2.4 Hermite插值

Newton与Lagrange及分段线性插值: y=f(x),

其Newton，Lagrange及分段线性插值多项式$P_n(x)$，$N_n(x)$，$S_1(x)$满足插值条件：$P_n(x_i)=N_n(x_i)=S_1(x_i)=f(x_i)$, i=0,1,2,…n

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x) \qquad l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}=\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$$

$$N_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+c_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}) \qquad c_i=f[x_0,\ldots,x_i]$$

$$R_n(x)=f[x,x_0,\ldots,x_n]\omega_n(x)$$

$$S_1(x)=y_i\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+y_{i+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i} \quad ,x\in[x_i,x_{i+1}]$$

$$|f(x)-S_1(x)|\le\frac{1}{8}Mh^2,\ x\in[a,b], M=\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$$

2.4 Hermite插值

Newton与Lagrange及分段线性插值的不足:

Lagrange，Newton及分段线性插值多项式$P_n(x)$，$N_n(x)$，$S_1(x)$满足插值条件：$P_n(x_i)=N_n(x_i)=S_1(x_i)=f(x_i)$, i=0,1,2,…n

Lagrange, Newton与分段线性插值多项式与y= f(x)在插值节点具有相同的函数值---- “过点”.

但在插值节点上y=f(x)与$y=P_n(x)$等一般不“相切”，$f'(x_i)\neq P_n'(x_i)$.

Hermite插值:

求与y=f(x)在插值节点 x_0, x_1, …, x_n 上有相同函数值及导数值(甚至高阶导数值)的插值多项式.

Hermite插值

Problem2.5: 已知函数$y=f(x)$在插值节点$a\le x_0<x_1<\ldots<x_n\le b$上的函数值$f(x_i)$与导数值$f'(x_i)$,$i=0,1,2,\ldots n$. 求多项式$H(x)$，使:

$$H(x_i)=f(x_i),\quad H'(x_i)=f'(x_i)\quad i=0,1,2,\ldots n.$$

对于以上问题,可用两种方法求$H(x)$.

方法一:待定系数法.

由$2n+2$个插值条件，可唯一确定一个次数不超过$2n+1$次的多项式.

（1）$H(x)$是$2n+1$次多项式;

（2）令$H(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_{2n+1}x^{2n+1}$;

（3）由$2n+2$个插值条件建立关于$a_0,a_1,\ldots a_{2n+1}$的线性方程组. 解得$H(x)$.

方法二:基函数法.

Hermite插值

Problem: 已知$f(x_i)$，$f'(x_i)$，$i=0,1,\ldots n$. 求$H_{2n+1}(x)$:

$$H_{2n+1}(x_i)=f(x_i),\quad H'_{2n+1}(x_i)=f'(x_i),\ i=0,1,2,\ldots n.$$

基函数法:

（1）$2n+2$个已知量$f(x_i)$, $f'(x_i)$，　$i=0,1,2,\ldots n$.

（2）构造$2n+2$个 基函数$\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$，　$i=0,1,2,\ldots n$.

（3）使$H_{2n+1}(x)$为$2n+2$个基函数的线性组合:

$$H_{2n+1}=\alpha_0(x)f(x_0)+\alpha_1(x)f(x_1)+\ldots+\alpha_n(x)f(x_n)$$
$$+\beta_0(x)f'(x_0)+\beta_1(x)f'(x_1)+\ldots+\beta_n(x)f'(x_n).$$

这些基函数有**什么限制**？如何求呢?

Hermite插值基函数

如果：$\alpha_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$ $\beta_i(x_j)=0$

$\alpha_i'(x_j)=0$ $\beta_i'(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$

$$\begin{aligned}H_{2n+1}(x_j) &= f(x_0)\alpha_0(x_j)+\dots+f(x_j)\alpha_j(x_j)+\dots+f(x_n)\alpha_n(x_j)\\ &\quad +f'(x_0)\beta_0(x_j)+\dots+f'(x_j)\beta_j(x_j)+\dots+f'(x_n)\beta_n(x_j)\\ &= f(x_j)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H'_{2n+1}(x_j) &= f(x_0)\alpha_0'(x_j)+\dots+f(x_j)\alpha_j'(x_j)+\dots+f(x_n)\alpha_n'(x_j)\\ &\quad +f'(x_0)\beta_0'(x_j)+\dots+f'(x_j)\beta_j'(x_j)+\dots+f'(x_n)\beta_n'(x_j)\\ &= f'(x_j)\end{aligned}$$

Hermite插值基函数

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}\\ &\alpha_i'(x_j)=0\end{aligned}\right\}(\mathrm{I})$$

$l_i(x)=\prod_{j\neq i}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$

$\alpha_i(x)$ ①degree=2n+1, ②有根 x_0, …, x_{i-1}, x_{i+1}, …, x_n且都是2重根

$\Rightarrow \alpha_i(x)=(a_1x+b_1)l_i^2(x)$ 因 $\alpha_i(x_i)=1, \alpha_i'(x_i)=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1x_i+b_1=1\\ a_1l_i^2(x_i)+(a_1x_i+b_1)\times 2l_i(x_i)l_i'(x_i)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1x_i+b_1=1\\ a_1+2l_i'(x_i)=0\end{cases}$$

$$\alpha_i(x)=[1-2(x-x_i)\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}]l_i^2(x)$$

7

Hermite插值基函数

$$\left.\begin{aligned}&\beta_i(x_j)=0\\&\beta_i'(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\1 & i=j\end{cases}\end{aligned}\right\}\text{(II)}\quad \boxed{\beta_i(x)}$$

①degree=2n+1,

②有根 $x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_n$

且除了 x_i 都是2重根

$$\Rightarrow \beta_i(x)=c(x-x_i)l_i^2(x) \quad 因\ \beta_i'(x_i)=1 \quad \Rightarrow c=1$$

$$\Rightarrow \beta_i(x)=(x-x_i)l_i^2(x)$$

所求的Hermite插值多项式为

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}\{f(x_i)[1-2(x-x_i)\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}]l_i^2(x)+f'(x_i)(x-x_i)l_i^2(x)\}$$

8

Hermite插值多项式的唯一性

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}\{f(x_i)[1-2(x-x_i)\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}]l_i^2(x)+f'(x_i)(x-x_i)l_i^2(x)\}$$

注：Hermite插值多项式是唯一的 （证：若$H_{2n+1}(x)$与 $G_{2n+1}(x)$都是所求的Hermite插值多项式，则$F(x)= H_{2n+1}(x)- G_{2n+1}(x)$有n+1个二重根$x_0, x_1, \ldots, x_n$，又$\deg(F(x)) \leqslant 2n+1$, 故$F(x)= 0$.)

