电路与电子技术基础

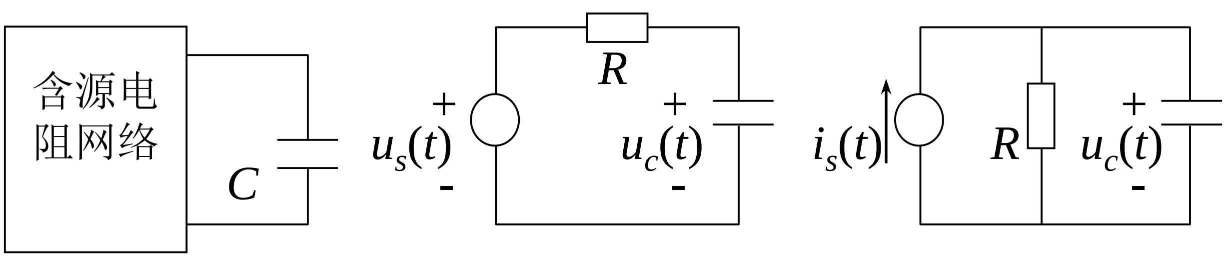
第四章 动态电路分析方法

第四章 动态电路分析方法

研究对象：含**动态元件**电路的**过渡过程**分析方法；
关注焦点：零输入响应和零状态响应的物理意义及求解方法。
特别提示：由于电路分析的基本变量是电压和电流，对于含有动态元件的电路，电容电压和电感电流是**连续量**，在列方程时，一般以电容电压或电感电流为变量。（最后一个例题说明）

一、一阶电路的分析

定义：含有一个动态元件的线性电路。通常是用一阶线性常系数微分方程来描述。



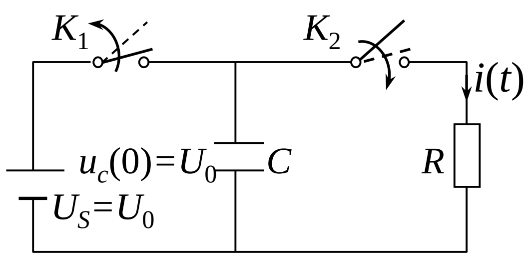
(a) (b) (c)

(a)单一动态元件网络； (b)用戴维南定理简化； (c)用诺顿定理简化

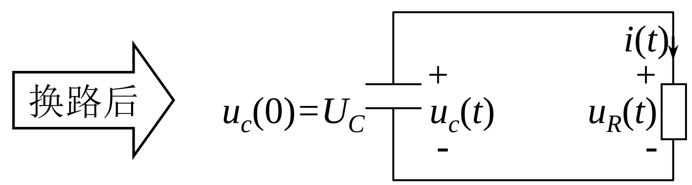
1. 一阶电路的零输入响应

物理意义：所谓零输入响应就是没有外部激励输入，仅仅依靠动态元件中的储能产生的响应。换句话说是求解微分方程在初始条件不为零时的齐次解。

换路：在开关切换的前、后时刻，通常用t_{0-}或t_{0+}表示。



已充电的电容与电阻相联接



RC电路$u_c(0)=U_0$

由上右图。根据KVL得：$u_c(t)-u_R(t)=0$

由欧姆定理得：$u_R(t)=Ri(t)$

由电容特性知：$i(t)=-C\dfrac{du_c(t)}{dt}$ 及 $u_c(0)=U_0$

代入整理可得：

$$u_c(t)+RC\frac{du_c(t)}{dt}=0 \qquad t\geq 0$$

及 $u_c(0)=U_0$

解以上线性齐次常微分方程可得：

$$u_C(t) = ke^{-\frac{1}{RC}t}$$

再利用初始条件，最后解得一阶电路的零输入响应为：

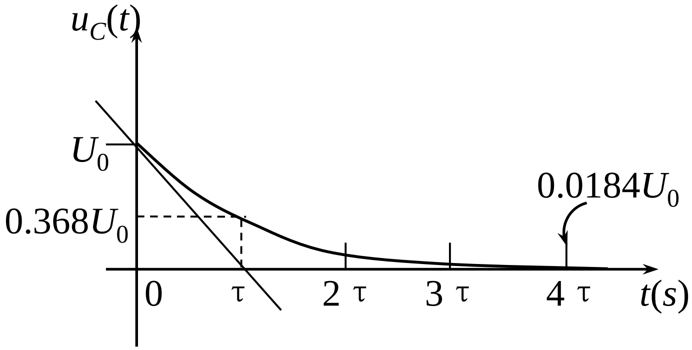
$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \qquad t \geq 0$$

