第二章 插值方法 /* Interpolation */

引言

表示两个变量x, y内在关系一般由函数式$y=f(x)$表达。
但在实际问题中，有两种情况：

1. 由实验观测而得到的一组离散数据(函数表)，虽然这种函数关系式$y=f(x)$存在且连续，但未知。

2. 函数解析表达式已知，但计算复杂，不便使用。通常也造函数表。如，$y=\sin(x)$, $y=\lg(x)$。

若要求不在表上点的函数值，怎么办？

引言

方法：根据所给的y=f(x)的函数表，

构造一个简单的连续函数g(x)近似代替f(x)。

Def: g(x)为逼近函数，f(x)为被逼近函数。

近似代替即逼近的方法有很多种，通常是：插值方法。

已知：f(x)的的函数表

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

求g(x)使 $g(x_i)=y_i$ ，i=0,1,2,3 …n.

Def: g(x)为f(x)的插值函数，f(x)为被插值函数。

引言

构造g(x)的方法还有：

一致逼近、最佳均方逼近和数据拟合。

简单函数g(x)指可用四则运算计算的函数：

如：有理函数(分式函数) 、多项式或分段多项式。

当g(x)为多项式时，该插值方法称为代数多项式插值，称插值函数g(x)为插值多项式。

本章主要介绍多项式插值的理论与方法。

随着神经计算的发展，基于神经网络的回归预测模型也是一个重要的数据建模方法。

插值区间

Problem I：已知$y=f(x)$的函数表

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

且$x_i(i=0,1,\ldots,n)$两两互异，$x_i\in[a,b]$，

求次数不超过n的多项式

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \quad (2.1)$$

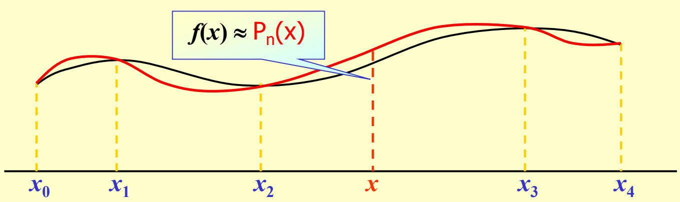
使得 $P_n(x_i)=y_i \quad i=0,1,\ldots,n \quad (2.2)$

插值条件

Def：n+1个互异点$x_0,x_1,\ldots,x_n$称为插值节点，其所在区间[a,b]为插值区间，(2.2)式为插值条件。

多项式插值问题的几何意义

多项式$P_n(x)$，其几何曲线过给定的$y=f(x)$的n+1个点$(x_i，y_i)$，$i=0,1,2,\ldots,n$.



插值多项式的唯一性

对于Prbloem I中的$P_n(x)$是否存在？解是否唯一？如何求？

显然，关键是求$P_n(x)$ 的系数a_0, a_1 ,…, a_n.

定理2.1 在n+1个互异的插值结点$x_0,x_1,\ldots,x_n$ 上满足插值条件(2.2)的次数不超过n的代数多项式$P_n(x)$存在且唯一。

分析：为求 $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \quad (2.1)$

主要考虑插值条件

$$P_n(x_i)=y_i \qquad i=0,1,\ldots,n \qquad (2.2)$$

定理2.1的证明

证明：由插值条件，有，

$$\left.\begin{aligned} P_n(x_0)&=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\ldots+a_nx_0^n=y_0\\ P_n(x_1)&=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\ldots+a_nx_1^n=y_1\\ &\vdots\\ P_n(x_n)&=a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\ldots+a_nx_n^n=y_n \end{aligned}\right\} \quad (2.3)$$

关于 $a_0,a_1,\ldots,a_n$的非齐次线性方程组

其系数矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n\\ & & \ldots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}=V_n(x_0,x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i-x_j)\neq 0$$

$$(\because i\neq j, x_i\neq x_j)$$

∴ 方程组(2.3)的解 $a_0,a_1,\ldots,a_n$存在且唯一，

∴ 插值多项式 存在且唯一。

例1 给定f(x)的函数表，求f(x)的次数不超过3的插值多项式。

x	-1	1	2	5
y	-7	7	4	35

解：设$P_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$，则

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ 7 \\ -4 \\ 35 \end{pmatrix}$$

