第六章　线性方程组的解法

Methods for Solving Linear Systems

引论

- 这一章介绍求解线性方程组(如下)的解法。

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
\qquad (*)
$$

- 工程科学中的许多领域，如热传导，震动，气象学及数量经济学等中的问题解决必须求解下列数值计算问题:

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{微分方程组的差分方法，有限元法.} \\
\text{最小二乘拟合（最小二乘法）}
\end{array}\right\} \text{求解线性方程组}
$$

- 解线性方程组的方法在计算数学与科学计算中尤为重要。

- 线性方程组表示为AX=b
- 当D=|A|≠0时. 由Gramer法则，方程组有唯一解.

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

- 注：用Gramer求解时，要计算n+1个n阶行列式，共做N=n!(n^2-1)+n次乘除法。
- n=20时，用高性能计算机要计算几万年。

有效的解法:

- 直接法：有限步运算求精确解(由于舍入误差的影响，其解是近似的。)——Gauss消元法及其变形
- 迭代法：不是用有限步运算求精确解，而是通过迭代产生近似解序列逐步逼近精确解。

——Jacobi迭代，Gauss -Seidel迭代

6.1 向量和矩阵的范数/* Norms of Vectors and Matrices */

数值分析中,经常要用向量和矩阵,为了应用的需要(误差分析),引入衡量向量和矩阵大小的度量—范数.

对于实数$x \in R$,我们定义了绝对值

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

其满足 $|x| \ge 0$ 非负性.

$|ax| = |a| \cdot |x|$ 齐次性

$|x+y| \le |x| + |y|$ 三角不等式

类似,定义向量范数

Def 6.1 在实n维线性空间R^n中定义一个映射,它使任意$X \in R^n$有一个非负实数与之对应,记为$||x||$,且该映射满足:

(1) 正定性 任意$x \in R^n$, $||x|| \ge 0$, iff $X=0$时, $||X|| = 0$

(2) 齐次性 任意$x \in R^n$, $\lambda \in R$,有 $||\lambda X|| = |\lambda| \cdot ||X||$

(3) 三角不等式 任意$X, Y \in R^n$,有 $||X+Y|| \le ||X|| + ||Y||$

则称该映射在R^n中定义了一个向量范数.

注: R^n中的范数不唯一.

常用的范数有三种: 设$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in R^n$, 则

1—范数: $$||x||_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

2—范数: $$||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = (\sum_{i=0}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

∞—范数: $$||X||_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

P-范数 $\|X\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$

注： (1) 根据范数的定义可验证上述皆为向量范数

(2) p=1,2, $\|X\|_p$ 即为 $\|X\|_1$,$\|X\|_2$.

(3) 任意x∈R^n:

$$\lim_{p\to\infty} \|X\|_p = \|X\|_\infty$$

例： $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$$\|X\|_1 = 1+2+3 = 6$$

$$\|X\|_\infty = 3$$

$$\|X\|_2 = \sqrt{1^2+(-2)^2+3^2} = \sqrt{14}$$

向量范数的性质

(1) 任意X,Y∈R^n,则 $| \|X\| - \|Y\| | \le \|X-Y\|$

证： $\because \|X\| = \| X-Y+Y \| \le \| X-Y \| + \| Y \|$

$\|Y\| = \| Y-X+X \| \le \| Y-X \| + \| X \| = \| X-Y \| + \| X \|$

$\therefore -\| X-Y \| \le \| X \| - \| Y \| \le \| X-Y \|$

(2) R^n上向量范数的等价性：

即若 $\|X\|_a$ 与 $\|X\|_b$ 为 R^n 上两种范数，则存在正数M与m(M>m)对任意X∈R^n,有

$$m\|X\|_b \le \|X\|_a \le M\|X\|_b$$

例：

$$\frac{1}{n}\|X\|_1 \le \|X\|_\infty \le \|X\|_1$$

$$\|X\|_\infty \le \|X\|_1 \le n\|X\|_\infty$$

$$\|X\|_\infty \le \|X\|_2 \le \sqrt{n}\|X\|_\infty$$

注：R^n范数的等价性表明，虽不同向量范数其值不同，但考虑到向量序列收敛性时，却有明显的一致性。

向量范数的应用

Def 6.2 R^n中的向量序列$\{X_k\}$, 即$X_0, X_1, \ldots X_K, \ldots$

其中$X_K = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})^T$，若对任意i（i=1,2,…,n）都有