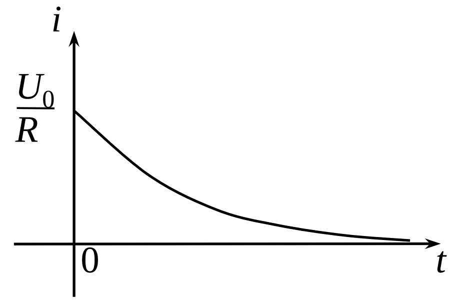
几点说明：

(1)RC的量纲为时间，故通常称$\tau=RC$为电路时间常数。

(2)当$t=4\tau$时，$u_c(4\tau)=0.0184U_0$，一般认为衰减到零。

(3)$1/\tau$ 称为电路的固有频率





思考问题：

(1)若求出$u_c(t)$，如何求$i_c(t)$？

(2)为什么说RC的量纲是时间？

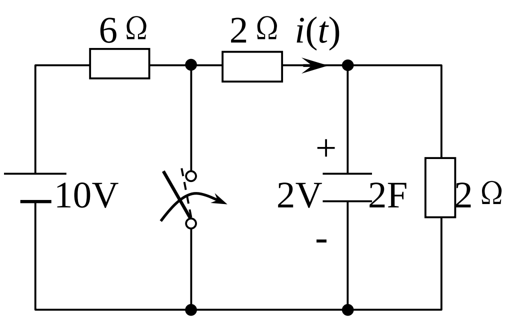
(3) $u_c(t)$ 不能跳变， $i_c(t)$能否跳变？

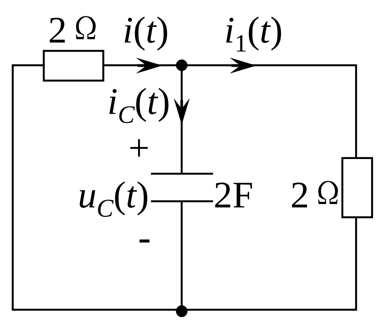
(4)零输入响应是由什么引起的？

(5)能否根据求解RC电路的过程求解RL电路？

对于RL电路的分析请同学们自己看书理解，RL电路与RC电路是对称的，同学们只需注意：①RL电路中的连续量是$i_l(t)$；②电感是存储磁场能量的，是以电感电流的形式表现的，初始条件是$i_l(0)$；③时间常数$\tau = L/R$。

例：t=0时开关闭合，求电路中的$i(t)$





$$u_C(t) = u_C(0)e^{-t/RC} = 2e^{-t/2} \qquad t \ge 0$$

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = -2e^{-t/2} \qquad t \ge 0$$

$$i_1(t) = \frac{u_C(t)}{R} = e^{-t/2} \qquad t \ge 0$$

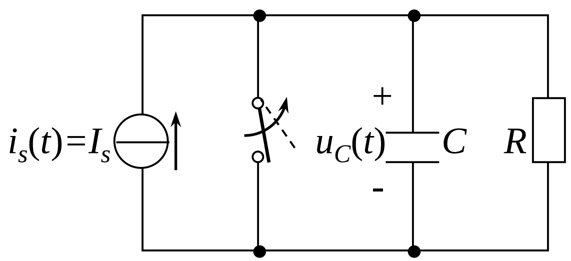
$$i(t) = i_1(t) + i_C(t) = -e^{-t/2} \qquad t \ge 0$$