9

Hermite插值余项$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=?$

Chapter 2 插值方法

回顾: **lagrange**插值余项

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}w(x)$$

其中$W(x)=(x-x_0)(x-x_1)..(x-x_n)$

x_0 , x_1 , ..., x_n为$R_n(x)$的根，$R_n(x)$有**n+1**阶零点.

显然，它们是Hermite插值余项$R_{2n+1}(x)$的二重根，

即$R_{2n+1}(x)$有2n+2阶零点.

类似得 $R_{2n+1}(x)=K(x)w^2(x)=\dfrac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}w^2(x)$

HUST

10

Hermite插值余项$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)$

Chapter 2 插值方法

定理2.4 设区间[a,b]含有互异节点$x_0, x_1, \ldots x_n$,而f(x)在[a,b]内存在直到2n+2阶导数,则满足插值条件:

$$H_{2n+1}(x_i)=f(x_i),\ H'_{2n+1}(x_i)=f'(x_i),\quad i=0,1,\ldots n$$

的Hermite插值多项式$H_{2n+1}(x)$的余项

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}w^2(x)$$

其中，ξ ∈ [a, b]且与x的位置有关，$W(x)=(x-x_0)(x-x_1)..(x-x_n)$

证明:

由插值条件: $H_{2n+1}(x_i)=f(x_i),\ H'_{2n+1}(x_i)=f'(x_i)$，$i=0,1,\ldots n$，则

$R_{2n+1}(x_i)=H_{2n+1}(x_i)-f(x_i)=0$；$R'_{2n+1}(x_i)=H'_{2n+1}(x_i)-f'(x_i)=0$，

则可令$R_{2n+1}(x)=K(x)W^2(x)$，构造辅助函数并应用Rolle定理证明。

HUST

11

定理2.4的证明:

(1)在插值节点x_0~x_n处,$R_{2n+1}(x_i)=0$,余项公式显然成立。

(2)对于[a,b]中异于插值节点x_0~x_n的x,考虑辅助函数

$$F(t)=f(t)-H_{2n+1}(t)-K(x)w^2(t)=R_{2n+1}(t)-K(x)w^2(t)$$

$\because$ $F(x_0)=F(x_1)=F(x_2)=\ldots=F(x_n)=F(x)=0$

由Rolle定理,存在$\xi_0\in(x_0, x_1)$,使$F'(\xi_0)=0$

类似,共有n+1个互异点ξ_0,ξ_1,…,ξ_n使$F'(t)=0$

$\because$ $\dfrac{dw^2(t)}{dt}=2w(t)w'(t)$ $\therefore$ $F'(x_0)=F'(x_1)=F'(x_2)=\ldots=F'(x_n)=0$

$F'(t)$有2n+2个互异根ξ_0,ξ_1,…,ξ_n,x_0,x_1,…,x_n,由Rolle定理,

则存在$\xi\in(a,b)$。使:$F^{(2n+2)}(\xi)=f^{(2n+2)}(\xi)-K(x)(2n+2)!=0.$

$$K(x)=f^{(2n+2)}(\xi)/(2n+2)!.$$

12

Review

Newton, Lagrange及分段线性插值与Hermite插值:

对于y=f(x),其插值多项式$P_n(x)$,$N_n(x)$,$S_1(x)$满足插值条件:

$$P_n(x_i)=N_n(x_i)=S_1(x_i)=f(x_i),\ i=0,1,2,\ldots,n$$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k l_k(x)\qquad l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}=\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$$

$$N_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+c_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})\qquad c_i=f[x_0,\ldots,x_i]$$

$$R_n(x)=f[x,x_0,\ldots,x_n]\omega_n(x)$$

$$S_1(x)=y_i\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+y_{i+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i},\ x\in[x_i,x_{i+1}]$$

$$|f(x)-S_1(x)|\le\frac{1}{8}Mh^2,\ x\in[a,b],M=\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\qquad S_1(x)\in C[a,b]$$

Hermite插值：已知$f(x_i)$，$f'(x_i)$，$i=0,1,\ldots n$. 求$H_{2n+1}(x)$, S.t. :

$$H_{2n+1}(x_i)=f(x_i),\quad H'_{2n+1}(x_i)=f'(x_i),\ i=0,1,2,\ldots n.$$

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}\{f(x_i)[1-2(x-x_i)\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}]l_i^2(x)+f'(x_i)(x-x_i)l_i^2(x)\}$$

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_n)^2$$

特点：$H_{2n+1}(x)$在插值节点与$f(x)$相切，但不保证收敛性。

注：当n=1时，满足插值条件

$$H_3(x_i)=f(x_i),\quad H'_3(x_i)=f'(x_i),\ i=0,1$$

的插值公式：

$$\alpha_0(x)=(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0})(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2,\quad \alpha_1(x)=(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2,$$

$$\beta_0(x)=(x-x_0)(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2,\qquad \beta_1(x)=(x-x_1)(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2,$$

$$H_3(x)=f(x_0)\alpha_0(x)+f(x_1)\alpha_1(x)+f'(x_0)\beta_0(x)+f'(x_1)\beta_1(x).$$

$$R_3(x)=f(x)-H_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2,\ x_0<\xi<x_1.$$

例题2.7 依据下列数据表构造插值多项式

X	Y	Y′
0	0	3
1	1	9

解:

$$H_3(x) = 0\alpha_0(x) + 1\alpha_1(x) + 3\beta_0(x) + 9\beta_1(x)$$

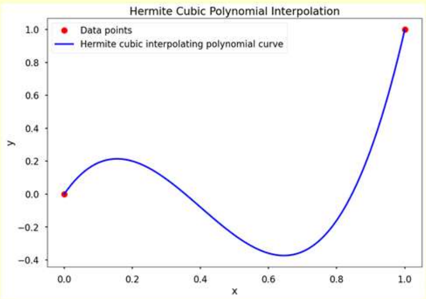
$$= (1+2\frac{x-1}{0-1})(\frac{x-0}{1-0})^2 + 3(x-0)(\frac{x-1}{0-1})^2 + 9(x-1)(\frac{x-0}{1-0})^2$$

$$= -2x^3 + 3x^2 + 3x(x^2-2x+1) + 9x^2(x-1)$$

$$= 10x^3 - 12x^2 + 3x$$

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-0)^2(x-1)^2 \quad ,$$

$0 < \xi < 1$ and depending on x.