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^*$$

则向量 $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^T$ 称为$\{X_k\}$的极限。

记做 $\lim_{k\to\infty} X_k = X^*$

注：向量序列收敛实际上是按分量收敛（数列收敛）。

利用向量范数，也可以说明向量序列收敛的概念。

Th. 向量序列$\{X_k\}$依分量收敛于X^* 的充要条件是:

$$\lim_{k\to\infty} \|X_k - X^*\| = 0$$

注：(1) 数列 $\|X_k - X^*\|$ 收敛于0；

(2) 依范数收敛等价于依分量（坐标）收敛。

矩阵的范数

类似于向量范数，给出矩阵范数的定义。

Def. 在线性空间$R^{n\times n}$中定义一个映射，使任意$A\in R^{n\times n}$对应一个非负实数，记做|| A ||, 如果该映射满足:

1.正定性: $\forall A \in R^{n\times n}, \|A\| \geq 0$, 且$\|A\| = 0$ iff $A = 0$

2.齐次性: $\forall \lambda \in R, A \in R^{n\times n}, \|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$

3.三角不等式: $\forall A, B \in R^{n\times n}, \Rightarrow \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

4.相容性: $\forall A, B \in R^{n\times n}, \Rightarrow \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

（相容性是矩阵乘法的需要，而1. 2. 3.为向量范数的推广）

在$R^{n\times n}$中可定义多种范数。

例 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in R^{n\times n}$，则$\|A\|_F = (\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$ 称为A的Frobenius范数.

例2. $A \in R^{n\times n}$， $\|\ldots\|$为R^n中的向量范数，则定义$R^{n\times n}$中的范数为 $\|A\| = \sup\limits_{\substack{\|x\|=1 \\ x\in R^n}} \|Ax\|$.

易验证这样由向量范数导出的映射为矩阵范数，称之为诱导范数（或算子范数）。

诱导范数具有如下性质:

$$\|Ax\| \le \|A\|\cdot\|x\|, \forall A \in R^{n\times n}, x \in R^n$$

证:（1） 当$x=0$时，显然成立，

（2） 当$x\neq 0$时，$\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| A\cdot\dfrac{x}{\|x\|}\right\| \le \|A\|$.

Chapter 6 Methods for solving linear systems

Def. 对于$R^{n\times n}$中的矩阵范数$\|\ldots\|_a$与R^n中的向量范数$\|\ldots\|_b$，若任意$x \in R^n$， $A\in R^{n\times n}$都有 $\|Ax\|_b \le \|A\|_a \cdot \|x\|_b$

则称矩阵范数$\|\ldots\|_a$和向量范数$\|\ldots\|_b$相容（协调）。

注:（**1**）任何向量范数与其诱导范数是相容的。

（**2**）给出一种向量范数$\|x\|_p$,就有对应的诱导范数$\|A\|_p$.

（**3**）向量范数$\|\ldots\|_1$， $\|\ldots\|_2$， $\|\ldots\|_\infty$的诱导矩阵范数仍记为 $\|\ldots\|_1$， $\|\ldots\|_2$， $\|\ldots\|_\infty$.

定理: $A\in R^{n\times n}$ 则A的诱导范数

$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \qquad \text{（列和范数）}$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1} \quad \text{其中}\lambda_1\text{为}A^TA\text{的最大特征值} \qquad \text{（谱范数）}$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \qquad \text{（行和范数）}$$

证：对谱范数$\| A \|_2$来证明。 $\|AX\|_2^2=(AX,AX)=X^TA^TAX\ge 0$

A^TA为对称半正定阵.

设A^TA的特征值为$\lambda_1\ge\lambda_2\ge\ldots\ge\lambda_n\ge 0$，

相应的特征向量为e_1，e_2，…，e_n 且 $(e_i,e_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\ne j\end{cases}$

设 $X\in G=\{X \mid \|X\|_2=1, X\in R^n\}$

$X=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_ne_n$.

则 $AX=\lambda_1x_1e_1+\lambda_2x_2e_2+\ldots+\lambda_nx_ne_n$.

从而， $\|AX\|_2^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2\le\lambda_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\lambda_1$

$\therefore \|AX\|_2\le\sqrt{\lambda_1}$

当$X=e_1$时，上式等号成立，故 $\|A\|_2=\sup_{\|X\|=1}\|AX\|_2=\sqrt{\lambda_1}$

例 求$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\1&2&1\\-1&2&2\end{pmatrix}$的$\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$, $\|A\|_F$, $\|A\|_2$.