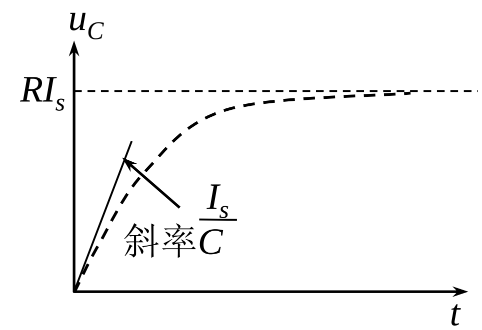
$$u_C(0) = 2\mathrm{V}, \qquad \tau = \mathrm{RC} = 1\times 2 = 2\,\mathrm{s}$$

2. 一阶电路的零状态响应

物理意义：所谓零状态响应就是在初始条件为零的情况下，由施加与电路的输入所产生的响应。换句话说是求微分方程初始条件为零时的非齐次解。

下图中K闭合，当t=0时，开关打开，此时$u_C(0)=0$，然后分析电路响应。以电容C两端的电压作为求解对象，则





$$C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{u_C(t)}{R}=I_s \qquad t\geq 0$$

初始时刻： $\left.\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+}=\frac{I_s}{C}$

稳态以后： $u_C\approx RI_s$

根据公式对电路进行定性分析可以得到上图u_C变化曲线，若要得到u_C的解析表达式，可通过解微分方程得到。

通过解微分方程得到一阶电路零状态响应的解析表达式。

由于电路有外部激励，因此微分方程是非齐次方程，对于非齐次微分方程，其解由齐次解和特解两部分组成。

解齐次方程：

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{R}u_C=0 \qquad \text{或改写为：} \qquad \frac{\mathrm{d}u_C}{u_C}=-\frac{1}{RC}\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad u_{ch}=ke^{-\frac{1}{RC}t} \qquad (t\geq 0)$$

常数k由完全解和初始条件所决定。

特解与外施激励函数有相同的形式，本例中激励函数是恒定电流，所以可以认为特解是常数。设$u_{cp}=A$，将其代入微分方程得：

$$\frac{1}{R}A=I_s \qquad \Rightarrow \qquad u_{cp}=A=RI_s$$

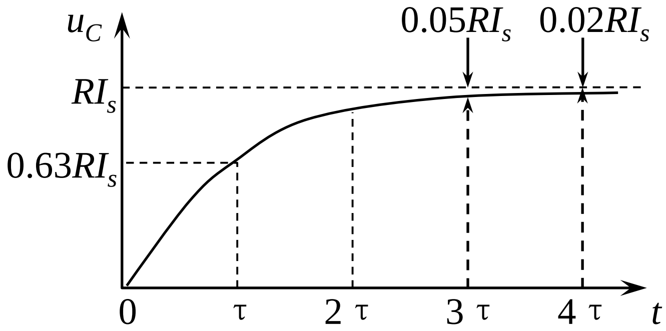
完全解为：

$$u_C=u_{ch}+u_{cp}=ke^{-\frac{1}{RC}t}+RI_s$$

由初始条件$u_C(0)=0$代入上式，可以确定$k=-Ri_s$，故零状态响应为：

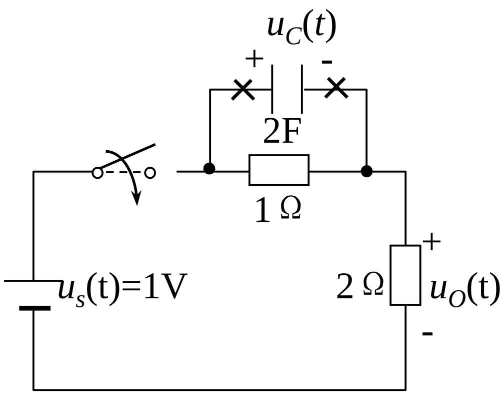
$$u_C=u_{ch}+u_{cp}=-RI_se^{-\frac{1}{RC}t}+RI_s=RI_s(1-e^{-\frac{1}{RC}t}) \qquad (t\geq 0)$$