解方程组得 $a_0=10, a_1=5, a_2=-10, a_3=2$，

即$P_3(x)=10+5x-10x^2+2x^3$，

n=20,在 10^9次/秒的计算机上用**传统**方法计算需几万年！此数值计算方法上不可行。

2.2 Lagrange 插值——线性插值

Problem 2.1 已知函数y=f(x)的函数表求次数不超过1的多项式$P_1(x)=a_0+a_1x$，满足插值条件 $P_1(x_0)=y_0$, $P_1(x_1)=y_1$.

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

分析：过点(x_0,y_0),(x_1,y_1)作直线$y=P_1(x)$ —线性插值。

解：由点斜式方程，

$$y-y_0=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

$$y=P_1(x)=y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1-\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_0$$

$$P_1(x)=\underbrace{\frac{x-x_1}{x_0-x_1}}_{l_0(x)}y_0+\underbrace{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}}_{l_1(x)}y_1=\sum_{i=0}^{1}l_i(x)y_i$$

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\ l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

称为线性插值基函数，而$P_1(x)$是它们的线性组合。

线性插值基函数的性质

$$P_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1 =\sum_{i=0}^{1} l_i(x)y_i$$

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \qquad \Rightarrow l_0(x)+l_1(x)=1$$

$$\begin{array}{l} l_0(x_0)=1,l_0(x_1)=0 \\ l_1(x_0)=0,l_1(x_1)=1 \end{array} \quad \Rightarrow l_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases} \quad i,j=0,1$$

δ_{ij} /* Kronecker Delta */

线性插值

例2.2 已知lg2.71=0.4330,lg2.72=0.4364.求y=lg2.718.

分析：对y=lgx ,给出了两点(2.71,0.4330)=(x_0,y_0),

(2.72,0.4364)=(x_1,y_1)

为求lg2.718构造简单的插值多项式作为lgx的近似。

解：已知(x_0,y_0)= (2.71,0.4330),(x_1,y_1)=(2.72,0.4364)
利用线性插值，则

$$P_1(x)=\frac{x-2.72}{2.71-2.72}*0.4330+\frac{x-2.71}{2.72-2.71}*0.4364$$

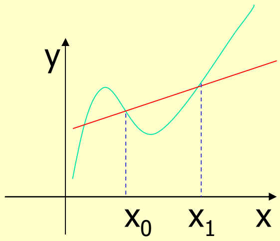
$$=0.34x-0.4884$$

$$\therefore \lg x\approx P_1(x) \Rightarrow \lg 2.718\approx P_1(2.718)=0.43572$$

2.2.2 抛物插值

线性插值:

用直线$y=P_1(x)$近似曲线$y=f(x)$



当插值区间较大或曲线在$[x_0,x_1]$凸凹变化大时，线性插值的误差很大。

为了减小误差，用简单的曲线(抛物线)去近似代替复杂曲线$y=f(x)$。二次多项式函数的曲线为抛物线，所以构造插值函数$P_2(x)$，即$n=2$。

抛物插值

Problem2.2 已知$y=f(x)$的函数表，x_0, x_1, x_2为互异节点，求一个次数不超过2的多项式

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

$P_2(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$：$P_2(x_0)=y_0$, $P_2(x_1)=y_1$, $P_2(x_2)=y_2$

几何意义：$P_2(x)$为过三点(x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2)的抛物线

方法：基函数法，构造基函数$l_0(x)$, $l_1(x)$, $l_2(x)$（三个二次式）

使$P_2(x)= y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)$满足插值条件。

$$l_0(x_0)=1,\ l_0(x_1)=0,\ l_0(x_2)=0$$
$$l_1(x_0)=0,\ l_1(x_1)=1,\ l_1(x_2)=0$$
$$l_2(x_0)=0,\ l_2(x_1)=0,\ l_2(x_2)=1$$
$$l_i(x_j)=\delta_{ij}\quad i,j=0,1,2$$

抛物插值

求二次多项式$l_0(x)$: $l_0(x_0)=1$ $l_0(x_1)=0$ $l_0(x_2)=0$

<=> $l_0(x) = C(x-x_1)(x-x_2)$ 只须求C=?