$\|A\|_1=\max\{4,5,5\}=5$, $\|A\|_\infty=\max\{5,4,5\}=5$,

$$\|A\|_F=\sqrt{4+1+4+1+4+1+1+4+4}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

$$A^TA=\begin{pmatrix}6&-2&3\\-2&9&4\\3&4&9\end{pmatrix}$$

A^TA的特征值为：

$\lambda_1=13.0902,\quad \lambda_2=9.0000,\quad \lambda_3=1.9098$

$$\therefore \|A\|_2=\sqrt{\rho(A^TA)}=\sqrt{13.092}\approx 3.6180$$

线性方程组的性态

对于线性方程组Ax=b，当|A|≠0,时，可用消去法求数值解。

一般，A，b都是由观测数据而得，存在误差，那么原始数据的误差，对解的结果有什么影响呢？——稳定性分析

（1）若**A**精确，**b**有微小误差**δb**，所得解的误差为**δX**，

而精确解X满足Ax=b

即A(X+δX)=b+δb.

∴ AδX=δb

$\delta X = A^{-1}\delta b$

$$\|\delta X\| = \|A^{-1}\delta b\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b\|$$

$$\therefore \frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \le \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|X\|} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|A\|\|X\|}$$

$$\because \|A\|\|X\| \ge \|AX\| = \|b\|$$

$$\frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \le \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

X的相对误差为**b**的相对误差的 **|| A || || A^{-1} ||** 倍。.

（2）若b精确，A有微小误差δA，所得解的误差为δX

即 （A+δA）(X+δX)=b

∴ AX+AδX+(δA)X+δAδX=b

∴ AδX+(δA)X+δAδX=0

假设A可逆，且（A＋δA）非奇异（当$||A^{-1}||\cdot||\delta A||<1$），则

$$\delta X = -A^{-1}(\delta A)X - A^{-1}\delta A \cdot \delta X$$

$$\therefore \|\delta X\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|\delta A\| \cdot \|X\| + \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|\delta X\|$$

$$(1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|)\|\delta X\| \le \|A^{-1}\|\|\delta A\|\|X\|$$

$$\therefore \frac{\|\delta X\|}{\|X\|} \le \frac{\|A^{-1}\|\|\delta A\|}{1 - \|A^{-1}\|\|\delta A\|} = \frac{\|A^{-1}\|\|A\| \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}{1 - \|A^{-1}\|\|A\| \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

解的相对误差近似等于原始数据相对误差的**||A|| ||A^{-1}||**倍，若**||A|| ||A^{-1}||**较大，解会对舍入误差很敏感。

Def 6.4 设**A**为非奇异矩阵，称$\|A\|\ \|A^{-1}\|$为矩阵**A**的条件数，记为**cond(A)**。

条件数的性质:

- $\mathrm{cond}(A) \ge 1$
- $\mathrm{cond}(kA)=\mathrm{cond}(A)\ ,k\neq 0$
- 若$\|A\|=1$，则 $\mathrm{cond}(A)=\|A^{-1}\|$

若cond(A)很大，称方程组$AX=b$是病态的(不稳定);
否则，是良态的。

例 $\begin{pmatrix}1.000 & 0.25\\ 0.25 & 0.06\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.501\\ 0.375\end{pmatrix}$ 精确解 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

原始数据微小变化

$\begin{pmatrix}1.000 & 0.25\\ 0.25 & 0.06\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.5\\ 0.37\end{pmatrix}$ 其解为 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ -10\end{pmatrix}$

原始数据的绝对误差限$\le 0.5\times 10^{-2}$,而解的误差很大。

$$A=\begin{pmatrix}1.000 & 0.25\\ 0.25 & 0.06\end{pmatrix},A^{-1}=\begin{pmatrix}1000 & 4000\\ -4000 & 16016\end{pmatrix}$$

$$\because \|A\|_\infty=1.251.\|A^{-1}\|_\infty=20016$$

$$\therefore \mathrm{cond}(A)=25040$$

$\therefore AX=b$是病态方程组。

6.2 迭代法

思想:由某初始近似解向量X_0,按一迭代格式产生向量序列$\{X_k\}$,X_k 为准确解X^*的近似值，但其逐步逼近X^*，即

$$\lim_{k\to\infty} X_k = X^*$$

➢ 怎样建立迭代格式 ➢ 迭代格式的收敛性 ➢ $\|X^*-X_k\|=?$

将$AX=b$，A非奇异，变换为一个等价的方程组:

$x=Bx+f$ (B为n阶方阵，f 为n维向量)。

有迭代格式
$$\begin{cases} X_0 \\ X_{k+1} = BX_k + f \quad k=0,1,\ldots \end{cases}$$

从而产生向量序列$\{X_K\}$:$X_0, X_1,\ldots, X_k,\ldots$，称为简单迭代法，B为迭代矩阵，$\{X_K\}$为迭代序列。

若$\{X_k\}$收敛: $\lim_{k\to\infty} X_k = X^*$

则有$X^*=BX^*+f$，即X^*为$AX=b$的解。

若$B=(b_{ij})_{n\times n}$， $f=(f_1,f_2,\ldots,f_n)^T$，则上式可用分量形式:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_{11}x_1^{(k)} + b_{12}x_2^{(k)} + \ldots + b_{1n}x_n^{(k)} + f_1 \\ x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k)} + b_{22}x_2^{(k)} + \ldots + b_{2n}x_n^{(k)} + f_2 \\ \ldots \\ x_n^{(k+1)} = b_{n1}x_1^{(k)} + b_{n2}x_2^{(k)} + \ldots + b_{nn}x_n^{(k)} + f_n \end{cases} \quad k=0,1,2,\ldots, \quad X_k = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$$

或 $x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j^{(k)} + f_i, \; i=1,2,\ldots,n; \; k=0,1,2,\ldots$

那么,如何由$AX=b$ 等价变形为 $x=Bx+f$?

例: $A=M-N$. (M非奇异) 例: $A=L+D+U$.

则有 $(M-N)x=b$.

$\therefore MX=NX+b$

$\therefore X=M^{-1}NX+M^{-1}b$

从而，迭代矩阵 $B=M^{-1}N$， $f=M^{-1}b$.

迭代过程的收敛性

对某一迭代过程: $X_{k+1}=BX_k+f$. 其产生的序列$\{X_k\}$是否收敛呢? 它和迭代矩阵**B**相关。

Def 6.5 已知$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$为**A**的全体特征值，**A**的谱半径为:

$$\rho(A)=\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$$

Th. 设$A\in R^{n\times n}$, 则**A**的谱半径不超过**A**的任何一种范数：

$$\rho(A)\le\|A\|$$

证明: 设λ是**A**的任意特征值，**x**为对应的特征向量$(x\ne 0)$，则

$$Ax=\lambda x$$

$$\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|=\|Ax\|\le\|A\|\cdot\|x\| \qquad \because \|x\|>0 \qquad \therefore |\lambda|\le\|A\|$$

$$\therefore\ \rho(A)\le\|A\|$$

引理 设$B\in R^{n\times n}$,则$B^k\to O_{n\times n}(k\to\infty)$的充要条件是$\rho(B)<1$.

证明: (参考Th6.13,引理6.3,Jordan标准型)

迭代法的收敛性条件

Th6.14 对于任意的初始向量X_0,迭代过程$X_{k+1}=BX_k+f$ 收敛于$AX=b$的解 X^*的充要条件是$\rho(B)<1$，此时$AX=b$有唯一解X^*.

证: （1）$\because X^*=BX^*+f$

$$X_{k+1}=BX_k+f$$

$$\therefore X_{k+1}-X^*=B(X_k-X^*)$$

$$\therefore X_{k+1}-X^*=B^{k+1}(X_0-X^*)$$，从而:

$$\lim_{k\to\infty}X_k=X^* \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}B^k(X_0-X^*)=0_n \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}B^k=O_{n\times n} \Leftrightarrow \rho(B)<1$$

（2）$X=BX+f$,即为$(I-B)X=f$

$\rho(B)<1$则$|I-B|\ne 0$,

从而$X=BX+f$有唯一解。

Th 6.15 当$\|B\|<1$时,迭代过程$X_{k+1}= BX_k+f$收敛于$X= BX+f$的解X^*,且

$$\|X_k - X^*\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\|X_k - X_{k-1}\| \qquad (6.59)$$

$$\|X_k - X^*\| \le \frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\|X_1 - X_0\| \qquad (6.60)$$

证明:(1) $\because \rho(B) \leq \|B\|<1$

$\therefore$ 迭代过程收敛

(2) $\because X_k-X^*= B (X_{k-1}-X^*)$

$\therefore \|X_k-X^*\|\le\| B \|\cdot\| X_{k-1}-X^* \|$

$= \|B\|\cdot\| X_{k-1}- X_k + X_k -X^*\|$

$\le\|B\| (\| X_{k-1}- X_k \|+ \|X_k -X^*\|)$

$\therefore (1- \|B\|)\|X_k-X^*\|\le \|B\|\cdot\|X_{k-1}-X_k\|$

$$\therefore \|X_k - X^*\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\|X_k - X_{k-1}\|$$

(3) $\because X_k - X_{k-1}= B (X_{k-1}-X_{k-2})=\ldots=B^{k-1} (X_1-X_0)$

$\therefore \| X_k- X_{k-1} \|\le\|B\|^{k-1}\|X_1-X_0\|$; 将其代入(6.59)即得(6.60)

停机准则:用户精度要求$\| X_k- X^* \|<\varepsilon$.