例：用 Hermite插值求满足下列条件的四次多项式$H_4(x)$与余项。

$$H_4(0)=0, H_4(1)=1, H_4(2)=1, H_4'(0)=0, H_4'(1)=1.$$

分析：考虑$x_0=0, x_1=1, x_2=2$ 的插值问题。

解：基函数法

设 $H_4(x)=f(x_0)\alpha_0(x)+f(x_1)\alpha_1(x)+f(x_2)\alpha_2(x)+f'(x_0)\beta_0(x)+f'(x_1)\beta_1(x)$

$H_4(x)=\alpha_1(x)+\alpha_2(x)+\beta_1(x)$ 其中

$$\begin{cases}\alpha_1(0)=\alpha_1(2)=0, \alpha_1(1)=1 \\ \alpha_1'(0)=\alpha_1'(1)=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha_2(0)=\alpha_2(1)=0, \alpha_2(2)=1 \\ \alpha_2'(0)=\alpha_2'(1)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\beta_1(0)=\beta_1(1)=\beta_1(2)=0 \\ \beta_1'(0)=0, \beta_1'(1)=1\end{cases}$$

$\alpha_1(x)=x^2(x-2)^2$

$\boxed{\alpha_1(x)}$ $\alpha_1(x)=(ax+b)(x-0)^2(x-2)$

又：$\alpha_1(1)=1, \alpha_1'(1)=0 \Rightarrow$ a=1, b=-2

HUST

$$H_4(0)=0, H_4(1)=1, H_4(2)=1, H_4'(0)=0, H_4'(1)=1.$$

$$\begin{cases}\alpha_2(0)=\alpha_2(1)=0,\ \alpha_2(2)=1\\ \alpha_2'(0)=\alpha_2'(1)=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\beta_1(0)=\beta_1(1)=\beta_1(2)=0\\ \beta_1'(0)=0,\ \beta_1'(1)=1\end{cases}$$

$\boxed{\alpha_2(x)}$ $\alpha_2(x)=c(x-0)^2(x-1)^2,\ \alpha_2(2)=1\Rightarrow c=\dfrac{1}{4}\Rightarrow \alpha_2(x)=\dfrac{1}{4}x^2(x-1)^2$

$\boxed{\beta_1(x)}$ $\beta_1(x)=d(x-0)^2(x-1)(x-2)$

$\beta_1'(1)=1\Rightarrow d=-1$ $\quad\Rightarrow \beta_1(x)=-x^2(x-1)(x-2)$

$$\therefore\ H_4(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^2$$

$$R_4(x)=f(x)-H_4(x)=K(x)(x-x_0)^2(x-x_1)^2(x-x_2),$$

$$K(x)=\frac{f^{(5)}(\xi_x)}{5\,!},0<\xi_x<2$$

$$H_4(0)=0, H_4(1)=1, H_4(2)=1, H_4'(0)=0, H_4'(1)=1.$$

方法二（基于承袭性）：

考虑$x_0=0$, $x_1=1$ 的标准Hermite插值问题

$$H_3(0)=0, H_3(1)=1, H_3'(0)=0, H_3'(1)=1\Rightarrow H_3(x)=-x^3+2x^2$$

if : $H_4(x)=H_3(x)+A(x-0)^2(x-1)^2$ and $H_4(2)=1$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

求Hermite多项式的基本步骤:

① 写出相应于条件的 $\alpha_i(x)$ ，$\beta_i(x)$ 的组合式;

② 对每一个 $\alpha_i(x)$ ，$\beta_i(x)$ 找出尽可能多的条件给出的根;

③ 根据多项式的总次数和根的个数写出表达式;

④ 根据尚未利用的条件解出表达式中的待定系数;

⑤ 最后完整写出 $H(x)$。

HW:
作业二 #5，6

分段三次（Hermite）插值

分段线性插值：具有一致收敛性，折线不光滑。

$$f(x) \approx S_1(x) = y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}]; \quad i = 0, 1, \cdots, n-1.$$

$|f(x)-S_1(x)| \le Mh^2/8$； $x \in [a,b]$

三次Hermite插值：两条曲线在插值节点相切，光滑但不收敛

$$H_3(x) = f(x_0)\alpha_0(x) + f(x_1)\alpha_1(x) + f'(x_0)\beta_0(x) + f'(x_1)\beta_1(x).$$

$$\alpha_0(x) = (1 + 2\frac{x - x_0}{x_1 - x_0})(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1})^2, \quad \alpha_1(x) = (1 + 2\frac{x - x_1}{x_0 - x_1})(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0})^2,$$

$$\beta_0(x) = (x - x_0)(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1})^2, \qquad \beta_1(x) = (x - x_1)(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0})^2,$$

$$R_3(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2 . x_0 < \xi < x_1.$$

21

分段三次（Hermite）插值

- 已知划分 Δ 的每个节点 x_i 处对应的 y_i 和 y_i'，求作具有划分 Δ 的分段三次多项式 $S_3(x)$，满足:

$$S_3(x_i)=y_i,\quad S_3'(x_i)=y_i'\qquad i=0,1,\cdots,n$$

$S_3(x)$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是一个三次 Hermite 插值多项式，且:

$$\begin{cases}S_3^{[i]}(x_i)=y_i\\ S_3'^{[i]}(x_i)=y_i'\end{cases}\qquad \begin{cases}S_3^{[i]}(x_{i+1})=y_{i+1}\\ S_3'^{[i]}(x_{i+1})=y_{i+1}'\end{cases}$$

