计算方法/数值分析复习

Chapter 1 误差的基本理论

HUST

- 近似计算的基本方法
  - 离散化
  - 递推化
  - 近似替代
- 误差的来源
  - 模型误差
  - 观测误差
  - 截断误差
  - 舍入误差

能举例说明两者的区别

- 数值计算应注意的基本原则

2

3

误差的概念

HUST

- 误差 $e = x^* - x$
- 绝对误差 $\varepsilon(x) = \left| x - x^* \right| \le \eta = \frac{1}{2} \times 10^{-n}$
- 绝对误差限
- 相对误差 $e_r = \left| \frac{x^* - x}{x^*} \right|$
- 相对误差限 $|e_r| = \left| \frac{x^* - x}{x^*} \right| \le \frac{\eta}{|x^*|} = \varepsilon_r$
- 有效数字

计算结果的要求(1)具有3位有效数字；或(2)保留3位有效数字。

绝对误差、相对误差与有效数字的关系

HUST

$$x^* = 0.a_1 a_2 \cdots a_l \cdots a_n \times 10^m, a_1 \neq 0$$

- 绝对误差与有效数字的关系

$$\left| x^* - x \right| \le \frac{1}{2} \times 10^{m-l} = \eta \quad \Leftrightarrow \quad x^* \text{有} l \text{位有效数字}$$

- 相对误差与有效数字的关系

定理1 x^*有n位有效数字 $\Rightarrow \varepsilon_r(x^*) = \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$

定理2 $\varepsilon_r(x^*) = \frac{1}{2(a_1 + 1)} \times 10^{-n+1} \Rightarrow x^*$有$n$位有效数字

- 有效数字的判定方法
  - 定义法
  - 四舍五入法
  - 定理2

4

应用举例

HUST

例1 求π有5位有效数字的近似值的绝对、相对误差限。

解：求绝对误差限

π=3. xxxxxx …，　且x^*有5位有效数字，则

$$\left|x^*-\pi\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{-4}=\eta$$

求相对误差限

（1）根据定理1（ $a_1=3$, $n=5$ ）

$$\varepsilon_r(x^*)=\frac{1}{2a_1}\times 10^{-n+1}=\frac{1}{6}\times 10^{-4}$$

（2）根据绝对误差限与相对误差限的关系

$$\varepsilon_r=\frac{\eta}{|\pi|}=\frac{1}{2\pi}\times 10^{-4}\approx 0.1592\times 10^{-4}$$

5

应用举例

HUST

例2 设x=3.78696, 问其下列近似值各有几位有效数字？

x_1^*=3.7870 ，　x_2^*=3.7869.

解：对x_1^*可用三种方法

（1）x_1^*符合四舍五入法则，故其有5位有效数字；

（2）根据有效数字的定义，先求绝对误差限

$$\left|x_1^*-x\right|=0.00004\le \tfrac{1}{2}\times 10^{-4} \Rightarrow x_1^*\text{有5位有效数字}$$

（3）根据定理2，先求相对误差限

$$\left|\frac{x_1^*-x}{x}\right|=\frac{0.00004}{3.78696}=0.1056\times 10^{-4}\le\frac{1}{2(3+1)}\times 10^{-5+1}$$

$$\Rightarrow x_1^*\text{有5位有效数字}$$

x_2^*不符合四舍五入法则.

6

算术运算的误差限估计及应用

HUST

$\eta(x^*+y^*)=\eta(x^*)+\eta(y^*)$

$\eta(x^*-y^*)=\eta(x^*)+\eta(y^*)$

$\eta(x^*y^*)\approx|x^*|\eta(y^*)+|y^*|\eta(x^*)$

$$\eta\left(\frac{x^*}{y^*}\right)\approx\frac{|x^*|\eta(y^*)+|y^*|\eta(x^*)}{|y^*|^2},\quad \text{其中}\, y\neq 0,\ y^*\neq 0$$

函数的误差估计：对于 $y=f(x)$，

$$\eta(y)|\approx|f'(x^*)|\cdot\eta(x)$$

7

应用举例

HUST

HW1-2 若a^*=1.1062，b^*=0.947都是经四舍五入后得到的近似值，问a^*+b^*, a^*b^*各有几位有效数字？

解：根据四舍五入法则，有效数字与绝对误差限的关系可知 $\eta(a^*)=\frac{1}{2}\times10^{-4},\quad \eta(b^*)=\frac{1}{2}\times10^{-3}$

$$\therefore\ \eta(a^*+b^*)=\eta(a^*)+\eta(b^*)=\tfrac{1}{2}\times10^{-4}+\tfrac{1}{2}\times10^{-3}<\tfrac{1}{2}\times10^{-2}$$

$$\therefore\ \eta(a^*b^*)\approx|a^*|\eta(b^*)+|b^*|\eta(a^*)$$

$$=1.1062\times\tfrac{1}{2}\times10^{-3}+0.947\times\tfrac{1}{2}\times10^{-4}<\tfrac{1}{2}\times10^{-2}$$

