# 第四章

## 常微分方程的数值解法

**Numerical Solutions to Ordinary Differential Equations**

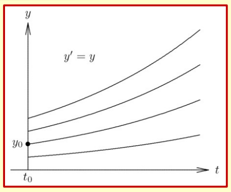
---

## 概述



➢一阶常微分方程初值问题：

**Problem I**: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 求函数y=y(x)满足：$y'(x) = f(x, y(x))$



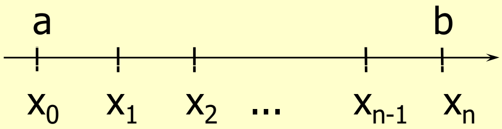

➢ f(x,y)在D={(x,y)|a≦x≦b, -∞≦y≦∞}上连续，且满足Lipschitz

条件：$\exists L, \forall y_1, y_2$, s.t. $|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \le L|y_1-y_2|$

则初值问题Problem I有唯一解**y(x)**, 称为积分曲线。

➢ 实际工程技术、生产、科研上会出现大量的微分方程问题很难得到其解析解，有的甚至无法用解析表达式来表示，因此只能依赖于数值方法去获得微分方程的数值解。

- 微分方程数值解法:
  - 不求y(x)的精确表达式，而求在$x_0$，$x_1$，…，$x_n$处的函数值
  - 设Problem I的解y(x)的存在区间是[a,b]，初始点$x_0=a$，取[a,b]内的一系列节点$x_0, x_1,…,x_n$. $a= x_0< x_1<…< x_n =b$，一般采用等距步长。




  - 用数值方法，求得y(x)在每个节点$x_k$的值$y(x_k)$的近似值，用$y_k$表示，即$y_k \approx y(x_k)$，
  - 这样$y_0$，$y_1$，…，$y_n$称为微分方程的数值解。
  - 求y(x)————>求$y_0$，$y_1$，…，$y_n$





- 方法：采用步进式和递推法

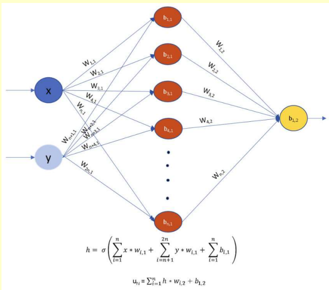
将[a,b]n等分， $a= x_0< x_1<…< x_n =b$，步长$h=\frac{b-a}{n}$，$x_k=a+kh$

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{n+1} = g(h, x_n, y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_{n-m}) \end{cases}$$

- 计算过程:

$$y_0 \to y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_{n-m} \to y_{n-m+1} \to \cdots \to y_n \to y_{n+1} \to \cdots$$

- 怎样建立递推公式？
  - ✓Taylor公式
  - ✓数值积分法
  - ✓神经网络 (Kanupriya Goswami et al. Solving Differential Equations using Neural Network, ICRITO 2021)



## 4.1 欧拉公式



思想:用向前差商近似代替微商.

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

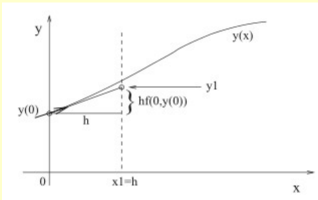
$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h} \qquad h=x_{n+1}-x_n$$

$$\therefore f(x_n, y(x_n)) \approx \frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h}.$$

$$\therefore y(x_{n+1}) \approx y(x_n)+hf(x_n, y(x_n))$$

$$\therefore y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$$ ——欧拉公式（Euler Schema）

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \end{cases} \quad n=0,1,2,\cdots\cdots$$




HUST

## 几何意义

Chapter 4 Initial -value problems for ODE

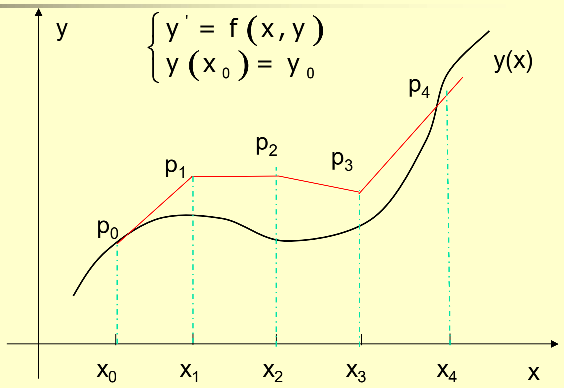
1. y(x)过点$P_0(x_0,y_0)$且在任意点(x,y)的切线斜率为f(x,y),
2. y(x)在点$P_0(x_0,y_0)$的切线方程为:

$$y=y_0+f(x_0,y_0)(x-x_0)$$

在切线上取点$P_1(x_1,y_1)$

$$y_1=y_0+hf(x_0,y_0)$$

$y_1$正是Euler 公式所求。




3. 类似2，过$P_1$以$f(x_1,y_1)$为斜率作直线，近似平行于y(x)在$x_1$的切线，在其上取点$P_2(x_2,y_2)$，依此类推...

4.折线$P_0$ $P_1$ $P_2$ ...$P_n$...作为曲线y(x)的近似 ——欧拉折线法

HUST

## 欧拉法（续）



$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

用向后差商近似代替微商：

$$y'(x_{n+1}) \approx y[x_n,x_{n+1}] = \frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h} \quad h=x_{n+1}-x_n$$

$$\therefore f(x_{n+1},y(x_{n+1})) \approx \frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h} \Rightarrow y(x_{n+1}) \approx y(x_n)+hf(x_{n+1},y(x_{n+1}))$$

?

$$\therefore y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$$ ——隐式欧拉公式

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1}) \end{cases} \quad n=0,1,2,\cdots\cdots$$

注：用隐式欧拉法，每一步都需解方程

（或先解出$y_{n+1}$的显式表达式），但其稳定性好。



## 欧拉法（续）

Chapter 4 Initial
-value problems for ODE

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

用中心差商近似代替微商：

$$y'(x_n) \approx y[x_{n-1},x_{n+1}] = \frac{y(x_{n+1})-y(x_{n-1})}{2h} \Rightarrow f(x_n,y(x_n)) \approx \frac{y(x_{n+1})-y(x_{n-1})}{2h}$$

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n) \end{cases} \quad n=0,1,2,\cdots$$ —— 二步欧拉法

注：计算时，先用欧拉法求出$y_1$，以后再用二步欧拉法计算。

HUST

## 欧拉法（续）



| 公式 | 单步否 | 显式否 | 截断误差 $y(x_{n+1})-y_{n+1}$ |
|---|---|---|---|
| $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ | 单步 | 显式 | |
| $y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$ | 单步 | 隐式 | |
| $y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$ | 二步 | 显式 | |



## 局部截断误差



定义1 假设$y_n=y(x_n)$，即第n步计算是精确的前提下，称 $R_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}$为欧拉法的局部截断误差。

注：无$y_n=y(x_n)$前提下，称$R_{n+1}$为整体截断误差。

定义2 若某算法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$，称该算法有**p**阶精度。

定义3 假设$y_n=y(x_n)$，$y_{n-1}=y(x_{n-1})$，称$R_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}$为二步欧拉法的局部截断误差。

