于B单调递增。

变差(variation)：对于定义在$[a,b]$上的复值连续函数$F(t)$，定义其关于划分$\mathcal{P}\in\mathcal{P}[a,b]$的变差为

$$\sum_{k=1}^{n}|F(t_k)-F(t_{k-1})| \tag{198}$$

有界变差(bounded variation)：对于定义在$[a,b]$上的复值连续函数$F(t)=x(t)+iy(t)$，称函数F为有界变差的，如果对于$[a,b]$的任意划分$\mathcal{P}\in\mathcal{P}[a,b]$，存在$M<\infty$，使得成立

$$\sum_{k=1}^{n}|F(t_k)-F(t_{k-1})|\le M \tag{199}$$

- 实值单调且有界函数是有界变差的。
- 导函数有界的函数是有界变差的。

定理3.1：定义在$[a,b]$上的曲线$(x(t),y(t))$是可求长的，当且仅当$x(t)$和$y(t)$为有界变差的。

总变差(total variation)：函数F定义在$[a,x]\subset[a,b]$上的总变差定义为

$$T_F(a,x)=\sup_{\mathcal{P}[a,x]}\sum_{k=1}^{n}|F(t_k)-F(t_{k-1})| \tag{200}$$

- 如果一个有界变差函数是连续的，那么其总变差也是连续的。

正变差(positive variation)：函数F定义在$[a,x]\subset[a,b]$上的正变差定义为

$$P_F(a,x)=\sup_{\mathcal{P}[a,x]}\sum_{F(t_k)\geq F(t_{k-1})}F(t_k)-F(t_{k-1}) \tag{201}$$

负变差(negative variation)：函数F定义在$[a,x]\subset[a,b]$上的负变差定义为

$$N_F(a,x)=\sup_{\mathcal{P}[a,x]}\sum_{F(t_k)\geq F(t_{k-1})}F(t_k)-F(t_{k-1}) \tag{202}$$

引理3.2：如果F是定义在$[a,b]$上的实值有界变差函数，那么对于任意$x\in[a,b]$，成立

$$F(x)-F(a)=P_F(a,x)-N_F(a,x) \tag{203}$$

$$T_F(a,x)=P_F(a,x)+N_F(a,x) \tag{204}$$

定理3.3：实值函数F在$[a,b]$上是有界变差的，当且仅当F是两个单调递增有界函数的差。

定理3.4：如果F在$[a,b]$上是有界变差的，那么F几乎处处可微。

引理3.5 旭日引理(rising sun lemma)：对于定义在$\mathbb{R}$上的实值连续函数G，记

$$E=\{x\in\mathbb{R}:G(x+h)>G(x),\quad\exists h=h_x>0\} \tag{205}$$

如果E非空，那么E为开集，于是E可以表示为可数个不交有限开集的并

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n) \tag{206}$$

如果(a_n,b_n)为有限开区间，那么

$$G(a_n)=G(b_n) \tag{207}$$

推论3.6：对于定义在$[a,b]$上的实值连续函数G，记

$$E=\{x\in\mathbb{R}:G(x+h)>G(x),\quad\exists h>0\} \tag{208}$$

那么或E为空，或E为开。如果E为开集，那么E可以表示为可数个不交有限开集的并

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n) \tag{209}$$

那么当$a_n\neq a$时，成立

$$G(a_n)=G(b_n) \tag{210}$$

当$a_n=a$时，成立

$$G(a_n) \leq G(b_n) \tag{211}$$

Dini导数：定义

$$\Delta_h F(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \tag{212}$$

定义Dini导数为

$$D^+F(x) = \limsup_{h \to 0^+} \Delta_h F(x) \tag{213}$$

$$D_+F(x) = \liminf_{h \to 0^+} \Delta_h F(x) \tag{214}$$

$$D^-F(x) = \limsup_{h \to 0^-} \Delta_h F(x) \tag{215}$$

$$D_-F(x) = \liminf_{h \to 0^-} \Delta_h F(x) \tag{216}$$

Dini引理：如果F在$[a,b]$上是单调递增的有界连续函数，那么对于几乎任意的$x \in [a,b]$，成立

$$D^+F(x) < \infty \tag{217}$$

$$D^+F(x) \leq D_-F(x) \iff D^-F(x) \leq D_+F(x) \tag{218}$$

推论3.7：如果F单调递增且连续，那么F几乎处处可微，同时F'可测，且

$$\int_a^b F'(x) \mathrm{d}x \leq F(b) - F(a) \tag{219}$$

特别的，如果F在$\mathbb{R}$上有界，那么F'在$\mathbb{R}$上可积。

Cantor-Lebesgue函数：对于Cantor集

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \tag{220}$$

其中

$$C_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}] \tag{221}$$

记

$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{3^n}{2^n}(x - ka_k^{(n)} + (k-1)b_k^{(n)}), & x \in [a_k^{(n)}, b_k^{(n)}], 1 \leq k \leq 2^n \\ \frac{k}{2^n}, & x \in [b_k^{(n)}, a_{k+1}^{(n)}], 1 \leq k \leq 2^n - 1 \end{cases} \tag{222}$$

定义Cantor-Lebesgue函数为

$$F = \lim_{n \to \infty} F_n \tag{223}$$

- $$F : [0,1] \to [0,1] \tag{224}$$
- $$F(0) = 1, \qquad F(1) = 1 \tag{225}$$
- F连续且单调递增。

- 几乎处处成立$F' = 0$。
- F为有界变差的。
- $$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x \neq F(b) - F(a) \tag{226}$$

3.2 绝对连续函数

绝对连续(absolutely continuous)：称定义在$[a,b]$上的函数F为绝对连续的，如果对于任意$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得对于满足

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \tag{227}$$

的任意不交开区间族$\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^n$，成立

$$\sum_{k=1}^{n}|F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon \tag{228}$$