22

分段三次（Hermite）插值（续）

$$H_3(x)=f(x_0)\alpha_0(x)+f(x_1)\alpha_1(x)+f'(x_0)\beta_0(x)+f'(x_1)\beta_1(x).$$

$$\alpha_0(x)=(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0})(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2,\quad \alpha_1(x)=(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1})(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2,$$

$$\beta_0(x)=(x-x_0)(\frac{x-x_1}{x_0-x_1})^2,\qquad \beta_1(x)=(x-x_1)(\frac{x-x_0}{x_1-x_0})^2,$$

应用上述公式到区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上，得:

$$S_3^{[i]}(x)=y_i(1+2\frac{x-x_i}{h_i})(\frac{x-x_{i+1}}{h_i})^2+y_{i+1}(1-2\frac{x-x_{i+1}}{h_i})(\frac{x-x_i}{h_i})^2$$

$$+y_i'(x-x_i)(\frac{x-x_{i+1}}{h_i})^2+y_{i+1}'(x-x_{i+1})(\frac{x-x_i}{h_i})^2$$

$$x\in[x_i, x_{i+1}],\ h_i=x_{i+1}-x_i,\ i=1,2,\cdots,n-1.$$

23

分段三次（Hermite）插值（续）

Chapter 2
插值方法

分段三次 Hermite 插值的插值余项:

$$|f(x)-S_3(x)| \le \frac{1}{384}h^4 \max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)| \qquad h=\max h_i$$

- h 足够小（例如小于 1）时，分段三次 Hermite 插值的插值余项远小于分段线性插值的插值余项，故前者的插值精度更高。
- 分段三次 Hermite 插值的插值曲线比分段线性插值的曲线更光滑，但光滑度仍不够: $S_3(x)\in C^1[a, b]$.
- 三次样条插值: 在插值节点处连续，一阶与二阶导数也连续，**属**于$C^2[a, b]$函数类。

HUST

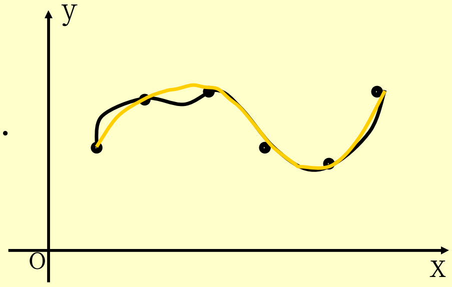
2.6 三次样条插值

Chapter 2
插值方法

给定节点: $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$,

及函数值$y_k=f(x_k)$, $k=0, 1, \dots, n$.

即n+1个点(x_i, y_i), $i=0, 1, \dots, n$.



定义: 给定节点$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$, 及其上的函数值

$y_k=f(x_k)$, $k=0, 1, \dots, n$. 如果函数S(x)满足:

(1) S(x)是一个分段的三次多项式且$S(x_k)=y_k$;

(2) $S(x)\in C^2[a, b]$.

则称S(x)是区间[a, b]上的三次样条插值函数.

HUST

S(x)在区间$[x_{i-1}, x_i]$上是三次多项式,

$S(x)=a_i x^3+b_i x^2 +c_i x+d_i$,

有4个待定系数,要确定S(x)共需4n个待定系数.

$S(x_i)=y_i$, $i=0,1,\ldots,n$, 有2n个条件.

$S'(x_i-0)=S'(x_i+0)$, $i=1,2\ldots,n-1$, 有n-1个条件

$S''(x_i-0)=S''(x_i+0)$, $i=1,2\ldots,n-1$, 有n-1个条件

共有4n-2个条件.

为了得到唯一的三次样条函数,可在区间[a,b]的端点$x_0=a$, $x_n=b$上各加一个条件,称为边界条件.常用的边界条件有

(1) $S'(x_0)=y'_0$, $S'(x_n)=y'_n$;

(2) $S''(x_0)=y''_0$, $S''(x_n)=y''_n$;(自然边界条件:$S''(x_0)=S''(x_n)=0$)

(3) 假设$f(x)$是以b-a为周期的周期函数,这时要求

求三次样条插值函数的三转角方程

$S(x_0+0)=S(x_n-0)$

$S'(x_0+0)=S'(x_n-0)$ S(x)为周期样条函数.

$S''(x_0+0)=S''(x_n-0)$

若假设$S'(x_i)=m_i$, $i=0,1,\ldots,n$,利用分段三次Hermite插值多项式,

当$x\in[x_{i-1}, x_i]$时,有

$$S(x)=\frac{1}{h_i^3}\left[(x_i+2x-3x_{i-1})(x-x_i)^2 y_{i-1}+(3x_i-2x-x_{i-1})(x-x_{i-1})^2 y_i\right]$$

$$+\frac{1}{h_i^2}\left[(x-x_{i-1})(x-x_i)^2 m_{i-1}+(x-x_{i-1})^2(x-x_i)m_i\right]$$

其中$h_i=x_i-x_{i-1}$.为了确定S(x),只需确定m_i , $i=0,1,\ldots,n$.

可利用$S''(x_i-0)=S''(x_i+0)$来求出m_i .

当$x\in[x_{i-1},x_i]$时,由于

$$S(x)=\frac{1}{h_i^3}\left[\left(x_i+2x-3x_{i-1}\right)\left(x-x_i\right)^2 y_{i-1}+\left(3x_i-2x-x_{i-1}\right)\left(x-x_{i-1}\right)^2 y_i\right]$$

$$+\frac{1}{h_i^2}\left[(x-x_{i-1})(x-x_i)^2 m_{i-1}+(x-x_{i-1})^2(x-x_i)m_i\right]$$