I. 先验估计法:

$$\frac{\|B\|^k}{1-\|B\|}\|X_1 - X_0\| < \varepsilon$$

则迭代次数

$$k > \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-\|B\|)}{\|X_1 - X_0\|}}{\ln\|B\|}$$

取**k**为满足上式的最小正整数(保守估计)

II. 后验估计法:

$$\| X_k -X_{k-1} \|<\varepsilon$$

6.3 简单迭代法

对AX=b的A作如下分解:

若A的主对角线元素都不为**0**，即$a_{ii}\neq 0$，i=1~n.

记$D=diag(a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn})$.

若A=D-N.

则 (D-N)X=b，即$X=D^{-1}NX+D^{-1}b$

则迭代格式为:

$$X_{k+1}=D^{-1}NX_k+D^{-1}b$$

此称为Jacobi迭代，迭代矩阵$B=D^{-1}N$,其主对角线元素全为0.

下面讨论: Jacobi迭代的收敛性

充要条件——$\rho(D^{-1}N)<1$，充分条件——$\|D^{-1}N\|<1$

Chapter 6 Methods for solving linear systems

Def 6.6 若$A=(a_{ij})_{n\times n}$的各行元素满足$|a_{ii}|\geq\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|$ ，$i=1,2,\ldots,n$
则称**A**是对角占优阵,
若上各式严格不等号成立,则称A为严格对角占优阵。

Th 6.17 严格对角占优阵是可逆的。

Th 6.18 若A严格对角占优阵，则其Jacobi迭代收敛.

分析: A=D-N

迭代矩阵 $B=D^{-1}N$

只需证: $\|B\|_\infty=\|D^{-1}N\|_\infty<1$

例6.7 用Jacobi迭代法解下列方程组(精确到10^{-3})

$$\begin{pmatrix} 4 & 0.24 & -0.08 \\ 0.09 & 3 & -0.15 \\ 0.04 & -0.08 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0.06 & -0.02 \\ 0.03 & 1 & -0.05 \\ 0.01 & -0.02 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

解: 原方程组可变形为右上形式， 记为**AX=b**

$\because$ A为严格对角占优阵， $\therefore$其Jacobi迭代收敛。

令 A=D-N， D=I, 则

$$B = D^{-1}N = \begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{pmatrix} \qquad D^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\therefore$Jacobi迭代格式为

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & 0.02 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

取$X_0=(2,3,5)^T$迭代得:

$X_1=(1.92,3.19,5.04)^T$

$X_2=(1.909,3.194,5.045)^T$

$\because \| X_2 - X_1 \|_\infty > 10^{-3}$

$\therefore$进一步迭代

$X_3=(1.909,3.194,5.045)^T$

又$\|X_3 - X_2\|_\infty < 10^{-3}$

取 $X^* \approx X_3$

Algorithm: **(Jacobi迭代法)**

Step 1 取$\mathbf{X_0}$,置精度要求和最大迭代次数N，k=0

Step 2 计算$X_{k+1}=BX_k+f$

Step 3 if ($\max\limits_{i=1}^{n}|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}|<\varepsilon$) stop ($X^*\approx X_{k+1}$)

else if (k=N) stop (不收敛)

else k=k+1；

goto **Step** 2

Jacobi迭代公式的分量形式

设方程组 **AX=b**，其分量形式为

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ a_{ii}\neq 0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$a_{ii}x_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j = b_i$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

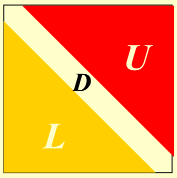
由此我们可以得到 **Jacobi** 迭代公式：

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

雅可比迭代法的另一种矩阵表示

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \xrightarrow{a_{ii} \neq 0} \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n + b_1) \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1 - \ldots - a_{2n}x_n + b_2) \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1 - \ldots - a_{nn-1}x_{n-1} + b_n) \end{cases}$$

写成矩阵形式:

$A =$ 

$$\begin{aligned} Ax = b \ &\Leftrightarrow \ (D+L+U)x = b \\ &\Leftrightarrow \ Dx = -(L+U)x + b \\ &\Leftrightarrow \ x = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{B}x + \underbrace{D^{-1}b}_{f} \end{aligned}$$

Jacobi 迭代阵

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

高斯-塞德尔迭代法 (AX=b)

Chapter 6 Methods for solving linear systems

注意到利用**Jacobi**迭代公式计算$x_i^{(k+1)}$时，已计算好下述值:

$$x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)}$$

而**Jacobi**迭代公式并不利用这些最新的近似值计算，仍用

$$x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots, x_{i-1}^{(k)}$$

这启发我们可以对其加以改进, 即在每个分量的计算中尽量利用最新的迭代值，得到

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

上式称为 **Gauss-Seidel** 迭代法.