- 绝对连续函数是一致连续的，进而是连续的。
- 有界区间上的绝对连续函数是有界变差的，且其总变差是绝对连续的。
- 对于可积函数f，积分函数$F(x) = \int_a^x f(y)\mathrm{d}y$是绝对连续的。

定理3.8：如果F在$[a,b]$上是绝对连续的，那么F'几乎处处存在。此外，如果几乎处处成立$F' = 0$，那么F为常函数。

Vitali覆盖(Vitali covering)：称球集族$\mathcal{B}$为集合E的Vitali覆盖，如果对于任意$x \in E$以及任意$\eta > 0$，存在球$B \in \mathcal{B}$，使得满足$x \in B$且$m(B) < \eta$。

引理3.9 Vitali覆盖论证(Vitali covering argument)：如果E为有限测度集，且$\mathcal{B}$为E的Vitali覆盖，那么对于任意$\delta > 0$，存在有限多个不交球$B_1, \cdots, B_n \in \mathcal{B}$，使得成立

$$\sum_{k=1}^{n} m(B_k) \geq m(E) - \delta \tag{229}$$

推论3.10：如果E为有限测度集，且$\mathcal{B}$为E的Vitali覆盖，那么对于任意$\delta > 0$，存在有限多个不交球$B_1, \cdots, B_n \in \mathcal{B}$，使得成立

$$m(E - \bigcup_{k=1}^{n} B_k) < 2\delta \tag{230}$$

定理3.11：如果F是$[a,b]$上的绝对连续函数，那么几乎处处存在F'，同时F'可积，且对于任意$x \in [a,b]$，成立

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(y)\mathrm{d}y \tag{231}$$

反之，如果f在$[a,b]$上可积，那么存在绝对连续函数F，使得几乎处处成立$F' = f$。事实上，取

$$F(x) = \int_a^x F'(y)\mathrm{d}y \tag{232}$$

3.3 跳跃函数的可微性

引理3.12：有界单调函数F在闭区间$[a,b]$上存在至多可数个不连续点。

跳跃函数(jump function)：对于定义在闭区间$[a,b]$上有界单调递增函数F，记其不连续点序列为$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，定义

$$\alpha_n = F(x_n^+) - F(x_n^-) \tag{233}$$

$$\theta_n = \frac{F(x_n) - F(x_n^-)}{\alpha_n} \in [0,1] \tag{234}$$

$$j_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_n \\ \theta_n, & x = x_n \\ 1, & x > x_n \end{cases} \tag{235}$$

那么定义与F相关的跳跃函数为

$$J(x) = J_F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n j_n(x) \tag{236}$$

- 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \le F(b) - F(a) < \infty \tag{237}$$

  因此级数J是绝对收敛且一致收敛的。

引理3.13：如果F在区间$[a,b]$上是有界单调递增的，那么

- F和J的不连续点相同。
- 差$F-J$是单调递增且连续的。

定理3.14：如果J是定义在闭区间$[a,b]$上有界单调递增函数F的跳跃函数，那么J'几乎处处存在，且几乎处处成立$J'=0$。

4 可求长曲线与等周不等式

定理4.1：对于定义在$[a,b]$上的曲线$\gamma:(x(t),y(t))$，如果$x(t)$和$y(t)$是绝对连续的，那么曲线γ是可求长的，并且其长为

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\mathrm{d}t \tag{238}$$

命题4.2：对于定义在$[a,b]$上的复值函数$F(t)=x(t)+iy(t)$，如果F是绝对连续的，那么

$$T_F(a,b) = \int_a^b |F'(t)|\mathrm{d}t \tag{239}$$

弧长参数化(arc-length parametrization)：对于定义在$[a,b]$上的可求长参数化曲线$\gamma:(x(t),y(t))$，考虑弧长参数变换

$$s = s(t) = L(a,t), \quad s \in [0, L(\gamma)] \tag{240}$$

那么定义

$$\tilde{x}(s)=x(t), \qquad \tilde{y}(s)=y(t) \tag{241}$$

定理4.3：对于定义在$[a,b]$上的可求长曲线$\gamma:(x(t),y(t))$，考虑弧长参数化曲线$\gamma:(\tilde{x}(s),\tilde{y}(s))$，那么$\tilde{x}$和$\tilde{y}$是绝对连续的，且几乎处处成立$(\tilde{x}'(s))^2+(\tilde{y}'(s))^2=1$，同时

$$\ell(\gamma)=\int_0^{L(\gamma)}\sqrt{(\tilde{x}'(s))^2+(\tilde{y}'(s))^2}\mathrm{d}t \tag{242}$$

4.1 曲线的Minkowski含量

简单曲线(simple curve)：称定义在$[a,b]$上的曲线$\gamma:z(t)=(x(t),y(t))$为简单的，如果对于任意$t\in[a,b)$，映射$t\mapsto z(t)$为单射，且$z(a)=z(b)$。

准简单曲线(quasi-simple curve)：称定义在$[a,b]$上的曲线$\gamma:z(t)=(x(t),y(t))$为准简单的，如果对于有限个点外，映射$t\mapsto z(t)$为单射。

Minkowski含量(Minkowski content)：对于紧集$K\subset\mathbb{R}^2$，如果存在极限

$$\lim_{\delta\to 0^+}\frac{m(K^\delta)}{2\delta} \tag{243}$$

那么称该极限为K的Minkowski含量，记作$\mathcal{M}(K)$，其中

$$K^\delta=\{x\in\mathbb{R}^2:d(x,K)<\delta\} \tag{244}$$

定理4.4：如果定义在$[a,b]$上的曲线$\Gamma:z(t)$为准简单曲线，那么Γ存在Minkowski含量，当且仅当Γ是可求长的。在此情况，成立

$$\mathcal{M}(\Gamma)=\ell(\Gamma) \tag{245}$$

命题4.5：对于定义在$[a,b]$上的准简单曲线$\Gamma:z(t)$，定义

$$M_*(\Gamma)=\liminf_{\delta\to 0^+}\frac{m(\Gamma^\delta)}{2\delta} \tag{246}$$