由$l_0(x_0)=1$ 得 $C(x_0-x_1)(x_0-x_2)=1$

$\therefore$ $C=1/(x_0-x_1)(x_0-x_2)$

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

同法求得: $l_1(x)$, $l_2(x)$, 即抛物插值的插值基函数如下:

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

抛物插值问题Problem 2.2的解:

$$P_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

2.2.3 Lagrange插值公式

Problem2.3 已知$y=f(x)$在两两互异节点$x_0,x_1,\ldots,x_n$的函数值$y_0,y_1,\ldots,y_n$, 求n次多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$

满足插值条件$P_n(x_j)=y_j$. $j=0,1,2,3,\ldots,n$

基函数法: 求n+1个n次多项式 $l_0(x),l_1(x),\ldots,l_n(x)$, 使

$$P_n(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\ldots+y_nl_n(x).$$

$P_n(x)$须满足插值条件 $P_n(x_j)=y_j$, $j=0,1,2,3,\ldots,n$

即$y_0l_0(x_j)+y_1l_1(x_j)+\ldots+y_jl_j(x_j)\ \ldots+y_nl_n(x_j) = y_j$

$$\Uparrow$$

$$\overbrace{l_0(x_j)=0,\ l_1(x_j)=0,\cdots,l_j(x_j)=1,\cdots,l_n(x_j)=0}$$

$$j=0,1,2,\cdots,n$$

$$\Leftrightarrow l_k(x_j)=\delta_{kj}=\begin{cases}1 & \kappa=j\\ 0 & \kappa\neq j\end{cases}\quad \kappa,j=0,1,2,\cdots,n$$

Lagrange插值公式

$l_k(x_0)=0,\dots,l_k(x_{k-1})=0,l_k(x_{k+1})=0,\dots,l_k(x_n)=0$

即$l_k(x)$有n个0点$x_0, x_1,\dots, x_{k-1}, x_{k+1},\dots, x_n$

$\therefore l_k(x)=C(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)$ 又$l_k(x_k)=1$

$\therefore C(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)=1$

$$\therefore C=\frac{1}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

与节点有关
而与f无关

$$\therefore l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}=\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

$$\therefore P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k l_k(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k\Big(\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}\Big)$$ Lagrange插值多项式

（当n=1，n=2时分别就是线形插值与抛物插值公式）

2.2.4 插值余项 /* Remainder */

函数y=f(x)与其 Lagrange插值多项式$P_n(x)$:

(1) $P_n(x_i)= f(x_i) =y_i,\quad i=0,1,2,\dots,n$

(2) 而对于插值区间[a,b]内插值节点$x_i(i=1,2,\dots,n)$以外的点x，一般$P_n(x)\neq f(x)$，存在误差。

Def: $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$为$P_n(x)$的截断误差或插值余项。

(1) $\Rightarrow R_n(x_i)=0,\ i=0,1,2,\dots,n$

(2) $\Rightarrow$ 若$\mathbf{x}\neq x_i$,可能 $R_n(x)\neq 0$,

利用Lagrange插值公式$P_n(x)$来计算，结果是否可靠，要看余项$R_n(x)$是否足够小。

$R_n(x)$=？

设节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，且 f 满足条件 $f \in C^n[a,b]$，$f^{(n+1)}$ 在 $[a, b]$ 内存在, 考察截断误差 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

Rolle's Theorem: 若 $\varphi(x)$ 充分光滑，$\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$，则存在 $\xi \in (x_0, x_1)$ 使得 $\varphi'(\xi) = 0$。

推广：若 $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0 \Rightarrow \xi_0 \in (x_0, x_1),\ \xi_1 \in (x_1, x_2)$