所以
$$S'(x)=\frac{2}{h_i^3}\left\{\left[\left(x-x_i\right)^2+\left(x_i+2x-3x_{i-1}\right)\left(x-x_i\right)\right]y_{i-1}\right.$$

$$\left.+\left[\left(3x_i-2x-x_{i-1}\right)\left(x-x_{i-1}\right)-\left(x-x_{i-1}\right)^2\right]y_i\right\}$$

$$+\frac{1}{h_i^2}\left\{\left[(x-x_i)^2+2(x-x_{i-1})(x-x_i)\right]m_{i-1}\right.$$

$$\left.+\left[(x-x_{i-1})^2+2(x-x_{i-1})(x-x_i)\right]m_i\right\}$$

$$S''(x)=\frac{6}{h_i^3}(2x-x_{i-1}-x_i)(y_{i-1}-y_i)$$

$$+\frac{2}{h_i^2}\left[(3x-x_{i-1}-2x_i)m_{i-1}+(3x-2x_{i-1}-x_i)m_i\right]$$

于是有

$$S''(x_i-0)=\frac{6}{h_i^2}(y_{i-1}-y_i)+\frac{2}{h_i}(m_{i-1}+2m_i)$$

$$S''(x_i+0)=\frac{6}{h_{i+1}^2}(y_{i+1}-y_i)-\frac{2}{h_{i+1}}(2m_i+m_{i+1})$$

由连续性条件$S''(x_i-0)=S''(x_i+0)$可得

$$\frac{1}{h_i}m_{i-1}+2\left(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}}\right)m_i+\frac{1}{h_{i+1}}m_{i+1}=3\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}^2}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i^2}\right)$$

两侧同除以 $(\frac{1}{h_i}+\frac{1}{h_{i+1}})$, 并记 $\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}=\lambda_i$, $\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}=1-\lambda_i=\mu_i$,

$3(\lambda_i f[x_{i-1},x_i]+\mu_i f[x_i,x_{i+1}])=g_i$, 则有

$$\lambda_i m_{i-1}+2m_i+\mu_i m_{i+1}=g_i\ ,\quad i=1,2,\ldots,n-1. \qquad (*)$$

再结合不同的边界条件, 可得关于m_i的方程组.

若边界条件为: $m_0=y'_0$, $m_n=y'_n$, 代入(*)式可得

$$\begin{pmatrix} 2 & \mu_1 & & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-2} & 2 & \mu_{n-2} \\ & & & & \lambda_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1-\lambda_1 y'_0 \\ g_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1}-\mu_{n-1} y'_n \end{pmatrix}$$

若边界条件为: $S''(x_0)=y''_0$, $S''(x_n)=y''_n$, 则有

$$2m_0+m_1=3f[x_0,x_1]-\tfrac{1}{2}h_1 y''_0=g_0$$

$$m_{n-1}+2m_n=3f[x_{n-1},x_n]+\tfrac{1}{2}h_n y''_n=g_n$$

连同(*)式一起, 可得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix}$$

若边界条件为周期性边界条件，

由$S'(x_0+0)=S'(x_n-0)$, 和 $S''(x_0+0)=S''(x_n-0)$, 有

$m_0=m_n$

$\lambda_n m_{n-1}+2m_n+\mu_n m_1=g_n$

其中:

$$\lambda_n=\frac{h_1}{h_1+h_n},\quad \mu_n=1-\lambda_n=\frac{h_n}{h_1+h_n},\quad g_n=3(\lambda_n f[x_0,x_1]+\mu_n f[x_{n-1},x_n])$$

于是有

$$\begin{pmatrix} 2 & \mu_1 & & & & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & 2 & \mu_{n-1} \\ \mu_n & & & & \lambda_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix}$$

对应不同的边界条件，只要求出相应的线性方程组的解，便得到三次样条函数在各区间$[x_{i-1}, x_i]$上的表达式.

由于三个方程组的系数矩阵都是严格对角占优矩阵,所以都有唯一解,前两个方程组均可用追赶法求解,第三个方程组可用LU分解法或Gauss消元法求解.

设$f(0)=1, f(1)=0, f(2)=-1, f(3)=0, f'(0)=1, f'(3)=0$,

试求$f(x)$在区间$[0,3]$的三次样条插值函数$S(x)$.

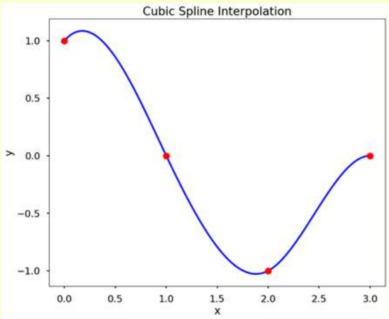
解：这里$h_1=h_2=h_3=1$，$y'_0=1$，$y'_3=0$,计算参数有

$\lambda_1=\lambda_2=\mu_1=\mu_2=1/2$，$g_1=-3, g_2=0$

于是有 $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$,解得 $m_1 = -\dfrac{28}{15}, m_2 = \dfrac{7}{15}$

故有

$$S(x) = \begin{cases} (x-1)\left(\frac{17}{15}x^2 - 2x - 1\right) & x \in [0,1] \\ (x-1)\left(\frac{3}{5}x^2 - \frac{14}{15}x - \frac{23}{15}\right) & x \in [1,2] \\ (x-3)^2\left(\frac{31}{15} - \frac{23}{15}x\right) & x \in [2,3] \end{cases}$$



33

2.7 曲线拟合的最小二乘法

在生产与科研中,常给出一组离散数据

$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots\ldots(x_N,y_N)$

要确定变量 x与 y的函数关系y=f(x)，**从数据中学习模型**。

近似方法一：构造插值多项式$P_n(x)$， 使$P_n(x_i)=y_i$ i=1~N
（过点）

近似方法二：曲线拟合

Problem: 已知 N个观测数据$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots\ldots(x_N,y_N)$

求一个多项式 P(x)能最好地反映这些点的总趋势。

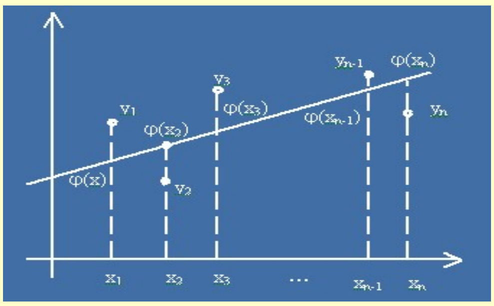
（不过点）

34

直线拟合

假设数据点(x_i,y_i) i=1~N大致成一条直线,
此时拟合曲线为一直线,它从这些点附近通过.