又$1<a^*+b^*, a^*b^*<10$,

故a^*+b^*, a^*b^*各有3位有效数字。

8

Chapter 2 插值方法与多项式拟合

HUST

Problem I：已知y=f(x)的函数表

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

且x_i(i=0,1,…,n)两两互异,$x_i \in [a,b]$，求次数不超过n的多项式$P_n(x)$，使得

$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$，$P_n(x_i)=y_i$　　i=0,1,…,n

- 插值多项式的存在唯一性：　$P_n(x)=N_n(x)$
- Lagrange插值(利用基函数法推导)

$$P_n(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\cdots+y_nl_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_kl_k(x)$$

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$R_n(x)=f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x),\xi\in(a,b)$$

9

Lagrange插值余项公式的应用

HUST

- 若f(x)为次数不超过n的多项式，则其n次插值多项式

$P_n(x)=f(x)$

证：$\because$ $f^{(n+1)}(\xi)=0$，

$$\therefore R_n(x)=f(x)-p(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)=0$$

$\therefore$ $P_n(x)=f(x)$

- Lagrange插值基函数的性质

$$l_0(x)+l_1(x)+\cdots+l_n(x)=\sum_{k=0}^{n}l_k(x)\equiv 1\qquad l_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } i=j;\\ 0 & \text{if } i\neq j.\end{cases}$$

- 估计插值计算结果的截断误差

10

Newton插值公式及余项

HUST

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$R_n(x)=f(x)-N_n(x)=f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

- 差商的定义，四条性质与差商表的计算

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$$

11

Hermite插值

HUST

- 规则Hermite插值多项式（记住两点三次公式$H_3(x)$）

Problem:已知函数y=f(x)在插值节点$a\le x_0<x_1<\ldots<x_n\le b$上的函数值$f(x_i)$与导数值$f'(x_i)$,i=0，1,2,…n.求多项式H(x)，使:
$H(x_i)=f(x_i)$，$H'(x_i)=f'(x_i)$，i=0,1,2,…n

$$H_{2n+1}(x)=\alpha_0(x)f(x_0)+\alpha_1(x)f(x_1)+\ldots+\alpha_n(x)f(x_n)$$
$$+\beta_0(x)f'(x_0)+\beta_1(x)f'(x_1)+\ldots+\beta_n(x)f'(x_n)$$

$$R_{2n+1}(x)=f(x)-H_{2n+1}(x)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}w_n^{\,2}(x)$$

- 不规则Hermite插值，余项估计与证明
  - 基函数法
  - 基于承袭性的方法

12

分段线性插值

HUST

Problem 对y=f(x)，x∈[a,b]，其定义区间有分划

Φ:a=$x_0<x_1<x_2<\ldots\ldots x_n=b$，且已知$y_i=f(x_i)$，i=0,1,…,n，

求具有分划**Φ**的分段一次式$S_1(x)$，使：$S_1(x_i)=y_i$,i=0,1,2,…,n.

$$f(x)\approx S_1(x)=y_i\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+y_{i+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\quad \text{for}\ \ x\in[x_i,x_{i+1}]$$

定理设$f(x)\in c^2[a,b]$,$a<x_0<x_1<\ldots<x_n=b$,且$f(x_i)$, i=0,1,…,n,若$S_1(x)$为问题的解,则当 x∈[a,b] 时

$$|f(x)-S_1(x)|\leq Mh^2/8$$

其中$M=\max|f''(x)|$，x∈[a,b]，$h=\max\{h_i,\ i=0,\ldots n-1\}$

因而$S_1(x)$在[a,b]上一直收敛到f(x)。

直线拟合的最小二乘法

HUST

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$$

$$\varphi(x)=a+bx$$

$$Q(a,b)=\sum_{k=1}^{n}(y_k-\varphi(x_k))^2=\sum_{k=1}^{n}(y_k-a-bx_k)^2$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q(a,b)}{\partial a}=0\\[2mm]\dfrac{\partial Q(a,b)}{\partial b}=0\end{cases}$$