如果$M_*(\Gamma)<\infty$，那么Γ是可求长的，且

$$\mathcal{M}(\Gamma)\geq\ell(\Gamma) \tag{247}$$

引理4.6：对于任意定义在$[a,b]$上的曲线$\Gamma:z(t)$，如果记$\Delta=|z(b)-z(a)|$，那么$m(\Gamma^\delta)\geq 2\delta\Delta$。

命题4.7：如果定义在$[a,b]$上的曲线$\Gamma:z(t)$是可求长的，那么定义

$$M^*(\Gamma)=\limsup_{\delta\to 0^+}\frac{m(\Gamma^\delta)}{2\delta} \tag{248}$$

成立

$$\mathcal{M}(\Gamma)\leq\ell(\Gamma) \tag{249}$$

4.2 等周不等式

定理4.8：如果$\Omega\subset\mathbb{R}^2$为有界开集，且其边界$\overline{\Omega}-\Omega$为可求长曲线$\Gamma$，那么

$$4\pi m(\Omega)\leq\ell(\Gamma)^2 \tag{250}$$

事实上，如果$\Omega\subset\mathbb{R}^2$为有界开集，且其边界$\overline{\Omega}-\Omega$为曲线$\Gamma$，那么

$$4\pi m(\Omega) \leq \mathcal{M}^*(\Gamma)^2 \tag{251}$$

四、Hilbert空间：简介

1 Hilbert空间L^2

$L^2(\mathbb{R}^d)$**空间**：$L^2(\mathbb{R}^d)$空间定义为$\mathbb{R}^2$上**平方可积函数(square integrable functions)**的集合，即

$$L^2(\mathbb{R}^d) = \left\{ f : \int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 < \infty \right\} \tag{252}$$

$L^2(\mathbb{R}^d)$**范数(norm)**：$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$的范数定义为

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{253}$$

本章如无特殊说明，以$\|\cdot\|$表示$L^2(\mathbb{R}^d)$范数。

$L^2(\mathbb{R}^d)$**内积(inner product)**：$f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$的内积定义为

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^d} f\overline{g} \tag{254}$$

命题1.1 $L^2(\mathbb{R}^d)$**空间的性质**：

- $L^2(\mathbb{R}^d)$为向量空间。
- 对于任意$f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$，$f\overline{g}$可积，且成立**Cauchy-Schwarz不等式**

$$|(f, g)| \le \|f\|\|g\| \tag{255}$$

- 如果固定$g \in L^2(\mathbb{R}^d)$，那么映射$f \mapsto (f, g)$是线性映射，并且$(f, g) = \overline{(g, f)}$
- **三角不等式**：对于任意$f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$，成立

$$\|f + g\| \le \|f\| + \|g\| \tag{256}$$

度量(metric)：对于$f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$，定义其度量为

$$d(f, g) = \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{257}$$

Cauchy序列(Cauchy sequence):称序列$\{f_n\} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$为Cauchy序列，如果

$$\lim_{n,m \to \infty} d(f_n, f_m) = 0 \tag{258}$$

而且，称列$\{f_n\} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$收敛于$f$，如果

$$\lim_{n \to \infty} d(f_n, f) = 0 \tag{259}$$

定理1.2：$L^2(\mathbb{R}^d)$空间是完备的，即对Cauchy序列封闭。

定理1.3：$L^2(\mathbb{R}^d)$空间是可分的，即存在可数序列$\{f_n\} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$，使得其张成的线性空间在$L^2(\mathbb{R}^d)$中是稠密的。

2 Hilbert空间

Hilbert空间：称集合$\mathcal{H}$为Hilbert空间，如果满足

- $\mathcal{H}$是$\mathbb{C}$或$\mathbb{R}$上的**向量空间。**
- $\mathcal{H}$具有**内积**$(\cdot,\cdot)$，使得满足
    - 给定$g \in \mathcal{H}$，映射$f \mapsto (f,g)$在$\mathcal{H}$上是线性映射。
    - $(f,g)=\overline{(g,f)}$
    - $(f,f) \geq 0$

  令$\|f\|=(f,f)^{\frac{1}{2}}$。
- $\|f\|=0$，当且仅当$f=0$。
- **Cauchy-Schwarz不等式**：

$$|(f,g)| \leq \|f\|\|g\| \tag{260}$$

- **三角不等式**：

$$\|f+g\| \leq \|f\|+\|g\| \tag{261}$$

- $\mathcal{H}$关于度量$d(f,g)=\|f-g\|$是**完备的。**
- $\mathcal{H}$是**可分的。**

2.1 正交性

正交的(orthogonal)或垂直(perpendicular)：称$f,g \in \mathcal{H}$关于内积$(\cdot,\cdot)$是正交的或垂直的，记作$f \perp g$，如果

$$(f,g)=0 \tag{262}$$

称$f \in \mathcal{H}$和$\mathcal{H} \subset \mathcal{S}$关于内积$(\cdot,\cdot)$是正交的，记作$f \perp \mathcal{S}$，如果对于任意$g \in \mathcal{S}$，成立

$$(f,g)=0 \tag{263}$$

标准正交(orthonormal)：称至多可数集合$\{e_n\} \subset \mathcal{H}$为标准正交的，如果

$$(e_i,e_j)=\begin{cases}1, & i=j \\ 0, & i \neq j\end{cases} \tag{264}$$

Bessel不等式：对于标准正交集合$\{e_n\} \subset \mathcal{H}$，以及$f \in \mathcal{H}$，成立

$$\|f\|^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty}|(f,e_n)|^2 \tag{265}$$