设此拟合直线为$\hat{y}=\Phi(x)=a+bx$, 显然$\hat{y}(x_i)=a+bx_i\neq y_i$



记 $e_i=y_i-\hat{y}(x_i)$，从而有$e_1,e_2,\ldots\ldots e_N$ 称之为残差。

$e_1,e_2,\ldots\ldots e_N$总体最小$\Leftrightarrow e=(e_1,e_2,\ldots\ldots e_N)^T$的长度最小

直线拟合

向量的长度 $||x||$ ($x\in R^n$)介绍如下

$||x||_2=(x_1^2+x_2^2+......+x_n^2)^{0.5}$

$||x||_1=\Sigma|x_i|$

$||x||_\infty=\max|x_i|$

Problem 2.9 已知N组数据$(x_1,y_1), (x_2,y_2),......,(x_N,y_N)$，求一条直线 y=a+bx（即求a，b），使

$$Q(a,b)=\|e\|_2^2=e_1^2+e_2^2+\cdots+e_N^2=\sum_{i=1}^{N}[y_i-(a+bx_i)]^2=\min$$

注：这是一个优化问题，使Q(a,b)=min的*a*,*b*构成的直线y=a+bx称为Problem 2.9的最小二乘拟合直线。

$$Q(a,b)=\|e\|_2^2=e_1^2+e_2^2+\cdots+e_N^2=\sum_{i=1}^{N}[y_i-(a+bx_i)]^2$$

求拟合直线关键是求 a,b,使Q(a,b)最小,即优化问题的解，这可称之为最小二乘拟合。

由微积分学知，求Q(a,b)的极小值点,可解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial a}=0\\[2mm]\dfrac{\partial Q}{\partial b}=0\end{cases}\quad => \quad \begin{cases}Na+b\sum_{i=1}^{N}x_i=\sum_{i=1}^{N}y_i\\ a\sum_{i=1}^{N}x_i+b\sum_{i=1}^{N}x_i^2=\sum_{i=1}^{N}x_iy_i\end{cases}\qquad *$$

称*为正规方程组。解*可得a,b，则$\hat{y}$=a+bx 为所求。

说明：正规方程组的解存在且唯一,且是最小二乘拟合问题的解。

求解优化问题的下降迭代法

$$\min_{a,b} Q(a,b) = \min_{a,b} \sum_{i=1}^{N} [y_i - (a + bx_i)]^2$$

用向量表示： $\boldsymbol{t} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}$,则上述问题表示为 $\min\limits_{t \in R^2} Q(t)$

下降迭代法: $\begin{cases} t_0 \\ t_{k+1} = t_k + \eta_k d_k, \ \text{s.t.}\ Q(t_{k+1}) < Q(t_k) \end{cases}$

其中$\boldsymbol{\eta_k}$称为步长因子，$\boldsymbol{d_k}$称为下降方向向量。

最速下降法(梯度下降法) $d_k = -\nabla Q(t_k)$

$$\begin{cases} t_0 \\ t_{k+1} = t_k - \eta \cdot \nabla Q(t_k) \end{cases}$$

例 有数据表

i	1	2	3	4	5
x_i	165	123	150	123	141
y_i	187	126	172	125	148

求其一次拟合曲线 。

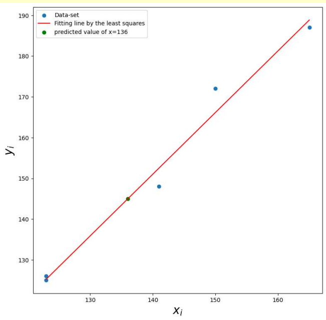
解: 因$(x_1,y_1),\ldots,(x_5,y_5)$ 近似于直线,

故设其拟合直线为y=a+bx,

则其正规方程组为

$$\begin{cases} 5a + 702b = 758 \\ 702a + 99864b = 108396 \end{cases}$$

$$\therefore a = \text{-}60.939227 \qquad b = 1.513812$$



所求的最小二乘拟合直线为y=-60.939227+1.513812x

使用梯度下降法求解

$$Q(a,b)=\sum_{i=1}^{N}[y_i-(a+bx_i)]^2$$

$$\nabla Q=\begin{pmatrix}\frac{\partial Q}{\partial a}\\ \frac{\partial Q}{\partial b}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\sum_{i=1}^{N}[y_i-(a+bx_i)]\\ -2\sum_{i=1}^{N}x_i[y_i-(a+bx_i)]\end{pmatrix}=-2\left\{\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{N}y_i\\ \sum_{i=1}^{N}x_iy_i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}N & \sum_{i=1}^{N}x_i\\ \sum_{i=1}^{N}x_i & \sum_{i=1}^{N}x_i^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\right\}$$

$$\triangleq -2\left\{v\_y-m\_x\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\right\}$$

$$=-2\left\{\begin{pmatrix}758\\ 108396\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 702\\ 702 & 99864\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{cases}t_0\\ t_{k+1}=t_k+2\eta\cdot\{v\_y-m\_x\cdot t_k\}\end{cases}$$

Review

Newton与Lagrange及分段线性插值与三次样条插值:

对于y=f(x),其插值多项式$P_n(x)$, $N_n(x)$, $S_1(x)$, $S_3(x)$满足插值条件:

$P_n(x_i)=N_n(x_i)=S_1(x_i)=S_3(x_i)=f(x_i)$, i=0,1,2,…,n

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_kl_k(x)\qquad l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}=\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$$

$$N_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\ldots+c_n(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})\qquad c_i=f[x_0,\ldots,x_i]$$

$$R_n(x)=f[x,x_0,\ldots,x_n]\omega_n(x)$$

$$S_1(x)=y_i\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+y_{i+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i},\ x\in[x_i,x_{i+1}]\qquad S_3(x)\in C^2[a,b]$$

$$|f(x)-S_1(x)|\le\frac{1}{8}Mh^2,\ x\in[a,b],M=\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|\qquad |f(x)-S_3(x)|\le\frac{1}{384}h^4\max_{a\le x\le b}|f^{(4)}(x)|$$

$S_1(x)\in C[a,b]$

Review

Hermite插值：已知函数$y=f(x)$在插值节点$a\le x_0<x_1<\ldots<x_n\le b$上的函数值$f(x_i)$与导数值$f'(x_i)$, $i=0,1,2,\ldots n$. 求多项式$H(x)$，使：

$$H(x_i)=f(x_i),\quad H'(x_i)=f'(x_i)\quad i=0,1,2,\ldots n.$$

基函数法：$H_{2n+1}=\alpha_0(x)f(x_0)+\alpha_1(x)f(x_1)+\ldots+\alpha_n(x)f(x_n)+\beta_0(x)f'(x_0)+\beta_1(x)f'(x_1)+\ldots+\beta_n(x)f'(x_n)$.