正规方程组
$$\begin{cases}na+\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)b=\sum_{k=1}^{n}y_k\\ \left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)a+\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)b=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\end{cases}$$

14

非规则多项式拟合模型 $y=aQ+bQ^2$

HUST

解：构造残差函数

$$Z=\sum_{i=1}^{4}[y_i-g(Q_i)]^2$$

Q	1	2	3	4
y	0.8	1.5	1.8	2.0

根据最小二乘原理，使 $Z=\sum_{i=1}^{4}[y_i-(aQ_i+bQ_i^2)]^2=\min$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Z(a,b)}{\partial a}=0\\ \dfrac{\partial Z(a,b)}{\partial b}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\sum_{k=1}^{4}Q_k^2+b\sum_{k=1}^{4}Q_k^3=\sum_{k=1}^{4}y_kQ_k\\ a\sum_{k=1}^{4}Q_k^3+b\sum_{k=1}^{4}Q_k^4=\sum_{k=1}^{4}y_kQ_k^2\end{cases}$$

15

Chapter 3 数值积分 $I=\int_a^b f(x)dx$

HUST

- 机械求积公式 $\int_a^b f(x)dx\approx A_0f(x_0)+A_1f(x_1)+\dots+A_nf(x_n)$
- 代数精度的概念及判别方法（m次） 当$f(x)=1,x,x^2,\dots,x^m$时，求积公式精确成立，而$f(x)=x^{m+1}$时公式近似成立。
- 求积公式的构造方法 $\int_a^b f(x)dx\approx\int_a^b P_n(x)dx$
  - 利用代数精度解方程组 $\Leftrightarrow A_k=\int_a^b l_k(x)dx$
  - 插值型求积公式 $\Leftrightarrow$至少具有n次代数精度
- **Newton-Cotes**求积公式——等距节点的插值型求积公式

$$I_n=(b-a)\sum_{k=0}^{n}C_kf(x_k)$$

n≤7时，公式稳定性好.

I_n至少有n次代数精度，当n为偶数时,它有n+1次代数精度.

16

基本数值积分公式

HUST

- 梯形公式

$$I_1 = T = \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)]$$

$$R_T = -\frac{f^{(2)}(\xi)}{12}(b-a)^3 = O(b-a)^3 \quad \xi \in (a,b)$$

- **Simpson**公式

$$I_2 = S = \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]$$

$$R_S = -\frac{(b-a)}{180}(\frac{b-a}{2})^4 f^{(4)}(\xi) = O(b-a)^5$$

- 复化求积公式

$$T_n = \frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)], \quad h = \frac{b-a}{n}$$

$$I-T_n \approx -\frac{h^2}{12}[f'(b)-f'(a)] = O(h^2)$$

$$I-T_n = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\xi) = O(h^2), \xi \in (a,b)$$

17

基本数值积分算法

HUST

- 变步长梯形算法

$$T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\left[T_n + h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}})\right]$$

$$I - T_{2n} \approx \frac{1}{3}(T_{2n} - T_n)$$

$$| T_{2n} - T_n | < \varepsilon \Rightarrow | I - T_{2n} | < \varepsilon$$

- **Romberg**外推方法

$$S_n = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n \qquad C_n = \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n \qquad R_n = \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n$$

$$|R_{2n}-R_n|<\varepsilon$$

18

例：下述公式是否为插值型，为什么，其代数精度是多少？

$$\int_0^3 f(x)dx \approx \frac{3}{2}[f(1)+f(2)]$$

解：$x_0=1, x_1=2$, $[a，b]=[0，3]$，$A_0 = A_1 = \frac{3}{2}$

判定方法一：

$$\int_0^3 l_0(x)dx = \int_0^3 \frac{x-2}{1-2}dx = \frac{3}{2} = A_0$$

$$\int_0^3 l_1(x)dx = \int_0^3 \frac{x-1}{2-1}dx = \frac{3}{2} = A_1$$

由插值型公式的定义，可判定其为插值型。

判定方法二：代数精度至少为**n=1**

当f(x)=1时，$\int_0^3 1dx = 3$　$\frac{3}{2}[1+1]=3$

当f(x)=x时，$\int_0^3 xdx = \frac{9}{2}$　$\frac{3}{2}[1+2]=\frac{9}{2}$

当f(x)=x^2时，$\int_0^3 x^2dx = 9$　$\frac{3}{2}[1^2+2^2]=\frac{15}{2}$

该公式为插值型，其代数精度1次

19

Chapter 4 常微分方程数值解法

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$a = x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n = b$