定理 欧拉法的精度是一阶。

## 局部截断误差



**定理** 欧拉法的精度是一阶。

分析：证明其局部截断误差为$O(h^2)$，可通过Taylor展开式分析。

证明： Euler 公式为 $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$

令$y_n=y(x_n)$，下证： $y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^2)$

$\because y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)=y(x_n)+hf(x_n,y(x_n))$ 由 $y'(x)=f(x,y(x))$

$=y(x_n)+hy'(x_n)$

$$\because y(x_{n+1})=y(x_n+h)\overset{\text{Taylor}}{===}y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{y''(\xi)}{2!}h^2,\xi\in(x_n,x_{n+1})$$

$$\therefore y(x_{n+1})-y_{n+1}=\frac{y''(\xi)}{2}h^2=O(h^2)$$



## 二步法的局部截断误差 $y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$



**定理** 隐式欧拉法的精度是一阶，二步欧拉法的精度是二阶。

证明： 对二步欧拉法进行证明，考虑其局部截断误差，

令$y_n=y(x_n)$， $y_{n-1}=y(x_{n-1})$，

$$y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)=y(x_{n-1})+2hf(x_n,y(x_n))=y(x_{n-1})+2hy'(x_n)$$

$$\because y(x_{n+1})=y(x_n+h)\overset{\text{Taylor}}{===}y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2!}y''(x_n)+\frac{y'''(\xi)}{3!}h^3,\xi\in(x_n,x_{n+1})$$

$$y(x_{n-1})=y(x_n-h)=y(x_n)-hy'(x_n)+\frac{(-h)^2}{2!}y''(x_n)+\frac{y'''(\eta)}{3!}(-h)^3,\eta\in(x_{n-1},x_n)$$

将上两式左右两端同时相减：

$$\therefore y(x_{n+1})-y(x_{n-1})=2hy'(x_n)+\frac{y'''(\xi)+y'''(\eta)}{3!}h^3 \qquad \therefore y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^3)$$

∴二步欧拉法的局部截断误差为$O(h^3)$，其精度是二阶。

例：求 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - \frac{2x}{y}, & x = 0.1, 0.2, \cdots, 1.0 \\ y(0) = 1, \end{cases}$ 的近似值。

解： 这儿 $f(x,y) = y - \frac{2x}{y}$， $x_0 = 0, y_0 = 1, h = 0.1$

由欧拉公式得： $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ ，$y_0 = 1$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0.1 \times (1 - \frac{0}{1}) = 1.1$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.1 + 0.1 \times (1.1 - \frac{2 \times 0.1}{1.1}) = 1.191818$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 1.277438 \quad \cdots\cdots$$

又其精确解为 $y = \sqrt{2x+1}$

整体误差 $e_{k+1} = y(x_{k+1}) - y_{k+1}$ ，下面对其加以分析。



Chapter 4 Initial -value problems for ODE

| $x_k$ | $y_k$ | $y(x_k)$ | $e_k$ |
|---|---|---|---|
| 0.1 | 1.1 | 1.0954451 | 0.0045548 |
| 0.2 | 1.191818 | 1.183216 | 0.0086022 |
| 0.3 | 1.2774379 | 1.2649111 | 0.012527 |
| 0.4 | 1.3582127 | 1.3416408 | 0.016572 |
| 0.5 | 1.4351330 | 1.4142136 | 0.0209194 |
| 0.6 | 1.5089664 | 1.4831397 | 0.0257267 |
| 0.7 | 1.5803384 | 1.5491933 | 0.0311906 |
| 0.8 | 1.6497836 | 1.6124519 | 0.037332 |
| 0.9 | 1.7177795 | 1.6722301 | 0.044594 |
| 1.0 | 1.7847710 | 1.7320508 | 0.0527201 |

从表中看出误差在逐步增加、积累

$$\tilde{y}_{10} = y(x_9) + hf(x_9, y(x_9)) = 1.7330815$$

局部截断误差：$y(x_{10}) - \tilde{y}_{10} = 0.00103$ 而误差是 $y(x_{10}) - y_{10} = 0.05272$

## 复 习



$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$ 求：$y(x) \Rightarrow$ 数值解 $y_1, y_2, \dots, y_n$

| 公式 | 单步否 | 显式否 | 局部截断误差 $y(x_{n+1})-y_{n+1}$ |
|---|---|---|---|
| $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ | 单步 | 显式 | $O(h^2)$ |
| $y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$ | 单步 | 隐式 | $O(h^2)$ |
| $y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$ | 二步 | 显式 | $O(h^3)$ |

定义1 假设 $y_n=y(x_n)$，即第n步计算是精确的前提下，称 $R_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}$ 为欧拉法的局部截断误差。

定义2 假设 $y_n=y(x_n)$，$y_{n-1}=y(x_{n-1})$，称 $R_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}$ 为二步欧拉法的局部截断误差。

定义3 若某算法的局部截断误差为 $O(h^{p+1})$，称该算法有**p**阶精度。



## 数值积分法



$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \qquad y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$$

$$\therefore \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \Rightarrow y(x_{n+1})-y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx$$

对右端的定积分用数值积分公式求近似值:

（1）用左矩形数值积分公式:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx \approx (x_{n+1}-x_n)f(x_n,y(x_n))$$

$$\therefore y(x_{n+1})-y(x_n) \approx hf(x_n,y(x_n))$$

$$\Rightarrow y(x_{n+1}) \approx y(x_n)+hf(x_n,y(x_n))$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

## 数值积分法



$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \quad y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$$

$$\therefore \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \Rightarrow y(x_{n+1})-y(x_n)=\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx$$

（2）用梯形公式:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx \approx \frac{(x_{n+1}-x_n)}{2}[f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]$$

$$\therefore y(x_{n+1})-y(x_n) \approx \frac{h}{2}[f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]$$

$$\therefore y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$ ——梯形公式

- 梯形公式:将显示欧拉公式，隐式欧拉公式平均可得
- 梯形公式是隐式、单步公式，其精度为二阶

HUST

## 梯形公式的精度



定理：梯形公式 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$ 的精度是2阶的.

分析：证明其局部截断误差为$O(h^3)$；用二元函数的Taylor公式。

证法一（了解）：令$y_n=y(x_n)$，由Taylor公式有

$f(x_{n+1},y_{n+1})=f(x_{n+1},y(x_{n+1}))+(y_{n+1}-y(x_{n+1}))$

$=f(x_{n+1},y(x_{n+1}))+f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))$，$\eta$介于$y_{n+1}$与$y(x_{n+1})$之间

$=y'(x_{n+1})+f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))$

$=y'(x_n)+hy''(x_n)+O(h^2)+f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))$

$=f(x_n,y_n)+hy''(x_n)+f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))+O(h^2)$

又$y(x_{n+1})=y(x_n+h)=y(x_n)+hy'(x_n)+h^2y''(x_n)/2+O(h^3)$

$=y_n+hf(x_n,y_n)+h^2y''(x_n)/2+O(h^3)$

$=y_n+hf(x_n,y_n)/2+h[f(x_n,y_n)+hy''(x_n)]/2+O(h^3)$

HUST

$f(x_{n+1},y_{n+1})=f(x_n,y_n)+hy''(x_n)+f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))+O(h^2)$