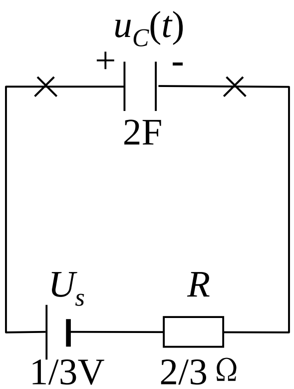
一阶零状态电路的响应曲线如图所示。



对于*RL*电路的分析，根据对称性原则，同学们自学。

例：电路如图所示，已知$u_C(0)=0$。在$t=0$时开关闭合，求$t \geq 0$时$u_C(t)$和$u_o(t)$。





由简化后的电路知：

$$u_C + C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \bullet R = U_s$$

整理得：$C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_C}{R} = \dfrac{U_s}{R}$

这与前面讨论的方程一致，利用已得结论得：

$$u_C = RI_s(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) = R\frac{U_s}{R}(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) = U_s(1 - e^{-\frac{1}{RC}t})$$

电路与电子技术基础

3. 一阶电路的完全态响应

物理意义：初始状态不为零，外部激励也不为零时电路的响应。

研究方法：在讨论零状态响应时，我们已谈到微分方程的解是由通解和特解组成的，只是在求通解的待定常数时，利用初始条件为零，若初始条件不为零，则可以得到一阶电路的完全响应。

设电路响应为$y(t)$，$y(\infty)$为电路达到稳态时的响应， $y(0)$为响应的初始值。

$$y(t)=y_p(t)+y_h(t)=y(\infty)+Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

将t=0代入上式

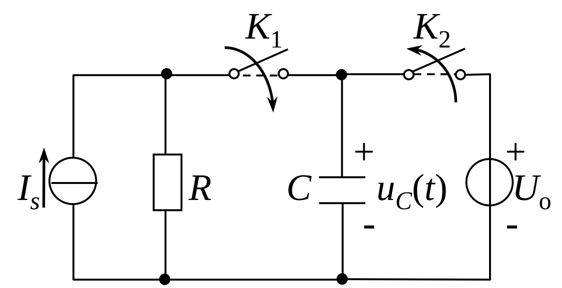
$$y(0)=y(\infty)+Ae^{0} \qquad \Rightarrow \qquad A=y(0)-y(\infty)$$

故： $$y(t)=y(\infty)+[y(0)-y(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

对于该式，如果知道响应初值$y(0)$ 、稳态值$y(\infty)$以及时间常数τ，就可以完全确定电路响应 $y(t)$，这种方法称为求电路完全响应的三要素法。

下面对电路完全响应进行分析。

电路如图，K_1打开，K_2闭合，电路达到稳态。在t=0时，K_1闭合，K_2打开，求$t\geq 0$时电压$u_C(t)$。



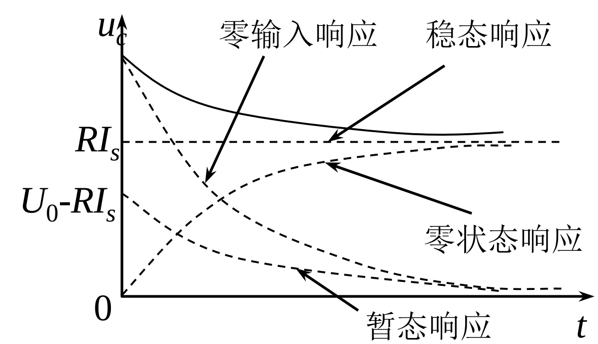
K_1打开，K_2闭合，电路达到稳态时，$u_C(0)=U_O$。

电路切换后达到稳态时，由于电容相当于开路，所以电容两端电压即为电阻R两端电压，所以$u_C(\infty)=I_S R$

时间常数$\tau=RC$，根据三要素公式可知：

$$u_C(t)=u_C(\infty)+[u_C(0)-u_C(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$=\underbrace{RI_s}_{\text{稳态响应}}+\underbrace{(U_o-RI_s)e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{暂态响应}}$$



将右式改写为下式可以看到它是由零输入响应和零状态响应组成

$$u_C(t)=\underbrace{U_o e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{零输入响应}}+\underbrace{RI_s(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}_{\text{零状态响应}}$$