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}\{f(x_i)[1-2(x-x_i)\sum_{\substack{k=0\\k\ne i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}]l_i^2(x)+f'(x_i)(x-x_i)l_i^2(x)\}$$

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}w^2(x)$$

特点：$H_{2n+1}(x)$在插值节点与$f(x)$相切，但不保证收敛性。

不规则Hermite插值：基函数法与基于承袭性法，余项估计与证明。

分段三次Hermite插值：$S_3(x)\in C^1[a,b]$ 了解

三次样条插值：分段三次式 $S(x)\in C^2[a,b]$ 了解

直线拟合的最小二乘法：

已知N组数据(x_1,y_1), (x_2,y_2),…,(x_N,y_N)，求一条直线 $y=a+bx$（即求a，b），使

$$Q(a,b)=\|e\|_2^2=e_1^2+e_2^2+\cdots+e_N^2=\sum_{i=1}^{N}[y_i-(a+bx_i)]^2=\min \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Na+b\sum_{i=1}^{N}x_i=\sum_{i=1}^{N}y_i \\ a\sum_{i=1}^{N}x_i+b\sum_{i=1}^{N}x_i^2=\sum_{i=1}^{N}x_iy_i \end{cases}$$

基于神经网络的曲线拟合

Problem: 已知变量 x 与y 的N 个观测值

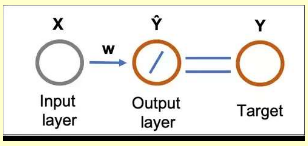
$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ \ldots\ldots\ ,\ (x_N,y_N)$$

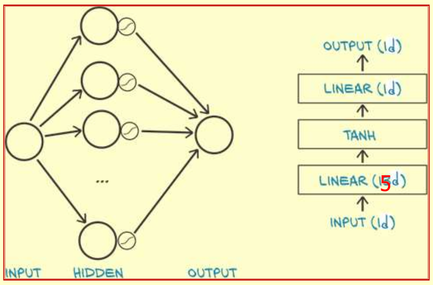
试设计含一个输入层，一个隐藏层（隐藏层只有5个神经元），一个输出层的神经网络对此数据进行曲线拟合。

$$y=\sum_{i=0}^{4} w_{2i}\tanh(w_{1i}x+b_{1i})+b_{20}$$

最小二乘直线拟合:
y=wx+b

⇕





应用实例（只含一个输出层神经元）

 # 温度计读取的数值（单位未知）

t_u = [35.7, 55.9, 58.2, 81.9, 56.3, 48.9, 33.9, 21.8, 48.4, 60.4, 68.4]

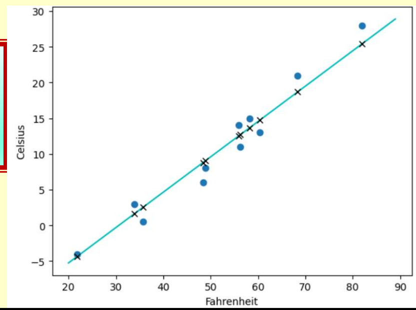
 # 实际结果（摄氏度）

t_c = [0.5, 14.0, 15.0, 28.0, 11.0, 8.0, 3.0, -4.0, 6.0, 13.0, 21.0]

正规方程组 $\begin{cases} 11a+569.8b=115.5 \\ 569.8a+32348.78b=7503.65 \end{cases} \Rightarrow y=-17.317+0.537x$

```
seq_model = nn.Sequential(OrderedDict([
    ('output_linear', nn.Linear(1, 1))
]))
```

$$x \to wx+b \to \hat{y}$$



45

Chapter 2
插值方法

应用实例（隐藏层含5个神经元）

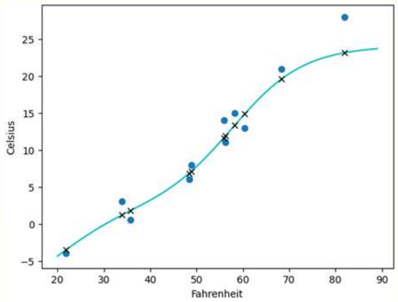
 # 温度计读取的数值（单位未知）

t_u = [35.7, 55.9, 58.2, 81.9, 56.3, 48.9, 33.9, 21.8, 48.4, 60.4, 68.4]

 # 实际结果（摄氏度）

t_c = [0.5, 14.0, 15.0, 28.0, 11.0, 8.0, 3.0, -4.0, 6.0, 13.0, 21.0]

```
seq_model = nn.Sequential(OrderedDict([
    ('hidden_linear', nn.Linear(1, 5)),
    ('hidden_activation', nn.Tanh()),
    ('output_linear', nn.Linear(5, 1))
]))
```



$$
x \to \begin{matrix} w_{11}x+b_{11} \\ w_{12}x+b_{12} \\ w_{13}x+b_{13} \\ w_{14}x+b_{14} \\ w_{15}x+b_{15} \end{matrix} \to \begin{matrix} \tanh(w_{11}x+b_{11}) \\ \tanh(w_{12}x+b_{12}) \\ \tanh(w_{13}x+b_{13}) \\ \tanh(w_{14}x+b_{14}) \\ \tanh(w_{15}x+b_{15}) \end{matrix} \to \sum_{i=0}^{4} w_{2i}\tanh(w_{1i}x+b_{1i})+b_{20}=\hat{y}
$$