标准正交基(orthonormal basis)：称可数集合$\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$为$\mathcal{H}$的标准正交基，如果$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$的有限张成空间在$\mathcal{H}$上是稠密的。

维度(dimension)：称Hilbert空间$\mathcal{H}$中一组标准正交基的个数为$\mathcal{H}$的维度，记作$\dim(\mathcal{H})$。

命题2.1　Pythagoras定理：如果$f \perp g$，那么

$$\|f+g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2 \tag{266}$$

命题2.2：如果$\{e_n\} \subset \mathcal{H}$是标准正交的，且$f=\sum a_n e_n \in \mathcal{H}$，那么

$$\|f\|^2=\sum |a_n|^2 \tag{267}$$

事实上，对于任意$n \in \mathbb{N}^*$，成立$a_n=(f,e_n)$。

定理2.3：以下关于$\mathcal{H}$的标准正交基$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$的命题等价的。

- $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$的有限张成空间在$\mathcal{H}$上是稠密的。
- 如果$f \in \mathcal{H}$满足对于任意$n \in \mathbb{N}^*$，成立$(f, e_n) = 0$，那么$f = 0$。
- 对于$f \in \mathcal{H}$，如果记$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} (f, e_k)e_k$，那么

$$\lim_{n \to \infty} S_n(f) = f \tag{268}$$

- **Parseval等式**：

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, e_n)|^2 \tag{269}$$

定理2.4：任意Hilbert空间存在标准正交基。

2.2 酉映射

酉映射(unitary mapping)：对于两个Hilbert空间$\mathcal{H}$和$\mathcal{H}'$，定义内积分别为$(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$和$(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}'}$，定义范数分别为$\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$和$\|\cdot\|_{\mathcal{H}'}$，称映射$U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$为酉映射，如果满足

- 映射U是线性的，即$U(\alpha f + \beta g) = \alpha U(f) + \beta U(g)$。
- U为双射。
- 对于任意$f \in \mathcal{H}$，成立$\|U(f)\|_{\mathcal{H}'} = \|f\|_{\mathcal{H}}$，这等价于对于任意$f, g \in \mathcal{H}$，成立$(U(f), U(g))_{\mathcal{H}'} = (f, g)_{\mathcal{H}}$。

酉等价(unitarily equivalent)或酉同构(unitarily isomorphic)：称两个Hilbert空间$\mathcal{H}$和$\mathcal{H}'$是酉等价或酉同构，如果存在酉映射$U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$。

推论2.5：任意两个无限维Hilbert空间是酉等价的。

推论2.6：两个有限维Hilbert空间是酉等价的，当且仅当其维度相等。

2.3 准Hilbert空间

准Hilbert空间(pre-Hilbert space)：称集合$\mathcal{H}_0$为准Hilbert空间，如果满足

- $\mathcal{H}_0$是$\mathbb{C}$或$\mathbb{R}$上的**向量空间**。
- $\mathcal{H}_0$具有**内积**$(\cdot,\cdot)$，使得满足
  - 给定$g \in \mathcal{H}_0$，映射$f \mapsto (f, g)$在$\mathcal{H}$上是线性映射。
  - $(f, g) = \overline{(g, f)}$
  - $(f, f) \geq 0$

  令$\|f\| = (f, f)^{\frac{1}{2}}$。
- $\|f\| = 0$，当且仅当$f = 0$。
- **Cauchy-Schwarz不等式**：

$$|(f, g)| \leq \|f\|\|g\| \tag{270}$$

- **三角不等式**：

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \tag{271}$$

- $\mathcal{H}_0$是**可分的**。

命题2.7：如果$\mathcal{H}_0$为具有内积$(\cdot,\cdot)_0$的准Hilbert空间，那么存在具有内积$(\cdot,\cdot)$的Hilbert空间$\mathcal{H}$，，使得成立

- $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$
- 对于任意$f, g \in \mathcal{H}_0$，成立$(f, g)_0 = (f, g)$。
- $\mathcal{H}_0$在$\mathcal{H}$中是稠密的。

$\mathcal{H}$称为$\mathcal{H}_0$的**完备化**。

3 Fourier级数和Fatou定理

3.1 Fourier级数

Fourier级数：对于$f \in L^1([-\pi, \pi])$，定义

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-inx}\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{272}$$

那么f的Fourier级数为

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{inx} \tag{273}$$

定理3.1：对于在$[-\pi, \pi]$上可积的函数f，成立

- 如果对于任意$n \in \mathbb{Z}$，成立$a_n = 0$，那么几乎处处成立$f = 0$。
- 几乎处处成立

$$\lim_{r \to 1^-} a_n r^{|n|}\mathrm{e}^{inx} = f(x) \tag{274}$$

定理3.2：对于$f \in L^2([-\pi, \pi])$，成立

- **Parseval等式**：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x \tag{275}$$

- 映射如下映射为酉映射：

$$U : L^2([-\pi, \pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z}) \tag{276}$$
$$U(f) \mapsto \{a_n\} \tag{277}$$

- f的Fourier级数以L^2范数收敛于f，即

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(f(x))|^2 \mathrm{d}x \tag{278}$$

  其中

$$S_n(f(x)) = \sum_{|k| \le n} a_n \mathrm{e}^{ikx} \tag{279}$$

3.2 Fatou定理

径向极限(radial limit)：对于定义在单位开圆盘$\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$上的函数$F$，称$F$在单位圆周上的点$\mathrm{e}^{i\theta}$处存在径向极限，其中$\theta\in[-\pi,\pi]$，如果存在极限

$$\lim_{r\to 1^-}F(r\mathrm{e}^{i\theta}) \tag{280}$$

Hardy空间：Hardy空间$H^2(\mathbb{D})$是包含所有单位开圆盘$\mathbb{D}$上全纯的函数f，其中f满足

$$\sup_{0\le r\le 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(r\mathrm{e}^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta<\infty \tag{281}$$