➢求y=y(x) $\xrightarrow{\text{离散化}}$ 求$y(x_n)$ $\xrightarrow{\text{递推公式}}$ 求y_n

$x_n=x_0+nh$

- 如何建立递推公式
  - 差商法/ Taylor公式法
  - 数值积分法
  - Runge-Kutta法
- **p**阶精度：局部截断误差为$O(h^{p+1})$

局部截断误差的定义与计算方法，如二阶公式、隐式公式。

20

基本公式

HUST

- **Euler公式** $y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$
- 隐式**Euler**公式 $y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$
- 梯形公式 $y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$
- 改进**Euler**公式
$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}k_1+\frac{1}{2}k_2 \\ k_1=hf(x_n,y_n) \\ k_2=hf(x_n+h,y_n+k_1) \end{cases}$$
- 经典四阶**Runge-Kutta**公式

21

收敛性与稳定性

HUST

- 单步法的收敛性及其判定定理：整体截断误差

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ n\to\infty}}(y(x_n)-y_n)=0 \quad (x_n=x_0+nh\text{为固定值})$$

- 判定：显式单步法$y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,h)$ 有**p**阶精度,且（1）$y_0=y(x_0)$；（2）$\varphi(x,y,h)$为关于**y**满足**Li-**条件，则其整体截断误差为：$y(x_n)-y_n=O(h^p)$，显然是收敛的**.**
- 稳定性：考虑模型方程$y'=\lambda y$，$(\lambda<0)$

$$|\delta_{n+1}|\le|\delta_n|$$ 扰动量不增长，确定**h**的取值条件

22

例：证明隐式Euler法的精度为一阶 $y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$

证：令$y_n=y(x_n)$, 由Talor公式有

$$\because y(x_{n+1})=y(x_n+h)=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{y''(\xi)}{2!}h^2$$

$$\therefore y(x_{n+1})==y_n+hy'(x_n)+O(h^2) \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} y_{n+1}&=y_n+hf(x_{n+1},y(x_{n+1})+y_{n+1}-y(x_{n+1})) \\ &=y_n+h[f(x_{n+1},y(x_{n+1}))+f_y(x_{n+1},\eta)(y_{n+1}-y(x_{n+1}))] \\ &=y_n+hy'(x_{n+1})+(y_{n+1}-y(x_{n+1}))hf_y \\ &=y_n+h[y'(x_n)+O(h)]+(y_{n+1}-y(x_{n+1}))hf_y \\ &=y_n+hy'(x_n)+O(h^2)+(y_{n+1}-y(x_{n+1}))hf_y \qquad (2) \end{aligned}$$

由（1）-（2）得

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^2)-(y(x_{n+1})-y_{n+1})hf_y \Rightarrow y(x_{n+1})-y_{n+1}=O(h^2)$$

23

Chapter 5 方程求根

$f(x)=0$ [a，b]为有根区间

- 二分法 $|x^*-x_k|\le \frac{b-a}{2^{k+1}}$
- 不动点迭代法 $f(x)=0 \xleftrightarrow{\text{等价变换}} x=g(x)$

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{k+1}=g(x_k) \quad k=0,1,2,\ldots \end{cases}$$

- 停机准则 实用方法：$|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon$
- 大范围收敛性及局部收敛性的概念及其判定

  设g(x)在x=g(x) 的根x^*邻近有连续的一阶导数，且$|g'(x^*)|<1$，则迭代过程$x_{k+1}=g(x_k)$具有局部收敛性。
- 收敛速度及其判定

24

Newton迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

- 一般（求非重根）是平方收敛的
- 可应用于求根 $\sqrt[n]{c} = ?$

解$x^n-c=0$，$f(x)= x^n-c$，

即 $$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^n - c}{n x_k^{n-1}}$$

25

Chapter 6 线性方程组的数值解法（不考试）

- 向量与矩阵的范数，条件数与方程组的性态
- 迭代法及其收敛性判定，误差的先验与后验估计
- **Jacobi**迭代与 **Gauss-Seidel**迭代
- 列主元高斯消去法

26

答疑及考试相关问题 时间：1.11

（考试时请备简单计算器：$\ln x, e^x, 10^x$ ）地点：待定

考试题：7大题

（分析简答、计算、C/python编写程序 、证明）

Thanks.

Good Luck!