例： 如图(a)所示电路，t=0时开关S_1打开，S_2闭合，在开关动作前，电路已达稳态，试求t≥0时的$u_L(t)$和$i_L(t)$。

解：t<0时，电路已处于稳态, 有

$$i_L(0_+) = i_L(0\_) = \frac{10}{1} = 10\,(\mathrm{A})$$

开关动作后电路如图(b)所示，电感电流稳态值为：

$$i_L(\infty) = 3\,\mathrm{A}$$

电路的时间常数：

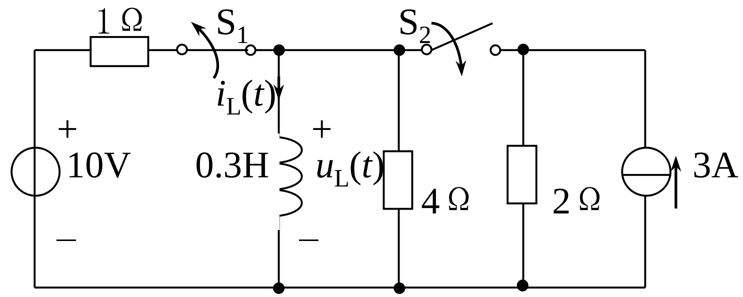
$$\tau = \frac{L}{R_0} = \frac{0.3}{4//2} = \frac{9}{40}\,(\mathrm{s})$$

根据三要素公式，得电感电流：

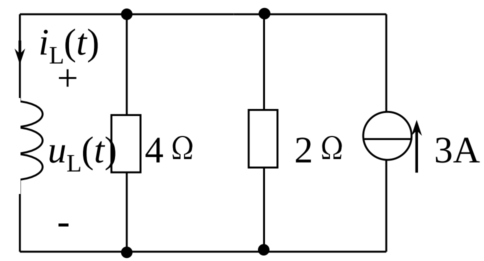
$$i_L(t) = 3 + (10-3)\mathrm{e}^{-\frac{40}{9}t} = 3 + 7\mathrm{e}^{-\frac{40}{9}t}\;(\mathrm{A})$$

电感电压为：

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -\frac{28}{3}\mathrm{e}^{-\frac{40}{9}t}\;(\mathrm{V})$$

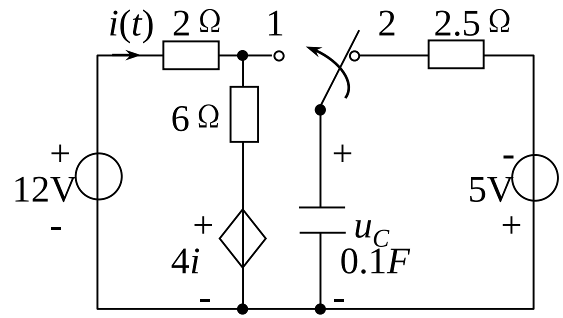


(a)



(b)

例： 含有受控源电路的动态分析。K在2的位置，电路处于稳态。t=0时，K由2切换到1。求$u_c(t)$和电流$i(t)$。

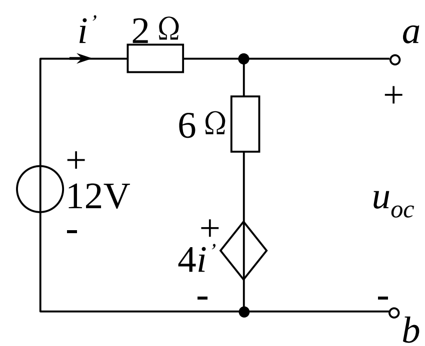


解：为简化电路分析，将含受控源部分的电路用戴维南等效电路代替。参见电路图(b)