定义范数为

$$\|F\|_{H^2\mathbb{D}}=\left(\sup_{0\le r\le 1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F(r\mathrm{e}^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{2}} \tag{282}$$

- $F\in H^2(\mathbb{D})$当且仅当F可以写成

  $$F=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \tag{283}$$

  其中

  $$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty \tag{284}$$

- $$\|F\|^2_{H^2\mathbb{D}}=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 \tag{285}$$
- $$H^2(\mathbb{D})\subset\mathcal{H} \tag{286}$$

定理3.3 Fatou定理：如果函数F有界，且$F\in H^2(\mathbb{D})$，那么F几乎处处存在径向极限。

4 闭子空间和正交投影

闭的(closed)：称子空间$\mathcal{S}\subset\mathcal{H}$为闭的，如果对于Cauchy序列封闭。

事实上，有限维Hilbert空间的任意子空间为闭的，且Hilbert空间的任意闭子空间为Hilbert空间。

引理4.1：如果$\mathcal{S}\subset\mathcal{H}$为$\mathcal{H}$的闭子空间，且$f\in\mathcal{H}$，那么

- 存在非平凡的$g_0\in\mathcal{S}$，使得成立

  $$\|f-g_0\|=\inf_{g\in\mathcal{S}}\|f-g\| \tag{287}$$

- 对于此g_0，成立$f-g_0\perp\mathcal{S}$

正交补(orthogonal complement)：对于子空间$\mathcal{S}\subset\mathcal{H}$，定义其正交补为

$$\mathcal{S}^{\perp}=\{f\in\mathcal{H}:f\perp\mathcal{S}\} \tag{288}$$

和(sum)：定义子空间$\mathcal{S},\mathcal{T}\subset\mathcal{H}$的和为

$$\mathcal{S}+\mathcal{T}=\{f+g:f\in\mathcal{S},g\in\mathcal{T}\} \tag{289}$$

直和(direct sum)：称子空间$\mathcal{S},\mathcal{T}\subset\mathcal{H}$的和$\mathcal{S}+\mathcal{T}$为直和，如果对于任意$f\in\mathcal{S}+\mathcal{T}$，存在且存在唯一$g\in\mathcal{S}$和$h\in\mathcal{T}$，使得成立$f=g+h$；等价于$\mathcal{S}\cap\mathcal{T}=\{0\}$。记作$\mathcal{S}\oplus\mathcal{T}$

命题4.2：对于闭子空间$\mathcal{S}\subset\mathcal{H}$，成立

$$\mathcal{H}=\mathcal{S}\oplus\mathcal{S}^{\perp} \tag{290}$$

正交投影(orthogonal projection)：对于$\mathcal{H}=\mathcal{S}\oplus\mathcal{S}^{\perp}$，定义$\mathcal{S}$上的正交投影为$P_{\mathcal{S}}(f)=g$，其中$f=g+h$，且$g\in\mathcal{S}$和$h\in\mathcal{S}^{\perp}$。

- $f\mapsto P_{\mathcal{S}}(f)$是线性映射。
- 对于任意$f\in\mathcal{S}$，成立$P_{\mathcal{S}}(f)=f$。
- 对于任意$f\in\mathcal{S}^{\perp}$，成立$P_{\mathcal{S}}(f)=0$。
- 对于任意$f\in\mathcal{H}$，成立$\|P_{\mathcal{S}}(f)\|\leq\|f\|$。

5 线性变换

线性变换(linear transformation)（线性算子(linear transformation)）：对于Hilbert空间$\mathcal{H}_0$和$\mathcal{H}$，称映射$T:\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}$为线性变换（线性算子），如果满足

$$T(af+bg)=aT(f)+bT(g) \tag{291}$$

有界线性算子(bounded linear operator)：称线性算子$T:\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}$为有界的，如果存在$M>0$，使得对于任意$f\in\mathcal{H}_0$，成立

$$\|T(f)\|_{\mathcal{H}}\leq M\|f\|_{\mathcal{H}_0} \tag{292}$$

范数(norm)：有界线性算子$T:\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}$的范数定义为

$$\|T\|=\inf\{M>0:\forall f\in\mathcal{H}_0,\|T(f)\|_{\mathcal{H}}\leq M\|f\|_{\mathcal{H}_0}\} \tag{293}$$

引理5.1：对于有界线性算子$T:\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}$，成立

$$\|T\|=\sup\{|(T(f),g)|:\|f\|\leq 1,\|g\|\leq 1\} \tag{294}$$

连续线性算子(continuous linear operator)：称线性算子$T:\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}$为连续的，如果对于任意$f_n\to f$，成立$T(f_n)\to T(f)$。事实上，线性保证了在原点连续即成立在定义域连续。

命题5.2：线性算子的有界性和连续性等价。

5.1 线性泛函和Riesz表示定理

线性泛函(linear functional)：线性变换$\ell:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$称为线性泛函。

定理5.3 Riesz表示定理(Riesz representation theorem)：如果线性变换$\ell:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$为线性泛函，那么存在且存在唯一$g\in\mathcal{H}$，使得对于任意$f\in\mathcal{H}$，成立

$$\ell(f)=(f,g) \tag{295}$$

同时

$$\|\ell\|=\|g\| \tag{296}$$

5.3 伴随

伴随(adjoint)：称有界线性变换$T^*:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$为有界线性变换$T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$的伴随，如果满足

- $$(T(f),g)=(f,T^*(g)) \tag{297}$$
- $$\|T\|=\|T^*\| \tag{298}$$
- $$(T^*)^*=T \tag{299}$$