使得 $\varphi'(\xi_0) = \varphi'(\xi_1) = 0 \Rightarrow \xi \in (\xi_0, \xi_1)$ 使得 $\varphi''(\xi) = 0$

$$\varphi(x_0) = \cdots = \varphi(x_n) = 0$$

$\Rightarrow$ 存在 $\xi \in (a,b)$ 使得 $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$

设 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$，且 f 满足条件 $f \in C^n[a,b]$，$f^{(n+1)}$ 在 $[a, b]$ 内存在, 考察截断误差 $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$

$R_n(x)$ 至少有 $n+1$ 个根 $\Rightarrow R_n(x) = K(x)\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$

任意固定 $x \ne x_i$ $(i = 0, \ldots, n)$, 考察 $\varphi(t) = R_n(t) - K(x)\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$

$\varphi(t)$ 有 $n+2$ 个不同的根 $x_0, \ldots, x_n, x$ $\Rightarrow \varphi^{(n+1)}(\xi_x) = 0,\quad \xi_x \in (a, b)$

对 t 求导

$\Rightarrow R_n^{(n+1)}(\xi_x) - K(x)\ (n+1)! = 0$

$\Rightarrow f^{(n+1)}(\xi_x) - \cancel{P_n^{(n+1)}(\xi_x)} - K(x)(n+1)! = 0$

$\Rightarrow K(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

插值余项

定理1：设函数y=f(x)的n阶导数y=$f^{(n)}(x)$在[a,b]上连续，y=$f^{(n+1)}(x)$在(a,b)上存在；插值结点为$a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$，$P_n(x)$是f(x)的n次拉格朗日插值多项式；则对任意x∈[a,b]有：

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$$

其中ξ∈(a,b), ξ依赖于x， $\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots\ldots(x-x_n)$

☞ 通常不能确定 ξ，而是估计$|f^{(n+1)}(x)| \le M_{n+1}$, $\forall x \in (a,b)$

将 $\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}|x-x_i|$ 作为误差估计上限。

☞ 当 $f(x)$ 为任一个次数$\le n$ 的多项式时，$f^{(n+1)}(x) \equiv 0$，可知

$R_n(x) \equiv 0$，即插值多项式对于次数$\le n$ 的多项式是精确的。

当 $f(x) \equiv 1$，$P_n(x) = f(x) \equiv 1$，即 $l_0(x) + l_1(x) + \cdots + l_n(x) \equiv 1$

HW: 作业二 #1, 2

例2.3 已知y=lg(x)的函数表如右，求lg2.718并估计其误差.

x	2.71	2.72	2.73
y=lgx	0.4330	0.4346	0.4362

解：
$$P_2(x) = \frac{(x-2.72)(x-2.73)}{(2.71-2.72)(2.71-2.73)} * 0.4330 + \frac{(x-2.71)(x-2.73)}{(2.72-2.71)(2.72-2.73)} * 0.4346 + \frac{(x-2.71)(x-2.72)}{(2.73-2.71)(2.73-2.72)} * 0\cdot4362$$

$$= 13038x^2 - 7092.08x + 96459.032 \quad \therefore \lg 2.718 \approx P_2(2.718) = 0.48$$

$$\because R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \quad \xi \in [x_0, x_2]$$

$$\because f(x) = \lg x \Rightarrow f'''(x) = \frac{2}{x^3 \ln 10} \Rightarrow \max_{2.71 \le x \le 2.73} |f'''(x)| = 0.043642$$

$$|R_2(2.718)| \le \frac{0.043642}{6}|(2.718-2.71)(2.718-2.72)(2.718-2.73)| = 1.39654 \times 10^{-9}$$

Newton插值——引言

1.已知$y=f(x)$的$n+1$个互异节点$x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n$及其上的函数值$y_i=f(x_i),i=0,1,2,\ldots,n$,利用基函数法求出其上的Lagrange 插值多项式： $P_n(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\ldots+y_nl_n(x)$