高斯-塞德尔迭代法

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(\boxed{-a_{21}x_1^{(k+1)}} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(\boxed{-a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)}} - a_{34}x_4^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)} + b_3)$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(\boxed{-a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - a_{n3}x_3^{(k+1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}} + b_n)$$

写成矩阵形式：

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)}) + D^{-1}b$$

$$\Leftrightarrow \quad (D+L)x^{(k+1)} = -Ux^{(k)} + b$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{(k+1)} = \underbrace{-(D+L)^{-1}U}_{B}x^{(k)} + \underbrace{(D+L)^{-1}b}_{f}$$

Gauss-Seidel 迭代阵

高斯-塞德尔迭代法算例

考虑解方程组

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 - 2x_3 = 7.2 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 8.3 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = 4.2 \end{cases}$$

其准确解为X^*={1.1, 1.2, 1.3}。

高斯-塞德尔迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.1x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.72 \\ x_2^{(k+1)} = 0.1x_1^{(k+1)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.83 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+1)} + 0.2x_2^{(k+1)} + 0.84 \end{cases}$$

迭代次数	x_1	x_2	x_3
0	0	0	0
1	0.72	0.902	1.1644
2	1.04308	1.167188	1.282054
3	1.09313	1.195724	1.297771
4	1.099126	1.199467	1.299719
5	1.09989	1.199933	1.299965
6	1.099986	1.199992	1.299996
7	1.099998	1.199999	1.299999
8	1.1	1.2	1.3

Chapter 6 Methods for solving linear systems

高斯-塞德尔迭代法算法

For the matrix equation $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$ with an initial guess $\vec{x}^0$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \vec{x}_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}$$

Steps	
1.	While $\frac{\|\vec{x}^k - \vec{x}^{k-1}\|_{L\infty}}{\|\vec{x}^k\|_{L\infty}} > tolerance$ do Step 2
2.	For $i = 1, 2, \ldots, n$ do Step 3
3.	$x_i^k = \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^k - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{k-1} + b_i \right) \Big/ a_{ii}$

Python/NumPy implementation of Gauss-Seidel iteration

```
Import numpy as np
def gauss_seidel(A, b, tolerance=1e-10, max_iterations=10000):
    x = np.zeros_like(b, dtype=np.double)

    for k in range(max_iterations):
        x_old = x.copy()
        #Loop over rows
        for i in range(A.shape[0]):
            x[i] = (b[i] - np.dot(A[i,:i], x[:i]) - np.dot(A[i,(i+1):], x_old[(i+1):])) / A[i ,i]
        #Stop condition
        if np.linalg.norm(x - x_old, ord=np.inf) / np.linalg.norm(x, ord=np.inf) < tolerance:
            break
    return x
```


定理 设 $Ax=b$ ， 如果：

A为严格对角占优，则解 $Ax=b$ 的**Jacobi**迭代法，**Gauss-Seidel**迭代法均收敛。

例：设方程组为

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -12 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 = 3 \end{cases}$$

试分别写出其 **Jacobi** 和 **Gauss-Seidel** 的迭代格式以及相应的迭代矩阵。

解：**Jacobi** 迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{5}(-12 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) = -\frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}(20 + x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)}) = \frac{1}{4}x_1^{(k)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + 5 \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(3 - 2x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)}) = -\frac{1}{5}x_1^{(k)} + \frac{3}{10}x_2^{(k)} + \frac{3}{10} \end{cases}$$

故 **Jacobi** 迭代矩阵为

$$\mathbf{B_J} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \end{bmatrix}$$

Seidel迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} - \frac{1}{2}x_3^{(k)} + 5 \\ x_3^{(k+1)} = -\frac{1}{5}x_2^{(k+1)} + \frac{3}{10}x_3^{(k+1)} + \frac{3}{10} \end{cases}$$

从式中解出

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{2}{5}x_2^{(k)} - \frac{1}{5}x_3^{(k)} - \frac{12}{5} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{10}x_2^{(k)} - \frac{11}{20}x_3^{(k)} + \frac{22}{5} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{20}x_2^{(k)} - \frac{1}{8}x_3^{(k)} + \frac{21}{10} \end{cases}$$

故可得Seidel迭代矩阵为 $\boldsymbol{B}_s = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{11}{20} \\ 0 & \frac{1}{20} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$