命题5.4：有界线性变换存在且存在唯一伴随。

事实上，任取$g\in\mathcal{H}$，定义线性泛函

$$\ell(f)=(T(f),g) \tag{300}$$

由Riesz表示定理，存在且存在唯一$h\in\mathcal{H}$，使得成立

$$\ell(f)=(f,g) \tag{301}$$

定义

$$T^*:g\mapsto h \tag{302}$$

对称线性算子(symmetric linear operator)：称有界线性变换$T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$为对称的，如果$T=T^*$
。

伴随的性质：

- 对称线性算子$T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$满足
$$\|T\|=\sup\{(T(f),f):\|f\|=1\} \tag{303}$$
- 对于有界线性算子$T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$和$S:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$，定义其积为
$$(TS)(f)=T(S(f)) \tag{304}$$
  那么
$$(TS)^*=S^*f^* \tag{305}$$

5.3 例

特征值(eigenvalue)和特征向量(eigenvector)：称非零元素$\varphi\in\mathcal{H}$为线性变换$T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$的特征向量，如果存在特征值$\lambda\in\mathbb{C}$，使得成立

$$T(\varphi)=\lambda\varphi \tag{306}$$

对角线性变换(diagonalized linear transformation)：称线性变换$T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$为对角的，如果对于其标准正交基$\{\varphi\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{H}$，存在$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$，使得对于任意$n\in\mathbb{N}^*$，成立

$$T(\varphi_n)=\lambda_n\varphi_n \tag{307}$$

- 如果
$$f\sim\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n \tag{308}$$
  那么

$$T(f) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n \varphi_n \tag{309}$$

- $$\|T\| = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |\lambda_n| \tag{310}$$
- T^*的特征值序列为$\{\overline{\lambda}_n\}_{n=1}^{\infty}$。
- T为对称的，当且仅当$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$。
- T为酉的，当且仅当对于任意$n \in \mathbb{N}^*$，成立$|\lambda_n| = 1$。
- T为正交投影，当且仅当对于任意$n \in \mathbb{N}^*$，成立$\lambda_n = 0$或$\lambda_n = 1$。

积分算子(integral operator)（Hilbert-Schmidt算子）：定义积分算子$T : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$为

$$T(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) f(y) \mathrm{d}y \tag{311}$$

其中K为核。

命题5.5：对于以K为核的Hilbert-Schmidt算子$T : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$，成立如下命题。

- 如果$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$，那么对于几乎任意的$x \in \mathbb{R}^d$，函数$y \mapsto K(x, y)f(y)$是可积的。
- T是有界的，且

$$\|T\| \leq \|K\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)} \tag{312}$$

- $\overline{K(x, y)}$为伴随T^*的核。

6 紧致算子

紧致空间(compact space)：称$X \subset \mathcal{H}$为紧致的，如果对于任意序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$，存在子序列$\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$收敛于$X$。

紧致线性算子(compact linear operator)：称线性算子$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$为紧致的，如果

$$B = \{f \in \mathcal{H} : \|f\| \leq 1\} \tag{313}$$

的像

$$T(B) = \{T(f) : f \in B\} \tag{314}$$

为紧集。等价的，称线性算子$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$为紧致的，如果对于$\mathcal{H}$中的任意有界序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$，存在收敛子序列。

命题6.1：对于有界线性算子$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$，如下命题成立

- 如果S在$\mathcal{H}$上紧致，那么ST和TS在$\mathcal{H}$上紧致。
- 如果$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$为紧致线性算子序列，且$T_n \to T$，那么T为紧致线性算子。
- 如果T为紧致线性算子，那么存在有限秩算子序列$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得成立$T_n \to T$。
- T是紧致的，当且仅当T^*是紧致的。
- 如果T为对角线性变换，那么T为紧致的，当且仅当$|\lambda_n| \to 0$。
- 任意Hilbert-Schmidt算子为紧致的。

定理6.2 谱定理(spectral theorem)：如果$T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$为紧致对称线性算子，那么$T$存在由特征向量组成的标准正交基$\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{H}$。并且，对应的特征值$\lambda_n\to 0$。

引理6.3：对于有界对称线性算子$T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$，如下命题成立。

- T的特征值为实数。
- T的不同特征值对应的特征向量正交。

引理6.4：如果T为紧致的，且$\lambda\neq 0$，那么$T-\lambda I$的零空间是有限维的。同时，T的特征值构成至多可数集$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$，且$\lambda_n\to 0$。换言之，对于任意$\varepsilon>0$，$\{\lambda_n:|\lambda_n|>\varepsilon\}$对应的特征向量张成的线性空间为有限维的。

引理6.5：如果T为非零紧致对称算子，那么$||T||$或$-||T||$为T的特征值。

五、Hilbert空间：例

1 L^2上的Fourier变换

Schwartz类(Schwartz claa)：Schwartz类$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$由光滑函数$f$构成，并且对于任意$\alpha$和$\beta$，$x^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta f$在$\mathbb{R}^d$上有界。

定理1.1：对于定义在$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$上的Fourier变换$\mathcal{F}_0$，存在非平凡延拓$\mathcal{F}$，使得$\mathcal{F}:L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)$为酉映射。特别的，对于任意$f\in L^2(\mathbb{R}^d)$，成立

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}=\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{315}$$

定理1.2：$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$在$L^2(\mathbb{R}^d)$上稠密，即对于任意$f\in L^2(\mathbb{R}^d)$，存在$\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{S}$，使得成立$f_n\to f$。

