Part1 Transform

Xiao Liang

2020 年 1 月 27 日

1 傅里叶级数

傅里叶级数本质上就是一种特殊形式的函数展开，类似泰勒定理，其基底函数取三角函数中的正弦和余弦函数。在傅里叶级数中，任意两个不同的基底函数在 $[0,2\pi]$ 的范围内是正交的。

1.1 周期函数的傅里叶级数

1.1.1 一般情况

一个傅里叶级数在一般情况下表示为

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.1}$$

其中，$a_0, a_n\ and\ b_n$ 是展开系数。假定一个周期为 2π 的函数 $f(x)$ 可以按照Equation 1.1展开，则通过傅里叶级数的基底函数相互正交的性质以及在一个周期内 $\cos nx\ and\ \sin nx$ 积分为零的性质可以得到：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{1.2}$$

1.1.2 傅里叶级数的收敛性

Equation 1.1的收敛性问题由狄利克雷（Dirichlet）定理描述，该定理的完整叙述是：

假定

（1）$f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内除了有限个点外有定义且单值；

（2）$f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 外是周期函数，周期为 2π；

（3）$f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内分段连续，即 $f(x)$ 分段光滑，

则傅里叶级数收敛于

$$\begin{aligned}
a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)&=f(x)\quad (continuous\ point\ at\ x)\\
a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)&=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\quad (break\ point\ at\ x)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

狄利克雷条件是傅里叶级数的充分条件，但不是必要条件，在实际问题中这些条件通常是满足的。

1.1.3 傅里叶级数的推广

上述傅里叶级数可以推广到以 $2L$ 为周期的函数，在这种情况下，Equation 1.1变为

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{1.4}$$

相应的，展开系数为

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(t)\mathrm{d}t\\
a_n&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\cos\frac{n\pi}{L}t\mathrm{d}t\\
b_n&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(t)\sin\frac{n\pi}{L}t\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{1.5}$$

1.2 半幅傅里叶级数

在许多实际问题中，函数 $\phi(x)$ 是一个定义在有限区间 $0<x<L$ 上的任意函数，因为它不具有周期性，上一节的结果是不适用的。这样的函数能够展开为半幅傅里叶级数（half-range Fourier series）。

如果 $\phi(x)$ 在 $0<x<L$ 内是分段光滑的，则 $\phi(x)$ 有正弦函数展开式

$$\phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi x}{L} \tag{1.6}$$

和余弦函数展开式

$$\phi(x)=D_0+\sum_{n=1}^{\infty}D_n\cos\frac{n\pi x}{L} \tag{1.7}$$

其中，展开系数为

$$\begin{aligned}
C_n&=\frac{2}{L}\int_0^L\phi(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x\quad (n=1,2,3,\cdots)\\
D_0&=\frac{1}{L}\int_0^L\phi(x)\mathrm{d}x\\
D_n&=\frac{2}{L}\int_0^L\phi(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x\quad (n=1,2,3,\cdots)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

展开系数的推导方式同上一节的展开系数的推导，首先得到

$$\int_0^L\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x=\frac{L}{2}\delta_{mn} \tag{1.9}$$

然后可以证明

$$\begin{aligned}\int_0^L \phi(x)\sin\frac{m\pi x}{L}\mathrm{d}x &= \int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L}\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{L}{2}\sum_{n=1}^{\infty} C_n\delta_{mn} = \frac{L}{2}C_m\end{aligned} \tag{1.10}$$

以及

$$\int_0^L \phi(x)\mathrm{d}x = D_0\int_0^L \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \underbrace{\int_0^L \cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x}_{=0} \tag{1.11}$$

剩下那个完全是照葫芦画瓢，这里不赘述。

半幅傅里叶级数的收敛性也服从狄利克雷条件Equation 1.3.

对于具体问题，特别是数学物理方法的不同边值问题，半幅傅里叶级数呈现不同的形式，除了标准形式外，还可以取

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L} \\ \phi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\end{aligned} \tag{1.12}$$

的形式，其中的展开系数为

$$\begin{aligned}C_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \phi(x)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\mathrm{d}x \\ D_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \phi(x)\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\mathrm{d}x\end{aligned} \tag{1.13}$$

1.3 傅里叶积分

本节讨论一个定义在 $(-\infty,\infty)$ 区间的非周期函数的傅里叶展开问题。傅里叶级数扩展到连续变化的情况即是傅里叶积分。

考虑一个满足绝对可积条件的周期函数，周期为 $2L$，则它的傅里叶级数为

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x + b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{1.14}$$

现在来对该级数进行操作，使其成为定义在 $(-\infty,\infty)$ 的非周期函数，最简单的途径是令 $L\to\infty$，则

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow{L\to\infty} 0 \tag{1.15}$$