$y(x_{n+1})=y_n+hf(x_n,y_n)/2+h[f(x_n,y_n)+hy''(x_n)]/2+O(h^3)$

$\quad=y_n+hf(x_n,y_n)/2+h\,[f(x_{n+1},y_{n+1})$

$\quad\quad-f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))+O(h^2)]/2+O(h^3)$

$\quad=y_n+h[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]/2$

$\quad\quad+hf_y(x_{n+1},\eta)(y(x_{n+1})-y_{n+1})/2+O(h^3)$

从而$y(x_{n+1})=y_{n+1}+h\,f_y(x_{n+1},\eta)[y(x_{n+1})-y_{n+1}]/2+O(h^3)$

$\therefore\ y(x_{n+1})-y_{n+1}=h\,f_y(x_{n+1},\eta)[y(x_{n+1})-y_{n+1}]/2+O(h^3)$

$\therefore\ y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^3)/[1-hf_y(x_{n+1},\eta)/2]=O(h^3)$

$\therefore$ 梯形公式的截断误差为$O(h^3)$，其精度是2阶。





定理：梯形公式 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$ 的精度是2阶的。

分析：证明其局部截断误差为$O(h^3)$；用一元函数的Taylor公式。

证法二：令 $y_n=y(x_n)$，公式右边的 $y_{n+1}=y(x_{n+1})$，由Taylor公式有

$f(x_{n+1},\ y_{n+1})=f(x_{n+1},\ y(x_{n+1}))$

$\quad=y'(x_{n+1})=y'(x_n)+hy''(x_n)+O(h^2)$

$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$

$\quad=y(x_n)+\frac{h}{2}[f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]$

$\quad=y(x_n)+hy'(x_n)+h^2y''(x_n)/2+O(h^3)$

又由Talor公式有：

$y(x_{n+1})=y(x_n+h)=y(x_n)+hy'(x_n)+h^2y''(x_n)/2+O(h^3)$

因此局部截断误差 $y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^3)$，梯形公式的精度为2阶。

## 梯形公式的应用



例4.1 用梯形公式求初值问题 $\frac{dy}{dx}=y,\ y(0)=1.$ 的解在x=0.01上的值y(0.01).

解：取h=0.01, $x_0=0$ , $y_0=y(0)=1$. 则 $y(0.01)\approx y_1$

f(x,y)=y，由梯形公式,

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]=y_n+\frac{h}{2}[y_n+y_{n+1}] \Rightarrow y_1=y_0+\frac{h}{2}[y_0+y_1]$$

$$y_1=\frac{1+\frac{h}{2}}{1-\frac{h}{2}}y_0$$ 基于幂级数理论 $$y_1=(1+\frac{h}{2})(1+\frac{h}{2}+\frac{h^2}{4}+\ldots)y_0$$

$$\approx(1+\frac{h}{2})^2+\frac{h^2}{4}=1.01005$$

解析解 $y=e^x$ $$y(0.01)=e^{0.01}=1+0.01+\frac{0.01^2}{2!}+\frac{0.01^3}{3!}+\ldots$$

$$\approx \mathbf{1}+\mathbf{0.01}+\frac{\mathbf{0.01^2}}{\mathbf{2!}}=\mathbf{1.01005}$$



## 欧拉公式的比较



| | |
|---|---|
| 欧拉法 | 简单，精度低 |
| 隐式欧拉法 | 稳定性好 |
| 二步欧拉法 | 显式，但需要两步初值，且第**2**个初值只能由其它方法给出，可能对后面的递推精度有影响 |
| 梯形公式法 | 精度有所提高，但隐式公式需迭代求解 |

思考与阅读

\# 证明：隐式欧拉法的精度为一阶。

## 4.2 改进的Euler法

- Euler公式 $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ 显式 一阶
- 梯形公式 $y_{n+1}=y_n+h[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]/2$ 隐式 二阶

- Euler公式 计算量小，精度低。
- 梯形公式 计算量大，精度高。

综合两个公式，提出预报—校正公式：

$$\left.\begin{aligned} &\text{预报} \quad \bar{y}_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n) \\ &\text{校正} \quad y_{n+1}=y_n+\tfrac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},\bar{y}_{n+1})] \end{aligned}\right\}$$

——改进的Euler法

嵌套形式：$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))]$ 显式单步法

$$y_{n+1}=\tfrac{1}{2}[y_n+hf(x_n,y_n)+y_n+hf(x_{n+1},y_n+hf(x_n,y_n))]$$

平均化形式：
$$\begin{cases} y_p=y_n+hf(x_n,y_n) \\ y_c=y_n+hf(x_{n+1},y_p) \\ y_{n+1}=\frac{1}{2}(y_p+y_c) \end{cases}$$





例4.4 用改进的Euler法解初值问题在区间[0,0.4]上，$\begin{cases} \frac{dy}{dx}=y^2 \\ y(0)=1 \end{cases}$ 步长h=0.1的解，并比较与精确解的差异。

说明：精确解 y=1/(1-x)。

解：Euler法的具体形式为：$y_{n+1}=y_n+hy_n^2$，

改进的Euler法的具体形式为：

$$\begin{cases} y_p=y_n+hy_n^2 \\ y_c=y_n+hy_p^2 \\ y_{n+1}=\frac{1}{2}(y_p+y_c) \end{cases}$$

∵ $x_0=0$，h=0.1，则

∴ $x_1=0.1$，$x_2=0.2$，$x_3=0.3$，$x_4=0.4$

计算$y_1$: $y_p=y_0+0.1y_0^2=1+0.1\cdot 1^2=1.1$

$y_c=1+0.1X1.1^2=1.121$

$y_1=(1.1+1.121)/2\approx 1.1118$

同样可求$y_2,y_3,y_4$，见P93表

| $n$ | $x_n$ | $y_n$ | $y(x_n)$ | $y_n - y(x_n)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1 | 1.1118 | 1.1111 | 0.0007 |
| 2 | 0.2 | 1.2521 | 1.2500 | 0.0021 |
| 3 | 0.3 | 1.4345 | 1.4236 | 0.0059 |
| 4 | 0.4 | 1.6782 | 1.6667 | 0.015 |

$y_n-y(x_n)$ 随n增大而增大，表明误差积累。





$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))]$$

注：

（1）令$y_n=y(x_n)$，可推导改进的Euler法的局部截断误差为 $O(h^3)$,具有二阶精度。

（2）改进的Euler法也可写成如下平均化形式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$
$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$k_2 = hf(x_{n+1}, y_n + k_1)$$

**HW:**
作业四 **#1**

## 二元函数泰勒公式复习



$$f(x_0+h, y_0+k)$$
$$= f(x_0,y_0)+(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)+$$
$$\frac{1}{2!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0,y_0)+$$
$$\frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(x_0+\theta h, y_0+\theta k), \qquad (0<\theta<1)$$

$(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})f(x_0,y_0)$ 表示 $hf_x(x_0,y_0)+kf_y(x_0,y_0)$

$(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0,y_0)$ 表示 $h^2 f_{xx}(x_0,y_0)+2hkf_{xy}(x_0,y_0)+k^2 f_{yy}(x_0,y_0)$