其中基函数为：

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}, \quad i=0,1,2,\ldots,n$$

2.若$f(x)$有直到$n+1$阶导数，其插值余项为：

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k) \qquad \xi\in(a,b)$$

Lagrange 插值虽然易算，但若要增加一个节点时，全部基函数 $l_i(x)$ 都需重新计算。 ——不具有承袭性

Newton插值——具有承袭性

2.3.1 基函数

Problem 2.4 已知$y=f(x)$的$n+1$个互异节点$x_0, x_1, x_2,\ldots, x_n$及函数值$f(x_i)$,$i=0,1,2,\ldots,n$. 求作n次多项式$N_n(x)$:

$$N_n(x)=C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+C_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

且满足插值条件： $N_n(x_i)=f(x_i),\ i=0,1,2,\cdots,n$

$N_n(x)$是$1, (x-x_0),(x-x_0)(x-x_1),\ldots,(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$的线性组合，

递推定义为：

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_0(x)=1\\&\Phi_i(x)=(x-x_{i-1})\Phi_{i-1}(x)\\&\quad=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})\\&i=1,2,\ldots,n\end{aligned}\right\}\quad(2.9)$$

定义2.1 由(2.9)定义的$n+1$个多项式称为Newton插值以$x_0, x_1, \ldots, x_n$为节点的基函数。

$$N_n(x)=C_0\Phi_0(x)+C_1\Phi_1(x)+\ldots+C_n\Phi_n(x)$$

求系数

$$N_n(x)=C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+C_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

已知基函数，求$N_n(x)$=>求系数$C_0,C_1,C_2,\ldots,C_n$

$$\Uparrow$$

$$N_n(x_i)=f(x_i)\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

在公式中，取$x=x_0$有：$N_n(x_0)=C_0$ 而$N_n(x_0)=f(x_0)$ $\quad\therefore C_0=f(x_0)$

在公式中，取$x=x_1$有：$N_n(x_1)=C_0+C_1(x_1-x_0)$，而$N_n(x_1)=f(x_1)$

$$\therefore C_1=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

同理，有：$C_2=[\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}]/(x_2-x_0)$

为了易于计算$C_0,C_1,C_2,\ldots,C_n$引进差商。

2.3.2 差商 /* divided difference */

设函数f(x)在n+1个相异节点 $x_0,x_1,\ldots,x_n$ 上的函数值分别为

$$f(x_0),f(x_1),\ldots,f(x_n)$$

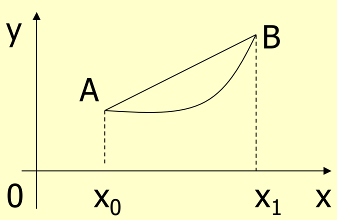
1.一阶差商：称 $\dfrac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1}$为f(x)关于节点 x_0,x_1的一阶差商，

记为 $f[x_0,x_1]$. /* the 1st divided difference*/

(1) 差商的几何意义:

$f[x_0,x_1]$为弦AB的斜率.

(2) 显然，$f[x_0,x_1]=f[x_1,x_0]$



2.3.2 差商 /* divided difference */

设函数f(x)在n+1个相异节点 $x_0,x_1,\ldots,x_n$ 上的函数值分别为

$$f(x_0),f(x_1),\ldots,f(x_n)$$

2.二阶差商: $\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2}=f[x_0,x_1,x_2]$

称为f(x)关于节点 x_0,x_1,x_2 的二阶差商。

3. k阶差商: f(x)在互异节点$x_0, x_1,\ldots, x_k$处的k阶差商为

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k]=\{f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]-f[x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k]\}/(x_0-x_k)$$

一般记忆为: f[A,B,C]={f[A,B]-f[B,C]}/(A-C)

差商表

计算出差商可列表如下:

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	…
x_0	$f(x_0)$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$	…
x_1	$f(x_1)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$		…
x_2	$f(x_2)$	$f[x_2,x_3]$			…
x_3	$f(x_3)$				…
…	…	…	…	…	…

计算差商

例：已知 $f(x)=\sqrt{x}$ 在节点 x=1,4,9的函数值为：

x	1	4	9
f(x)	1	2	3

试构造差商表。

解：

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商
1	1	$f[x_0,x_1]=(1-2)/(1-4)$ $=1/3$	$f[x_0,x_1,x_2]=(1/3-1/5)/(1-9)$ $=-1/60$
4	2	$f[x_1,x_2]=(2-3)/(4-9)$ $=1/5$	
9	3		

Review

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

Problem I：已知y=f(x)的函数表
且$x_i(i=0,1,\ldots,n)$两两互异，$x_i\in[a,b]$，
求次数不超过n的多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$，
使得 $P_n(x_i)=y_i$，$i=0,1,\ldots,n$.