Jacobi迭代矩阵$\mathbf{B}_j$的主对角线为零，而Seidel迭代矩阵$\mathbf{B}_s$的第1列都是零，这对一般情况也是成立的。

Jacoai迭代的收敛性

已知线性方程组为：
$$\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 20 \\ 4x_1 + 11x_2 - x_3 = 33 \\ 6x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 36 \end{cases}$$

首先将原方程组写为迭代形式的方程组，即：

$$\begin{cases} x_1 = 20/8 - 0 + 3/8\, x_2 - 2/8 x_3 \\ x_2 = 33/11 - 4/11 x_1 - 0 + 1/11 x_3 \\ x_3 = 36/12 - 6/12 x_1 - 3/12 x_2 - 0 \end{cases}$$

由于：

$$\|B\|_\infty = \max\{5/8, 5/11, 9/12\} = 9/12 < 1$$

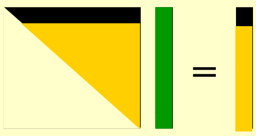
或任一列和的最大值<1,即：

$$\|B\|_1 = \max\{114/132, 60/96, 30/88\} = 114/132 < 1$$

结论：该方程组采用Jacobi迭代法计算是收敛的。

直接法：高斯消元法解 $AX=b$

首先将A化为上三角阵，再回代求解。



$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &= .. \\ a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{n-1n}x_n &= b_{n-1} \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

其中 $a_{ii} \neq 0 \quad (i = 1,2,\dots\dots, n)$

（一） 高斯消去法的求解过程, 可分为两个阶段:

首先, 把原方程组化为上三角形, 称之为“消元”过程;

然后, 用逆次序逐一求出三角方程组的解, 并称之为“回代”过程.

下面分别写出“消元”和“回代” 两个过程的计算步骤.

消元 记 $A^{(1)}=A=(a_{ij}^{(1)})_{n\times n}$， $b^{(1)}=b=(b_1^{(1)},\cdots,b_n^{(1)})^T$

Step 1: 设 $a_{11}^{(1)}\neq 0$ ， 计算因子 $m_{i1}=a_{i1}^{(1)}/a_{11}^{(1)}\quad (i=2,...,n)$

将增广矩阵第 i 行 $-\ m_{i1}\times$ 第1行，得到

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ O & & A^{(2)} & & b^{(2)} \end{array}\right]$$

其中

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)}=a_{ij}^{(1)}-m_{i1}a_{1j}^{(1)} \\ b_i^{(2)}=b_i^{(1)}-m_{i1}b_1^{(1)} \end{cases}\quad (i,j=2,...,n)$$

Step k: 设 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$， 计算消元因子:

$$m_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} \quad (i = k+1, \dots, n)$$

且计算
$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)} \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)} \end{cases}$$
$$(i, j = k+1, \dots, n)$$

共进行? $n-1$ 步

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \cdots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

Chapter 6 Methods for solving linear systems

回代 $x_n = b_n^{(n)} / a_{nn}^{(n)}$

$$x_i = \frac{b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j}{a_{ii}^{(i)}} \quad (i = n-1, \dots, 1)$$

若A的所有顺序主子式均不为0，则高斯消元无需换行即可进行到底，得到惟一解。

高斯消元法_例题分析

利用高斯消元法求解方程组:

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 12 \\ 12x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 34 \\ 3x_1 - 13x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 27 \\ -6x_1 + 4x_2 + x_3 - 18x_4 = -38 \end{cases}$$

解:

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 12 \\ 12x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 34 \\ 3x_1 - 13x_2 + 9x_3 + 3x_4 = 27 \\ -6x_1 + 4x_2 + x_3 - 18x_4 = -38 \end{cases} \quad (1)$$

利用 $r_i - \frac{\alpha_{i1}}{\alpha_{11}} r_1$, i=2,3,4. 得

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 12 \\ \quad -4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 10 \\ \quad -12x_2 + 8x_3 + x_4 = 21 \\ \quad 2x_2 + 3x_3 - 14x_4 = -26 \end{cases} \quad (2)$$

利用 $r_i - \frac{\alpha_{i2}^{(2)}}{\alpha_{22}^{(2)}} r_2$, i=3,4. 得

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 12 \\ \quad -4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 10 \\ \quad 2x_3 - 5x_4 = -9 \\ \quad 4x_3 - 13x_4 = -21 \end{cases} \quad (3)$$

利用 $r_i - \frac{\alpha_{i3}^{(3)}}{\alpha_{33}^{(3)}} r_3$,i=4． 得

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 12 \\ \quad -4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 10 \\ \quad\quad 2x_3 - 5x_4 = -9 \\ \quad\quad\quad -3x_4 = -3 \end{cases} \quad (4)$$