## 龙格—库塔方法 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$



Euler公式：$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ 写成 $\begin{cases} y_{n+1}=y_n+k_1 \\ k_1=hf(x_n,y_n) \end{cases}$ 精度：一阶

改进的Euler公式：$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}(k_1+k_2) \\ k_1=hf(x_n,y_n) \\ k_2=hf(x_{n+1},y_n+k_1) \end{cases}$ 精度：二阶

由Lagrange中值定理， $\exists \xi \in (x_n, x_{n+1})$ $y'(\xi)=\frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h}$

$\therefore\ y(x_{n+1}) = y(x_n)+hy'(\xi)$

而$y'(\xi)=f(\xi,y(\xi))$ 称为y(x)在$[x_n, x_{n+1}]$上的平均斜率，

$\therefore y(x_{n+1})=y(x_n)+hf(\xi,y(\xi)) \Rightarrow y(x_{n+1})=y(x_n)+k^*$

- 取 $k^*=hf(x_n,y_n)=k_1$ —Euler公式
- 取 $k^*=\frac{k_1}{2}+\frac{k_2}{2}$—改进Euler公式

Euler公式用一点的值$k_1$作为$k^*$的近似值，而改进的Euler公式用二个点的值$k_1$和$k_2$的平均值作为$k^*$近似值，其精度更高。

## 龙格－库塔法



Runge-Kutta法的思想：在 [ $x_n$，$x_{n+1}$ ] 内多预报几个点的$k_i$值并用其加权平均作为$k^*$近似而构造出具有更高精度的公式。

### 4.3.2 二阶龙格—库塔方法

以$k_1$与$k_2$的加权平均来近似$k^*$，设

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \end{cases} \quad (*)$$

其中$w_1$，$w_2$，α，β为待定参数。适当选取参数，使(*)式的精度为二阶，即使其局部截断误差为$O(h^3)$

令 $y_n=y(x_n)$，由泰勒公式：$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+O(h^3)$

$\because y'(x_n)=f(x_n,y(x_n))=f(x_n,y_n) \quad y''(x_n)=f_x(x_n,y_n)+f_y(x_n,y_n)f(x_n,y_n)$

$(\because y''(x)=(y'(x))'=[f(x,y)]'_x=f_x+f_y y'(x)=f_x+f_y f(x,y) \quad )$

$\therefore y(x_{n+1})=y_n+hf(x_n,y_n)+\frac{h^2}{2}[f_x(x_n,y_n)+f_y(x_n,y_n)f(x_n,y_n)]+O(h^3)$



## 二阶龙格－库塔法

Chapter 4 Initial-value problems for ODE

$$y(x_{n+1})=y_n+hf(x_n,y_n)+\frac{h^2}{2}[f_x(x_n,y_n)+f_y(x_n,y_n)f(x_n,y_n)]+O(h^3) \quad (1)$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \end{cases} \quad (*)$$

由多元函数的泰勒公式

$$k_2=hf(x_n+\alpha h,y_n+\beta k_1)=h\{f(x_n,y_n)+\alpha hf_x(x_n,y_n)+\beta k_1 f_y(x_n,y_n)+O(h^2)\}$$

$$\therefore y_{n+1}=y_n+w_1hf(x_n,y_n)+w_2hf(x_n,y_n)+w_2\alpha h^2 f_x(x_n,y_n) + w_2\beta h^2 f_y(x_n,y_n)f(x_n,y_n)+O(h^3)$$

$$y_{n+1}=y_n+(w_1+w_2)hf(x_n,y_n)+\frac{h^2}{2}[2w_2\alpha f_x(x_n,y_n) + 2w_2\beta f_y(x_n,y_n)f(x_n,y_n)]+O(h^3) \quad (2)$$

比较(1)与(2)要使：$y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^3)$ 则有 $\begin{cases} w_1+w_2=1 \\ w_2\alpha=1/2 \\ w_2\beta=1/2 \end{cases}$

注：上述方程组有四个未知量，只有三个方程，有无穷多组解。

## 二阶龙格－库塔法



$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_2 \alpha = 1/2 \\ w_2 \beta = 1/2 \end{cases}$$

- 取任意一组解便得一种二阶龙－库公式。
- 当$w_1=w_2=1/2$, $\alpha=\beta=1$时二阶Runge-Kutta公式为

$y_{n+1}=y_n+k_1/2+k_2/2$

$k_1=hf(x_n,y_n)$　　　　此即改进的Euler法

$k_2=hf(x_n+h,y_n+k_1)$

- 取$w_1=0$，$w_2=1$，$\alpha=\beta=1/2$，

$y_{n+1}=y_n+k_2$

$k_1=hf(x_n,y_n)$　　　　此为中点法或变形的 Euler公式

$k_2=hf(x_n+h/2,y_n+k_1/2)$



## 三阶龙格－库塔法



- 三阶龙格－库塔法是用$k_1$，$k_2$，$k_3$的加权平均来近似$k^*$，即有：

$$y_{n+1}=y_n+c_1k_1+c_2k_2+c_3k_3$$
$$k_1=hf(x_n,y_n)$$
$$k_2=hf(x_n+a_2h,y_n+b_{21}k_1)$$
$$k_3=hf(x_n+a_3h,y_n+b_{31}k_1+b_{32}k_2)$$

- 要使其具有三阶精度，必须使局部截断误差为$O(h^4)$
- 类似二阶龙格－库塔法的推导，$c_1,c_2,c_3,a_2,a_3,b_{21},b_{31},b_{32}$应满足

$$\begin{cases} c_1+c_2+c_3=1 \\ a_2=b_{21} \\ a_3=b_{31}+b_{32} \\ c_2a_2+c_3a_3=1/2 \\ c_2a_2^2+c_3a_3^2=1/3 \\ c_3b_{32}a_2=1/6 \end{cases}$$

由其任意解可得三阶龙格-库塔公式

例：Kutta公式

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+(k_1+4k_2+k_3)/6 \\ k_1=hf(x_n,y_n) \\ k_2=hf(x_n+h/2,y_n+k_1/2) \\ k_3=hf(x_n+h,y_n-k_1+2k_2) \end{cases}$$

## 四阶龙格－库塔法



- 类似可推出四阶龙格-库塔公式，常用的有

例：经典Runge-Kutta法

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+(k_1+2k_2+2k_3+k_4)/6 \\ k_1=hf(x_n,y_n) \\ k_2=hf(x_n+h/2,y_n+k_1/2) \\ k_3=hf(x_n+h/2,y_n+k_2/2) \\ k_4=hf(x_n+h,y_n+k_3) \end{cases}$$

局部截断误差 $O(h^5)$

- 还有： Gill公式及m (m>4)阶龙格－库塔法。
- m>4时：计算量太大，精确度不一定提高，有时会降低。



求解：$\begin{cases} dy/dx=f(x,y) \quad a\le x\le b \\ y(a)=y_0 \end{cases}$



对于经典的四阶Runge-Kutta法给出如下算法：

- Step 1: 输入a,b,$y_0$ 及N
- Step 2: (b-a)/N=>h,a=>x,$y_0$=>y
- Step 3: 输出 (x,y)
- Step 4: For i=1 T0 N
  - hf(x,y)=>$k_1$
  - hf(x+h/2,y+ $k_1$/2)=> $k_2$
  - hf(x+h/2,y+$k_2$/2)=>$k_3$
  - hf(x+h,y + $k_3$)=>$k_4$
  - y+($k_1$+2$k_2$+2$k_3$+$k_4$)/6=>y
  - x+h=>x
  - 输出(x,y)
- END