定理2.1　$P_n(x)$存在且唯一。

Lagrange插值公式：$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}=\prod_{j=0,j\neq k}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

$$R_n(x)=f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n);\quad \xi_x\in(a,b)$$

Newton插值公式：

$$N_n(x)=C_0+C_1(x-x_0)+C_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+C_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$N_n(x_i)=f(x_i)=Y_i,\quad i=0,1,2,\cdots,n \Rightarrow C_0,C_1,\cdots,C_n$$

2.3.3 差商性质

1. n阶差商可以表示成n+1个函数值的线性组合,即

$$f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}$$

例:

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

2. (对称性): 差商与节点的顺序无关, 例

$$f[x_0,x_1,x_2]=f[x_1,x_0,x_2]=\cdots=f[x_0,x_2,x_1]$$

3. 若f(x)是x的n次多项式, 则一阶差商$f[x,x_0]$是x的n-1次多项式,

二阶差商$f[x, x_0, x_1]$是x的n-2次多项式;

一般, 函数f(x)的k阶差商$f[x,x_0,\ldots, x_{k-1}]$是x的n-k($k\le n$)次多项式,

而$k>n$时, k阶差商为零。 (自学本性质的证明)

2.3.4 Newton插值公式

$x_0, x_1,\ldots, x_n$为[a, b]中互异节点, 且x是[a, b]中一点

$$f[x,x_0]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \Rightarrow f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0), \quad (1式)$$

$$f[x,x_0,x_1]=\frac{f[x,x_0]-f[x_0,x_1]}{x-x_1}$$

$$\Rightarrow \quad f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1), \quad (2式)$$

$$f[x,x_0,\ldots,x_n]=\frac{f[x,x_0,\ldots,x_{n-1}]-f[x_0,x_1,\ldots,x_n]}{x-x_n}$$

$$\Rightarrow f[x,x_0,\ldots,x_{n-1}]=f[x_0,x_1,\ldots,x_n]+f[x,x_0,\ldots,x_n](x-x_n), \quad (n+1式)$$

牛顿插值 /* Newton's Interpolation */

$$N_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\dots+c_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})$$

$$\begin{cases} f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x,x_0] & \cdots\cdots\cdots \ 1 \\ f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x,x_0,x_1] & \cdots\cdots\cdots \ 2 \\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots & \\ f[x,x_0,\dots,x_{n-1}]=f[x_0,\dots,x_n]+(x-x_n)f[x,x_0,\dots,x_n] & \cdots \ n+1 \end{cases}$$

$1 + (x-x_0)\times 2 \ + \dots\dots + (x-x_0)\dots(x-x_{n-1})\times n+1$

$$\Rightarrow f(x)=\underbrace{f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\dots+f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1})}_{N_n(x)}+\underbrace{f[x,x_0,\dots,x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1})(x-x_n)}_{R_n(x)}$$

$$c_i = f[x_0,\dots,x_i]$$

HUST

Newton插值公式

$f(x)=N_n(x)+R_n(x)$： $R_n(x)=f[x,x_0,\dots,x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1})(x-x_n)$

由于$R_n(x_i)=0$ $\quad i=0,1,2,\dots,n$

$\therefore N_n(x_i)=f(x_i)$ $\quad i=0,1,2,\dots,n$

从而$N_n(x)$为满足插值条件的次数不超过n的多项式

$\therefore N_n(x)$即为Problem2.4的解，

定义：$N_n(x)$为$y=f(x)$在节点$x_0,x_1,\dots,x_n$上的

n阶Newton插值公式；

$$R_n(x)=f(x)-N_n(x)=f[x_0,x_1,\dots,x_n,x](x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