由KVL得：

$$12 = (2+6)i' + 4i'$$

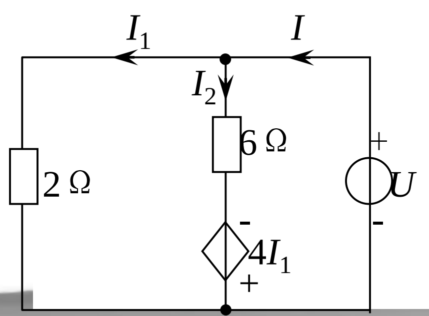
故 $$i' = 1\text{A}$$



开路电压为：

$$u_{oc} = 6i' + 4i' = 10i' = 10\text{V}$$

求戴维南电路等效电阻。内部电源置零，外加电压U的方法



$$I = I_1 + I_2 = I_1 + \frac{U+4I_1}{6} = \frac{5}{3}I_1 + \frac{U}{6} = \frac{5}{3} \bullet \frac{U}{2} + \frac{U}{6} = U$$

$$R_o = \frac{U}{I} = 1\Omega$$

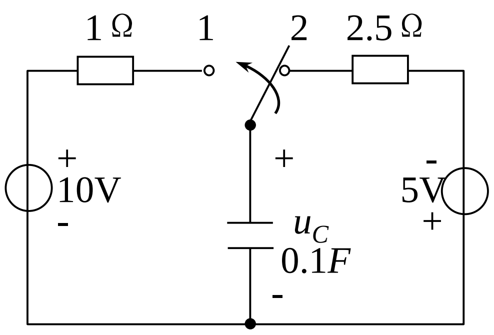
将受控源部分用戴维南电路等效后，电路如图所示，根据此电路用三要素法求电路的过渡过程，有：

$u_c(0)=-5\text{V}$　　　　K在2位置

$u_c(\infty)=10\text{V}$　　　　K在1位置

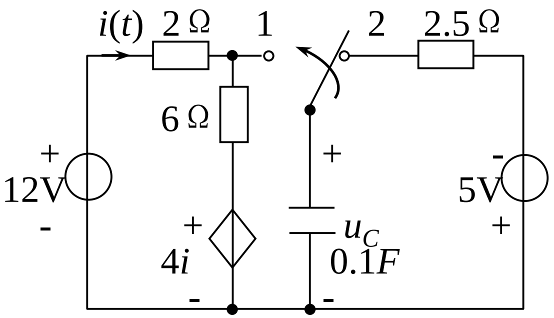
$\tau = R_0C = 1\times 0.1 = 0.1\text{s}$

$$u_c(t)=10+(-5-10)e^{-10t}=\left(10-15e^{-10t}\right)\text{V}$$



回到原电路，可知：

$$i_c(t)=\frac{12-u_c(t)}{2}=\left(1+7.5e^{-10t}\right)\text{A}$$

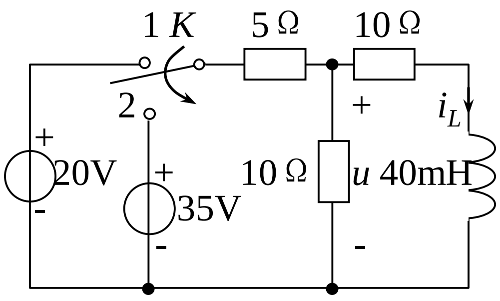


例： K在1的位置，电路处于稳态。t=0时，K由1切换到2。求$u(t)$的零输入响应、零状态响应和完全响应。

解：欲求$u(t)$响应，但 $u(t)$响应是电阻两端电压，在求解动态电路时只能以连续量电感电流为求解对象，所以，先求电感电流。

K在1的位置，电路处于稳态，电感相当于短路。则

$$i_L(0_-)=\frac{20}{5+(10//10)}\times\frac{1}{2}=1\text{A}$$



由于电感电流不能跳变，所以

$$i_L(0_+)=i_L(0_-)=1\text{A}$$

当K处于2的位置，电路稳定后，

$$i_L(\infty)=\frac{35}{5+(10//10)}\times\frac{1}{2}=1.75\text{A}$$

电路时间常数为，

$$\tau=\frac{L}{R}=\frac{40\times10^{-3}}{10+(5//10)}=3\times10^{-3}$$

以三要素法求电感电流，

$$i_L(t)=i_L(\infty)+[i_L(0)-i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$=1.75+[1-1.75]e^{-\frac{10^3}{3}t}=1.75-0.75e^{-\frac{10^3}{3}t}$$

则$u(t)$为

$$u(t)=10i_L(t)+L\frac{di_L(t)}{dt}$$

第二节　二阶电路的分析

（限于时间，该部分由同学自学）