## 龙格－库塔法

Chapter 4 Initial -value problems for ODE

例：用四阶经典Runge－Kutta方法解初值问题：$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=y-\dfrac{2x}{y}\\ y(0)=1\end{cases}$ $h=0.2$

(1)求 $y_1$， $x_0=0, y_0=1, h=0.2$

$K_1=hf(x_0,y_0)=h(y_0-\frac{2x_0}{y_0})=0.2$

$K_2=hf\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{1}{2}K_1\right)$

$=h(y_0+\frac{1}{2}K_1-\frac{2\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{y_0+\frac{1}{2}K_1})=0.18363636$

$K_3=hf\left(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{1}{2}K_2\right)$

$=h(y_0+\frac{1}{2}K_2-\frac{2\left(x_0+\frac{h}{2}\right)}{y_0+\frac{1}{2}K_2})=0.1817275$

$K_4=hf(x_0+h, y_0+K_3)$

$=h[y_0+K_3-\frac{2(x_0+h)}{y_0+K_3}]=0.16864798$

$y_1=y_0+\frac{1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)$

$=1.1832293$

$y(x_1)=\sqrt{2x_1+1}=\sqrt{1.4}=1.1832160$

$e_1=y(x_1)-y_1\approx 1.3\times 10^{-5}$

HUST

## 龙格－库塔法

Chapter 4 Initial -value problems for ODE

(2)求 $y_2$， $x_1=0.2, h=0.2$ $y_1=1.1832293$

**HW:**
作业四 #2

$K_1=hf(x_1,y_1)=h(y_1-\frac{2x_1}{y_1})=0.16903428$

$K_2=hf(x_1+\frac{h}{2}, y_1+\frac{1}{2}K_1)=0.15893312$

$K_3=hf(x_1+\frac{h}{2}, y_1+\frac{1}{2}K_2)=0.1574989$ $K_4=hf(x_1+h, y_1+K_3)=0.1488075$

$y_2=y_1+\frac{1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)=1.3416803$

$y(x_2)=\sqrt{2x_2+1}=1.3416408$ $e_2=4.0\times 10^{-5}$

| $x_k$ | $y_k$ | $y(x_k)$ | $e_k$ |
|---|---|---|---|
| 0.2 | 1.1832293 | 1.1832160 | $1.3\times10^{-5}$ |
| 0.4 | 1.3416803 | 1.3416408 | $4.0\times10^{-5}$ |
| 0.6 | 1.4832838 | 1.4832397 | $4.4\times10^{-5}$ |
| 0.8 | 1.6125172 | 1.6124515 | $6.6\times10^{-5}$ |
| 1.0 | 1.7321463 | 1.7320508 | $9.6\times10^{-5}$ |

HUST

## 变步长龙格－库塔法



➢ 问题I： 求数值解 $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 要求误差 $<\varepsilon=10^{-8}$

问题：①：如何判断 $|y(x_n)-y_n|<\varepsilon$ ②：如何取 $h=?$

解①：如用p阶龙格－库塔法计算，局部截断误差为 $O(h^{p+1})$

➢如 $x_n$-----------------→$x_{n+1}$

令 $y_n=y(x_n)$ $\quad y_{n+1}^{(h)}$

则 $y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(h)}\approx ch^{p+1}$

$$\overbrace{x_n \quad \underbrace{\qquad}_{h/2} \qquad\qquad x_{n+1}}^{h}$$

步长折半 $x_n \to x_{n+h/2} \to x_{n+1}$ 分两步计算 $y(x_{n+1})$ 的近似值 $y_{n+1}^{(h/2)}$。

则 $y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(h/2)}\approx 2c(h/2)^{p+1}$

$$\therefore \frac{y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}}{y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(h)}}\approx\frac{1}{2^p}\Rightarrow y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}\approx\frac{1}{2^p-1}[y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}-y_{n+1}^{(h)}]=\Delta$$

HUST

## 变步长龙格－库塔法



定理：对于问题I若用P阶龙格－库塔法计算 $y(x_{n+1})$ 在步长折半前后的近似值分别为 $y_{n+1}^{(h)}$, $y_{n+1}^{(h/2)}$ 则有误差公式

$$|y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}|\approx\frac{1}{2^p-1}|y_{n+1}^{(\frac{h}{2})}-y_{n+1}^{(h)}|=\Delta$$

注：$1^0$ 误差的事后估计法

$2^0$ 停机准则：$\Delta<\varepsilon$ （可保证 $|y(x_{n+1})-y_{n+1}^{(h/2)}|<\varepsilon$）

解②：(1) h取大，局部截断误差 $ch^{p+1}$ 大，不精确；

(2) h取小，运算量大（步数多），舍入误差积累大。

解决策略：变步长龙格－库塔法

if（$\Delta>\varepsilon$）将步长折半反复计算，直至 $\Delta<\varepsilon$ 为止，取 **h** 为最后一次的步长，$y_{n+1}$ 为最后一次计算的结果。

else if ($\Delta<\varepsilon$) 将步长增倍反复计算，直至 $\Delta>\varepsilon$ 为止，最后一次运算的前一次计算结果即为所需。

HUST

## 4.5 收敛性与稳定性



对于常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

数值解法:

➢ 求 $y=y(x) \xrightarrow{\text{离散化}}$ 求 $y(x_n) \xrightarrow{\text{某种公式}}$ 求 $y_n$

$x_n=x_0+nh$

单步法：计算 $y_{n+1}$ 时只用到前一步的结果 $y_n$。

例：Euler法，改进的Euler法，龙格－库塔法都是单步法。

➢ 显式单步法: $y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,h)$

$\varphi(x,y,h)$ 为增量函数，它依赖于f，仅是 $x_n$，$y_n$，h的函数。

➢ Def:若某数值方法对于任意固定的 $x_n=x_0+nh$,当 $h\to 0(n\to\infty)$ 时，$y_n\to y(x_n)$，则称该法是收敛的。

即 $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}}(y(x_n)-y_n)=0$ ($x_n=x_0+nh$ 为固定值)。



## 整体截断误差与收敛性



注：数值方法是否收敛取决于误差 $y(x_n)-y_n$ 的变化情况。

对于p阶公式，其局部截断误差为 $O(h^{p+1})$，

即 $y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^{p+1})$， 其前提假定 $y_n=y(x_n)$.

虽h->0时，局部截断误差 $y(x_{n+1})-y_{n+1}\to 0$，并不能说明其收敛（因其前提 $y_n=y(x_n)$ 不成立），为此我们引入——

Def: 称 $y(x_n)-y_n$ 为单步法的解 $y_n$ 的整体截断误差。

局部截断误差与整体截断误差有何区别？

单步法收敛⇔ $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}}(y(x_n)-y_n)=0$

即 $h\to 0$ 时，整体截断误差 $y(x_{n+1})-y_{n+1}\to 0$

## 复 习



$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$ 求：$y(x) \Rightarrow$ 数值解 $y_0, y_1, \ldots, y_n$

显式单步法： $y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,h$

定义1 假设$y_n=y(x_n)$ ,即第n步计算是精确的前提下,称 $R_{n+1}=y(x_{n+1})-y_{n+1}$为单步法的局部截断误差.