显然，方程组(4)与(1)是等价的，其系数矩阵为上三角状的，易于求解. 称以上过程为高斯消去法的消去过程. 通过方程组(4)的回代求解，可以得到准确解为

$$x^* = [1 \quad -3 \quad -2 \quad 1]^T$$

这一过程为高斯消去法的回代过程。

高斯消元法-选主元消去法

主元素及其选取问题

Gauss消元法第 k 次消元是用第 k 个方程

$$a_{kk}^{(k)} x_k + \cdots + a_{kn}^{(k)} x_n = b_k^{(k)}$$

来消去第 $k+1,\ldots,n$ 个方程中的 x_k，条件是 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ ．

$a_{kk}^{(k)}$ 是实现第 k 次消元的关键元素，称为第k次消去的主元.

Gauss消元法存在的问题是：零主元，小主元引起不稳定

高斯消元法–选主元消去法

例：单精度解方程组 $\begin{cases} 10^{-9}x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

/* 精确解为 $x_1 = \dfrac{1}{1-10^{-9}} = 1.\overbrace{00\ldots0}^{8个}100\ldots$ 和 $x_2 = 2 - x_1 = 0.\overbrace{99\ldots9}^{8个}899\ldots$ */

用Gaussian Elimination计算:

$m_{21} = a_{21}/a_{11} = 10^9$

$a_{22} = 1 - m_{21} \times 1 = 0.\overbrace{0\ldots0}^{8个}1 \times 10^9 - 10^9 \doteq -10^9$

$b_2 = 2 - m_{21} \times 1 \doteq -10^9$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} 10^{-9} & 1 & 1 \\ 0 & -10^9 & -10^9 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow x_2 = 1, \quad x_1 = 0$

用小主元10^{-9}作除数，致使其它元素的数量级大大增加，舍入误差的扩散将准确解淹没了。

全主元消去法与列主元消去法

全主元：每一步选绝对值最大的元素为主元素，保证 $|m_{ik}| \le 1$ 。

Step k: ① 选取 $|a_{i_k j_k}| = \max\limits_{k \le i, j \le n} |a_{ij}| \ne 0$；

② If $i_k \ne k$ then 交换第 k 行与第 i_k 行；
If $j_k \ne k$ then 交换第 k 列与第 j_k 列；

③ 消元

注：列交换改变了 x_i 的顺序，须记录交换次序，解完后再换回来。

选全主元需要相当多的比较计算时间，因此常采用局部选主元的方法，省去换列的步骤。

列主元：每次仅选一列中最大的元 $|a_{i_k, k}| = \max\limits_{k \le i \le n} |a_{ik}| \ne 0$

高斯列主元素消元法

算法：1. 消元过程，对 $k=1,2,\cdots,n-1$

(1) 选主元，找 $i_k \in \{k,k+1,\cdots,n\}$ 使得

$$\left|a_{i_k k}^{(k)}\right| = \max_{k\le i\le n}\left|a_{ik}^{(k)}\right|$$

(2) 若 $a_{i_k k}^{(k)}=0$，则停止，退出；$\det A=0$

(3) 若 $i_k \ne k$，则换行，$a_{kj}^{(k)} \leftrightarrow a_{i_k j}^{(k)} \quad (j=k,\cdots,n+1)$

(4) 消元，对 $i=k+1,\cdots,n$ 有 $m_{ik}=a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$

$j=k+1,\cdots,n+1$ 有

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik}a_{kj}^{(k)}$$

回代过程：

(1) 若 $a_{nn}^{(n)}=0$，则停止 $\det A=0$

(2) 对 $i=n,\cdots,1$

$$x_n = b_n^{(n)}/a_{nn}^{(n)}$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)}x_j}{a_{ii}^{(i)}} \qquad (i=n-1,\dots,1)$$

列主元消去法的效果

$$|a_{i_k,k}| = \max_{k\le i\le n} |a_{ik}| \ne 0$$

例: $\begin{bmatrix} 10^{-9} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 10^{-9} & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \quad x_2 = 1, \quad x_1 = 1 \ \checkmark$$

注：列主元法没有全主元法稳定。

例: $\begin{bmatrix} 1 & 10^9 & 10^9 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 10^9 & 10^9 \\ 0 & -10^9 & -10^9 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = 1, \quad x_1 = 0$ ✘

小结

高斯消去法是解线性方程组直接方法的基础。将线性方程组约化为等价的三角形方程组再求解是直接法的基本解法。为保证方法的数值稳定性，引进选主元的技巧；如列选主元消元法等。

迭代法是一种逐次逼近方法，收敛性是迭代法的前提，针对不同的问题，分析并采用适当的数值算法，如**Jacobi**方法、**Guass-Seidel**方法等。