引理1.3：对于分别具有内积$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$的Hilbert空间$\mathcal{H}_1$和$\mathcal{H}_2$，如果$\mathcal{S}$为$\mathcal{H}_1$的稠密子空间，且线性变换$T_0:\mathcal{S}\to\mathcal{H}_2$满足存在$c>0$，使得对于任意$f\in\mathcal{S}$，成立$\|T_0(f)\|_2\le c\|f\|_1$，那么$T_0$可延拓为非平凡线性变换$T:\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2$，满足对于任意$f\in\mathcal{H}_1$，成立$\|T(f)\|_2\le c\|f\|_1$。

2 上半平面的Hardy空间

Hardy空间：对于$\mathbb{R}_+^2=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}z>0\}$，定义Hardy空间为

$$H^2(\mathbb{R}_+^2)\left\{F:F\text{在}\mathbb{R}_+^2\text{上全纯},\sup_{y>0}\int_{\mathbb{R}}|F(x+iy)|^2\mathrm{d}x<\infty\right\} \tag{316}$$

其范数定义为

$$\|F\|=\left(\sup_{y>0}\int_{\mathbb{R}}|F(x+iy)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \tag{317}$$

定理2.1：$H^2(\mathbb{R}_+^2)$中的函数F由

$$F(z)=\int_0^\infty\hat{F}_0(\xi)\mathrm{e}^{2\pi i\xi z}\mathrm{d}\xi,\quad \mathrm{Im}z>0 \tag{318}$$

给出，其中$\hat{F}_0\in L^2(0,\infty)$。同时

$$\|F\|_{H^2(\mathbb{R}_+^2)}=\|\hat{F}_0\|_{L^2(0,\infty)} \tag{319}$$

引理2.2：如果$F\in H^2(\mathbb{R}_+^2)$，那么对于任意$\delta>0$，F在$\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}z\ge\delta\}$有界。

定理2.3：如果$F\in H^2(\mathbb{R}_+^2)$，那么极限$\lim_{y\to0}F(x+iy)$在如下两种意义存在。

- 作为$L^2(\mathbb{R})$范数的极限。
- 作为几乎任意x的极限。

3 常系数偏微分方程

常系数偏微分方程(constant coe–cient partial difierential equations)：

$$L(u)=f \tag{320}$$

其中

$$L=\sum_{|k|\leq n}a_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k,\quad a_k\in\mathbb{C} \tag{321}$$

伴随算子(adjoint operator)：

$$L^*=\sum_{|k|\leq n}(-1)^{|k|}\overline{a_k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \tag{322}$$

3.1 弱解

引理3.1：$C_0^\infty(\Omega)$以$\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$范数在$L^2(\Omega)$上稠密。

3.2 主定理和关键估计

定理3.2：对于有界开集$\Omega\subset\mathbb{R}^d$，如果给定常系数线性偏微分算子$L$，那么在$L^2(\Omega)$上存在有界线性算子$K$，使得对于任意$f\in L^2(\Omega)$，在弱意义上成立

$$L(Kf)=f \tag{323}$$

即$u=K(f)$为$L(u)=f$的一个弱解。

引理3.3：存在常数c，使得对于任意$\psi\in C_0^\infty(\Omega)$，成立

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega)}\leq c\|L^*\psi\|_{L^2(\Omega)} \tag{324}$$

引理3.4：对于首一多项式P，如果F在$\mathbb{C}$上全纯，那么

$$|F(0)|^2\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|P(\mathrm{e}^{i\theta})F(\mathrm{e}^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta \tag{325}$$

4 Dirichlet原理

Dirichlet问题(Dirichlet problem)：如果$\Omega\subset\mathbb{R}^2$为有界开集，$f$在其边界$\partial\Omega$上连续，那么找到函数$u(x,y)$，使得成立

$$\begin{cases}\Delta u=0, & (x,y)\in\Omega\\ u=f, & (x,y)\in\partial\Omega\end{cases} \tag{326}$$

Dirichlet积分：

$$\mathcal{D}(U)=\int_\Omega|\nabla U|^2=\int_\Omega\left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{327}$$

命题4.1：如果存在$u\in C^2(\overline{\Omega})$使得对于任意满足$U|_{\partial\Omega}=f$的$U\in C^2(\overline{\Omega})$，成立$\mathcal{D}(u)\leq\mathcal{D}(U)$，那么$u$在$\Omega$上调和。

4.1 调和函数

调和函数(harmonic function)：称定义在开集$\Omega \subset \mathbb{R}^d$上的函数$u$是调和的，如果$u$二阶连续可微，且

$$\Delta u = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = 0 \tag{328}$$

弱调和(weakly harmonic)：称定义在开集$\Omega \subset \mathbb{R}^d$上的函数$u$是弱调和的，如果对于任意$\psi \in C_0^\infty(\Omega)$，$(u, \Delta\psi) = 0$。

均值性质(mean-value property)：称定义在开集$\Omega \subset \mathbb{R}^d$上的函数$u$满足均值性质，如果对于任意以$x_0$为心开球$B$满足$\overline{B} \subset \Omega$，成立

$$u(x_0) = \frac{1}{m(B)} \int_B u(x) \mathrm{d}x \tag{329}$$

定理4.2：如果连续函数u在开集$\Omega \subset \mathbb{R}^d$上调和，那么$u$满足均值性质。反之，满足均值性质的连续函数是调和的。

定理4.3：对于任意开集$\Omega \subset \mathbb{R}^d$上的弱调和函数$u$，存在在$\Omega$上几乎处处成立$\tilde{u} = u$的$\tilde{u}$，使得成立$\tilde{u}$在$\Omega$上调和。

推论4.4 极大值原理(maximum principle)：如果u在有界开集$\Omega \subset \mathbb{R}^d$上为连续且调和的，那么

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| = \max_{x \in \partial\Omega} |u(x)| \tag{330}$$

引理4.5：

$$\int_B (v\Delta u - u\Delta v)\eta = \int_B (u(\nabla v \cdot \nabla \eta) - v(\nabla u \cdot \nabla \eta)) \tag{331}$$