定义2 若某算法的局部截断误差为$O(h^{p+1})$,称该算法有**p**阶精度.

单步法收敛⇔ $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}}(y(x_n)-y_n)=0,$ 整体截断误差$y(x_n)-y_n\to 0$



## 收敛性的判定



单步法收敛⇔ $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}}(y(x_n)-y_n)=0$

Th：若单步法$y_{n+1}=y_n+h\ \varphi(x_n,y_n,h)$具有p阶精度，且增量函数$\varphi(x,y,h)$关于y满足Lipschitz条件：

$$|\Phi(x,y,h)-\Phi(x,\bar{y},h)|\le L_\Phi\,|y-\bar{y}|$$

若初值$y_0$是准确的($y_0=y(x_0)$)，则其整体截断误差为：

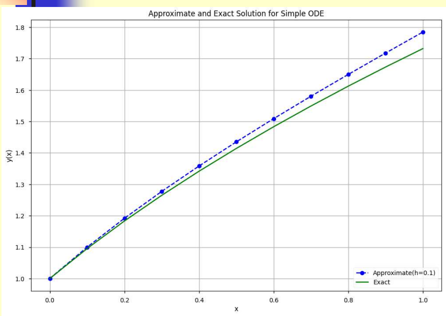
$$y(x_n)-y_n=O(h^p).$$

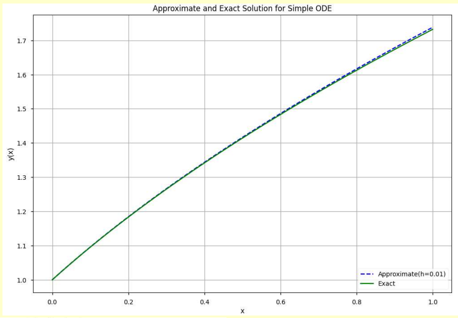
注：若单步法满足以上条件,显然其收敛。

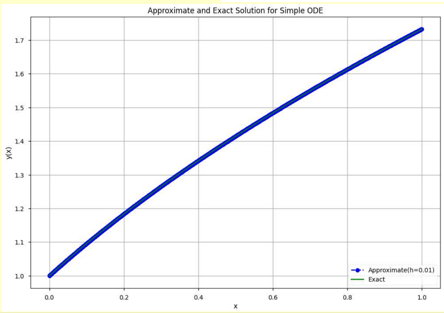
## 欧拉法的收敛性

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - \dfrac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Chapter 4 Initial -value problems for ODE




HUST

## 改进Euler法的收敛性

Chapter 4 Initial -value problems for ODE

$$y_{n+1}=y_n+h[f(x_n,y_n)+f(x_n+h,y_n+hf(x_n,y_n))]/2$$

则 $\varphi(x,y,h)=[f(x,y)+f(x+h,y+hf(x,y))]/2$

若：① $y_0=y(x_0)$ ② $f(x,y)$关于$y$满足李--条件：$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|\le L|y-\bar{y}|$

则： $|\Phi(x,y,h)-\Phi(x,\bar{y},h)|$

$$\le \tfrac{1}{2}[|f(x,y)-f(x,\bar{y})|+|f(x+h,y+hf(x,y))-f(x+h,\bar{y}+hf(x,\bar{y}))|]$$

$$\le \tfrac{1}{2}[L|y-\bar{y}|+L|y+hf(x,y)-\bar{y}-hf(x,\bar{y})|]$$

$$\le \frac{1}{2}[L|y-\bar{y}|+L|y-\bar{y}|+L^2h|y-\bar{y}|]=L(1+\frac{h}{2}L)|y-\bar{y}|$$

限定$h\le h_0$，则 $|\Phi(x,y,h)-\Phi(x,\bar{y},h)|\le L(1+\frac{h_0}{2}L)|y-\bar{y}|$

即$\Phi(x,y,h)$ 满足李普希兹条件，由定理知改进的Euler法收敛。

HUST

## 其它方法的收敛性



- 同样可验证，

①若f(x,y)关于y满足李普希兹条件且 ② $y_0=y(x_0)$时，
Euler法，标准四阶龙格－库法也收敛。

- 当方程中的f(x,y)给定时，可具体验证条件①的满足性。



## 稳定性



- 讨论收敛性时一般认可：数值方法本身计算过程是准确的。

但： ① 初始值$y_0$有误差 $\delta_0 = y_0-y(x_0)$.
② 计算的每一步有舍入误差。

- 初始误差在计算过程传播中，是逐步衰减，还是恶性增长，这就是稳定性问题。

Def： 设在节点$x_n$处用数值法得到的理想数值解为$y_n$，而实际计算得到的近似值为$\tilde{y}_n$，称 $\delta_n = \tilde{y}_n - y_n$为第$n$步数值解的扰动。

Def： 若一种数值方法在节点$x_n$处的数值解$y_n$的扰动$\delta_n \neq 0$，而在以后的各节点值$y_m(m>n)$上有扰动$\delta_m$.

当$|\delta_m| \leq |\delta_n|$，$(m=n+1,n+2,\ldots)$，则称该数值算法是稳定的。

- 分析算法的数值稳定性常考察模型方程： $y'=\lambda y$ ，  $(\lambda<0)$

## Euler法的稳定性



Euler法：$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$

考察模型方程 $y'=\lambda y$，($\lambda<0$)

即 $y_{n+1}=(1+h\lambda)y_n$

假设在节点值$y_n$上有扰动$\delta_n$，在$y_{n+1}$上有扰动$\delta_{n+1}$，且$\delta_{n+1}$仅由$\delta_n$引起(计算过程不再引进新的误差)。

$$\delta_{n+1}=\tilde{y}_{n+1}-y_{n+1}=(1+h\lambda)\tilde{y}_n-(1+h\lambda)y_n$$

$$\therefore \delta_{n+1}=(1+h\lambda)(\tilde{y}_n-y_n)=(1+h\lambda)\delta_n$$

Euler法稳定 $\Leftrightarrow|\delta_{n+1}|\le|\delta_n|\Leftrightarrow|1+h\lambda|\le 1$

$\therefore$ Euler法的稳定的条件为 $0<h\le-2/\lambda$.