为其插值余项。

HUST

Newton插值公式

当 n=1 时：

$$N_1(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)$$

$$R_1(x)=f[x,x_0,x_1](x-x_0)(x-x_1)$$

当 n=2 时：

$$N_2(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$N_2(x)=N_1(x)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$R_2(x)=f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

HUST

例：已知f(x)在六个点的函数值如下表，运用牛顿插值多项式求f(0.596) 的近似值，并估计其误差。

x_k	$f(x_k)$	1阶差商	2阶差商	3阶差商	4阶差商	5阶差商	$x-x_k$
0.4	0.41075	1.1160	0.2800	0.1973	0.0334	-1.1	0.196
0.55	0.57815	1.1860	0.3588	0.2137	-0.1761		0.046
0.65	0.69675	1.2757	0.4336	0.2056			-0.054
0.80	0.88811	1.3841	0.4225				-0.204
0.90	1.02652	1.2979					-0.454
0.596	0.63195						

$$N_4(x)=0.41075+1.11600(x-0.4)+0.28000(x-0.4)(x-0.55)$$

$$+0.19733(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)+0.0334(x-0.4)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.80)$$

$$f(0.596)\approx N_4(0.596)=0.63195$$

$$|R_4(0.596)|=|f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,0.596](0.596-x_0)\cdots(0.596-x_4)|$$

$$\approx 0.33215\times 10^{-4}<0.5\times 10^{-4}$$

HUST

Newton插值公式

注意：1.在给定节点$x_0,x_1,\ldots,x_n$上的Newton插值公式$N_n(x)$与Lagrange插值公式$P_n(x)$都满足插值条件：

$$N_n(x_i)=P_n(x_i)=f(x_i) \qquad i=0,1,2,\ldots,n$$

由插值多项式的唯一性　　$P_n(x)=N_n(x)$

2.由1知$P_n(x)$与$N_n(x)$有相同的余项：

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\ !}\omega(x)$$

$$=f(x)-N_n(x)=f[x,x_0,\ \ldots\ ,x_n]\omega(x)$$

HW:
作业二 #3

定理2.3　在节点$x_0,x_1,\ldots,x_n$所限定的范围中：$[\min\limits_{0\le i\le n} x_i, \max\limits_{0\le i\le n} x_i]$内存在一点$\xi$，使得 $f[x_0,x_1,\ldots,x_n]=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

2.5 分段低次插值 /* piecewise polynomial approximation */

多项式插值

对于$y=f(x)$　　$a\le x\le b$

给定插值结点$x_0,x_1,\ldots,x_n$，构造插值多项式$P_n(x)$，为使$P_n(x)$更好地逼近$f(x)$，一般使：

节点间距较小**=>**节点多(n较大) **=>**插值多项式$P_n(x)$的次数很高

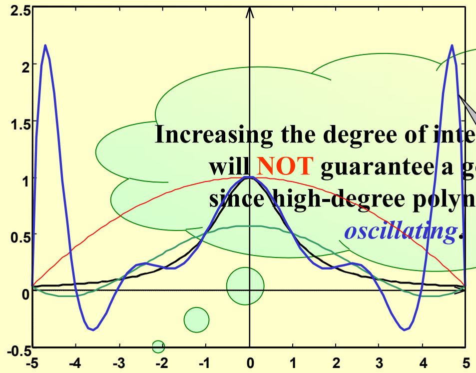
(高次插值)

高次插值使$P_n(x)$在较多点上与$f(x)$相等,但在插值节点外,

误差如何？是否插值多项式$P_n(x)$的次数越高越好？

2.5 分段低次插值 /* piecewise polynomial approximation */

例：在$[-5, 5]$上考察 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 的$P_n(x)$。取 $x_i=-5+\frac{10}{n}i \quad (i=0,\dots,n)$



$P_n(x) \not\to f(x)$

Increasing the degree of interpolating polynomial will NOT guarantee a good result, since high-degree polynomials are *oscillating*.

n 越大，端点附近抖动越大，称为 **Runge 现象**

分段低次插值

分段插值

思想： 将一个区间分成若干小区间,在每个小区间上进行低次插值,将产生的多项式装配成整个大区间上的分段k次式.