其中

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_d} \right) \tag{332}$$

引理4.6：如果u在$\Omega \subset \mathbb{R}^d$上满足均值性质，且闭球$\{x \in \mathbb{R}^d : |x - x_0| \le r\} \subset \Omega$，那么

$$u(x_0) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x_0 - ry)\varphi(y)\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} u(x_0 - y)\varphi_r(y)\mathrm{d}y = (u * \varphi_r)(x_0) \tag{333}$$

其中$\varphi_r(y) = r^{-d}\varphi(\frac{y}{r})$。

推论4.7：调和则无穷可微。

推论4.8：如果Ω上的调和函数序列$\{u_n\}_{n=1}^\infty$在Ω内闭一致收敛于u，那么u也是调和的。

4.2 边值问题和Dirichlet原理

推论4.9：对于有界开集$\Omega \subset \mathbb{R}^d$，如果$v$在$\overline{\Omega}$上连续，且$v(\partial\Omega) = \{0\}$，那么

$$\int_\Omega |v|^2 \le c_\Omega \int_\Omega |\nabla v|^2 \tag{334}$$

推论4.10：如果f在紧集$K \subset \mathbb{R}^d$上连续，那么存在$\mathbb{R}^d$上的光滑函数序列$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$，使得f_n在K上一致收敛于f。

引理4.11：如果f在紧集$K \subset \mathbb{R}^d$上连续，那么存在$\mathbb{R}^d$上的连续函数g，使得成立$g|_{\partial K} = f$。

定理4.12：对于满足外三角形条件的有界开集$\Omega \subset \mathbb{R}^2$，如果$f$在$\partial\Omega$上连续，那么对于在$\overline{\Omega}$上的连续函数$u$，$u|_{\partial\Omega} = f$的边值问题$\Delta u = 0$为唯一可解的。

命题4.13：对于任意满足外三角形条件的有界开集$\Omega \subset \mathbb{R}^2$，存在常数$c_2 < 1 < c_1$，使得成立：如果$z \in \Omega$到$\partial\Omega$的距离为$\delta$，那么对于任意在$\overline{\Omega}$上连续且$v|_{\partial\Omega} = 0$的$v$，成立

$$\int_{B_{c_1\delta(z)}} |v|^2 \leq C\delta^2 \int_{B_{c_2\delta(z)\cap\Omega}} |\nabla v|^2 \tag{335}$$

其中C仅取决于Ω的直径和三角形的参数。

6 抽象测度和积分理论

1 抽象测度空间

测度空间(measure space)：称三元组$(X, \mathcal{M}, \mu)$为测度空间，其中

- $\mathcal{M} \subset X$为σ-代数，即对补运算和可数并运算封闭的非空子集。
- $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$为测度，满足可数可加性，即对于互不相交的可数集$\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$，成立

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \tag{336}$$

1.1 外测度和Caratheodory定理

外测度(exterior measure or outer measure)：称映射$\mu_* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$为外测度，如果满足如下性质。

- **空集的零测性**：$\mu_*(\varnothing) = 0$
- **单调性**：如果$E_1 \subset E_2$，那么$\mu_*(E_1) \leq \mu_*(E_2)$。
- **次可数可加性**：对于可数集$\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$，成立

$$\mu_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_*(E_n) \tag{337}$$

Caratheodory可测的：称$E \subset X$是Caratheodory可测的，如果对于任意$F \subset X$，成立

$$\mu_*(A) = \mu_*(E \cap F) + \mu_*(E^c \cap F) \tag{338}$$

定理1.1　Caratheodory定理：对于集合X上的外测度μ_*，满足Caratheodory可测条件的集合构成σ-代数$\mathcal{M}$，进而定义在$\mathcal{M}$上的μ_*为测度。

完备(complete)：测度空间$(X, \mathcal{M}, \mu)$是完备的，即对于任意$F \in \mathcal{M}$，如果$\mu(F) = 0$且$E \subset F$，那么$E \in \mathcal{M}$。

1.2 度量外测度

度量空间(metric space)：称二元组(X, d)为度量空间，其中度量为$d : X \times X \to [0, \infty)$且满足如下性质。

- **正则性**：当且仅当$x = y$时，$d(x, y) = 0$。
- **对称性**：对于任意$x, y \in X$，成立$d(x, y) = d(y, x)$。
- **三角不等式**：对于任意$x, y, z \in X$，成立$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$。

Borel σ-代数：Borel σ-代数$\mathcal{B}_X$为包含测度空间X中所有开集的最小生成σ-代数。

Borel测度：称定义在度量空间X上的Borel σ-代数$\mathcal{B}_X$上的测度为Borel测度。

集合间的距离(distance)：对于测度空间(X, d)中的两个集合$A, B \subset X$，定义其距离为

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\} \tag{339}$$

度量外测度(metric exterior measure)：对于测度空间X，称X上的外测度μ_*为度量外测度，如果对于任意满足$d(A,B)>0$的$A,B\subset X$，成立

$$\mu_*(A\cup B)=\mu_*(A)+\mu_*(B) \tag{340}$$

定理1.2：如果μ_*是度量空间(X,d)上的度量外测度，那么X上的Borel集是可测的；因此，定义在X上的Borel σ-代数$\mathcal{B}_X$上的μ_*为测度。

命题1.3：对于Borel σ-代数$\mathcal{B}_X$上的Borel测度μ，如果对于任意$r<\infty$，成立$\mu(B_r)<\infty$，那么对于任意$\varepsilon>0$和$B\in\mathcal{B}_X$，存在开集$\mathcal{O}\supset B$和闭集$F\subset B$，成立$\mu(\mathcal{O}-B)<\varepsilon$和$\mu(B-F)<\varepsilon$。

1.3 延拓定理

123