HUST

## 隐式Euler稳定性

Chapter 4 Initial -value problems for ODE

- 例：隐式Euler法：$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$

  对于模型方程 $y'=\lambda y$ ($\lambda<0$)

  则$y_{n+1}=y_n+h\lambda y_{n+1}$ => $y_{n+1}=y_n/(1-h\lambda)$

- 设$y_n$的扰动为 $\delta_n=\tilde{y}_n-y_n$，则$y_{n+1}$的扰动

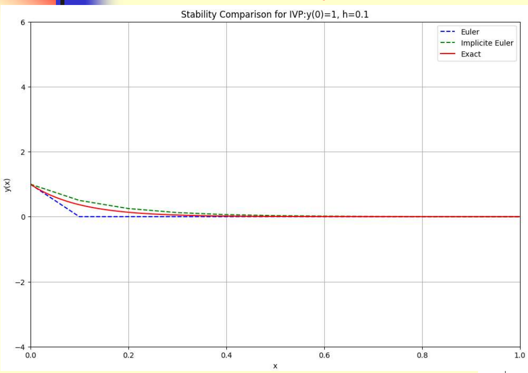
$$\delta_{n+1}=\tilde{y}_{n+1}-y_{n+1}=\frac{\delta_n}{1-h\lambda}$$

- $\therefore$ 要使隐式Euler法稳定 $\Leftrightarrow$ $|1/(1-h\lambda)|\le1$
- $\because$ $\lambda<0$， $\therefore$ $\forall h>0$ 上式均成立，隐式Euler法无条件稳定。

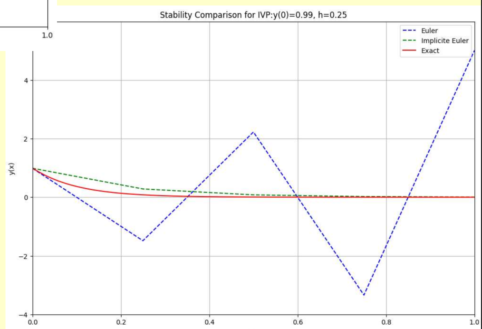
HUST

## Euler法与隐式Euler法稳定性






$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -10y, & x \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$




请解释上述对比图所揭示的现象。



## 梯形公式稳定性



梯形公式 $y_{n+1}=y_n+h[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]/2$，

设模型方程为 $y'=\lambda y(\lambda<0)$

则 $y_{n+1}=y_n+h[\lambda y_n+\lambda y_{n+1}]/2$ $\qquad \therefore\ y_{n+1} = \dfrac{1+\dfrac{h\lambda}{2}}{1-\dfrac{h\lambda}{2}} y_n$

当 $y_n$ 有扰动 $\delta_n = \tilde{y}_n - y_n$ 时，$y_{n+1}$ 的扰动 $\tilde{y}_{n+1} - y_{n+1} = \delta_{n+1}$ 为

$$\delta_{n+1} = \frac{1+\dfrac{h\lambda}{2}}{1-\dfrac{h\lambda}{2}}\delta_n \qquad \therefore \text{梯形公式稳定} \Longleftrightarrow \left|\frac{1+\dfrac{h\lambda}{2}}{1-\dfrac{h\lambda}{2}}\right| < 1$$

$\because\ \lambda<0$

$\therefore$ 上式对任意 $h>0$ 时恒成立，

$\therefore$ 梯形公式恒稳定。

**HW:**
作业四 #3, 4

## 边值问题的数值解法（了解）

➢一阶常微分方程初值问题:

Problem Ⅰ: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ 求函数y=y(x)满足: $y'(x) = f(x, y(x))$

数值解法: 求y=y(x)$\xrightarrow{\text{离散化}}$求$y(x_n)$$\xrightarrow{\text{递推公式}}$求$y_n$

$x_n = x_0 + nh$

局部截断误差 整体截断误差

➢数值微分（中心差商）:

$$f'(a) \approx G(h) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \qquad f'(a) - G(h) = -\frac{f'''(\xi)}{6}h^2$$

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \qquad \xi \in [\min_{0 \le i \le n} x_i, \max_{0 \le i \le n} x_i]$$





➢二阶线性常微分方程边值问题:

$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$，$a < x < b$

$y(a) = \alpha$，$y(b) = \beta$ ——边值条件

其中p(x)，q(x)， r(x)为区间［a，b］上足够光滑的已知函数，且$q(x) \le 0$，α、β为已知常数。

在上述条件下，边值问题存在唯一的连续可微解 y(x).

➢有限差分法: /* finite difference method */

(1)将区间[a,b]离散化，取节点 $x_n = a + nh$ $(n = 0, \ldots, N)$ ——求$y(x_n)$

$y''(x_n) + p(x_n)\,y'(x_n) + q(x_n)\,y(x_n) = r(x_n)$， $(n = 0, \ldots, N)$

(2)用2阶差商近似$y''(x_n)$；1阶差商近似$y'(x_n)$；数值解$y_n$近似$y(x_n)$ $(n = 0, \ldots, N)$ ——求$y_n$

(3) 解关于$y_n$ $(n = 0, \ldots, N)$的差分方程组

## 差分法



$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$，$a<x<b$ $\qquad x_n=a+nh\ (n=0,\dots,N)$

$y(a)=\alpha$，$y(b)=\beta$ $\qquad h=\dfrac{b-a}{N}$， $x_0=a, x_N=b$

$y''(x_n)+p(x_n)y'(x_n)+q(x_n)y(x_n)=r(x_n)$，$(n=0,\dots,N)$ (1)

泰勒展开 $(n=1,\dots,N\text{-}1)$

$$y'(x_n)=\frac{y(x_{n+1})-y(x_{n-1})}{2h}-\frac{y'''(\eta_n)}{6}h^2 \qquad (2)$$

$$y''(x_n)=\frac{\dfrac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h}-\dfrac{y(x_n)-y(x_{n-1})}{h}}{h}-\frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_n)$$

证明:(3)

$$y''(x_n)=\frac{y(x_{n+1})-2y(x_n)+y(x_{n-1})}{h^2}-\frac{h^2}{12}y^{(4)}(\xi_n) \qquad (3)$$

将(2)，(3)代入(1)得

$$\frac{y(x_{n+1})-2y(x_n)+y(x_{n-1})}{h^2}+p(x_n)\frac{y(x_{n+1})-y(x_{n-1})}{2h}+q(x_n)y(x_n)$$
$$=r(x_n)+[\frac{y^{(4)}(\xi_n)}{12}+p(x_n)\frac{y^{(3)}(\eta_n)}{6}]h^2$$



## 差分方程组



$$\frac{y(x_{n+1})-2y(x_n)+y(x_{n-1})}{h^2}+p(x_n)\frac{y(x_{n+1})-y(x_{n-1})}{2h}+q(x_n)y(x_n)$$
$$=r(x_n)+[\frac{y^{(4)}(\xi_n)}{12}+p(x_n)\frac{y^{(3)}(\eta_n)}{6}]h^2 \qquad (4)$$

记 $p(x_n)=p_n$，$q(x_n)=q_n$，$r(x_n)=r_n$，$y(x_0)=y_0=\alpha$，$y(x_N)=y_N=\beta$

当$h$较小时，忽略上式中$O(h^2)$，并取 $y_n\approx y(x_n)$，使

$$\begin{cases}\dfrac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2}+p_n\dfrac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h}+q_ny_n=r_n & n=1,2,\cdots,N-1;\\ y_0=\alpha;\ y_N=\beta\end{cases} \qquad (5)$$

(5)称为边值问题的差分方程组：$y_1, y_2, \dots, y_{N-1}$为差分解。

$R_n=[\dfrac{y^{(4)}(\xi_n)}{12}+p(x_n)\dfrac{y^{(3)}(\eta_n)}{6}]h^2$ 称为差分方程(5)逼近边值问题的截断误差。