其步骤为:

(1) 对[a,b]作分划Φ :$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$

(2) 在每个小区间$[x_i,x_{i+1}]$上构造低次插值多项式$P_i(x)$

(3) 将$P_i(x)$,i=0,1,…n-1拼接为[a,b]上的分段多项式g(x)作为f(x)的插值函数， 即 $g(x)=P_i(x) \quad x\in[x_i,x_{i+1}]$

一般 $P_i(x)$都为k次式,此时的g(x)记为$S_k(x)$，称其为分段k次式.

(即在分划Φ的每个小区间$[x_i,x_{i+1}]$上 $S_k(x)$都为k次式).

分段线性插值——用折线逼近曲线f(x)

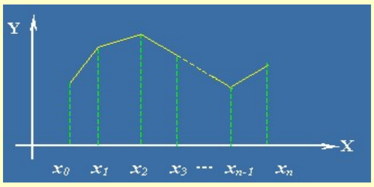
Problem2.6 对$y=f(x)$，$x\in[a,b]$定义区间有分划

$\Phi: a=x_0<x_1<x_2<\ldots\ldots x_n=b$，且已知$y_i=f(x_i)$ $i=0,1,\ldots,n$，

求具有分划**Φ**的分段一次式$S_1(x)$,使： $S_1(x_i)= y_i$,$i=0,1,2,\ldots,n$.

只须求$S_1(x)$在小区间$[x_i,x_{i+1}]$上的表达式，拼装即成。

$$f(x)\approx S_1(x)=y_i\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}+y_{i+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$



$$|f(x)-S_1(x)|=\left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|,\quad \xi\in(x_i,x_{i+1})$$

$$x\in[x_i,x_{i+1}]$$

分段线性插值余项

$$|f(x)-S_1(x)|=\left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_i)(x-x_{i+1})\right|,\quad \xi\in(x_i,x_{i+1})$$

$$x\in[x_i,x_{i+1}]$$

$$\text{又 } |f''(\xi)|\le\max_{x\in[x_i,x_{i+1}]}|f''(x)|\le\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|=M,$$

$$\max_{x\in[x_i,x_{i+1}]}|(x-x_i)(x-x_{i+1})|=\frac{1}{4}(x_{i+1}-x_i)^2=\frac{1}{4}h_i^2\le\frac{1}{4}(\max_{i=0}^{n-1}h_i)^2=\frac{1}{4}h^2$$

定理 设$f(x)\in c^2[a,b]$,$a<x_0<x_1<\ldots<x_n=b$,且$f(x_i)$, $i=0,1,\ldots,n$, 已知, $S_1(x)$为问题2.5的解,则当 $x\in[a,b]$ 时

$$|f(x)-S_1(x)|\le Mh^2/8$$

其中$M=\max|f''(x)|$ ，$x\in[a,b]$ ， $h=\max\{h_i, i=0, \ldots n-1\}$

因而$S_1(x)$在$[a,b]$上一直收敛到$f(x)$。

练习

例 要构造对数表$\log_{10}x$，$10 \le X < 100$，怎样选步长h才能使分段一次插值具有六位有效数字？

解: ∵ $1 \leqslant \log_{10}x < 2$，要使结果具有六位有效数字，

∴ 误差限$\varepsilon = 0.5 \times 10^{-5}$ ，

$$\because \quad (\log_{10} x)'' = -\frac{1}{x^2 \ln 10} \quad \therefore M = \max_{10 \le x \le 100} |(\log_{10} x)''| = \frac{1}{10^2 \ln 10}$$

$$\therefore |\log_{10} x - S_1(x)| \le \frac{1}{8} M h^2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10^2 \ln 10} h^2 \le \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

$$\Rightarrow h \le 0.959705 \times 10^{-1}$$

$$\therefore \quad h = 0.01$$

HW:
作业二 #4