HUST

46

Chapter 2
插值方法

多项式拟合的最小二乘法

N个点(x_i,y_i)，从草图上直观判断它们近似于一条m 次曲线。

Problem：已知$(x_1,y_1),\ldots\ldots(x_N,y_N)$，求作m 次多项式(m<<N)，使其最好地反映这N个点的总趋势。

解：令$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_mx^m$，$(a_m\neq 0)$

记$e_i=y_i-y(x_i)$

要实现最好反映… ⇔ $\|e\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix}\right\|_2 = \min$

即使$Q=Q(a_0,a_1,\ldots\ldots a_m)=\Sigma[y_i-(a_0+a_1x_i+\ldots a_m x_i^m)]^2$最小 。

∴ 求拟合多项式⇔求Q的极小值点$(a_0,a_1,\ldots\ldots a_m)$

HUST

$\therefore \dfrac{\partial Q}{\partial a_i} = 0 \quad i = 0 \sim m$ 　从而正规方程组为

$$\begin{cases} a_0 N + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{N} x_i^m = \sum_{i=1}^{N} y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^{N} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{N} x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ \vdots \\ a_0 \sum_{i=1}^{N} x_i^m + a_1 \sum_{i=1}^{N} x_i^{m+1} + \ldots + a_m \sum_{i=1}^{N} x_i^{2m} = \sum_{i=1}^{N} x_i^m y_i \end{cases}$$

令$S_l = \Sigma x_i^l$ $(l=0,1,\ldots,2m)$, $f_l = \Sigma x_i^l y_i$ $(l=0,1,\ldots,m)$，则有：

$$\begin{cases} S_0 a_0 + S_1 a_1 + \ldots + S_m a_m = f_0 \\ S_1 a_0 + S_2 a_1 + \ldots + S_{m+1} a_m = f_1 \\ \vdots \\ S_m a_0 + S_{m+1} a_1 + \ldots + S_{2m} a_m = f_m \end{cases}$$

1. 对称
2. 次对角线元素相等

两个问题:

1. 正规方程组是否有解?
2. 若有解 $(a_0,a_1,\ldots a_m)^T$,该解是否使$Q(a_0,a_1,\ldots a_m)$最小?

定理: ①正规方程组的解存在且唯一,

②而且其解就是使 $Q(a_0,a_1,\ldots a_m)$ 达到最小的点

一般的最小二乘拟合

Problem: 已知变量 x 与y 的N 个观测值

$(x_1,y_1), (x_2,y_2), \cdots\cdots, (x_N,y_N)$

由x与y 的物理意义或N 个点的草图判断拟合函数$P(x)\in\Phi$

(Φ为函数类)，且$\Phi_0(x), \Phi_1(x),\ldots,\Phi_n(x)$为$\Phi$的一组基函数，

则拟合函数$y=p(x)=a_0\Phi_0(x)+a_1\Phi_1(x)+\ldots+a_n\Phi_n(x)$，其残差

$Q(a_0,a_1,\ldots a_n)=\boldsymbol{\Sigma}[p(x_i)-y_i]^2$

$=\boldsymbol{\Sigma}[a_0\Phi_0(x_i)+a_1\Phi_1(x_i)+\ldots+a_n\Phi_n(x_i)-y_i]^2$

$\therefore$求$a_0,a_1,\ldots a_n$，使$Q(a_0,a_1,\ldots a_n)=\min$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial a_0}=0,\ \frac{\partial Q}{\partial a_1}=0,\ldots,\ \frac{\partial Q}{\partial a_n}=0$$

若令 $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix},\Phi_k=\begin{pmatrix} \Phi_k(x_1) \\ \Phi_k(x_2) \\ \vdots \\ \Phi_k(x_N) \end{pmatrix}$ 由向量的内积得正规方程组为

$\boldsymbol{\varphi} a=b$

$$\Phi=\begin{pmatrix} (\Phi_0,\Phi_0) & (\Phi_0,\Phi_1) & \ldots & (\Phi_0,\Phi_n) \\ (\Phi_1,\Phi_0) & (\Phi_1,\Phi_1) & \ldots & (\Phi_1,\Phi_n) \\ & \vdots & & \\ (\Phi_n,\Phi_0) & (\Phi_n,\Phi_1) & \ldots & (\Phi_n,\Phi_n) \end{pmatrix}$$

其中

$$a=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} (\Phi_0,y) \\ (\Phi_1,y) \\ \vdots \\ (\Phi_n,y) \end{pmatrix}$$

51

应用

例 解矛盾方程 $\begin{cases} x_1-15.5=0 \\ x_2-6.1=0 \\ x_1+x_2-20.9=0 \end{cases}$

HW:
作业二 #7

解：令 $Q(x_1,x_2)=(x_1-15.5)^2+(x_2-6.1)^2+(x_1+x_2-20.9)^2$

为使 $Q(x_1,x_2)=\min$，则

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x_1}=2(x_1-15.5)+2(x_1+x_2-20.9)=0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x_2}=2(x_2-6.1)+2(x_1+x_2-20.9)=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow x_1=15.266 \qquad x_2=5.867$$

52

小结

本章介绍了已知数据表构造近似函数的两种方法：

1. 插值方法(用基函数与待定系数法建立公式)

Lagrange插值公式:节点间不等距,用于数值微积分,
方程求根的近似公式的构造

Newton插值公式:用于增加节点与等距节点的插值

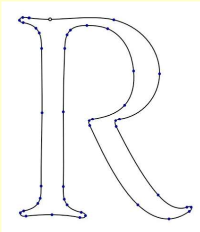
Hermite插值公式:提高逼近函数的光滑性

分段线性插值(三次样条插值)

2. 曲线拟合（插值多项式$P_n(x)$的次数依赖于节点个数，而拟合多项式则不然）

要求：① 掌握插值公式的推导原理
② 掌握公式的形式特征
③ 掌握余项公式的及其证明方法

An Example from Prof. Olson at UIUC



Fonts == interpolation

- how to we “contain” our interpolation?
- splines
- Postscript (Adobe): rasterization on-the-fly. Fonts, etc are defined as cubic Bezier curves (linear interpolation between lower order Bezier curves)
- TrueType (Apple): similar, quadratic Bezier curves, thus cannot convert from TrueType to PS (Type1) losslessly

Interpolation Methods in Computer Graphics and Image processing