$e_n=y(x_n)-y_n$，$(n=1,\dots,N\text{-}1)$称为差分解的截断误差。

注：$R_n$，$n=1,\dots,N\text{-}1$ 与$e_n$，$n=1,\dots,N-1$有何关系？

## 差分解的截断误差



由(4)-(5)得：

$$\begin{cases}\dfrac{e_{n+1}-2e_n+e_{n-1}}{h^2}+p_n\dfrac{e_{n+1}-e_{n-1}}{2h}+q_ne_n=R_n & n=1,2,\cdots,N-1;\\ e_0=0;\ e_N=0\end{cases}\qquad(6)$$

对于前述边值问题 $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x),\ a<x<b$，$y(a)=\alpha,\ y(b)=\beta$

当p(x)=0时，差分方程(4)的截断误差 $R_n=\dfrac{y^{(4)}(\xi_n)}{12}h^2$

此时（q(x)≤0），差分解的截断误差有结论:

$$|e_n|=|y(x_n)-y_n|\le\frac{\max\limits_{a\le x\le b}|y^{(4)}(x)|}{96}(b-a)^2h^2,\quad n=1,2,\cdots,N-1$$

特别地， $R_n=0,\ n=1,2,\cdots,N-1\Rightarrow e_n=0,n=1,2,\cdots,N-1$

$$\begin{cases}e_{n+1}+(-2+h^2q_n)e_n+e_{n-1}=0,\ n=1,2,\cdots,N-1;\\ e_0=0;\ e_N=0\end{cases}\qquad(7)$$



## 求解差分方程组的追赶法



$$\begin{cases}\dfrac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2}+p_n\dfrac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h}+q_ny_n=r_n & n=1,2,\cdots,N-1;\\ y_0=\alpha;\ y_N=\beta\end{cases}\qquad(5)$$

当$n$=1与$N$-1时：

$$\frac{y_2-2y_1+y_0}{h^2}+p_1\frac{y_2-y_0}{2h}+q_1y_1=r_1\Rightarrow(-2+h^2q_1)y_1+(1+\frac{h}{2}p_1)y_2=h^2r_1-(1-\frac{h}{2}p_1)\alpha$$

$$\frac{y_N-2y_{N-1}+y_{N-2}}{h^2}+p_{N-1}\frac{y_N-y_{N-2}}{2h}+q_{N-1}y_{N-1}=r_{N-1}$$

$$\Rightarrow(1-\frac{h}{2}p_{N-1})y_{N-2}+(-2+h^2q_{N-1})y_{N-1}=h^2r_{N-1}-(1+\frac{h}{2}p_{N-1})\beta$$

差分方程组(5)可化为三对角型：用追赶法求解

$$\begin{cases}(-2+h^2q_1)y_1+(1+\dfrac{h}{2}p_1)y_2=h^2r_1-(1-\dfrac{h}{2}p_1)\alpha\\ (1-\dfrac{h}{2}p_n)y_{n-1}+(-2+h^2q_n)y_n+(1+\dfrac{h}{2}p_n)y_{n+1}=h^2r_n,\ 2\le n\le N-2;\\ (1-\dfrac{h}{2}p_{N-1})y_{N-2}+(-2+h^2q_{N-1})y_{N-1}=h^2r_{N-1}-(1+\dfrac{h}{2}p_{N-1})\beta\end{cases}\qquad(8)$$

例4.5 用差分法解边值问题：$y''-y=x$

解：建立差分方程组： $y(0)=0$，$y(1)=1$，$0\le x\le 1$，$h=0.1$.

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2}-y_n=x_n,\quad n=1,2,\cdots,9;\quad x_n=\dfrac{n}{10} \\ y_0=0;\ y_{10}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-2-10^{-2})y_1+y_2=0.1\times 10^{-2} \\ y_{n-1}+(-2-10^{-2})y_n+y_{n+1}=x_n\times 10^{-2},\ 2\le n\le 8 \\ y_8+(-2-10^{-2})y_9=x_9\times 10^{-2} \end{cases}$$

化为三对角型

$$\begin{bmatrix} -(2+10^{-2}) & 1 & \cdots & \cdots & & 0 \\ 1 & -(2+10^{-2}) & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -(2+10^{-2}) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & & 1 & -(2+10^{-2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1\times 10^{-2} \\ 0.2\times 10^{-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -1+0.9\times 10^{-2} \end{bmatrix}$$



Chapter 4 Initial
-value problems for ODE

用追赶法解差分方程组，差分解与精确解对比如下：

| $i$ | 精确解 $y(x_i)$ | 差分解 $y_i$ | 实际误差 $(y(x_i)-y_i)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.07046741 | 0.07048938 | $-0.2197\times 10^{-4}$ |
| 2 | 0.14264090 | 0.14268364 | $-0.4274\times 10^{-4}$ |
| 3 | 0.21824367 | 0.21830475 | $-0.6108\times 10^{-4}$ |
| 4 | 0.29903319 | 0.29910891 | $-0.7571\times 10^{-4}$ |
| 5 | 0.38681887 | 0.38690415 | $-0.8528\times 10^{-4}$ |
| 6 | 0.48348014 | 0.48356844 | $-0.8830\times 10^{-4}$ |
| 7 | 0.59098524 | 0.59106841 | $-0.8317\times 10^{-4}$ |
| 8 | 0.71141095 | 0.71147906 | $-0.6811\times 10^{-4}$ |
| 9 | 0.84696337 | 0.84700451 | $-0.4113\times 10^{-4}$ |

其精确解为：$y(x)=\dfrac{2(e^x-e^{-x})}{e-e^{-1}}-x$

HUST

用差分解的截断误差公式分析:

$$|e_n| = |y(x_n) - y_n| \le \frac{\max\limits_{a\le x\le b}|y^{(4)}(x)|}{96}(b-a)^2 h^2, \quad n = 1, 2, \cdots, N-1$$

$$y'' - y = x \Rightarrow y'' = x + y \Rightarrow y^{(4)}(x) = y''$$

$$\therefore\ y^{(4)}(x) = y(x) + x$$

由差分方程，可证：当$0\le x\le 1$时， $|y(x)| \le 1$

$$\therefore\ \max_{0\le x\le 1}|y^{(4)}(x)| \le 2$$

$$\therefore\ |y(x_n) - y_n| \le \frac{1}{48}\times 10^{-2} \approx 2.083\times 10^{-4}, \quad n = 1, 2, \cdots, N-1$$

以上是关于第一类边值条件边值问题差分法

类似，可导出第二，三类边值条件边值问题差分方程





## 小结

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Taylor公式　　数值积分法

| 公式 | 单步否 | 显式否 | 精度 |
|---|---|---|---|
| $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$ | 单步 | 显式 | 一阶 |
| $y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$ | 单步 | 隐式 | 一阶 |
| $y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$ | 二步 | 显式 | 二阶 |
| $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$ | 单步 | 隐式 | 二阶 |
| $\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) \end{cases}$ | 单步 | 显式 | 二阶 |

Runge－Kutta方法

局部截断误差　整体截断误差

收敛性与稳定性