其中用到了绝对可积函数的性质（$f(x)\to 0$，当 $x\to\pm\infty$）。进一步，令 $\omega_n = \frac{n\pi}{L}$，则

$$\Delta\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{\pi}{L} \tag{1.16}$$

求和间隔 $\Delta\omega$ 在 $L\to\infty$ 时将变成微元 $\mathrm{d}\omega$，而变量 ω_n 趋于连续变化，**傅里叶级数则转变成积分的形式**，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cdots\Delta\omega \xrightarrow{L\to\infty} \int_0^{\infty}\cdots\mathrm{d}\omega \tag{1.17}$$

在这样的基础上，可以得到

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}x &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L}\left[\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi}{L}t\mathrm{d}t\right]\cos\frac{n\pi}{L}x \\ &\xrightarrow{L\to\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\omega\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\mathrm{d}t\right]\cos\omega x\end{aligned} \tag{1.18}$$

同理

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{L}x \xrightarrow{L\to\infty}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\omega\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\mathrm{d}t\right]\sin\omega x \tag{1.19}$$

由此可以将Equation 1.14写成

$$f(x)=\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]\mathrm{d}\omega \tag{1.20}$$

其中

$$\begin{aligned}A(\omega)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\mathrm{d}t\\ B(\omega)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{1.21}$$

Equation 1.20就是函数 $f(x)$ 的傅里叶积分表示，其中的展开系数由Equation 1.21确定。

在上述由级数到积分的转变中，具体的变化是：① $L\to\infty$ 和 $f(x)$ 的绝对可积性质导致系数 $a_0=0$；② 计算系数的积分限发生了变化，变为全实数范围进行积分；③ 分立变化的求和变量变成了连续变化的积分变量，而确保级数可以转变为积分的条件而是绝对可积条件，这个条件进一步确保了系数的存在性。

为了使傅里叶积分式Equation 1.20具有Equation 1.3所确定的收敛行为，则需要满足狄利克雷定理成立的条件。

物理上通常认为，$f(x)$ 代表一个“信号”，而系数 $A(\omega)$ 和 $B(\omega)$ 则是信号 $f(x)$ 的频谱分布函数，它们分别相应于正交分量 $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$. 由信号到频谱的过程，通常称为**傅里叶分析**。

绝对可积条件是傅里叶积分存在的充分条件，但不是必要条件。

1.4 例题

1、求下面的函数的傅里叶积分表示式

$$f(x)=\begin{cases}1 & (|x|\leqslant 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases} \tag{1.22}$$

首先计算频谱分布函数，考虑到Equation 1.22表示一个偶函数，故 $B(\omega)=0$，而

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos\omega t\mathrm{d}t=\frac{2\sin\omega}{\pi\omega} \tag{1.23}$$

于是傅里叶积分表示式为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}\mathrm{d}\omega \tag{1.24}$$

然后根据狄利克雷定理可以得到

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega\cos\omega x}{\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}1 & (|x|<1)\\ \frac{1}{2} & (|x|=1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}\tag{1.25}$$

特别地，在 $x=0$，有

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}\tag{1.26}$$

2、求下列函数的傅里叶积分表达式

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & (|x|<\pi/2)\\ 0 & (|x|>\pi/2)\end{cases}\tag{1.27}$$

首先按照套路计算频谱分布函数，由于是偶函数，$B(\omega)=0$，而

$$\begin{aligned}A(\omega)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\cos\omega x\mathrm{d}x\\&=\frac{2\cos(\omega\pi/2)}{\pi\left(1-\omega^2\right)}\end{aligned}\tag{1.28}$$

这个结果允许 $\omega=1$，这时可以使用洛必达法则，得到

$$\lim_{\omega\to1}\frac{2\cos(\omega\pi/2)}{\pi\left(1-\omega^2\right)}=\frac{1}{2}\lim_{\omega\to1}\frac{\sin(\omega\pi/2)}{\omega}=\frac{1}{2}\tag{1.29}$$

由此得到该函数的傅里叶积分表达式为

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\omega\pi/2)}{1-\omega^2}\cos\omega x d\omega\tag{1.30}$$

在实数范围内没有间断点，所以可以得到

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos(\omega\pi/2)}{1-\omega^2}\cos\omega x\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\cos x & (|x|<\pi/2)\\ 0 & (|x|>\pi/2)\end{cases}\tag{1.31}$$

noindent 特别地，在 $x=0$ 处，有

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(\omega\pi/2)}{1-\omega^2}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}\tag{1.32}$$

2　傅里叶变换

傅里叶变换是基于傅里叶积分的一类变换，本质上是把一个函数经过积分运算变为另一个函数，两个函数具有一一对应性，由此可以简化运算和得到另一个方面的对应的信息。

2.1　傅里叶变换